А. Н. БАРСУКОВ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

УЧПЕДГИЗ
Москва 1948

А. Н. БАРСУКОВ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Издание 2-е

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1948

Редактор *В. А. Игнатьев.* Техн. редактор *Н. В. Сахарова.*

Подписано к печати 8/IV-1948 г. А 01986. Печатных листов 17,25.
Уч.-изд. л. 17. Заказ 1245

Набрано в тип. 118, отпечатано в тип М. 111 и 123

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является итогом 35-летней педагогической деятельности автора и специальной экспериментально-исследовательской работы, проведённой им в школах Москвы и в Яснополянской школе им. Л. Н. Толстого (совместно с преподавательницей этой школы М. И. Змиевой). Основная цель книги оказать методическую помощь малоопытному педагогу в преподавании одного из наиболее важных и одновременно наиболее трудных разделов элементарной алгебры.

Книга предназначена для массового, в первую очередь провинциального, преподавателя, и этим объясняются некоторые её особенности. В частности, этим объясняется большое количество цитат, приводимых в настоящей книге. Совершенно необходимо, чтобы учитель был знаком с учебной и учебно-методической литературой как до-, так и послереволюционного периода (а также с заграничной). Но для преподавателя провинции это ознакомление затруднено. Приводимые здесь цитаты из многих учебников, методических руководств и пр. имеют целью до некоторой степени восполнить этот пробел в методической подготовке учителя, хотя бы в отношении излагаемой здесь темы. Несомненно, что ознакомление с различными методами, стилем изложения, с эволюцией методических взглядов на преподавание интересующей здесь нас темы расширит кругозор учителя, выведет его за рамки принятого в школе в настоящее время единственного учебника, „в плену“

у которого находятся многие и многие преподаватели. А это ознакомление не может не отразиться положительно и на качестве преподавания.

Книга является опытом более или менее полного изложения методики преподавания уравнений 1-й степени в средней школе. Всякие поправки, дополнения и замечания к ней будут с благодарностью приняты автором[1]).

А. Барсуков.

---

[1]) Все замечания можно посылать по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Министерство просвещения РСФСР, Учпедгиз, Редакция математики, или на имя автора: Москва, 48. Усачёвка, д. 29, кв. 474. А. Н. Барсукову.

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Уравнения в школьном курсе алгебры.

Удельный вес той или иной темы школьного курса в значительной мере определяется, во-первых, количеством часов, отводимых на её изучение школьной программой, во-вторых, тем, какую долю текста занимает данная тема в школьных руководствах.

Анализ школьной программы по алгебре с этой точки зрения даёт следующую картину.

Основное содержание курса составляют разделы:

1) Тождественные преобразования.
2) Расширение понятия о числе.
3) Уравнения (и неравенства).
4) Начальные сведения о функциях и их графиках.

Кроме того, школьный курс включает ещё несколько изолированных тем со специальным содержанием, как-то: прогрессии, комбинаторика, бином Ньютона и пр.

Число часов, отводимых программой Министерства просвещения РСФСР на изучение каждого из этих разделов, может быть представлено примерно следующей таблицей:

1. Тождественные преобразования	110	часов
2. Расширение понятия о числе	60	,,
3. Уравнения	150	,,
4. Остальные темы	70	,,

Незначительные вариации, которым подвергалось это распределение, нисколько не меняют общей картины.

А картина эта с несомненностью показывает, что уравнения занимают основное место в школьном курсе алгебры, обладают наибольшим удельным весом по сравнению со всеми остальными темами. Фактически же в школьной практике удельный вес уравнений ещё значительно выше. Дело в том, что программы последних лет требуют сообщения учащимся первоначальных сведений об уравнении и решении простейших уравнений уже в самом начале курса алгебры. Объяснительная же записка к программам уточняет этот вопрос в сторону дальнейшего его расширения.

„Чтобы показать ученикам VI класса конкретное применение выполняемых ими тождественных преобразований, надо решать простейшие уравнения 1-й степени с одним неизвестным исключительно на основании известных ученикам свойств арифметических действий".

И далее:

„Полезно вопрос о решении простейших уравнений и их составлении по условиям задачи проходить в течение всего учебного года и в VII и в VIII классах, независимо от изучаемого раздела".

Наконец, в X классе на выпускных испытаниях в качестве письменной работы по алгебре обычно даётся задача на исследование решения уравнения 1-й или 2-й степени. Учитывая это, преподаватели проводят практику решения задач методом уравнений в течение всего 10-го года обучения и уделяют им почти полностью часы, отведённые планом на повторение курса. В итоге всего этого, по отзыву ряда учителей, уравнения занимают не менее половины всего времени, отведённого на алгебру.

Обращаясь к школьным руководствам по элементарной алгебре, мы можем констатировать, что и в них уравнениям отводится больше места, чем какой бы то ни было теме.

Так, в наиболее употребительных учебниках по алгебре в дореволюционной школе материал распределялся следующим образом[1]):

Автор	Год издания	Всего страниц	Тождественные преобразования	Учение о числе	Уравнения	Прочие темы
Киселёв	1917	410	110	65	140	95
Давидов	1914	420	120	45	170	85
Малинин и Буренин	1913	415	100	70	135	110
Рашевский	1912	300	65	50	115	70

[1]) Подсчёт страниц в поименованных учебниках произведён с возможной точностью, но всё же является приблизительным. Дело в том, что некоторые главы (например „Степени и корни") трудно

Таким образом, мы видим, что и в программе, и в учебнике, и в школьной практике уравнениям уделяется наибольшее место и внимание. Такое положение нельзя не признать совершенно правильным как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Ещё недавно алгебра как наука определялась именно как учение об уравнениях (точнее, о целых рациональных функциях; см., например, В. Ф. Каган „Что такое алгебра“, Вилейтнер „Как рождалась современная математика“, статью О. Ю. Шмидта „Алгебра“ в Большой Советской Энциклопедии и пр.).

Правда, с современной теоретико-множественной точки зрения это определение является уже значительно устаревшим, слишком узким (см. статьи проф. П. С. Александрова и А. Курош в книге „Сборник статей по философии математики“). Но, по крайней мере, в вузовских курсах высшей алгебры уравнения и теперь составляют основное их содержание.

Таким образом, уравнения являются именно той частью школьного курса, которая представляет алгебру как науку. Совершенно естественно поэтому, что в курсе алгебры они и должны занимать центральное место.

Не в меньшей, если не в большей, степени уравнения выдвигаются на первый план и соображениями практического порядка.

Уже в самой школе знание уравнений требуется при изучении физики и химии, не говоря о геометрии и тригонометрии. Включение в программу VII класса первоначальных сведений о решении квадратных уравнений вызывается исключительно потребностями физики. К уравнениям 1-й степени приводится решение большинства задач по физике и химии в VI и VII классах. Свободное оперирование с многочисленными физическими и химическими формулами может быть достигнуто лишь при условии достаточного навыка в решении уравнений, в умении определять неизвестную величину, когда она выражена в неявной форме. Именно поэтому в заграничных учебниках в упражнениях на решение уравнений большое место уделяется формулам из геометрии, физики и др.

поддаются такому подсчёту, так как заключают в себе материал из различных данных здесь рубрик (возведение в степень и извлечение корня из одночленов, понятие об иррациональных числах, действия с радикалами, извлечение корня из чисел, иррациональные уравнения). В целях наглядности числа округлены до ближайшего числа, кратного 5.

Так, в числе упражнений на решение уравнений 1-й степени даются, например, такие:

1. $S = \frac{1}{2} n (a + l)$. Определить: 1) n; 2) a; 3) l.

2. $C = \frac{ne}{ns + k}$. Определить: 1) e; 2) n; 3) k; 4) s.

3. $S = vt + \frac{1}{2} gt^2$. Определить: 1) v; 2) g.

4. $C = \frac{5}{9} (F - 32)$. Выразить F в зависимости от C и пр.[1]).

Читатель без труда узнает в этих выражениях формулы: площади трапеции; силы тока батареи из n элементов; пути при равномерно-ускоренном движении; перевода показаний термометра со шкалы Фаренгейта на шкалу Цельсия.

Понятно, что учащиеся на этом этапе совсем ещё не обладают знаниями соответствующих разделов физики, и эти формулы даются просто в порядке упражнений на решение уравнений без каких-либо пояснений или с кратким указанием, что такая формула имеется в физике. Польза таких упражнений несомненна.

Применение уравнений неизмеримо вырастает в высшей школе. Они становятся постоянным и незаменимым инструментом как для теоретических выводов, так и для решения задач по физике, механике, астрономии, геодезии и т. д. Не менее широкое применение находят уравнения почти во всех прикладных, особенно технических дисциплинах.

Вот это двойное — теоретическое и практическое — значение уравнений и выдвигает их на первое место в курсе элементарной алгебры. Более того: существует определённое течение среди педагогов-математиков, которые считают, что уравнения должны быть не только главным, но по существу и единственным разделом школьного алгебраического курса. С точки зрения сторонников этого течения уравнения должны быть положены в основу всего курса, пронизывать его с начала и до конца. Все остальные разделы должны играть подчинённую роль по отношению к этой основной теме. Представителем этого течения является, например, американский педагог-методист Дж. Юнг.

„Целью школьного курса алгебры является уравнение. При помощи уравнений решаются все те задачи, которые представляют ценность и интерес сами по себе (? — *А. Б.*), независимо от того,

---

[1]) Wentworth and Smith, Academic Algebra.

относятся ли они к области алгебры, геометрии, естествознания или повседневной жизни. Обозначения и действия над символами имеют в сущности в виду решение уравнений. И нужно очень немного знания алгебраических преобразований для решения простейших уравнений, причём уравнения эти могут иметь интересные приложения. Поэтому следует признать желательным, чтобы с самого начала через весь курс проходило решение уравнений, включая сюда и приложения[1]) (т. е. задачи на составление уравнений. — *А. Б.*)".

Тождественные преобразования того или иного вида следует вводить лишь тогда, когда они становятся необходимыми для решения уравнений:

„Центральным вопросом в алгебре является, без сомнения, вопрос об уравнениях и их приложениях. Именно уравнения облекают в плоть и кровь сухие кости остова алгебраической рутины, и последнюю совсем не следует проводить сразу и подряд, но по мере того, как это понадобится при решении уравнений. Те процессы, те случаи преобразований, те сложные примеры, которые не требуются в данный момент при решении уравнений и задач, но в то же время понадобятся при последующих занятиях, могут быть отложены как раз до этого более позднего периода классной работы"[2]).

Самый объём навыков в тождественных преобразованиях, степень трудности предлагаемых ученикам упражнений опять-таки целиком и полностью лимитируются потребностями уравнений:

„Преобразования в алгебре не могут служить самоцелью. Они являются лишь орудиями, необходимыми при выполнении работы, выполняемой в алгебре, имеющей назначением решение уравнений. Задачи же для решения могут быть найдены как в самой математике, так и в области естествознания, технических приложений или в повседневной жизни. Каждый, кто исключит из своего курса алгебры все преобразования, которые не понадобятся ему в подобных задачах, никогда не ощутит какой-либо потери"[3]).

Введение чисел новой природы — отрицательных, иррациональных, мнимых, — согласно этой точке зрения, должно также целиком и полностью базироваться на уравнениях, вытекать из требования разрешимости уравнений 1-й и 2-й степени при любых значениях коэфициентов.

Несомненно, такое построение школьного курса алгебры имеет в себе много заманчивого. Наиболее важный раздел его — уравнения — действительно выдвигается на первый план в течение всего курса. Материал курса приобретает строй-

---

[1]) Дж. Юнг, Как преподавать математику, гл. II, стр. 346.
[2]) Там же, стр. 344.
[3]) Там же, стр. 346.

ность, единство. Тождественные преобразования, действия с отрицательными, иррациональными и т. д. числами находят в уравнениях своё применение и, следовательно, основание для их изучения.

И всё же такое построение курса, при котором доминирующая роль уравнений достигается путём отрицания самостоятельного значения за всеми остальными разделами, путём их снижения, мы бы считали неправильным.

Прежде всего тождественные преобразования и в особенности действия с отрицательными и иррациональными числами имеют и сами по себе большое значение как в дальнейшем обучении, так и в практических приложениях. Поэтому сведение этих разделов к роли придатка к уравнениям совсем не соответствует их удельному весу в общем образовании.

В связи с этим и степень трудности упражнений на тождественные преобразования не может лимитироваться потребностями уравнений, да ещё решаемых лишь в средней школе. Потребности высшей математики и её приложений в этом отношении выходят иногда довольно далеко за границы, выдвигаемые уравнениями в средней школе. Да и в самой средней школе прочность навыка, уверенность при производстве преобразований может быть достигнута лишь при условии достаточной практики в упражнениях несколько повышенной трудности (но, конечно, в определённых и довольно узких границах).

Наконец, нельзя принять и предложение Дж. Юнга „исключить все преобразования, которые не понадобятся в задачах" (на составление уравнений). Очень многое и нужное для других целей пришлось бы тогда исключить из школьного курса, например действия с комплексными числами и т. п.[1]).

§ 2. Недочёты в знаниях учащихся и причины их.

После того, что было сказано выше о теоретической и практической ценности уравнений, о внимании и времени, уделяемых этой теме учителями в своём преподавании, мы вправе ожидать и соответствующих результатов в отношении качества усвоения этой темы учащимися. Однако действительность далеко не оправдывает этих ожиданий. Результаты

[1]) Другой вопрос — место ли вообще комплексным числам в курсе элементарной алгебры. Мы считаем этот вопрос заслуживающим серьёзного обсуждения.

выпускных испытаний в VII и X классах, а также ежегодные сводки Министерства просвещения по итогам учебного года неизменно говорят о том, что уравнения являются наиболее слабым местом в знаниях учащихся. При этом, в первую очередь, вернее, почти исключительно, имеются в виду уравнения 1-й степени с одним неизвестным, т. е. тот фундамент, который лежит в основе всего дальнейшего изучения уравнений. Чрезвычайно характерно, что именно в этой достаточно пессимистической оценке знаний учащимися уравнений сходятся как инспекторы отделов народного образования, так и методисты и сами педагоги. Все методические статьи последних лет, посвящённые уравнениям, с поразительным единодушием начинаются с констатации двух фактов: 1) уравнения являются наиболее трудным разделом школьной алгебры; 2) этот раздел наиболее слабо усваивается учащимися.

Эти же два положения можно найти в методической литературе и дореволюционного периода и в заграничной.

Какие недочёты в знаниях учащихся можно считать наиболее типичными?

В области теории учащиеся, как правило, слабо усваивают теоремы об эквивалентности уравнений. Правильнее будет сказать, что они не понимают самого существа этих теорем. Плохо отличая уравнения от числовых тождеств, они считают совершенно очевидными утверждения, изложенные в этих теоремах („прибавив поровну к равным величинам, получим, несомненно, и равные результаты“). А поэтому и всё доказательство этих теорем становится для них надуманным, искусственным и трудно запоминаемым.

В решении уравнений учащиеся допускают два рода ошибок. Одни происходят от нетвёрдых навыков в тождественных преобразованиях (ошибки в знаках при раскрытии скобок, при действиях с дробными членами и т. п.). Другого рода ошибки типичны именно для уравнений. Они сводятся в основном к неправильному применению теорем об эквивалентности (ошибки в знаках при перенесении членов уравнения из одной части в другую, отбрасывание знаменателя в одной части уравнения и т. п.).

Но наиболее слабым местом в знаниях учащихся является, по общему признанию, решение задач методом уравнений. Здесь учащиеся плохо справляются с двумя основными моментами в процессе решения задач: 1) составлением алгебраических выражений на основе зависимостей, данных в задаче; 2) правильной постановкой знака равенства между двумя выражениями, т. е. получением уравнения.

В дальнейшем, в соответствующих главах, мы подробнее остановимся на всех перечисленных дефектах в знаниях учащихся. Здесь же мы хотим лишь поставить вопрос: где кроются причины этих дефектов?

Эти причины можно искать в трёх направлениях. Источником их могут быть; 1) программа; 2) учебник; 3) преподаватель. Мы полагаем, что по отношению к уравнениям имеет место и первое, и второе, и третье.

1. Программа, как мы видели, в общем отводит на уравнения достаточное количество часов. Но именно по отношению к уравнениям 1-й степени не выдержана пропорция, соответствующая степени важности их как основного, первоначального фундамента всего раздела уравнений. Недостаточность времени, отводимого программой на уравнения 1-й степени, является первой причиной нетвёрдого знания их.

2. Изложение уравнений 1-й степени в учебниках страдает двумя существенными недостатками. Во-первых, теоремы об эквивалентности даются в самом начале раздела, при первом и ещё совершенно недостаточном ознакомлении учащихся с уравнениями и их отличительными особенностями. Кроме того, теоремы эти излагаются сразу в их наиболее общей, абстрактной форме, а это и влечёт за собой то недопонимание ни смысла этих теорем, ни процесса их доказательства, о чём мы уже говорили выше. Во-вторых, совершенно неудовлетворительно излагается наиболее трудный раздел — составление уравнений по условиям задачи. По большей части здесь даётся некоторое „общее правило“ для составления уравнения, правило, которое до сих пор нигде и никогда не оказывало никакой помощи учащемуся (см. об этом главу V). Там же, где учебник старается на ряде примерных задач показать, как надо составлять уравнения по условиям задачи, там, как правило, самый подбор задач неудовлетворителен по содержанию, с точки зрения их „типичности“, и недостаточен по количеству. Таким образом, в самый трудный момент изучения уравнений учебник не оказывает надлежащей помощи ни учителю, ни ученику.

3. Однако влияние обеих указанных выше причин было бы значительно ослаблено при умелом преподавании, при надлежащей, тщательно разработанной методике изложения всего этого раздела.

Но вся и беда в том, что до сих пор мы не имеем более или менее полно разработанной методики преподавания уравнений в средней школе. В этом отношении как наша, так и заграничная методическая литература крайне бедна. В руководствах по методике алгебры можно найти ряд более или менее ценных указаний по некоторым общим вопросам постановки преподавания раздела уравнений. Но именно эта общность и является причиной того, что педагог, ищущий в методиках ответа на ряд конкретных вопросов, встающих перед ним в практической работе, не находит этих ответов.

Лишь за последние (1934—1940) годы в отношении советской методической литературы можно отметить определённый перелом. Бурный рост среднего образования в Советской стране повлёк за собой приток новых молодых педагогических кадров. В связи с этим колоссально возросла потребность в методической литературе, и таковая действительно начинает быстро расти. Областные, районные и школьные педагогические кабинеты силами лучших, опытных педагогов создают так называемые „методические разработки" по всем темам школьного математического курса. Возобновляется издание методического журнала „Математика в школе" (в 1934 г.). Москва, Ленинград, Киев, Одесса, Ростов на Дону и ряд других областных центров издают серии методических сборников и брошюр, посвящённых методике преподавания отдельных тем элементарной математики.

Во всех этих изданиях значительное внимание и место уделено уравнениям. Без преувеличения можно утверждать, что число статей по теории и методике уравнений переходит за сотню[1]).

Излагая многообразный опыт советских передовых учителей, эти статьи, варьируя в своей сравнительной ценности, в общем дают богатый материал по ряду основных моментов методики преподавания уравнений. Но, к сожалению, именно это большое количество статей, при крайней разбросанности их по отдельным сборникам и номерам журналов за ряд лет, делает их мало доступными для широких масс учительства.

---

[1]) Только в журнале „Математика в школе" за 1934—1940 гг. помещено свыше 60 статей по методике преподавания уравнений. Специально уравнениям почти полностью посвящены: № 5—1936 г., № 2—1940 г. (составление уравнений), № 1—1940 г. (исследование уравнений). См. также: №№ 1 и 3—1934 г., №№ 2 и 5—1935 г., № 1—1937 г., № 1—1939 г., № 6—1940 г. и многие другие.

Небольшая часть этой литературы, которую удаётся подобрать учителю (да и то с большим трудом, особенно в провинции), не удовлетворяет его в должной мере уже потому, что каждая статья обычно затрагивает лишь тот или иной отдельный вопрос методики преподавания уравнений: вопрос об эквивалентности, или о составлении, или об исследовании уравнений и т. п. При этом в различных статьях, посвящённых одному и тому же вопросу, иногда проводятся далеко не совпадающие между собой точки зрения.

Подводя итоги всему изложенному, заключаем: для ликвидации ряда недочётов в знаниях учащимися уравнений, для поднятия качества этих знаний на ту высоту, которая соответствовала бы теоретической и практической ценности этого раздела алгебры, совершенно необходимы три вещи:

1. Пересмотр школьной программы по алгебре с точки зрения уделения большего времени и внимания изучению уравнений 1-й степени; в первую очередь необходимо ввести пропедевтику уравнений в курсе VI и первого полугодия VII класса. Сделать обязательным решение и составление уравнений при прохождении всех без исключения тем в этих классах. (Отметим, что это мероприятие частично уже осуществлено: с 1943 г. в первые два раздела алгебры VI класса включено решение простейших уравнений.)

2. Создание учебника по алгебре, в котором: а) нашло бы своё непосредственное отражение требование, изложенное в предыдущем пункте; б) изложение самой темы „Уравнения 1-й степени“ было бы значительно улучшено, приведено в соответствие с основными требованиями методики[1]).

3. Создание руководства по методике преподавания уравнений, которое охватывало бы полностью тему, содержало бы в себе достаточно детальные и конкретные указания для всех разделов темы и на всех этапах её изучения.

---

[1]) В учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова „Алгебра“ (Учпедгиз, 1938) глава об уравнениях 1-й степени изложена почти с предельной простотой и ясностью. В этом отношении эта книга, несомненно, стоит на первом месте среди всей учебной литературы на русском языке. К сожалению, авторы совсем не уделили места той пропедевтике уравнений, введение которой мы считаем совершенно необходимым.

В заграничных учебниках, наоборот, пропедевтике уравнений уделяется достаточно внимания, но глава, посвящённая непосредственно уравнениям, излагается в обычном традиционном стиле.

Глава II.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

§ 3. Планирование темы.

По программе советской средней школы раздел „Уравнения 1-й степени с одним неизвестным" проходится в VII классе, непосредственно после изучения тождественных преобразований целых и дробных алгебраических выражений. На весь этот раздел отводится 24 учебных часа, в течение которых учащийся должен: 1) усвоить элементарные теоретические сведения об уравнениях; 2) приобрести достаточно твёрдый навык в решении уравнений целых и дробных, с числовыми и буквенными коэфициентами; 3) научиться применять метод уравнений к решению разнообразных задач. Достаточно очевидно, что выполнить более или менее удовлетворительно эти требования на отведённом отрезке времени — дело совершенно безнадёжное. Многолетний опыт как русской, так и заграничной школы полностью подтверждает это.

Поэтому в первую очередь необходимо устранить эту, так сказать, объективную (по отношению к преподавателю) причину, препятствующую основательному изучению темы.

Говорить об увеличении числа часов на прохождение уравнений в программе VII класса не приходится: о прибавке значительного количества часов не может быть и речи, прибавка же каких-либо 8–10 часов не даст ощутительных результатов.

Не приходится рассчитывать и на закрепление навыков в решении и составлении уравнений в процессе изучения дальнейшего курса алгебры. Это закрепление проводится и должно проводиться, но, базирующееся на нетвёрдых знаниях и умениях, оно не в состоянии полностью ликвидировать все пробелы.

Таким образом, очевидно, остаётся единственный выход: ввести пропедевтику уравнений до специального изучения этой темы; начать ознакомление учащихся с уравнениями на возможно ранней ступени изучения алгебры и упражнять их в решении и составлении уравнений на всём протяжении курса VI и VII классов; добиться того, чтобы к моменту специального изучения темы „Уравнения" учащиеся уже обладали достаточно твёрдыми навыками в решении уравнений и задач основных элементарных типов. Только при этом условии 24 часа, отведённые на тему, можно будет достаточно эффективно использовать на подведение элементарной теоретической базы под полученные знания и навыки, на упражнения в решении уравнений и задач более сложных и разнообразных типов.

К этому выводу пришли передовые советские учителя уже около 10 лет назад и ввели в свою практику пропедевтику уравнений в той или иной форме и степени, на той или иной ступени изучения алгебры.

К этому же выводу пришла и заграничная школа, и это нашло своё непосредственное отражение и в учебниках по алгебре, чего, к сожалению, в отношении наших учебников мы ещё сказать не можем. Чтобы составить представление об объёме и характере упражнений, даваемых заграничной школой в порядке пропедевтики, рассмотрим в качестве примера американский учебник Wentworh and Smith „Academic Algebra“ (1913 г.).

Первые страницы учебника посвящены буквенным обозначениям и дают понятие о буквенной формуле. При этом в порядке упражнений даются почти все формулы геометрии: площадей (прямоугольника, треугольника, параллелограма, трапеции, круга) и объёмов (призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара). Даются упражнения на нахождение числовой величины алгебраических выражений, в частности на определение площадей и объёмов по формулам. Даются задачи на применение формул.

Непосредственно вслед за этим вводным материалом даётся определение уравнения („равенство двух чисел или количеств“) и начинается серия упражнений, расположенных в определённой последовательности. Каждое из упражнений 14—17 содержит группу числовых уравнений, решаемых на основе зависимости между компонентами: сложения ($x + a = b$, упр. 14), умножения ($ax = b$, упр. 15), вычитания ($x - a = b$, упр. 16) и деления $\left(\frac{x}{a} = b\text{, упр. } 17^{1}).\right)$ Упражнение 19 содержит элементарные задачи на составление уравнений. („Если к некоторому числу, взятому 23 раза, прибавить 47, получится 300. Какое это число?“)

Следующая глава, посвящённая отрицательным числам, не содержит почему-то совсем упражнений на решение урав-

[1]) Под a и b везде подразумеваются положительные рациональные числа.

нений. Но в последующих главах, содержащих тождественные преобразования одночленов и многочленов, изучение каждого действия сопровождается упражнениями в решении уравнений: сложение ($ax + bx + cx = d$), вычитание ($ax \pm b = c$; $ax = x + b$; $ax = bx + c$; $ax + b = cx + d$), умножение [$x^2 + a = x(x \pm b)$]; [$ax^2 + b = ax(x \pm d)$ и т. д.] и деление ($5a^2x = 10a^2$; $9abx = a^3b^3$ и т. п.).

Отметим, что все примеры, кроме последних (на деление), даются только с числовыми коэфициентами, что с нашей точки зрения является и недостаточным и, как покажем далее, методически неправильным.

Далее учебник переходит уже к систематическому изложению сведений об уравнении и решению большого количества задач методом уравнений.

В противоположность нашим программам формулы сокращённого умножения и деления, разложение алгебраических выражений на множители и алгебраические дроби проходятся после главы об уравнениях. Здесь вводятся и дробные уравнения. Далее изучаются пропорции и системы уравнений 1-й степени.

Итак, мы уже имеем опыт заграничной, а частично и нашей школы, опыт, который при всех его недостатках (о них скажем позже) дал несомненно положительные результаты, показал всю целесообразность введения пропедевтики уравнений в курс VI и VII классов. Очевидно, остаётся только распространить этот опыт на все школы, введя в программу пропедевтику уравнений как обязательный раздел.

Это и делают программы Министерства просвещения, которые, начиная с 1942 г., включают в первые уроки по алгебре „решение простейших уравнений на основании определений и свойств арифметических действий“.

В раздел „Относительные числа“ также включён пункт: „решение простейших уравнений с применением относительных чисел на основании определений и свойств арифметических действий“.

В объяснительной же записке, как уже сказано выше, рекомендуется решение уравнений, „чтобы показать ученикам VI класса конкретное применение выполняемых ими тождественных преобразований“. Это мероприятие следует полностью приветствовать как большое достижение.

И вот, как это ни кажется странным, приходится констатировать факт, что это, подсказываемое логикой и методикой, проверенное опытом, требование находит довольно холодный приём у нашего рядового, массового преподавателя. Медленно и с трудом распространяется это „нововведение“ в нашей массовой школе.

Мы считаем необходимым остановиться здесь на этом вопросе, внести в него возможную ясность.

Чем объясняется сдержанное, а часто и отрицательное отношение учителей к введению пропедевтики уравнений? Какие возражения выдвигаются ими? Когда на методических семинарах нам приходилось поднимать этот вопрос, то со стороны слушателей из года в год можно было услышать два возражения.

1. Конечно, пропедевтика уравнений вещь хорошая, она несомненно повысила бы знания учащихся. Но у нас нет времени на неё. Отведённых часов на алгебру еле хватает (или даже „нехватает“) на то, чтобы привить учащимся некоторые навыки в тождественных преобразованиях. За счёт какого же раздела мы можем ввести ещё новый материал?

2. Введение пропедевтики уравнений в VI классе не только не улучшит, но может ухудшить положение. Внимание учителя будет раздваиваться между уравнениями и тождественными преобразованиями. Ученики будут путать решение уравнений с тождественными преобразованиями. Получится нечто вроде „погони за двумя зайцами“, а в результате у учащихся не будет твёрдых навыков ни в тождественных преобразованиях, ни в решении уравнений.

Таковы аргументы. И тот и другой являются совершенно несостоятельными. Да один уже опыт нашей и заграничной школы, о котором мы говорили выше, полностью их опровергает.

Допустим, что на изучение уравнений в VI классе требуется какое-то количество специально выделенных часов. Если только мы признаем: 1) что уравнения являются важнейшим разделом школьной алгебры; 2) что знание учащимися этого раздела не стоит на должной высоте; 3) что введение пропедевтического курса уравнений является если не единственным, то наиболее эффективным средством для ликвидации этого недочёта, — то отсюда с необходимостью следует, что для него нужные часы должны быть выделены. За счёт чего? — спрашивают учителя. В первую очередь за счёт отказа от затраты времени на те сложные случаи преобразований целых и дробных алгебраических выражений, которые в дальнейшем не приходится применять даже в высшей школе, не говоря уже о средней. В виде примера можно указать хотя бы на упражнения в преобразовании выражений с буквенными показателями. Здесь вполне достаточно ограничиться самыми элементарными случаями и безусловно исключить упражнения типа №№ 226, 228, 229 и др. задачника Шапошникова и Вальцова (ч. I, глава 2). Мы не сторонники точки зрения Юнга, предлагающего ограничиться только теми видами тождественных преобразований, которые могут встретиться при решении уравнений, да и такие преобразования вводить только тогда, когда они действительно встретятся в уравнении. Против этого можно многое возразить. Но и до сих пор ещё в практике нашей школы находят себе место упражнения, выходящие за пределы более или менее типовых, носящие, так сказать, трюковый характер. (Нам приходилось встречать такие упражнения даже в заданиях на письменных испытаниях в VII классах[1]).

---

[1]) Не можем не отметить, что к такого рода „головоломным" упражнениям побуждают непомерные, ничем не оправдываемые требования наших некоторых втузов. Достаточно для примера указать, что на приёмных испытаниях фигурируют такие задачи, как упрощение выражений вида:

$$\left[\frac{(\sqrt{a^2-4}-a)\,(2a)^{-1}}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{2a}{a-(a^2-4)^{\frac{1}{2}}}\right)^2-1}}\right]^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\left[\frac{(2a)^{-1}\,(a-\sqrt{a^2-4})}{1+\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-4-a}}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(оказывается, всё это выражение равно a). Или:

$$\frac{8-m}{2+\sqrt[3]{m}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{2+\sqrt[3]{m}}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}$$

или решение уравнений вида:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\lg\frac{1}{\sqrt{2}}^{0,25}} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2\sqrt{\lg\sqrt{3^x}}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\lg\sqrt{3}^{\sqrt{x}^{-2}}}$$

(См. „Математика в школе", 1941, № 4.)

Совершенно необходимо, чтобы руководящие органы издали инструкцию для вузовских экзаминаторов, в которой категорически были бы запрещены подобного рода задачи, являющиеся издевательством над здравым смыслом и над абитуриентом, а главное, ни в коей степени не позволяющие вынести какое-либо суждение о знаниях ученика, хотя бы и не решившего подобного рода задачу.

Можно говорить также и об исключении некоторого теоретического материала из программы VI и VII классов. Здесь мы прежде всего имеем в виду разложение квадратного трёхчлена, которое просто по недоразумению поставлено в программе VI класса и которого естественное место в VII классе, после теоремы Виета[1]).

Но основное решение вопроса надо искать не в этой плоскости. Оно заключается в самой системе изложения пропедевтики уравнений. Эта система должна быть такова, чтобы изучение уравнений проводилось не только не в ущерб другим разделам алгебры, но, наоборот, повышало качество их усвоения. Всё дальнейшее изложение и имеет целью показать, как это можно сделать и как это проводили мы в своей педагогической практике.

При соблюдении этого условия отпадает целиком и второе, приведённое выше возражение: никакого раздвоения внимания учителя не должно быть. Изучаются тождественные преобразования. Уравнения и задачи служат лишь одним из орудий для упражнения и закрепления навыков в этих преобразованиях, точно так же, как в арифметике задачи, обладая самостоятельной, в первую очередь практической ценностью, служат в то же время средством для упражнения в вычислительных операциях.

Итак, мы можем сформулировать наше первое методическое требование, выполнение которого является основным условием для успешного усвоения теории и практики уравнений:

В программу VI—VII классов должно быть включено в обязательном порядке и требование упражнений в решении и составлении уравнений по отношению ко всем без исключения темам в этих классах.

Что касается содержания курса и особенно объёма сообщаемых навыков в решении и составлении уравнений, то здесь вполне допустимо варьирование в известных пределах, в зависимости от различных обстоятельств и, в первую очередь, от опыта учителя.

В качестве исходного, обязательного минимума можно было бы принять тот материал из американского учебника Wentworth and Smith, который мы привели выше. Но этот материал обладает рядом существенных методических недочётов:

---

[1]) В новом проекте программы этот пункт из VI класса исключён.

1) Слишком слабо выражена связь с изучаемыми тождественными преобразованиями.

2) Недостаточное внимание уделено задачам на составление уравнений.

3) Почти отсутствуют уравнения с буквенными коэфициентами.

Внеся соответствующие поправки, преподаватель, впервые приступающий к прохождению уравнений в VI классе, может поставить в качестве ближайшей задачи овладение учащимися хотя бы этим материалом, из года в год в дальнейшем расширяя его по мере накопления опыта.

В своей практике мы в течение ряда лет клали в основу работы следующую программу:

1. Понятие об уравнении, корне уравнения; два основные свойства равенств[1]).

2. Решение уравнений с числовыми и буквенными, целыми и дробными коэфициентами, содержащих неизвестное только в одной части и включающих все те тождественные преобразования, которые изучены на данном этапе учащимися.

3. Решение задач с числовыми и буквенными данными, приводящих к уравнениям указанных в пункте 2 типов.

Опыт показывает, что этот материал вполне и достаточно прочно может быть усвоен учащимися. Выполнение этой программы колоссально облегчает прохождение всей темы „Уравнения" в VII классе, вполне обеспечивает приобретение твёрдых навыков в решении достаточно сложных и разнообразных задач. Поэтому мы считали бы возможным принять эту программу за максимальную, к осуществлению которой и должен стремиться каждый преподаватель.

§ 4. Арифметика и уравнения.

В математическом образовании детей алгебра следует непосредственно за арифметикой. Первые главы алгебры по существу являются обобщённой арифметикой. Казалось бы оба эти обстоятельства вполне обеспечивают самую тесную связь между этими двумя ветвями элементарного математического образования.

Однако в действительности имеет место как раз обратное положение дела. В школьной практике мы наблюдаем

---

[1]) Здесь имеются в виду именно свойства арифметических равенств: от прибавления одного и того же числа равенство не нарушится. То же — относительно умножения.

глубокий разрыв, целую пропасть между арифметикой и алгеброй. По общему признанию педагогов, переход к операциям над буквами совершается с большими трудностями, медленно и с трудом воспринимается учащимися. Причина всех этих трудностей и кроется в первую очередь в отрыве от арифметики, в том, что между алгеброй и арифметикой не перекинут мост, что знания учащимися арифметики не используются учителем для „плавного" перехода к операциям над буквенными выражениями и — главное — для правильного понимания этих операций.

Ученик не видит числа, стоящего за буквенным символом, и в операциях над буквами не видит знакомых ему операций над числовыми данными. Поэтому-то он с лёгким сердцем может написать: $a + a = a^2$ и $a \cdot a = 2a$ (известные типичные ошибки), в то же время никогда не напишет $7 \cdot 7 = 2 \cdot 7$ или $7 \cdot 7 = 14$. Необходимое „математическое зрение" должно быть воспитано у учащихся, а как раз в этом направлении обычно почти ничего не делается преподавателями. Проводимые в течение нескольких уроков упражнения по нахождению численной величины алгебраических выражений и практикуемая время от времени числовая поверка буквенных тождеств, конечно, полезны, но для указанной цели совершенно недостаточны.

Корень зла здесь прежде всего в отсутствии конкретного применения изучаемых операций над буквами. В самом деле, в арифметике ученик упражняется в арифметических действиях над целыми и дробными числами и сейчас же применяет приобретаемый им навык к решению конкретных задач, взятых из области техники, сельского хозяйства, быта. Практическая ценность данного навыка становится для него непосредственно ясной. В алгебре он проделывает сотни упражнений в операциях над буквами как будто бы только ради самих операций, ибо никакого применения их к решению какого-либо конкретного вопроса он не видит. Отсюда самые эти операции кажутся ему надуманными, искусственными, бесконечно скучными и даже просто бессмысленными. Отсюда и знакомый каждому педагогу тоскливый вопрос со стороны ученика: „Зачем всё это нужно? где это применяется?" — вопрос, на который, к сожалению, ученик часто не получает удовлетворительного ответа.

Вывод напрашивается сам собой: если в арифметике задачи служат прекрасным средством для применения (следовательно, и для закрепления) навыков в арифметических действиях, то почему бы не использовать это же средство и в алгебре? В упражнениях на тождественные преобразования мы заменяем числа буквами и производим над ними арифметические операции. Мы можем с таким же успехом в любой задаче числовые данные заменить частично или полностью буквенными и показать на этой задаче применение изучаемой операции. Такого рода задачи сообщают тождественным преобразованиям ту реальную значимость, отсутствие которой так остро ощущают учащиеся. Они служат в то же время наиболее эффективным средством для упражнения и закрепления навыков в этих преобразованиях, способствуют сознательному и прочному усвоению всей первой, наиболее абстрактной части алгебры.

Но особое, совершенно исключительное значение эти задачи имеют для надлежащего усвоения раздела уравнений (см. ниже § 8), именно для составления уравнений по условиям задачи. Поэтому-то требование систематических упражнений в решении таких задач и выдвигается здесь как одно из первых и основных требований.

Решение арифметических задач с буквенными данными является, однако, лишь одной из форм связи уравнений с арифметикой. Эта связь должна быть фактически гораздо теснее и глубже. Так, при решении уравнений в VI и VII классах, когда теоремы об эквивалентности уравнений ещё неизвестны учащимся, все преобразования могут базироваться лишь на арифметических познаниях учащихся, и это обстоятельство ими должно быть достаточно чётко осознано.

Вообще связь арифметики с уравнениями на протяжении всего курса алгебры в VI и VII классах должна осуществляться в следующих формах:

а) Все правила и приёмы составления и решения уравнений должны обосновываться на тех теоретических положениях, которые учащиеся усвоили на уроках арифметики: переместительный, сочетательный и распределительный законы сложения и умножения; зависимость между компонентами действий, теория пропорций и пр.

Ученик должен отчётливо сознавать, что, приводя, например, уравнение

$$8x + 38 + 3x = 93 \qquad (1)$$

к виду:

$$11x + 38 = 93,$$

он фактически применил переместительный и сочетательный законы сложения; что, решая уравнение далее:

$$11x = 55; \quad x = 5,$$

он воспользовался известными ему зависимостями между компонентами действий сложения и умножения.

Конечно, нет никакой надобности и было бы крайне нецелесообразно при решении каждого уравнения фиксировать эти отдельные этапы решения. Но в начале изучения темы ссылки на указанные выше арифметические положения должны практиковаться настолько широко, чтобы учащиеся вполне оосознали характер каждой производимой над уравнением операции и её законность.

б) При подборе задач, решаемых путём составления уравнения, должны учитываться приобретённые уже учащимися навыки и умения в решении арифметических задач в отношении как типов задач, так и степени их трудности.

В нашей классификации задач на составление уравнений (см. главу VII) мы все арифметические задачи, разбитые по типам, выделяем в особую пропедевтическую группу и только задачи этой группы и предлагаем для решения в VI и VII классах до перехода к непосредственному прохождению темы „Уравнения".

Совершенно ясно, что навык в решении арифметических задач, приобретённый в младших классах, может и должен быть использован здесь в полной мере.

в) На протяжении всего курса VI и VII классов систематически решаются арифметические задачи с буквенными (полностью или частично) данными. Об этом мы уже говорили выше.

г) Наконец, в задачах на решение уравнений числовые данные должны быть подобраны так, чтобы при устном решении они давали материал для применения приёмов устного счёта, при письменном — содержали бы случаи выполнения действий, наиболее затрудняющие учащихся.

Так, уравнение $x : 9 = 23$ для устного решения даёт возможность применить приём устного умножения на 9. Уравнение $23x = 46069$ упражняет учащихся в делении для случая, когда в частном появляются нули.

Мы видим, что при такой тесной увязке алгебры с арифметикой выигрывают обе дисциплины.

Остановимся ещё раз на пункте в), которому мы придаём исключительно важное значение.

Нельзя сказать, что это требование является новым во всём его объёме. Ещё свыше 50 лет назад В. Евтушевский, автор известного задачника по арифметике, указывал на ценность такого рода задач для усвоения первых глав алгебры. Но, рекомендуя задачи с буквенными данными как методический приём для перехода к операциям над буквами, он отводил им слишком ограниченное место, включая их лишь в пропагандируемый им пропедевтический курс алгебры и тем самым крайне суживая их ценность[1]).

В более широких рамках пытался осуществить идею увязки алгебры с арифметикой А. Н. Страннолюбский. В его книге „Курс алгебры, основанный на постепенном обобщении арифметических задач" (1868), задачи с буквенными данными служат исходным моментом для вывода правил тождественных преобразований. Но ряд крупных недочётов книги (неудачный подбор задач, тяжёлый стиль, однообразная вопросо-ответная форма изложения и пр.), очевидно, явился причиной того, что правильные и ценные идеи автора не были восприняты педагогической общественностью, и книга не оказала какого-либо заметного влияния на практику школьного преподавания алгебры.

Нельзя также сказать, что в практике нашей школы совершенно отсутствуют такого рода задачи. Введение буквенных обозначений обычно начинается с того, что даётся ряд однородных задач с различными числовыми данными и устанавливается общий способ их решения. Затем числа заменяются буквами и составляется соответствующее алгебраическое выражение. Далее даётся задача уже с буквенными данными и полученная формула проверяется на числовых примерах. В задачнике Шапошникова и Вальцова даются 15 задач именно для того рода упражнений.

Но и этого совершенно недостаточно для наших целей.

Выдвигаемый нами здесь тезис о задачах заключает в себе по существу три требования:

1. Арифметические задачи с буквенными данными должны решаться постоянно и систематически на протяжении всего курса алгебры VI и VII классов.

2. Эти задачи должны быть подобраны таким образом, чтобы они давали материал для упражнений именно в тех тож-

---

[1]) В. Евтушевский, Пропедевтика алгебры. Педагогический сборник, 1868, июль.

дественных преобразованиях, которые в данный момент изучаются.

3. С другой стороны, эти же задачи должны служить подготовительным, тренировочным средством для последующего решения задач методом уравнений.

Покажем хотя бы на одном примере, как можно выполнить эти требования.

Учащиеся проходят раздел „Сложение и вычитание одночленов и многочленов“. Первоначальные навыки они получают на упражнениях вида:

$3a + 4a$; $p + 4p - 2p$; $5ab - 3ab + 8ab$ и т. д.

$a \pm (n \pm 5)$; $3b + (2a \pm 3b)$; $a + (a - b) + (a - b + c)$ и т. д.

Значит, следует дать задачи, которые приводили бы к таким упражнениям. С другой стороны, известно, что при составлении уравнений по условиям задачи учащиеся более всего затрудняются в составлении таких выражений, которые имеют источником разностное или кратное отношение между данными величинами („на столько-то больше, меньше“; „во столько-то раз больше, меньше“). Значит, надо предусмотреть достаточное количество таких задач, в которых имели бы место именно такого рода зависимости.

В соответствии с этим составляется и предлагается учащимся (в течение ряда уроков) серия задач такого рода:

1. В одном классе a учеников, в другом на 6 учеников больше (меньше). Сколько учеников во втором классе? ($a \pm 6$).

2. В одном кошельке x руб., а в другом вдвое больше. Сколько денег в другом кошельке? ($2x$).

3. Задача № 2 с вопросом: Сколько денег в обоих кошельках? ($x + 2x = 3x$).

4. На одной полке лежит b книг, на другой вдвое, а на третьей втрое больше, чем на первой. Сколько книг на всех трёх полках? ($b + 2b + 3b = 6b$).

5. В двух корзинах находится по x яблок, а в третьей на 2 яблока больше, чем в каждой из остальных. Сколько яблок во всех трёх корзинах? [$x + x + (x + 2) = 3x + 2$].

6. В первом классе ученики подписались на военный заём на m руб., во втором на 117 руб. больше, а в третьем на 53 руб. меньше, чем во втором. На какую сумму подписались все три класса? [$m + (m + 117) + (m + 117 - 53) = 3m + 181$]. И т. д.

Можно легко придумать много вариантов задач подобного типа. Эти задачи, во-первых, являются элементарными упражнениями на сложение одночленов и многочленов, во-вторых, требуют составления таких алгебраических выражений, которые фигурируют, например, в задачах №№ 371—374 на составление уравнений в задачнике Шапошникова и Вальцова (и, конечно, в различных вариантах имеются и в любом задачнике). Задачи конкретизируются подстановкой вместо букв различных числовых значений их. Ещё лучше задачи типа №№ 1 и 6 (и ряда подобных им) построить на материале данной школы, обозначив (для приведённых задач) буквой число учащихся или сумму подписки в каком-либо классе.

Можно поставить здесь такой вопрос: а как быть с упражнениями, для которых трудно составить соответствующую задачу, например, в данном случае для упражнений типа:

1. $3ab + 7ab - 5ab$. **2.** $5a^2b - 2a^2b + 3a^2b$.

3. $(3a^4 - 2a^3b + ab^2 - 7) - (2a^4 + 4a^3b - 5)$. И т. д.

Во-первых, при некоторой изобретательности и затрате некоторого труда можно придумать хотя бы одну-две задачи и на более сложные виды упражнений. Так, для типа № 1 из только что приведённых можно было бы дать задачу такого рода:

„Для настилки полов в квартире приобрели деревянные плитки длиной в *a см* и шириной в *b см*. Для одной комнаты израсходовано 144 таких плитки, для другой 96 и для третьей 72. Какова площадь пола каждой из этих комнат и какова их общая площадь?“

Для примера № 2 можно было бы придумать аналогичную задачу на объём.

Наконец, для примера № 3 и подобных ему вообще не нужно придумывать задач.

В самом деле, не только нет никакой необходимости, но было бы просто нецелесообразно (хотя бы в интересах экономии времени) каждый вид упражнений, кончая самыми сложными, сопровождать соответствующими задачами. Ведь важно, чтобы учащиеся именно в начале ознакомления с тем или иным видом преобразований, когда они ещё не обладают достаточным навыком в них, убедились в их целесообразности, в их практической ценности, а следовательно, и в необходимости приобретения соответствующего навыка путём тренировки. А для этого задачи, подобные приведённым выше, вполне достаточны.

Надо учитывать и то обстоятельство, что для поставленной нами второй цели — приобретения навыка в составлении алгебраических выражений — наиболее подходят именно задачи, приводящие к сравнительно несложным выражениям, типичным для задач на составление уравнений. В последних мы, конечно, не встретим, по крайней мере в школьной практике, выражений, подобных только что приведённому примеру № 3.

Наконец более сложные тождественные преобразования найдут себе практическое применение в другом направлении, именно при решении уравнений. На этом мы остановимся в следующем параграфе.

§ 5. Тождественные преобразования и уравнения.

Против введения пропедевтики уравнений в курс алгебры VI и VII классов обычно выдвигается, как мы уже говорили, тот аргумент, что введение уравнений может быть осуществлено лишь за счёт сокращения учебного времени, отведённого на изучение тождественных преобразований, а это не может не повлечь за собой дальнейшего снижения и без того недостаточно твёрдых навыков учащихся в выполнении алгебраических действий над одночленами и многочленами.

Этот аргумент отпадает сам собой, если мы изучение уравнений построим таким образом, чтобы они не только не снижали навыка в тождественных преобразованиях, но, наоборот, способствовали их развитию и закреплению. Сделать же это легко и просто: нужно лишь потребовать, чтобы уравнения (а также и задачи на составление уравнений), решаемые учащимися, заключали в себе именно те тождественные преобразования, которые изучаются на данном этапе.

Именно это и имеет в виду объяснительная записка к программе по алгебре, выдвигая требование:

„Чтобы показать ученикам VI класса конкретное применение выполняемых ими тождественных преобразований, надо решать простейшие уравнения 1-й степени с одним неизвестным (мы бы добавили: и задачи на составление таких уравнений. — *А. Б.*) исключительно на основании известных ученикам свойств арифметических действий.“

Здесь совершенно правильно подчёркивается значение уравнений как материала для практического применения навыков в тождественных преобразованиях.

Чтобы показать на конкретном примере, как осуществляется эта увязка уравнений с тождественными преобразованиями, вернёмся к той же теме „Сложение и вычитание одночленов и многочленов“, которой мы воспользовались в предыдущем параграфе. Параллельно с приведёнными там задачами учащимся даются для решения уравнения такого типа:

1. $x + 2x = 81$.
2. $x + 2x + 3x = 66$.
3. $a + a + (a + 2) = 47$.
4. $x + (x + 117) + (x - 45) = 162$ и т. д.

Мы намеренно, в целях наглядности, взяли для уравнений именно те выражения, которые фигурировали и в задачах предыдущего параграфа. Конечно, такого рода уравнения в разнообразных вариантах должны быть решены в достаточном количестве.

И, наконец, параллельно с решением уравнений решаются также и задачи на составление уравнений:

1. Два лица имеют вместе 38 руб., причём у первого шестью рублями больше, чем у второго. Сколько денег у каждого?

2. В двух кошельках находится 81 рубль. В первом денег вдвое меньше, чем во втором. Сколько денег в каждом?

3. В трёх корзинах находится 47 яблок, причём в первой и во второй поровну, а в третьей на 2 яблока больше, чем в каждой из остальных. Сколько яблок в каждой корзине?

4. На трёх полках лежит всего 66 книг, причём на нижней втрое больше, а на средней вдвое больше, чем на верхней. Сколько книг на каждой полке?

Приведённые задачи — это как раз четыре первые задачи (№№ 371—374) на составление уравнений в задачнике Шапошникова и Вальцова. Конечно, преподаватель сам легко составит, сколько потребуется подобных задач. Итак:

Изучение тождественных преобразований на всех этапах должно сопровождаться решением уравнений, которые включали бы в себе эти преобразования.

Таким образом, совсем не нужно выделять какие-либо особые часы на упражнения в решении уравнений. Уравнения являются одним из видов упражнений в тождественных преобразованиях. Методическая ценность их очевидна: являясь материалом для тренировки в алгебраических действиях, они в то же время показывают практическое значение навыков в тождественных преобразованиях, возбуждают интерес к ним и этим способствуют их более быстрому и прочному усвоению.

Заметим, что по сравнению с арифметическими задачами уравнения дают больший простор в отношении подбора упражнений на более сложные случаи преобразований. Так, для избранной нами темы в порядке нарастания трудности могут быть даны уравнения примерно такого типа:

1. $(3x^2 - 2x + 7) + (7x - 3x^2 - 15) = 27$.

2. $(2x^3 - 5x^2 + 3x - 11) - (7x^3 - 5x^2 - 7x + 4) + 5x^3 = 3$

и т. п.

Такого рода уравнения уже не будут сопровождаться соответствующими задачами на составление уравнений. Но здесь мы можем только повторить то, что было сказано по поводу арифметических задач: в этом и нет никакой необходимости.

§ 6. Уравнения с числовыми и буквенными коэфициентами.

В нашей школе укоренилась практика — вводить уравнения с буквенными коэфициентами лишь в самом конце изучения темы, лишь после того, как учащиеся достаточно натренировались в решении числовых уравнений всех типов, кончая самыми сложными. При этом уравнениям с буквенными коэфициентами отводится крайне мало внимания и времени (времени-то, пожалуй, и трудно выделить больше при обычном планировании темы).

Такой порядок рекомендуется и методистами. В методразработках, имеющихся в педкабинетах, приводится обычно примерное почасовое распределение материала всей темы. И там, как правило (да мы, по правде сказать, исключений и не встречали), в самом конце темы отводятся 2—3 специальных урока на уравнения с буквенными коэфициентами. Методисты руководятся, очевидно, при этом известным принципом: не вводить в один раз двух трудностей, считая, что буквенные коэфициенты являются именно этой второй, добавочной трудностью в то время, когда учащиеся ещё не преодолели первой — не приобрели ещё достаточного навыка в решении численных уравнений.

Наконец, такое обособление „буквенных“ уравнений и отнесение их на конец темы стимулируется и принятым в школе задачником Шапошникова и Вальцова. Материал для упражнений в решении уравнений расположен в нём в такой последовательности: первый раздел заключает в себе численные уравнения, не содержащие неизвестного в знаменателе; второй раздел — дробные численные уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе; и, наконец, третий и последний раздел посвящён „буквенным“ уравнениям. При этом последнему разделу предшествует особое введение, которое может вызвать у преподавателя, и тем более у ученика, только ряд недоумений.

„Если коэфициенты при неизвестном или свободные члены (а если и те другие? — *А. Б.*) суть не числа, а буквенные выражения, то уравнение называется буквенным. Буквенное уравнение решается по тем же правилам, что и численное уравнение“.

Мы не считаем целесообразным вообще выделять уравнения с буквенными коэфициентами в особую группу и давать им специальное название (да в этом и не было бы нужды, если бы „буквенные“ уравнения решались с самого начала совместно с „численными“).

Лишним является и добавление, что „буквенные уравнения решаются по тем же правилам“.

Здесь опять-таки сказывается та вредная тенденция к отрыву арифметики от алгебры, о которой мы уже говорили. И здесь воспитывается у учеников взгляд на буквенные выражения как на нечто существенно отличное от числовых формул. Это обстоятельство специально подчёркивается („суть не числа, а буквенные выражения“). Дальнейшая часть введения ещё более усиливает это впечатление „специфичности“ буквенных уравнений:

„В результате решения буквенного уравнения получаются, вообще говоря, выражения, содержащие те буквы, которые входят в состав коэфициентов и свободных членов данного уравнения. Эти выражения, называемые корнями уравнения, обладают тем свойством, что при подстановке их в уравнение вместо неизвестного уравнение обращается в тождество“.

Оставляя в стороне некоторую неясность смысла вставки „вообще говоря“ (допускаем, что тут имеется в виду возможное отсутствие в конечном выражении для неизвестного некоторых или даже всех букв, входящих в уравнение), мы в первую очередь недоумеваем: зачем для уравнений с буквенными коэфициентами понадобилось повторить снова определение корня и раскрытие его свойства обращать уравнение в тождество после того, как всё это было дано уже для уравнения вообще. Создаётся впечатление, что данное раньше определение корня относилось только к уравнениям с числовыми коэфициентами, а вот только теперь мы произвольно распространяем его и на „буквенные“ уравнения. Всё это не может не вызвать некоторой настороженности к этим уравнениям со стороны учеников, как к чему-то, выходящему за рамки обычного и требующему к себе особого подхода.

Мы убеждены, и опыт подтверждает это, что такое „сугубо осторожное" отношение к „буквенным" уравнениям, выделение их в особую категорию, отведение на упражнения в их решении особых уроков не имеют под собой никакой почвы.

Прежде всего эта якобы особая трудность „буквенных" уравнений является в большой степени иллюзорной. Если упражнения с буквенными данными проходят через весь курс VI класса, начиная с первых уроков, постоянно перемежаясь с аналогичными упражнениями с числовыми данными; если путём подстановки чисел вместо букв систематически проверяется правильность произведённых преобразований, — то учащийся привыкает видеть в букве изображаемое ею некоторое число и руководится этим представлением, производя те или иные преобразования. „Специфичность" буквенных выражений в значительной мере стирается. Арифметические задачи, в которых фигурируют и числовые, и буквенные данные, особенно способствуют такому свободному оперированию с буквенными выражениями. При этих условиях и уравнения с буквенными коэфициентами не представят для него особых трудностей.

Конечно, некоторая методическая последовательность между числовыми и буквенными уравнениями должна быть соблюдена. Но эта последовательность примерно того же порядка, как в арифметике, когда ряд однотипных упражнений даётся в порядке возрастающей трудности.

Конкретно это значит, что для каждого типа уравнений примеры с буквенными коэфициентами должны входить в состав упражнений в качестве завершающего этапа (но и тут перемежаясь с „числовыми" уравнениями). Примеры такого сочетания обоих видов упражнений даны в главе IV.

Отметим далее, что возможно раннее введение уравнений с буквенными коэфициентами диктуется и соображениями практического порядка. Уже в V и VI классах учащимся даётся в буквенном выражении ряд формул из геометрии и физики (формулы площади прямоугольника, удельного веса, равномерного движения и т. п.). Учащийся должен уметь оперировать с этими формулами, выражать любую из входящих в них величин через остальные. Но последнее есть не что иное, как решение уравнения с буквенными коэфициентами. Мы на примере учебника Wentworth and Smith видели (стр. 5), как такого рода специальные упражнения вводятся именно под углом зрения приобретения навыков решения уравнений.

Итак, вопреки установившейся практике, мы считаем методически целесообразным и практически необходимым, чтобы **упражнения в решении и составлении уравнений как с числовыми, так и с буквенными коэфициентами проводились параллельно для каждого типа уравнений.**

В связи с этим ещё более расширяется область практического применения тождественных преобразований и притом уже более сложных видов. Так, для выбранного нами в качестве иллюстрации раздела „Сложение и вычитание многочленов" параллельно с упражнениями и задачами, приведёнными в предыдущем параграфе, могут быть без особых затруднений решены и задачи таких типов:

А. **1.** $x+2x=a$.

2. $x+2x+3x=18m$.

3. $x+x+(x-a)=5a$.

4. $x+(x+a)+(x+a)-b=5a+2b$ и т. п.

Б. **5.** Два лица имеют вместе m руб., причём у первого восемью рублями больше, чем у второго. Сколько денег у каждого?

6. Два лица имеют вместе a руб., причём первый имеет на b руб. больше, чем второй. Сколько денег у каждого?

7. Два ученика имеют вместе p тетрадей, причём один имеет тетрадей вдвое меньше, чем второй. Сколько тетрадей имеет каждый?

И т. п.

Читатель сам легко составит задачи, аналогичные данным под №№ 3 и 4 в предыдущем параграфе.

Достаточно ясно, что решение таких задач с буквенными данными совсем не требует предварительного навыка в решении сложных численных уравнений. Последние существенной помощи оказать здесь не могут.

И наоборот, если мы сопоставим несколько аналогичных типов численных и буквенных уравнений, как, например:

$$x\pm 5=17; \qquad x\pm 5=a;$$
$$x\pm a=b;$$
$$7x=56; \qquad 7x=m;$$
$$nx=m;$$
$$5x\pm 17=48; \qquad 5x-3a=7a;$$
$$(x+2)+(x-7)-(x-3)=13;$$
$$(x+a)+(x-b)+(x-a)=2b,$$

то становится совершенно очевидным, что уравнения второго столбца являются естественным продолжением соответствующих упражнений первого столбца и именно в этой связи, как подтверждает опыт, обычно не вызывают у учащихся особых затруднений.

Против приведённых здесь под №№ 5—7 примерных задач и аналогичных им сторонники пунктуального следования программе могут выдвинуть следующее возражение: эти задачи приводят к дробным выражениям $\left(\frac{m \pm 8}{2}; \frac{a \pm b}{2}; \frac{p}{3}; \frac{2p}{3}\right)$, в то время как учащиеся ещё не изучали раздела „алгебраические дроби".

Мы не считаем это возражение существенным. Во-первых, мы не видим особой разницы между выражениями $\frac{p}{3}$ и $\frac{1}{3} p$, из которых последнее считается допустимым, так как $\frac{1}{3}$ здесь просто „дробный коэфициент". Во-вторых, мы считаем даже полезным с первых же уроков алгебры употреблять выражения не только с числовыми, но и буквенными знаменателями. Именно на таких выражениях учащимся легче уяснить одну существенную особенность алгебраических выражений: на многочисленных примерах они убеждаются, что численная величина любого выражения может быть целой или дробной в зависимости от числовых значений букв $\left(\frac{a}{3}\right.$ при $a = 6$ и $3a$ при $\left.a = \frac{1}{2}\right)$. В разделе же алгебраических дробей уже изучаются алгебраические операции над выражениями с буквенными знаменателями. Наконец, заядлые „ригористы" могут и избежать „дробных" выражений путём соответствующего подбора данных, заменив, например, m на $2m$ в задаче 5, a на $2a$, b на $2b$ и p хотя бы на $6p$ в задачах 6 и 7.

Уравнения с буквенными коэфициентами как целые, так и особенно дробные, значительно расширяют область применения тождественных преобразований. Но и здесь надо соблюдать меру. Мы решительно протестуем против таких, например, задач:

$$\frac{m^2 + n^2}{m + n}\left[2(m + n) - \frac{n^2 x}{m + n}\right] =$$
$$= \left[2m + n\left(\frac{m}{n} - 1\right)^2\right]\left(n - \frac{n x}{m - n}\right)^{1}$$

---

[1]) Шапошников и Вальцов, Сборник алгебраических задач, ч. 1, гл. VI, задача № 182.

иподобных им, очень напоминающих те же „истязательские", даваемые на приёмных испытаниях в вузы, задачи примеры которых мы привели выше в § 3.

Задачи №№ 136—180 задачника Шапошникова и Вальцова дают вполне достаточный подбор буквенных уравнений как в отношении охвата наиболее типичных форм таких уравнений, так и в отношении предельной степени трудности их. Они только должны быть расширены количественно аналогичными задачами, и, кроме того, к ним совершенно необходимо добавить группу уравнений, решаемых с помошью производных пропорций, т. е. уравнений вида

$$\frac{a \pm x}{x} = \frac{b \pm c}{c}; \frac{a \pm x}{a \pm x} = \frac{b \pm c}{b \pm c}; \text{ и т. п.}$$

Такого рода уравнения, особенно получаемые при решении арифметической задачи на пропорциональные величины или геометрической па подобие треугольников, служат прекрасным применением производных пропорций, обычно преподносимых ученикам в самой абстрактной форме.

Наконец, отметим, что параллельное решение уравнений с числовыми и буквенными коэфициентами нисколько не исключает специальной тренировки в решении последних, особенно задач более сложного типа. Указывая на №№ 136—180 задачника Шапошникова и Вальцова, мы считаем вполне возможным разбивку их на две группы: задачи №№ 136—150 и аналогичные им решаются параллельно с числовыми уравнениями того же вида (предельная степень сложности здесь № 149: $mx - p = nx + q$; № 150: $\frac{py}{p} - \frac{py}{p} = a$, задачи №№ 151—180 в основном решаются в VII классе в конце изучения темы „Уравнения", когда учащиеся уже владеют достаточным навыком в решении уравнений. Впрочем, так как эти номера содержат по преимуществу дробные уравнения (не содержащие неизвестного в знаменателе), то они и в нашей классификации (см. гл. IV) попадают как раз в последние группы.

§ 7. Подготовительные упражнения к составлению уравнений.

Приобретение навыка в решении задач методом уравнений — наиболее ценный практический результат изучения алгебры в средней школе. В то же время этот пункт является и наиболее слабым местом в знаниях учащихся. Навык в составлении уравнений по условиям задачи крайне нетвёрд и ограничен. Более или менее справляются учащиеся лишь с задачами самых элементарных типов.

Неудивительно поэтому, что в методической литературе, посвящённой уравнениям, вопросу о составлении уравнений уделяется наибольшее место и внимание. При этом чрезвычайно характерным является следующее обстоятельство: на протяжении полутора столетий авторы учебников и методисты старались найти и дать учащимся некоторое общее, единое правило для составления уравнения по условиям задачи, правило, которое являлось бы универсальным, т. е. было бы применимо к любой задаче[1]). Ниже (гл. V) мы дадим подробный анализ этих попыток, здесь же лишь отметим ту очевидную истину, что все они не дали желаемых результатов. Эта очевидность непосредственно вытекает из того факта, что навыки учащихся в составлении уравнений и по сию пору остаются неудовлетворительными, и мы не можем даже отметить какого-либо улучшения в этом отношении хотя бы за последние десятилетия.

Вывод из этого для нас совершенно ясен. Очевидно, надо отказаться от поисков единого, универсального рецепта, как не оправдавших себя, и искать других путей разрешения трудностей, возникающих при обучении учащихся решению задач методом уравнений.

Наш опыт, изучение опыта учителей-методистов, специально проведённая в течение ряда лет экспериментальная работа — всё это с полной убедительностью приводит к совершенно определённым выводам по рассматриваемому здесь вопросу.

Прежде всего необходимо выделить два основных этапа в решении задач методом уравнений: а) составление алгебраических выражений на основе зависимостей, данных в задаче; б) составление самого уравнения. Оба эти этапа имеют свои специфические трудности, и преодоление каждой из них требует особого подхода, особых приёмов и упражнений.

Нельзя и требовать, чтобы в течение небольшого промежутка времени, отведённого программой на уравнения

---

[1]) Правильнее было бы первую формулировку „универсального“ рецепта для составления уравнений отнести ещё к Ньютону („Arithmetica universalis“, 1707 г., см. ниже, стр. 122), но мы здесь имеем в виду прежде всего учебные руководства по алгебре, специально составленые для школ того или иного типа.

1-й степени, учащиеся приобрели достаточный навык в составлении алгебраических выражений, умели бы выражать математически все разнообразные зависимости между величинами, встречающиеся в задачах. Длительная предварительная тренировка в этом направлении, наличие уже достаточно твёрдого навыка в составлении математических выражений для наиболее типичных зависимостей являются необходимым условием для выработки навыка в решении задач. Только при этом условии к началу изучения самой темы „Уравнения“, при переходе к решению задач всё более усложняющихся типов первый из названных выше двух этапов легко преодолевался бы учащимися. Тем самым преподаватель получает возможность сосредоточить усиленное внимание на трудностях второго этапа.

Наиболее эффективным, можно сказать, незаменимым средством для приобретения навыка в составлении алгебраических выражений являются арифметические задачи, в которых одно или несколько из данных чисел заменены буквами.

Мы имели уже случай говорить об этих задачах, когда выдвигали требование об увязке алгебры, в частности раздела уравнений, с арифметикой.

Теперь мы предъявляем к этим задачам второе требование. Они должны быть подобраны таким образом, чтобы включали в себя все те типичные зависимости между данными величинами, с которыми наиболее часто приходится иметь дело при решении задач на составление уравнений.

Вот в этой, так сказать, „двойной функции“ арифметических задач и заключается прежде всего их особенная ценность: тесно увязываясь с курсом, давая непосредственный материал для применения и упражнения навыка в изучаемых тождественных преобразованиях, они в то же время дают основательную подготовку для надлежащего усвоения одной из важнейших и труднейших тем алгебры.

О других преимуществах этого вида упражнений мы скажем ниже (гл. VI), при обзоре некоторых других видов тренировочных упражнений, предлагавшихся методистами. Там же будут даны примерные образцы задач для каждого из разделов алгебры, изучаемых в VI–VII классах.

§ 8. Классификация задач.

Переходим ко второму выделенному нами ответственному моменту в решении задач методом уравнений — составлению самого уравнения.

Составление алгебраических выражений по условиям задачи допускает, как мы видели, предварительную тренировку на специально подобранных упражнениях.

Следовательно, мы можем считать, что при решении той или иной данной задачи этот этап решения не встретит особых затруднений.

Следующий этап состоит в том, чтобы полученные два алгебраических выражения (или алгебраическое выражение и данное число) связать друг с другом при помощи знака равенства, используя ту зависимость между ними, какая указывается задачей. Этот момент представляет обычно определённую трудность для учащихся и потому требует к себе особого внимания.

Опыт говорит за то, что должный навык в этом направлении может быть выработан лишь путём непосредственной практики, лишь в самом процессе решения специально подобранных и расположенных в методически целесообразном порядке задач.

Мы делаем особенное ударение на последнем пункте — на обязательности методически целесообразного подбора и расположения задач. Дело в том, что именно отсутствие этого методического подхода к вопросу характерно для всех наших учебников и методических руководств.

Признавая, что „для составления уравнений нет особых правил, каждая задача требует особых соображений, навык к которым приобретается только частым упражнением“ (А. Малинин и К. Буренин, Руководство алгебры); что „вообще же навыки в этом отношении даёт только практика“ (А. Киселёв, Алгебра, ч. 1), авторы руководств не делают никаких попыток помочь этой практике, создать благоприятные условия для выработки этого навыка, ограничиваясь „показом“ приёма составления уравнения на двух-трёх случайно выбранных задачах.

В чём же должен состоять методический подход к подбору и порядку расположения задач? Какой принцип должен быть положен в основу этого отбора и расположения? Легко заметить, что в отношении составления уравнения задачи, решаемые в школе, отличаются большим разнообразием в смысле степени трудности.

В одних задачах постановка знака равенства между двумя выражениями, можно сказать, принудительно диктуется самим текстом (их часто называют „прозрачными“ задачами). Например:

„Если некоторое число умножим на 3 и к результату прибавим 5, то получим 26. Какое это число?“

Уравнение $3x+5=26$ составляется здесь без всякого труда. Но имеется и ряд задач, где момент приравнивания двух выражений осложнён некоторыми дополнительными условиями и неясен для учащихся.

Очевидно, что задачи должны быть подобраны и расположены таким образом, чтобы обеспечить максимальную постепенность в нарастании трудности именно с точки зрения составления уравнения. Нужно, чтобы от „прозрачных“ задач к задачам наиболее трудным вёл ряд промежуточных ступеней. Коротко говоря, мы приходим к необходимости классификации задач по степени их трудности в отношении составления соответствующего уравнения.

В методической литературе предлагаются различные системы классификации. Их анализ и оценку мы дадим в главе VII. Здесь же изложим лишь основные принципы той системы классификации, к которой мы пришли в результате многолетнего опыта и специальной экспериментальной проверки, проведённой в 1936–1939 гг.

Прежде всего весь комплекс задач, решаемых в школе, мы разбиваем на два больших цикла: 1) пропедевтический цикл и 2) основной цикл.

I. Задачи пропедевтического цикла, как показывает уже самое название их, составляют основное содержание пропедевтического курса уравнений в VI–VII классах. Эти задачи обладают тремя характерными признаками:

а) По своему содержанию они являются типичными арифметическими задачами, что и выделяет их как наиболее подходящий материал для первоначального ознакомления с уравнениями. Структура этих задач, зависимости между данными в них величинами, арифметический способ решения их — всё это ещё достаточно свежо в памяти учащихся. В то же время новый способ решения и даже самая запись его в значительной степени, особенно на первых порах, совпадают с арифметическим (см. следующий параграф, п. 5).

б) Решение всех задач приводится к решению уравнения вида:

$$ax+b=c.$$

По существу это последнее условие только и делает возможным включение их в пропедевтический курс: уравнения этого вида можно решать на основе изученных в арифметике зависимостей между компонентами арифметических действий. Теоремы об эквивалентности уравнений ещё не являются здесь необходимыми для обоснования операций, производимых над уравнением в процессе его решения.

в) С точки зрения составления уравнения эти задачи представляют собой наиболее простую группу.

Прежде всего здесь приходится по условиям задачи составлять не два, а лишь одно алгебраическое выражение — для левой части уравнения (правую часть составляет данное число), что уже значительно облегчает решение. Далее приравнивание полученного выражения некоторому данному числу здесь достаточно ясно указывается содержанием самой задачи. Именно здесь мы и встречаемся с теми „прозрачными" задачами, о которых упоминали выше и которые должны составлять собой первую, исходную группу задач.

Такова общая характеристика первого „пропедевтического" цикла задач.

II. Задачи основного цикла — это задачи, решаемые в VII классе уже при прохождении самой темы „Уравнения". В своей подавляющей части (за исключением лишь одной группы задач) они характеризуются признаками, прямо противоположными признакам, перечисленным для задач первого цикла.

а) Задачи носят явно выраженный алгебраический характер. Они не поддаются или поддаются с большим трудом чисто арифметическому решению, причём это решение, как правило, носит сложный и в большой мере искусственный характер. Именно эти задачи особенно ярко оттеняют особенности и преимущества алгебраического метода решения.

б) Уравнения, к которым приводится решение этих задач, имеют вид:

$$ax + b = cx + d.$$

Решение этих уравнений требует применения теорем об эквивалентности.

в) С точки зрения составления самого уравнения задачи второго цикла включают в себя наиболее сложные случаи. Здесь приходится составлять два различных алгебраических выражения. В большинстве задач составление уравнения усложняется ещё тем, что полученные выражения не равны между собой, но находятся в известном разностном или кратном отношении.

Пропедевтический и основной циклы характеризуют собой соответственно два последовательных этапа в овладении теорией и практикой уравнений 1-й степени.

Дальнейшее дробление задач каждого цикла на более мелкие группы должно исходить из учёта трёх моментов:

1. Постепенное усложнение задач с точки зрения составления уравнения. Этот момент, как мы видели, и вызывает потребность в самой классификации задач, а потому и должен быть учитываем в первую очередь.

2. Расположение задач в порядке возрастающей сложности алгебраических выражений, получаемых при решении. Здесь в первую очередь нужно исходить из тех навыков в составлении алгебраических выражений, которые к данному моменту приобрели учащиеся путём тренировочных упражнений. Этот пункт главным образом относится к задачам первого цикла.

3. Соответствие каждой группы задач тому теоретическому материалу, который изучается в данный момент. Это значит, что каждая группа задач пропедевтического цикла должна соответствовать изучаемой на данном этапе программной теме. В основном цикле каждая группа иллюстрирует и даёт практическое применение тех сведений из теории уравнений, которые в данный момент излагаются учащимся.

Исходя из изложенных принципов, нами и построена та система классификации задач, детальное изложение которой мы даём в VII главе.

§ 9. Некоторые методические приёмы.

Приведённые в предыдущих параграфах основные методические требования являются обязательными для каждого педагога, желающего поставить на должную высоту уровень знаний учащихся. Но они, однако, не исчерпывают полностью всей методики преподавания уравнений. И при выполнении всех этих требований остаётся ещё достаточно широкое поле для проявления методического творчества, инициативы преподавателя. (Да и практическое проведение в жизнь перечисленных выше организационно-методических мероприятий потребует от преподавателя большой творческой работы.) Можно сказать, что каждый этап в изучении уравнений, каждая группа упражнений и задач могут потребовать от преподавателя некоторых специальных методических приёмов в зависимости от ряда обстоятельств: качества усвоения предшествующего материала, объёма и содержания предыдущих упражнений, непредвиденных трудностей, возникающих при решении данной задачи, и т. п.

В дополнение к изложенному скажем несколько слов ещё о некоторых методических приёмах, находящих себе применение на всех этапах изучения уравнений.

I. Уже из приведённых в §§ 5—7 иллюстраций видно, что мы предполагаем на всех этапах изучения уравнений параллельные упражнения в решении уравнений и в решении задач, приводящих к уравнениям изучаемого типа.

Мы поставили бы это требование в качестве одного из основных, если бы не были уверены, что подавляющее большинство преподавателей безусловно следует этому правилу. Но в дореволюционной школе имела место как раз противоположная практика. Считалось, что с точки зрения разделения трудностей целесообразно сначала выработать навык в решении уравнений всевозможных видов, чтобы затем при решении задач сосредоточить основное внимание на процессе составления уравнения. Те преподаватели, которые и сейчас ещё идут по этому пути, совершают грубую методическую ошибку.

Постепенность в нарастании трудностей должна проводиться не за счёт возведения искусственной стены между решением уравнения и решением задачи, хотя бы и приводящей к тому же уравнению. Постепенность должна и может быть выдержана по линии последовательного усложнения типа уравнений, безразлично, задаваемых ли непосредственно или получаемых в результате решения задачи.

Поясним сказанное примером. Возьмём хотя бы задачу:

„Ученик купил несколько тетрадей по 15 коп. за тетрадь и карандаш за 18 коп. Сколько тетрадей кулпи ученик, если вся покупка стоила 93 коп.?“

Задача приводит к уравнению:

$$15x + 18 = 93.$$

Совершенно естественно дать эту задачу именно тогда, когда учащиеся упражняются в решении уравнений вида: $ax + b = c$. Учащиеся к этому времени уже имеют навык в решении уравнений вида:

$$x + a = b; \quad ax = b$$

и задач, приводящих к таким уравнениям. Более того, они уже решали ряд арифметических задач типа:

„Ученик купил a тетрадей по 15 коп. за тетрадь и карандаш за 18 коп. Сколько он заплатил за всю покупку?“

Всего этого более чем достаточно для того, чтобы решение приведённой задачи не вызвало никаких затруднений как при составлении уравнения, так и при решении его.

Можно даже взять эту задачу как исходную для перехода к упражнениям в решении уравнений вида: $ax + b = c$.

Необходимо ли для решения этой задачи уметь решать сложные уравнения со скобками, дробными членами и т. п.? Очевидно, нет. И именно это обстоятельство и позволяет нам так спланировать пропедевтику уравнений, чтобы решение уравнений и решение задач проводились совместно, начиная с первых уроков алгебры.

II. Обращение к наглядности, к иллюстрациям может быть рекомендовано везде, где оно облегчает понимание вопроса, способствует более яркому и отчётливому закреплению его в памяти учащихся. Это требование в первую очередь относится к решению задач путём составления уравнения, особенно в момент перехода к задачам нового типа.

Средствами для наглядного изображения могут быть:

а) рисунок, в точности воспроизводящий содержание, или, как иногда говорят, „ситуацию“ данной задачи;

б) схема, иллюстрирующая содержание задачи с помощью условных изображений;

в) чертёж — в задачах геометрического характера и в задачах на движение.

Приведём несколько примеров.

Простые задачи, решаемые одним арифметическим действием, обычно не вызывают затруднений в отношении составления соответствующего уравнения. Но полезно всё же проиллюстрировать 2—3 такие задачи, главным образом для того, чтобы познакомить учащихся со способами наглядного воспроизведения задачи. В дальнейшем ученику легче будет применить уже знакомые ему приёмы наглядного изображения и в более сложных задачах.

1. „Ученик купил учебник за 65 коп. и пенал и заплатил за всё 97 коп. Сколько стоит пенал?“

Задачу можно иллюстрировать так[1]):

или так:

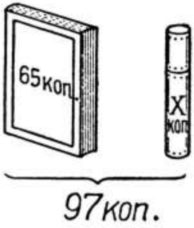


Рис. 1.

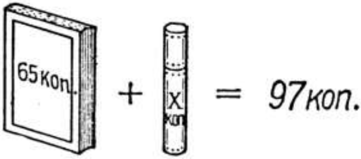


Рис. 2.

Ещё лучше, если, записав задачу сначала в первой форме, учащиеся, направляемые преподавателем, сами перейдут ко второй форме, представляющей уже собой картинную запись самого уравнения.

Могут указать на слишком уж явную примитивность этого приёма: ведь к таким иллюстрациям прибегают ещё в I—II классах начальной школы. Но здесь иллюстрация служит лишь средством для облегчения перехода к совершенно новой для учащихся форме записи условия задачи — записи в виде уравнения. И ничего нет плохого в том, что для этого используется уже ранее применявшийся, знакомый ученикам способ.

2. „На складе сложены дрова. После того как из этого запаса израсходовали 6,53 кубометра, на складе осталось 26,86 кубометра дров. Как велик был запас?“

Условие задачи можно изобразить условно так:

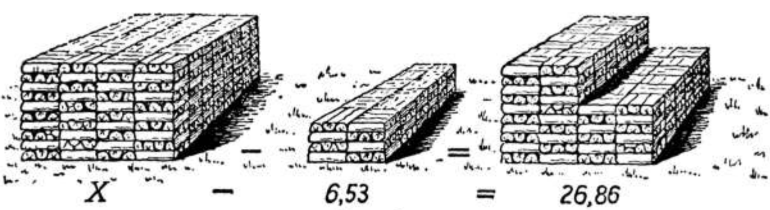


Рис. 3.

---

[1]) Конечно, рисунки, выполняемые на уроке, должны быть схематичными и не отнимать много времени.

или ещё проще:

$$\boxed{X} - \boxed{6{,}53\,м^3} = \boxed{26{,}86\,м^3}$$

Рис. 4.

Мы имеем здесь схематическую запись, которая уже вплотную подводит к непосредственной записи условия задачи в виде уравнения.

Отметим, что первая форма записи (без знаков), которую мы дали для первой задачи, была бы здесь неудобна: учащиеся уже привыкли величины, поставленные рядом, объединять при помощи сложения.

3. „Ученик купил 3 тетради по одинаковой цене и карандаш за 17 коп. Сколько стоила тетрадь, если за всю покупку заплачено 53 коп?“

Иллюстративная запись:

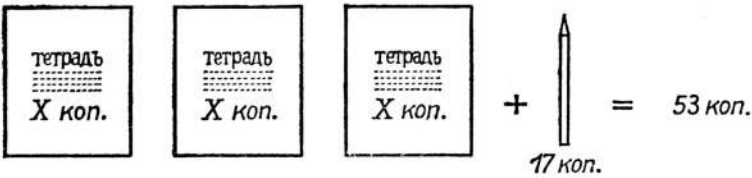


Рис. 5.

4. „В трёх корзинах находится 77 яблок, причём в первой и во второй поровну, а в третьей на 2 яблока больше, чем в каждой из остальных. Сколько яблок в каждой корзине?“

Условная запись:

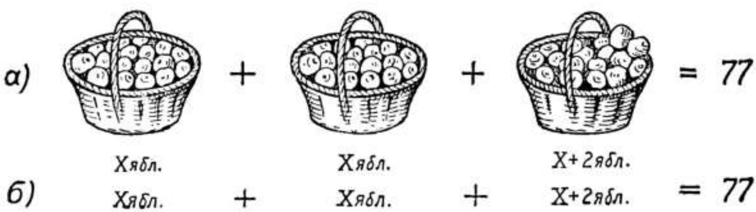


Рис. 6.

5. „В двух бидонах было поровну спирта. После того как из первого бидона перелили во второй 7 *л*, во втором стало спирта вдвое больше, чем в первом. Сколько литров было в каждом бидоне до переливания?“

Здесь уместно дать запись двух стадий:

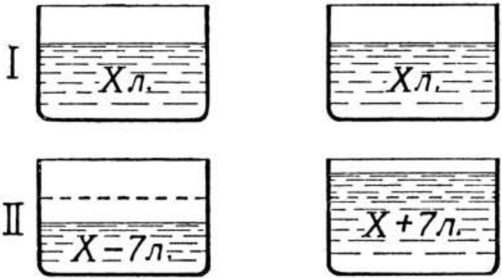


Рис. 7.

$$2(x-7)=x+7.$$

Кстати отметим здесь очень распространённую ошибку, которую обычно делают учащиеся. Если задать такой вопрос: „У двух мальчиков было поровну орехов. Первый дал второму 5 орехов. На сколько орехов у второго мальчика стало больше, чем у первого?“, то в 99 случаях из 100 первый ответ обязательно будет: „на 5 орехов“.

Здесь именно наглядные иллюстрации, подобные только что приведённой, очень помогут искоренению этой грубой и, повторяем, очень распространённой ошибки. Начать здесь надо с простых арифметических задач:

а) „У брата и сестры было по 5 тетрадей. Брат подарил сестре 2 тетради. Сколько тетрадей стало у каждого? На сколько тетрадей у сестры стало больше, чем у брата?“

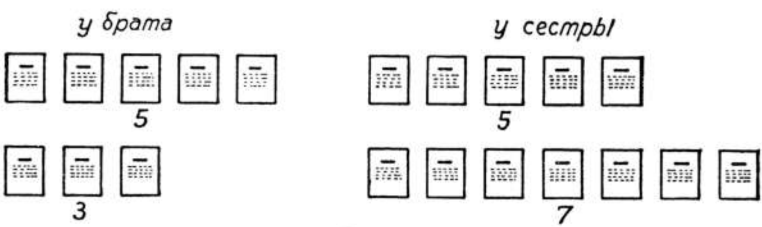


Рис. 8.

б) „В двух параллельных классах было по 38 учеников. Из одного перевели в другой трёх учеников. На сколько учеников во втором классе стало больше, чем в первом?“

Решение (без иллюстрации):

$$38 - 3 = 35, \quad 38 + 3 = 41, \quad 41 - 35 = 6.$$

в) „В двух классах было по a учеников. Из первого перевели во второй трёх учеников. Сколько учеников стало в каждом классе?“

Подобные задачи даются на первых уроках алгебры.

г) „В двух корзинах по a яблок. Из первой переложили во вторую 3 яблока. На сколько во второй корзине стало больше яблок, чем в первой?“ (рис. 9).

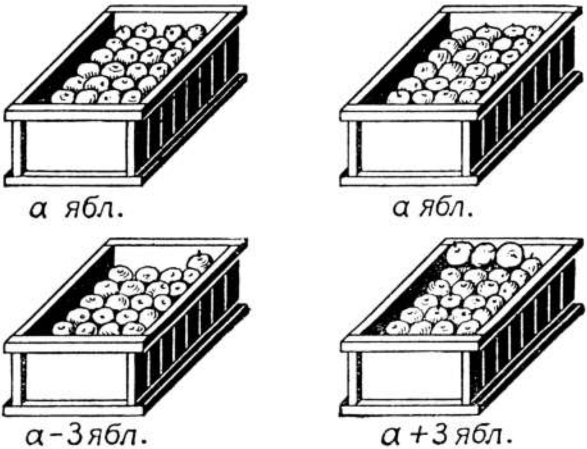


Рис. 9.

Задачи, подобные этой, даются при прохождении вычитания многочленов.

$$(a + 3) - (a - 3) = a + 3 - a + 3 = 6.$$

Вообще, отметим здесь, к наглядной иллюстрации следует прибегать не только при составлении уравнений, но и при решении арифметической задачи с буквенными данными, если она вызывает затруднения.

Что касается иллюстрации посредством чертежа, то последний, естественно, применяется, как уже сказано, в задачах с геометрическим содержанием и в задачах на движение. Этот приём настолько общеупотребителен, что мы не считаем необходимым здесь на нём останавливаться.

В заключение отметим, однако, что и в отношении наглядности не следует перебарщивать. Если учащиеся и без иллюстраций хорошо уясняют себе содержание задачи и легко составляют соответствующее уравнение, то, конечно, нет смысла тратить дорогое время „на рисование".

III. В заграничной учебной и методической литературе большой популярностью пользуется методический приём, заключающийся в представлении двух частей уравнения в виде двух чашек весов, находящихся в постоянном равновесии. Это тоже, конечно, один из методов привлечения наглядности.

„Две части уравнения можно уподобить двум чашкам весов, содержащим равные веса различных веществ или одного и того же вещества, но скомбинированного различным образом. Вполне допустимо снимать с чашек или класть на них равные количества, ибо при этом равновесие или равенство не нарушится. Но нельзя снять часть нагрузки с одной чашки и прибавить её к другой, если только сила не изменит знака и не станет действовать вверх. На самом деле, это можно осуществить, привязав груз к шнуру, перекинутому через неподвижный блок, и прикрепить другой конец шнура к чашке (рис. 10).

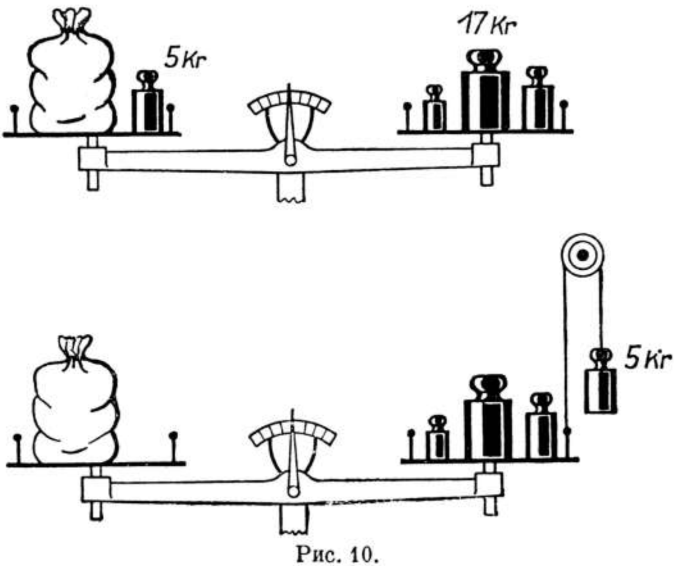


Рис. 10.

Факт этот проще всего выразить, сказав, что если какой-либо член или какая-либо величина переходит из одной части уравнения в другую, то они должны измениться в знаке, чтобы равенство не нарушилось, т. е. чтобы уравнение сохраняло свою силу" (О. Лодж, Лёгкая математика, преимущественно арифметика. Москва, 1909.)

Это уподобление уравнения весам можно найти почти во всех англо-американских учебниках. Встречается оно и в нашей методической литературе[1]).

Как видим из приведённой цитаты, этот приём используется для наглядной иллюстрации теорем об эквивалентности уравнений.

Его можно применить и при решении уравнений для предупреждения или обнаружения довольно часто встречающейся ошибки ученика и заключающейся в отбрасывании знаменателя в одной части уравнения без соответствующего изменения другой части. Например, уравнение

$$\frac{x-3}{15}=4$$

ученики часто „упрощают" так:

$$x-3=4.$$

Для уяснения ошибки здесь можно привлечь и „весы".

Допустим, что это уравнение получилось при решении такой задачи.

„Запас тетрадей был роздан поровну 15 ученикам, причём каждый ученик получил по 4 тетради, и 3 тетради осталось. Как велик был запас?"

Каждая часть уравнения выражает число тетрадей, полученных одним учеником. Пусть мы обе части „положили" на весы. Что делаем мы с грузом левой чашки, отбрасывая знаменатель? (Увеличиваем груз в 15 раз.) Останутся ли весы в равновесии? (Нет.) Что нужно сделать с грузом правой чашки, чтобы сохранить равновесие? (Увеличить и этот груз в 15 раз. Получим $4 \cdot 15 = 60$.) Итак, приходим к уравнению:

$$x-3=60.$$

Наконец тот же приём может оказать помощь и при составлении уравнений, притом уравнений наиболее сложного типа, когда два полученных алгебраических выражения находятся между собой в некотором разностном или кратном отношении.

---

[1]) См., например, статьи И. Макаревича и О. Диречиянца в журнале „Математика в школе", 1940, № 2.

Возьмём задачу № 392 из задачника Шапошникова и Вальцова:

„Некто имеет в правом кармане в 4 раза больше рублей, чем в левом; если же он переложит из правого кармана в левый 6 руб., то в правом окажется денег только втрое больше, чем в левом. Сколько денег в каждом кармане?“

Решая задачу, получим:

в левом кармане	в правом кармане
$x+6$	$4x-6$

К уравнению приведёт такая примерно последовательность вопросов:

Пусть все деньги даны в серебряных рублях. Если деньги из левого кармана положить на чашку весов, а из правого — на другую, будут ли весы в равновесии? (Нет.)

Которая чашка перетянет? (Вторая.)

Почему? (Потому что на неё положено втрое больше рублей.)

Что нужно сделать с первой чашкой, чтобы привести весы в равновесие? (Увеличить груз.)

Во сколько раз? (В 3 раза.)

Сколько будет тогда на первой чашке? [$3(x+6)$ рублей.]

Получаем уравнение: $3(x+6)=4x-6$.

Аналогично и притом ещё более наглядно, пользуясь этим же приёмом, можно составить уравнение и в случае, когда полученные выражения находятся в известном разностном отношении.

IV. Исторический элемент в преподавании уравнений оказывает такое же положительное влияние на их усвоение, как и в изучении всего курса математики в средней школе: он оживляет урок, вызывает у учеников интерес к вопросам теории и к решению задач.

При изучении уравнений исторический материал может привлекаться в двух направлениях.

Во-первых, по мере изучения уравнений следует систематически сообщать учащимся сведения исторического характера.

Так, уже в VI классе можно рассказать учащимся, что уравнения, подобные тем, которые они решают сейчас, решались ещё свыше 3000 лет назад древними египтянами. Привести примеры таких уравнений:

„Хау (куча); её седьмая часть, её целое это составляет 19“:

$$\left(\frac{x}{7}+x=19\right).$$

„Хау; её $\frac{2}{3}$, её $\frac{1}{2}$, её $\frac{1}{7}$, её целое дают 33“:

$$\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=33\right).$$

Решить эти уравнения, рассказав при этом о папирусе Ринда, из которого они взяты. Можно показать учащимся „способ ложного положения“, которым пользовались египтяне (а затем греки, индусы и арабы) при решении подобных задач. В VII классе при изложении теорем об эквивалентности следует рассказать об алгебре арабов и в связи с этим о происхождении названия „алгебра“.

В дальнейшем при изучении уравнений 2-й и высших степеней продолжается сообщение исторических сведений (решение квадратных уравнений вавилонянами, Диофант, Кардан, Феррари, Абель, Галуа).

Во-вторых, даются для решения исторические задачи с соответствующими пояснениями. Опыт показывает, что такие задачи вызывают живейший интерес. При этом достаточно бывает самых незначительных примечаний учителя. Так, к приведённым выше двум задачам интерес вызывается уже одним указанием, что они решались свыше 3000 лет назад. Для задач из „Арифметики“ Магницкого достаточно бывает указать, что эти задачи решал в своей юности гениальный русский учёный М. В. Ломоносов, и т. п.

В главе VII мы приводим ряд исторических задач. Преподаватель может увеличить их, использовав хотя бы известную книгу Попова „Исторические задачи“.

V. Форма записи условия задачи и хода её решения (обычно оба эти момента совпадают) имеет большое методическое значение. Надлежащий выбор записи может оказать существенную помощь в решении задачи, придавая ей бо́льшую наглядность и, так сказать, вплотную подводя ученика к правильному составлению уравнения. Недаром этому вопросу уделяется значительное внимание во многих методических статьях, посвящённых составлению уравнений[1]).

---

[1]) См., например, статьи Д. Маергойза и И. Брауна в журнале „Математика в школе“, 1936, № 5, а также ряд статей в № 2 за 1940 г.

При этом обычно рекомендуется та или иная форма записи, которую автор предпочитает всем другим и, как правило, только ею и пользуется.

Мы полагаем, что и здесь нельзя все задачи подводить „под один фасон“. Нужно пользоваться различными формами записи, применяя для каждого конкретного случая ту, которая на данном этапе наиболее понятна учащимся и скорее приводит к цели — уравнению. При этом следует последовательно переходить от одной формы записи к другой, проводя тенденцию постепенного сокращения записи, прежде всего в словесной её части, а затем и в отношении некоторых промежуточных этапов в процессе составления алгебраических выражений для обеих частей уравнения.

Наметим те три основные формы, которые в процессе изучения уравнений должны последовательно сменить одна другую.

а) Первая форма записи целиком воспроизводит знакомую уже учащимся форму записи решения арифметических задач.

„Три куска железа весят вместе 55 *кг*, причём второй из них в 3 раза, а третий в 7 раз тяжелее, чем первый. Сколько килограммов весит каждый кусок?“

Решение.

Обозначим вес первого куска (в килограммах) через x.

1) Сколько килограммов весит второй кусок?

$$3x\ кг.$$

2) Сколько килограммов весит третий кусок?

$$7x\ кг.$$

3) Сколько килограммов весят все три куска?

$$x\ кг + 3x\ кг + 7x\ кг.$$

По условию задачи:

$$x + 3x + 7x = 55.$$

Далее следует решение уравнения и ответ на вопрос задачи.

Эта форма записи является наиболее целесообразной на первом этапе изучения уравнений. Она целиком опирается на имеющийся уже у учащихся навык в решении арифметических задач.

Отметим, что к этой форме записи следует прибегать и при решении арифметических задач с буквенными данными, о которых мы говорили в §§ 5 и 8, особенно, если учащимся трудно сразу составить алгебраическое выражение, являющееся ответом на вопрос задачи.

Чрезвычайно полезно один или два раза провести параллельное решение арифметической задачи и аналогичной задачи на составление уравнений. Покажем это на примере.

Задача 1. „В одной бутыли x *л* керосина, в другой на 5 *л* меньше. Сколько литров керосина в обеих бутылях?"

Решение.

1) Сколько литров керосина во второй бутыли?

$$x-5.$$

2) Сколько литров керосина в обеих бутылях?

$$x+(x-5)=2x-5.$$

Задача 2. „В одной бутыли находится керосина на 5 *л* больше, чем в другой. Сколько керосина в каждой бутыли, если в них обеих содержится 17 литров?"

Решение.

Обозначим число литров керосина в первой бутыли через x.

1) Сколько литров керосина во второй бутыли?

$$x-5 (\textit{л}).$$

2) Сколько литров керосина в обеих бутылях?

$$x+(x-5) (\textit{л}).$$

По условию задачи:

$$x+(x-5)=17.$$

И т. д.

Второй пример параллельного решения следует дать для задачи в 4—5 действиях.

б) Вторая форма является естественным переходом от первой. Её сущность заключается в переходе от вопросительной формулировки отдельных этапов решения к утвердительной, чем достигается значительное сокращение записи.

„На четырёх складах лежит 11 000 *кг* угля. На втором складе вдвое больше угля, чем на первом; на третьем столько, сколько на первых двух вместе; на четвёртом столько, сколько на втором и третьем складах вместе. Сколько угля имеется на каждом складе?“

Решение.

1) На первом складе x(*кг*).
2) На втором „ $2x$ (*кг*).
3) На третьем „ $x + 2x = 3x$ (*кг*).
4) На четвёртом „ $2x + 3x = 5x$ (*кг*).
5) На всех четырёх складах $x + 2x + 3x + 5x$ (*кг*).

По условию задачи:

$$x + 2x + 3x + 5x = 11\,000.$$

Дальше — решение уравнения и ответы.

Понятно, что первая — распространённая — форма записи и вторая — краткая — допускают некоторые промежуточные формы („на первом складе было угля x *кг*“ и т. д.). Вполне возможно и дальнейшее сокращение записи („1-й склад x *кг*, 2-й $2x$ *кг* и т. д.).

Обе эти формы записи применяются при решении задач первого, пропедевтического, цикла, т. е. при решении задач, приводящих к уравнениям вида $ax + b = c$, другими словами, в VI и в первой четверти в VII классах.

в) Третья форма записи в свою очередь является следующей степенью после второй формы. Она продолжает тенденцию к дальнейшему сокращению записи и является по существу переходом от арифметической, словесной формы записи решения к схематической. Эта форма особенно удобна для задач второго — основного — цикла.

„Один самолёт находился от посадочной площадки на расстоянии втрое большем, чем второй. После того как первый самолёт пролетел 100 *км*, а второй 45 *км*, первый всё же находился от места посадки на расстоянии вдвое большем, чем второй. На каком расстоянии от места посадки был каждый из них первоначально?“

Решение.

	Первоначальное расстояние	Было пройдено	Новое расстояние
1-й самолёт	$3x$	100	$3x - 100$
2-й „	x	45	$x - 45$

По условию задачи:

$$3x - 100 = 2(x - 45).$$

Приведённая схема даёт понятие о той форме записи, которую можно принять в качестве основной и окончательной. Она, конечно, также допускает различные варианты.

§ 10. Итоги и выводы.

Подведём некоторые итоги изложенному в настоящей главе. Здесь выдвинут ряд требований, которые в своей совокупности могут вполне обеспечить надлежащее качество усвоения учащимися одного из важнейших и в то же время труднейших разделов алгебры — уравнений 1-й степени (а в связи с этим и всего остального материала, относящегося к уравнениям любой степени). Кратко эти требования могут быть сформулированы в следующей форме.

1. В VI и VII классах вводится пропедевтический курс уравнений. Каждой алгебраической теме, изучаемой в этих классах, сопутствуют решение и составление уравнений соответствующего вида.

2. Изучение уравнений и практика их решения и составления полностью базируются на арифметических знаниях учащихся.

3. Для всех видов изучаемых тождественных преобразований уравнения являются материалом для практического применения этих преобразований и средством для упражнения и закрепления навыка в этих преобразованиях.

4. Уравнения с числовыми и буквенными коэфициентами одного и того же типа решаются параллельно. Точно так же параллельно проводится практика решения уравнений и решения задач, приводящих к уравнениям этого же типа.

5. Для приобретения навыка в составлении алгебраических выражений по условиям задачи на протяжении всего курса алгебры в VI и VII классах решаются арифметические задачи с буквенными данными. Эти же задачи служат материалом для упражнений в тождественных преобразованиях.

6. Проводится разбивка на группы задач, решаемых методом уравнений, под углом зрения последовательного повышения степени трудности составления соответствующего уравнения.

Как видно, эти требования затрагивают самые различные моменты организации педагогического процесса, начиная с построения программы (пункт 1) и кончая специальными методическими приёмами (например пункт 6). Но тем не менее все они теснейшим образом связаны между собой, проводятся в практике преподавания совместно, переплетаясь друг с другом, часто находя своё выражение в одной и той же группе упражнений и т. д.

Чрезвычайно важно, чтобы преподаватель уловил и чётко осознал эту взаимосвязь, взаимозависимость выдвинутых требований, ибо, повторяем, только выполнение их во всей их совокупности может обеспечить достаточно высокий уровень усвоения учащимися всего раздела уравнений (и всей алгебры в целом). Про каждое из них можно сказать, что в той или иной форме и степени, на том или ином этапе изучения алгебры оно применялось многими учителями.

Так, арифметические задачи с буквенными данными решаются обычно на первых уроках алгебры; упражнения в составлении алгебраических выражений на специально подобранных примерах иногда проводятся учителями перед изучением или в начале изучения раздела уравнений; на некотором этапе численные уравнения перемешиваются с буквенными и т. д. Но каждое из этих, вообще говоря, целесообразных мероприятий проводится, во-первых, эпизодически, лишь на каких-то отдельных этапах изучения курса, во-вторых, изолированно друг от друга. От этого, конечно, крайне снижается, если не сводится к нулю, и эффективность их.

На конкретном примере сложения и вычитания одночленов и многочленов мы в предыдущих параграфах старались показать применение выдвинутых положений. Дадим здесь ещё один пример применения их, так сказать, в „собранном" виде.

Возьмём тему: „Формула квадрата суммы двух членов". Вывод формулы и упражнения на её закрепление и применение разбиваются на ряд последовательных этапов.

I. Прежде всего учащиеся к этому времени уже должны обладать некоторыми навыками и сведениями, значительно облегчающими вывод и запоминание формулы.

а) С первых же уроков алгебры учащиеся решали в различных вариантах задачи такого типа:

„В одном классе a учеников, а в другом на 5 учеников больше. Сколько учеников в другом классе?"

На дальнейших уроках, например при изучении сложения и вычитания алгебраических выражений, элементарные задачи приведённого типа входят составной частью в большинство сложных задач, и поэтому составить выражение $a+3$ для ответа на задачу:

„Сторона одного квадрата *a см*, а другого на 3 *см* больше. Чему равна сторона другого квадрата?“ —

не представит для них никакой трудности.

б) При ознакомлении с действием возвышения в степень, с понятиями „квадрат“, „куб“ числа учащиеся проделывают ряд упражнений и решают задачи примерно такого типа:

1. Сторона квадрата 11 *см*. Чему равна его площадь?
2. Сторона квадрата *x см*. Чему равна его площадь?
3. Сторона квадрата $(m+3)$ *см*. Чему равна его площадь?

[Найти числовую величину выражения $(m+3)^2$ при $m = 2, 8, 3\frac{1}{2}$].

4. Сторона одного квадрата *a см*. Сторона другого на 4 *см* больше (меньше). Чему равна площадь второго квадрата? (То же, что и в примере 3.)

в) При изучении умножения многочленов учащиеся упражнялись в умножении двучленов вида:

$$(x+3)(x+4);\quad (2x+3)(3x+7) \text{ и т. п.}$$

В частности решали уравнения вида:

$$(2x+3)(4x+5)-8x^2=81.$$

Частными случаями этих упражнений являются выражения вида:

$$(x+5)^2;\quad (2x+3)^2,$$

решаемые, понятно, путём непосредственного перемножения

$$(x+5)(x+5);\quad (2x+3)(2x+3) \text{ и т. д.}$$

и уравнения:

$$(2x+5)^2-4x^2=135.$$

Упражнения последнего типа, независимо от дальнейшего использования, ценны и сами по себе для более отчётливого понимания учащимися степени числа или алгебраического выражения. Но останавливаться долго на них не следует (именно потому, что дальше будет дан более целесообразный приём для упрощения таких выражений). Достаточно дать 2—3 примера.

Наконец, при изучении этого же раздела решаются 1—2 задачи такого типа:

„Сторона одного квадрата *x м*, сторона другого на 3 *м* больше. На сколько площадь второго квадрата больше площади первого?“

Учащиеся получают выражение:

$$(x+3)^2 - x^2.$$

Вычислив с учениками величину этого выражения для некоторых частных случаев ($x = 8$; 15), преподаватель предлагает упростить это выражение, раскрыв скобки. Получается выражение:

$$6x + 9.$$

Подстановка тех же значений x, что и для выражения (1) убеждает учеников в целесообразности произведённого преобразования, так как оно упрощает вычисления.

Этим можно и ограничиться или же решить ещё одну аналогичную задачу с видоизменённым текстом (взять площадь квадратного поля, сада).

Таким образом, мы видим, что к моменту вывода формулы учащиеся уже проделали целую серию упражнений, значительно облегчающих её вывод и усвоение.

II. Урок, посвящённый непосредственно выводу формулы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

начинается с решения задачи:

„К огороду, имеющему форму квадрата со стороной x *м*, сделали прирезку так, что каждая сторона увеличилась на 5 *м*. На сколько увеличилась площадь огорода?"

Получается выражение:

$$(x+5)^2 - x^2.$$

Мы видели, что все этапы составления этого выражения уже достаточно знакомы учащимся. Преподаватель напоминает, что нахождение численной величины этого выражения будет облегчено, если его упростить.

Учащиеся решают:

$$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2 + 5x + 5x + 25 =$$
$$= x^2 + 10x + 25$$

и получают:

$$(x+5)^2 - x^2 = x^2 + 10x + 25 - x^2 = 10x + 25.$$

Далее решается аналогичная задача, приводящая к выражению:

$$(x+3)^2 - x^2$$

и затем:

$$6x + 9.$$

III. После этого преподаватель обращает внимание учащихся на то, что в обоих случаях приходилось при помощи умножения возвышать в квадрат сумму двух чисел; указывает, что такая операция будет встречаться часто и в дальнейшем при решении упражнений и задач, и ставит вопрос — нельзя ли найти общий способ для возведения суммы двух чисел в квадрат, не прибегая каждый раз к умножению. Выписываются два выполненных уже примера:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25.$$
$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Если учащиеся из рассмотрения их ещё не улавливают закона их составления, то решается ещё пример:

$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49,$$

причём обращается внимание учащихся на отдельные этапы умножения. Подметив, что первый член результата является квадратом первого числа, второй член — удвоенным произведением обоих данных чисел, а третий — квадратом второго числа, учащиеся решают пример уже в общем виде:

$$(x + a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

и применяют полученную формулу к частным случаям ($a = 1, 4, 10$[1]).

IV. Полученная формула применяется к решению уравнений

$$(x + 9) - x^2 = 135$$

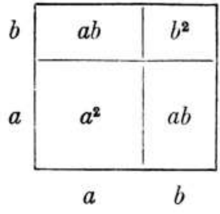
и задач:

„Квадратный участок огорода увеличен так, что каждая сторона его стала больше на 8 *м*, отчего площадь увеличилась на 176 *м*². Чему была равна каждая сторона огорода первоначально?"

---

[1]) Таким образом, задача, приведённая в п. 2, служит лишь отправным моментом для вывода формулы. Цель этой задачи — показать, что выражения вида $(a + b)^2$ действительно будут в дальнейшем встречаться, и поэтому является вполне целесообразным запомнить и затем записывать сразу результат возведения в квадрат суммы двух членов в виде трёхчлена, не прибегая каждый раз к непосредственному умножению. Дальнейшие упражнения уже преследуют двоякую цель: показать применение формулы в более широких масштабах, с одной стороны, и дать материал для надлежащего закрепления формулы в памяти учащихся и приобретения навыка в пользовании ею — с другой.

V. Даётся известная геометрическая интерпретация формулы:



Получается формула:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

и указывается, что обычно эта формула и даётся в учебниках в таком виде для запоминания. Даётся также словесная формулировка.

VI. Проводятся упражнения на применение формулы к вычислению квадратов чисел вида:

$$10k+1; \quad 10k+2; \quad 10k+3 \ (21^2; \ 41^2; \ 32^2 \text{ и т. п.}).$$

VII. Устанавливается, что формула применима и к выражениям вида:

$$(2x+5)^2; \quad (3x+5y)^2; \quad (1+2x^2)^2 \text{ и т. п.}$$

(см. задачник Шапошникова и Вальцова). Проводятся соответствующие упражнения, в частности решаются уравнения типа:

$$(3x+5)^2 - 9x^2 + 2x = 121; \quad (2x+a)^2 - 4x^2 = 13a^2$$

и 1—2 задачи на составление уравнений.

Обычно на весь изложенный материал достаточно бывает двух уроков. Но, если нужно, можно отвести на него и три урока, так как детальное изучение данной формулы сокращает время, необходимое для вывода и изучения формул:

$$(a-b)^2 \text{ и } (a \pm b)^3.$$

Данный пример хорошо иллюстрирует именно такое построение преподавания алгебры в VI—VII классах, которое обеспечивает надлежащее усвоение изучаемой темы и одновременно даёт серьёзную подготовку в решении уравнений и задач.

Мы видим, что здесь нашли своё применение буквально все шесть приведённых выше положений (чего, однако, нельзя требовать для всех тем без исключения), причём это применение не носило искусственного, надуманного характера.

Мы видим также, что изучение темы значительно облегчается тем, что при прохождении более раннего материала уже был предусмотрен ряд упражнений и задач, имеющий непосредственное отношение к данной теме.

Отсюда следуют два конкретных практических вывода для преподавателя.

1. Совершенно обязательна тщательная подготовка преподавателя к каждому уроку. Весь материал урока должен быть основательно продуман и подобран под углом зрения учёта методических требований, изложенных в настоящей главе.

2. При изложении каждой темы, особенно при подборе упражнений и задач, преподаватель всегда должен иметь в виду не только изучаемую тему, но и последующие. Если упражнение или задача, относящиеся непосредственно к изучаемой теме, в то же время могут послужить базой, отправным материалом для какой-либо из последующих тем, то их следует непременно включить для решения на уроке или в порядке домашнего задания. Говоря о последующих темах, мы в первую очередь подразумеваем здесь уравнения, но не только их. Так, в приведённом примере мы видели, что упражнения и задачи, данные в п. I, послужили нам базой для вывода формулы квадрата суммы.

Понятно, что такая организация преподавания потребует на первых порах от преподавателя значительной затраты труда и времени. Но, во-первых, эта затрата окупается тем, что каждая следующая тема проводится с меньшими трудностями и в более быстрых темпах; во-вторых, подбор материала и планирование уроков потребуют специальной предварительной работы, лишь когда преподаватель впервые приступает к такому построению курса. В последующие годы будут иметь место лишь пополнение, перегруппировка и частичная замена материала на основе полученного опыта. В-третьих, наконец, достаточной наградой за затраченный труд явится то моральное удовлетворение, которое, несомненно, будет испытывать преподаватель, отчетливо видя в результате этого труда резкое повышение качества знаний учащихся.

В последующих главах мы более подробно рассмотрим отдельные моменты изучения раздела уравнений, имея в виду помощь начинающему педагогу именно в этой подготовительной работе.

Глава III.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ.

§ 11. Понятия об уравнении.

В научной математической литературе уравнение чаще всего определяется как равенство двух функций.

„Уравнение — равенство между двумя функциями того или иного числа „неизвестных" величин; например, в случае трёх неизвестных x, y, z общий вид уравнения:

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z)\text{''}.$$

(Академик А. Н. Колмогоров, БСЭ, т. 56, стр. 163.)

Распространяя это определение на произвольное конечное число n неизвестных, мы можем общий вид уравнения представить в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

В частном случае одна из функций может равняться некоторому постоянному числу c, и тогда (1) примет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c. \tag{2}$$

Наконец, в ещё более частном случае c может быть равно нулю, и мы будем иметь:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{3}$$

Легко видеть, что теоремы об эквивалентности позволяют всегда уравнение, данное в форме (1), привести к виду (2) и (3). Поэтому все эти три определения уравнения являются совершенно равнозначащими. И действительно, в математической литературе наряду с приведённым выше часто встречаются и определения в форме (2) и (3).

„Пусть $\frac{f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{g(c_1, c_2, \ldots, c_n)}$ рациональная функция от $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с рациональными коэфициентами (где f и g — целые рациональные функции); её значение при данных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вычислить легко. Гораздо труднее обратная задача: пусть известно значение C нашей функции, но неизвестно значение одного из её аргументов, например c_1, т. е. пусть нам дано:

$$\frac{f(x, c_2, \ldots, c_n)}{g(x, c_2, \ldots, c_n)} = C; \tag{4}$$

это равенство представляет собой уравнение для x, которое мы всегда можем привести к обычному виду, освободившись от знаменателя, раскрыв скобки и т. п." (А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры).

„Если дана функция $f(x)$, то один из важнейших вопросов, которые можно относительно неё поставить, состоит в следующем: может ли эта функция при каком-либо значении x принять наперёд заданное значение a?

Этот вопрос приводит к уравнению

$$f(x) = a \text{ или } f(x) - a = 0\text{“}$$

(проф. Г. М. Шапиро, Высшая алгебра).

Это научное определение уравнения принято и во многих заграничных, особенно в английских и американских учебниках. Только слово „функция" обычно заменяется термином „алгебраическое выражение" (короче, как это принято и у нас, просто „выражение"). Приведём несколько примеров.

„Уравнение состоит из двух выражений, численные величины которых равны" (R. C. Buck, A manuel of algebra, London, 1898).

„Уравнение есть утверждение (a statement) о равенстве двух выражений" (W. J. Risley, Algebra, p. II, Chicago).

„Уравнение есть утверждение о равенстве между двумя выражениями. Формулы, которыми мы пользовались (площадь прямоугольника, треугольника, объём параллелепипеда, формула процентов. — *А. Б.*), суть уравнения. Другие примеры:

$$10 = 6 + 4; \quad x + 5 = 7; \quad 2x - 3 = 11\text{“}.$$

(Longley and March, Algebra, New York, 1927.)

Можно было бы ещё увеличить число приведённых примеров. Ограничимся цитатой из популярного учебника известного французского математика Бореля:

„Под уравнением подразумевается равенство двух алгебраических выражений, в которых одна или несколько букв рассматриваются как неизвестные или как переменные величины" (Борель, Элементарная математика, I — Арифметика и алгебра, перевод под ред. В. Ф. Кагана, 1923).

Итак, мы видим, что в этих учебниках термину „уравнение" придаётся самое широкое значение. Приведённый выше в одном из учебников пример уравнения $10 = 6 + 4$ показывает, что это понятие включает в себя и числовые тождества. Об этом прямо говорит, например, такое определение:

„Выражение равенства между двумя числами или количествами (two numbers or quantities) называется уравнением" (G. Wentworth and D. E. Smith, Academic Algebra, Boston).

От этого вполне научного и в то же время достаточно элементарного определения резко отличается определение, обычно преподносимое учащимся в средней школе. Это определение имеет за собой значительную (столетнюю!) давность и в несущественных вариациях повторяется в большинстве как заграничных, так и наших учебников, в том числе и в принятом ныне учебнике А. П. Киселёва. Сводится оно к следующему.

1. Даётся определение равенства как „соединения двух алгебраических выражений знаком = “.

2. Равенства разбиваются на два класса:

а) равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, — тождества;

б) равенства, справедливые только при некоторых значениях входящих в них букв, — уравнения.

Чем объяснить, что простое и краткое научное определение уравнения подменяется определением многословным и, как увидим далее, в существенных пунктах расходящимся с научным. Ответ может быть только один: здесь над учебником и учителем тяготеет традиция, рутина, привычка к определению, которое учитель сам заучивал в свои школьные годы. Сюда как нельзя более относится та характеристика, которая дана проф. А. Я. Хинчиным школьной трактовке основных понятий математики.

„Никак нельзя объяснить и оправдать того общеизвестного явления, что даже самые основные понятия, формулировки и методы рассуждения в школьном преподавании в силу вековой традиции часто излагаются в несоответствии с их пониманием и трактовкой в современной науке. Ссылка на якобы достигнутое этим облегчение усвоения соответствующих фактов совершенно несостоятельна: в подавляющем большинстве случаев научная концепция тех понятий, о которых здесь идёт речь, элементарней и проще и во всех случаях отчётливей той, которая по традиции культивируется учебниками; приведённая ссылка почти всегда имеет целью маскировку косности и рутины методической среды; мы часто на все предложения обновления слышим только, что „по старинке будет легче“; ни в одном случае мне не удалось добиться, почему по старинке будет легче; и во всех случаях я приходил к убеждению, что легче будет учителю, вызубрившему учебник и не желающему переучиваться, а никак не ученику; во всех случаях это было равнение методиста на отсталые слои учительства, в то время как передовые учителя заинтересовывались новшеством, охотно продумывали и часто принимали его“[1]).

[1]) Проф. А. Я. Хинчин, Основные понятия математики в средней школе, „Математика в школе“, 1939, № 4, а также в отдельном издании Учпедгиза.

Эта цитата как нельзя более правильно и метко характеризует позицию, которую заняла наша школьная практика по отношению к понятию уравнения.

Мы считаем, и надеемся показать это ниже, что нет никаких оснований цепляться за традиционное, в достаточной мере устаревшее определение. Оно расходится с научным определением уже тем, что суживает самое понятие об уравнении.

В самом деле, как легко видеть, принятое в нашей школе определение исключает из класса уравнений две большие категории равенства:

а) равенства, не удовлетворяющиеся никакими числовыми значениями входящих в них букв (уравнения, не имеющие решений).

Действительно, ведь определение называет уравнением только такое равенство, которое „справедливо при некоторых значениях букв".

б) равенства, удовлетворяющиеся любыми значениями букв (тождества).

Это фиксируется самим определением, противопоставляющим тождества уравнениям.

Остановимся подробнее на этих двух моментах.

§ 12. Уравнения, не имеющие решений.

Может случиться, что данное уравнение не имеет ни одного решения, например уравнение

$$x = x + 3. \tag{6}$$

В этих случаях часто употребляют такое выражение: „уравнение невозможно" или „данное равенство не является уравнением". Заметим, что такая фразеология наиболее часто встречается именно среди учительства и объясняется тем, что такое толкование случаев, подобных (6), очень легко воспринимается учениками. В самом деле, ведь не может быть, чтобы какое-либо число, будучи увеличено на три, оставалось равным прежнему своему значению. А стало быть, уравнение (6) „невозможно". А главное, как мы видели, самое определение уравнения приводит к такому выводу.

Такую точку зрения на уравнения, не имеющие решений, следует признать совершенно неправильной по ряду мотивов.

1. С точки зрения логики выражение, что данная функция не принимает значение α для уравнения (5) ни при ка-

ких значениях x, является таким же точным ответом на заданный вопрос, как и ответ, что $f(x) = a$ при $x = 5$ или при $x = \sqrt{2} - 1$.

По современной терминологии корни уравнения (6) составляют пустое множество, которое, как известно, в теории множеств так же учитывается, как и всякое другое.

2. В ряде случаев мы не можем установить, имеет ли данное уравнение хотя бы одно решение. Так, до настоящего времени ещё не установлено, имеет ли решение в рациональных числах уравнение

$$x^n + y^n = z^n \tag{7}$$

при любом целом n, большем двух. Но отсюда никак не вытекает, что выражение (7) не является уравнением. В этих случаях, когда приходится оперировать с подобными выражениями, то обычно лишь вводится условие: „если множество решений уравнения не пустое“... и т. п.

Поэтому никак нельзя согласиться со следующим утверждением проф. Юнга:

„Совершенно правильно с логической стороны условиться о том, чтобы до тех пор не называть уравнением формулу, в которой знаком равенства соединены два выражения, заключающие неизвестную величину, пока мы не узнаем, что есть такое значение неизвестной величины, для которого два выражения действительно равны“ (Дж. В. А. Юнг, Как преподавать математику, гл. XIV).

Правда, в последующем тексте автор всё же приходит к противоположному выводу:

„Таким образом, по существу своему этот тип равенства предполагает наличность задачи, и потому совершенно столь же логично и более удобно называть такие равенства уравнениями с самого же начала, а не ждать до того времени, пока решим задачу“ (там же).

Но, во-первых, Юнг почему-то связывает эту „уступку“ с наличием задачи, что совершенно не необходимо. Мы можем исследовать различные виды уравнений независимо от наличия соответствующей задачи (хотя бы уже в предположении, что может встретиться задача, приводящая к такому уравнению), и от этого исследование не только не теряет своей ценности, но, наоборот, может в дальнейшем способствовать более быстрому разрешению того или иного исследуемого вопроса. Во-вторых, это второе утверждение только оттеняет и усиливает неправильность первого, да ещё высказанного в такой категорической форме.

3. Наконец, и это самое главное, одно и то же уравнение может не иметь решений в одной числовой области и иметь решения в другой, расширенной числовой области. А именно с такими уравнениями и приходится иметь дело в школе в подавляющем числе случаев. Возьмём для примера несколько уравнений, поставив рядом с ними то числовое множество, на котором рассматривается данное уравнение:

Уравнение	Соответствующее числовое множество
$3x + 15 = 0$	натуральные числа
$2x - 81 = 0$	целые ,,
$x^2 - 5 = 0$	рациональные ,,
$x^2 + 5 = 0$	вещественные ,,

Каждое из этих уравнений неразрешимо в поставленной рядом с ним числовой области и предшествующих ей, но имеет вполне определённые решения во всех следующих ниже множествах.

Было бы в достаточной степени нелепо одно и то же выражение считать и не считать уравнением, в зависимости от значений, которые может принимать неизвестное. Гораздо проще все приведённые выражения называть уравнениями, имеющими или не имеющими решения в той или иной числовой области.

Итак, мы можем сделать определённый вывод: нет никаких резонов исключать из класса уравнений те из них, которые при заданных условиях не имеют решения.

Поэтому такие выражения, как „уравнение невозможно“ или „задача невозможна“ (возможна любая задача как некоторый определённый вопрос), должны быть изъяты из школьного словоупотребления. Вместо них должны иметь место выражения „уравнение (задача) не имеет решения“ (при заданных условиях) и т. п.

§ 13. Уравнения и тождества.

Другой крайний случай мы имеем, когда равенство оказывается справедливым при любых произвольных значениях входящих в него букв, как, например:

$$3x + 8 = 3(x + 1) + 5;$$
$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Как известно, такого рода равенства называются тождествами.

По вопросу о взаимоотношении уравнений и тождеств существуют две противоположные точки зрения. Одна рассматривает тождества как частный случай уравнения. Определение уравнения включает, следовательно, и тождество как уравнение, удовлетворяющееся любыми значениями неизвестных.

„Уравнение, справедливое при любых значениях неизвестных, называется тождеством; например, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ есть тождество" (акад. А. Н. Колмогоров, см. цитированную выше статью в БСЭ, т. 56[1]).

На той же позиции стоят и авторы цитированных выше (а так же и ряда других) заграничных учебников.

„Если равенство справедливо при некоторых определённых значениях, придаваемых буквенным символам, уравнение называется условным; если равенство имеет место без каких-либо ограничений, уравнение называется тождеством" (Buck).

„Тождественное уравнение (An identical equation) — это уравнение, в котором обе его части равны независимо от того, какие значения даны входящим в него буквам; так

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)\text{" (Risley).}$$

„Уравнение, которое справедливо для каких угодно значений букв, называется тождеством" (Wentworth and Smith).

Ещё более уточнённую формулировку дают в своём учебнике Longley и Marsch:

„Условное уравнение (An equation of condition) есть уравнение, справедливое для некоторых определённых значений входящих в него букв, для которых (т. е. значений. — *А. Б.*) обе части уравнения имеют смысл. Так, уравнение

$$7x - 2 = 3x + 6$$

верно только, если $x = 2$. Следовательно, оно является условным уравнением.

Тождество (An identity) есть уравнение, которое справедливо для всех значений входящих в него букв, для которых обе части уравнения имеют смысл. Так, уравнение

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

есть тождество, остающееся верным, какие бы значения для x ни были даны".

---

[1]) Эта точка зрения проводится и в вышедшем в 1940 г. учебном пособии по алгебре для средней школы П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова.

Однако в большинстве школ (в частности, во французской) проводится другая точка зрения. В нашей школе она господствует прежде всего потому, что её более или менее чётко проводят как принятый в настоящее время учебник алгебры Киселёва, так и все другие известные нашему учительству учебники элементарной алгебры. Эта точка зрения противопологает тождества уравнениям, разбивая, таким образом, равенства на два класса: 1) равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, — тождества; 2) равенства, справедливые лишь при некоторых значениях входящих в них букв, — уравнения.

Такие именно определения тождества и уравнения, почти буквально совпадающие, и даются во всех употреблявшихся в нашей средней школе учебниках (Киселёв, Малинин, Лебединцев, Рашевский и многие другие).

Своеобразную и в достаточной мере странную и невразумительную классификацию даёт известный учебник А. Давидова, в своё время не менее распространённый, чем учебник Киселёва.

Определив равенство как „соединение двух выражений посредством знака равенства", автор далее делит все равенства на три класса:

1. „Когда равенство двух выражений или само собой очевидно, или становится очевидным после выполнения некоторых действий, то оно называется тождеством".

2. „Когда буквенные выражения, предполагаемые известными по условию, равны, то они составляют собственно так называемое равенство. Например, предполагая четыре количества a, b, c и d пропорциональными, называем выражение $ab = bc$ равенством".

Далее идёт довольно странное замечание:

„Хотя по определению слова „тождество" и „равенство" имеют совершенно определённое значение (по отношению к данному здесь определению равенства мы не можем согласиться с этим утверждением. — *А. Б.*), но *иногда называют тождество также равенством*" (курсив наш. — *А. Б.*).

3. „Если два буквенных выражения равны между собой только вследствие того, что одной или нескольким буквам приписываем особые величины, то *такое равенство* (курсив наш. — *А. Б.*) называется уравнением".

Не говоря уже о неудачной формулировке первого и третьего определений и в достаточной мере туманной второго, мы обращаем внимание на полную путаницу, связанную с понятием равенства: с одной стороны, термин „равенство" имеет своё „совершенно определённое значение". С другой стороны, как указано в примечании ко второму определению, понятия тождества и равенства можно объединить в одно понятие „равенство". И, наконец, как указано в самом начале, все три понятия: „тождество", „равенство" и „уравнение" — тоже объединяются в одно понятие „равенство". Короче говоря, по утверждению автора, равенством называются лишь выражения, принадлежащие ко второму классу; но „иногда" равенством одинаково называются выражения, принадлежащие и к первому и ко второму классам; сам же автор называет равенствами и выражения всех трёх классов.

После таких „определений" остаётся только снова спросить автора: итак, что же такое равенство?

Отметим кстати, что такое же невразумительное определение даёт А. Давидов и алгебре в целом.

„Алгебра учит рассуждать о величинах. При этом она изображает их буквами и означает особыми знаками зависимость между ними".

И это всё. Но возьмём хотя бы дифференциальное исчисление. Оно тоже ведь учит „рассуждать о величинах", тоже изображает их буквами и тоже „означает особыми знаками" зависимость между ними. Возьмём далее теорию чисел, исчисление конечных разностей и т. п. О них буквально можно сказать то же самое. И опять остаётся только снова спросить автора: что же такое алгебра?

Мы намеренно остановились на этом, повторяем, в своё время достаточно популярном, выдержавшем более двух десятков изданий учебнике, чтобы на этом примере показать учительству, как критически следует подходить к тексту всякого учебника, подвергать строгому анализу каждое его правило, определение и вносить необходимые коррективы.

Приведём ещё точку зрения на рассматриваемый здесь вопрос американского методиста Юнга, поскольку его книга и в настоящее время пользуется авторитетом (и вполне заслуженным) среди учительства и поскольку его трактовка тождеств и уравнений разделяется и проводится рядом учителей.

„Весьма важно различие между тождествами и уравнениями, составленными на основании известного условия. Тождеством устанавливается факт; уравнением, вытекающим из известного условия, — некоторая задача. Тождество $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ представляет собой сообщение известного сведения независимо от того, какие числа представлены при посредстве a и b.

Уравнение $x^2 + 3x = 4$ (написанное на основании некоторого условия) устанавливает известную задачу. В ней ставится вопрос о том, какое число (или какие числа, если только они существуют) обладает таким свойством, что квадрат его, будучи сложен с произведением того же числа на 3, даёт в сумме 4".

Как видим, Юнг стоит на второй точке зрения, противопоставляя уравнение тождеству. При этом образность противопоставления: тождество — факт, уравнение — задача (иногда говорят: тождество — утверждение, уравнение — вопрос) подкупает некоторых учителей, предлагающих принять это образное сравнение в качестве определения, что, конечно, с логической стороны нельзя считать правильным. Здесь имеет место именно та замена определения „поясняющим описанием", о которой говорит проф. А. Я. Хинчин („О математических определениях в средней школе", „Математика в школе", 1941, № 1).

Какой же из этих двух противоположных взглядов на тождество является более правильным логически и более приемлемым с точки зрения методики? Вторая точка зрения имеет за собой преимущество в отношении как исторической давности, так и широты её распространения. Она пустила глубокие корни в школе. Так именно трактовали этот вопрос те учебники, по которым учились сами теперешние учителя; так именно трактуют этот вопрос и те учебники, по которым они сейчас преподают в школе.

Первая же точка зрения выдвинута совсем недавно, многим учителям даже просто ещё неведома.

И всё же нужно признать именно эту точку зрения более правильной, методически более завершённой. Мы убеждены, что она постепенно будет завоёвывать всё большее число сторонников, найдёт своё выражение в учебниках и в конце концов совершенно вытеснит вторую.

Какие основания заставляют предпочесть трактовку тождеств как частного случая (вида) уравнений?

I. С логической стороны тождества представляют собой естественное завершение цепи уравнений с расширяющимся постепенно числом возможных решений. Переход от уравнений к тождествам (по старой терминологии) вовсе не является таким „прыжком через пропасть", как обычно представляют этот процесс сторонники второй точки зрения.

В самом деле, возьмём такую последовательность равенств:

1. $x + 2 = x + 5$.	Равенство не может быть верным ни при каком значении x.	Уравнение не имеет решений.

2. $x+2=15$.	Равенство справедливо только при $x=13$.	Уравнение имеет одно решение.
3. $x^2-7=0$.	Равенство справедливо при $x=+\sqrt{7}$ и при $x=-\sqrt{7}$.	Уравнение имеет два решения.
4. $E(x)=x$[1].	Равенство справедливо при любом целом x.	Уравнение имеет бесчисленное множество решений.
5. $\lvert x\rvert=x$[2].	Равенство справедливо при любом положительном x.	Уравнение имеет бесчисленное множество решений.
6. $\lvert x^2\rvert=x^2$.	Равенство справедливо при любом вещественном x.	Уравнение имеет бесчисленное множество решений.
7. $2(x+2)=2x+4$.	Равенство справедливо при любом значении x.	Уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Мы считаем, что расстояние, разделяющее примеры (6) и (7), едва ли больше, чем расстояние, например, между примером (3) (хотя бы и продолженным до уравнений с любым конечным числом n решений) и примером (4). Но ведь никто не усомнится в том, что равенство (4) является уравнением.

Более того, возьмём хотя бы уравнение

$$x+y=7.$$

Ведь оно тоже, как уравнение (7), удовлетворяется любыми значениями x, и только y при этом для каждого данного x получает одно вполне определённое значение. Рассматривая график уравнения (функции) $y=x+3$, мы обычно говорим, что x получает любые произвольные значения, и уже в зависимости от них определяем y.

Итак, с логической точки зрения трактовка тождества как частного случая уравнения является, по нашему мнению, в достаточной мере оправданной.

II. С практической стороны здесь вполне целесообразно выдвинуть тот же аргумент, который мы приводили в предыдущем параграфе по поводу уравнений, не имеющих решения: далеко не всегда мы можем заранее установить, является ли данное равенство уравнением или тождеством.

Так, в высшей алгебре для доказательства равенства (тождественного) двух многочленов

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ и } b_n x^n + \\ + b_{n-1} x^{n-1} \ldots + b_1 x + b_0$$

[1]) $E(x)$ означает целую часть числа x.

[2]) $\lvert x\rvert$ означает абсолютную величину числа x.

прибегают к такому методу: составляют уравнение:

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

и доказывают, что оно является тождеством, т. е. что все его коэфициенты равны нулю.

Нет никаких оснований отказываться называть уравнением равенство до тех пор, пока не установим, при любых или не при любых значениях букв оно справедливо.

III. Наконец, и с точки зрения методики следует предпочесть такую трактовку тождества, которая (не в ущерб логической стороне вопроса) упрощает теорию, даёт её более стройной и более доступной для восприятия её учащимися. Несомненно, что ученик часто затрудняется определить, имеет ли он в данном случае перед собой уравнение или тождество. Какой учитель сплошь и рядом не наталкивается на такие невесёлые курьёзы, когда ученики относили равенство к уравнениям или к тождествам, смотря по тому, какие буквы фигурируют в нём x, y или a, b; когда они становятся втупик перед задачей: решить уравнение $s = vt$ относительно v („какое же это уравнение, ведь тут нет неизвестного", т. е. x).

В то же время в нужных случаях всегда легко выделить тождество, убедиться в особенном свойстве данного уравнения (удовлетворяется любыми значениями букв) и сделать соответствующие выводы из этого факта.

Так, аналогично, в алгебре два таких противоположных действия, как сложение и вычитание, объединяются в одно — алгебраическое сложение, благодаря чему формулы и выводы приобретают большую общность. В нужных же случаях мы всегда сможем отделить их друг от друга, например изучая отдельно сложение и вычитание двух неравенств.

§ 14. Определение уравнения в школе.

Итак, на вопрос: какое же определение уравнения должно быть принято в средней школе, мы можем ответить вполне конкретно и определённо.

1. Следует раз навсегда отказаться от принятого в настоящее время в школе определения и заменить его настоящим научным определением. Проф. А. Я. Хинчин дал чёткий и исчерпывающий перечень тех условий, наличие которых допускает замену научной трактовки понятия другой, делает такую замену целесообразной с методической точки зрения:

„В случаях, когда возрастные условия не позволяют дать такую трактовку понятия, какая принята современной наукой, концепция этого понятия в школьном курсе может быть упрощена... Но ни в одном случае школа не должна в целях упрощения искажать научную трактовку понятия, придавать ему черты, противоречащие научному его пониманию, — черты, которые в последующем пришлось бы искоренять; другими словами, ни в одном случае школа не должна развивать понятия в направлении, отклоняющемся от пути его научного развития“[1]).

По отношению к понятию уравнения мы можем констатировать отсутствие всех приведённых условий. Здесь „всё наоборот“.

а) Научное определение понятия совершенно элементарно и вполне доступно учащимся VII класса.

б) Принятое в школе определение ни в какой мере не является упрощённым по сравнению с научным.

в) Оно, как мы видели, расходится с научным определением, суживает его.

Вывод может быть только один — это определение уравнения должно быть изгнано из школьного преподавания.

2. Если учащиеся имеют хотя бы самое первоначальное понятие о функции, то определение уравнения как равенства двух функций (в частности равенства функций некоторому определённому числу) становится просто обязательным.

В самом деле, в данном случае уже нет никаких мотивов к отказу от этого краткого и вполне доступного для понимания учащихся определения, нет никаких оправданий для замены его каким-либо суррогатом научного определения.

Правда, ознакомление учащихся с функцией и функциональной зависимостью предполагается программой лишь в VIII классе. Здесь имеется в виду изучение функциональной зависимости как специального раздела элементарной алгебры, на что и отводится достаточное количество часов.

Но это нисколько не мешает уже чуть ли не на первых уроках алгебры, и во всяком случае в первом полугодии 6-го года обучения, при изучении тождественных преобразований дать попутно понятие о функции как алгебраическом выражении, численное значение которого изменяется вместе с изменением численных значений букв, входящих в это выражение. Наиболее подходящим моментом для введения понятия функции являются упражнения на нахождение числовой ве-

[1]) Проф. А. Я. Хинчин, Основные понятия математики в средней школе.

личины алгебраических выражений, и мы всегда успешно проводили это в своей педагогической практике.

Вопрос о внедрении в школьный курс алгебры понятия о функциональной зависимости достаточно широко освещался на страницах нашей педагогической печати, и аргументация за проведение через весь курс алгебры идеи изменения, за замену „статической“ алгебры алгеброй „динамической“ настолько общеизвестна, что мы считаем излишним приводить её здесь. Напомним только, что широкое международное движение в начале XX в. за реформу преподавания математики („Меранская программа“ 1905 г.) шло именно под флагом введения функции в школьный курс; что оба съезда преподавателей математики ещё в царской России одним из основных выдвигали именно это же требование.

Отметим, наконец, что многие и многие учителя советской школы (в особенности знакомые с упомянутым выше „реформистским“ движением) практически уже ряд лет знакомят учащихся с понятием о функции в VI и VII классах до систематического изучения этого раздела, точно так же, как проходили пропедевтику уравнений в тех же классах задолго до того, как это стало рекомендоваться, а затем и требоваться программой.

3. Если учащиеся ещё не ознакомлены с понятием о функции, то можно ввести этот термин именно здесь, на ряде примеров, подводя учеников к определению уравнения как равенства двух функций (см. ниже следующий параграф).

4. Наконец, если преподаватель не хочет вводить новый термин („функция“) до того, как учащиеся вплотную перейдут к нему в VII классе, тогда единственно возможным и правильным будет остановиться на том компромиссном, но нисколько не стоящем в противоречии с научностью определении: заменить термин „функция“ термином „алгебраическое выражение“, или, короче, „выражение“. Тогда в X классе при прохождении темы „Исследование уравнений“ можно будет легко и естественно перейти к научному определению.

§ 15. Методика первых уроков.

Из изложенного выше ясно, что содержание первых уроков по теме „Уравнения“ в VII классе теснейшим образом зависит прежде всего от того, какое определение уравнения преподаватель имеет в виду сообщить учащимся. Так, при традиционном противопоставлении уравнений тождествам на первых уроках проводится ряд упражнений на определение, является ли данное равенство уравнением или тождеством.

Далее имеет большое значение содержание и объём тех сведений об уравнениях и навыков в решении уравнений, которые были даны учащимся на протяжении всего предыдущего курса алгебры.

Наконец, если иметь в виду выдвигаемое нами здесь определение уравнения, то содержание первых уроков может занять большее или меньшее время в зависимости от того, проводились ли систематические упражнения в нахождении числовой величины алгебраических выражений при различных значениях входящих в них букв и давалось ли в связи с этим понятие о функции.

Здесь мы дадим примерную схему первых уроков, причём в отношении указанных моментов, обусловливающих содержание этих уроков, будем исходить из некоторого „среднего“ положения. Именно, мы будем предполагать:

1) что в основу изложения кладётся определение уравнения как равенства двух функций;

2) что учащиеся имеют уже некоторый навык в решении уравнений, а также в решении арифметических задач с буквенными данными, примерно в том объёме, какой рекомендуется ниже в гл. IV и V;

3) что понятие о функции учащимся не давалось, и упражнения, иллюстрирующие функциональную зависимость, не проводились, по крайней мере систематически.

При этих условиях содержание первых уроков рисуется в следующем виде.

1-й урок. Учащимся (с вызовом одного к доске) предлагается задача одного из типов, решавшихся ими ранее в достаточном количестве (чтобы процесс её решения не отнимал много времени и не отвлекал от основной цели урока).

Пусть дана, например, такая задача:

Задача 1. На одной полке лежит x книг, на второй в 3 раза, а на третьей в 4 раза больше, чем на первой. Сколько книг лежит на всех трёх полках?

Учащиеся составляют выражение $x+3x+4x$ и после приведения получают ответ в виде $8x$.

Учитель предлагает ответить устно, каков будет ответ, если на первой полке лежали 3 книги? 5 книг? и т. д. Устанавливается, что ответ, т. е. величина выражения $8x$, зависит при данных условиях от количества книг на первой полке, т. е. от величины x.

Этот вывод закрепляется наглядно путём составления таблицы:

x	1	2	3	4	5	6
$8x$	8	16	24	32	40	48

Далее (с вызовом другого ученика) даётся задача такого хотя бы типа:

Задача 2. В первом классе a учеников, во втором на 5 учеников меньше, а в третьем на 6 учеников меньше, чем в первом. Сколько учеников во всех трёх классах?

Проводится та же работа, что и с первой задачей, причём значения для a при составлении таблицы берутся уже не в порядке натурального ряда чисел, а примерно такие: $a = 17, 23, 27, 29, 30$. Затем вывод обобщается в виде положения: числовая величина алгебраического выражения зависит от значения букв, входящих в это выражение[1]. (Само собой разумеется, что это только вывод, делаемый учениками на основе приведённых примеров, а не формулировка, обязательная для дословного её запоминания.)

Если преподаватель не намерен вводить термин „функция", то изложенным урок заканчивается.

В противном случае здесь же даётся понятие о функции в такой примерно форме.

Преподаватель сообщает, что свойство алгебраических выражений принимать различные значения в зависимости от значений входящих в него букв выражают более кратко: алгебраическое выражение есть функция входящих в него букв.

Так, в первой задаче выражение $8x$ есть функция от x. Учащиеся сами делают вывод, что во второй задаче выражение $3a - 11$ есть функция от a.

На дом даются две задачи подобного же типа и предлагается составить таблицы для заданных учителем пяти-шести числовых значений аргументов.

---

[1]) Здесь, конечно, не место вводить в рассмотрение такие выражения, которые как бы противоречат этому выводу, например $\frac{2a+2b}{a+b}$ и т. п.

2-й урок. Проверяется домашнее задание. Затем даётся простая задача, например:

Задача 3. Футбольный мяч стоит 12 руб. Сколько стоят x таких мячей?

Составляется таблица:

x	1	2	3	4
$12x$	12	24	36	48

Учитель задаёт вопрос: может ли во втором ряду чисел встретиться число 432? Другими словами, может ли выражение (функция) $12x$ при некотором значении x сделаться равным 432?

Выясняется, что мы могли бы решить этот вопрос, продолжив достаточно далеко нашу таблицу, но этот путь слишком долгий и утомительный. Совместно с учащимися учитель устанавливает, что заданный вопрос равносилен следующему: может ли иметь место равенство:

$$12x = 432.$$

На основании предшествующего опыта учащиеся обычно сразу узнают в этой записи уравнение и, решив его, находят, что функция принимает значение 432 при $x = 36$. Эти значения x и $12x$ заносятся в таблицу.

Таким же образом находятся значения x для случаев, когда $12x = 348$; $12x = 696$.

Домашнее задание. 1. Решить задачу:

„Ученик купил x карандашей по 15 коп. за карандаш и общую тетрадь за 80 коп. Сколько он заплатил за покупку?"

2. Составить таблицу для $x = 1, 3, 6, 10$.

3. Определить, может ли уплаченная сумма быть равной 1 руб. 70 коп., 3 руб. 60 коп., 50 коп.

Задание должно быть записано на доске полностью и переписано учащимися.

3-й урок. Производится анализ домашнего задания. Выясняется, что и здесь, как и на предыдущем уроке, чтобы найти, может ли полученное нами выражение $15x + 80$ принять некоторое заданное значение, мы приравнивали его этому числу и решали полученное уравнение.

Делается общий вывод: приравняв алгебраическое выражение (функцию) какому-либо определённому числу, мы получаем уравнение. Буква, входящая в выражение, становится неизвестной величиной, которую и требуется определить.

Далее решается ряд уравнений различных типов, решавшихся ранее, и устанавливается, что во всех случаях мы имеем в одной части уравнения некоторое выражение, в другой — определённое число.

На дом даются для решения 3—4 уравнения различных типов.

4-й урок. Этот урок завершает первую часть темы (понятие об уравнении) и является вводным ко второй части (теоремы об эквивалентности уравнений).

После проверки домашнего задания и повторения вывода, сделанного на предыдущем уроке, даётся задача:

Задача 4. Один ученик купил 10 карандашей по a коп. за карандаш. Другой ученик купил 6 таких же карандашей и общую тетрадь за 80 коп. Сколько заплатил каждый?

Ответ. Первый ученик заплатил $10a$ коп., второй $6a + 80$ коп.

Выясняем, что здесь мы имеем два различных выражения (две различные функции): одно выражает сумму, затраченную первым учеником, другое — сумму, затраченную вторым. Для каждого из этих выражений можно составить таблицу значений, которые оно принимает при различных значениях a.

Зададим теперь вопрос: могло ли случиться, что оба ученика заплатили одинаковую сумму? Устанавливаем, что этот вопрос равносилен вопросу: может ли случиться, что при некотором значении a (одном и том же для обоих выражений, так как по условию задачи куплены были карандаши одинаковой стоимости) оба выражения будут равны одному и тому же числу. Но в этом случае они будут равны друг другу, и мы можем написать:

$$10a = 6a + 80.$$

Получили уравнение. Чтобы найти значение a, при котором это равенство было бы верным, надо это уравнение решить. Такие уравнения, в которых неизвестное входит в обе его части, учащиеся ещё не решали. Попробуем всё же решить его тем же способом, который применяли и раньше. Будем рассматривать $10a$ как сумму двух слагаемых: $6a$ и

80. Слагаемое 80 должно равняться сумме, т. е. $10a$ минус другое слагаемое, т. е. $6a$[1]).

Получаем:

$$10a - 6a = 80.$$

После упрощения:

$$4a = 80.$$

Рассматривая a как неизвестный множитель, находим:

$$a = 80 : 4 = 20.$$

Подставив в уравнение 20 вместо a, находим, что получаем верное равенство: $200 = 200$.

Итак, если каждый карандаш стоил 20 коп., то оба ученика заплатили одинаковую сумму, именно по 2 рубля.

Та же работа проводится с другой аналогичной задачей, например:

Задача 5. Один колхоз сдал государству 30 возов ржи по p центнеров в каждом возу. Другой колхоз сдал 24 таких же воза и ещё 18 центнеров. Сколько ржи сдал государству каждый колхоз? Сколько центнеров весил каждый воз ржи, если оба колхоза сдали одинаковое количество?

Если учащиеся достаточно уяснили суть дела уже из задачи 4, то вместо задачи 5 можно просто решить 2—3 уравнения такого же типа.

Делается вывод: приравняв два выражения (две функции) друг другу, мы получаем уравнение. Учитывая вывод, сделанный на предыдущем уроке, преподаватель подводит учащихся к объединению двух видов уравнения в один путём следующих разъяснений.

Могут быть случаи, когда выражение при любых возможных значениях входящих в него букв равняется одному и тому же числу. Такова, например, функция:

$$(x - 3)^2 - x^2 + 6x - 2,$$

равная 7 при любом значении x.

Не всегда бывает легко с первого взгляда установить, изменяется ли значение выражения или остаётся постоянным

---

[1]) Обычно уже в VI классе, чтобы не повторять каждый раз приведённых здесь рассуждений, устанавливается, что нахождение неизвестного компонента действий сложения и вычитания сводится к прибавлению к обеим частям уравнения или вычитанию из них одного и того же числа. Тогда и здесь уравнение решается этим же приёмом, т. е. вычитанием $6a$ из обеих частей уравнения.

при изменении значений букв, входящих в него. А поэтому вполне целесообразно, как это и принято в математике, постоянное число рассматривать как частный случай функции.

А тогда сделанный только что вывод можно сформулировать короче, именно:

„Если приравнять два выражения (две функции) друг другу, то получается уравнение".

В математической науке это свойство функций и кладётся в основу определения самого понятия „уравнение". Таким образом, мы можем сказать: „Уравнение есть равенство двух алгебраических выражений". Решить уравнение значит определить те значения неизвестного, при которых эти выражения действительно становятся равными.

§ 16. Об эквивалентности уравнений.

Теоремы об эквивалентности уравнений, вернее те доказательства этих теорем, как они изложены у Киселёва и в ряде других учебников, обычно с большим трудом усваиваются учащимися. С одной стороны, положения, доказываемые этими теоремами, представляются им настолько очевидными, усвоенными прочно ими уже при изучении арифметики (особенно это относится к первой теореме), что длинные рассуждения доказательства кажутся совершенно излишними. Здесь происходит незаметный для учащихся логический скачок — распространение на уравнения положений, истинность которых была доказана лишь для чисел (притом пока только рациональных).

С другой стороны, этот же момент перехода от уравнения к числовому тождеству и затем обратно к уравнению, составляющий сущность доказательства теорем об эквивалентности, — этот момент не улавливается учащимися, а потому и всё доказательство представляется туманным для них, и в своих ответах они путаются обычно именно в этом пункте.

Может быть, оба эти обстоятельства и являются основной причиной того, что англо-американские учебники совсем не дают этих теорем. Обычно теория решения уравнений излагается в них так:

Почти с первых уроков алгебры решаются простейшие уравнения (решаемые одним действием) по соображению или на основании свойств арифметических действий. В главе, посвящённой специально уравнениям, в основу решения кладутся четыре „аксиомы":

„Корни уравнения не изменяются если:

1. Одно и то же число прибавить к каждой части уравнения.

2. Одно и то же число вычесть из каждой части.

3. Обе части умножить на одно и то же число (при условии, что это число не является нулём или выражением, содержащим неизвестное).

4. Обе части разделить на одно и то же число (при условии, что это число не является нулём или выражением, содержащим неизвестное)“[1]).

Затем даётся следующая оговорка:

„В случае, когда обе части уравнения умножаются на выражение, содержащее неизвестное, могут быть введены новые корни. В этом случае все корни должны быть проверены подстановкой в первоначальное уравнение“.

(В качестве примера приводится уравнение $x + \sqrt{x+1} = 5$.)

В других учебниках дело обстоит ещё проще: в главе, посвящённой уравнениям, никаких оговорок к приведённым четырём положениям не делается. В дальнейшем при изучении алгебраических дробей вводятся дробные уравнения и к ним делается примечание.

„Когда неизвестное число встречается в знаменателе дробного уравнения, то должно быть применено правило, что знаменатель не может быть нулём, и отбрасываются все решения, которые при проверке обращают знаменатель в нуль. Так, в примере 12: $\left(\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x+2} = 1\right)$ x не может равняться 2. Вообще не принимаются те решения, которые не делают равными обе части первоначального уравнения“ (Stone and Hart).

Или ещё короче:

„Если найденный ответ обращает какой-либо из знаменателей в нуль, то он не может быть корнем данного уравнения, так как деление на нуль невозможно. Имеет ли место это обстоятельство обнаруживается при проверке.“ (Wells and Hart, Progressive second algebra).

В известном французском учебнике Бореля вопрос излагается следующим образом.

Первая теорема формулируется так:

„Теорема 60. К обеим частям уравнения можно прибавить по одной и той же величине, не изменяя решения или решений уравнения.

Из этого *непосредственно ясного* (курсив наш. — *А. Б.*) предложения вытекает следующая важная теорема“.

Теорема 61. Любой член уравнения можно перенести из одной его части в другую, меняя лишь при этом его знак на обратный.

[1]) Longley and Marsch, стр. 121.

Доказательство последнего предложения даётся на примере уравнения $3x + 5y + 7 = 8a - 9 + x$ переносом члена x путём прибавления к обеим частям по $-x$.

Вторая теорема даётся в своеобразной формулировке:

„Теорема 62. Если уравнение может быть приведено к такому виду, который выражает, что частное двух многочленов должно быть равно нулю, то решения его получаются таким образом, что разыскиваются значения неизвестных, для которых числитель исчезает, а знаменатель отличен от нуля".

Правильность этого положения обосновывается рассмотрением уравнения $\frac{M}{N} = 0$, где M и N — многочлены. Показывается, что решения уравнения $M = 0$ являются решениями и уравнения $\frac{M}{N} = 0$, если только при этом N отличен от нуля. В последнем же случае вопрос становится неопределённым. Таким образом, здесь собственно доказывается лишь половина теоремы (решения уравнения $M = 0$ являются решениями и уравнения $\frac{M}{N} = 0$, но не обратно).

Мы считаем, что и в нашей школе в VII классе можно было бы ограничиться примерно теми сведениями, которые даются в англо-американских учебниках, может быть, лишь несколько подробнее, на примерах показав возможность появления посторонних корней и этим обосновав необходимость поверки решения. Вопрос же об эквивалентности уравнений вместе с теоремами отнести на VIII класс, к моменту прохождения иррациональных уравнений. Там действительно посторонние корни появляются очень часто, и естественно возникает вопрос, чем это появление обусловливается. При исследовании этого вопроса выясняется, что посторонний корень получается всегда при умножении обеих частей уравнения на выражение, которое при подстановке этого корня обращается в нуль. Так, уравнение

$$\sqrt{x-3} - x + 5 = 0$$

по умножении на $\sqrt{x-3} + x - 5$ приводится к уравнению

$$x^2 - 11x + 28 = 0,$$

имеющему корни $x_1 = 7$ и $x_2 = 4$. Легко проверить, что $x_1 = 7$ есть корень данного уравнения, а $x_1 = 4$ является посторонним для него корнем. Это — корень уравнения

$\sqrt{x-3}+x-5=0$. Отсюда легко формулируются и теоремы об эквивалентности.

Заметим, что существующие программы по математике вовсе не требуют, чтобы именно в VII классе были даны точная формулировка и доказательство теорем об эквивалентности. В программе этот пункт формулируется кратко: „Два основных свойства уравнения". В объяснительной же записке даны следующие комментарии.

„Вопрос об эквивалентности уравнений, обычно представляющий для учащихся некоторую трудность при усвоении, впервые встречается в курсе алгебры VII класса, но особую актуальность получает в VIII классе, где при изучении иррациональных уравнений учащиеся устанавливают факт получения посторонних корней. В VII классе эквивалентность рассматривается при решении уравнений с числовыми коэфициентами. В X классе при изучении темы об исследовании уравнений систематически излагается вопрос об эквивалентности уравнений. В X же классе при изучении уравнений в курсе тригонометрии решения даются в общем виде; полученные решения исследуются, рассматриваются случаи потери корней и получения посторонних решений".

Так как под „систематическим изложением" вопроса об эквивалентности уравнений, очевидно, и можно понимать только изложение теорем об эквивалентности, то совершенно ясно, что программа относит их к X классу.

С этим вполне можно было бы согласиться при условии, что вопрос этот должен излагаться „систематически" не в теме „об исследовании уравнений (сознаёмся, что мы вообще относимся к этой теме программы крайне отрицательно), а в конце курса алгебры при изложении элементов общей теории уравнений, именно после теоремы Безу. Последняя теорема показывает, что левая часть всякого целого алгебраического уравнения $f(x)=0$ разлагается на линейные множители относительно x. Каждый линейный множитель даёт один из корней уравнения. Отсюда легко выводится, что присоединение нового множителя, содержащего неизвестное, влечёт за собой появление нового корня, именно корня этого множителя (конечно, если множитель вообще имеет корни).

Таким образом, изучение вопроса об эквивалентности уравнений может быть разбито на следующие три стадии.

1. В VII классе формулируются без доказательства (со ссылкой на арифметику) те четыре положения, которые мы привели из американского учебника. Знаменатели в дробных уравнениях, содержащие неизвестное, рассматриваются как некоторые числа. Дробные уравнения, в которых по при-

ведении их к целому виду получаются посторонние корни, в этом классе вообще не даются.

2. В VIII классе при изучении иррациональных уравнений выясняется, что освобождение уравнения от радикалов совершается фактически при помощи умножения обеих частей уравнения на некоторый множитель, содержащий неизвестное. При этом могут появиться посторонние корни, именно те, которые являются корнями этого множителя. Для такого вывода необходимо ряд иррациональных уравнений решить не путём возвышения в квадрат обеих частей уравнения, а путём перенесения всех членов в левую часть и умножения обеих частей на соответствующий множитель.

Например, приведённое выше уравнение:

$$\sqrt{x-3}-x+5=0,$$

кроме обычного способа, можно решить так:

$$\sqrt{x-3}-(x-5)=0.$$

Умножим обе части на $\sqrt{x+3}+(x-5)$:

$$\left[\sqrt{x-3}-(x-5)\right]\left[\sqrt{x+3}+(x-5)\right]=0,$$

$$(\sqrt{x-3})^2-(x-5)^2=0,$$

$$x-3-x^2+10x-25=0$$

и т. д. Получив корни 7 и 4, легко убеждаемся, что первый является корнем данного уравнения, а второй, посторонний, является корнем введённого нами множителя, т. е. корнем уравнения

$$\sqrt{x+3}+x-5=0.$$

Затем даётся определение эквивалентных уравнений и обе теоремы в их обычной формулировке. Для иллюстрации применения теорем решается несколько примеров.

В дальнейшем при решении иррациональных уравнений анализируется каждый случай появления посторонних корней.

3. В X классе после теоремы Безу проходится решение уравнений высших степеней методом разложения на множители левой части уравнения. В связи с этим вновь ставится вопрос об эквивалентности уравнений и даётся доказательство теорем.

Такой порядок изложения с методической точки зрения вполне целесообразен, так как распространяет изучение проблемы на большой промежуток времени с постепенным её усложнением по мере роста математической культуры учащихся и их способности к обобщениям и абстракции. В то же время практика, выработка навыков в решении уравнений и задач идёт обычным темпом и даже выигрывает, так как для неё освобождаются часы, затрачиваемые на изложение теорем об эквивалентности и на проверку усвоения их учениками.

Против этого порядка изложения приводится обычно один, практически достаточно веский аргумент: несмотря на сказанное выше относительно программы, фактически на испытаниях за VII класс от учащихся требуют знания теорем именно в той формулировке, как они даны в учебнике. С этим, конечно, приходится считаться преподавателю математики в седьмых классах. Поэтому в качестве второго варианта приведём тот порядок изложения, которого мы обычно придерживались в своей практике.

1. В VI классе, после того как учащиеся уже прорешали достаточное количество простейших уравнений (группы 1 и 2, см. следующую главу), на одном из уроков при решении, например, уравнения вида

$$x - 17 = 39 \tag{1}$$

путём нахождения неизвестного уменьшаемого устанавливается, что данное уравнение при решении принимает вид:

$$x = 39 + 17.$$

Но тот же самый результат мы получим, если просто прибавим к обеим частям уравнения по 17. Действительно будем иметь:

$$x - 17 + 17 = 39 + 17;$$
$$x = 39 + 17.$$

После 2—3 аналогичных примеров делается вывод, что при решении подобных уравнений вместо обычно употреблявшейся фразы „неизвестное уменьшаемое равно вычитаемому (17), сложенному с разностью (39)“, можно говорить короче: „прибавим к обеим частям уравнения по 17“. Затем решается 1 — 2 уравнения с употреблением уже новой формулировки и с проверкой, убеждающей, что результат получается тот же, что и при прежнем способе решения.

В дальнейшем аналогичная работа проводится с уравнениями вида:

$$x + a = b\,(a > 0);\ \frac{x}{a} = b;\ ax = b.$$

В итоге учащиеся постепенно усвоят все четыре приведённых выше положения. Здесь не следует только спешить, концентрируя проработку всех четырёх случаев на небольшом промежутке времени, давая их один за другим подряд. Лучше всего дать каждый из этих случаев при прохождении соответствующего действия над отрицательными числами.

Именно при изучении сложения отрицательных чисел рассматривается прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа, т. е. уравнения вида:

$$x - a = b;$$

при изучении вычитания — уравнения вида:

$$x + a = b;$$

умножения:

$$\frac{x}{a} = b;$$

и, наконец, деления:

$$ax = b.$$

Усвоив эти четыре положения, учащиеся в дальнейшем при решении уравнений уже пользуются ими в преобразованиях („вычтем из обеих частей уравнения“, „умножим обе части уравнения“ и т. д.). Но время от времени преподаватель напоминает об исходном моменте этих преобразований путём задания вопроса: „А на каком основании мы можем произвести это действие?“

2. В VII классе, как уже изложено выше, первые уроки по теме „Уравнения“ посвящаются выяснению самого понятия об уравнении, в результате которого даётся определение уравнения.

Два-три урока посвящаются закреплению этого определения на примерах, которые подбираются так, чтобы повторить все пройденные до этого времени типы уравнений, а также задач на составление уравнений.

После этого два урока посвящаются выяснению понятия об эквивалентности уравнений.

Всему классу (с вызовом одного ученика к доске) задаётся уравнение хотя бы такого вида:

$$5(4x-3)-3(x+2)=47 \qquad (1)$$

и предлагается проследить внимательно, какие действия мы производим над этим уравнением и на каком основании. Решение разбивается на несколько шагов (этапов).

Первый шаг — раскрытие скобок:

$$20x-15-3x-6=47.$$

Выясняется, что:

а) над левой частью уравнения произведено тождественное преобразование, пользуясь выведенным ранее правилом умножения одночлена на многочлен;

б) полученное новое выражение в левой части тождественно равно первоначальному, в чём легко убедиться, давая x различные значения, например 2, 5, 10, и получая для обоих выражений одинаковую численную величину.

Иногда при такой проверке некоторые из учащихся выражают сомнение в том, можем ли мы давать x произвольные значения: ведь при $x=5$, например, мы получили для левой части 64, тогда как в правой части стоит 47. В этом смысле следует напомнить учащимся о том, что излагалось на предыдущих уроках: левая часть является функцией, принимающей различные значения в соответствии с различными значениями x. Наши преобразования и сводятся к тому, чтобы найти, при каком значении x эта функция будет равна 47.

Второй шаг — приведение подобных членов:

$$17x-21=47.$$

Опять выясняется, что здесь произведено тождественное преобразование, что, следовательно, полученное выражение тождественно равно первым двум (действительно, при $x=2$, 5, 10 оно опять даёт ту же численную величину, что и в первом случае).

Третий шаг — прибавление к обеим частям уравнения по 21:

$$17x=68.$$

Выясняется: а) что здесь мы уже имеем другое уравнение, мы изменили обе части уравнения. Это подтверждается, во-первых, тем, что в правой части стоит уже не 47, а 68, во-вторых, тем, что левая часть при $x = 2, 5, 10$ даёт уже другую численную величину; б) этот переход от одного уравнения к другому мы совершали, пользуясь свойством вычитания: уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с разностью.

Четвёртый шаг — деление обеих частей на 17:

$$x = 4.$$

Аналогично предыдущему выясняется, что здесь совершается переход к новому уравнению.

В итоге делается вывод: при решении уравнения мы производим два вида операций: 1) тождественные преобразования левой части уравнения; 2) переход одного уравнения к другому. Так, в данном примере мы имели дело с тремя различными уравнениями:

$$17x - 21 = 47.$$

$$17x = 68.$$

$$x = 4.$$

Но эти уравнения замечательны тем, что все они имеют одно и то же решение (один и тот же корень), именно $x = 4$, в чём легко убедиться подстановкой.

На этом анализ решения и заканчивается. На дом даётся аналогичное уравнение, причём требуется разбить решение его на этапы так, как это делалось в классе, и затем выписать отдельно различные уравнения, которые получились при решении.

Примечание. Можно было бы ещё более детализировать анализ решения данного уравнения, показав, например, что при втором шаге мы воспользовались переместительным:

$$20x - 3x - 15 - 6 = 47$$

и сочетательным:

$$(20x - 3x) - (15 + 6) = 47$$

законами; можно было бы третий шаг (а также четвёртый) разбить на два — переход к другому уравнению:

$$17x - 21 + 21 = 47 + 21$$

и тождественное преобразование:

$$17x = 68.$$

Но всё это чрезвычайно, до утомительности растянуло бы ход рассуждений, не внося в него ничего нового, а потому и нецелесообразно.

На следующем уроке после проверки домашней работы проводится анализ решения ещё одного уравнения, например, такого вида:

$$\frac{x}{2}+27+\frac{2x}{3}-11=30.$$

Выписываются получающиеся уравнения:

$$\frac{7x}{6}+16=30;$$

$$\frac{7x}{6}=14;$$

$$7x=84;$$

$$x=12$$

и опять выясняется, что все они имеют один и тот же корень $x=12$.

После этого даётся определение: уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными (эквивалентными) уравнениями.

Таким образом, процесс решения уравнения состоит в том, что мы постепенно переходим от одного уравнения к другому, равносильному, но более простому, пока, наконец, не придём к такому уравнению, которое уже прямо показывает, чему должен быть равен x, чтобы равенство было верным (уравнение $x=a$).

Этот вывод и должен быть хорошо осознан и усвоен учащимися в результате изложенных двух уроков.

Примечание. Ученики должны знать, что термин „эквивалентный“ означает то же, что „равносильный“, но мы решительно настаиваем, чтобы, вопреки всё более распространяющейся практике[1]), в школе, по крайней мере до X класса, употреблялся именно термин „равносильный“, уже по своему точному смыслу понятный для учеников. Многолетний опыт показывает, что термин „эквивалентный“, притом трудно выговариваемый, психологически затрудняет учащихся, отвлекает их внимание и замедляет ход рассуждений.

---

[1]) В этом мы неоднократно убеждались, присутствуя на испытаниях в седьмых классах.

3. Следующие два урока посвящаются теоремам об эквивалентности.

На предыдущих уроках мы установили, что решение уравнения сводится к переходу от одного уравнения к другому, ему равносильному. Этот переход мы совершали посредством некоторых преобразований уравнения (например, прибавляя к обеим частям уравнения одно и то же число, умножая обе части на одно и то же число).

Возникает вопрос, какие преобразования мы можем производить над уравнением, чтобы быть уверенными, что новое уравнение действительно равносильно данному. Пусть дано, например, уравнение:

$$2x-5=9;$$

оно имеет единственный корень $x=7$. Прибавим к левой части уравнения $4x$, а к правой 28, получим:

$$2x-5+4x=9+28$$

или

$$6x-5=37.$$

Это уравнение имеет тот же единственный корень $x=7$. Следовательно, оба уравнения равносильны[1]). Но прибавим к левой части, например, $3x$, а к правой — 6. Получим:

$$5x-5=15.$$

Корень этого уравнения уже будет $x=4$. Оно не равносильно данному.

Итак, в каких же случаях мы можем заранее и с уверенностью сказать, что новое уравнение будет равносильно данному?

Напоминаются преобразования, которые производились над уравнениями на предыдущих уроках. Обычно учащиеся уже сами делают вывод:

1) „Если к обеим частям уравнения прибавить или из них вычесть одно и то же число, то новое уравнение будет равносильно данному".

2) „Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, то новое уравнение будет равносильно данному"[2]).

---

[1]) Легко видеть, что наше преобразование можно свести к допустимым операциям, например, к умножению обеих частей уравнения на 3 и затем прибавлению по 10.

[2]) Можно назвать эти два положения и теоремами.

Затем первая формулировка распространяется и на выражения, содержащие неизвестное. Разъясняется это на примере. Берётся хотя бы уравнение

$$8x = 24.$$

Прибавив к обеим частям по $3x$, отняв по $2x$, прибавив по $4x - 11$, получим соответственно уравнения:

$$11x = 24 + 3x,$$

$$6x = 24 - 2x,$$

$$12x - 11 = 13 + 4x,$$

и каждый раз убеждаемся, что корень каждого из этих уравнений один и тот же: $x = 3$.

Таким образом, убеждаемся, что к обеим частям уравнения можно прибавить (вычесть) любое алгебраическое выражение, и новое уравнение будет равносильно данному.

Так как учащиеся уже знают, что любое число есть тоже частный случай алгебраического выражения (об этом неоднократно приходится говорить в VI классе), следовательно, можно в приведённой выше формулировке просто заменить слово „число" термином „алгебраическое выражение"[1]).

Сейчас же показывается применение этого положения к решению уравнений, содержащих неизвестное в обеих частях.

Даётся, например, уравнение

$$7x = 2x + 15.$$

Выясняется, что прежний способ — нахождение неизвестного компонента по двум известным — здесь неприменим. Но только что сделанный вывод позволяет отнять от обеих частей уравнения по $2x$. Получаем уравнение:

$$5x = 15,$$

откуда $x = 3$. Убеждаемся, что это корень и первоначального уравнения.

По отношению ко второму положению (теореме) здесь вносится лишь оговорка, что число нуль исключается. По-

---

[1]) Делать здесь оговорку, что прибавляемое выражение не должно терять смысла, нецелесообразно. Учащиеся с такими случаями не встретятся. Эту деталь следует внести лишь в X классе.

казывается, что, например, при умножении на нуль уравнения $3x = 15$ получаем равенство

$$3x \cdot 0 = 15 \cdot 0,$$

которое справедливо при любом значении x. Следовательно, это уравнение не равносильно данному.

Изложенный материал уже даёт возможность приступить к основной задаче раздела — к приобретению навыка в решении уравнений (пока целых) любого вида и к решению методом уравнений задач собственно алгебраических (1 и 2 группы глав IV и VI).

В процессе решения уравнений на ряде конкретных примеров выясняется: 1) что прибавление или отнятие какого-либо члена уравнения равносильно перенесению его из одной части уравнения в другую с обратным знаком; 2) что если какой-либо член находится и в левой и в правой частях уравнения, то его можно просто зачеркнуть.

4. При переходе к решению дробных уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе, уточняется вторая теорема. Даётся, например, уравнение:

$$\frac{10+x}{11-x} = 2.$$

Можно, и даже лучше, начать с задачи, приводящей к дробному уравнению. Так, для получения приведённого только что уравнения можно было бы дать задачу:

„Какое одно и то же число надо прибавить к числителю и вычесть из знаменателя дроби $\frac{10}{11}$, чтобы получить число 2?“

Чтобы привести уравнение к целому виду, следует умножить обе части на $11 - x$. В связи с решением этого уравнения вспоминается вторая теорема об эквивалентности. Обращается внимание на то, что в ней говорится только об умножении и делении на одно и то же число. Как же обстоит дело в случае, когда приходится умножать или делить на выражение, содержащее неизвестное?

Даётся уравнение:

$$\frac{x^2-4}{x-2} + \frac{4}{x-2} = 3.$$

Умножение на $x - 2$ приводит к новому уравнению:

$$x^2 - 4x + 4 = 3x - 6.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что второе уравнение имеет два корня: $x=5$ и $x=2$. Из них второй уравнению (1) не удовлетворяет (в левой части получается выражение, не имеющее смысла). Следовательно, эти уравнения не эквивалентны. Умножив на $x-2$, мы ввели новый корень, не удовлетворяющий первому уравнению. Этот корень называется посторонним для первого уравнения.

Поэтому, если приходится при решении дробных уравнений умножать обе части уравнения на выражение, содержащее неизвестное, то найденные корни следует проверить подстановкой их в данное уравнение и „посторонние" для него отбросить.

Точно так же на примере

$$x^2-3x=2x-6,$$

разделив обе части на $x-3$, покажем, что в этом случае мы „потеряли" один корень, именно $x=3$, удовлетворяющий данному уравнению и не удовлетворяющий полученному в результате деления.

В итоге уточняется формулировка второй теоремы:

„Если обе части уравнения умножить или разделить на выражение, не равное нулю и не содержащее неизвестное, то новое уравнение равносильно данному".

И здесь следствия из теоремы выводятся постепенно из наблюдений на ряде конкретных примеров в процессе упражнений в решении уравнений и задач.

5. В VIII классе на ряде примеров при решении иррациональных уравнений ярче и глубже выясняется значение оговорок, внесённых во вторую теорему.

6. В X классе после теоремы Безу вновь повторяются обе теоремы и даётся их доказательство с употреблением символов $f(x)$ и $f(a)$ (численное значение $f(x)$ при $x=a$).

Наш опыт в течение ряда лет убеждает с полной определённостью, что такая система изложения вопроса крайне облегчает его вполне сознательное усвоение и способствует более быстрому продвижению в отношении навыков в решении уравнений и задач.

Только ни на одном этапе не нужно спешить. Если для уяснения, например, пункта 3 и 4 одного примера оказалось недостаточно, следует увеличить их число, хотя бы для этого и пришлось отвести лишний час.

В заключение отметим, что вопрос об „эквивалентности" уравнений (без введения самого термина „эквивалентность" или „равносильность“) особенно хорошо изложен в книге П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова „Алгебра“, ч. I. Преподаватель, имеющий эту книгу, может полностью провести по ней эту тему.

Глава IV.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

§ 17. Алгоритм решения.

Как показывает опыт, навык в решении уравнений гораздо легче приобретается учащимися, чем навык в решении задач методом уравнений. Учащиеся довольно быстро усваивают порядок выполнения преобразований и при должном внимании дают незначительный процент ошибок. Некоторое исключение представляют в этом отношении дробные уравнения с многочленными знаменателями. Да и самые ошибки, как увидим ниже, в подавляющем большинстве являются результатом „недоделок“ прошлого, результатом нетвёрдых навыков в тождественных преобразованиях.

Алгоритм решения уравнения первой степени с одним неизвестным, т. е. последовательность операций над уравнением, приводящая к нахождению корня, обычно даётся в учебниках в следующем виде:

1. Приведение уравнения к целому виду.
2. Раскрытие скобок.
3. Группировка членов с неизвестным в одну часть уравнения, свободных членов — в другую.
4. Приведение подобных членов.
5. Деление обеих частей уравнения на коэфициент при неизвестном.

Понятно, что эти последовательные операции вводятся в практику учащихся постепенно, по мере усложнения решаемых уравнений.

Когда следует требовать от учащихся формулировки хода решения уравнения примерно в той форме, какая только что приведена?

Если уж вообще выдвигать это требование (а в этом позволительно сомневаться), то мы определённо настаиваем по целому ряду соображений, чтобы оно было поставлено на очередь возможно позднее, как естественный вывод, полученный на основе практики, в результате решения большого количества уравнений разнообразных типов. Соображения эти следующие:

1. В VI классе часто приходится отступать от изложенного выше порядка преобразований.

Основным видом уравнений, решаемых в этом классе, является:

$$f(x) = c.$$

При решении его учащиеся обычно сначала приводят левую часть к виду $ax + b$ и лишь затем переносят b в правую часть (т. е. в приведённой выше последовательности меняют местами пп. 3 и 4). И это совершенно правильно с методической стороны, так как уравнение вида $ax + b = c$ достаточно знакомо учащимся, и они решают его на основе зависимости между компонентами.

2. Заучивание (вернее, простое запоминание) приведённого правила неизбежно влечёт за собой некоторую слишком раннюю механизацию процесса решения уравнений. А это-то и нежелательно. Чем дольше ученик выполняет решение по соображению, на основе анализа данного уравнения, не пользуясь заученным „правилом", тем сознательнее, глубже и прочнее им будет усвоен навык в решении уравнений, тем меньше трудностей встретит он при решении их, хотя бы и в сравнительно сложных случаях.

3. Следует всемерно поощрять всякое отступление со стороны учащегося от трафаретного хода решения, конечно, если это отступление упрощает или ускоряет получение окончательного результата. В этом и заключается развитие математической сообразительности ученика, общее повышение его математической культуры. Упомянутая выше механизация процесса решения уравнений, несомненно, явится тормозом в этом отношении. Она не только не побуждает ученика к поискам наиболее простого, короткого, иногда остроумного решения, а, наоборот, отвращает его от этих поисков, делает их в его глазах ненужными при наличии „правила".

4. Тот анализ последовательных этапов решения уравнения, который мы привели в главе III § 16, естественным путём подводит и к общему обозрению процесса решения, заставляет учащихся сделать общий вывод о наличии некоторой последовательности в производимых над уравнением операциях. И здесь преподаватель может поставить перед учащимся вопрос о том, в каком порядке в подавляющем

большинстве случаев производятся преобразования уравнения при его решении.

Этот вопрос ставится после того, как учащиеся уже прорешали некоторое количество уравнений, содержащих неизвестное в обеих частях, а также задач, приводящих к таким уравнениям.

Ответ получается в результате последовательного решения группы постепенно усложняющихся уравнений, например такого вида:

1) $7x = 91$.
2) $x + 7x - 3x = 14 + 28$.
3) $x^2 + 17 - 4x = 13x + x^2 + 62$.
4) $(2x + 3)(x - 4) = 2x(x + 2) = 6x = 30$.

Эти примеры дают формулировку 2—5 приведённых выше этапов. Что касается первого этапа, то, очевидно, его придётся ввести при переходе к решению дробных уравнений.

Такой общий анализ процесса решения уравнения и вывод из него, заключающий в себе идею обобщения многочисленных частных случаев, ничего, кроме пользы, дать не может.

Другой вопрос — нужно ли заставлять учащихся заучивать этот вывод как некоторое правило — „алгоритм“ решения уравнений. Приведённые выше соображения относительно механизации процесса решения заставляют нас прийти к отрицательному ответу.

В самом деле, уже самый анализ решения уравнений, приведённых выше, и вывод из него, сделанный самими учащимися, показывает, что они фактически в подавляющем большинстве случаев проводят решение именно в такой последовательности. К ней их привёл собственный опыт. Без всякого понуждения извне они практикой вырабатывают наиболее целесообразную последовательность преобразований, которая, понятно, не может в конечном счёте не совпасть с последовательностью, указываемой учебником (ибо последняя тоже является результатом опыта).

Заучивание же правила вносит элемент принуждения и тем подавляет инициативу ученика, стремление к поискам наилучшего способа решения; усыпляет, а не будит математическое мышление ученика.

Мы намеренно уделили особое внимание данному вопросу, может быть, с точки зрения некоторых педагогов сравнительно маловажному. Но в том-то и дело, что в этом вопросе многие педагоги, если не большинство, придерживаются как раз противоположной точки зрения.

Именно в наличии определённого правила они видят первую и главную причину того, что навык в решении уравнений приобретается учащимися сравнительно легко. А потому они и спешат вооружить ученика этим правилом чуть ли не на первых шагах изучения уравнений [см. приведённую в следующей главе цитату из алгебры Безу изд. 1806 года: „Сей последний пункт (т. е. решение уравнения. — *А. Б.*) подлежит определённому числу правил". Вот ещё с каких времён живёт традиция — дать ученику „правило" для решения уравнений].

Отсюда и берут начало часто наблюдаемые на испытаниях в вузах, как массовое явление, такие, к примеру, факты:

В уравнении $5(x-3)=45$ раскрываются скобки без предварительного сокращения на 5.

Решая уравнение $8x=3x+20$, ученик в 99 случаях из 100 никогда не пишет сразу: $5x=20$ (не говоря уже о том, чтобы сразу написать $x=4$, если ему не было сказано: „реши устно"). Он непременно напишет сначала $8x-3x=20$, а затем уже $5x=20$. И учитель обычно не делает никакого замечания ученику, так как последний ведь решает „по правилу". Уравнение $48=12x$ ученик сначала непременно перепишет так: $-12x=-48$, а затем уже получит: $x=4$, иногда ещё предварительно переменив знаки у обеих частей уравнения.

Итак:

1. Алгоритм решения уравнений должен быть не чем иным, как обобщающим выводом, сделанным самими учащимися на основе их собственной и достаточно длительной практики в решении уравнений.

2. Этот вывод должен быть сделан в VII классе после усвоения понятия о равносильных уравнениях и решения некоторого количества уравнений основного цикла.

3. Не следует требовать от учащихся заучивания этого вывода как „правила".

4. Всемерно поощрять и наталкивать учащихся на отступления от обычного порядка решения в тех случаях, когда это отступление упрощает решение или сокращает вычисления.

Таковы методические выводы по отношению к рассматриваемому вопросу.

§ 18. Уравнения пропедевтического цикла.

Мы даём здесь примерный подбор упражнений по решению уравнений, расположенных в определённой системе. В основу этой системы положены следующие три исходных принципа.

1. Тип уравнений в отношении производимых над ним преобразований должен быть тесно увязан с основной темой алгебры, изучаемой на каждом данном этапе.

2. Каждой группе уравнений соответствует группа задач, приводящих к уравнениям данного типа (см. главу VII), а также группа арифметических задач, требующих аналогичных преобразований. Все эти три вида упражнений должны проводиться одновременно.

3. Задачи, решаемые методом уравнений, помимо своего практического значения, ценны в методическом отношении тем, что, требуя от учащегося умения решать уравнения, они сообщают практическую ценность соответствующим упражнениям, а следовательно, и повышают интерес к ним со стороны учащихся, тем самым способствуя более быстрому овладению навыком в решении уравнений.

Но это не значит, конечно, что каждый новый тип уравнения, предлагаемый учащимся, должен быть, так сказать, „оправдан“ демонстрацией соответствующей задачи, приводящей к уравнениям такого типа. Учащиеся должны вполне осознать, что задачи могут быть бесконечно разнообразны, как и получаемые из их условий уравнения. Это разнообразие надо будет показать учащимся на группе более сложных задач в конце прохождения темы.

Решение задач настойчиво требует от ученика наличия навыка в решении уравнений. А этот навык должен приобретаться путём решения большого количества уравнений самого разнообразного вида. Поэтому упражнений на решение уравнений должно быть проделано в 5—6 раз больше, чем задач на составление уравнений. И эти упражнения должны включать в себя уравнения более повышенной сложности и трудности, чем получаемые при решении задач. Это особенно нужно иметь в виду в конце темы.

Переходим теперь к изложению самой системы расположения материала для упражнений в решении уравнений.

1-я группа.

Тема. Понятие об уравнении.

Тип уравнений: $a + x = b$; $ax = b$; $\frac{a}{x} = b$[1]).

(Ш. и В. №№ 36—42, 71—74, 136—139.)

1. $x + 18 = 143$.
2. $x - 49 = 87$.
3. $7x = 63$.
4. $x : 9 = 47$.
5. $a + 47 = 89$.
6. $m - 136 = 72$.
7. $5c = 420$.
8. $y : 11 = 26$.
9. $69 + x = 123$.
10. $240 - x = 58$.
11. $x \cdot 25 = 600$.
12. $108 : x = 6$.
13. $x + 8 = a$.
14. $x - 17 = k$.
15. $8x = s$.
16. $x : 6 = m$.
17. $32 + x = b$.
18. $25 - x = a$.
19. $x \cdot 15 = r$.
20. $40 : x = h$.
21. $x + m = 48$.
22. $x - m = 45$.
23. $ax = 80$.
24. $x : a = 18$.
25. $p + x = 120$.
26. $p - x = 60$.
27. $x \cdot b = 48$.
28. $b : x = 4$.
29. $x + 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$.
30. $x - 2{,}3 = 1{,}8$.
31. $6x = 9$.
32. $x : 3{,}4 = 8$.
33. $4{,}715 + x = 10{,}402$.
34. $4\frac{17}{36} - x = 2\frac{7}{24}$.
35. $\frac{8}{9}a = \frac{4}{15}$.
36. $42\frac{1}{4} : x = 6\frac{1}{2}$.
37. $x + 1876 = 2604$.
38. $867 + x = 2003$.
39. $x - 607 = 82009$.
40. $170803 - x = 65807$.
41. $17x = 2890$.
42. $67x = 20234$.
43. $27x = 324054$.
44. $x : 83 = 2003$.
45. $x : 203 = 328$.

Приведённые примеры требуют некоторых пояснений.

1. Здесь №№ 1—36 дают все возможные виды уравнений, решаемых одним действием[2]). Отсюда никоим образом не следует, что все эти виды должны быть даны для решения на данном этапе и тем более в порядке их нумерации. (Сплошная нумерация всех упражнений приводится для удобства дальнейших ссылок на них.) Как здесь, так и в дальнейшем приводятся лишь различные типы уравнений, которые доступны для учащихся на данном этапе. Количество же упраж-

[1]) Здесь, как и везде в дальнейшем, непосредственно под заголовком указываются относящиеся к данной группе задачи из задачника Шапошникова и Вальцова, ч. 1.

[2]) Аналогично приведённым даются на все четыре действия уравнения, в которых все компоненты даны в буквенном выражении.

нений на каждый из этих типов определяется степенью его ценности для развития навыка в решении уравнений.

Так из приведённой группы на каждый из типов 1—12, а также 29—45 должно быть дано от трёх до пяти примеров. И наоборот, из типов 13—28 можно здесь дать на выбор примеров 8—10, имея в виду уделить им больше места при прохождении отрицательных чисел.

2. В соответствии с нашей общей установкой (§ 7) упражнения с буквенными данными (полностью или частично) даются одновременно, так сказать, „вперемежку" с численными уравнениями. На первых порах после решения такого уравнения следует конкретизировать его путём задания числовых значений букв, вычисления результата и проверки последнего подстановкой в данное уравнение. В дальнейшем же проверка решения таких уравнений должна производиться общим приёмом — подстановкой в данное уравнение найденного выражения для неизвестного.

3. Точно так же, в соответствии с выдвинутым нами принципом о связи с арифметикой, в приведённых примерах числовые данные подобраны так, чтобы они обеспечивали повторение и закрепление некоторых навыков, полученных при изучении арифметики. Так, упражнения №№ 1—12 дают возможность напомнить учащимся о приёмах устных вычислений и применить их при решении уравнений:

а) Поразрядное сложение и вычитание:

№ 6. $136 + 72 = (130 + 70) + (6 + 2)$;

№ 5. $89 - 47 = (80 - 40) + (9 - 7)$.

б) Округление компонентов:

№ 1. $143 - 18 = 143 - 20 + 2$;

№ 2. $87 + 49 = 90 + 50 - 3 - 1$.

в) Умножение на 9 и 11 (а также на 19, на 21 и т. п.):

№ 4. $47 \cdot 9 = 47 \cdot 10 - 47 = 47 \cdot 10 - 50 + 3$;

№ 8. $26 \cdot 11 = 26 \times 10 + 26$.

г) Деление на 5 (а также на 25, 50):

№ 7. $420 : 5 = 420 : 10 \times 2$.

В аналогичных примерах преподаватель должен предусмотреть и другие приёмы устного счёта.

В упражнениях №№ 37—45 предусмотрены случаи письменных вычислений, которые обычно затрудняют учащихся и в которых они дают наибольшее количество ошибок: занимание единицы у высших разрядов (37, 38); сложение с нулями в середине (39, 40); умножение с нулями в середине (44, 45); деление с нулями в частном (41—43).

4. Упражнения для устного решения даются в классе, для письменного — главным образом на дом.

5. Уже при решении уравнений 1-й группы надо требовать от учащихся проверки полученного решения, добиваться того, чтобы эта проверка являлась для ученика обязательным, завершающим этапом решения всякого уравнения.

2-я группа.

Тема. Отрицательные числа.

Тип уравнений: тот же, что и для 1-й группы.

46. $x - 17 = -5$.
47. $a - 11 = -21$.
48. $p + 8 = 5$.
49. $x - (-7) = 13$.
50. $a - (-15) = 10$.
51. $p - (-17) = -31$.
52. $y + (-3) = 6$.
53. $y + (-17) = -4$.
54. $z - (-30) = -42$.
55. $m : 3 = -15$.
56. $n : (-5) = 13$.
57. $x : (-7) = -8$.
58. $8x = -96$.
59. $-7y = 91$.
60. $-3z = -36$.

и т. д.

1. Как видим, в приведённых примерах числовые данные подобраны так, чтобы процесс вычисления не создавал для учащихся дополнительную трудность при изучении новых для них операций с отрицательными числами. По мере приобретения навыка в действиях с отрицательными числами, числовые данные могут усложняться в том же направлении, как и в упражнениях 1-й группы.

2. Упражнения этой группы должны перемежаться с упражнениями 1-й группы, в целях сравнения результатов действий с положительными и отрицательными числами.

3. При прохождении действий с отрицательными числами значительное место должны занять упражнения типов 13—36 с подстановкой в каждое уравнение вместо букв чисел в различных комбинациях.

4. В данной группе мы не привели ни одного примера уравнения с дробными числовыми данными, так как тогда число их пришлось бы увеличить по крайней мере вдвое. Но преподаватель должен помнить, что решение уравнений с дробями десятичными и обыкновенными (в том числе и со смешанными числами) является совершенно обязательным. Упражнения с лёгкими дробями даются устно, с более сложными — в порядке домашних заданий. При этом, так же как

и в примерах с целыми числами, следует предусмотреть все случаи, наиболее затруднительные для учащихся.

5. Выше даны примеры для устных упражнений. Преподаватель сам по образцу №№ 37—45 составит примеры для письменного решения.

3-я группа.

Тема. Отрицательные числа.

Тип уравнений: $ax + b = c$.

(Ш. и В. №№ 43, 44, 55—62, 140—142.)

61. $5x + 29 = 54$.
62. $2x + 49 = 21$.
63. $7a - 38 = 53$.
64. $(x - 47) : 19 = 13$.
65. $5 \cdot (b - 2) = 85$.
66. $400 : (x - 7) = 25$.
67. $35x + 2896 = 2301$.
68. $17k - 7019 = 27032$.
69. $3\frac{1}{2}x + 12\frac{2}{3} = 26\frac{2}{5}$.
70. $3{,}4x - 1{,}38 = 49{,}62$.

Это задачи второй степени трудности, решаемые двумя действиями; при этом за один из компонентов приходится брать уже сложное выражение ($5x$, $x - 47$ и т. п.). Так, в задаче 64 находится сначала неизвестное делимое $x - 47$, затем из уравнения $x - 47 = 247$ находится неизвестное уменьшаемое.

Уравнения первых двух групп фактически решались учащимися ещё в IV—V классах. Поэтому обычно на них задерживаться не приходится, и при изучении отрицательных чисел можно быстро перейти к 3-й группе.

4-я группа.

Тема. Сложение и вычитание одночленов и многочленов; приведение подобных членов.

Тип уравнений: $f(x) = c$.

(Ш. и В. №№ 54, 64, 75, 78, 82.)

71. $3x + 4x = 84$.
72. $x + 2x + 3x = 66$.
73. $x + (x - 6) = 38$.
74. $x + x + (x + 2) = 47$.
75. $(3x + 5) + (2x - 7) = 183$.
76. $(2x + 17) + (13 - 5x) = 240$.
77. $(5x + 397) - (3x - 156) = 117$.
78. $(7x - 15) - (4x - 19) + (5x - 4) = 30$.
79. $(4x - 3x^2 + 5x^3 + 6) + (3x^2 - x - 5x^3 - 17) = 67$.

80. $(5m^3 - 17m - 4m^2 - 7) - (5m^3 - 11m - 4m^2 - 47) = 8.$
81. $3{,}75x + 0{,}5 - 2{,}25x = 8.$
82. $0{,}4x + 1{,}12 - 0{,}5x + \frac{1}{5} = 0{,}4.$
83. $2x - 3 = 5a.$
84. $(2x + 7b) + (3x - 4b) = 18b.$
85. $(7x - 3m) - (4x - 5m) = 17m.$

Как видим, уравнения этой группы можно разнообразить в самых широких размерах и в различных направлениях: а) уравнения с числовыми и с буквенными данными; б) уравнения с целыми и дробными коэфициентами; в) уравнения с положительными и отрицательными, с целыми и дробными корнями. Не следует, конечно, стремиться к охвату всех этих вариантов. Количество, характер и степень трудности упражнений лимитируются в первую очередь основной целью — привитие навыка в сложении и вычитании целых одночленов и многочленов и в решении элементарных задач (глава VII, группа 2) путём составления уравнений.

5-я группа.

Тема. Умножение одночленов и многочленов.

Тип уравнений: $f(x) = c$.

(Ш. и В. №№ 67—70, 162.)

86. $9(x + 13) = 135.$
87. $11(x - 12) = 143.$
88. $17(x + 4) = 51105.$
89. $12(x - 9) = 18.$
90. $x(x + 5) - x^2 = 65.$
91. $4x(x - 2) - 4x^2 = 4.$
92. $5x(12x + 7) - 4x(15x - 3) - 29x = -36.$
93. $2x(6x^2 - 12x + 29) - 3x(4x^2 - 8x - 4) + 380 = 30.$
94. $(2x + 3)(3x - 2) - (6x^2 - 85) = 99.$
95. $(4x - 5)(3x + 1) - (2x - 7)(6x - 11) = 24.$
96. $(x + a)(x + b) - ab - x^2 - bx = 5a.$
97. $7(x - a) + 2x = 20a.$
98. $3(x + b) - 5(2x - 3b) = 32b.$
99. $(2x + 5)(3x - 2b) + 4bx - 6x^2 = 20b.$

Полезно снова (см. 3-ю группу) прорешать задачи 55—62 задачника Шапошникова и Вальцова путём раскрытия скобок и убедиться, что оба способа приводят к одному и тому же результату, но первый предпочтительнее, так как приходится оперировать с меньшими числами, и уравнения легко решаются устно.

Так как основное внимание здесь должно быть уделено воспитанию навыка в тождественных преобразованиях (в особенности в употреблении знаков), то вычислительный момент должен отойти на второй план. Но всё же и здесь время от времени следует напоминать и о приёмах устных вычислений (№№ 86, 87 и др.), трудных случаях деления (№ 88) и особенно не забывать упражнять учащихся в действиях с отрицательными числами (№№ 92, 93).

6-я группа.

Тема. Формулы сокращённого умножения.

Тип уравнений:

$$(ax+b)^2-a^2x^2=c; \quad (ax+b)(ax-b)-a^2x^2=c.$$

(Ш. и В. № 164.)

100. $(x+4)^2-x^2=80.$
101. $(x+3)^2-2x-x^2=29.$
102. $(3x-4)^2+27x-9x^2=25.$
103. $16x^2-(7-4x)^2-169x=64.$
104. $(x+7)(x-7)+4x-x^2=15.$
105. $(2x+3)(2x-3)+13x-4x^2=56.$

Этих немногих примеров достаточно, чтобы по их образцу составить нужное количество аналогичных. Понятно, что для закрепления формулы надо дать побольше упражнений на элементарные двучлены, по своему виду напоминающие обычные формулы: $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$ (таковы задачи 101 и 104), и затем уже перейти к более сложным двучленам (№№ 102, 103, 105).

7-я группа.

Тема. Деление одночленов и многочленов.

Тип уравнений: $f_1(x):f_2(x)=c.$

106. $6x^3:2x^2=27.$
107. $18x^4:-9x^3=2.$
108. $12ax^3:4ax^2=6.$
109. $12y^2:4y+2y-39=16$[1]).
110. $(18x^4-12x^3):6x^3=4.$
111. $(a^3-6a^2+12a-8):(a^2-4a+4)=5.$
112. $(x^2+2ax-8a^2):(x-2a)=0.$
113. $(6x^2+ax-a^2):(2x+a)=0.$
114. $(3+8x+x^2-2x^3):(1+2x-x^2)=9.$
115. $(x^2-ax-3x+3a):(x-a)=4.$

[1]) Вспомнить правило о порядке действия.

С уравнениями подобного же типа мы встретимся и в дальнейшем, при изучении тем „Разложение на множители" и „Алгебраические дроби" (именно в упражнениях на сокращение дробей). Поэтому здесь не следует уделять им много места, тем более что они не сопровождаются задачами, приводящими к уравнениям этой группы. Но всё же они вносят некоторое разнообразие в упражнения на деление одночленов и многочленов. Обращаем внимание на то, что задачи 112—114 являются не чем иным, как переделанными в уравнения упражнениями №№ 342, 343 и 346 на деление многочленов задачника Шапошникова и Вальцова.

Следует обратить внимание учащихся, что здесь приём решения, который мы применяли к аналогичным уравнениям 1—3-й групп (т. е. умножение частного на делитель), непригоден, так как мы получим тогда уравнение, во-первых, степени выше первой, во-вторых, содержащее неизвестное в обеих частях. Такие уравнения мы ещё решать не умеем.

8-я группа.

Тема. Разложение на множители.

116. $(5x - 15) : 10 = 2.$
117. $(ax + 5a) : 3a = 4.$
118. $(x^2 - 2ax + a^2) : (x - a) = 1.$
119. $(x^2 - b^2) : 3(x - b) = b.$
120. $(x^2 - bx - 7x + 7b) : 2(x - b) = 1.$
121. $(a + b - c)x - (a - b - c)x - 2(ab + ac + bc) +$
$+ (a - b + c)x = a^2 + b^2 + c^2.$

Разложение алгебраических выражений на множители, как известно, является одним из трудных разделов алгебры. Одной из причин этого является, так сказать, „абстрактность" этого раздела и отсутствие у учащихся ясного представления о практической ценности изучаемого материала. Ссылка на то, что навык в разложении на множители пригодится в дальнейшем, при изучении алгебраических дробей, мало помогает делу.

Между тем, уже приступая к этой теме, можно привести учащимся ряд оснований для её изучения. Можно на конкретных примерах показать практическую полезность навыка в представлении данного многочлена в виде произведения (если, конечно, это возможно).

1. Нахождение численной величины алгебраических выражений даёт первый повод для такого показа. Предлагается учащимся найти численную величину выражения

$$3a^2x + 4a^2y - 2a^2z$$

при $a = 6$; $x = 2$; $y = 3$ и $z = 4$. Обычный приём вычисления даёт:

$$3 \cdot 36 \cdot 2 + 4 \cdot 36 \cdot 3 - 2 \cdot 36 \cdot 4 = 216 + 432 - 288 = 360.$$

Но мы можем данное выражение представить в виде произведения

$$a^2(3x + 4y - 2z),$$

что легко проверить непосредственно. Но теперь нахождение численной величины его приводится к вычислению:

$$36(3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = 36 \cdot 10 = 360.$$

Учащиеся убеждаются, что вычисления значительно сократились и упростились.

2. Арифметические задачи с буквенными данными также позволяют наглядно показать практическое значение навыка в разложении на множители. Пусть, например, решается задача: „Найти площадь квадратной рамы, если её внешняя сторона m сантиметров, а внутренняя n сантиметров“.

Получив ответ: $m^2 - n^2$, преподаватель предлагает применить его к частному случаю, например $m = 55$, $n = 45$ или $m = 37$, $n = 13$. Вычисления дают:

$$s = 55^2 - 45^2 = 3025 - 2025 = 1000.$$
$$s = 37^2 - 13^2 = 1369 - 169 = 1200.$$

Применив же разложение на множители, получим:

$$s = (55 + 45)(55 - 45) = 100 \cdot 10 = 1000.$$
$$s = (37 + 13)(37 - 13) = 50 \cdot 24 = 1200.$$

Преимущество второго способа очевидно: здесь ответ легко находится устно.

3. Наконец, решение уравнений даёт третий повод к применению метода разложения на множители. На примере уравнения

$$17(x - 5) : 34 = 3$$

показывается, что вместо раскрытия скобок здесь выгоднее предварительно разделить делимое и делитель на 17 (руководясь известным учащимся из арифметики правилом, что от этой операции величина частного не изменяется). Получается уравнение

$$(x - 5) : 2 = 3,$$

которое легко решается устно.

После двух-трёх таких примеров можно перейти к уравнению вида

$$(39x - 26) : 26 = 3.$$

После решения его обычным путём учащиеся под руководством преподавателя находят, что делимое могло быть представлено в виде $13(3x-2)$, и тогда мы приходим к предыдущему типу уравнений, допускающему упрощение путём деления делимого и делителя на 13. Получаем:

$$(3x - 2) : 2 = 3$$

— более простое уравнение.

Так же проводится решение хотя бы уравнения № 117 или 110 из приведённых выше.

Наконец, можно взять одно из уравнений предыдущей, 7-й группы, например № 112, и показать, что и его можно было решить, не производя деления, представив делитель в виде

$$(x + 4a)(x - 2a)$$

и разделив затем делимое и делитель на $(x - 2a)$. Задача № 118 даёт пример на применение формулы квадрата разности и т. д.

9-я группа.

Тема. Алгебраические дроби.

Тип уравнений: уравнения с дробными членами, не содержащими неизвестного в знаменателе (Ш. и В. №№ 79—81, 99, 144—147, 150, 160, 161, 166, 167, 173, 198).

122. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 6.$

123. $\frac{x-2}{3} = 5.$

124. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

125. $\frac{x}{6} - \frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 1.$

126. $\frac{3x}{4} + \frac{7x}{15} + \frac{11x}{6} = 366.$

127. $x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100.$

128. $\frac{2x-3}{5}-\frac{x+1}{5}=3.$

129. $\frac{5x-2}{3}-\frac{4x-3}{5}=6.$

130. $\frac{5x}{9}-\frac{2x-1}{3}=\frac{4}{15}.$

131. $\frac{2x-6}{5}-\frac{x-4}{9}-\frac{3x}{13}=0.$

132. $\frac{3x+4}{5}+2x-\frac{22-x}{5}=16.$

133. $\frac{3x+5}{8}+5x-\frac{21+x}{3}=39.$

134. $\frac{x-3}{4}-\frac{2x-5}{6}-\frac{3x-8}{5}+\frac{5x+6}{15}=\frac{41}{60}.$

135. $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{ex}{f}-g=h.$

136. $x+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1.$

137. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{a}{a+b}.$

138. $\frac{a^2x}{b-c}+ac-bx=dc.$

139. $\frac{(2a-b)x+a^2-b^2}{ab}-\frac{3x}{b}=\frac{(a+b)^2}{ab}.$

140. $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{c}-\frac{x-c}{a}=\frac{a+b+c}{abc}.$

Под дробными уравнениями в точном смысле слова следует понимать, конечно, лишь уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. Однако в школьной практике, и не без основания, термину „дробные уравнения“ придают более расширенное толкование: дробным считается всякое уравнение, имеющее дробные члены с любым буквенным (а в частности и с числовым) знаменателем. Дело в том, что с точки зрения техники алгебраических преобразований не имеет значения роль, которую играет та или иная буква в уравнении: является ли она неизвестной величиной или некоторым данным числом. Уравнения:

$$\frac{x}{a-3}-5=b \text{ и } \frac{a}{x-3}-5=b$$

требуют для своего решения одних и тех же операций с точки зрения преобразования дробей. Различие между ними выступает лишь тогда, когда ставится вопрос о законности этих операций с точки зрения эквивалентности уравнений. Последнее обстоятельство и даёт нам внешний повод отделить их друг от друга, отнеся уравнения с неизвестными в знаменателе к уравнениям основного цикла, решаемым на основании теорем об эквивалентности. Впрочем, это разделение оправдывается и рядом методических соображений.

Мы в приведённых выше примерах даём большое количество уравнений с числовыми знаменателями, подчёркивая этим, что таким уравнениям следует уделить более или менее значительное место. Они служат отличным средством для перехода от известных уже учащимся действий с арифметическими дробями к операциям над алгебраическими дробями, вскрывая связь и значительную аналогию между теми и другими.

Уравнения с буквенными коэфициентами даны лишь самые элементарные, преимущественно с одночленными знаменателями. В основной цикл войдут и уравнения несколько более сложного вида. Но вообще мы не склонны к тому, чтобы заходить далеко в отношении сложности дробных уравнений, так как этого не требуют соображения ни теоретического, ни практического порядка.

10-я группа.

Тема. Пропорции.

Тип уравнений: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{c}{d}$.

141. $\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$.

142. $\frac{x}{a} = \frac{b}{2}$.

143. $\frac{x-2}{15} = \frac{1}{3}$.

144. $\frac{3-x}{x} = \frac{1}{2}$.

145. $\frac{x+5}{x} = \frac{9}{4}$.

146. $\frac{x}{a-x} = \frac{b}{a-b}$.

147. $\frac{x}{a+x} = \frac{2}{3}$.

148. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{b}$.

149. $\frac{2x-7}{2x+7} = \frac{11}{25}$.

150. $\frac{x+a}{x-a} = \frac{a+b}{a-b}$.

Пропорции, введённые в программу курса алгебры с 1937 г. в качестве особого раздела, занимают в этом курсе совершенно изолированное место. Они никак не связаны ни с предыдущим, ни с последующим материалом курса. Особенно в невыгодном положении находятся так называемые „производные пропорции“. Из основной пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ получается неизвестно зачем, несколько новых пропорций:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}. \tag{1}$$

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{d}. \tag{2}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}. \tag{3}$$

Даются словесные формулировки этих равенств, и учащиеся должны заучить их наизусть, очевидно, только для того, чтобы тут же забыть, так как нигде в дальнейшем об этих пропорциях нет ни малейшего напоминания, ни малейшего намёка.

Даже там, где применение производных пропорций напрашивается само собой, даёт наиболее лёгкий и быстрый способ решения задачи, даже и там учителя редко прибегают к нему. Мы имеем в виду задачи на подобие в геометрии (см., например, в задачнике Рыбкина, ч. 1, § 8, задача 5, 10, 14, 22, 25 и пр.). Правда, по времени прохождения этого раздела геометрии (VIII класс) пропорции, особенно производные, оставаясь до сих пор без всякого употребления, бывают уже основательно забыты учащимися, и учитель вправе усомниться в том, насколько облегчит и ускорит решение задачи восстановление их в памяти.

И здесь уравнения дают прекрасный материал как для увязки раздела пропорций с предыдущим (дроби) и последующим (уравнения) разделами, так и для систематического применения производных пропорций. Дадим несколько примеров.

После вывода основного свойства пропорции учащимся даётся уравнение хотя бы такого вида:

$$\frac{x - a}{1 - b} = \frac{a}{b}.$$

Учащиеся решают его сначала обычным путём:

$$\frac{x - a^{b}}{1 - b} = \frac{a^{1-b}}{b}; \quad \frac{b\,(x - a)}{b\,(1 - b)} = \frac{a\,(1 - b)}{b\,(1 - b)}; \quad b\,(x - a) = a\,(1 - b);$$

$$bx - a\underline{b} = a - ab;\; bx = a;\; x = \frac{a}{b}.$$

Преподаватель указывает, что, применив основное свойство пропорции, мы могли бы сразу написать:

$$b\,(x - a) = a\,(1 - b)$$

или ещё лучше:

$$bx - ab = a - b.$$

(В дальнейших простых примерах нужно требовать, чтобы учащиеся сразу производили умножение.)

После вывода производных пропорций можно дать уравнение

$$\frac{x-6}{6} = \frac{2}{3}.$$

Решив его: а) как дробное уравнение; б) с применением основного свойства пропорции, т. е. сразу представив в виде:

$$3x - 18 = 12,$$

следует показать, как можно применить здесь производную пропорцию вида (1), т. е. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; уравнение примет вид:

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{3}.$$

Отсюда получаем сразу:

$$x = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10.$$

Выше приведены примеры на применение производных пропорций — №№ 144, 145 для пропорции (1), №№ 146, 147 для (2) и №№ 148—150 для (3). Преподаватель легко сможет сам придумать их в любом количестве.

Пропорциями заканчивается пропедевтический курс уравнений. Мы видим, насколько этот курс богат по содержанию и широк по объёму. По существу в отношении техники решения уравнений он уже полностью обеспечивает тот уровень в овладении этой техникой, который можно потребовать от оканчивающего неполную среднюю школу. Мы увидим, что уравнения основного цикла в этом смысле уже почти не вносят ничего нового, могущего затруднить для учащегося процесс их решения. Именно поэтому основное внимание учителя может и должно быть направлено там на выработку навыка в применении уравнений к решению задач.

Мы ещё раз обращаем внимание на то, что при всём своём разнообразии как в отношении типа уравнений, так и степени их трудности они нигде не являются искусственно притянутыми к основному изучаемому на данном этапе материалу. Они не только не мешают, но, наоборот, помогают более быстрому, более сознательному и более прочному усвоению этого материала, являясь иногда (формулы сокращённого умножения, пропорции и пр.) почти единственным и во всяком случае наиболее эффективным средством для такого усвоения.

И всё же мы отнюдь не настаиваем, чтобы каждый преподаватель при любых условиях, во что бы то ни стало, старался осуществить изложенную здесь программу во всём её объёме. И разнообразие типов и степень трудности уравнений определяются рядом конкретных условий и в первую очередь опытом преподавателя.

Пусть на первых порах преподаватель ограничится наиболее простыми уравнениями для каждой из приведённых выше групп. Положительные результаты этого мероприятия настойчиво побудят его к дальнейшему расширению привлекаемого материала в последующие годы.

Мы допускаем даже, что преподаватель может, при введении пропедевтики уравнений впервые, ограничиться типами уравнений, данными в первых четырёх-пяти группах. Но тогда, во-первых, нужно потребовать, чтобы практика в решении уравнений хотя бы только этих групп проводилась систематически в течение всего курса VI—VII классов (правда, здесь теряется крайне важный методический момент — связь с изучаемым основным материалом). Во-вторых, в этом случае, при изучении самой темы „Уравнения" должны быть сначала пройдены последовательно все группы, приведённые выше и не вошедшие в „пропедевтический курс". Лишь после этого следует переходить к теоремам об эквивалентности и к уравнениям и задачам основного цикла.

§ 19. Уравнения основного цикла.

Уравнения пропедевтического цикла мы группировали по характеру тождественных преобразований, применяемых при их решении. Этого требовала задача увязки уравнений с изучаемым разделом алгебры. Для уравнений основного цикла этот принцип классификации отпадает. Здесь сами уравнения и являются основной темой. При этом, как уже не раз говорилось выше, центральное место здесь должно занять решение задач. Поэтому задачи, т. е. характер зависимостей между данными величинами, служат определяющим моментом и в классификации уравнений основного цикла.

Преобладающее место в этом цикле занимают уравнения, содержащие неизвестное в обеих частях, т. е. уравнения вида:

$$ax + b = cx + d,$$

что находится в полном соответствии с тем, что учащиеся уже знают теоремы об эквивалентности и сумеют применить их к решению уравнений.

Вторым крупным разделом этого цикла являются дробные уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. Это наиболее сложные уравнения с точки зрения алгебраических операций, и ими естественно завершается изучение всего раздела уравнений 1-й степени с одним неизвестным.

Что касается дальнейшего дробления каждой из этих двух больших групп уравнений, то с точки зрения дальнейшего развития техники в их решении нет особой необходимости в строгой классификации их. В пропедевтическом курсе учащиеся уже познакомились со всеми видами преобразований, которые преимущественно приходится производить при решении уравнений. То, что теперь приходится преобразовывать уже не одну, а обе части уравнения, не вносит чего-либо нового с точки зрения самой техники операций. Конечно, и здесь следует соблюдать принцип постепенного нарастания трудностей в решении уравнений с точки зрения количества членов, наличия скобок, дробных членов и т. п.

Но особое значение приобретает здесь классификация задач на составление уравнений, навык в решении которых и является на данном этапе основной целью. При этом, понятно, тип задачи, т. е. характер зависимости данных в ней величин, в значительной мере определяет и вид получаемого уравнения.

Предлагаемая ниже классификация уравнений основного цикла и является по существу классификацией задач на составление уравнений. Она находится в соответствии с семью группами, на которые мы разбиваем эти задачи, и показывает наиболее типичный вид уравнения, к которому приводит каждая группа. Вот эта классификация:

1-я группа.

Уравнения вида: $f(x) = x$,

т. е. уравнения, выражающие равенство некоторого сложного выражения (получаемого в процессе составления уравнения по условиям задачи) неизвестному числу.

(Ш. и В. № 63.)

Примеры:

1. $3x - 14 = x$.
2. $4x + 75 = x$.
3. $\frac{3}{5}x + 6 = x$.
4. $\frac{15}{7}x - 16 = x$.
5. $\frac{4}{17}x - 39 = x$.
6. $0{,}13x + 174 = x$.
7. $6x + 19 - x - 63 = x$.
8. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 4 = x$.
9. $3x - 8a = x$.
10. $5x - b = x$.

2-я группа.

Уравнения вида: $ax + b = cx + d$,

т. е. уравнения, выражающие равенство двух сложных выражений.

(Ш. и В. №№ 45—53, 76, 83—85, 87, 88, 106, 126, 148, 149, 152, 154.)

Примеры:

11. $39 + x = 81 - x$.
12. $3x - 58 = x + 14$.
13. $7x - 92 = 2x - 27$
14. $4x + 33 = x + 11$.
15. $3701 - 17x = 13x - 259$.
16. $x + a = b - x$.
17. $m + 3x = x + 7m$.
18. $(5 + x)\,(6 + x) = (3 + x)\,(9 + x)$.
19. $(11 - x)\,(20 - x) = (26 - x)\,(14 - x)$.
20. $(2 + x)\,(7 + x) = (19 - x)\,(11 - x)$.

3-я и 4-я группы.

Уравнения вида: $f(x) = f_1(x)$.

(Ш. и В. №№ 65, 66, 77, 86, 153, 155, 158, 159, 163, 165.)

Уравнения этих групп отличаются от уравнений 2-й группы лишь большей сложностью выражений, стоящих в обеих частях, и, следовательно, требуют большего количества тождественных преобразований. Решаются они одновременно с решением задач 3-й и 4-й групп основного цикла (гл. VII).

Примеры:

21. $3(x - 2) = 5(76 - 7x)$.
22. $6(5y - 30) = 5(y - 1)$.
23. $17(z + 8) = 3(4 - 13z)$.
24. $\frac{1}{3}(2x + 3) = 5 + \frac{1}{3}(x + 1)$.
25. $4\frac{1}{2}(2 - x) = 3x + 2(x - 5)$.

26. $7x = 5(32 - x) + 128$.

27. $\frac{x}{h} = x + k$.

28. $(a + b)x + ab = (b + c)x + bc$.

29. $\frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{5}(3x - 4) = \frac{1}{4}(3x + 3)$.

30. $(x + a)^2 - 2 = x - a^2 - 2x$.

5-я группа.

Уравнения вида: $ax + b(s - x) = c$.

Уравнения этой группы, несомненно, легче предыдущих. По существу учащиеся уже решали такие уравнения в VI классе (см. 5-ю группу пропедевтического цикла). Здесь придётся решить в порядке повторения несколько примеров в связи с решением задач соответствующей группы основного цикла (см. гл. VII).

Примеры:

31. $2x + 3(10 - x) = 27$.

32. $9x + 8(30 - x) = 256$.

33. $ax + 16(b - x) = 100$.

34. $ax + 3a(m - x) = 5$.

6-я группа.

Дробные уравнения с одночленными знаменателями.

(Ш. и В. №№ 89—98, 100—105, 108, 151, 172, 174—176.)

Примеры:

35. $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$.

36. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

37. $\frac{a}{x} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$.

38. $ax + b = \frac{x}{a} + \frac{1}{b}$.

7-я группа.

Дробные уравнения с многочленными знаменателями.

(Ш. и В. №№ 110—125, 128—132, 156, 157, 168—172, 177 и далее.)

Примеры:

39. $\frac{6x + 7}{15} - \frac{2x - 2}{7x - 6} = \frac{2x + 1}{5}$.

40. $\frac{3x}{x + 2} + \frac{2x}{x + 1} = 5$.

41. $\frac{1}{1 + x} + \frac{3}{1 - x} = \frac{24}{1 - x^2}$.

42. $\frac{2x + 10}{5x^2 - 5} - \frac{17}{x^2 - 1} - \frac{3}{1 - x} = 0$.

43. $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 4} = \frac{1}{x - 6} - \frac{1}{x - 8}$.

44. $\frac{a + b}{x - c} = \frac{a}{x - a} + \frac{b}{x - b}$

Как уже сказано, принцип, положенный в основу такой группировки уравнений, целиком вытекает из принятой нами классификации задач и будет объяснён в соответствующем месте (гл. VII). Здесь же сделаем только несколько замечаний.

1. Нет никакой необходимости при решении задач той или иной группы решать и уравнения исключительно такого вида, к какому приводят задачи именно этой группы. Во-первых, вполне целесообразно систематически возвращаться к типам уравнений, уже решавшимся ранее, в частности к уравнениям пропедевтического цикла. Последнее особенно важно, если при решении в VI и VII классах преподаватель ограничивался лишь наиболее элементарными, лёгкими уравнениями. Во-вторых, как в арифметике тренировочные упражнения в выполнении арифметических действий содержат в себе и более сложные и трудные случаи, чем встречающиеся при решении задач, так и здесь между упражнениями на решение уравнений и задачами, приводящими к уравнениям, должно иметь место то же соотношение.

2. Последние уроки, отведённые на изучение данной темы, должны быть посвящены, так сказать, „смешанному разделу“, т. е. решению уравнений и задач разнообразного типа и различной степени трудности. В частности, должно быть решено несколько уравнений и задач повышенной трудности, не вошедших в принятую здесь классификацию.

Какую степень трудности можно считать предельной, по достижении которой можно считать раздел пройденным полностью и приобретённые навыки вполне достаточными?

В отношении уравнений с численными коэфициентами подбор упражнений в задачнике Шапошникова и Вальцова нас вполне удовлетворяет: все уравнения, приведённые там, ученик должен решать свободно; предъявлять же более высокие требования было бы уже практически нецелесообразно.

Что касается уравнений с буквенными коэфициентами, то здесь в этом задачнике имеется уже некоторый „пересол“. Мы считаем, что ни теоретические, ни практические соображения не могут оправдать включение таких задач, как №№ 181—185, а может быть даже и №№ 201—210. При решении задач такие уравнения не могут получиться. Для целей тренировки они ничего нового не дают, кроме громадного увеличения вероятности ошибки в процессе решения и тем самым бесполезной траты времени.

§ 20. Ошибки учащихся при решении уравнений.

Как мы уже указывали, из трёх разделов, составляющих содержание темы „Уравнения“, — теория, решение уравнений и решение задач методом уравнений, — учащимися сравнительно легче и прочнее усваивается второй — решение уравнений, особенно с числовыми коэфициентами.

Тем не менее и здесь ошибки у среднего ученика — довольно обычное явление, и борьба с ними, а в особенности мероприятия по предупреждению их являются для преподавателя совершенно обязательными. Задача эта облегчается тем, что разделу уравнений, как и всякому другому, присущи свои, характерные для него, т. е. наиболее часто имеющие место, ошибки. Их-то и должен иметь в виду преподаватель при построении плана изучения данной темы и наметить ряд методических подходов и приёмов к тому, чтобы при постепенном обучении технике решения уравнений, при постепенном усложнении решаемых примеров уловить ту стадию работы, на которой возникает возможность появления ошибки того или иного вида, и уделить этому моменту особое внимание.

Ошибки, обычно имеющие место при решении уравнений, можно разбить на две группы.

1. Первая группа ошибок — это ошибки в тождественных преобразованиях.

Эти ошибки являются, так сказать, „наследием прошлого“, результатом нетвёрдого навыка, полученного при изучении данного вида тождественных преобразований. Там они в первую очередь и обнаруживаются, и именно там, на этой стадии работы, и должны быть приняты меры к их предупреждению и изжитию. В соответствующей методической литературе обычно излагаются специальные методы и приёмы для предупреждения и искоренения такого рода ошибок, и здесь не место распространяться о них. Но мы лишь хотим указать, что и в этом отношении уравнения приходят на помощь преподавателю.

К числу наиболее часто встречающихся ошибок принадлежат:

а) ошибки в приведении подобных членов, в большинстве случаев имеющие своим источником слабый навык в действиях с отрицательными числами. Так, многочлен

$$7x - 8x - 6x$$

приводится иногда к виду $-5x$ или $5x$ (неправильное упрощение выражения $-1-6$).

б) Ошибки в знаках при раскрытии скобок, например:

$$7x+65-(5x+40)=7x+65-5x+40.$$

в) То же при умножении многочленов:

$$3x^2-(x-3)(3x-2)=3x^2-3x^2-9x-2x+6.$$

г) Ошибки в действиях с дробными членами, например:

$$\frac{x}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{3x-2x-8}{6}$$

и т. п.

Наш опыт со всей убедительностью показал, что именно параллельное решение уравнений, включающих данную операцию, является наиболее радикальным средством для искоренения этих ошибок. В самом деле, обычно при наличии ошибки преподаватель может использовать тот или иной частный приём для того, чтобы сделать эту ошибку очевидной для ученика.

Так, в случае а) преподаватель может предложить применить правило сложения отрицательных чисел (т. е. сложить отдельно положительные числа и отдельно отрицательные, затем из большей абсолютной величины вычесть меньшую и т. д.), может переставить слагаемые и т. п.

В случае б) можно напомнить правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак минус, или правило: „Чтобы вычесть сумму, следует...“ и т. д.

Более универсален и часто скорее приводит к цели метод проверки правильности преобразования подстановкой вместо букв произвольных числовых значений их. Этот способ применим к любому преобразованию, и его надо всячески культивировать.

Но оба эти метода имеют существенный недостаток. Они помогут ученику обнаружить ошибку в том случае, если ученик сочтёт необходимым подвергнуть преобразование такой проверке, т. е. если он сомневается в правильности проделанного преобразования.

Фактически первый метод применяется обычно преподавателем, когда он замечает ошибку, ученик здесь играет лишь пассивную роль. Второй метод — метод числовых подстановок — был бы вполне эффективным, если бы ученик каждое преобразование сопровождал такой проверкой. Но требовать этого от ученика едва ли было бы целесообразно по ряду мотивов (лишняя затрата времени, особенно в случае уверенности ученика в правильности преобразования), хотя и следует приучить учащихся систематически прибегать к такой проверке во всех сомнительных случаях. Иное дело уравнения. Здесь проверка решения подстановкой полученного корня в исходное уравнение с самого начала входит составной частью в процесс решения. На протяжении всего курса она носит принудительный характер, является обязательной для ученика (лишь сам преподаватель в тех или иных конкретных условиях может освободить ученика от проверки решения).

А раз так, то при решении уравнений ошибка в том или ином тождественном преобразовании вскрывается и исправляется немедленно, и в этом громадное методическое и практическое значение уравнений.

Особенно показательна и эффективна роль уравнений в искоренении ошибок в тех случаях, когда эти уравнения получаются в результате решения задачи.

Пусть дана задача:

„Один ученик купил учебник за 65 коп. и 7 карандашей; другой купил учебник за 40 коп. и 5 карандашей по той же цене, что и первый. Сколько стоил один карандаш, если первый ученик заплатил на 55 коп. больше второго?“

Получается уравнение:

$$(7x+65)-(5x+40)=55,$$

левая часть которого совпадает с выражением, данным выше (под п. б).

Пусть ученик допустил приведённую там ошибку. Тогда он получает:

$$7x+65-5x+40=55; \qquad 2x=-50;$$
$$7x-5x=55-65-40; \qquad x=-25.$$

Нелепый ответ уже с очевидностью убеждает в наличии ошибки (если задача вообще возможна) и заставляет сделать проверку и обнаружить ошибку или убедиться в отсутствии решения.

Возьмём задачу на случай в):

„Длина прямоугольника в три раза больше его ширины. Если длину его уменьшить на 2 *см*, а ширину на 3 *см*, то площадь нового прямоугольника будет на 60 *см* меньше данного. Найти размеры данного прямоугольника“.

Пусть при решении полученного уравнения

$$3x^2 - (3x-2)(x-3) = 60$$

ученик допустил приведённую нами выше ошибку. Он получит:

$$3x^2 - 3x^2 - 2x - 9x + 6 = 60;$$

$$-11x = 60 - 6;$$

$$x = -4\frac{10}{11}.$$

Нелепый ответ опять вынуждает искать ошибку.

Могут возразить, что не всегда в случае ошибки получается нелепый ответ, сразу обнаруживающий её. Но, во-первых, опыт показывает, что случаи нелепых ответов при наличии ошибки очень часты (например, в первой задаче могло получиться положительное, но дробное число). Во-вторых, для всех случаев остаётся общий метод обнаружения ошибки — проверка решения. Случаи нелепых ответов лишь повышают ценность уравнений в интересующем нас здесь отношении. Они наглядно показывают практические последствия сделанной ошибки и побуждают учащихся к более аккуратному производству преобразований.

2. Вторая группа ошибок — это ошибки, специфически присущие уравнениям; это ошибки, связанные с неправильным применением теорем о равносильности. Сюда относятся:

а) ошибки в знаках при переносе членов из одной части уравнения в другую (очень частая ошибка),

б) ошибки при приведении к целому виду дробных уравнений.

Так, приводя члены уравнения к общему знаменателю, учащиеся забывают умножить на этот знаменатель целый член уравнения, если таковой имеется.

Особенно часто бывает это в уравнениях вида $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} = m$: учащиеся после приведения левой части к общему знаменателю отбрасывают его, не умножая на него правую часть, т. е. получают:

$$adx + bcx = m.$$

Ошибки первого рода не могут иметь места при решении уравнений вида $ax + b = c$, решаемых на основе зависимости между компонентами. Когда мы говорим: слагаемое

(ax) равно сумме (c) минус другое слагаемое (b), то не можем выразить это соотношение иначе, как в виде $ax = c - b$. (Мы не принимаем в расчёт ошибок при выполнении самого вычитания $c - b$, особенно, когда c или b, или оба — числа отрицательные. Это уже ошибки в тождественном преобразовании.)

Как правило, не возникают эти ошибки и тогда, когда ученики уже фактически применяют теорему об эквивалентности, употребляя выражение, допустим, для того же типа уравнения: «вычтем из обеих частей уравнения по b», и получают $ax + b - b = c - b$; $ax = c - b$.

Эти ошибки обычно появляются тогда, когда учащиеся начинают применять следствие из теоремы, т. е. когда они пользуются формулировкой: «перенесём (в приведённом выше уравнении) член из левой части в правую». Конец формулировки — „с обратным знаком“ упускается из виду, — и отсюда ошибка. Каждый преподаватель непосредственным наблюдением может убедиться, что дело обстоит именно таким образом.

Но раз так, раз именно эта формулировка перехода от одного уравнения к другому, ему эквивалентному, порождает грубые ошибки в решениях, то, естественно, возникают два вопроса: следует ли вообще вводить эту формулировку в практику учащихся и если всё же следует, то на каком этапе изучения темы?

На первый вопрос приходится ответить положительно. Эта формулировка сокращает преобразование (соответствующий член сразу пишется только в одной части уравнения); она общеупотребительна и, наконец, точно выражает конечный результат преобразования (в итоге мы действительно как бы перенесли член из одной части уравнения в другую), отказываться от неё поэтому не следует.

Другое дело — когда следует вводить эту формулировку. Именно опасность порождения ошибок ясно говорит против торопливого, слишком раннего введения её в практику учащихся. Её можно вводить лишь тогда, когда учащиеся уже прорешали в течение достаточно долгого периода и достаточно большое количество задач, применяя непосредственно самую теорему, т. е. «прибавим (вычтем) к обеим частям уравнения...» и т. д.; когда последняя формулировка настолько прочно укрепится в сознании ученика, что и при употреблении новой формулировки «перенесём...» и т. д. он невольно мысленно представляет себе, что он, так сказать, в сокращённом виде выполняет преобразование, формулированное в первой теореме об эквивалентности. Тем более чётко и быстро он должен всегда ответить на вопрос учителя: «Почему мы имеем право перенести член из одной части уравнения в другую? Какое преобразование фактически мы здесь выполняем?»

В этом вопросе нужно соблюдать такую последовательность.

1. При изучении первых глав алгебры и действий с отрицательными числами следует исключительно употреблять формулировку, выражающую зависимость между компонентами действия.

При решении уравнений

$$5x + 47 = 82, \text{ или } 3x - 12 = 48$$

ученик говорит: „Слагаемое $5x$ равно сумме, т. е. 82 минус другое слагаемое, т. е. 47", или: „Уменьшаемое $3x$ равно ..." и т. д. и соответственно пишет:

$$5x = 82 - 47, \text{ или } 3x = 48 + 12;$$
$$5x = 85. \qquad\qquad 3x = 60.$$

2. При изучении действий с одночленами и многочленами преподаватель, решив прежним способом уравнение, например:

$$3x + 17 = 35; \quad 3x = 35 - 17,$$

обращает внимание учащихся на то, что к тому же результату мы придём, если просто вычтем из обеих частей уравнения по 17.

Пишется:

$$3x + 17 = 35 \qquad\qquad 3x + 17 - 17 = 35 - 17$$

или

$$\begin{array}{r} -17 = -17 \\ \hline 3x = 18 \end{array} \qquad\qquad 3x = 18.$$

Выясняется, что такое вычитание мы имели право сделать на основании известного из арифметики правила:

Если от равных чисел отнимем одно и то же число, то и остатки будут равны.

Аналогичная работа (но не на том же уроке) проводится с уравнением вида:

$$7x - 15 = 27.$$

3. В дальнейшем, продолжая решать уравнения вида $ax+b=c$ прежним способом, преподаватель предлагает решить то же уравнение новым способом. Первое время практикуется запись в том виде, как это показано выше. Постепенно путём наблюдения учащиеся устанавливают, что при этом соответствующий член в левой части уравнения всегда исчезает (что понятно — ведь для этого и производится его прибавление или вычитание). А следовательно, запись можно сократить. Говоря: «вычтем (прибавим) из обеих частей уравнения 17 (15)», ученик пишет сразу:

$$3x = 35 - 17 \text{ и } 7x = 27 + 15,$$

а затем в наиболее простых случаях, как приведённых здесь, — и ещё короче:

$$3x + 17 = 35; \qquad 7x - 15 = 27;$$

$$3x = 18. \qquad 7x = 42.$$

4. Когда (примерно при изучении умножения и деления алгебраических выражений) учащиеся достаточно освоились с новым способом выражения, учитель предлагает теперь всегда пользоваться этой новой формулировкой. Для обоснования такой замены можно провести следующую работу.

Даётся для решения уравнение:

$$(7x - 15) - (4x - 29) + (5x - 4) = 50.$$

По раскрытии скобок получим:

$$7x - 15 - 4x + 29 + 5x - 4 = 50.$$

Здесь в левой части 6 членов. Чтобы решить уравнение первым способом, мы должны сначала преобразовать его так, чтобы в левой части было только два члена. Получим:

$$8x + 10 = 50.$$

И теперь применяем правило: «Слагаемое $8x$ равно...» и т. д.

По второму же способу мы могли поступить так: сразу прибавить к обеим частям по 15, вычесть по 29 и прибавить по 4. Получим:

$$7x - 4x + 5x = 50 + 15 - 29 + 4,$$

или

$$8x = 40.$$

Часто второй способ быстрее приводит к цели, особенно когда сложение и вычитание можно сделать в уме. Так, для уравнения

$$15 + 4x - 4 = 27$$

мы могли бы написать сразу, вычтя в уме по 15 и прибавив по 4:

$$4x = 16.$$

Но преимущества второго способа становятся более очевидными при решении „буквенных“ уравнений. Пусть дано уравнение:

$$4a + 3x - 5b = 7b + 4a. \qquad (1)$$

Решим его первым способом. Для этого надо его представить в таком виде:

$$3x + 4a - 5b = 7b + 4a, \qquad (2)$$

или

$$3x + (4a - 5b) = (7b + 4a).$$

Чтобы применить формулировку зависимости между компонентами, мы должны будем рассматривать $4a - 5b$ как одно слагаемое, а $7b + 4a$ как сумму. В этом нет ничего противозаконного, но это слишком громоздко и влечёт за собой лишнюю запись:

$$3x = 7b + 4a - (4a - 5b);$$

$$3x = 7b + 4a - 4a + 5b$$

и, наконец,

$$3x = 12b.$$

Между тем, решая вторым способом, мы могли бы сразу вычесть из обеих частей по $4a$, прибавить по $5b$ и получить:

$$3x = 7b + 5b$$

или даже сразу:

$$3x = 12b.$$

На двух-трёх подобных примерах учащиеся убедятся в преимуществах применения второй формулировки, и теперь можно потребовать, чтобы они пользовались ею при решении любого уравнения.

5. В VII классе первая теорема об эквивалентности ещё раз фиксирует внимание учащихся на том же приёме реше-

ния уравнений и распространяет его применение и на члены, содержащие неизвестное. После этого уравнения решаются прежним способом уже со ссылкой на теорему, что необходимо и для закрепления в памяти учеников самой теоремы. Лишь решив достаточное количество (не менее десяти) уравнений разнообразного вида, преподаватель обращает внимание учащихся на то, что в результате применения теоремы соответствующий член всегда переходит в другую часть уравнения и всегда с противоположным знаком.

На специально подобранных примерах показывается, что это действительно всегда так бывает, и вывод формулируется, как следствие из теоремы об эквивалентности. После этого преподаватель предлагает в дальнейшем для краткости пользоваться при преобразовании уравнений именно этой формулировкой, но всегда помнить, что фактически мы имеем дело с прибавлением или вычитанием члена из обеих частей уравнения, о чём время от времени и напоминает постановкой соответствующего вопроса.

Только такой осторожный и последовательный подход к вопросу даёт достаточную гарантию того, что рассматриваемая нами грубая и довольно обычная ошибка учеников будет встречаться лишь как исключение.

Может случиться, и это часто бывает, что некоторые ученики уже в VI классе достаточно быстро замечают, что прибавление или вычитание члена в итоге сводится к переносу его в другую часть уравнения. Преподаватель, конечно, подтверждает это, но указывает, что так получается всегда в результате определённых арифметических действий (сложения или вычитания), которые только мы и можем производить над числами (действия же „переноса членов“ не существует), и продолжает пользоваться прежней формулировкой.

Всё то, что здесь сказано об ошибке, связанной с первой теоремой об эквивалентности, целиком и ещё в большей степени относится и ко второй из отмеченных выше ошибок — об ошибке при приведении уравнений к целому виду. Эта ошибка связана с неправильным применением второй теоремы об эквивалентности. Чтобы не повторять буквально всё, что сказано выше о первой ошибке, коротко отметим, что и здесь следует возможно дольше воздерживаться от таких формулировок, как „отбросим знаменатель“ и т. п., а употреблять выражение: „умножим обе части уравнения...“ и т. д. При этом следует придерживаться такого порядка:

1. Первое время приводить все члены уравнения к одному знаменателю, например:

$$\frac{x-3}{3}+\frac{x}{6}-7=1;$$

$$\frac{2(x-3)}{6}+\frac{x}{6}-\frac{7\cdot 6}{6}=\frac{6}{6}.$$

Можно, конечно, сразу написать и так:

$$\frac{2x-6}{6}+\frac{x}{6}-\frac{42}{6}=\frac{6}{6}.$$

Затем говорится: „умножим обе части уравнения на 6", и получается:

$$2x-6+x-42=6.$$

2. Затем в более лёгких случаях, например для уравнения

$$\frac{3x}{5}+11=17,$$

указывается, что сразу получим уравнение без дробных членов, если умножим обе части уравнения на 5. Получим:

$$3x+11\cdot 5=17\cdot 5,$$

или лучше сразу:

$$3x+55=85.$$

3. Далее для уравнений, подобных первому, можно предложить не писать во всех членах один и тот же знаменатель, а лишь отметить над каждым членом в обеих частях, на какое число мы его умножаем. Так:

$$\frac{x-3^{2}}{3}+\frac{x^{1}}{6}-7^{6}=1^{6},$$

и затем сразу написать:

$$2x-6+x-42=6.$$

4. Такую же последовательность применить и к уравнению с буквенными знаменателями.

Глава V.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

А. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЕ.

§ 21. Общие замечания.

Трудно переоценить огромное практическое значение навыка в решении задач методом уравнений. Уже в средней школе уравнения применяются учащимися при изучении физики, химии, астрономии. При помощи уравнений они решают самые разнообразные задачи из области техники, сельского хозяйства, быта. Там, где арифметика оказывается бессильной или в лучшем случае требует крайне громоздких, искусственных построений и рассуждений, там метод уравнений легко и быстро приводит к ответу. И даже в так называемых „типовых“ арифметических задачах, сравнительно легко решаемых арифметическим путём, и там решение их при помощи уравнения, как правило, является и более коротким и более естественным.

Приведём 2—3 примера. Возьмём задачу:

1. Ученик купил 4 тетради по 12 коп. и карандаш за 18 коп. Сколько он заплатил за всю покупку?

Задача решается двумя действиями. Здесь ход решения (порядок действий) диктуется самой задачей, и применение уравнения никакого преимущества не вносит. Действительно, если бы мы попытались решить её путём составления уравнения, обозначив через x неизвестную сумму денег, то, пользуясь обычным приёмом составления уравнения, получили бы непосредственно:

$$x = 12 \cdot 4 + 18.$$

(Конечно, и здесь можно было бы составить „настоящее“ уравнение, рассуждая, например, так: если на всю покупку затрачено x коп., то на 4 карандаша истрачено $x - 18$ коп., на один карандаш $\frac{x-18}{4}$ коп.; по условию $\frac{x-18}{4} = 10$. Понятно, что такого рода упражнения совершенно бесцельны.)

Но возьмём одну из наиболее типичных задач — задачу на нахождение двух чисел по данной их сумме и разности:

2. Брат старше сестры на 8 лет. Сколько лет каждому, если обоим вместе 32 года?

Здесь при арифметическом решении уже приходится прибегать к искусственному построенно — к так называемому „предположению“. Первый вопрос формулируется так: „Сколько лет было бы обоим, если бы брату было столько же лет, сколько и сестре?“ И затем уже узнаётся, сколько лет сестре. Между тем уравнение даёт совершенно естественное решение: обозначим число лет брата через x, тогда сестре $x - 8$ лет, а обоим вместе $x + (x - 8)$ лет, что составляет 32 года, т. е.:

$$x + (x - 8) = 32,$$

откуда $x = 20$.

Никаких „предположений“ делать здесь не приходится. Более того, общеизвестна типичная и крайне распространённая ошибка учащихся при решении такого типа задач: часто ученик сначала делит 32 пополам („сколько было бы лет каждому, если бы им было поровну?“) и затем уже прибавляет или отнимает, по желанию, 8. Решение при помощи уравнения совершенно исключает эту ошибку.

Возьмём самую элементарную задачу на пропорциональное деление:

3. В трёх корзинах находится 132 *кг* яблок, причём во второй находится вдвое, а в третьей втрое больше, чем в первой. Сколько яблок в каждой корзине?

Здесь опять приходится прибегать к „предположению“. Рассуждение ведётся примерно так: „Предположим, что в первой корзине была 1 часть (или: примем количество яблок в первой корзине за 1 часть); тогда во второй 2, а в третьей 3 таких части“, и решается первый вопрос: „Сколько было всего частей?“ Искусственность такого решения очевидна. А главное всё решение является типичным решением при помощи уравнения, только буква x заменена словом „часть“. Проще и естественнее, обозначив количество яблок в первой корзине (в килограммах) через x, получить сразу:

$$x + 2x + 3x = 132.$$

Вот почему, между прочим, решение такого рода задач методом уравнений в VI классе не может создать особых затруднений для учащихся: в них нет ничего нового, кроме замены слова „часть“ буквой x. И при решении, например, задач № 372 или № 374 из задачника Шапошникова и Вальцова непременно следует решить их сначала арифметическим способом и, произведя указанную замену слова „часть“ буквой x, показать преимущество нового способа.

Возьмём далее задачу.

4. За 30 *м* ткани двух сортов заплачено 512 руб. Метр первого сорта стоит 18 руб., а метр второго 16 руб. Сколько куплено метров того и другого сорта?

Здесь опять дело начинается „с предположения“. Сколько бы стоили 30 *м*, если бы всё сукно было первого (второго) сорта? Весь дальнейший ход решения требует длительных разъяснений от учителя и навыка в довольно сложных логических выводах от ученика. Надо выяснить, что избыток в 28 руб. сверх 512 руб. получился от замены второго сорта первым, что при замене каждого метра общая стоимость увеличивается на 2 руб., а следовательно, второго сорта было столько метров, сколько раз по 2 содержится в 28. Как всё это длинно и сложно! Надо именно решить с учениками эту задачу арифметическим способом, чтобы с предельной убедительностью показать преимущества метода уравнений, приводящего решение задачи к решению уравнения:

$$18x + 16(30 - x) = 512.$$

Наконец, возьмём задачу хотя бы такого типа:

5. В одном резервуаре 48 вёдер воды, а в другом 22 ведра воды. Из первого отлили воды вдвое больше, чем из второго, и тогда в первом осталось втрое больше воды, чем во втором. Сколько вёдер вылито из каждого? (Шапошников и Вальцов, задача № 396).

Она приводит к уравнению:

$$48 - 2x = 3(22 - x).$$

Такая задача, как и вообще задачи, приводящие к уравнениям вида

$$a + bx = m(c - 2x),$$

не поддаётся арифметическому решению.

Но громадное большинство задач, и именно задач практического характера, приводят к уравнениям, содержащим неизвестное в обеих частях. А эти задачи как раз и не поддаются чисто арифметическому решению.

Итак, мы имеем все возможности к тому, чтобы с полной наглядностью и убедительностью показать учащимся все преимущества нового способа решения задач, пробудить в них интерес к этому способу и желание овладеть им.

И тем не менее, как показывает опыт, именно овладение навыком в применении метода уравнений с трудом даётся учащимся. Мы уже говорили, что одной из причин такого положения вещей является неудовлетворительное изложение этого раздела в учебниках.

Нельзя сказать, чтобы авторы многочисленных учебников не пытались при помощи тех или иных пояснений, правил или путём показа на примерах облегчить учащимся приобретение навыка в составлении уравнений (правда, всегда оговариваясь: „должный навык может быть получен лишь путём практики“, что, конечно, верно по отношению ко всякому навыку).

И чрезвычайно интересно и поучительно проследить, как эволюционировала методическая мысль в этом направлении на протяжении двух столетий и какое отражение получала эта эволюция в сменяющих друг друга с течением времени учебниках. Этому вопросу и будут посвящены дальнейшие параграфы.

В чём заключается самая сущность процесса составления уравнения по условиям задачи, — на этот вопрос дал исчерпывающий ответ знаменитый Ньютон (1643—1727) в своём труде „Arithmetica Universalis“: составить уравнение — это значит выразить на алгебраическом языке данные в задаче зависимости между известными и неизвестными величинами. Ньютон иллюстрирует это положение на примерах. Приведём в подлиннике его известную задачу о купце.

Latine	Algebraice	На родном языке
Mercator habet nummos quosdam. Ex quibus anno primo expendit 100 lb.	$x-100$	Купец имел некоторую сумму денег, из которой он расходует в течение первого года 100 руб.
Et reliquum adauget triente.	$x-100+\frac{x-100}{3}$ sive $\frac{4x-400}{3}$	Он приумножает остаток на одну треть.
Anno secundo expendit 100 lb.	$\frac{4x-400}{3}-100$ sive $\frac{4x-700}{3}$	Следующий год он расходует 100 руб.

Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$ sive $\frac{16x-2800}{9}$	И приумножает остаток на одну треть.
Et sic anno tertio expendit 100 lb.	$\frac{16x-2800}{4}-100$ sive $\frac{16x-3700}{9}$	И таким же образом расходует в третий год 100 руб.
Et reliquo trientem similiter lucratus est.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$ sive $\frac{64x-14800}{27}$	Равным образом приумножает остаток на одну треть.
Fitque duplo dicior quam sub initio.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$	И состояние его увеличивается вдвое против начального.

Quaestio itaque ad equationem $\frac{64x-14800}{27}=2x$ religitur; culus reductione eruendus est x.

Вопрос, таким образом, приведён к уравнению $\frac{64x-28000}{27}=2x$, из которого надо уже отыскать значение x.

„Вы видите отсюда, — говорит далее Ньютон, — что для решения вопросов, которые относятся к числам или отвлечённым отношениям величин, требуется только перевести задачу с родного языка на язык алгебраический“.

Это совершенно правильное указание Ньютона не может, однако, оказать существенную практическую помощь ученику при решении любой конкретной задачи. Указание Ньютона говорит, что́ нужно сделать, чтобы привести решение задачи к решению уравнения, но не говорит, как это сделать. Верно, что нужно только перевести задачу с родного языка на язык алгебраический, но весь вопрос для ученика и заключается в том, **какие** зависимости между искомыми и данными задачи нужно выбрать, **как** их выразить алгебраически при помощи знаков действий и **как** прийти к равенству двух алгебраических выражений (т. е. составить уравнение).

Приведённая задача о купце хорошо иллюстрирует процесс перевода условий задачи на язык алгебры, но это именно только иллюстрация одного частного вида уравнений и притом наиболее лёгкого. Действительно, здесь составление нужного алгебраического выражения диктуется уже самой задачей, логическая цепь рассуждений точно, с начала до конца, следует тексту задачи.

В наиболее же типичных задачах, решаемых с помощью уравнений, в задачах, приводящих к уравнению вида

$$ax + b = m(cx + d),$$

дело обстоит гораздо сложнее. Здесь приходится *выбирать* из возможных по условию задачи зависимостей именно ту, которая приводит к цели. Затем, составив путём цепи логических рассуждений некоторое алгебраическое выражение, приходится прервать эту цепь, оставить на время полученное выражение и путём новой цепи рассуждений составить второе выражение. Наконец, из полученных двух выражений надо ещё составить уравнение, что тоже представляет известную трудность в том случае, когда полученные выражения находятся между собой в некотором кратном или разностном отношении. (Все эти этапы читатель легко проследит на любой задаче из основного цикла, особенно 3-й и 4-й групп гл. VII.)

Возвращаясь к учебным руководствам по алгебре, мы прежде всего можем отметить, что авторы этих руководств в подавляющем большинстве пытаются найти и сформулировать некоторое общее правило для составления уравнения из условий задачи; вооружить учащихся некоторым общим приёмом, который можно было бы применить к любой задаче. На протяжении полутора столетий обычно выдвигались два таких „общих правила“, к рассмотрению которых мы и переходим.

§ 22. Первое „общее правило“.

Анализируя первый этап составления уравнения по условиям задачи — составление алгебраических выражений, — можно подметить, что этот процесс, вообще говоря, совпадает с той последовательностью рассуждений и действий, которая имеет место при проверке правильности уже найденного ответа.

Но процесс проверки правильности решения арифметической задачи должен быть хорошо знаком учащимся: при изучении арифметики они, как правило, производят такую проверку при решении каждой задачи. А поэтому авторам учебников по алгебре казалось, что сведение к такой проверке процесса составления алгебраических выражений может в значительной мере облегчить последний и во всяком случае даст руководящую нить для ориентировки в задаче и выборе нужных зависимостей.

Отсюда и берёт своё начало общеизвестное „общее правило“ для составления уравнений. Приведём формулировку этого правила в ряде наиболее употребительных в своё время учебников.

1. „Курс математики“ — сочинение господина Безу, перевод Василия Загорского, 1801 г.

Это одно из наиболее ранних руководств, в котором мы находим отчётливо сформулированное интересующее нас „общее правило“.

Безу (1730—1783) — французский математик, известный своими работами главным образом в области алгебраических уравнений. Изучаемая в школе „теорема Безу“ о числе корней уравнения дана им в более общей форме, именно для системы n уравнений с n неизвестными (если степени уравнений обозначим соответственно через $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, то в общем случае число решений системы будет равно $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$).

Уравнение в учебнике Безу определяется так: „Совокупность двух или многих количеств, разделённых между собою знаком $=$, называется *уравнением* или *эквациею*“.

Указав далее, что „уравнения находятся в великом употреблении“ при решении вопросов, предлагаемых о количествах, автор переходит к изложению того, как уравнения применяются к решению задач:

„Итак, при решении алгебраических вопросов надлежит наблюдать три вещи.

1-е. Выразуметь из содержания или свойства вопроса, какие находятся отношения между известными и неизвестными количествами. Способность сия приобретается, как и многое другое, через упражнение, *но нет особенных для сего правил.*

2-е. Уметь изображать каждое из отношений уравнением. Условие сие может подлежать одному правилу, о котором предложим после, но приноровка сего правила легче или труднее бывает, глядя по свойству вопросов, по понятию и упражнению разрешающего.

3-е. Решить уравнение или уравнения, т. е. выводить из них величину неизвестных количеств. Сей последний пункт подлежит определённому числу правил и с него именно начнём“.

Показав на примерах приём решения уравнений, автор далее приводит „правило“, о котором упоминает в п. 2:

„Изобрази искомое количество или количества каждое особенною буквою, и, рассмотрев со вниманием содержание вопроса, *про-*

КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ

Господина Безу, Члена Французской Академіи Наукъ, Экзаминатора Воспитанниковъ Артиллерійскаго и Морскаго Корпусовъ, и Королевскаго Цензора.

ПЕРЕВЕДЕНЪ

Васильемъ Загорскимъ

въ

пользу и употребленіе

БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,

Воспитывающагося

въ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСІОНѢ

Часть Третія,

содержащая въ себѣ

АЛГЕБРУ съ приноровкою ея къ ГЕОМЕТРІИ и КОНИЧЕСКОЕ СѢЧЕНІЕ.

МОСКВА.

Въ Университетской Типографіи

у Хр. Клаудія.

1801.

Рис. 11.

изведи посредством алгебраических знаков над теми количествами и количествами известными такие же действия, какие бы ты произвёл, знавши величины неизвестных для проверки их".

Вот оно, это „общее правило", которое будет фигурировать в подавляющем большинстве учебников на всём протяжении последующих полутора столетий.

2. Бурдон, Алгебра, перевод с французского, 1838.

„Заметим опять, что правила, служащие для выражения задачи алгебраическим уравнением, весьма неопределённы. Вообще же должно поступать так: должно предположить задачу решённою, и потом, обозначив известные количества цифрами или буквами, а неизвестные последними буквами азбуки, *производить над ними те же суждения и действия, которые надлежало бы сделать для поверки величины неизвестной, если бы эта величина была бы дана*".

3. Мейер и Шоке, Начальные основания алгебры, перевод Фр. Симашко, СПБ, 1845.

„Должно, посредством алгебраических знакоположений, выразить все суждения по условиям вопроса и все действия над количествами известными и неизвестными, какие следовало бы произвести для поверки решения, если бы неизвестные были уже определены".

4. Н. Т. Щеглов, Начальные основания алгебры, СПБ, 1853.

„Разрешение уравнения первой степени с одною неизвестною не имеет никаких трудностей; но приведение задачи в уравнение *не имеет определённых правил:* оно требует навыка и остроты ума. Только переделав многие примеры, можно приучиться довольно скоро *угадывать*, какие в данном вопросе находятся количества данные и неизвестные, сколько их; какие, по условию задачи, находятся между ними отношения явные или неявные, чтобы составилось уравнение. Впрочем, во всех курсах алгебры для приведения задачи в уравнение советуют пользоваться *следующим общим правилом:*

Надобно отыскать в задаче все величины данные и все величины искомые и, означив сии последние буквами, предположить, что задача решена, что эти неизвестные найдены. После того надобно, посредством алгебраических знаков, выразить все отношения, все действия над количествами данными и искомыми, чтобы поверить величины неизвестных: *тогда уравнение составится само собою:* останется только разрешить его" (курсив везде наш. — *А. Б.*).

5. Н. Н. Маракуев, Элементарная алгебра, ч. 1, М., 1886.

Это — довольно фундаментальный курс алгебры, пользовавшийся в своё время большой популярностью среди учительства, да и теперь ещё, несмотря на свою устарелость во многих отношениях, не потерявший своего авторитета (уже не вполне заслуженного). Этот курс выходит далеко за пределы программы школьного курса алгебры. Вопросы, изучаемые в средней школе, также излагаются в нём несравненно подробнее, чем в школьных курсах. Только по отношению к интересующему нас вопросу о составлении уравнений автор проявляет достаточную „скупость", ограничиваясь тем же общим указанием, правда, благоразумно не называя его „общим правилом":

„Что касается составления уравнений, то на этот счёт нет никаких общих правил; всё, что можно сказать по этому предмету, сводится к следующему: назвав неизвестное буквою x, обозначают при помощи этой буквы и данных задачи все действия, какие должно было бы произвести над ними для поверки решения, предполагая, что неизвестное найдено; таким образом, получатся выражения, которые по условию задачи должны быть равны; соединив их знаком равенства, и получим искомое уравнение".

6. Д. В. Агапов, Пособие к решению алгебраических задач на составление уравнений, Оренбург, 1902.

Это пособие не является учебником. Но его иногда рекомендовали преподаватели ученикам, желавшим усовершенствовать навык в составлении уравнений. Однако и это специальное пособие ограничивается в своих указаниях тем же правилом:

„Для составления уравнений из условия вопроса или задачи нет общих правил. Каждый вопрос требует особенных соображений, в которых необходимо приобрести навык, придерживаясь при этом следующего приёма: означив искомое количество буквою x, производим над x все действия, как бы для поверки вопроса, в предположении, что искомое количество найдено.

В результате получим выражения, которые согласно с условием задачи должны быть равны между собою, т. е. получим уравнения, решение которых представляет решение самого вопроса".

В начале XX столетия и в русской учебной литературе начинают появляться учебники, написанные в духе того реформистского течения в области преподавания математики, которое нашло своё выражение в известной Меранской программе. Стремясь приблизить к жизни школьную математику, сторонники этого течения отводили уравнениям одно из первых мест в курсе алгебры. Учебники, написанные в этом новом духе, не давали обычно никакого общего правила для составления уравнения. Но есть и исключения. К таким исключениям, идущим по проторенной тропе „общего правила", принадлежит, например, учебник:

7. В. Г. Фридман, Концентрический учебник алгебры, ч. 1, М., 1912.

„К сожалению, нельзя указать такого общего приёма для составления уравнения по условию задачи, который был бы пригоден для решения всякой задачи. Важно, однако, запомнить следующее: для того чтобы составить уравнение по условию задачи, нужно обозначить искомое задачи буквой x и затем *проверять*, может ли неизвестное равняться x; эта проверка делается так же, как если бы мы предположили, что искомое равно какому-нибудь определённому числу".

Цитируемый ниже учебник Е. Н. Тихомирова был довольно распространён в дореволюционной школе. Приводим здесь его формулировку „правила" потому, что автор пытается предпослать этому правилу как бы некоторое обоснование.

8. Е. Н. Тихомиров, Начальная алгебра, 4-е изд., М., 1912.

„Так как задача выражает условия, которым неизвестные должны удовлетворять, то, давая какие-либо произвольные значения неизвестным, мы можем проверить, удовлетворяют ли эти значения требуемым условиям. В большинстве случаев эта проверка состоит в том, что, произведя известные действия над неизвестными и данными количествами, мы должны получить равные количества. Поэтому, если мы обозначим неизвестные буквами и действия, которые нужно произвести над ними и данными количествами, знаками, то в результате получим выражения, которые, согласно с условием задачи, должны быть равны между собою, т. е получим уравнения, решения которых представляют решения самой задачи".

Закончим наш перечень учебником, пользовавшимся наряду с учебником Киселёва, самым широким распространением в нашей школе:

9. А. Давидов, Начальная алгебра, изд. 21-е, 1914.

„Что касается до составления уравнения, то оно представляет гораздо больше затруднений (чем решение. — *А. Б.*), потому, что вследствие чрезвычайного разнообразия вопросов *нельзя дать общих правил для составления уравнений:* с пользою, впрочем, можно руководствоваться следующим правилом:

Означив искомое количество через x, *производим над x все действия, как бы для поверки вопроса, в предположении, что искомое количество найдено*".

Итак, мы назвали девять руководств, из которых семь (мы исключаем учебник Маракуева, являвшийся больше руководством для учителей, и пособие Агапова) служили основными учебными руководствами в нашей дореволюционной школе. Это число можно было бы по меньшей мере удвоить.

Все они с постоянством, достойным лучшего применения, повторяют друг за другом почти буквально одни и те же два положения:

1. *Общего правила* для составления уравнения *нет*.

2. Всё же такое *общее правило есть*: обозначь неизвестное через x и производи над ним и данными величинами те же действия, которые ты производил бы, проверяя уже решённую задачу.

Отложим пока оценку этого первого „общего правила" и перейдём ко второму.

§ 23. Второе „общее правило".

Изложенное в предыдущем параграфе „общее правило" сосредоточивает внимание учащихся на первом этапе решения задачи методом уравнений — на процессе составления алгебраических выражений, из которых затем можно было бы получить уравнение. Но этот последний момент — получение уравнения — представляет для учащихся не меньшую, а часто бо́льшую трудность, чем первый этап. Кроме того, как мы уже указывали, приходится из ряда зависимостей между данными в задаче и искомыми величинами *выбирать* те, которые действительно приведут к уравнению. Из условия задачи можно часто составить три и больше алгебраических выражения. Чем руководиться в выборе в таких случаях? На это наше „общее правило" ответа не даёт.

Второе „общее правило" фиксирует внимание учащихся именно на втором этапе решения задачи — на моменте составления самого уравнения. Очевидно, что для постановки знака равенства нужно иметь два равных выражения. Вот получение двух равных алгебраических выражений и должно определять выбор из условий задачи тех зависимостей, которые следует выразить на алгебраическом языке. Другими словами, *следует через неизвестное и данные величины в задаче выразить два равных количества (точнее — получить два различных выражения для одной и той же величины), которые затем и приравнять друг к другу*.

На недосатках этого „правила" мы остановимся позднее. Здесь же лишь отметим, что оно выгодно отличается от первого тем, что с течением времени эволюционировало в сторону уточнения и большей чёткости формулировки, в то время как первое правило с самого начала приняло определённую застывшую форму, сохранившуюся и до наших дней.

Первоначальную формулировку этого второго „правила" можно найти уже в довольно старинном учебнике:

1. „Начальные основания математики", сочинённые господином **Фуссом**, 1815.

„Когда предлагается вопрос для решения, то искомое число означается одною из последних букв азбуки и потом рассматривается, *каким образом данные условия могут составить равенство между двумя количествами*".

Далее решается, в виде примера, задача, и выводится заключение:

„Из сего примера видно, сколько можно во всех вопросах рассматривать со вниманием все обстоятельства оных, дабы из сих последних составить уравнение".

Таким образом, решающим моментом для составления уравнения автор выдвигает нахождение из условий задачи двух количеств, между которыми можно было бы поставить знак равенства. Это и составляет сущность второго „общего правила".

С течением времени, как мы уже сказали, это правило уточнялось, не меняя, однако, своей основной установки на составление двух равных алгебраических выражений. Пример более поздней и более точной формулировки даёт, например, учебник:

2. К. **Краевич**, Курс начальной алгебры, 3-е изд., М., 1872.

Автор учебника Константин Дмитриевич Краевич (1833—1892) гораздо более известен как автор широко распространённого в дореволюционной школе учебника физики. Его учебник алгебры интересен для нас тем, что уделяет большое внимание навыку учащихся в составлении алгебраических выражений, на чём мы подробно остановимся в следующей главе. По вопросу о составлении уравнений автор, указав, что „при помощи уравнений первой степени с одной неизвестной решаются весьма многие вопросы", решает две задачи, приводящие к уравнениям:

$$\mathbf{1.}\ x + (x + 5) = 17. \quad \mathbf{2.}\ 3(x - 13) = x + 13.$$

Затем следует изложение „правила":

„При решении задач помощью уравнений вся трудность заключается в составлении уравнения из условий вопроса, для чего постоянных правил дать нельзя; однако можно руководствоваться следующим:

1. Должно искомую величину обозначить буквою x или какою-нибудь другою буквою.

2. Приняв искомую за известную, произвести над нею действия по данным условиям и постараться составить два выражения, равные между собою по смыслу задачи.

3. Сравнив эти два выражения, получим уравнение, которое должно решить по известным правилам".

В приведённой формулировке рассматриваемое правило применимо в первую очередь к таким задачам, из условий которых непосредственно получаются два равных выражения (задачи 1—2 групп основного цикла, см. гл. VII). Но очень часто полученные выражения находятся в некотором кратном или разностном отношении (3—5 группы того же цикла). Этот случай предусматривается ещё более уточнённой формулировкой „правила". Такую именно формулировку даёт один из солидных учебников нового времени, написанный опытным педагогом и пользовавшийся определённым авторитетом среди учительства. Мы имеем в виду учебник:

3. К. Н. Рашевский, Элементарная алгерба, М., 1912.

„Для решения задачи прежде всего нужно составить уравнение, т. е. выразить уравнением соотношение между известными (данными) величинами задачи и неизвестными (искомыми); другими словами, нужно записать условие задачи уравнением.

При составлении уравнения нужно соблюдать следующие правила:

1. Одно из неизвестных нужно обозначить какой-нибудь буквой, например x.

2. Остальные неизвестные выразить через x и данные величины, обращая особенное внимание на то, чтобы однородные величины были выражены в одном и том же наименовании.

3. Среди написанных выражений найти два равные между собою (а если таких нет, то, увеличив или уменьшив соответственным образом одно из них, сделать его равным другому) и соединить их знаком равенства.

4. Нужно наблюдать, чтобы при составлении уравнения были приняты во внимание все данные и все условия задачи".

Из учебников этой группы особенно выделяется популярный в своё время учебник:

4. К. Ф. Лебединцев, Руководство алгебры, ч. 1.

Если присоединить к нему задачник того же автора, то обе эти книги вместе подошли наиболее близко к осуществлению почти всех методических требований, изложенных нами во второй главе.

Автор вводит уравнения с самого начала курса. В дальнейшем при изучении некоторых разделов (сложение и вычитание одночленов и многочленов, умножение многочлена на одночлен) даётся значительное количество примеров на решение и составление уравнений с применением изучаемых тождественных операций. Примеры на решение уравнений даются и в разделе „Сложение и вычитание дробей“. В начале курса уделяется большое внимание составлению алгебраических выражений путём решения арифметических задач с буквенными данными.

Такие задачи имеются в разделе „отрицательные числа“.

Основным недочётом учебника является то, что все эти совершенно правильные методические установки автором проведены не до конца. Задачи с буквенными данными совсем отсутствуют в разделе тождественных преобразований. Отсутствуют примеры на решение и составление уравнений в таких больших разделах, как отрицательные числа, умножение многочленов, деление одночленов и многочленов и пр. Отсюда самое включение задач на уравнения принимает эпизодический характер. Отметим ещё, что до самой темы „Уравнения“ автор не даёт ни одного уравнения с буквенными коэфициентами и тем более задач, приводящих к таким уравнениям. Да и в самом разделе уравнений такие задачи помещены лишь в самом конце, хотя все они неизмеримо проще, чем предшествующие им задачи с числовыми данными.

Наконец, автор не делает никакой попытки классифицировать задачи или хотя бы расположить их в порядке нарастания трудности. Всё сказанное выше относится по существу больше к задачнику, чем к учебнику. Что касается последнего, то положительной стороной его является периодическое возвращение к вопросу об уравнениях (1. В начале курса. 2. В разделе „Сложение и вычитание алгебраических выражений“. 3. В разделе „Дроби“). По вопросу же о составлении уравнений мы не найдём и в этом учебнике чего-либо нового.

В параграфе „Применение уравнений 1-й степени с одним неизвестным к решению задач“ автор даёт решение всего двух задач, приводящих к уравнениям:

$15x - 10 = 13x + 6; \qquad 10x + (11 - x) + 45 = 10(11 - x) + x$

и после этого переходит к обобщающим выводам о порядке составления уравнения из условий задачи.

После указания о выборе и обозначении неизвестного, о выборе единицы измерения даётся основное указание:

„После этого нужно из числа величин, входящих в задачу, выбрать такую, относительно которой были бы даны два различных условия (в первой задаче такой величиной при первом способе решения была искомая сумма денег, а при втором — число учеников и т. д.). Выбрав её, мы должны выразить существующие относительно неё два условия алгебраическими знаками, т. е. составить два выражения, которые указывали бы, какие действия и в каком порядке нужно совершить над данными в задаче величинами и искомой, чтобы получить выбранную нами; при этом нужно соблюдать условие, чтобы оба раза выбранная нами величина была выражена в одних и тех же единицах. Затем составленные нами выражения соединяются знаком равенства, и получаемое уравнение надо решать".

Конечно, двух задач для показа метода составления уравнений слишком недостаточно, а приведённое указание, как и в других учебниках, окажет малую помощь в этом отношении.

Но наличие арифметических задач, дающих тренировку в составлении алгебраических выражений, проводимая через весь курс VI—VII классов практика в решении задач методом уравнений — оба эти момента являются крупным шагом вперёд по сравнению с существовавшими тогда учебниками. Несомненно, что изучение алгебры по этому учебнику (вместе с задачником) не может не сказаться положительным образом на качестве навыка в составлении уравнений.

Третьим положительным моментом данного учебника является то, что непосредственно вслед за приведённым „общим указанием" автор даёт ещё 8 задач, иллюстрирующих некоторые особые случаи, могущие встретиться при решении задач методом уравнений (отрицательные, неопределённые решения, отсутствие решений).

Обычно рассмотрение такого рода особых случаев откладывается до X класса, до так называемого „исследования уравнений", что мы считаем совершенно неправильным с методической точки зрения.

В приведённых четырёх учебниках рассматриваемое нами второе „общее правило" даётся в замену первого. Но легко видеть, что оба эти правила по существу не только не заменяют, но, наоборот, скорее дополняют друг друга.

Мы уже неоднократно указывали, что они фиксируют внимание на двух различных этапах процесса составления уравнения. Поэтому оба эти „правила" вполне могут сопутствовать друг другу. И действительно, в большинстве учебников, дающих второе правило, мы найдём и первое в его обычной формулировке.

Первый пример такого объединения обоих правил даёт правда, не учебник, но очень интересное руководство для самообразования:

5. Ручная математическая энциклопедия, Книжка III, Алгебра, М., 1827.

Это интересное издание содержит в 14 книгах изложение арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии, математической физики и астрономии.

Вопросу составления уравнений в 3-й книге посвящена глава II.

О СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЯ ИЗ ВОПРОСОВ.

§ 61. Составить уравнение из данного вопроса значит выразить смысл вопроса алгебраическими знаками; следовательно, составление уравнений можно уподобить переводу мыслей с одного языка на другой.

Поелику вопросы разнообразны до бесконечности, то нет возможности предложить достаточного правила для составления уравнений: опытность и сила соображения необходимы. Но чем меньше правил, тем они драгоценнее, а потому начинающие должны обратить особенное внимание на следующие замечания:

§ 62. Прежде всего должно предположить, что вопрос разрешён. Основываясь на сем предположении, неизвестные количества изображаются произвольными буквами, обыкновенно употребляются последние буквы латинской азбуки: x, y, z, v и пр. Потом изображённые таким образом неизвестные количества соединяются с известными сообразно с условиями вопроса, как будто бы производится поверка, точно ли неизвестные должны иметь предположенные величины.

Итак, первое „правило“ дано.

Далее разбирается в качестве примера задача Ньютона, приведённая нами выше (§ 23), и затем даётся второе „правило“.

§ 64. Из окончания описанного делопроизводства можем извлечь общее правило: *данные и неизвестные количества вопроса должно соединить так, чтобы составилось несколько выражений однознаменательных* (т. е. выражающих одну и ту же величину. — *А. Б.*); *сравнивши сии выражения, получим надлежащие уравнения.*

Таким образом, в качестве основного, центрального момента, выраженного в виде „правила“, выдвигается именно установка на составление двух „однознаменательных“ выражений. Первое „правило“ лишь является указанием на путь, которым можно прийти к этим двум выражениям.

В таком же соотношении находятся оба „правила“ в известном учебнике А. Тихомандрицкого.

6. А. Тихомандрицкий, Начальная алгебра, изд. 2-е, СПБ, 1855.

„Обыкновенно при решении какой-либо задачи, предполагают её решённою; потом, обозначая искомую величину какою-либо буквою и вникая в сущность условий задачи, стараются искомую величину соединить со всеми известными посредством тех действий, которые требуются условиями и из тех же самых условий найти таким образом два выражения, равных между собой[1]).

Интересно, что в этом учебнике в главе об уравнениях сначала даётся понятие о функции, и решение уравнений рассматривается как нахождение значений переменного, при которых функция обращается в нуль.

Довольно подробно излагает вопрос о составлении уравнений учебник, не получивший распространения в школе прежде всего по причине крайней тяжеловесности изложения:

7. А. Мерчинский, Алгебра, СПБ, 1873.

„Рассматривая, как получаются тождества и равенства, замечаем, что каждому из них предшествует вопрос: „определить по данным искомое", потом определяется действие, решающее вопрос; далее это действие приводится в исполнение и, таким образом, получается тождество или равенство, которое, собственно, и представляет ответ на предложенный вопрос. Подобным образом поступают при всех вопросах, для решения которых необходимо производить действия только над количествами, данными в вопросе.

Если же для решения вопроса потребуется произвести действия и над искомыми величинами, то в таком случае поступают иначе: *предполагают данный вопрос решённым и на этом основании, означивши искомые величины буквами x, y и z, определяют действия, с помощью которых можно проверить предрешённый вопрос*, далее приводятся в исполнение эти действия, причём с искомыми поступают так, как бы они были даны; и таким образом, смотря по числу неизвестных, *получают два или несколько выражений, состоящих из данных и искомых количеств*, соединённых, сообразно условиям вопроса, знаками. *Наконец, приравняв одни из полученных выражений соответственно им равным, получаем уравнения.*

Стиль автора настолько тяжёл, что мы сочли себя вынужденными для облегчения читателя разбить цитату на два абзаца и выделить курсивом основные положения. Каково же читать такую книгу ученику? Как курьёз приведём ещё одно „разъяснение" автора по интересующему нас вопросу: „Привести вопрос к уравнению, значит составить уравнение из вопроса" (!).

И тем не менее даваемая автором трактовка процесса составления уравнения представляет определённый интерес.

---

[1]) „Другими словами: стараются поступить так, как бы следовало поверить задачу, найдя неизвестную величину" (сноска в учебнике. — *А. Б.*).

Отправным моментом здесь является навык в решении арифметических задач. Процесс решения арифметической задачи описывается в первом абзаце (правда, в такой туманной форме, что не всякий сразу поймёт, о чём идёт речь). Мысль автора заключается в следующем: при решении арифметических задач (в частности и с буквенными данными) мы производим над данными числами некоторые действия, согласно с условиями задачи, и получаем „тождество", т. е. выражение вида $x = f(a, b, c...)$; при составлении же уравнений неизвестное число x считается тоже как бы данным числом. Этим самым задача приводится к предыдущему случаю, но потребуется составить два равных выражения, которые и дадут уравнение. Автор стоит на совершенно правильном пути с методической точки зрения, но изложил свои мысли крайне неудачно.

Большим авторитетом в своё время пользовался французский учебник Бертрана, много раз издававшийся в русском переводе.

8. Иосиф Бертран, Алгебра, М., 1874.

Автор много внимания и места уделяет задачам на составление уравнений 1-й степени, приводит достаточное количество разнообразных задач в виде примеров, но мы при всём старании не могли уловить ни принципа, которым руководился автор при отборе задач именно данных типов, ни даже какой-либо последовательности в их расположении. Что касается общих выводов из этих примеров, то автор здесь приходит к тем же пресловутым правилам.

„Составить уравнение из задачи, значит выразить одним или несколькими уравнениями условия, налагаемые задачею на количества неизвестные. *Чтобы прийти к уравнению, невозможно дать вполне общие правила.*

Ограничимся на сей раз следующими указаниями.

Вникнув надлежащим образом в смысл задачи, мы всегда почти увидим, что для решения её требуется получить некоторые количества, равные между собою. Определив, какие эти количества, мы ищем формулы, выражающие их величины, а сравнив эти формулы, получим искомые уравнения".

После этого указания и решения ряда задач автор даёт и второе „указание".

Правило для составления уравнения из задачи.

Мы уже сказали (135), что для получения уравнений из задачи, невозможно дать правила вполне общего: обыкновенно ограничиваются следующим указанием:

Разобрав со вниманием смысл задачи, представляют буквами $x, y, z...$ числа неизвестные, потом выражают относительно этих букв и данных ряд действий, которые должно было выполнить если бы, найдя величины неизвестных, пожелали удостовериться — удовлетворяют ли они всем условиям задачи. Эти вычисления, созданные как бы для проверки, вообще должны привести к результатам равным; поставив между этими результатами знак =, получим уравнения задачи.

Не меньшей популярностью пользовался также учебник:

9. Билибин, Алгебра, СПБ, 1899.

Этот солидный учебник представляет собой по существу переработку предыдущего и в интересующей нас части буквально повторяет его.

В женских гимназиях, где программа по математике была значительно сокращена по сравнению с мужскими гимназиями (и тем более с реальными училищами), наряду со специально переработанным учебником А. П. Киселёва был принят учебник:

10. В. Я. Гебель, Сокращённый курс алгебры, ч. 1, изд. 11-е, 1917.

„Определённых правил для составления уравнений нет, так как задачи могут быть самого разнообразного рода, а следовательно и приёмы составления уравнений будут различные для каждого случая. Тем не менее существует одно общее *указание*, которым полезно руководствоваться для всевозможных случаев составления уравнений, а именно *следует*:

1. Обозначить *искомую* величину или величину, непосредственно с ней связанную, одной буквой, например x.

2. Считая ведичину x как за известную, выразить знаками действий зависимость между нею и всеми остальными данными величинами, входящими в задачу.

3. Составить по условиям задачи два *количественно одинаковых* выражения и связать их знаком равенства".

И здесь мы закончим наш перечень учебником, имевшим почти такое же широкое распространение, как и учебники Киселёва и Давидова.

11. А. Малинин и К. Буренин, Руководство алгебры, изд. 13-е, 1913.

„Для составления уравнения следует: внимательно рассмотревши условия задачи, означить неизвестное какой-нибудь буквой и *произвести над ним все действия, которые потребовались бы для поверки решения, если бы неизвестное было уже найдено.* Поступая таким образом, надо стараться *получить два выражения, которые по смыслу задачи должны быть равны;* соединив их знаком равенства, мы составим уравнение".

Отложив оценку и этого „общего правила" на дальнейшее (§ 28), перейдём к рассмотрению третьей группы учебников.

§ 24. Отказ от правил. Метод показа.

Итак, на протяжении полутора столетий десятки учебников упорно повторяли друг за другом два руководящих „правила“ для составления уравнений по условиям задачи (или по крайней мере, одно из них).

Но с течением времени всё более выяснялось, что польза от этих правил является довольно сомнительной. По крайней мере, нельзя было установить, какую положительную роль играли эти правила в создании навыка в составлении уравнений. Более того, нельзя было заметить, чтобы ученики в своей практике действительно пользовались сознательно этими „правилами“, особенно первым.

Но тогда возникает вопрос: стоит ли в таком случае и цепляться за них? Не лучше ли на ряде специально подобранных примеров просто показать учащимся приёмы решения основных типов задач, расширяя затем навык путём практики на всё более и более трудные случаи.

Такой именно вывод и сделан авторами учебников, создававшихся в начале нашего столетия. Вместо „правил“ эти учебники давали образцы решения ряда задач. Но при этой установке огромное методическое значение имеет подбор задач, взятых в качестве образцов, их последовательность в отношении степени трудности и типа уравнения.

Мы считаем, что в этом отношении существующие учебники не выполняют основных методических требований.

Обзор учебников и этой группы мы начнём с учебника, имеющего за собой очень большую давность. Мы подробнее остановимся на нём хотя бы уже в силу его исторического интереса, но и далеко не только исторического. Этот учебник носит название:

1. „Начальное основание математики“, сочинённое Николаем Муравьёвым, капитан-поручиком от инженеров. Часть первая. Печатано в Санктпетербурге при Императорской Академии Наук 1752 года.

Отметим прежде всего, что автор определяет алгебру как учение об уравнениях:

ДЕФИНИЦИЯ 1.

1. Алгебра есть наука, через знаемые величины, помощию сравнениев (т. е. уравнений. — *А. Б.*) всё то находить, что исчислить возможно.

Примечание 1.

2. Сия наука от той, которая арифметикой называется, разнствует в том, что она вместо цифров употребляет литеры.

Уравнение определяется автором так:

ДЕФИНИЦИЯ 2.

Когда ж несколько величин сложных равны одной или нескольким величинам одинаким или сложным, то сии величины вместе называются сравнение, напр. $a + b + c = d + r$ будет сравнение.

Определение уравнений 1-й степени:

ДЕФИНИЦИЯ 3.

6. Когда сравнение из таких членов состоит, что незнаемая литера во всех членах есть первого возвышения, то оные сравнения называются простые, напр. $ax + b^2 - cd = da + b$ будет сравнение простое.

Далее даются правила для решения уравнений (перенос членов, умножение обеих частей уравнения и пр.), которые и применяются к решению ряда примеров. Приведём два первых уравнения:

ПРОБЛЕМА 1.

18. В данном сравнении $x - 6 = 18$ незнаемую литеру сыскать.

Решение.

Дабы в данном сравнении $x - 6 = 18$ знаемые литеры были на одной стороне: перенеси $- 6$ на другую, будет $x = 18 + 6$, потом 6 сложи с 18, будет $24 = x$.

ПРОБЛЕМА 2.

20. В данном сравнении $3x - b = 4b$ незнаемую литеру сыскать.

Решение.

Дабы таким же образом незнаемая литера была одна на стороне, перенеси $-b$ на другую сторону, будет $3x = 5b$, раздели всё на три, будет $x = \frac{5b}{3}$.

Как видим, автор сразу переходит к уравнениям с буквенными коэфициентами. Далее последовательно решаются уравнения:

3. $ax = b^2 + cd$.
4. $4x + a = 9a$.
5. $ax - b = cx + a$.
6. $ax + nx = a^2 + cx - n^2 + nx$

и т. д.

Вторая глава — „о задачах арифметических, которые могут решиться через простые сравнения" — посвящена решению задач методом уравнений.

Автор не даёт никакого общего правила и вообще каких-либо общих указаний по вопросу о приведении задачи к уравнению. Он просто на 42 задачах показывает различные приёмы составления уравнений по условиям задачи.

Что касается подбора задач, то он довольно своеобразен.

Во-первых, в руководстве совсем не разделены уравнения с одним и с несколькими неизвестными: те и другие сменяют друг друга без всякой системы.

Во-вторых, автор считает простыми (т. е. 1-й степени) такие уравнения, которые с нашей точки зрения являются уравнениями 2-й, 3-й и высших степеней. Приведём примеры.

ПРОБЛЕМА 1.

4 в. Дано произведение и сумма двух чисел, сыскать оные числа.

Решение.

Положи сумму $= a$, произведение $= b$, половина разности $= x$ будет большее число $\frac{1}{2}a + x$, меньшее $\frac{1}{2}a - x$. Произведение

$$\frac{1}{4}a^2 - x^2 = b,$$

$$\frac{1}{4}a^2 - b = x^2,$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b} = x$$

будет $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ большее,

$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ меньшее.

Как видим, для нас это типичная задача на квадратные уравнения.

Возьмём задачу 6.

ПРОБЛЕМА 6.

§ 4. У четырёх человек было денег по стольку, когда первый умножит число своих денег со вторым и третьим, выйдет 60 рублей; когда второй умножит число своих денег с третьим и четвёртым, будет 120; когда третий умножит с четвёртым и первым, выйдет 90;

когда четвёртый умножит число своих денег с первым и вторым, будет 72; надлежит сыскать, сколько у кого денег было.

Положим, у первого $= x$

У второго $= y$

У третьего $= z$

У четвёртого $= v$.

Будет

$$\begin{array}{r} xyz = a = 60 \\ yzv = b = 120 \\ zvx = c = 90 \\ vxy = d = 72 \\ \hline xyz = a \\ yzv = b \text{ умножь} \\ \hline xy^2z^2v = ab \\ zvx = c \\ \hline \end{array}$$

$$v^2x^2y^2 = d^2 \mid x^2y^2z^3v^2 = abc$$

$$z^3 = \frac{abc}{d^2}; \quad z = \sqrt[3]{\frac{abc}{d^2}} = 5.$$

Приведём, наконец, задачу на уравнение 1-й степени с одним неизвестным.

ПРОБЛЕМА 18.

Из четырёх лавок взято сукна 100 аршин, во второй взято столько, сколько в первой, но 2-мя больше; в третьей столько, сколько в обеих первых, но 10-ю больше; в четвёртой столько, сколько в первой и в третьей; надлежит сыскать, сколько из которой взято сукна.

Но интересно, что и эту задачу автор решает при помощи системы уравнений с четырьмя неизвестными и лишь после решения помещает:

Примечание.

66. Сию задачу, также и ещё некоторые, можно решить и одною незнаемою литерою; но я взял для того четыре, чтобы учащийся привык, как незнаемые литеры вынимать и сравнивать на одну.

Отметим, что из 42 задач только 8 имеют конкретное содержание, подобно приведённым задачам 6 и 18. Все остальные носят отвлечённый характер. Обычно задаётся отыскать два числа, удовлетворяющие некоторым условиям, приводящим, как правило, к уравнениям степени, выше первой.

В приведённом здесь отрывке всё чрезвычайно интересно (не говоря уже о всей книге) и не только с исторической точки зрения, но и с точки зрения современных, животрепещущих вопросов теоретического и методического порядка, часть которых уже была затронута в настоящей книге.

Интересно определение алгебры как учения об уравнениях. Это определение хотя и вызывает возражение в настоящее время (см. § 1), но во всяком случае несравненно вернее отражает действительное содержание алгебры, чем определения десятков позднейших учебников, в различных вариантах повторяющих, что „алгебра есть наука о действиях над числами, изображёнными посредством общих знаков или букв“ (определение учебника К. Краевича).

Интересно определение уравнения как равенства двух алгебраических выражений (т. е. на современном языке — функций), определение, не противопоставляющее тождества уравнениям (как делают все позднейшие учебники), а включающее их как частный случай.

Интересно далее, с методической точки зрения, проводимое учебником параллельное решение уравнений с числовыми и с буквенными коэфициентами.

Очень интересен метод решения первой задачи (определить два числа по их сумме и произведению). Этот метод требует некоторых пояснений.

Дело в том, что решению этой задачи предшествует „лемма“, в которой доказывается, что из двух неравных чисел большее равно их полусумме, сложенной с их полуразностью, а меньшее — полусумме минус полуразность, т. е. выводятся тождества:

$$2a = (a+b) + (a-b); \quad 2b = (a+b) - (a-b).$$

В данной задаче полусумма искомых чисел равна $\frac{a}{2}$, полуразность автор обозначает через x и получает выражение $\frac{a}{2} + x$ для большего числа, $\frac{a}{2} - x$ для меньшего.

В дальнейшем эту лемму автор применяет для целого ряда задач, чем значительно упрощает решение. Так, приведённую „проблему“ мы решили бы при помощи системы:

$$x + y = a;$$
$$xy = b.$$

Или, вводя только одно неизвестное, при помощи уравнения:

$$x(a-x) = b.$$

Очевидно, что в обоих случаях решение значительно сложнее, чем данное в рассматриваемом учебнике.

Интересно, что этот метод решения применялся ещё Диофантом (III век нашей эры).

Что касается интересующего нас здесь вопроса о составлении уравнений, то и здесь учебник выгодно отличается от всех позднейших. Не вводя никакого „общего правила“, автор показывает приёмы составления уравнений на 42 задачах! И четверти этого количества мы не найдём ни в одном другом учебнике.

Новейшие учебники алгебры делают определённый шаг назад по сравнению с этим учебником, имеющим двухсотлетнюю давность. Возьмём для примера один из лучших учебников:

2. Н. Извольский, Курс элементарной алгебры, Л., 1924.

Автор, проф. Н. А. Извольский (умерший в 1939 г.) — талантливый педагог-методист, много сделавший в области улучшения преподавания математики в нашей средней школе. Он основал специальный методический журнал „Математический вестник“ и был его редактором и основным сотрудником[1]). Ему принадлежит известный учебник по элементарной геометрии, а также вышедшая в 1941 г. интересная книга „Синтетическая геометрия“, посвящённая коническим сечениям.

В учебнике алгебры Н. А. Извольского отметим прежде всего довольно необычное определение уравнения. Даётся задача:

„Какое число надо взять для x, чтобы двучлен $5x - 7$ оказался равен числу 55?“

И далее говорится:

„Удобно записать этот вопрос в такой форме:

$$5x - 7 = 55.$$

Последняя запись носит название *уравнения*. Наше уравнение $5x - 7 = 55$ выражает, следовательно, запись задачи: найти число для x, чтобы наш двучлен оказался равным 55“.

Из единственного приведённого примера, конечно, нельзя сделать никакого обобщающего вывода: что же называется уравнением? Будут ли, например, уравнениями выражения:

$$2x + 2 = 2(x + 1); \quad x - 7 = x \text{ и т. п.}$$

[1]) Из методических статей Н. А. Извольского некоторые были посвящены вопросу о преподавании уравнений (см. библиографию в конце книги).

Следующее за определением пояснение заставляет как будто сделать вывод, что уравнением называется запись задачи. (Такое же толкование, но не определение, даёт уравнению американский методист Юнг.) Но такое определение было бы слишком „неопределённым" — записать задачу можно различными способами, в частности, приведённый текст тоже представляет собой запись задачи. Очевидно, нужно подразумевать запись задачи в виде алгебраического выражения или в виде равенства, содержащего неизвестное число, но тогда нужно об этом сказать прямо, не заставляя делать догадки.

Ещё менее удовлетворяет нас изложение раздела о составлении уравнений. Всё, что относится к этому вопросу, изложено в следующих двух строках:

„Мы можем применить умение решать уравнение к решению задач. Нижеследующие примеры укажут, как это сделать".

И далее даётся решение пяти задач, приводящих соответственно к уравнениям:

1. $\frac{3x}{4}+\frac{5x}{6}=x+7000.$

2. $\frac{x-13}{x-5}=\frac{7}{9}.$

3. $\frac{x-1}{x+2}=\frac{4}{5}.$

4. $\frac{x+20}{x+6}=2.$

5. $\frac{3x}{26}+\frac{4(28-x)}{5}=12.$

Вообще говоря, пяти задач мало для того, чтобы показать приёмы решения хотя бы наиболее типичных задач, но при правильном отборе и пять задач могли бы оказать существенную помощь ученику в уяснении существа дела. Но именно подбор задач здесь никак нельзя признать удачным.

Прежде всего мы видим, что три задачи (№ 2—4), отличаясь по фабуле, совершенно тождественны по методу решения и по виду получаемого уравнения. Все они могут быть сформулированы (в отвлечённой форме) в виде одной задачи: к какому числу надо прибавить порознь два данных числа, чтобы полученные суммы находились в данном отношении? Таким образом, мы имеем всего три различные задачи (№№ 1, 2 и 5). Да и эти три задачи в некоторой степени однотипны — все выражаются дробными (в обобщённом смысле слова) уравнениями.

Итак, ни по количеству ни по подбору задач данный учебник не даёт того материала, который был бы более или менее достаточен для надлежащего усвоения учащимися нового для них метода решения задач.

Ещё хуже обстоит дело с изложением этого вопроса в том единственном учебнике, который принят сейчас в нашей средней школе:

3. А. Киселёв, Алгебра, ч. 1, М., 1938.

Учебник сам констатирует, что:

„Вся трудность (решения задач с помощью уравнений. — *А. Б.*) заключается в том, как составить такое уравнение, решение которого дало бы искомый ответ“.

Следовательно, задача учебника и состоит в том, чтобы помочь учащимся преодолеть эту трудность. Этого-то данный учебник и не делает. Он лишь говорит:

„Общего способа составления уравнений указывать нельзя, так как условия задач могут быть очень разнообразны. Можно лишь указать на некоторые общие приёмы при составлении уравнений по данным задачи. Вообще же навыки в этом отношении даёт только практика.

Покажем на примере общие приёмы составления уравнений“.

И далее действительно даётся лишь один пример, приводящий к уравнению:

$$35x + 4\,(80 - x) = 940.$$

Понятно, что для преодоления „трудности“ в составлении уравнений этого совершенно не достаточно[1]).

От приведённых выше учебников выгодно отличается недавно вышедший учебник:

4. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Алгебра, Пособие для средних школ, ч. 1, М., 1940.

Мы уже говорили выше, что именно раздел уравнений изложен в нём наиболее удачно. Достаточно указать, что уравнения 1-й степени с одним неизвестным занимают в этом учебнике 31 страницу (у Киселёва 11 страниц), чтобы получить представление об обстоятельности изложения, вполне соответствующей относительной важности этого раздела.

Параграф „Решение задач при помощи уравнений“ начинается с указания последовательных ступеней в решении задачи,

---

[1]) Автор настоящей книги считает долгом указать, что, начиная с издания 1933 г., он является редактором, а в ряде глав (в том числе и в главе об уравнениях) и соавтором рассматриваемого учебника. Поэтому на него в первую очередь и ложится ответственность за все недочёты учебника.

как они обычно даются в учебниках: 1) выбор неизвестного, 2) составление уравнения, 3) решение уравнения, 4) исследование решения.

После этого решаются семь задач. Далее даётся задача с буквенными данными и её числовой вариант и в специальном параграфе задача на равномерное движение (тоже с числовым вариантом).

Интересен подбор первых семи задач. Приведём их.

Задача 1. Верёвку длиной в 14 *м* разрезали на три части так, что вторая часть на 2 *м* короче первой, а третья на 1 *м* короче второй. Найти длину всех трёх частей верёвки. (Лучше было бы сказать — длину каждой части верёвки. — *А. Б.*)

Уравнение:

$$x + (x - 2) + (x - 2 - 1) = 14.$$

Задача 2. Площадь квадрата равна площади прямоугольника, одна из сторон которого на 5 *м* больше стороны квадрата, а другая на 4 *м* меньше стороны квадрата. Найти площадь квадрата.

Уравнение:

$$y^2 = (y + 5)(y - 4).$$

Задача 3. Площадь квадратного участка земли на 25000 *кв. м* больше, чем площадь другого прямоугольного участка. Длина этого второго участка на 200 *м* больше стороны квадратного, а ширина на 150 *м* меньше стороны квадратного. Найти площадь квадратного участка.

Уравнение:

$$y^2 - (y + 200)(y - 150) = 25000.$$

Задача 4. В трёх квартирах живёт 14 человек. Во второй квартире живёт на 2 человека меньше, чем в первой, а в третьей на 1 человека меньше, чем во второй. Сколько человек живёт в каждой из квартир?

Уравнение:

$$x + (x - 2) + (x - 2 - 1) = 14.$$

Задача 5. Когда Александру было 14 лет, Андрей был в 3 раза старше, чем тогда, когда Александру было 5 лет. На сколько лет Андрей старше или моложе Александра?

Уравнение:

$$x + 14 = 3(x + 5).$$

Задача 6. Отцу 35 лет, а сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет на 25 лет старше сына?

Уравнение:

$$35 + x = 10 + x + 25.$$

Задача 7. Отцу 35 лет, а сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет на 20 лет старше сына?

Уравнение:

$$35 + x = 10 + x + 20.$$

Семь задач — это тоже немного с точки зрения охвата всех наиболее часто встречающихся типов задач, всё же и в этом отношении учебник далеко уходит вперёд по сравнению с предыдущими. Не соблюдена в этих задачах и последовательность в отношении нарастания трудности составления уравнения. Очевидно, авторы и не ставили своей целью на данных задачах выработать у ученика навык в составлении уравнений, предоставляя это практике.

Но каждая задача учебника ценна тем, что она вносит нечто новое в эту практику.

Так, задача 1 позволяет выбрать за неизвестное любую из трёх искомых величин и получить соответственно три различных уравнения, приводящих к одному и тому же ответу. Она даёт повод поставить вопрос о наиболее целесообразном выборе неизвестного.

Задача 2 усложняет решение тем, что за неизвестное приходится взять не ту величину, значение которой требуется найти, так как в последнем случае мы пришли бы к уравнению, которое учащиеся ещё не могут решить.

Задача 3 интересна тем, что получаемое значение для стороны квадрата $y = 100$ при исследовании оказывается непригодным, так как тогда для ширины прямоугольника получаем $100 - 150 = -50$. Оказывается, задача не имеет решения.

Задача 4 приводит к тому же уравнению, что и задача 1, но здесь этот ответ уже непригоден, так как задача предусматривает лишь решения в натуральных числах.

Задача 5 даёт пример отрицательного решения, задача 6 — неопределённого и, наконец, задача 7 приводит к уравнению, не имеющему решения.

Задачи, аналогичные некоторым из только что приведённых (№№ 5, 6, 7), приводятся обычно и в других учебниках, но только в разделе „Исследование уравнений“, т. е. отрывают процесс составления уравнения от учёта всех конкретных условий задачи.

Достоинство данного учебника в том, что он показывает самый процесс составления уравнения и на такого рода задачах (в числе других). Тем самым авторы явно говорят учителю, что именно при обучении учеников составлению уравнений и следует приучать их к выявлению до конца всех конкретных условий, связывающих данные и искомые задачи, а это способствует более глубокому и прочному усвоению и самого навыка.

Мы видели, что и в учебнике Лебединцева приводятся такого рода задачи. Но так как они даны уже после вывода „общего правила" и выделены в особый параграф, то тем самым открывается возможность „перенесения" их по образцу других учебников в X класс, что, как мы в своё время убеждались, обычно и делалось учителями, преподававшими по этому учебнику.

§ 25. Иностранные учебники.

Преподаватель нашей средней школы должен иметь представление о том, как излагается преподаваемый им предмет (а в нашем случае раздел уравнений) в западной учебной литературе. Но, к сожалению, по интересующему нас вопросу мы не найдём в ней почти ничего нового по сравнению с изложенным в предыдущих параграфах. Это и понятно, осбенно для учебников XIX века. Дело в том, что авторы наиболее солидных русских учебников, естественно, использовали при составлении их лучшие образцы западноевропейской учебной литературы, что обычно и отмечали в предисловии. Поэтому ограничимся здесь кратким очерком.

Что касается французских учебников, то мы фактически уже познакомились с ними в предыдущих параграфах. Ряд учебников, рассмотренных там (Безу, Бурдон, Мейер и Шоке, Бертран) являются переводами на русский язык французских учебников. Да и русские авторы оригинальных учебников в основу их клали обычно французскую учебную литературу (Бурле, Лакруа, Таннери, кроме перечисленных выше), ибо Франция „из всех стран Запада является единственным образцом, достойным подражания в занимающем нас деле" (Н. Маракуев, Элементарная алгерба, ч. 1, Предисловие).

Мы по ряду причин остановимся поподробнее лишь на одном французском учебнике: во-первых, этот учебник является одним из первых и безусловно лучших учебников, написанных в духе того реформистского движения в области преподавания математики, о котором мы упоминали выше; во-вторых, он в значительной степени является скорее пособием для учителей, чем учебником для учащихся (об этом говорится и в предисловии проф. В. Ф. Кагана); в-третьих, в этом учебнике наиболее подробно излагается интересующий нас здесь вопрос о составлении уравнений. Мы имеем в виду учебник:

1. Э. Борель, Элементарная математика, Арифметика и алгебра, изд. 2-е[1]), Госиздат Украины, 1923.

Изложим вкратце содержание раздела об уравнениях 1-й степени, которым посвящены XIV, XV и XVI главы. Первая глава содержит теорию уравнений. Автор даёт определение уравнения, как „равенства двух *алгебраических* выражений, в которых одна или несколько букв рассматриваются как *неизвестные* или как *переменные* величины. Уравнения и тождества являются двумя видами равенств.

Далее следуют теоремы об эквивалентности, и решаются в виде примера два уравнения. Решает автор их довольно необычным для нас способом, именно, перенося предварительно все члены уравнения в левую часть. Так, пример 1-й решается в такой последовательности:

$$\begin{aligned} 3+5x&=8x-1 \\ 5x-8x+3+1&=0 \\ -3x+4&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3x&=-4 \\ x&=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Пример 2-й

$$6x+(x-3)(x-1)=x^2-\frac{3x}{7}+\frac{13}{4}$$

$$6x+x^2-4x+3-x^2+\frac{3x}{7}-\frac{13}{4}=0$$

$$\left(6-4+\frac{3}{7}\right)x+3-\frac{13}{4}=0$$

$$\frac{17}{7}x=\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{1}{4}:\frac{17}{7}=\frac{7}{68}.$$

Этот способ фиксируется в виде правила:

Правило 25-е. „Если после перенесения всех членов в левую часть и после приведения подобных членов мы получаем уравнение первой степени, то следует перенести известный член в правую часть; чтобы получить решение, остаётся только разделить правую часть на коэфициент при неизвестном“.

Для нас является совершенно неоправданной первая стадия решения — перенос всех членов в левую часть. Автор делает это в целях обнаружения — является ли уравнение действительно уравнением первой степени, что подтверждается последующим примечанием:

„Если уравнение имеет настолько простой вид, что мы в нём сразу узнаём уравнение первой степени, то достаточно применить лишь вторую часть правила, т. е. перенести все неизвестные члены в левую часть, а известные в правую“.

---

[1]) Первое издание „Матезис“, Одесса, 1911.

Но ведь мы если начнём сразу со „второй части правила“, то вместе с этим и обнаружим, будет ли уравнение 1-й степени, и поэтому перенос *всех* членов в левую часть и здесь является излишним.

Следуя традиции (неправильной с нашей точки зрения), автор посвящает отдельный параграф уравнениям с буквенными коэфициентами, просто указывая, что „правило 22-е остаётся в силе и для них“.

Отметим здесь ещё один момент. Из уравнения

$$(a-b)x = a^2 - b^2 \tag{1}$$

автор получает

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b}. \tag{2}$$

И лишь после этого говорит: „если предположим, что $a-b$ не равно нулю, то путём сокращения получим:

$$x = a + b.$$

„А если бы $a-b$ было равно нулю, то предложенное уравнение превратилось бы в тождество, т. е. удовлетворялось бы при любом значении x“.

Мы всё время внушаем, и совершенно правильно, учащимся, что „на нуль делить нельзя“. Поэтому в данном случае более строгим было бы такое изложение после получения уравнения (1):

Если $a-b$ не равно нулю, то

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

Если же $a-b$ равно нулю, то уравнение превращается в тождество:

$$0 = 0,$$

т. е. удовлетворяется любыми (конечными) значениями x.

Следующий параграф посвящён исследованию уравнения $ax = b$, причём, как обычно, рассматриваются три случая:

$$1)\ a \neq 0;\quad 2)\ a = 0;\ b \neq 0;\quad 3)\ a = 0;\ b = 0.$$

Остальная часть главы посвящена системам уравнений и неравенствам первой степени.

Следующая глава носит название „Задачи первой степени“ и посвящена решению задач методом уравнений. Решение задачи разбивается на четыре стадии:

Этот вопрос расчленяется на несколько пунктов:

1. Выбор неизвестных.

1. Какие величины мы примем за неизвестные?
2. Как определять неизвестные по абсолютному значению?
3. Как определяются они по знаку?

По первому пункту автор отмечает, что в более сложных задачах „только навык может научить тому, каким неизвестным в известных случаях нужно отдать предпочтение, если мы не хотим отказаться от преимуществ, иногда довольно значительных“.

В практике нашей школы этот пункт обычно разъясняется на одной-двух конкретных задачах, в которых получаются уравнения различной степени сложности в зависимости от выбора неизвестного.

По второму пункту отмечается необходимость установления для избранной в качестве неизвестной величины единицы измерения, а также в нужных случаях начала счёта (например, если неизвестным является время).

По третьему пункту указывается, что в тех случаях, когда неизвестные могут принимать противоположные значения (по знаку), нужно точно условиться, какие именно значения мы будем считать положительными и какие отрицательными.

Следующая стадия — составление уравнений.

Приведём этот параграф целиком.

2. Составление уравнений.

„Составить уравнение задачи значит написать те уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные по условиям задачи. Условия, которые не могут быть выражены в форме уравнений, разбираются при исследовании[1]).

Мы займёмся лишь теми условиями, которые могут быть выражены посредством *уравнений* между неизвестными и данными величинами. Прежде чем мы напишем эти уравнения, нужно выразить все величины одного и того же рода в одной и той же единице, при том же начале счёта и тех же условиях в отношении знака. Уравнения, составленные без соблюдения этих правил, не будут иметь вообще никакого смысла.

Пусть, например, дана следующая задача:

Два велосипедиста едут по дороге, соединяющей Гамбург и Франкфурт на Майне. Они находятся оба между Гамбургом и Франкфуртом, первый на расстоянии 35 *км* от Гамбурга, второй на расстоянии 30 *км* от Франкфурта.

---

[1]) Автор имеет в виду такие, например, условия, что неизвестное должно выражаться целым числом и т. п.

Первый движется со скоростью 20 *км* в час по направлению к Франкфурту, а другой со скоростью 4 *м* в секунду по направлению к Гамбургу. Спрашивается, когда они встретятся, если расстояние между Гамбургом и Франкфуртом равно 548 *км*?

Примем за неизвестное то время, которое протекает между данным моментом и моментом встречи; это время будем считать положительным, если оно протекает после начального момента; за единицу же мы примем час.

Таким образом, мы выбрали для времени начало счёта, положительное направление и единицу. Обозначим буквой x численную величину избранного нами неизвестного, определённую в соответствии с этими условиями.

Но в нашей задаче имеется ещё и длина. Мы избираем за начало счёта длин, например, Гамбург, за положительное направление, скажем, направление от Гамбурга к Франкфурту и, наконец, за единицу длины — километр. В этих единицах положение первого велосипедиста в начальный момент выразится числом $+35$, а скорость его — числом $+20$. Положение второго велосипедиста выразится числом $548 - 30 = 518$, так как Франкфурт отстоит от Гамбурга на 548 *км*, а он находится в 30 *км* расстояния от Франкфурта по направлению к Гамбургу. Так как он проезжает 4 *м* в секунду, то в минуту он проедет $4 \cdot 60$, а в час $4 \cdot 60 \cdot 60 = 14400$ *м*, т. е. 14,4 *км*. Кроме того, он подвигается от Франкфурта к Гамбургу, т. е. в отрицательном направлении. Следовательно, скорость его равна — 14,4 *км*.

Теперь мы можем уже составить уравнение задачи; в самом деле, нам остаётся лишь записать (алгебраически), что в момент времени x оба велосипедиста находятся в одном и том же месте, т. е. что их расстояния от Гамбурга равны. Согласно формуле равномерного движения (107), расстояние первого велосипедиста от Гамбурга по истечении x часов равно $(35 + 20x)$ *км*, а расстояние второго равно $(518 - 14{,}4x)$ *км*. Следовательно, уравнение задачи будет:

$$35 + 20x = 518 - 14{,}4x.$$

Итак, мы видим, что по вопросу о составлении уравнений данный учебник не даёт никакого „общего правила“ и приведённым примером не раскрывает в достаточной мере процесса составления уравнения. В самом деле, бóльшая часть изложения посвящена первой стадии решения (выбор единицы, начала счёта). При этом изложение отличается поразительной тяжеловесностью. Самому же составлению уравнения отведено всего семь строк, отсылающих к формуле равномерного движения.

Следующая стадия:

3. Решение уравнения и исследование решений — рассмотрена в предыдущей главе учебника. Наконец,

4. Исследование задачи состоит, по мнению автора, в том, чтобы установить, имеет ли задача *определённое*, *невозможное или неопределённое* решение, причём в первом

случае оно может быть положительным или отрицательным, целым или дробным и т. п.

Далее даются примеры составления уравнений по условиям задачи, и поскольку, как мы видели, в предварительных разъяснениях по этому вопросу не сказано почти ничего, мы вправе ожидать, что приёмы составления уравнения будут показаны на достаточном количестве разнообразных задач. Но и этого нет.

Учебник приводит всего 4 задачи, причём подбор их никак нельзя признать удачным. Приведём эти задачи.

Задача 1. Крестьянка принесла на базар некоторое число яиц, которые она хотела продавать по 2 коп. за штуку. Она разбила 6 из них, но остальные ей удалось продать по 3 коп., и она принесла домой на 20 коп. больше, чем рассчитывала. Сколько яиц было у крестьянки, когда она шла на базар?

Задача приводится к уравнению:

$$3(x-6)=2x+20.$$

Следующая задача довольно курьёзна по своей фабуле:

Задача 2. Вор завладел велосипедом и убегает на нём со скоростью 20 *км* в час. Кража замечена спустя 3 минуты после того, как он убежал, и велосипедист отправляется в погоню со скоростью 22 *км* в час. (Очевидно, потерпевший имел сразу два велосипеда! — *А. Б.*) Какое время понадобится ему, чтобы догнать вора?

Получаем уравнение:

$$\frac{20}{60}x=\frac{22}{60}(x-3).$$

Задача 3. Отцу 40 лет, сыну 16. Когда возраст отца будет в 3 раза больше возраста сына?

Соответствующее уравнение:

$$40+x=3(16+x).$$

Наконец, четвёртая задача является обобщением предыдущей:

Задача 4. Возраст Павла составляет a лет, а возраст Якова b лет. Через сколько лет возраст Павла будет в m раз больше, чем возраст Якова?

Уравнение:

$$a+x=m(b+x).$$

Таким образом, приёмы составления уравнений показаны всего на трёх задачах и притом одного и того же типа (в классификации, приведённой в главе VII, все они относятся к 3-й группе задач основного цикла). Этого, конечно, совершенно недостаточно.

В итоге, в отношении данного учебника мы можем сказать, что он даёт несколько полезных указаний по вопросу о решении задач при помощи уравнений, но всё же основной момент решения — составление уравнений — не раскрыт с должной полнотой и ясностью.

Мы не останавливаемся на немецких учебниках, так как не найдём в них ничего нового или оригинального по интересующему нас здесь вопросу. Характерно, что хотя одним из вождей реформистского движения в области преподавания математики в средней школе был крупный немецкий математик Клейн, тем не менее именно в Германии оно не давало практических результатов, будучи не в силах преодолеть рутину и косность в школьном преподавании и бюрократически полицейский режим в области народного образования вообще. Отметим, что известный немецкий методист Симон был одним из яростных противников реформы. Характерно, что долгое время в Германии вообще не было учебников, написанных в новом духе, и первым таким учебником являлся переведённый на немецкий язык (с некоторой переработкой, часто не к выгоде по сравнению с оригиналом) тот же разобранный нами выше учебник Бореля.

Наоборот, в англо-американских учебниках последних десятилетий наш преподаватель найдёт немало полезного для себя как в отношении методики преподавания, так и подбора материала для упражнений. Перевод некоторых из них на русский язык является положительно необходимым.

Выше (§ 4) мы привели распределение материала об уравнениях в учебнике:

2. G. Wentworth and Smith, Academic Algebra, 1913.

Что касается составления уравнений, то никакого „общего правила“ в учебнике не даётся. С самого начала проводятся многочисленные упражнения на составление алгебраических выражений. Они разбиваются на следующие виды.

а) Составление формул:

„Если прямоугольник имеет 8 д. в длину и 4 д. в ширину, то сколько кв. дюймов содержит его площадь?“

„Если основание прямоугольника равно a д., а высота b д., то чему равна его площадь?“

„При скорости 3 мили в час, сколько будет пройдено в 2 часа? При скорости m миль в час, сколько будет пройдено в r часов?“

„Напишите формулу для средней цены каждого из n предметов если цена их всех d долларов“.

„Выразить формулой положение: объём (S) куба равен третьей степени ребра“.

б) Чтение формул:

„Выведи из формулы $v = pqr$ правило для нахождения объёма прямоугольного ящика длиной p д. шириной q д. и глубиной r д.“

в) Вычисления по формулам:

„Площадь параллелограма $a = bh$, где b — длина основания, а h — высота. Найдите значение a, когда $b = 60$, $h = 11$; $b = 20$, $h = 12$“.

г) Чтение алгебраических выражений:

„Прочитайте: $4 + 7$; $a + b$; $3a + b$; $3a + 5b$.
$9 - 5$; $a - b$; $7a - b$; $7a - 4b$.
$2 \cdot 7$; $a \times b$; ab; $a(b + c)$.
$9:3$; $a:3$; $3a:b$; $9a:7$“ и т. п.

д) Составление алгебраических выражений:

„Напишите сумму чисел 2 и y; x и y; $2x$ и y“.

е) Вычисление алгебраических выражений:

„Вычислите следующие выражения:

$a = b^2$, $b = 3$; $(a - b)^2$, $a = 7$, $b = 2$; $a^2 - b^2$, $a = 4$, $b = 3$“ и т. п.

Мы видим, что подбор упражнений в достаточной мере разнообразен, но все виды их ограничиваются только наиболее простыми выражениями.

Задачи на составление уравнений разбиваются в учебнике на несколько типов и для каждого типа приводится решение 1—2 задач. Типы эти таковы:

1. Задачи на определение неизвестного числа.

„Упятерённое некоторое число равно первоначальному числу, увеличенному на 24. Найти это число“ ($5x = x + 24$).

2. Задачи на проценты.

„Некто получил 6% с вложенной суммы и когда прибавил к ней 60 ф. ст., то у него стало 300 ф. ст. Какая сумма была вложена?“ ($0{,}06x + 60 = 300$).

3. Задачи на смешение.

„Сколько воды нужно добавить к 32 *л* 95-процентного спирта, чтобы получить 75-процентный?“ $0{,}75\,(32 + x) = 0{,}95 \cdot 32$.

4. Задачи на движение.

„Некто отправился на велосипеде и проезжал по 16 миль в час. Через 45 минут из того же пункта и в том же направлении вышел автомобиль и шёл со скоростью 24 миль в час. Через сколько времени автомобиль догонит велосипедиста?“ (В нашей школе задача приводится обычно к уравнению $24x = 16(x + 0{,}75)$. Авторы учебника сразу дают уравнение $8x = 12$, предварительно произведя нужные вычисления.)

5. Смешанные задачи.

„Сумма трёх последовательных чисел равна 48. Найти эти числа“.

$(n - 1) + n + (n + 1) = 48$ или $x + (x + 1) + (x + 2) = 48$.

„Отец втрое старше своего сына, а 5 лет назад был вчетверо старше. Найти теперешний возраст каждого“. $3x - 5 = 4(x - 5)$.

Таким образом в рассматриваемом учебнике мы видим осуществление как раз тех принципов, которые мы выдвигаем здесь в отношении методики обучения составлению уравнений: система подготовительных упражнений и классификация задач. И всё же это ещё далеко не то, что мы хотели бы найти в учебнике.

а) Упражнения на составление алгебраических выражений ограничиваются лишь самыми элементарными выражениями. При составлении уравнений обычно приходится составлять выражения и более сложного вида.

б) Глава об отрицательных числах совсем не включает решения уравнений, а именно здесь уравнения оказывают существенную помощь в выработке навыка в действиях с отрицательными числами.

в) Действия с одночленами и многочленами совсем не сопровождаются задачами на применение изучаемых операций.

г) Совершенно неудовлетворительна система классификации задач. Никакой последовательности в нарастании трудностей здесь нет и в помине. Задачи различных групп по ходу решения и по виду получаемого уравнения часто полностью совпадают.

Но нельзя не отметить, что учебник уже являет собой громадный шаг вперёд по сравнению с традиционным изложением рассмотренных в предыдущих параграфах наших и заграничных учебников.

Отсутствие „общего правила“ составления уравнений является характерным для англо-американских учебников последних десятилетий. Обычно в них приводится лишь план, т. е. последовательность различных ступеней решения. Наиболее подробно излагает этот план учебник:

3. D. Smith, J. Foberg and W. Reeve, General high School mathematics, Boston, 1925.

Этот учебник интересен тем, что даёт двойную классификацию задач: по виду уравнения и по тематике. Правда, первая классификация является в сущности классификацией самих уравнений, „наиболее часто встречающихся в практике“, но каждый из типов уравнений иллюстрируется задачами, и таким образом классификация распространяется и на задачи.

Уравнения разбиваются на три типа.

1-й тип. Обе части уравнения — одночлены:

$$2{,}3x = 16{,}1; \quad \frac{2}{3}x = \frac{7}{8}; \quad 3x^2 = 243; \quad \frac{14}{x} = 37; \quad \frac{4}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

(Так как извлечение корня из чисел даётся в учебнике раньше, то в виде единичных исключений даются изредка и элементарные уравнения высших степеней.)

2-й тип. В одной части уравнения двучлен, в другой одночлен:

$$2x + 5 = 19; \quad \frac{3}{5}x - 8 = 100; \quad \frac{3}{x} + 42 = 45; \quad 5 + 4{,}28x^3 = 9{,}28.$$

3-й тип. Левая часть уравнения содержит скобки:

$$3(x-2) = 24; \quad 25\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 50; \quad \frac{2x-3}{6} = 7{,}1; \quad \frac{x^2+1}{5} = 6.$$

Таким образом, классификация касается только уравнений простейшего вида, содержащих неизвестное лишь в одной части уравнения.

На все три типа уравнений приводится и по нескольку задач.

Далее учебник переходит к задачам более сложным и предпосылает им следующий план или „ступени“ решения:

1. Каждая задача сообщает некоторые факты, на основании которых требуется определить одно или несколько неизвестных. Прочитай внимательно задачу, чтобы ясно определить, что дано и что требуется найти.
2. Произведи оценку с точки зрения здравого смысла — каков вероятный результат, — чтобы избежать нелепых ошибок.
3. Обозначь неизвестное число буквой x или какой-либо другой. Вообще эта буква выражает определённое число чего-либо.
4. Вырази в алгебраической записи (т. е. в форме уравнения) факты, данные в задаче, пользуясь буквой, выбранной для обозначения неизвестного так, как будто бы её значение было известно.
5. Реши полученное уравнение.
6. Проверь, удовлетворяет ли найденное значение неизвестного всем условиям задачи.

Обращает на себя внимание п. 2, который мы не встречали больше ни в одном учебнике. В некоторых случаях такая предварительная оценка результата действительно может обнаружить сугубо ошибочный ответ. Вообще же этот приём имеет гораздо большее значение при умножении и делении многозначных чисел, и нужно только пожалеть, что он совсем не имеет места в практике нашей школы.

Далее авторы переходят к рассмотрению отдельных типов задач, но предпосылают им несколько (всего 10) упражнений, которые „помогут нам в составлении уравнений из фактов, изложенных в задаче“, например:

„Если некоторое число обозначим через n, то как представить утроенное такое число? половину этого числа?“

Конечно, десяти упражнений здесь совершенно недостаточно.

Что касается самой классификации задач, то она почти совпадает с приведённой в предыдущем учебнике и, следовательно, страдает теми же недостатками.

Типы эти следующие:

1. Задачи на последовательные целые числа.

а) „Найти два последовательных целых числа, сумма которых равна 133“.

б) „Найти три последовательных целых числа, сумма которых равна 39“.

2. Задачи на числовые соотношения.

а) „Усемерённое некоторое число равно самому этому числу, увеличенному на 12. Найти это число“.

б) „Сумма двух чисел равна 69, причём одно из них на 3 меньше увосьмерённого другого. Найти эти числа“.

в) „Разбейте 56 на три числа так, чтобы второе число было вчетверо больше первого, а третье равнялось половине второго“.

3. Задачи на нахождение цифр числа.

„В двузначном числе цифра десятков в три раза больше цифры единиц. Сумма цифр числа равна 12. Найти число“.

4. Задачи на проценты.

5. Задачи на движение.

6. Задачи на смешение.

7. Геометрические задачи.

„Периметр прямоугольного поля содержит p футов и длина его на k футов больше ширины. Найти измерения поля“.

Если учесть, что первые три типа задач в этой классификации охватываются первым типом задач предыдущего учебника (стр. 154) и что в последнем геометрическим задачам отведено значительное место в разделе смешанных задач, то совпадение обеих классификаций можно считать полным.

Отметим кстати, что первые четыре главы этого учебника содержат пропедевтический курс геометрии. Оригинальное расположение материала (Содержание глав: 1. Форма предметов. 2. Размеры. 3. Положение. 4. Графики.), живое изложение, наглядность (заголовки некоторых параграфов: геометрия в природе, окружность в искусстве и в природе; подобные фигуры в фотографии и т. п.) делают эти главы очень интересными, и здесь составитель курса наглядной геометрии для нашей школы мог бы найти немало достойного внимания[1]).

Итак, в обоих рассмотренных здесь нами учебниках изложение вопроса о составлении уравнений по условиям задачи распадается на три части: составление алгебраических выражений; изложение плана решения; показ приёмов решения на конкретных примерах.

В отличие от них учебник:

4. J. Stone and H. Hart, Elementary algebra. Chicago—New York—Boston, 1924, содержит довольно подробные указания именно по вопросу о самом процессе решения („How to attak a Problem").

Содержание этих указаний сводится к следующему.

„Для представления условий задачи в виде уравнения необходимо:

1. Точно уяснить содержание задачи. Это значит, что учащийся должен правильно понимать смысл всех слов (например: „процент", „отношение двух чисел", „расстояние" и т. п.), встречающихся в условии. Иногда уяснению содержания задачи может помочь диаграмма. Например для задачи: „Два автомобиля вышли одновременно из одного пункта и идут в противоположных направлениях, один со скоростью 30 миль, другой 25 миль в час. Через сколько времени они будут находиться на расстоянии 176 миль друг от друга?"

---

[1]) Чтобы дать представление о структуре учебника в целом, приведём содержание последующих глав: 5. Направленные числа. 6. Формула. 7. Уравнение с одним неизвестным (содержание этой главы здесь изложено). 8. Основные операции (действия с одночленами и многочленами). 9. Дроби. 10. Дробные уравнения. 11. Отношения, пропорции, прямая и обратная пропорциональность. 12. Элементы тригонометрии (синус, косинус и тангенс). 13. Системы линейных уравнений. 14. Степени и корни. 15. Квадратные уравнения.

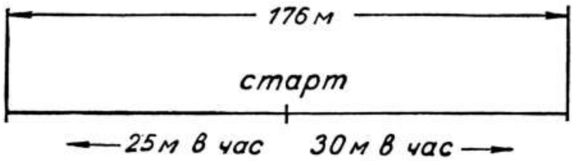


Рис. 12.

Диаграмма ясно показывает, что расстояние, пройденное 30-мильным автомобилем, плюс расстояние, пройденное 25-мильным, дают в сумме 176 миль.

2. Обозначить символами неизвестные числа задачи и выразить их отношение к данным (известным) числам.

Мы можем обозначить неизвестное число первой буквой названия искомой величины или, как обычно делается, буквой x.

Если мы знаем формулу, связывающую между собой числа, входящие в задачу, то она окажет существенную помощь в составлении уравнения. Так, к предыдущей задаче применима формула $s = vt$, которая показывает, как найти расстояние, пройденное каждым автомобилем.

Для решения любой задачи полезно дать неизвестному какое-либо определённое значение и в этом предположении провести все рассуждения соответственно условию задачи. Например, задачу: „Полный билет в театр стоит 50 центов, а детский 35 центов. Если продано 100 билетов за 39, 50 долларов, то сколько полных и детских билетов в отдельности было продано?“ — можно так подвести к решению, если оно нам не ясно непосредственно.

Предположим, что было продано 10 полных билетов, т. е. мы неизвестному даем значение 10. Сколько денег было бы выручено за эти 10 билетов? Как это узнать? Если продано 10 полных билетов, то сколько в таком случае продано детских билетов? Как найти это число? Сколько было выручено за детские билеты? Как найти это?

Считая, что продано 10 полных билетов, мы найдём, что вся выручка составит 36 · 50 долларов. Значит, наше предположение неверно, так как 36 · 50 д. не равно 39, 50 д. Если отношения между числами задачи ещё не ясны, то можно повторить рассуждения в предположении, что было продано 20 полных билетов. Если же эти отношения ясны, то заполните ниже пропущенные места:

Допустим $a =$ числу проданных полных билетов.
Тогда $? =$ стоимости всех полных билетов
и $? =$ числу детских билетов.
Следовательно $? =$ стоимости детских билетов.
Тогда $? + ? = 39,\ 50$.

Иногда отношения между величинами, входящими в задачу, не так ясны, как в этой, и не могут тотчас же быть выражены алгебраически. В большинстве задач некоторые необходимые для решения данные не даны непосредственно, и их надо выразить через данные и алгебраические символы“.

Таковы указания учебника по вопросу о составлении уравнений. Конечно, такой приём поможет уяснить содержание задачи и, главное, наметить путь для составления уравнения. Но прибегать к нему при решении каждой задачи было бы утомительно.

Подытоживая, мы можем сказать, что ознакомление с англо-американскими учебниками может оказать большую методическую помощь учителю советской школы в отношении расположения материала темы в целом, подбора упражнений и задач на составление алгебраических выражений. Что касается классификации задач на составление уравнений, то данные в этих учебниках классификации не могут нас удовлетворить ни с какой точки зрения.

§ 26. Руководства по методике алгебры.

От руководств для ученика — учебников — перейдём к руководствам для учителя — методикам. Можно назвать три методических руководства, имевших наибольшее распространение среди учительства в дореволюционное время: два переводных — Юнга и Симона и одно оригинальное — Мрочека и Филипповича. Но сначала мы остановимся на одной книге, хотя и мало известной учительству, но интересной для нас тем, что её содержание наиболее близко подходит к нашей теме. Эта книга:

1. В. Евтушевский и А. Глазырин. Методика приготовительного курса алгебры. Пособие для учащихся, СПБ, 1876.

В обширном введении авторы обосновывают необходимость приготовительного (пропедевтического) курса алгебры, устанавливают цели его, содержание и дают краткий анализ положения в области преподавания алгебры в Германии и во Франции.

Содержание пропедевтического курса авторы разбивают на два основных раздела.

К первому разделу относятся: составление числовых формул решения задач; переход к буквенным обозначениям и составление общих формул решения задач (т. е. решение задач с буквенными данными); упрощение общих формул путём введения понятий о коэфициенте, степени и путём приведения подобных членов (элементарные тождественные преобразования).

Второй раздел содержит „понятие об уравнении, его составлении и решении“. Непосредственным продолжением этого раздела являются сведения об относительных числах, действиях над ними и решение уравнений, приводящих к отрицательным корням.

Авторы придают большое значение навыку в составлении общих формул решения задач как для усвоения алгебры вообще, так и для овладения навыком в составлении уравнений в особенности. В другой своей работе В. Евтушевский приводит ряд примерных задач с буквенными данными[1]).

Что касается уравнений, то в книге прежде всего даётся определение уравнения, с нашей точки зрения довольно неудачное:

„Уравнение есть равенство, выражающее содержание задачи. В одной или в обеих частях его указываются действия над неизвестными и данными“.

В соответствии с этим определением авторы различают четыре вида уравнения. Последнее может быть:

1. Такое, в первой части которого находится формула из неизвестного и данных чисел, а во второй — данное число.

2. Такое, в первой части которого находится формула из неизвестного и данных чисел, а во второй — формула из данных чисел.

3. Такое, в первой части которого находится формула из данных чисел, а во второй — неизвестное число.

4. Такое, в обеих частях которого находятся различные формулы, составленные из неизвестного и данных чисел.

Алгебраически эти четыре вида уравнения можно было бы изобразить так:
1. $f(x) = a$ (a — данное число); 2. $f(x) = \varphi(a, b, c \ldots)$ ($a, b, c \ldots$ — данные числа); 3. $f(x) = x$; 4. $f(x) = \varphi(x)$.

При нашем делении уравнений на два основных вида:

$$1)\ f(x) = a;\quad 2)\ f(x) = \varphi(x)$$

первые две группы уравнений в классификации Евтушевского целиком относятся к первой группе, последние две — ко второй.

В полном соответствии с приведённой классификацией даётся в книге и „правило“ для составления уравнений по условию задачи. Задаётся вопрос:

---

[1]) В. Евтушевский, Пропедевтика алгебры, Педагогический сборник, 1868 г., июль—август.

„Почему между двумя частями уравнения ставится знак равенства? Ответ. Потому, что обе части уравнения всегда означают одну и ту же величину“.

Отсюда делается вывод:

„Итак, как же надо поступать для составления уравнения?

1) Надо неизвестное обозначить какой-нибудь буквой, например x.

2) Между величинами, входящими в задачу, выбрать такую, которую посредством неизвестного и данных можно выразить в двух видах.

3) Действительно выразить эту величину посредством неизвестного и данных.

4) Полученные два выражения соединить знаком равенства.

Как сказать это правило для каждого из четырёх видов уравнения отдельно?

Надо во всяком случае обозначить неизвестное буквой x. Потом для получения уравнения первого вида надо из неизвестного и данных составить такую формула, которая означала бы ту же самую величину, как и некоторое данное число, затем эту формулу и число соединить между собою знаком равенства.

Для получения уравнения второго вида надо составить 2 формулы — одну из неизвестного и данных чисел, другую из одних данных чисел, но чтобы обе они означали одну и ту же величину, и эти 2 формулы соединить между собою знаком равенства.

Чтобы получить уравнение третьего вида, надо из неизвестного и данных составить формулу, которая означала бы ту же величину, как и само неизвестное, и полученную формулу и неизвестное число соединить знаком равенства.

Чтобы получить уравнение четвёртого вида, надо из неизвестного и данных составить такие 2 формулы, которые означали бы одну и ту же величину, но были бы разного вида, и эти две формулы соединить знаком равенства“.

Как видим, указания для составления уравнения сводятся к тому второму „общему правилу“, которое изложено нами в § 25. Но авторы детализируют его, увязывая выбор величины, которую можно выразить в двух видах, с видом самого уравнения. Проиллюстрируем мысль авторов на простых примерах для каждого из 4 типов.

Задача 1. У двух учеников 17 тетрадей, причём у одного на 3 тетради больше, чем у другого. Сколько тетрадей у каждого?

Выбор величины: число всех тетрадей.

Уравнение: $x + (x + 3) = 17$.

Задача 2. Из печенья двух сортов ценой 5 руб. и 8 руб. килограмм надо составить 21 *кг* смеси по 6 руб. килограмм. Сколько нужно взять каждого сорта?

Выбор величины: стоимость всей смеси.

Уравнение: $8x + 5(21 - x) = 6 \cdot 21$.

Задача 3. Верёвку разрезали на 2 части так, что первая часть равна $\frac{2}{7}$ всей верёвки, а вторая на 1,5 *м* длиннее первой. Какова длина всей верёвки?

Выбор величины: длина всей верёвки.

Уравнение: $\frac{2}{7}x + \left(\frac{2}{7}x + 1{,}5\right) = x.$

Задача 4. В одном из параллельных классов 35 учеников, в другом 43. Сколько учеников надо перевести из второго в первый, чтобы в обоих классах стало поровну?

Выбор величины: число учеников в каждом классе после перевода.

Уравнение: $35 + x = 43 - x.$

Конечно, и здесь трудность составления уравнения ещё не преодолена. Она кроется в выборе величины. Но проводимая авторами диференциация задач на четыре типа является большим шагом вперёд по сравнению с общей формулировкой правила, приведённого в § 25.

Резюмируя, мы можем сказать, что рассматриваемая книга содержит ряд установок, которые только в последние годы стали настойчиво выдвигаться в нашей методической литературе: составление числовых формул решения арифметических задач; решение задач с буквенными данными; классификация задач на составление уравнений, требующая лишь дальнейшего более мелкого дробления в методических целях. Можно только пожалеть, что эта книга прошла незамеченной и поэтому не оказала должного и плодотворного влияния.

Перейдём теперь к перечисленным выше руководствам.

2. Дж. В. А. Юнг, Как преподавать математику, изд. 2-е, Петроград, 1915.

Книга эта пользуется заслуженным авторитетом среди нашего учительства. Хотя автор исходит в своём изложении из программ и практики преподавания американской школы, но и наш советский учитель найдёт в ней много интересных соображений общеметодического порядка (1-я часть книги) и ряд практически ценных указаний по вопросу преподавания отдельных математических дисциплин.

Основные положения автора по вопросу о преподавании уравнений можно свести к следующим.

1. Уравнения являются центральным вопросом школьной алгебры (с чем мы совершенно согласны); остальные разделы алгебры играют уже подчинённую роль: объём, характер и степень трудности алгебраических преобразований определяются и лимитируются потребностями уравнения, теми пре-

образованиями, которые применяются при решении уравнений (в этой части мы уже не можем согласиться с автором, см. § 1).

2. Проводится резкое разграничение между тождествами и уравнениями (см. по этому вопросу § 13).

3. Эквивалентные уравнения рассматриваются как уравнения, имеющие в своей основе одну и ту же задачу. Автор рекомендует не торопиться с изложением теоретических соображений по вопросу об эквивалентности, пока это не потребуется ходом самих занятий. „Если ученик находит корень, который уравнению не отвечает, и это ставит его в затруднительное положение, то он созрел для некоторых объяснений относительно эквивалентности уравнений". Рекомендуемая нами здесь (§ 16) последовательность в изложении этого вопроса по существу соответствует точке зрения Юнга.

4. Рекомендуется введение понятия о функции и рассмотрение элементарных функциональных зависимостей с применением графического метода.

5. Навык в составлении уравнений автор относит „к числу наиболее важных и ценных результатов занятий по алгебре". Овладеть этим навыком можно, „прибегнув лишь к разделению друг от друга трудностей, вполне же завершить свою победу мы в состоянии будем тщательным подбором и соединением в группы каждой необходимой нам категории".

Последние слова приведённой цитаты говорят о том, что автор считает целесообразным ввести классификацию задач на составление уравнений. Что касается „разделения трудностей", то автор осуществляет его путём введения предварительных упражнений двоякого вида:

а) Перевод на алгебраический язык соотношений, выраженных словами.

„Пётр в два раза старше Генриха; если a выражает собой возраст Генриха, то как выразится возраст Петра?"

„Иван на своём велосипеде передвигается в три раза быстрее идущего Василия; если через t обозначить время, в течение которого Иван проезжает версту, как обозначить время, в течение которого проходит версту Василий?"

„Выразить в форме уравнений следующие положения:

1. Число футов, проходимых падающим телом, в тридцать два раза больше квадрата числа секунд, в течение которого совершается падение.

2. Число единиц тепла, выделяющихся в секунду при прохождении электрического тока, равно 0,24 произведения, получающегося от умножения сопротивления проводника на квадрат силы тока, выраженной в соответственных единицах".

Практическая ценность таких упражнений для выработки навыка в составлении уравнений не подлежит сомнению. В частности, вполне целесообразно использовать для этой цели формулы геометрии, физики и пр., с которыми в дальнейшем ученику придётся иметь дело (Юнг подчёркивает, что на данном этапе „ученику нет надобности уметь выводить положения, которые он записывает“). Но последняя задача будет слишком сложна для учащихся, ещё не имеющих достаточно ясного понятия о силе тока и сопротивлении.

б) Упражнения обратного типа: передача словами содержания уравнений и формул. Примеры:

„Если v представляет собой скорость в футах в секунду, а l число футов, проходимых в t секунд, что представляет собой $l = vt$?

Что означает: $v = \frac{l}{t}$; $t = \frac{l}{v}$?

Пусть t представляет собой плотность тела, m — его массу, а V — его объём, что означает $D = \frac{m}{v}$?

Пусть t означает число секунд, требуемых для совершения од ного колебания маятника, l — длину маятника в футах; что означает

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{32}}\,?$$

Таким же порядком вводятся формулы:

$$v = v_0 + ut; \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad v = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Полагаем, что и здесь следует ограничиться наиболее простыми и доступными для учащихся формулами.

6. Даётся следующий план решения задач методом уравнений:

I. Тщательно прочесть задачу и определить: 1) что дано, 2) что ищется.

II. По прочтении условия предположить, что ответ известен, и обозначить одну из искомых величин какой-либо буквой (обыкновенно x).

В более простых задачах сразу видно, на какой именно из искомых величин следует остановиться. В более трудных задачах выбор шире, и удобство решения часто стоит в зависимости от этого выбора; но решение всегда возможно независимо от того, какое собственно неизвестное представлено одной буквой. (Последнее утверждение нуждается в оговорке, см., например, приведённую из учебника Александрова и Колмогорова задачу 2 (стр. 145). Неудачный выбор неизвестного приводит здесь к иррациональному уравнению, решение которого учащимся на данном этапе недоступно.)

III. Далее мы должны определить, какие алгебраические выражения и другие неизвестные величины могут быть представлены при помощи x, когда уже одна определённая величина этой буквой обозначена.

IV. Теперь следует обратить внимание на слова, которые содержат в той или иной форме (явной или неявной) указание относительно равенства. Эти слова в переводе на алгебраический язык должны быть заменены символом $=$. Два выражения, относительно равенства которых говорят отмеченные нами слова, должны быть также выражены в алгебраических символах; таким путём они образуют обе части уравнения.

V. Решить уравнение.

VI. Проверить, правилен ли результат.

Таким образом, книга даёт ряд конкретных и совершенно правильных с нашей точки зрения указаний по вопросу о преподавании уравнений: постепенность в сообщении теоретического материала; введение понятия о функции; классификация задач на составление уравнений (к сожалению, в книге не приводится никакой примерной классификации); система подготовительных упражнений. Достаточно подробно изложены и последовательные этапы составления уравнения по условию задачи.

3. Проф. М. Симон, Дидактика и методика математики, изд. 3-е, Петроград, 1922.

В противоположность предыдущей книге, здесь мы почти не найдём конкретных методических указаний по интересующему нас вопросу. Вообще книга заполнена почти исключительно рассуждениями общего порядка (более подробно изложен раздел геометрии). При этом то и дело встречаются утверждения, совершенно неприемлемые для нас. Здесь мы не можем входить в подробный анализ содержания книги, дадим лишь два примера.

По вопросу об „общей цели средней школы“ автор, проводя сентиментально-идеалистическую точку зрения на науку и образование („стою на почве гуманизма“, „идеальные стремления духа, ищущего познания“) в то же время торопится усиленно „подчеркнуть, что становящаяся всё более тяжёлой борьба за существование и колоссальная конкуренция на мировом рынке, во-первых, запрещают всякую образовательную роскошь“.

В параграфе „Математика и религия“ автор указывает на „прекрасные мысли о взаимном дополнении математики и религии“, высказанные Фр. Майером, и заканчивает параграф такой знаменательной фразой:

„Если религия есть первая философия школьника и *вообще единственная доступная народу* (курсив наш. — *А. Б.*) — то математика имеет то же значение с логической, правильнее — теоретико-познавательной стороны".

Отметим, что книга содержит немало интересных исторических сведений.

По вопросу об уравнениях имеется ряд отдельных мелких, разбросанных в различных местах книги замечаний, как, например, правильные указания о том, что „большее число неизвестных облегчает составление уравнений", что „техника буквенного счисления должна быть усваиваема вместе с уравнениями".

Наряду с этим даётся классификация задач по „тематическому" принципу, т. е. наиболее неудачная из возможных (см. об этом в VII главе).

„Для начала подходящий материал дают задачи на смешение, на разделы, на проценты, а также более лёгкие задачи на движение; затем идут задачи на удельный вес, на тепловое растяжение и т. д. Резюмируя, можно сказать, что задачи из коммерческого оборота дают самый лучший (?! — *А. Б.*) материал для составления уравнений".

Точно так же указывая, что решать системы уравнений „надо не пятью или более способами, а только одним", автор рекомендует в качестве этого одного способа наименее удачный, именно так называемый „способ сравнения".

„Надо во всех уравнениях выразить одно и то же неизвестное через остальные $(n - 1)$ неизвестные и приравнять эти выражения друг другу. В конце концов должно получиться одно уравнение с одним неизвестным".

Два небольших абзаца отводятся квадратным уравнениям. Наконец, автор высказывается за включение в программу уравнений 3-й степени для оправдания введения комплексных чисел, и это по существу всё, что относится к данной теме.

4. В. Мрочек и Ф. Филиппович, Педагогика математики, Исторические и методические этюды, 1910.

Первая часть книги посвящена истории педагогики математики (Эволюция педагогики математики) и общепедагогическим вопросам (наглядный и лабораторный методы; психология, педагогика и школа; основные принципы педагогики математики); вторая содержит методику начальных курсов арифметики, геометрии и алгебры (кончая квадратными уравнениями). Отметим, что книга в целом получила резко отрицательную оценку со стороны проф. Д. Синцова[1]) (главным образом первая часть книги) и К. Ф. Лебединцева[2]) (вторая часть).

Авторы поставили своей целью пропаганду среди русского учительства идей упоминавшегося уже нами реформистского течения в области преподавания математики. В соответствии с этим в основу всего курса алгебры они кладут учение о функции и уравнениях, но конкретных указаний в этом направлении дают очень немного.

В главе XII, целиком посвящённой уравнениям 1-й степени, вначале на ряде задач показываются преимущества решения арифметических задач методом уравнений. Почему-то этот раздел имеет странный заголовок: „Аналитическое решение *уравнений*" (может быть, авторы хотели сказать — „*задач*").

Следующий раздел „Общие указания" содержит несколько отрывочных, большею частью верных замечаний:

1) „При выборе задач надо отдавать предпочтение вопросам из жизни и естествознания" (рекомендуются также исторические задачи. — *А. Б.*).

2) „Многие задачи полезно решать не одним, а двумя и более способами".

3) „Несколько удачно подобранных задач выяснят ученикам, что при том или ином выборе *икса* уравнение существенно меняет форму, а его решение представляет бо́льшие или меньшие затруднения".

4) „Буквенные обозначения необходимо вводить крайне осмотрительно и, главное, не торопиться" (этот совет не совсем понятен, если только авторы не предлагают *начинать* курс алгебры с уравнений).

5) Полезно указать ученикам, что „уравнения можно читать слева направо и справа налево и сообразно с этим записывать" —

совершенно правильное указание. Когда ученик поймёт, что если $27 - x = 15$, то и $15 = 27 - x$, тогда он предпочтёт решить второе уравнение так: $x = 27 - 15$, чем первое обычным и затрудняющим его способом: $-x = 15 - 27$; $-x = -12$; $x = 12$.

6. Последующее указание приводит нас в недоумение. Авторы сетуют, что „не указывается также, что при переносе членов из одной части уравнения в другую знаки *всех*

---

[1]) Д. Синцов, По поводу одной книги, „Математическое образование", 1913.

[2]) „Вестник опытной физики и элементарной математики", № 525, 1910. Возражение автора в том же журнале № 529 и последующий ответ К. Лебединцева в № 531.

(курсив авторов. — *А. Б.*) действий (!?) меняются на обратные".

Если понимать фразу буквально, то, например, член $7x$ при переносе в другую часть должен принять вид $\frac{7}{x}$. Откровенно говоря, мы просто не понимаем, что хотели сказать здесь авторы.

7. Наконец, для уравнений вида 1) $\frac{100+x}{4}=\frac{129}{4}$ и 2) $\frac{27}{2+x}=\frac{27}{3}$ авторы рекомендуют ввести „аксиому": если две дроби равны и числители (знаменатели) их равны, то и знаменатели (числители) их тоже равны.

И это всё. Авторы и сами сознают недостаточность этих указаний для центральной, по их же мнению, темы курса.

„Если мы теперь ограничимся этими указаниями, то не следует думать, что это — вся методика уравнений, но подробное описание мелочей может легко привести к механизации вроде той, с которой мы боремся в этой книге".

Во-первых, непонятно, каким образом методические советы учителю могут привести к механизации (чего?). Во-вторых, авторы не затронули целого ряда не мелочей, а кардинальных вопросов методики преподавания уравнений.

Следующие разделы главы посвящены линейной функции и графическому решению уравнений, причём последний пункт авторы считают „самым интересным и важным местом курса". С этим утверждением авторов никак нельзя согласиться. Но главное, иллюстрируя графический метод на задаче, авторы допускают грубую математическую ошибку, указанную проф. Д. Синцовым в упомянутой выше рецензии. Даётся задача:

„Мальчик получил на Новый год в подарок копилку и в конце каждой недели кладёт в неё 7 коп. Представить графически и аналитически состояние копилки к концу месяца? года?"

Авторы утверждают, что „получаемая при этом графика имеет вид прямой линии". Проф. Синцов указывает, что истинной графикой будет ступенчатая линия. Если же, добавим, x может принимать только целые значения, кратные семи (авторы за единицу счёта времени берут сутки), то графиком будет просто ряд точек.

Неверно и аналитическое выражение функции: $y = x$. Например, при $x = 23$ значение функции будет 23, а в действительности оно будет 21. Правильное выражение для функции будет $y = 7 \cdot \mathrm{E}\,\frac{x}{7}$ (где $\mathrm{E}\,\frac{x}{7}$ — целая часть дроби $\frac{x}{7}$). Так же неправильно даны график функции и в другой задаче — о трате мальчиком по 20 коп. в неделю из накопленной суммы 2 р. 40 к.

В итоге по вопросу об уравнениях и в особенности о их составлении преподаватель мало найдёт указаний в данной книге.

Мы никак не можем обойти молчанием ещё одну „методику алгебры“ уже потому, что малоопытный преподаватель, которому попадётся в руки эта книга, может принять её всерьёз за „руководство“ по методике. Книга эта носит претенциозное и „зазывающее“ название:

5. Н. Т. Лексин, Методика алгебры, Методические указания и примерные уроки по наглядно-лабораторному способу, Казань, 1916.

Прежде всего познакомим читателя со „стилем“ изложения при помощи хотя бы такой, случайно взятой цитаты:

„Занимаясь с детьми основательной разборкой арифметических вопросов и время от времени иллюстрируя их геометрическими построениями, учитель тем самым разрыхляет математическую почву в уме ученика, делает её мягкой, пухлой и способной не только не заглушить новые семена алгебраических знаний своей (!?) невосприимчивостью, а наоборот — делает её способной дать названным семенам возможность найти подходящий уголок и спокойно пустить в нём глубокие корни и вынести стебель (?) наружу, а потом и принести плод.

И мы стоим на поле, усеянном (?) не чем либо иным, а детскими умами...“

Как видим, что ни фраза, то перл красноречия и глубокомыслия. И такая, с позволения сказать, пошлятина занимает бóльшую часть книги. Но это ещё далеко не всё. Ознакомимся поближе с содержанием книги.

Первые три главы книги излагают краткую историю развития алгебры, а также историю преподавания алгебры в России и за границей. Открываем буквально наудачу страницу из этого раздела и читаем:

Эпоха общественных школ была, *можно сказать, поистине* новой эпохой в жизни человечества. Это случилось (?) в конце VII и в начале VI века до Р. Х.	В конце VII и начале VI ст. до Р. Х. началась новая эпоха в жизни человечества, эпоха общественных школ.

Основателем *первой общественной школы*, школы Ионийской, *по свидетельству истории*, был Фалес Милетский, который первый провозгласил принцип *общественной* (общедоступной? — *А. Б.*) школы и, созывая своих учеников со всех концов тогдашнего культурного мира,	Основатель Ионийской школы, Фалес Милетский (640) впервые провозгласил принцип единой „общедоступной“ школы; созывая своих учеников со всех сторон тогдашнего культурного мира.
говорил им: „я буду вас учить всему тому, что и сам знаю“.	Он говорил им: „я вас буду учить всему тому, что я сам знаю“.
Обучение в названной школе было чисто словесным,	Правда, это обучение было чисто словесным,
так что Фалес в подтверждение своих доводов *постоянно* говорил: „Это так“.	и Фалес в подтверждение своих доводов часто лишь говорил: „Это так“.
Отсюда, *как известно*, и получил своё начало знаменитый догматический метод обучения;	Отсюда пошла знаменитая догматическая методика обучения;

и т. д. Здесь слева дан текст из книги Лексина, вышедшей в 1916 году, а справа мы для сравнения привели соответствующее место из книги В. Мрочек и Ф. Филиппович „Педагогика математики“, вышедшей в 1910 году. Вывод, кажется, ясен.

Интересующая нас тема „Уравнения“ составляет основное содержание книги. Как уже сказано, первые три главы посвящены истории, четвёртая говорит о „связи алгебры с арифметикой и геометрией“, пятая о „методах и приёмах изучения алгебры“, шестая и последняя посвящена „решению задач на составление уравнений первой и второй степени“ и занимает 213 страниц из общего количества 341 страницы.

Чем же заполнены эти 213 страниц? Прежде всего обильным количеством „воды“ — пустой, бессодержательной болтовнёй, за цветистыми, крикливыми фразами скрывающей отсутствие какой бы то ни было мысли.

Но среди этой „воды“ можно найти и ряд „дельных“ мыслей. Покажем, например, как излагает автор вопрос об эквивалентности уравнений, причём опять-таки для сравнения приведём соответствующее место из книги Юнга „Как преподавать математику“:

Н. Лексин:	Юнг:
„... можно сказать, что вопрос об эквивалентности уравнений с методической точки зрения должен быть продуман с возможной тщательностью и серьёзностью.	„Вопрос о равносильности должен быть ясно продуман в уме учителя,
Однако этот вопрос не должен обсуждаться в классе *во время классной работы* с формальной точки зрения,	но нет надобности обсуждать его формально в классе,
особенно в том случае, если это не требуется ходом занятий самих учеников.	если только этого не потребуют занятия самих учеников.
Но если ученики находят корень, *совершенно* (?!) не отвечающий уравнению (любопытно, как может корень „совершенно“ не отвечать уравнению. — *А. Б.*),	Если ученик находит корень, который уравнению не отвечает,
причём это замешательство (? может быть „обстоятельство“?) ставит класс в *полное недоумение и затруднение*,	и это ставит его в затруднительное положение,
то это означает, что *в данную минуту* назрела *насущная потребность* для некоторых объяснений относительно эквивалентности уравнений.	то он созрел для некоторых объяснений относительно эквивалентности уравнений.
В этом случае *учитель и должен иметь в виду и непременно осуществить* тот основной принцип преподавания алгебры,	Здесь будет попросту применён к частному случаю тот общий принцип,
который мы постоянно подчёркиваем	который в наши дни выдвигается со всей рельефностью:
и который говорит о том, что не следует вводить в занятия *алгеброй те или иные теоретические* соображения отдельно от практических занятий.	согласно этому принципу, не следует вводить в занятия теоретические соображения отдельно
с целью одного лишь отвлечённого обсуждения теоретических вопросов	только для одного отвлечённого их обсуждения,
а необходимо вести каждый урок алгебры таким образом,	но надо сделать так,
чтобы тот или иной конкретный случай	чтобы какой-либо конкретный случай

возбудил в *сознании ученика настоятельную* потребность в рассмотрении отвлечённого положения,	возбудил в ученике потребность в рассмотрении отвлечённого положения,
которое *скрыто* в изучаемом частном *факте или случае*".	заключающегося в этом частном случае".

И т. д. Можно дать многие и многие страницы такого „параллельного" текста.

Итак, налицо самое беззастенчивое списывание из различных источников, причём это „заимствование" носит тем более наглый характер, что упомянутые, например, нами, „книги-оригиналы" сами по себе достаточно широко известны учительству.

Мы выделили курсивом те места текста, которые автор вставил „от себя" в текст „оригинала". С первого же взгляда видно, что эти вставки: 1) или являются пустыми, бессодержательными и потому совершенно лишними фразами, 2) или же искажают, перевирают и даже совсем обессмысливают текст „оригинала".

Но в книге имеется всё же и собственный текст автора. Это именно та „вода", пример которой мы уже привели вначале. Дадим ещё небольшой образец. Возьмём вопрос о связи арифметики с алгеброй. Автор, как и мы, считает наличие этой связи крайне важным фактором в деле усвоения алгебры. А вот его аргументация.

Прежде всего, автор уверяет читателя, что „Учитель — это пахарь, садовник и огородник". На протяжении полутора страниц убористого текста автор описывает работу „этих лиц", главным образом пахаря. Тут и пахота, и бороньба, „дабы не оставить ни одного кома, ни одной глыбы, которые мешали бы ростку выбиться на свет". Тут и разрыхление, и орошение, и удобрение почвы и обработка „с ещё бо́льшим старанием и любовью" худших „малоплодородных" уголков земли (т. е. слабых учеников.— *А. Б.*) и т. п. Наконец автор переходит к „сути вопроса".

„Семена алгебраических знаний (опять семена! — *А. Б.*) — особенные семена: они требуют известного рода обработки почвы, известного рода ухода за нею, требуют известного удобрения, своевременно при этом внесённого в почву. Эти семена требуют так же и за собою особого ухода, особого уменья беречь их, уменья их сеять и закапывать в почву, т. е., иначе говоря, связывать с другими родственными математическими познаниями, а именно с арифметическими и геометрическими. Что алгебраические знания — это особого рода семена, с этим, вероятно, всякий согласится. Они подчас весьма туго всходят и требуют особого, чрезвычайно умелого ухода за их сохранением и произрастанием. Почва для них тоже требуется особенная, требуется именно благодатная почва, хорошо разрыхлённая, глубоко вспаханная, размельчённая и тщательно удобренная. Что же следует разуметь учителю математики под почвою и её удобрением?

Арифметика — это почва для посева в уме учеников алгебраических познаний, а геометрия — удобрение этой почвы..."

Итак, читатель, наконец, подведён к глубокомысленному и ценному выводу по вопросу о взаимоотношении между тремя математическими дисциплинами, изучаемыми в школе. Оказывается, арифметика — это почва, геометрия — удобрение, а алгебра — семена. Подобной белибердой, изложенной тем же „выспренным" стилем, заполнена, повторяем, бо́льшая часть книги. Полагаем, что и приведённых выдержек достаточно, чтобы предостеречь читателей от этой книги.

За последние годы мы имеем два новых руководства по методике алгебры. Приведём вкратце содержание той их части, которая относится к нашей теме.

6. И. И. Чистяков, Методика алгебры, М., 1934.

Первый параграф главы об уравнениях 1-й степени посвящён вопросу о месте уравнений в курсе алгебры, причём автор высказывается за возможно более раннее ознакомление учащихся с уравнениями. Следующий параграф относится к решению уравнений. Автор придерживается традиционного деления равенств на тождества и уравнения. Автор вводит с самого начала изучения уравнений теоремы об эквивалентности, рекомендуя, однако, не требовать на данном этапе от учащихся доказательства этих теорем. Следует ли всё же когда-либо дать доказательства их и когда именно, — об этом ничего не говорится. Рекомендуется решение возможно большего количества „буквенных" уравнений для практики в тождественных преобразованиях.

Следующий параграф посвящён составлению уравнений из условий задачи. Автор возражает против существующей практики отнесения задач на составление уравнений на конец темы и рекомендует решать их одновременно с изучением самих уравнений, с чем мы совершенно согласны. Что касается самого вопроса о составлении уравнений, то здесь автор следует обычному трафарету, и указания книги ничего нового не дадут учителю.

„Так как задач с конкретным содержанием может быть множество, то общего правила для составления уравнений, пригодного для всех случаев, дать невозможно. В общем, однако, можно рекомендовать при решении таких задач прежде всего прочитать самым внимательным образом условие задачи и уяснить себе её содержание, затем принять какое-нибудь из неизвестных чисел, которые требуется найти в задаче, за основное неизвестное число и обозначить его буквою x или иною; потом выразить через выбранное неизвестное другие неизвестные числа, фигурирующие в задаче. Наконец, на основании зависимостей между данными и искомыми числами, вытекающих из условий задачи, устанавливаем равенство между входящими в условие величинами; оно и будет требуемым уравнением.

В соответствии с характером аналитического метода идти от неизвестных величин к известным — при составлении уравнения следует с выбранным неизвестным x поступать так, как будто это число уже найдено, и мы производим поверку решения задачи".

Первая часть цитаты излагает общий план решения задачи, как он обычно даётся в учебниках: 1) уяснение содержания задачи, 2) выбор неизвестного, 3) выражение при помощи выбранного неизвестного других входящих в задачу неизвестных величин. Следующий этап выражен очень неясно: „устанавливаем равенство между входящими в условие величинами". А если в задаче, как это обычно бывает, нет равных величин? Заканчивает автор всё тем же пресловутым первым „общим правилом".

Решение задач методом уравнений иллюстрируется на четырёх задачах, приводящих к уравнениям:

1. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + 15 = x$; 3. $2x + 2(x+4) = 60$;

2. $20x + (17 - x)\,15 = 300$; 4. $0{,}75 \cdot 86 = 0{,}43\,(86 + x)$.

Кроме того, три задачи даны на случаи нулевого, отрицательного и неопределённого решения и две задачи, приводящие к уравнениям, не имеющим решений.

Для курса методики изложенный материал по уравнениям 1-й степени безусловно нельзя признать достаточным, тем более, что сам автор отводит этой теме наиболее важное место в курсе алгебры, особенно выдвигая практическое и образовательное значение задач на составление уравнений.

Гораздо больше внимания и места уделяет нашей теме второе руководство:

7. С. С. Бронштейн, Методика алгебры, М., 1937.

Вопрос об уравнениях первой степени излагается в книге в той последовательности, какая рекомендуется автором для прохождения в школе.

1. Связь уравнения с функцией и тождеством.

Автор считает, что

„уравнение нельзя рассматривать как утверждение наличия равенства между двумя или несколькими выражениями. На уравнение надо смотреть как на вопрос: существуют ли такие значения неизвестных, при которых левая часть равна правой, а если существуют, то указать, чему они равны“.

Эта точка зрения на уравнение, которую мы не разделяем, была уже изложена нами в § 12. Да и сам автор не проводит её до конца. Вслед за приведённым определением уравнения автор указывает на отличие уравнений от тождеств, т. е. проводит традиционно деление равенств на тождества и уравнения. Далее приводится ряд равенств и указывается:

„эти равенства имеют различный смысл. Одни из них соединяют элементы действий с их результатами, например $4+7=11$; $8\times 9=72$, или же констатируют наличие равенства между двумя или несколькими выражениями, или наличие какого-либо общего свойства, например: $a+b=b+a$. Другие равенства выражают (т. е. утверждают? — *А. Б.*) наличие зависимости между величинами, например: $x=2$, $y=2+3$; равенство $y=2x$ показывает (т. е. опять-таки утверждает? — *А. Б.*), что значение y равно удвоенному значению x. Наконец, равенство $11x+8=85$ должно ответить на вопрос, при каком значении выражение $11x+8$ сделается равным 85.

Итак:

$$\left.\begin{array}{c} 2+3=5 \\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \end{array}\right\} \text{тождества}$$

$$\left.\begin{array}{c} y=2x \\ 2x+1=5 \end{array}\right\} \text{уравнения“.}$$

Здесь ясна непоследовательность автора. По точному смыслу текста к уравнениям можно отнести только последнее равенство.

2. О равносильности уравнений.

Здесь приводятся три теоремы о равносильности, причём третья (об умножении на выражение, содержащее неизвестное) приводится без доказательства и лишь иллюстрируется на примерах. Очевидно, автор считает возможным уже в VII классе дать ученикам доказательства в общем их виде первых двух теорем, с чем мы не можем согласиться.

3. Решение уравнений.

Даётся приём решения отдельно для уравнений двух типов:
1) уравнений, содержащих неизвестное в одном члене:

$$a+x=s;\quad a-x=k;\quad ax=b \text{ и т. д.};$$

2) уравнений, содержащих неизвестное в нескольких членах.

Из шести видов уравнений первого типа первые пять автор решает применением теорем об эквивалентности и лишь шестое $\frac{80}{x}=5$ на основании определения деления, точнее, на основании зависимости между компонентами. Нам кажется, что проще и последовательнее все шесть видов решить последним способом.

Что касается общего приёма, то здесь вызывает возражения последнее замечание автора: „если знаменатель не содержит неизвестного, освобождение от знаменателей не необходимо".

Это было бы правильно, но, во-первых, пример, данный автором, неудачен, и как раз в нём освобождение от знаменателя вполне целесообразно:

$$\frac{2x}{9}-\frac{x}{12}=\frac{1}{12}+\frac{4}{9}+1;\quad \frac{5x}{36}=\frac{55}{36};\ x=\frac{55}{36}:\frac{5}{36}=11.$$

Конечно, гораздо проще было во втором уравнении отбросить знаменатель, чем делить дробь на дробь и увеличивать возможность ошибок. Здесь более подошёл бы пример такого вида:

$$\frac{x}{4}-7=5;\quad \frac{x}{4}=12;\quad x=48.$$

Во-вторых, напрасно исключаются замечанием уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. Так, уравнение $\frac{6}{x}=\frac{3}{4}$ проще решить на основании свойства пропорции: $x=\frac{6\cdot 4}{3}=8$, чем путём освобождения от знаменателей.

Далее даются примеры решения уравнений с буквенными коэфициентами, показываются некоторые упрощения при решении (применение производных пропорций) и, наконец, рассматриваются дробные уравнения (в узком смысле, т. е. содержащие неизвестное в знаменателе).

4. Теоремы о числе решений и о совместности двух уравнений с одним неизвестным. Исследование уравнений.

Первая теорема доказывается методом от противного:

Пусть

$$ac = b \text{ и } ad = b,$$

тогда:

$$ac - ad = 0; \quad a(c - d) = 0; \quad c - d = 0 (a \neq 0),$$

и, наконец, $c = d$. Единственность решения с полной ясностью для учеников вытекает из единственности результата деления одного числа на другое, и поэтому никакой теоремы давать ученикам здесь не следует. Тем более не следует давать сложного вывода условия совместности двух уравнений с одним неизвестным ($a_1b_2 - a_2b_1 = 0$). Нам совсем непонятно, с какой целью автор включил этот вопрос.

Исследование уравнений даётся автором для уравнения $ax = b$; разбираются, как обычно, три случая:

$$1.\ a \neq 0; \quad 2.\ a = 0; \quad b \neq 0; \quad 3.\ a = 0; \quad b = 0.$$

5. Составление уравнений.

Этому разделу уделено сравнительно значительное место (7 страниц). И всё же именно этот раздел изложен в книге наименее удачно. Прежде всего, автор считает возможным установить единый общий приём („общий принцип") составления уравнений:

„Неверно, что нет единого принципа составления уравнений. Общий принцип, которым руководствуются при составлении уравнений, может быть сформулирован так: надо проанализировать, какие величины, находящиеся во взаимной зависимости, равны между собой. Соединив такие два выражения знаком равенства, составляют уравнение".

Понятно, что такой общий принцип едва ли в чём может помочь учащимся. Более того, он в силу своей неясности является даже шагом назад по сравнению с общими указаниями прежних учебников и методик. В самом деле, надо проанализировать, „какие величины, находящиеся во взаимной зависимости, равны между собой". Так как в задаче в общем все величины находятся во взаимной зависимости (ведь все они войдут в уравнение, связывающее их друг с другом), то мысль автора надо понимать так: надо найти две равные величины. Но это далеко не всегда возможно. Возьмём, например, первую же задачу из Шапошникова и Вальцова (371).

„Два лица имеют вместе 38 руб., причём у первого шестью рублями больше, чем у второго. Сколько денег у каждого?"

Составляем уравнение:

$$x + (x + 6) = 38.$$

Здесь мы не найдём двух равных, „находящихся во взаимной зависимости" величин. И в первой и во второй части уравнения фигурирует одна и та же величина — общая сумма денег. Так же обстоит дело с задачами №№ 372, 373, 374 и т. д.

Далее С. С. Бронштейн говорит: „Соединив такие (?) два выражения знаком равенства, составляют уравнение".

Совершенно непонятно, откуда появились два выражения, если раньше говорилось только о двух равных *величинах*? Может быть, автор имеет в виду то же, что и Евтушевский, именно: „надо одну и ту же величину выразить двумя способами и приравнять полученные выражения".

Но нет, автор возражает против такой формулировки:

„Иногда говорят, что выражают одну и ту же величину двумя способами в зависимости от x и уравнивают эти два выражения. Это неточно: часто приравнивают выражение, содержащее x, другому, содержащему только постоянные величины".

Это возражение несущественно: случай, когда одна часть уравнения является постоянной величиной, может быть рассматриваем как частный. Можно так же, как это делает, например, Евтушевский (см. выше), сформулировать правило составления уравнения для каждого из частных случаев отдельно. Переходя к конкретному показу на примерах метода составления уравнений, автор указывает, что

„основным первым действием является не выбор неизвестной величины, а выяснение вопроса, какая величина, встречающаяся в условии задачи, равна другой величине, *находящейся с первой во взаимной зависимости*".

С этим можно было бы согласиться, если бы только выделенные нами курсивом слова не вносили новую неясность. Раз некоторая величина *равна* другой величине, то о какой ещё *взаимной зависимости* их может идти речь?

Все эти неясности исчезли бы, если бы автор принял формулировку, данную ещё Евтушевским и другими: одну и ту же величину выразить в двух видах. Так и обстоит фактически дело во всех примерах, приведённых в книге.

Что касается этих примеров, то даваемый в книге метод их решения опять-таки вызывает самые серьёзные возражения. Приведём решение первой задачи:

Задача. „Через 20 минут после того, как неприятельский разведчик перелетел через границу, в погоню за ним отправился самолёт-истребитель со скоростью 300 *км* в час; разведчик летит со скоростью 180 *км* в час. Через сколько времени истребитель нагонит разведчика?“

1. Определяются две равные величины: записывается — „путь, пройденный разведчиком от границы до встречи, равен пути, пройденному истребителем“. (Мы сказали бы, что здесь фигурирует одна величина: путь, пройденный обоими самолётами от границы до встречи.)

2. Выражаем эту запись формулой:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2.$$

3. Подставляем данные числа:

$$180 t_1 = 300 t_2.$$

4. Из условия задачи выводим:

$$t_1 - \frac{1}{3} = t_2 \text{ или } t_1 = t_2 + \frac{1}{3}.$$

5. Решаем уравнение относительно t_2:

$$180\left(t_2 + \frac{1}{3}\right) = 300 t_2; \quad 3\left(t_2 + \frac{1}{3}\right) = 5 t_2;$$

$$3t_2 + 1 = 5t_2; \quad 2t_2 = 1; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Как видим, задача по существу решается с помощью системы двух уравнений способом подстановки. Введение лишних букв, конечно, во много раз усложнило решение. Насколько проще было бы ввести только одну букву для искомой величины.

Тогда мы имели бы:

	Скорость	Время	Путь
Истребитель	300	x	$300x$
Разведчик	180	$x + \frac{1}{3}$	$180\left(x + \frac{1}{3}\right)$

По условию задачи:

$$300\,x = 180\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Приведём ещё одну задачу:

Задача. „Из двух мест, расстояние между которыми равно 600 *м*, выходят навстречу друг другу 2 тела; первое проходит в 1 минуту на 2 *м* больше второго; встретились они через 4 минуты. Сколько метров проходило в 1 минуту второе?"

Совершенно естественно, обозначив через x искомую величину, прийти к решению:

	Скорость	Время	Путь
Первое тело	$x+2$	4	$4(x+2)$
Второе „	x	4	$4x$

По условию задачи:

$$4(x+2) + 4x = 600.$$

Автор же решает задачу так:

1. Длина пути первого + длина пути второго равна 600 *м*[1]).

2. $s_1 + s_2 = 600$.

3. $s_1 = v_1 t_1$; $s_2 = v_2 t_2$; $v_1 t_1 + v_2 t_2 = 600$.

Но

$$t_1 = t_2 = 4.$$

Следовательно,

$$4v_1 + 4v_2 = 600.$$

4. $4v_1 + 4v_2 = 600$; $v_1 = v_2 + 2$.

Следовательно,

$$4(v_2 + 2) + 4v_2 = 600.$$

5. Решаем уравнение:

$$4(v_2 + 2) + 4v_2 = 600;\ v_2 + 2 + v_2 = 150;\ 2v_2 = 148;\ v_2 = 74.$$

Мы совсем не понимаем, зачем нужно было так усложнять простую задачу обилием букв и сведением решения к системе двух уравнений.

Даже такую элементарную задачу:

---

[1]) Как видим, и здесь в обеих частях уравнения фигурируют не „две величины, находящиеся друг с другом во взаимной зависимости", а только одна величина — путь, пройденный обоими телами.

„На заводе работает всего 300 рабочих; число женщин равно $\frac{3}{5}$ числа мужчин. Сколько мужчин и сколько женщин работает на заводе?“ Автор решает так:

1. Число мужчин и число женщин (т. е. плюс число женщин. — *А. Б.*) равно 300. (Другими словами в обеих частях уравнения фигурирует одна и та же величина — общее число рабочих на заводе.

2. $x + y = 300$; так как $y = \frac{3}{5}x$, то

$$x + \frac{3}{5}x = 300.$$

Мы решительно не можем принять рекомендуемого автором метода составления уравнений, как ненужно сложного и часто лишь затемняющего для ученика ход решения задачи.

В конце параграфа автор рекомендует в случае затруднений придерживаться следующей схемы:

1) Усвоение условий задачи, 2) составление плана (анализ), 3) выполнение плана (анализ), 4) поверка.

К сожалению, эти общие указания не сопровождаются конкретным показом, а потому и мало чем помогут учителю.

Рассмотрение ряда методических руководств заставляет прийти к выводу, что хотя они и содержат по большей части ряд полезных указаний по вопросам методики преподавания уравнений, но в наиболее трудном вопросе — составлении уравнений — помощь, оказываемая ими, очень незначительна. Сравнение с лучшими учебниками показывает, что рассмотренные методики мало что вносят нового по сравнению с ними.

§ 27. Методическая литература последних лет.

Совсем другое впечатление создаётся при ознакомлении с методической литературой примерно последних 10—12 лет, распылённой в виде отдельных статей по журналам, разного рода методическим сборникам и в виде так называемых „методразработок“ по педагогическим кабинетам.

Быстрый рост школьной сети в СССР и в связи с этим рост молодых педагогических кадров, сравнительно слабо подготовленных к преподаванию в средней школе, естественно, вызвал буквально жгучую потребность в методике преподавания алгебры и в особенности её наиболее трудных разделов:

относительные числа, разложение на множители, уравнения, логарифмы, расширение понятия о числе и т. д. Понятно, что такой трудный раздел, как „Составление уравнений по условиям задачи“, вызывал особенно много вопросов со стороны учительства. И с особым удовлетворением можно отметить за последние годы определённое оживление именно по линии методики преподавания уравнений.

Во всех этих статьях нашёл своё отражение богатый опыт передовых учителей советской школы. Поэтому естественно, что основное содержание их и составляют те именно трудности в преподавании математики в средней школе, которые приходилось преодолевать авторам этих статей и с которыми обязательно приходится сталкиваться всякому молодому педагогу. Последний найдёт в методической литературе немало ценных указаний по вопросу о методике преподавания всех основных тем школьного курса, в частности и в особенности по вопросу о решении задач методом уравнений.

Нет никакой возможности подвергнуть детальному критическому анализу многие десятки статей на тему о составлении уравнений. Да в этом нет и большой необходимости для целей настоящей работы. Поскольку многие из них частично повторяют, другие дополняют друг друга, целесообразнее будет дать некоторую сводку их содержания, группируя их соответственно той основной точке зрения, которую проводит тот или иной автор.

Суммируя содержание опубликованных работ, можно без особой натяжки достаточно отчётливо видеть четыре пути, идя по которым, авторы ищут методических средств для преодоления трудностей в преподавании рассматриваемой ими темы.

1. Вопреки утверждению большинства учебников и методики об отсутствии единого правила для составления уравнений, надо попытаться найти и дать это правило: дать некоторый исходный, общий для всех задач принцип, руководясь которым учащийся уже более или менее легко мог бы выполнить весь ход рассуждений и математических операций для составления уравнения.

2. Можно идти по линии частичных улучшений, использования тех или иных отдельных методических приёмов, в той или иной степени облегчающих прохождение темы: оформление, запись задачи и т. п.

3. Отказавшись от поисков „универсального“ метода, общего приёма для решения всех задач, разделить последние

на группы по степени трудности или по характеру уравнения и дать методику составления уравнений по каждой группе в отдельности.

4. Четвёртый путь — путь предварительной подготовки к составлению уравнений по условиям задачи. Основная трудность при составлении уравнения заключается в фиксации в виде алгебраических выражений тех соотношений между данными и неизвестным, которые определяются текстом задачи. Следовательно, необходимо заранее привить учащимся навык в составлении алгебраических уравнений по условиям задачи. Нужно в самом начале раздела „составление уравнений“ или даже ещё раньше проработать с учащимися определённый минимум задач с буквенными (частично или полностью) данными, благодаря которым учащиеся, так сказать, „натренировались“ бы в той или иной мере в составлении алгебраических выражений.

Само собой разумеется, что все эти четыре пути совсем не исключают друг друга, и ряд авторов действительно не ограничивается каким-либо одним из них.

С точки зрения сравнительной оценки этих путей первый оказался, как и следовало ожидать, наименее эффективным.

В самом деле, всё разнообразие задач на уравнения не может быть подчинено какой-либо единой, достаточно детальной схеме. Поэтому всякое указание, относящееся ко всем задачам, неизбежно носит самый общий характер, мало помогая самой технике составления уравнения.

И немудрено поэтому, что все попытки дать некоторый общий принцип составления уравнений приводят к тем же двум „общим правилам“, которые были изложены нами выше. Так, например, за последние годы получил довольно широкое распространение такой „общий“ принцип[1]):

„1) Нужно обозначить неизвестную величину (искомую задачи) какой-либо буквой с точным указанием единиц измерения.

2) Ввести эту букву в условие задачи как определённую величину: получается как бы лишнее условие.

3) Исключить из получившегося таким образом ряда условий одну величину и выразить её через оставшиеся величины, включая и неизвестную букву.

4) Полученное выражение приравнять исключённой величине“.

---

[1]) Цитируем по статье И. Брауна „О составлении уравнений“ „Математика в школе“, № 5, 1936.

Собственно говоря, и этот рецепт далеко не нов. Отчётливую формулировку его мы найдём, например, в статье П. Свешникова: „Заметка о составлении уравнений“[1]).

„Если одну из неизвестных величин сделать известной, вообразив, что ей придано определённое значение, и в то же время одну из данных величин примем за неизвестное, то получим новую задачу, которая по отношению к первоначальной называется обратной. Из всякой задачи можно получить несколько обратных. Иногда одна или несколько обратных задач решаются проще первоначальной. Тогда для решения этой задачи удобнее всего составить уравнение и определить его корень. Составление уравнения представляет решение задачи, обратной по отношению к данной“.

Легко заметить, что здесь мы имеем то же второе „общее правило“, но в суженной и, именно поэтому, в ухудшенной форме. Это особенно отчётливо видно, если мы возьмём второе правило в той диференцированной формулировке для уравнений четырёх типов, которая дана Евтушевским в его методике (см. § 28).

Совершенно очевидно, что предлагаемое здесь правило полностью совпадает с правилом Евтушевского для уравнений первого типа.

В чём же разница? И. К. Браун предлагает взять одну из *данных* величин и выразить её в другом виде (через x и другие данные), т. е. предлагает составить уравнение, в котором одна часть содержит данную величину, а другая — ту же величину, выраженную посредством x и других данных величин.

Евтушевский же не ограничивает выбор непременно численно данной величиной. Поэтому, в общем случае, по Евтушевскому, для одной и той же величины придётся составить два алгебраических выражения, которые затем и приравнять друг другу.

Как будто первый „рецепт“ проще рецепта Евтушевского: в первом случае *всегда* требуется составить *одно* алгебраическое выражение, а во втором, вообще говоря, — два. На самом деле это не так. Наиболее часто приходится иметь дело с задачами, в которых выгоднее и проще составить два алгебраических выражения для одной и той же величины, чем выбрать уже известную и составить для неё одно выражение.

Возьмём для примера задачу 391 из Шапошникова и Вальцова:

---

[1]) Педагогический сборник, №4, апрель, 1893.

„Из двух металлов с удельным весом 7,2 и 8,4 составлено 19 *кг* сплава с удельным весом 7,6. Сколько взято каждого металла?"

Составим уравнение по рецепту Евтушевского. Обозначим вес первого металла через x, тогда вес второго будет $19 - x$. Считая x величиной известной, рассуждаем: нам известны вес и удельный вес первого металла, вес и удельный вес второго, вес и удельный вес сплава. Известная формула физики подсказывает, что мы легко можем определить объём каждого из металлов и сплава; а так как сумма объёмов металлов должна быть равна объёму сплава, то уравнение получается почти само собой.

	1-й металл	2-й металл	Сплав
Вес	x	$19 - x$	19
Уд. вес	7,2	8,4	7,6
Объём	$\frac{x}{7,2}$	$\frac{19-x}{8,4}$	$\frac{19}{7,6}$

В итоге получаем:

$$\frac{x}{7,2} + \frac{19-x}{8,4} = \frac{19}{7,6}.$$

Попробуем теперь составить уравнение по способу И. К. Брауна. Оставляя обозначение веса 1-го и 2-го металла через x и $19 - x$, исключим какое-либо одно из данных. Затем, используя остальные данные, найдём выражение для этой исключённой величины.

В зависимости от того, какую величину мы исключаем, получим путём довольно сложных рассуждений одно из следующих уравнений:

Исключаемая величина	Уравнение
7,2	$\dfrac{x}{\dfrac{19}{7,6} - \dfrac{19-x}{8,4}} = 7,2$
8,4	$\dfrac{19-x}{\dfrac{19}{7,6} - \dfrac{x}{7,2}} = 8,4$
19	$\left(\dfrac{x}{7,2} + \dfrac{19-x}{8,4}\right)7,6 = 19$
7,6	$\dfrac{19}{\dfrac{x}{7,2} + \dfrac{19-x}{8,4}} = 7,6$

Совершенно ясно, что ни одно из этих уравнений ни по своему виду, ни по ходу его составления не может идти ни в какое сравнение с полученным по способу Евтушевского.

Конечно, ряд задач допускает и способ исключения одной из данных величин. Такой способ входит как частный случай и в способ Евтушевского, не являясь обязательным, что, как мы только что видели, далеко не всегда и желательно.

Итак, мы видим, что первый путь — поиски универсального метода составления уравнений — пока не дал положительных результатов, и дело в этом отношении обстоит так же, как и 150 лет назад.

Второй путь — путь частичных улучшений отдельных методических приёмов, облегчающих тот или иной момент в преподавании данной темы. Например, рекомендуется особая форма записи всей последовательности составления уравнения, позволяющая ученику наглядно охватить этот процесс, делаются попытки использования наглядных пособий и т. п.

Все такие попытки частичных улучшений, несомненно, имеют определённую ценность и будут иметь ценность всегда, как бы ни была хорошо и детально разработана методика той или иной темы или всего курса в целом. Ибо именно здесь мы имеем первоначальное накопление опыта, двигающего вперёд педагогическое мастерство.

Больше того, и все более крупные методические достижения, в конце концов, вся методика имеют своим началом, исходным путём именно педагогический опыт и именно фиксацию отдельных, иногда очень мелких, методических приёмов и достижений. И при всяком состоянии методики той или иной дисциплины педагогическая мысль не сможет остановиться на определённом этапе; опыт будет толкать на дальнейшее совершенствование педагогического мастерства.

По отношению к разбираемой нами теме нужно иметь в виду следующее. Если для других разделов алгебры это первоначальное накопление педагогического опыта уже позволило подвести некоторые итоги, сделать определённые обобщения, создать более или менее разработанную методику преподавания данной темы, то, как мы видели, с разделом уравнений дело обстоит далеко не так.

Здесь методическая мысль ещё только вступает на путь обобщений, на путь разработки действительной методики преподавания данного раздела. Вот почему на данном этапе особую ценность имеют именно эти попытки подытожить, обобщить накопленный педагогический опыт. Мы считаем, что третий и четвёртый путь и являются такими попытками, дающими некоторую более общую методику преподавания рассматриваемого раздела алгебры.

Итак, составление уравнений по условиям задачи не поддаётся единому, руководящему, достаточно конкретному правилу. Поэтому естественны попытки разбить весь или почти весь комплекс задач, решаемых в средней школе, на группы по тому или иному принципу, объединяющему задачи одной и той же группы, и дать методику составления уравнений для каждой группы в отдельности.

Уже самый этот подход к разрешению проблемы можно приветствовать как определённый шаг вперёд. Как правило, группировка задач производится в этом случае в порядке возрастающей трудности, что, конечно, вносит определённую упорядоченность в обучение технике составления уравнений, требует соблюдения методического принципа: от простого к сложному.

Правда, и прежние задачники старались расположить материал в порядке возрастающей трудности. Но в том-то и дело, что такой порядок устанавливался «на глаз», в зависимости от субъективного мнения составителя о степени трудности данной задачи, без попытки подойти к анализу её с каким-либо более или менее объективным критерием. Понятно, что такой подход не является надёжным. Так, о задачнике Шапошникова и Вальцова никак нельзя сказать, что в нём действительно выдержан принцип распределения задач в порядке возрастающей трудности. Вот почему самые попытки систематизировать задачный материал надо рассматривать как положительный момент.

В VII главе мы дадим обзор систем классификации, предлагавшихся различными авторами, а также изложим систему, к которой привёл нас наш собственный опыт.

Не меньшую ценность представляет собой четвёртый путь, рекомендуемый рядом авторов, — путь предварительной тренировки в составлении алгебраических выражений по условиям задачи, о чём мы уже имели случай говорить выше (§ 7). В следующей главе будет дан обзор конкретных мероприятий, предлагаемых различными авторами в этом направлении.

§ 28. Итоги и выводы.

К каким же итогам подводит нас анализ учебно-методической литературы почти за 200 лет по вопросу о методике составления уравнений по условиям задачи?

1. Большинство учебников и методических руководств пытаются облегчить учащимся овладение навыком в составлении уравнений при помощи того или иного общего правила, пригодного для любой задачи. В этом их основная методическая ошибка. Весь многолетний опыт нашей и заграничной школы с полной убедительностью показывает, что бо́льшие или ме́ньшие успехи в этом отношении не стоят ни в какой зависимости от того, знают или не знают учащиеся (из учебника или из объяснений учителя) о каком-либо „общем" приёме.

2. Особенно бесполезным является первое „общее правило", которое назовём для краткости „способом проверки". Бесполезно оно потому, что учащиеся, даже выучив его наизусть (а многие учителя требуют этого), фактически не применяют его.

На протяжении свыше двух десятков лет мы в своей педагогической практике добросовестно излагали учащимся это правило и всегда иллюстрировали его применение на ряде примеров (и это были единственные случаи, когда автор сам пользовался этим правилом). И всё же мы не можем привести случаи, когда учащиеся по собственному побуждению и вполне сознательно применили бы его к решению конкретной задачи. К такому же выводу приходили и другие учителя, когда мы обращали их внимание на эту сторону дела. Наконец, тот же ответ давали сами учащиеся при опросе, который мы проводили в течение ряда последних лет. (Конечно, нельзя говорить о „применении" правила, если процесс составления уравнения фактически совпадает как бы с проверкой найденного решения, что бывает довольно часто.)

Отсюда первый вывод: надо окончательно отказаться от изложения этого „общего правила" в учебниках и методических руководствах для учителя.

3. Так же категорически должно быть отвергнуто второе „общее правило" в той его суженной форме, которая была изложена нами в предыдущем параграфе и которую можно было бы назвать правилом „обратной задачи" или исключения одного из данных. Именно в наиболее трудных задачах — в задачах, приводящих к уравнению вида $ax + b = m(cx + d)$, — этот рецепт не только не помогает, но, наоборот, невероятно усложняет процесс составления уравнения, а потому просто вреден и с методической и с практической точки зрения.

Таков второй вывод, который должен быть сделан по вопросу об „общем правиле“.

4. Что касается второго „правила“ в его более общей формулировке, то ценность его как *отправного пункта* для составления уравнения нам также представляется в достаточной мере сомнительной. В самом деле, возьмём это правило в формулировке хотя бы учебника Рашевского.

„Среди написанных выражений найти *два* равных между собою (а если таких нет, то, увеличив или уменьшив соответственным образом одно из них, сделать его равным другому) и соединить их знаком равенства“.

Что получается? Ученик должен *вслепую* составить ряд выражений, на основе зависимостей между данными и искомыми задачи, и *затем* искать среди них два равных или сделать два из них равными. А если таковых не найдётся между составленными выражениями, что вполне может случиться? Возьмём задачу:

„Из печенья двух сортов ценой в 8 руб. и 6 руб. килограмм требуется составить 15 *кг* смеси общей стоимостью 120 руб. Сколько нужно взять печенья каждого сорта?“

Ученик составил выражения:

Количество печенья	1-го сорта	x *кг*
„ „	2-го „	$15-x$
Сколько стоит печенье	1-го сорта?	$9\,x$
„ „ „	2-го „	$6\,(15-x)$

На сколько печенье 1-го сорта дороже 2-го? $9x-6(15-x)$ — и на этом остановился. Данных для составления уравнения у него нет. Конечно, ученик пошёл по неправильному пути — одно из составленных выражений лишнее, а нужного — стоимости всей смеси — у него нет. Но ведь „правило“ и не указывает, какие же выражения нужно составить. И именно стоимость всей смеси он может и не счесть нужным искать, так как она непосредственно дана в задаче.

Другое дело, если бы ученик *заранее* определил, какие именно величины он будет приравнивать друг другу. Этого именно и требует та формулировка второго „правила“, которая дана в методике Евтушевского и Глазырина (см. § 28). Согласно этой формулировке, ученик заранее должен выбрать величину, которую можно представить в двух видах. В данной задаче ученик после, может быть, некоторых поисков устанавливает, что он может в двух видах выразить стоимость всей смеси, и тогда план составления уравнения становится вполне определённым.

Уже в силу высказанных соображений формулировку правила, данную Евтушевским, следует предпочесть всякой другой (если уж вводить „общее правило“). Да она является и более точной, так как в действительности именно приходится *одну и ту же величину* выражать в двух видах.

Но всё же, как мы уже указали, и здесь процесс составления уравнения заключает в себе элементы поисков, попыток, особенно если приходится составлять два выражения, находящиеся между собой в кратном или разностном отношении.

Мы считаем это „правило“ полезным в другом отношении: оно является хорошим *контрольным* средством для проверки правильности составления уравнения. Каким бы путём мы ни составили уравнение, обе части его должны непременно выражать одну и ту же величину. В приведённой задаче обе части должны выражать общую стоимость смеси. Анализ левой части уравнения:

$$9x + 6\,(15 - x) = 120$$

показывает, что она выражает собой стоимость всего печенья 1-го сорта плюс стоимость печенья 2-го сорта, т. е. стоимость всей смеси.

Поэтому мы считаем целесообразным в тот план решения задач методом уравнений, который обычно даётся в учебниках, включить особым пунктом второе правило в такой примерно формулировке:

„При составлении уравнения надлежит всегда строго соблюдать, чтобы обе части уравнения выражали одну и ту же величину и в одних и тех же единицах“.

5. Совершенно бесспорно, что навык в составлении алгебраических выражений по условиям задачи (перевод условий задачи на алгебраический язык) и навык в решении задач методом уравнений теснейшим образом связаны друг с другом: наличие первого колоссально облегчает овладение вторым. Поэтому всё более настойчиво выдвигаемое в методической литературе последних лет требование предварительной тренировки учеников в составлении алгебраических выражений следует признать вполне правильным и своевременным. Очередная и неотложная задача заключается теперь в том, чтобы общими усилиями педагогов и методистов разработать систему соответствующих тренировочных упраж-

нений, определить характер, объём и наиболее целесообразную организацию их.

Этим вопросом мы и займёмся в следующей главе.

6. Правильна также и вторая тенденция, не менее настойчиво проводимая в методических статьях. Мы имеем в виду попытки систематизации задач на составление уравнений.

„Общим правилам“ прежних учебников и методических руководств должна быть противопоставлена строго продуманная классификация задач, которая обеспечивала бы развитие навыка в их решении, последовательно повышая степень их трудности. Разработка на основе опыта наиболее целесообразной классификации составляет вторую насущную задачу современной методики алгебры.

Глава VI.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

Б. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ.

§ 29. Методический обзор.

Совершенно бесспорно, что наличие навыка в составлении алгебраических выражений является необходимым условием для овладения методом решения задач с помощью уравнений. Не менее очевидно, что существующая постановка преподавания алгебры в VI—VII классах средней школы не обеспечивает выработки этого ценного навыка: к изучению уравнений в VII классе учащиеся приступают почти совершенно беспомощными в этом отношении. Отсюда и вытекает выдвигаемое современной методической литературой единодушное требование введения системы специальных упражнений в составлении алгебраических выражений.

Но это единодушие кончается, как только вопрос переходит на практическую почву.

Большие разногласия имеют место в отношении содержания и объёма упражнений, а также по вопросу о том, когда следует проводить эти упражнения и сколько времени посвятить им.

Некоторые авторы[1]) полагают, что наибольшую трудность для учащихся представляет задача: выразить в алгебраической форме величину, находящуюся в данном разностном или кратном отношении к другой величине.

[1]) См. статьи: 1) Маергойза в журнале „Математика в школе“, № 5, 1936; 2) Костиной — там же, № 5, 1935.

Поэтому они считают достаточным посвятить перед решением задач на составление уравнений несколько часов упражнениям на усвоение понятий, „на столько-то больше, меньше“, „во столько-то раз больше, меньше“, и переводу их на алгебраический язык.

„Без чёткого усвоения этих понятий все дальнейшие занятия по составлению уравнений будут построены на песке. Поэтому не следует приступать к составлению уравнений до тех пор, пока все учащиеся твёрдо и чётко не усвоили этих понятий“ (Маергойз).

Упражнения должны быть примерно такого рода:

1. Одно число равно 5, другое в 3 раза больше. Определить второе число.

2. Одно число x, другое больше его на 2. Написать второе число. И т. п.

А. Горский[1]) также находит, что слабое усвоение учащимися разностных и кратных отношений является основным препятствием при составлении самого уравнения и потому предлагает провести ряд предварительных упражнений такого вида:

3. 5 больше 3 на 2. Составьте равенство $(5 = 3 + 2)$; $3 = 5 - 2$ и т. п.

4. a больше 5 на 3. Составьте равенство.

5. Составьте равенство, если:

1. $x < 12$ на 4.	**7.** $x < y$ на a.
2. $b > 6$ в 3 раза.	**8.** $b > c$ в 5 раз.
3. $y < 24$ в 8 раз.	**9.** $b < c$ в p раз.
4. $a > b$ в 2 раза.	**10.** $c < d$ в 2 раза.
5. $x < y$ на 4.	**11.** $c < d$ в q раз.
6. $a > b$ на c.	**12.** $a + b > 2a - 3b$ на c.

Можно согласиться с тем, что оперирование с величинами, находящимися в данном разностном или кратном отношении, наиболее туго даётся учащимся. Следовательно, упражнения приведённого типа имеют некоторую ценность. Но они далеко не достаточны уже потому, что не охватывают многих видов функциональной зависимости между величинами, которые встречаются в задачах.

Поэтому ряд авторов рекомендует в качестве пропедевтики к составлению уравнений решение примеров на составление алгебраических выражений, данных в двух первых параграфах задачника Шапошникова и Вальцова. Некоторые авторы добавляют к этим примерам специальные упражнения

---

[1]) „Математика в школе“, № 2, 1940.

на составление именно таких выражений, с которыми придётся встречаться при решении задач на составление уравнений. Например:

6. Сумма двух чисел равна 40. Одно из них x. Обозначьте второе слагаемое. Увеличьте первое слагаемое в 4 раза, а второе в 3 раза и обозначьте сумму полученных чисел.

7. Данно число a. Найти $\frac{2}{3}$ этого числа, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

Уменьшить число a на 15. Написать сумму чисел a, $\frac{2}{3}a$ и $a - 15$.

8. Даны числа a и b.

а) Найти $\frac{3}{4}$ их суммы; произведения.

б) На сколько первое число больше второго? Второе больше первого?

в) Какую часть всей суммы составляет первое число?

г) Найти процентное отношение первого числа ко второму; первого числа к сумме.

А. Лебедев[1]) проводит такие упражнения „*попутно* с решением уравнений, уделяя на это 10—15 минут в начале урока".

И. Браун[2]) полагает, что „упражнения эти можно проделать до составления уравнений, отводя на них по 5—10 минут на нескольких предыдущих уроках".

Все приведённые системы упражнений обладают двумя крупными недочётами.

Во-первых, все упражнения носят исключительно абстрактный характер: операции производятся над отвлечёнными числами. Лишь у И. Брауна имеется небольшое количество (всего 5) задач с конкретным содержанием, например:

9. Один рабочий может окончить некоторую работу в a час., другой в b час.

а) Какую часть работы сделает первый в 1 час? Второй в 5 часов?

б) Какую часть они вместе сделают в 1 час?

в) Через сколько часов они вместе сделают всю работу?

10. Переднее колесо экипажа имеет в окружности a *м*, заднее b *м* 20 *см*. Пройденное расстояние p *м*.

а) Сколько оборотов сделало переднее колесо? заднее?

б) На сколько переднее колесо сделало оборотов больше заднего?

А между тем в подавляющем большинстве задач ученик имеет дело именно с конкретными величинами, зависимость между которыми и нужно уметь выразить в математической

---

[1]) „Математика в школе", № 2, 1940.

[2]) Там же, № 5, 1936.

форме. Поэтому абстрактность предлагаемых упражнений значительно снижает их ценность.

Второй крупный недочёт — организационного порядка: все рекомендуемые упражнения проводятся в порядке, так сказать, „скорой помощи", непосредственно перед решением задач на составление уравнений без всякой связи с изучаемым в данный момент материалом.

Слишком малый отрезок времени, отводимый на упражнения, не позволяет, во-первых, дать их в достаточном количестве, во-вторых, — никак не обеспечивает прочность усвоения. Оторванность же их от изучаемой темы (алгебраические дроби) кладёт на них печать искусственности. Цель таких упражнений непонятна для учащихся, отсюда — отсутствие интереса к ним, что не может не отразиться на качестве усвоения.

Шаг вперёд делает В. Макаревич[1]), который рекомендует проводить упражнения в составлении алгебраических выражений на каждом уроке, начиная с первой четверти в VII классе.

Предлагаемые им упражнения носят в достаточной мере конкретный характер, например:

11. 5 *кг* сахару стоят x руб. Сколько стоит 1 *кг*? 3 *кг*? x *кг*? $(x-2)$ *кг*?

12. Сколько было рабочих, если каждый получил из общего заработка 480; x; $(x+4)$... руб., по 15; x; $(x-8)$... руб.?

13. Какая производительность молотилки, если 2, x; $(x-5)$ молотилок обмолачивают в день 180; x; $2x+19$ копён?

14. Перо дешевле резинки на 3; x; $\frac{15}{x}$ коп., а карандаш дороже пера в 5; x; $(x+6)$... раз. Что стоит каждая вещь в отдельности при цене резинки в 2; x; ... копеек?

Недостатком этих упражнений остаётся то, что они оторваны от изучаемой в данный момент темы.

М. Змиева[2]) первое время также проводила подготовительные упражнения к составлению уравнений лишь в VII классе, но её упражнения выгодно отличаются тем, что увязаны с изучаемой темой (разложение на множители, алгебраические дроби). На них мы подробнее остановимся в следующем параграфе.

Гораздо подробнее разработан вопрос о подготовительных упражнениях в статье В. Островского[3]). Автор совершенно

---

[1]) „Математика в школе", № 2, 1940.

[2]) Там же, № 5, 1935.

[3]) Там же, № 3, 1934.

правильно рассматривает этот вид упражнений в разрезе решения арифметических задач с буквенными данными. Это сразу придаёт упражнениям конкретный характер и ставит их в тесную связь с задачами на составление уравнений.

„Таким образом, составлению уравнений должно предшествовать решение таких (т. е. арифметических с буквенными данными. — *А. Б.*) задач, на составление буквенных формул для того, чтобы учащиеся освоились с буквенной символикой, притом настолько, чтобы уметь оперировать с буквами, в частности с буквой x, и выражениями, зависящими от них, как с данными арифметическими числами, и чтобы их не смущала кажущаяся неоконченность действий с буквами".

Автор даёт примеры задач разнообразных типов, причём разбивает их на следующие группы:

I. Задачи с явно выраженными данными.

Человек проходит в час 5 *км*. Сколько километров пройдёт он за t часов ($t = 0, 1, 2\ldots$)?

Записать в виде формулы, что длина окружности c в 3,14 раза больше своего диаметра.

II. Задачи без формулированного вопроса.

Что можно определить и как, используя все данные: на обивку каждого из x ящиков идёт 20 гвоздей?

III. Задачи, требующие введения в их условие известного, но не обозначенного аргумента (?).

Определить среднюю убыль воды в реке за 1 час, если известна убыль её за t часов.

IV. Задачи с неявно выраженными данными.

Один из смежных углов содержит a°. Сколько градусов в другом угле?

V. Задачи с недостающими данными.

Сколько оборотов сделает колесо автомобиля на расстоянии 120 *м*?

VI. Задачи с лишними данными.

Гребец проплыл в лодке 20 *км* со скоростью v *км* в час. Какова скорость гребца в стоячей воде (или против течения), если скорость течения 2 *км* в час? (Очевидно, в условии пропущено указание, что гребец плыл по течению. — *А. Б.*)

Такая группировка задач стоит в тесной связи с методом, который рекомендует автор для привития навыка в составлении уравнений. Метод этот лучше всего уяснится на примере, данном самим автором.

Пусть дана задача:

„Из города выехала двуколка вслед за пешим отрядом, который уже отошёл от города на 9 *км*. Через сколько времени двуколка догонит отряд, если она проезжает в час 7 *км*, а отряд движется со скоростью 4 *км* в час?“

Автор разбивает эту задачу на две:

1. „Из города выехала двуколка вслед за пешим отрядом со скоростью 7 *км* в час. На каком расстоянии от города она окажется через x часов?

2. „Когда двуколка выехала из города, отряд был от него уже на расстоянии 9 *км*, а затем шёл ещё x часов со скоростью 4 *км* в час. На каком расстоянии от города он окажется через x часов?

Получаются решения:

$$1.\ y_1 = 7x. \qquad 2.\ y_2 = 4x + 9.$$

Затем предъявляется требование — найти то значение x, при котором оба расстояния y_1 и y_2 оказываются равными. Получается уравнение:

$$7x = 4x + 9.$$

Таким образом, составление уравнения сводится к расчленению задачи (автор называет расчленённую таким образом задачу „производной“ формулировкой), составлению двух функций и последующему приравниванию их.

Каждая группа рекомендуемых автором задач оказывает помощь в овладении той или иной стадией описанного процесса. Так, задачи 2-й группы помогают сформулировать вопрос в каждой из „производных“ задач. Задачи 3-й группы приучают к обозначению неизвестного и введению его в задачу в виде данной величины для составления „производной“ задачи. 6-я группа опять-таки помогает при составлении задач в „производной“ формулировке „отделять данные необходимые и достаточные для составления одной формулы от данных, необходимых и достаточных для составления другой формулы“ и т. д.

Нетрудно видеть, что предлагаемый В. Островским приём сводится в итоге к рассмотренному нами уже второму „общему правилу“: выразить одну и ту же величину в двух видах. Проводимое же автором расчленение задачи на две едва ли вносит существенное упрощение, в то же время усложняя и удлиняя процесс решения задачи.

Но независимо от способа составления уравнения, упражнения, рекомендуемые автором, несомненно, значительно облегчат учащимся овладение методом решения задач путём составления уравнений.

К сожалению, остаётся неясным вопрос, как распределяет автор во времени решение арифметических задач. Из приведённой выше цитаты (стр. 192) можно заключить, что автор отводит им время, непосредственно предшествующее решению задач на составление уравнений. Но это находится в противоречии с тем, что автор решение арифметических задач ставит в самую тесную связь с изучением буквенной символики: „изучение буквенной символики необходимо построить на решении буквенных задач на составление формул“, что, очевидно, предполагает решение таких задач с первых же уроков алгебры.

Ничего не говорится и о том, в какой взаимосвязи находятся между собой задачи различных групп: решаются ли они последовательно, начиная с 1-й группы, или задачи различных групп перемежаются друг с другом.

Наконец, ничего не сказано и о связи арифметических задач с изучаемым алгебраическим материалом.

Наиболее детально разработан вопрос о подготовительных упражнениях в брошюре В. Репьева „Решение задач с помощью уравнений“.

Автор правильно указывает, что такого рода упражнения имеют вообще ценность при изучении алгебры, независимо от задач на составление уравнений. Поэтому он совершенно определённо стоит на той точке зрения, что эти упражнения должны вводиться с первых уроков алгебры, систематически проводиться на протяжении VI и VII классов, а в случае надобности и в VIII классе.

Автор признаёт также, что „в известной мере эти упражнения можно разработать так, чтобы они не были материалом, совершенно не связанным с изучаемой главой курса, а помогали бы учащимся осознавать теорию этих глав и давали материал для применения теории к практике“. К сожалению, автор не показывает конкретно, как эту увязку можно осуществить. Приводимый им единственный пример — известная геометрическая иллюстрация дистрибутивного закона $(a+b)c = ac + bc$ (вычисление площади прямоугольника), — конечно, не разрешает этого вопроса.

Рекомендуя для подготовительных упражнений отводить 7—10 минут в начале или конце каждого урока, автор сам отрывает их от основного содержания урока.

Наконец, приводимая автором система примерных подготовительных упражнений ни в коей мере не отражает увязку их с курсом и не даёт в этом отношении никаких указаний.

Автор делит упражнения на группы по типам задач, элементами которых эти упражнения являются; каждая группа разбивается на несколько отдельных занятий. Получается такая схема:

1. Разностное и кратное сравнение чисел	6	занятий
2. Зависимость между компонентами и результатами действий	6	,,
3. Изменение результатов действий в зависимости от изменения компонента	4	,,
4. Купля-продажа	4	,,
5. Процентные расчёты	5	,,
6. Дроби	4	,,
7. Целое число в десятичной системе счисления	5	,,
8. Равномерное движение	3	,,
9. Бассейны	4	,,
10. Рычаги	3	,,
11. Зависимость между временем и числом рабочих для выполнения определённой работы	4	,,

Отметим, что в ряде разделов (1, 2, 3, 6, 11) задачи носят исключительно абстрактный характер („увеличить число a на 2“ и т. п.).

Подводя итоги сделанному обзору, можем констатировать, что методическая мысль шла по верному пути:

1. Выдвигая арифметические задачи в качестве основного материала для упражнений.

2. Распространяя эти упражнения на весь курс алгебры VI—VII классов.

3. Проявляя тенденцию к увязке упражнений с изучаемыми темами курса алгебры.

§ 30. Арифметические задачи с буквенными данными.

Из только что перечисленных нами трёх моментов, определяющих характер и объём подготовительных упражнений к составлению уравнений, наиболее слабое отражение в методической литературе получил последний — требование увязки упражнений со всем курсом алгебры VI—VII классов. А между тем этот пункт, как уже указывалось нами (§ 5), является весьма существенным. Именно при этом условии целесообразно подобранные задачи перестают быть только „подготовительными“ упражнениями к составлению уравнений, на которые „отводятся 10—15 минут в начале или в конце урока“, но служат таким же орудием для усвоения теории, как хотя бы те же задачи на составление уравнений.

В наибольшей степени эта увязка была осуществлена М. И. Змиевой, учительницей Яснополянской школы имени Л. Н. Толстого[1]). Обследование двух школ в начале 1934/35 учебного года показало, что учащиеся крайне слабо владеют навыками в составлении алгебраических выражений.

Для ликвидации этого недочёта группой учителей во главе с т. Змиевой и была разработана система упражнений, причём с самого начала было поставлено требование, чтобы „эти упражнения не были посторонним материалом, а помогали учащимся видеть на практике применение тождественных преобразований“.

Дальнейшая работа по расширению системы упражнений на весь курс алгебры VI—VII классов проводилась совместно автором настоящей книги и М. И. Змиевой.

В итоге получился как бы „сборник задач“ (именно задач, а не упражнений) по курсу алгебры VI—VII классов, значительную часть которых мы и приводим ниже.

Для того чтобы использовать предлагаемые здесь упражнения наиболее эффективным образом, преподаватель должен иметь в виду следующее:

1. Приведённые ниже задачи охватывают все основные виды зависимостей между величинами, встречающиеся в задачах на составление уравнений.

Из экономии места мы не могли дать здесь достаточное количество более или менее однородных задач на составление различных вариантов одного и того же алгебраического выражения. Каждый преподаватель должен сам добавить потребное количество задач. Сделать это можно такими способами:

а) Составить ряд задач, приводящих к тому же выражению, что и данная задача, но с другой фабулой. Например, задача:

„Один рабочий получал 9 руб. в день и работал a дней, другой получал 11 руб. в день и работал b дней. Сколько заработали оба рабочих вместе?“

допускает такие варианты:

[1]) М. Змиева, Опыт подготовки учащихся к составлению уравнений первой степени, „Математика в школе“, № 5, 1935.

„Ученик купил m тетрадей по 20 коп. за тетрадь и n карандашей по 18 коп. за карандаш. Сколько заплатил он за всю покупку?"

„Смешано p *кг* печенья по 8 руб. за килограмм и q *кг* по 6 руб. Сколько стоит вся смесь?"

И т. п.

б) В данной задаче можно варьировать числовые и буквенные данные, что не меняет хода решения, но несколько меняет вид получаемого выражения. Пример такого варьирования дают ниже задачи №№ 61 и 62.

в) В особенности следует использовать приводимые ниже задачи с буквенными данными, заменяя в них частично и полностью буквы числами.

Дополнительные задачи особенно необходимы для задач, в той или иной мере затрудняющих учеников.

Понятно, что можно только приветствовать, если преподаватель составит ряд новых задач, в особенности на те разделы тождественных преобразований, на которые здесь их приведено недостаточно.

2. Для составления уравнений особенно ценны задачи первого и второго (и отчасти восьмого) разделов, так как они включают наиболее типичные формы зависимостей между данными и искомыми величинами, и в выражении именно этих зависимостей (разностное и кратное отношения) наиболее часто путаются ученики.

Поэтому задачи этих разделов должны быть дополнены значительным количеством вариантов, и к ним следует возвращаться систематически на протяжении всего курса VI и VII классов.

В частности пятую группу задач первого раздела можно почти полностью отнести к разделу „Отрицательные числа" и давать в дальнейшем аналогичные задачи.

3. Задачи должны решаться на каждом уроке параллельно с решением упражнений из задачника; они даются при опросе ученика у доски, включаются в домашние задания и входят составной частью в контрольные работы по всем разделам алгебры.

Так как при задании на дом приходится задачи диктовать с записью на доске (если невозможно заранее отпечатать их в нужном количестве для раздачи на руки), то из экономии времени нужно выбирать для этого задачи с более коротким текстом.

4. Если ученик затрудняется решить ту или иную задачу, то следует заменить буквенные данные числовыми, запи-

сать решение новой задачи в виде формулы и затем уже решать первую задачу, повторив снова все рассуждения.

5. Подстановка различных числовых значений в решение *каждой* задачи на первых порах является совершенно обязательным. При этом полезно на первых уроках, давая числовые значения буквам, повторить задачу с этими данными, решать же её подстановкой числовых значений в полученное уже буквенное выражение. В дальнейшем прибегать к числовым подстановкам следует: при переходе к решению задач нового типа, в сложных задачах, в задачах, задаваемых на дом.

6. Предлагаемый ниже подбор задач не предполагает какой-либо предварительной подготовки ученика в пользовании буквенными обозначениями. Но несомненно, что усвоение первых уроков алгебры будет в громадной мере облегчено, если ученик уже обладает хотя бы очень небольшим опытом в употреблении букв и в составлении формул. Поэтому следует предъявлять самое настойчивое требование к учителям младших классов (главным образом IV и V), чтобы они на уроках арифметики систематически проводили упражнения, которые служили бы подготовительной ступенью для перехода к алгебре. В качестве минимума можно указать на такие виды упражнений:

а) Систематически практиковать составление числовых формул решения задач.

Для IV класса можно давать для этой цели задачи в 2—3 действия, для V класса — в 3—5 действий.

б) Решать элементарные уравнения, имеющиеся в задачниках уже III класса (примеры на нахождение неизвестного компонента).

При этом в V классе следует добиваться того, чтобы учащиеся вполне ясно осознали две вещи: 1) что в решаемых ими примерах (например $x + 137 = 452$) буквой обозначено некоторое определённое, пока не известное число; 2) что совсем не обязательно это число обозначать именно буквой x; можно для этой цели взять любую другую букву (например $a + 137 = 452$); непременно следует прорешать несколько пар примеров, отличающихся один от другого только буквой.

в) Употреблять в V классе буквенные обозначения для записи правил и свойств арифметических действий (переместительный закон, правило умножения дроби на дробь, пропорция и её основное свойство и т. п.).

I. Буквенные выражения.

А. Употребление букв. Численная величина буквенного выражения.

1.

1. Рабочий получает в день 8 руб. зарплаты. Сколько он получит за 5 дней? за 90 дней? за k дней?

2. На одной полке лежит m книг, а на другой в 3 раза больше. Сколько книг на другой полке? $m=8$; 15.

3. Рабочий работал 3 дня. Сколько он получал за день, если всего получил 21 руб.? 30 руб.? x руб.?

4. Дано число p. Написать число, в 7 раз большее.

5. Дано число p. Написать число в два раза меньшее.

Целое или дробное будет найденное число? (Проверить при $p=4$; 5; 6; 17).

6. Прямоугольник имеет в длину 6 *см*, а в ширину a *см*. Какова его площадь?

7. Число при делении на b даёт в частном 4. Написать это число.

8. Куплено 5 карандашей и заплачено b коп. Сколько стоит один карандаш?

9. На 120 руб. куплено k *м* мануфактуры. Сколько стоит 1 *м*?

10. Рабочий сделал 150 деталей за n часов. Сколько деталей в среднем делал он за 1 час?

11. Рабочий выполнил порученную работу в n часов. Какую часть работы выполнял он за 1 час?

12. В одной корзине m яблок; в другой в 2 раза, а в третьей в 3 раза больше, чем в первой. Сколько было яблок во второй корзине? в третьей корзине?

13. Деду k лет. Сын вдвое, а внук в 6 раз моложе деда. Сколько лет сыну и сколько лет внуку?

14. На одном складе x кубометров дров, на другом в 3 раза больше, а на третьем в 3 раза меньше, чем на первом. Сколько дров на каждом складе?

15. В одной школе a учеников; в другой вдвое меньше, а в третьей вчетверо больше, чем в первой. Сколько учеников в каждой школе?

Приводим ответы для того, чтобы нагляднее показать структуру задач каждой группы и последовательное усложнение их.

Ответы.

1. $8k$. **2.** $3m$. **3.** $\frac{x}{3}$. **4.** $7p$. **5.** $\frac{p}{2}$. **6.** $6a$. **7.** $4b$. **8.** $\frac{b}{5}$. **9.** $\frac{120}{k}$. **10.** $\frac{150}{n}$. **11.** $\frac{1}{n}$. **12.** $2m$; $3m$. **13.** $\frac{k}{2}$; $\frac{k}{6}$. **14.** x; $3x$; $\frac{x}{3}$. **15.** a; $\frac{a}{2}$; $4a$.

2.

16. Написать сумму чисел m и 5.

17. В одном классе p учеников, а в другом на 4 ученика больше. Сколько учеников во втором классе?

18. Брату 8 лет, а сестра на c лет старше. Сколько лет сестре?

19. Брату k лет, а сестра на 3 года моложе. Сколько лет сестре?

20. В одном колхозе 80 коров, а в другом на x меньше. Сколько коров во втором колхозе?

21. Сумма двух чисел равна 30; одно из них равно a. Найти другое число.

22. Разность двух чисел равна 5. Меньшее равно b. Найти большее число.

23. Разность двух чисел равна 5. Большее равно c. Найти меньшее число.

24. В двух корзинах лежит n яблок. В первой 35 яблок. Сколько яблок во второй корзине?

25. В одном ящике 10 *кг* гвоздей, в другом 40 *кг*. Сколько будет в каждом, если из второго переложить в первый x *кг*?

26. В двух параллельных классах по x учеников. Из одного класса перевели в другой одного ученика. Сколько учеников стало в каждом классе?

27. Кипы хлопка находятся в 3 амбарах. После того как из второго переложили в третий 2 кипы, в каждом амбаре стало по y кип. Сколько кип было в каждом амбаре сначала?

28. Пятый класс собрал p *кг* металлического лома. Шестой класс собрал на 20 *кг* больше, а седьмой на 8 *кг* меньше, чем пятый. Сколько лома собрал каждый класс?

Ответы.

16. $m + 5$. **17.** $p + 4$. **18.** $8 + c$. **19.** $k - 3$. **20.** $80 - x$. **21.** $30 - a$.
22. $b + 5$. **23.** $c - 5$. **24.** $n - 35$. **25.** $10 + x$; $40 - x$. **26.** $x - 1$; $x + 1$.
27. y; $y + 2$; $y - 2$. **28.** p; $p + 20$; $p - 8$.

3.

29. На одной полке a книг, на другой 23, а на третьей 19. Сколько книг на всех трёх полках?

30. Рабочий вырабатывал в день 15 деталей, получал за каждую деталь 2 руб. Сколько он заработал за m дней?

31. В первом классе k учеников; во втором на 5 учеников больше, чем в первом, а в третьем на 2 ученика меньше, чем во втором. Сколько учеников в третьем классе?

32. Машинистка за 8 час. печатает a листов. Сколько листов в среднем она печатает в 1 час? в 5 часов?

33. Машинистка за k час. напечатала 40 листов. Сколько листов в среднем она перепечатала за 1 час? за 3 часа?

34. Машинистка печатала рукопись в t часов. Какую часть рукописи она перепечатала за 1 час? за 4 часа?

35. От одного города до другого 115 *км*. Во сколько дней пройдёт это расстояние путешественник, если каждый день он идёт по p часов, делая 4 *км* в час?

Ответы.

29. $a+23+19=a+42$. **30.** $2\cdot 15\cdot m=30m$. **31.** $k+5-2=k+3$.

32. $\frac{a}{8}$; $\frac{5a}{8}$. **33.** $\frac{40}{k}$; $\frac{40\cdot 3}{k}=\frac{120}{k}$. **34.** $\frac{1}{t}$; $\frac{4}{t}$. **35.** $\frac{115}{4p}$.

Примечание. Здесь и в последующих задачах мы иногда даём не только окончательный ответ, но показываем отдельные этапы решения.

36. Резинка стоит b коп. Карандаш стоит на 2 коп. дороже, а тетрадь в 2 раза дороже. Сколько стоит каждая вещь? ($b=8$; 10.)

37. Коле p лет. Брат в 2 раза, а сестра на 2 года моложе Коли. Сколько лет каждому?

38. В трёх корзинах лежат яблоки. В первой корзине x яблок; во второй в 3 раза больше, а в третьей $\frac{3}{4}$ того, что во второй. Сколько яблок в каждой корзине?

39. В одной стопе d тетрадей, в другой в 3 раза больше. Сколько будет в каждой, если из большей переложить в меньшую 8 тетрадей?

40. В одном резервуаре x *л* воды, в другом вдвое меньше. Сколько будет в каждом, если из большего в меньший перелить 10 *л*?

41. Число при делении на x даёт в частном 3 и в остатке 5. Написать это число ($x=7$; 10; 19).

42. Один рабочий получал 7 руб. в день и работал 8 дней. Другой получал 9 руб. в день и работал a дней. Сколько заработали оба вместе?

43. В классе a скамеек; если на каждую посадить по 3 ученика, то 2 ученика останутся без места. Сколько в классе учеников?

44. В классе b скамеек; если на каждую посадить по 3 ученика, то 2 места останутся свободными. Сколько в классе учеников?

45. Ученик имел a коп. За 15 коп. он купил карандаш, а на остальные деньги — тетрадей по 10 коп. за тетрадь. Сколько тетрадей он купил?

($a=55$ коп.; 75 коп.; 45 коп.).

46. Одно число равно x. Другое на 18 больше. Найти отношение большего числа к меньшему

($x=6$; 9; 12; 20).

47. Два числа в сумме дают 45. Одно из них равно x. Найти отношение этого числа ко второму

($x=30$; 22; 5; 15).

48. Себестоимость товара a руб. При продаже было получено 12 % прибыли. Сколько рублей прибыли получено?

49. Себестоимость товара m руб. При продаже было получено 8 % прибыли. За сколько был продан товар?

50. Товар продан за a руб., причём получено 12 % прибыли. Какова себестоимость товара?

Ответы.

36. b; $b+2$; $2b$.

37. p; $\frac{p}{2}$; $p-2$.

38. x; $3x$; $\frac{9}{4}x$.

39. $d+8$; $3d-8$.

40. $x-10$; $\frac{x}{2}+10$.

41. $3x+5$.

42. $7\cdot 8+9a=56+9a$.

43. $3a+2$.

44. $3b-2$.

45. $\frac{a-15}{10}$.

46. $\frac{x+18}{x}$.

47. $\frac{x}{45-x}$.

48. $\frac{12a}{100}$.

49. $\frac{108m}{100}$.

50. $\frac{100a}{112}$.

51. У одного ученика x, а у другого y тетрадей. Сколько тетрадей у обоих?

52. Один *кг* сахару стоит m руб. Сколько стоят p *кг*?

53. Брату a лет, а сестра на b лет моложе. Сколько лет сестре?

54. Кооператив продал a *м* мануфактуры по 9 руб. за метр и b *м* по 7 руб. за метр. Сколько получил кооператив за всю проданную мануфактуру?

55. Рабочий, проработав m дней, получил зарплату по 12 руб. в день, да ещё ему уплатили долгу n руб. Сколько у рабочего стало денег?

56. Бригада из пяти рабочих получила a руб. Из этих денег они отчислили в фонд Советской Армии b руб., а остальные разделили поровну. Сколько досталось каждому?

57. Сколько копеек содержится в p рублях и q копейках?

58. Сколько единиц содержит число, имеющее a десятков и b единиц? Сколько единиц будет в числе, которое получим, если в данном числе переставим цифры десятков и единиц?

59. Сколько единиц в числе, состоящем из a сотен, b десятков и c единиц?

Сколько будет единиц, если цифры данного числа напишем в обратном порядке?

60. Из двух пунктов, находящихся на расстоянии 120 *км*, выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного a *км*, другого b *км* в час. Через сколько часов они встретятся?

61. Смешано 5 *кг* чаю по a и 8 *кг* по b руб. за килограмм. Сколько стоит килограмм смеси?

62. Смешано m *кг* чаю по 17 руб. и n *кг* по 25 руб. за килограмм. Сколько стоит килограмм смеси?

63. Со станции вышел товарный поезд, делающий a *км* в час. Через 5 час. вслед за ним с той же станции вышел пассажирский поезд, скорость которого на c *км* в час больше. Через сколько часов второй поезд догонит первый?

64. Со станции вышел товарный поезд со скоростью a *км* в час. Через 7 час. вслед за ним с той же станции вышел пассажирский поезд, идущий со скоростью b *км* в час. Через сколько часов второй поезд догонит первый?

65. Определить объём комнаты, если её длина равна a *м*, ширина b *м* и высота c *м*.

66. Сколько нужно подвод, чтобы перевезти k мешков картофеля по m *кг* в каждом мешке, если на каждую подводу класть по n *кг*?

67. Рабочий, проработав m дней, получил по a руб. за день. Из этих денег он уплатил за квартиру c руб. Сколько денег у него осталось?

68. Бригада в a человек за b дней заработала c руб. Каков в среднем дневной заработок каждого члена бригады?

69. В двух ящиках m *кг* чаю. Если из первого переложить во второй a *кг*, то в обоих будет поровну. Сколько чаю в каждом ящике?

70. В трёх корзинах a яблок. Во второй вдвое, а в третьей вчетверо больше, чем в первой. Сколько яблок в каждой?

71. Длины трёх железных дорог относятся как $7:3:1$. Вторая дорога на a *км* длиннее третьей. Какова длина каждой дороги?

72. Для обмундирования необходимо было a *м* мануфактуры шириной b *см*. Вместо этого приобрели ткань шириной в n *см*. Какова длина этой ткани?

73. a человек вырубили участок леса в b дней. Сколько нужно человек, чтобы вырубить такой же участок на c дней скорее?

74. Одна косилка может скосить a *га* в t час. Сколько времени нужно, чтобы тремя косилками скосить b *га*?

75. Для окраски 15 *кв. м* пола требуется 2,1 *кг* охры. Сколько охры потребуется на окраску пола в комнате размером a *м* $\times$ b *м*?

76. Зубчатое колесо имеет a зубцов и делает t оборотов в минуту. Сколько оборотов в минуту сделает колесо с 25 зубцами, сцеплённое с первым?

77. Вода поднимается в час на a футов. Через сколько часов затопит она плотину, имеющую m футов вышины, если вода дошла уже до высоты c футов? (Евтушевский).

78. Заготовлен уголь на m дней при ежедневном расходе в a *кг*. На сколько дней хватит угля, если ежедневный расход уменьшить на d *кг*?

79. Кооператив получил две кипы мануфактуры общим количеством a *м*, всего на сумму b руб. Одна кипа в c *м* ценой t руб. за метр. Сколько стоил один метр другой кипы?

80. Куплено a пудов сена на b рублей; каждый день расходуют на c руб. Сколько пудов останется через k дней? (Евтушевский).

Ответы.

51. $x+y$. **52.** mp. **53.** $a-b$. **54.** $9a+7b$. **55.** $12m+n$. **56.** $\frac{a-b}{5}$. **57.** $100p+q$. **58.** $10a+b$; $10b+a$. **59.** $100a+10b+c$; $100c+10b+a$. **60.** $\frac{120}{a+b}$. **61.** $\frac{5a+8b}{13}$. **62.** $\frac{17m+25n}{m+n}$.

63. $\frac{5a}{c}$. **64.** $\frac{7a}{b-a}$. **65.** abc. **66.** $\frac{mk}{n}$. **67.** $ma-c$. **68.** $\frac{c}{ab}$.

69. $\frac{m}{2}+a$; $\frac{m}{2}-a$. **70.** $\frac{a}{7}$; $\frac{2a}{7}$; $\frac{4a}{7}$. **71.** $\frac{7a}{2}$; $\frac{3a}{2}$; $\frac{a}{2}$.

72. $\frac{100\,ma}{n}$. **73.** $\frac{ab}{b-c}$. **74.** $\frac{bt}{3a}$. **75.** $\frac{2{,}1\,ab}{15}$. **76.** $\frac{at}{25}$. **77.** $\frac{m-c}{a}$.

78. $\frac{ma}{a-d}$. **79.** $\frac{b-ct}{a-c}$. **80.** $a-\frac{ack}{b}$.

Б. Понятие о возвышении в степень.

81. Длина и ширина комнаты содержит по k *м*. Чему равна площадь пола?

82. Длина комнаты x *м*, а ширина и высота по a *м*. Найти площадь каждой стены.

83. Из доски нарезали 8 квадратиков со стороной в x *см* и 5 со стороной в y *см*. Какова площадь доски?

84. Рабочий проработал c дней по c часов в день, зарабатывая в среднем по 8 руб. в час. Сколько он заработал?

85. Ребро одного квадрата равно a *см*, а другое на 3 *см* больше. Чему равна площадь другого квадрата?

86. Стаканы разложены в k ящиков по k дюжин в каждом. Дюжина стаканов стоит k руб. Сколько стоят все стаканы?

87. Бригада в a человек работала a дней по a часов в день. За каждый час каждому рабочему заплачено по 3 руб. Сколько получила вся бригада?

88. Ширина прямоугольного участка земли a *м*, длина в 3 раза больше ширины. Какова площадь участка?

89. Длина прямоугольного участка земли a *м*, ширина составляет $\frac{2}{3}$ длины. Какова площадь участка?

90. Длина прямоугольного участка x *м*, ширина составляет $\frac{3}{4}$ длины. Сколько семян потребуется для засева этого участка, если на 1 *кв. м* требуется $3\frac{1}{2}$ *г* семян?

Ответы.

81. k^2. **82.** xa; a^2; xa; a^2. **83.** $8x^2+5y^2$. **84.** $8c^2$. **85.** $(a+3)^2$. **86.** k^3. **87.** $3a^3$. **88.** $3a^2$. **89.** $\frac{2}{3}a^2$. **90.** $\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2=\frac{21}{8}x^2$.

В. Порядок действий.

91. На складе было a *ц* угля. В течение k дней на склад привозили ещё по b *ц* ежедневно. Сколько стало угля на складе?

92. Расстояние между городами d *км*. Велосипедист ехал из одного города в другой, проезжая по a *км* в час. Сколько ему осталось ехать через t часов?

93. Из двух городов выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Один ехал со скоростью m *км*, другой n *км* в час. Через p часов они встретились. Чему равно расстояние между городами? (Решить двумя способами.)

94. Урожай пшеницы был в среднем a *ц* с *га*. Сколько пшеницы собрано с квадратного поля, каждая сторона которого равна b *м*? ($a=30$, $b=200$ *м*.)

95. Побелка стен комнаты, ширина и длина которой l *м*, стоила m руб. Покраска пола обошлась в a руб. за 1 $м^2$. Сколько стоил весь ремонт?

Ответы.

91. $a+bk$. **92.** $d+at$. **93.** $mp+np$; $(m+n)p$. **94.** $\frac{ab^2}{10\,000}$. **95.** $m+al^2$.

Примечание. В каждой из задач буквам даются числовые значения и устанавливается порядок действий. Задача 93 даёт пример употребления скобок при нарушении нормального порядка действий. Для этой же темы могут быть использованы задачи №№ 42, 47, 61, 62, 64, 78, 80 и др.

Г. Свойства арифметических действий.

96. У одного ученика 5 тетрадей, а у другого на k тетрадей больше. Сколько тетрадей у второго? Сколько у обоих?

97. В магазине было 27 *кг* чаю. Привезли ещё два ящика: в одном из них было x *кг*, в другом 16 *кг*. Сколько чаю привезли в магазин? Сколько стало чаю в магазине?

98. От верёвки длиной в l *м* отрезали сначала a *м*, а потом ещё b *м*. Сколько метров отрезали в оба раза? Сколько метров осталось?

99—100. Брат и сестра собирали в лесу грибы. Брат нашёл a грибов, а сестра b грибов. Но у неё 4 гриба оказались червивыми, и она их выбросила.

1) Сколько всего грибов они принесли домой?

2) На сколько больше брат принёс домой грибов, чем сестра? (Обе задачи решить двумя способами.)

101. Из Москвы в Харьков вышли одновременно пассажирский и товарный поезда. Первый проходил в среднем (включая остановки) a *км* в час, второй b *км* в час. Насколько пассажирский поезд будет дальше от Москвы, чем товарный, через t часов? (Решить двумя способами.)

102. Лист железа имеет в длину m *см* и в ширину n *см*. На покрытие крыши потребовалось n таких листов. Какова площадь крыши? ($m=80$, $n=120$.)

103. Один рабочий заработал за месяц a руб., другой b руб. Каждый из них внёс на постройку самолёта двенадцатую часть своего заработка. Сколько внесли они оба? (Решить двумя способами.)

Ответы.

96. $5+k$; $5+(5+k)=5+5+k=10+k$. **97.** $x+16$; $27+(x+16)=27+16+x=43+x$. **98.** $a+b$; $l-(a+b)=l-a-b$. **99.** $a+(b-4)=a+b-4$. **100.** $a-(b-4)=a-b+4$. **101.** $(a-b)t=at-bt$. **102.** $mn\cdot n=mn^2$. **103.** $\frac{a+b}{12}$; $\frac{a}{12}+\frac{b}{12}$.

Примечание. При решении каждой задачи выясняется, какие свойства действий применяются при преобразованиях полученного выражения. Так, в № 96 применяется правило прибавления суммы и сочетательное свойство сложения; в № 97 — прибавление суммы, переместительное и сочетательное свойства и т. д.

Правильность результатов проверяется подстановкой числовых данных. Здесь же можно использовать задачи №№72 (разделить произведение), 93 (распределительное свойство), 94 и др.

II. Отрицательные числа.

1. Одному ученику a лет, другому b лет. На сколько лет первый старше второго? ($a = 13, b = 11$; $a = 10, b = 10$; $a = 10, b = 12$.)

2. Термометр показывал в полдень m° тепла, а к вечеру температура понизилась на n°. Какую температуру показывал термометр вечером? ($m = 5,\ n = 3$; $m = 5,\ n = 5$; $m = 5,\ n = 7$.)

3. На остановке трамвая в вагон вошло p и сошло q пассажиров. На сколько увеличилось количество пассажиров в вагоне? ($p = 8,\ q = 3$; $p = 6,\ q = 6$; $p = 5,\ q = 8$; $p = 4,\ q = 9$.)

4. Барка прошла на буксире от пристани вверх по течению a *км*. Затем вследствие обрыва каната барку протащило течением вниз на b *км*. Где остановилась барка? ($a=5, b=3$; $a=5, b=5$; $a=5, b=8$.)

5. За один год в городе прибавилось k жителей, но в тот же период выбыло l жителей. На сколько увеличилось население города? ($k = 2043,\ l = 1768$; $k = 1340,\ l = 1720$.)

6. Два велосипедиста прибыли в город, один в a час., другой в b час. пополудни. На сколько часов первый велосипедист прибыл раньше второго? ($a = 5,\ b = 9$; $a = 8,\ b = 3$.)

7. Одна деревня расположена на холме на высоте x *м* над уровнем моря, другая — в долине, ниже первой на y *м*. На какой высоте над уровнем моря расположена вторая деревня? ($x = 200$, $y = 205$.)

8. Термометр показывал t°, а затем температура повысилась на r°. Какую температуру показывает термометр теперь?

Разобрать случаи:

t	5	5	3	4	-7	-7	-8
r	3	-2	-5	-4	2	9	-2

и т. п.

Проиллюстрировать на модели термометра.

9. Паровоз, маневрируя на станции Бологое, прошёл по направлению к Ленинграду d *м*, а затем продвинулся ещё на r *м*. Где он остановился? (Направление от Бологого к Ленинграду считать положительным.)

10. Кооператив получил прибыли за январь x руб., за февраль y руб. и за март z руб. Сколько прибыли получил кооператив за квартал?

11. Поезд шёл из Москвы в Горький. На перегоне Москва — Павлово количество пассажиров увеличилось на a человек, на перегоне Павлово — Владимир — на b. Владимир — Вязники — на c, Вязники — Гороховец — на d и Гороховец — Горький — на e человек. На сколько больше сошло пассажиров в Горьком, чем село в Москве?

12. Термометр показывал $t°$, а затем температура понизилась на $r°$. Какую температуру показывает теперь термометр? Разобрать случаи:

t	6	5	3	-2	4	-3	-3
r	4	5	6	5	-3	-2	-5

и т. д.

Показать на модели.

13. Поезд в настоящую минуту находится в x *км* от станции Бологое, а через час уже был в y *км* от неё. На сколько километров и в каком направлении продвинулся поезд за этот час? (Направление к Ленинграду считать положительным. $x = 20$, $y = 60$; $x = -10$, $y = 30$; $x = -10$, $y = -50$ и т. п.)

14. Температура воздуха возрастает каждый час на $n°$. В настоящий момент термометр показывает 0°. Какая температура будет через t часов?

15. Пловец плывёт от купальни по озеру вдоль берега со скоростью v *м* в минуту. На каком расстоянии и в какую сторону от купальни он будет через t минут? (Направление вправо от купальни считать положительным.)

16. Температура воздуха была 0°, а через t часов термометр показывал $s°$. На сколько градусов в среднем поднималась температура каждый час?

17. Велосипедист едет мимо деревни со скоростью d *км* в час. Через сколько часов он будет на расстоянии s *км* от деревни? (Направление от деревни к югу считать положительным.)

18. Термометр показывает $a°$, и температура повышается в среднем на $r°$ в час. Какая температура будет через n часов?.

a	5	7	5	7	5	-7	-11	-5	-5	-9
r	2	-2	-2	2	2	2	2	-2	-2	-2
n	3	2	3	-3	-3	4	3	2	-3	-5

и т. д.

19. Поезд находится к югу от станции на расстоянии s *км* и приближается к ней со средней скоростью v *км* в час. На каком расстоянии и в каком направлении от станции будет поезд через k часов?

20. Термометр показывал $x°$, а через m часов $y°$. На сколько градусов в среднем повышалась температура каждый час?

Ответы.

1. $a - b$. **2.** $m - n$. **3.** $p - q$. **4.** $a - b$. **5.** $k - l$. **6.** $b - a$. **7.** $x - y$. **8.** $t + r$. **9.** $d + r$. **10.** $x + y + z$. **11.** $a + b + c + d + e$. **12.** $t - r$. **13.** $x - y$. **14.** nt. **15.** vt. **16.** $\frac{s}{t}$. **17.** $\frac{s}{d}$. **18.** $a + rn$. **19.** $s - vk$. **20.** $\frac{y - x}{m}$.

Во всех задачах нужно получить решение в общем виде и затем применять его к различным комбинациям числовых значений букв, прибегая каждый раз к наглядной иллюстрации. Понятно, что никаким образом не следует в задачах №№ 8—20 сразу задавать всевозможные комбинации. Тогда для одной задачи нехватило бы целого урока. Каждая комбинация числовых данных представляет отдельную задачу и мы объединили их в целях экономии места, тем более что это допускает однородное содержание их. Ученику при опросе зачитывается задача и предлагается найти численное значение ответа для одной-двух комбинаций числовых значений букв. На дом можно задать три-четыре комбинации.

На каждое из четырёх действий здесь фигурирует задача на изменение температуры, как наиболее типичная и допускающая наглядную проверку. Можно также провести через все действия любую другую задачу (поезд, велосипедист и пр.). В задачнике Лебединцева читатель найдёт несколько задач на другие сюжеты (восход звезды и т. п.).

Напоминаем, что при изучении действий с отрицательными числами продолжается решение задач первого раздела, главным образом из пятой группы.

III. Сложение и вычитание одночленов и многочленов.

1. На верхней полке лежит x книг, на средней вдвое, а на нижней втрое больше, чем на верхней. Сколько книг на всех трёх полках?

2. В одном классе a учеников, в другом на 5 учеников больше. Сколько учеников в обоих классах?

3. В одной школе m учеников, в другой на n учеников меньше. Сколько учеников в обеих школах?

4. В первом классе a учеников, во втором на 3 больше, а в третьем на 6 меньше, чем в первом. Сколько учеников во всех трёх классах?

5. В одной корзине x яблок, в другой на y яблок больше, а в третьей на 20 яблок больше, чем во второй. Сколько яблок во всех трёх корзинах?

6. Двое рабочих купили на костюм по a *м* сукна разного качества. Первый платил по m руб., а второй по n руб. за метр. На сколько первый рабочий заплатил больше, чем второй?

7. Один колхоз продал 260 *ц* ржи по a руб. и 150 *ц* овса по b руб. за центнер. Другой колхоз по тем же ценам продал 150 *ц* ржи и 100 *ц* овса. На сколько рублей первый колхоз получил больше второго?

8. Один колхоз продал 180 *ц* ржи по x руб. и 120 *ц* овса по y руб. за центнер. Другой колхоз по тем же ценам продал 70 *ц* ржи и 140 *ц* овса. На сколько рублей второй колхоз получил меньше первого?

9. Один рабочий получил a руб. и истратил из них на покупки c руб. Другой получил b руб. и истратил втрое больше первого. На сколько у второго рабочего осталось денег меньше, чем у первого?

10. Один колхоз собрал урожай в a *ц* ржи, из которых сдал государству m *ц* и ссыпал в семенной фонд n *ц*. Другой колхоз собрал $4a$ *ц*, из которых сдал государству $3m$ *ц* и ссыпал в семенной фонд $2n$ *ц*. Остальная рожь была распределена между колхозниками. На сколько больше ржи распределил между колхозниками второй колхоз?

11. Рабочий вырыл три ямы для постановки телеграфных столбов. Каждая яма имела в длину и ширину по a *м* и в глубину b *м*. За каждый кубический метр платили в зависимости от грунта, за первую и вторую ямы по b руб., а за третью c руб. Сколько получил рабочий за всю работу?

Ответы.

1. $x + 2x + 3x = 6x$. **5.** $3x + 2y + 20$. **9.** $a - b + 2c$.
2. $2a + 5$. **6.** $ma - na$. **10.** $3a - 2m - n$.
3. $2m - n$. **7.** $(260a + 150b) - (150a + 100b) = 110a + 50b$. **11.** $2a^2b^2 + a^2bc$.
4. $3a - 3$. **8.** $110x - 20y$.

Преподаватель легко сможет увеличить количество задач на этот раздел (см. § 5). Можно дать ряд вариантов и приведенных задач. Так в задачах №№ 1—5 можно разнообразить величину коэфициентов и число слагаемых. В задаче № 11 можно увеличить количество ям (10, 30) и разбить их на три группы по оплате и т. п. Следует в задачах №№ 6, 8, 9 давать и такие числовые значения буквам, что в результате получалось бы отрицательное число, смысл которого нужно выяснить с учащимися.

IV. Умножение.

1. Прямоугольный участок поля имеет в длину a *м*, в ширину b *м*. Длина второго участка в три раза, а ширина в два раза больше первого. На сколько квадратных метров площадь второго участка больше площади первого?

2. Длина комнаты a *м*, ширина b *м* и вышина b *м*. Штукатурка 1 *кв. м* стоит b руб. Сколько будет стоить штукатурка всей комнаты (стен и потолка), если общая площадь двери и окон c квадратных метров?

3. Один ученик купил m тетрадей, другой на n тетрадей меньше. За каждую тетрадь платили n коп. Сколько заплачено за все тетради?

4. Один ученик купил a карандашей, другой на b карандашей меньше, чем первый, а третий на c карандашей больше, чем второй. Один карандаш стоит b коп. Сколько стоят все купленные карандаши?

5. Велосипедист проехал некоторое расстояние в t час.; из них первые m час. он ехал со скоростью a *км* в час, затем уменьшил скорость на b *км* в час. Какое расстояние проехал велосипедист за t часов?

Ответы.

1. $5ab$. **2.** $(3ab + 2b^2 - c)b = 3ab^2 + 2b^3 - bc$.
3. $(2m - n)n = 2mn - n^2$. **4.** $(3a - 2b + c)b = 3ab - 2b^2 + bc$.
5. $am + (t - m)(a - b) = at - bt + mb$.

V. Формулы сокращённого умножения.

1. Сторона одного квадрата *a см*, сторона другого на 3 *см* больше. Чему равна площадь второго квадрата?

2. Сторона одного квадрата *x см*, сторона другого на *a см* больше. На сколько площадь второго квадрата больше площади первого?

3. Сторона одного квадрата *a см*, сторона второго на 5 *см* короче. На сколько площадь второго квадрата меньше, чем площадь первого?

4. Две противоположные стороны квадрата удлинили на 5 *см*, а две другие укоротили на столько же. Чему равна площадь полученного прямоугольника?

5. Ребро куба равно *a см*. На сколько увеличится объём куба, если каждое его ребро увеличить на 5 *см*?

6. Деревянный куб, ребро которого равнялось *a см*, обстругали со всех сторон так, что каждое ребро стало короче на 2 *см*. На сколько уменьшился объём куба?

Ответы.

1. $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$. **2.** $(x+a)^2 - x^2 = x^2 + 2ax + a^2 - x^2 = 2ax + a^2$.

Другой способ: $(x+a)^2 - x^2 = (x+a+x)(x+a-x) = (2x+a)a$.

3. $a^2 - (a-5)^2 = \ldots$

4. $(a+5)(a-5) = a^2 - 25$.

Решить двумя способами.

5. $(a+5)^3 - a^3 = 15a^2 + 75a + 125$.

6. $a^3 - (a-2)^3 = 6a^2 - 12a + 8$.

VI. Деление.

1. Основание одного прямоугольника *a см*, высота *b см*. Высота второго прямоугольника вдвое больше, чем первого. Найти основание второго прямоугольника, если его площадь в 6 раз больше площади первого.

2. Основание прямоугольника *a*, высота *b см*. Основание другого прямоугольника в 4 раза, а высота в *c* раз больше первого. Во сколько раз площадь второго прямоугольника больше площади первого?

3. Засеяно горохом три участка, из которых два имели в длину по *a м*, в ширину по *b м*, а третий по *a м* в длину и ширину. Сколько потребовалось семян, если на каждые *a* $м^2$ высевалось по *c* граммов?

Ответы.

1. $6ab : 2b = 3a$. **2.** $4abc : ab = 4c$. **3.** $(2ab + a^2)c : a = 2bc + ac$.

VII. Разложение на множители[1]).

1. В классе было a учеников. Каждому ученику выдано по b карандашей. После раздачи осталось ещё b карандашей. Сколько карандашей было получено на класс?

2. Весь покос был убран в колхозе двумя бригадами. Одна бригада косила b дней, в каждый день скашивала a *га*. Другая бригада косила c дней с той же производительностью, что и первая бригада. Как велика площадь покоса в колхозе?

3. Некто издерживает в дороге ежедневно по a руб. Сосчитав деньги через b дней, он увидел, что денег ему достанет ещё на k дней. Сколько у него было денег до начала путешествия? (Евтушевский.)

4. Найти вес двух тел, сделанных из одного материала, если объём первого тела m *см*³, второго n *см*³, и удельный вес материала, из которого сделаны тела, d?

5. От прямоугольного поля шириной a *м* и длиной b *м* отрезали прямоугольник шириной c *м* и длиной a *м*. Чему равна площадь оставшейся части поля?

6. Расстояние между городами A и B равно a *км*. Поезд вышел из A, идёт со скоростью a *км* в час и проходит t часов. На каком расстоянии от A будет поезд через t часов? ($a = 40$, $t = 0{,}3$.)

7. Расстояние между Москвой и Тулой S *км*. Поезд идёт из Тулы в Москву со скоростью $0{,}2\,S$ *км* в час. Какое расстояние останется пройти поезду до Москвы после того, как он прошёл t часов?

8. Основание одного прямоугольника a *см*, высота h *см*. Основание другого прямоугольника b *см*, высота h *см*. Найти сумму площадей обоих прямоугольников.

9. Основание одного прямоугольника m *см*, высота h *см*. Основание другого прямоугольника n *см*, высота h *см*. Найти разность площадей этих прямоугольников ($m = 250$, $n = 150$, $h = 50$).

10. Два треугольника имеют одинаковые основания, но разные высоты. Найти разность площадей этих треугольников.

11. При постройке дома израсходовано на железо a руб., на кирпич в a раз более, на дерево в три раза более, нежели на железо и на отделку дома a рублями более, нежели на железо и дерево вместе. Сколько стоила постройка дома? (Евтушевский.)

12. Найти формулу полной поверхности прямоугольного бруса, развёртка которого дана на чертеже. Вычислить эту поверхность, если $a = 4{,}2$ *см*, $b = 1{,}9$ *см* (рис.13).

13. Найти площадь развёртки цилиндра, указанной на чертеже. Вычислить, если $R = 0{,}13$ *м*, $H = 0{,}37$ *м* (рис. 14).

14. Найти площадь квадратной рамки, если внешняя сторона рамки m *см*, а внутренняя n *см*. Вычислить площадь, если $m = 250$ *см*, $n = 150$ *см*.

15. Найти алгебраическое выражение площади квадратной рамки[2]).

---

[1]) Задачи VI и VII разделов составлялись совместно с учительницей Яснополянской школы М. И. Змиевой.

[2]) В задачах №№ 15 и 18 учащиеся должны сами определить, какие данные им нужны для вычисления искомой площади, обозначить их буквами, составить соответствующее выражение и вы-

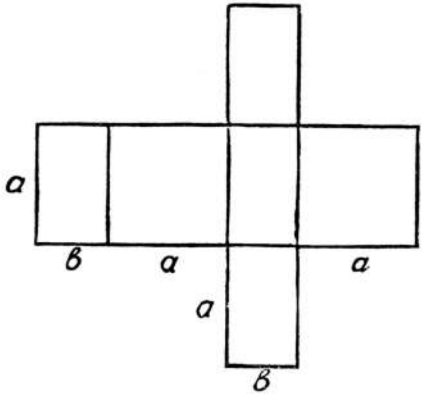


Рис. 13.

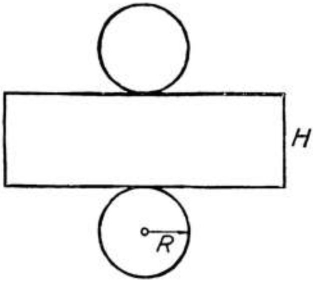


Рис. 14.

16. На сколько площадь 5 квадратов со стороной x *см* больше площади 5 квадратов со стороной y *см*. Вычислить, если $x = 74{,}6$ *см*, $y = 25{,}4$ *см*.

17. Найти площадь кольца, если радиус внешней окружности R *см*, а радиус внутренней r *см*. Вычислить, если $R = 5{,}7$*см*, $r = 4{,}3$ *см*.

18. Найти формулу, выражающую площадь кольца.

19. Сторона квадрата m *см*. Её увеличили на n *см*. На сколько увеличилась площадь квадрата?

20. Сторона квадрата a *см*. Сторону уменьшили на b *см*. На сколько уменьшилась площадь квадрата?

21. Из куска фанеры, имеющей форму квадрата со стороной a *см*, вырезали квадратную рамку шириной c *см*. Найти площадь рамки.

22. Даны два квадрата и два равных прямоугольника. Сторона первого квадрата a *см*, второго b *см*. Длина прямоугольника a *см*, ширина b *см*. Найти общую площадь этих фигур.

23. Имеется опытный участок земли, состоящий из двух равных прямоугольников и двух квадратов. Длина прямоугольника a *м*, ширина b *м*. Сторона одного квадрата a *м*, другого b *м*. Этот участок засеяли овсом по m *кг* на каждый квадратный метр. Сколько надо семян овса, чтобы засеять весь участок?

24. Найти площадь 5 квадратов со стороной m, 10 прямоугольников со сторонами m и n и 5 квадратов со стороною n ($m = 7$ *см*, $n = 3$ *см*).

числить его для некоторых числовых значений букв.

Учитель должен так подобрать последние, чтобы очевидной была выгода от представления полученных выражений в виде произведения (т. е. от разложения их на множители).

Задачи эти даются не сразу, но спустя некоторое время после решения задач 14 и 17.

25. Надо покрасить 4 квадратные доски, первую и вторую в одну краску, третью и четвёртую в другую. Сторона первой доски a *см*, второй m *см*, третьей a *см* и четвёртой m *см*. Для окраски одного квадратного метра первой и второй доски требуется b *г* краски. Для окраски одного квадратного метра третьей и четвёртой доски требуется c *г* краски. Сколько краски надо, чтобы покрасить все доски?

26. Ребро одного куба a *см*, ребро другого b *см*. На сколько объём первого куба больше, чем объём второго? ($a = 5$, $b = 3$.)

27. Два бака имеют форму куба. Ребро одного a *дм*, ребро другого b *дм*. Сколько литров воды вместится в оба бака?

Ответы.

1. $b(a+1)$. **2.** $a(b+c)$. **3.** $a(b+k)$. **4.** $d(m+n)$. **5.** $a(b-c)$. **6.** $a(1-t)$. **7.** $S(1-0{,}2t)$. **8.** $h(a+b)$. **9.** $h(m-n)$. **11.** $a(9+a)$. **12.** $2a(2b+a)$. **13.** $2\pi R(R+H)$. **14.** $m^2-(m-n)^2=n(2m-n)$. **16.** $5(x+y)(x-y)$. **17.** $\pi(R+r)(R-r)$. **19.** $n(2m+n)$. **20.** $b(2a-b)$. **21.** $c(2a-c)$. **22.** $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$. **23.** $m(a+b)^2$. **24.** $5(m+n)^2$. **25.** $ab+mb+ac+mc=(a+m)(b+c)$. **26.** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. **27.** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Для этого же раздела могут служить и задачи №№ 4, 6, 7, 8, 11 раздела III.

VIII. Алгебраические дроби.

1. Два поезда выходят одновременно из двух городов навстречу друг другу. Первый идёт со скоростью a *км/час*, второй b *км/час*. Расстояние между городами S *км*. Через сколько часов поезда встретятся?

2. Два тела проходят различное расстояние в одно и то же время. Как показать алгебраически, что скорость первого тела больше (меньше) скорости второго тела?

3. Найти отношение разности квадратов двух чисел a и b к сумме (разности) их первых степеней ($a = 3,\ 7$; $b = 2,\ 3$).

4. Найти отношение разности (суммы) кубов двух чисел a и b к разности (сумме) их первых степеней ($a = 25$, $b = 15$).

5. Два автомобиля проходят различное расстояние: первый a *км*, второй b *км* ($a > b$). Каждый из них делает по 70 *км* в час. Который из автомобилей пройдёт требуемое расстояние скорее и на сколько?

6. Два тела проходят различные расстояния, но в одно и то же время в t часов. Первое тело прошло m *км*, второе n *км*. Определить, скорость которого из тел меньше и на сколько?

7. Одно тело проходит расстояние в m *м*, другое — расстояние в n *м*. Скорость обоих тел одинакова и равна v *м* в секунду. Которое из этих тел проходит расстояние быстрее и на сколько?

8. Два туриста идут из одного города в другой. Первый турист проходит в час 5 *км*, второй 4 *км*. Который из туристов проходит всё расстояние между городами дольше и на сколько часов дольше?

9. Два тела проходят одно и то же расстояние. Первое проходит всё расстояние в 5 сек., второе в 15 сек. У которого тела скорость меньше и на сколько?

10. Нужно обмолотить a копён ржи в m дней. На сколько копён должна увеличиться производительность труда в день, если количество ржи увеличится на b копён, а срок останется прежним?

11. Расстояние между городами A и B s *км.* Из города A выходят одновременно два автомобиля. Первый проходит всё расстояние в a час., второй в b час., причём $a > b$. У которого из автомобилей скорость больше и на сколько?

12. Два автомобиля вышли одновременно из города A в город B, расстояние между которыми S *км.* Первый автомобиль идёт со скоростью m *км/час*, второй n *км/час*, причём скорость первого автомобиля больше скорости второго автомобиля. Который из автомобилей придёт в город B раньше и на сколько часов?

13. Два тела проходят расстояние a *км.* Первое тело проходит всё расстояние в p час., второе в q час. 1) При каком условии скорость первого тела будет больше скорости второго тела? 2) На сколько скорость первого тела больше скорости второго тела?

14. Два тела проходят расстояние S *км.* Первое движется со скоростью a *км/час*, второе b *км/час.* 1) При каком условии первое тело пройдёт все расстояние быстрее (медленнее) второго? 2) На сколько часов первое тело пройдёт всё расстояние скорее (медленнее) второго?

15. Два поезда проходят одно и то же расстояние, но с различной скоростью. Определить, при каком условии первый поезд пройдёт всё расстояние быстрее и на сколько?

16. Два тела проходят одно и то же расстояние, но в различное время. Определить, при каком условии скорость первого тела будет больше скорости второго и на сколько?

17. Найти общий объём двух тел, если известны удельный вес материалов, из которых сделаны тела, и вес каждого тела.

18. Два туриста выходят одновременно из города A в город B. Первый турист проходит в час v *км*, второй — на a *км* больше, чем первый. Расстояние между городами S *км.* Который из туристов придёт скорее в город и на сколько?

19. Два велосипедиста выходят одновременно из города A в город B, расстояние между которыми S *км.* Первый проходит всё расстояние в a час, второй на b час. быстрее, чем первый. Скорость которого из велосипедистов больше и на сколько?

20. Колхоз заготовил 210 m силосного корма для прокормления m коров. По вступлении в колхоз новых хозяйств, число коров увеличилось на 10. В каком случае каждая корова получит больше (меньше) силосного корма и на сколько?

21. Колхоз имеет a *га* пашни. По плану колхозники должны засевать b *га* в день, но они увеличили дневной посев на c *га.* На сколько дней раньше срока колхоз кончит весь посев?

22. m рабочих получили a *га* земли под огород. Но 5 рабочих отказались от земли в огороде. На сколько каждый из остальных рабочих получит больше земли?

23. Куплено сукна на d *м* меньше, чем ситцу. За сукно и за ситец заплатили поровну по a руб. Ситца куплено m *м.* Метр какой материи стоит дороже? 1) На сколько дороже? 2) Во сколько раз дороже?

24. a *кг* сахару стоят b руб. Куплено c *кг* сахару. Сколько нужно получить сдачи с b рублей? ($a = 6$, $b = 30$, $c = 4$.)

25. Куплено a пудов сена на b руб. Каждый день расходуют сена на c руб. Сколько пудов останется через n дней? (Евтушевский.)

26. Дюжина столовых и дюжина чайных ложек стоят a руб. Куплено за S руб. m дюжин столовых и n дюжин чайных ложек. Сколько стоят в отдельности дюжина столовых и дюжина чайных ложек?

27. Магазин продал a *м* ситца и b *м* полотна за m руб. На другой день было продано a *м* ситца и c *м* полотна за n руб. Сколько стоил метр ситца и метр полотна?

28. В столовую куплено a *кг* кофе и b *кг* сахару за m руб.; в другой раз куплено вдвое больше кофе и втрое больше сахару за n руб. Сколько стоили килограмм кофе и килограмм сахару в отдельности?

29. Рабочий взялся вырыть канаву за m руб. По прошествии b дней он пригласил другого рабочего и вместе с ним работал ещё k дней. Сколько придётся получить каждому? (Евтушевский.)

Ответы.

1. $\frac{S}{a+b}$. **3.** $\frac{a^2-b^2}{a \pm b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a \pm b} = a \pm b$ (давать отдельно каждый случай). **4.** $a^2 + ab + b^2$. **5.** $\frac{a}{70} - \frac{b}{70} = \frac{a-b}{70}$. **6.** $\frac{m}{t} - \frac{n}{t} = \frac{m-n}{t}$. **7.** $\frac{m-n}{v}$. **10.** $\frac{a+b}{m} - \frac{a}{m} = \frac{b}{m}$. **11.** $\frac{s}{b} - \frac{s}{a} = \frac{as-bs}{ab} = \frac{s(a-b)}{ab}$. **12.** $\frac{S(m-n)}{mn}$. **18.** $\frac{S}{v} - \frac{S}{v+a} = \frac{Sa}{v(v+a)}$.

19. $\frac{S}{a-b} - \frac{S}{a} = \frac{bS}{a(a-b)}$. **20.** $\frac{2100}{m(m+10)}$. **21.** $\frac{ac}{a(b+c)}$.

22. $\frac{5a}{m(m-5)}$. **23.** $\frac{ad}{m(m-d)}$. **24.** $b - \frac{bc}{a} = \frac{b(a-c)}{a}$. **25.** $a - \frac{ack}{b} = \frac{a(b-ck)}{b}$. **26.** $\frac{S-am}{n-m}$; $\frac{an-S}{n-m}$. **27.** $\frac{n-m}{c-b}$; $\frac{mc-mb-n+m}{a(c-b)}$. **28.** $\frac{n-m}{b}$; $\frac{2m-n}{a}$. **29.** $\frac{m(b+k)}{b+2k}$; $\frac{mk}{b+2k}$.

Примечание. В задаче № 9 и подобных ей сами учащиеся должны ввести и обозначить буквами недостающие данные.

Глава VII.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

В. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ.

§ 31. Методический обзор.

В методической литературе предлагались довольно разнообразные системы классификации задач на составление уравнений по степени их трудности. Дадим понятие о некоторых из них.

Наиболее простой, но и наименее удачной является классификация, предлагаемая И. Брауном[1]). Автор делит задачи на три группы: „прозрачные", „полупрозрачные" и „сложные".

Под „прозрачными" задачами подразумеваются такие, в которых само условие „диктует" порядок составления уравнения, например:

„Я задумал число; если увеличить его в 5 раз и затем уменьшить на 12, то получится половина задуманного числа. Найти это число".

К этой группе автор относит всего 4 задачи из задачника Шапошникова и Вальцова (№№ 387, 424, 433, 548).

Ко второй группе относятся задачи, требующие некоторого соображения для составления уравнений, например:

„У меня вдвое больше денег, чем у брата; если к моим деньгам прибавить 10 руб., а к его деньгам прибавить 1 руб., то у меня будет втрое больше, чем у него. Сколько денег у каждого?"

Наконец, к третьей группе относятся задачи, в которых выражения, необходимые для составления уравнения, не вытекают непосредственно из формулировки условия, а составляются по соображению самим учащимся, например:

„Поезд идёт из A в B со скоростью 28 *км* в час, затем возвращается из B в A со скоростью 28 *км* в час. Весь проезд туда и обратно он делает в $14^1/_2$ часов. Сколько километров от A до B?"

Как видим, граница между второй и третьей группами довольно расплывчата, и автор сам достаточно убедительно доказывает это. В перечне задач из Шапошникова и Вальцова, отнесённых к той или иной группе, даны задачи:

№ 388. „Из двух сортов товара ценою в 15 руб. и 21 руб. за килограмм требуется составить 32 *кг* смеси ценою в 16 р. 50 к. за килограмм. Сколько нужно взять товара каждого сорта?"

№ 397. „За 30 *м* ткани двух сортов заплачено всего 512 руб. Метр первого сорта стоит 18 руб., а метр второго 16 руб. Сколько куплено метров того и другого сорта?"

Совершенно ясно, что эти задачи почти тождественны; это показывают и получаемые уравнения:

$$15x + 21(32 - x) = 16{,}5 \cdot 32.$$

$$18x + 16(30 - x) = 512.$$

[1]) „Математика и физика в школе", № 5, 1936.

Однако автор относит первую задачу к третьей, а вторую ко второй группе, очевидно, только потому, что в первой задаче правая часть является не просто данным числом, а произведением двух данных чисел, что, конечно, не существенно. Вообще отнесение автором ряда задач к той или иной группе вызывает недоумение. Это объясняется именно нечёткостью самого принципа классификации, который по существу сводится к тому, что сначала надо давать лёгкие задачи, затем потруднее и, наконец, трудные. Критерия же степени трудности автор не даёт.

Ещё менее, пожалуй, приемлема классификация, предлагаемая П. Сапуновым[1]).

Если в предыдущей классификации отсутствовал чёткий принцип деления, то здесь в основу деления положено сразу несколько критериев, взаимно исключающих друг друга.

К первым двум группам автор относит задачи, в которых одно из данных служит для составления уравнения (т. е. правая часть уравнения является одним из данных чисел). Из них к задачам первой степени трудности относятся такие, в которых требуется составить столько алгебраических выражений, сколько вопросов содержит задача, например:

„Два лица имеют вместе 38 руб., причём у первого шестью рублями больше, чем у другого. Сколько денег у каждого?“

Получаем:

I. x руб. у первого — ответ на первый вопрос задачи;
II. $x+6$ у второго — „ „ второй „ „
По условию $x+(x+6)=38$.

К задачам второй степени трудности относятся такие, которые требуют составления нескольких вспомогательных выражений, не являющихся ответами на вопрос задачи, например:

„Разделить 46 на две части так, чтобы разность частных от деления первой части на 3 и второй на 7 равнялась 2“.

Получаем:

I. x — одна часть — ответ на первый вопрос задачи;
II. $46-x$ — вторая часть — „ „ второй „ „
III. $\frac{x}{3}$ — первое частное;

---

[1]) „Математика и физика в школе“, № 5, 1934.

IV. $\frac{46-x}{7}$ — второе частное;

По условию $\frac{x}{3}-\frac{46-x}{7}=2.$

Здесь III и IV выражения не являются ответами на вопрос задачи и требуются лишь для составления уравнения.

К задачам третьей степени трудности относятся такие, „в которых одно из данных выражено не числом, а словами или и тем и другим, например „равны", „пополам", „такая-то часть такого-то результата над такими-то числами" и т. п.

Уже этот „признак" вызывает недоумение: что меняется в смысле трудности задачи, если в ней фразу „1/5 неизвестного числа" заменить такой: „пятая часть неизвестного числа"? И к какой группе автор отнесёт такую, например, задачу:

„Число, сложенное с его половиной, даёт в сумме 15. Найти это число".

Можно отнести и ко второй. (Два выражения: x — ответ на вопрос, $\frac{x}{2}$ для составления уравнения.) Но можно отнести и к третьей, так как фигурирует слово „половина".

К задачам четвёртой трудности автор относит такие, в которых

„нет надобности оставлять одно из данных для составления уравнения. Уравнение образуется путём сравнения составленных выражений".

Очевидно, к этой группе относится задача:

„Разделить число 75 на две части так, чтобы бóльшая часть превышала втрое разность между обеими частями".

Получаем уравнение: $3(75-x-x)=75-x$. Нет, автор приводит эту задачу как пример задачи третьей трудности (фигурирует слово „втрое". К четвёртой группе она была бы отнесена, если бы вместо „втрое" стояло „в 3 раза").

Задачи пятой трудности — это такие, которые требуют знания законов, формул или теорем физики и геометрии, т. е. одно из данных фигурирует в неявном виде. Здесь опять новый критерий. По предыдущим критериям все задачи этой группы могут войти в одну из первых четырёх или даже трёх групп.

Наконец, в шестую группу собраны задачи самых разнообразных типов: „на переливание, на бассейны, на перестановку цифр в числе и т. п.“, ни по содержанию, ни по типу уравнения не имеющие между собой ничего общего.

Легко видеть, что почти любая задача по классификации П. Сапунова может быть одновременно отнесена к двум, трём и даже четырём группам. А следовательно, такая классификация не имеет никакой методической ценности.

Отметим ещё классификацию, предлагаемую И. Альтшулером[1]). Он разбивает задачи на следующие восемь групп:

1. Задачи без конкретного содержания (нахождение неизвестного компонента; двух чисел по их сумме и разности и т. п.).
2. Проценты.
3. Задачи на смешение.
4. Движение.
5. Изменение членов дроби (отношения).
6. Обратные величины (например задачи на бассейны).
7. Числа и цифры.
8. Смешанный отдел.

Положительной стороной этой классификации является то, что здесь группы задач в значительной мере соответствуют знакомым уже учащимся типам арифметических задач. Автор и рекомендует изучение задач каждой группы начинать с повторения решения соответствующих задач из арифметики (арифметическим способом).

Её основной недостаток заключается в том, что она не располагает задачи в порядке нарастания трудностей. Можно вообще сказать, что последнее требование никогда не удастся соблюсти при разбивке задач по тематическому принципу. Так задачи 3-й и 4-й групп в большинстве будут гораздо труднее, чем задачи 5-й группы.

В зависимости от содержания задачи, одинаковые по виду и по степени трудности уравнения, попадают в различные группы.

Так, приведённые нами на стр. 215 задачи № 388 и № 397 из Шапошникова и Вальцова по классификации И. Альтшулера должны быть отнесены: первая к 3-й, а вторая к 8-й группам, что явно нецелесообразно.

Наиболее чёткой и методически обоснованной является классификация, предлагаемая Н. Островским[2]). Задачи делятся *на три основные* группы: 1) арифметические задачи

---

[1]) „Математика в школе“, № 2, 1940.
[2]) „Математика и физика в школе“, № 3, 1934.

(т. е. задачи, приводящие к уравнению вида $ax+b=c$); 2) задачи, приводящие к уравнению вида $ax+b=cx+d$; 3) задачи, приводящие к уравнению вида $ax+b=k(cx+d)$ или $ax+b=(cx+d)+m$.

Здесь, методически правильно, автор отправляется от арифметики, показывая приёмы составления уравнений на арифметических задачах. Эти задачи являются и наиболее лёгкими, так как здесь приходится составлять одно алгебраическое выражение и приравнивать его данному числу. Именно сравнительная лёгкость задач этого типа и побуждает некоторых методистов свести все задачи к задачам этого типа (см. главу V, § 27). Но, как мы видели, в таком универсальном применении этот приём составления уравнения может не упростить, а лишь усложнить решение.

Задачи 2-й группы — уже алгебраические задачи: здесь приходится составлять два равных алгебраических выражения, содержащих неизвестное, и затем приравнять их одно другому. Наконец, в задачах 3-й группы два составленных выражения находятся между собой в данном кратном или разностном отношении, и для составления уравнения их ещё нужно предварительно уравнять (или, что то же, выразить данное их отношение алгебраически). Последовательность в нарастании трудностей здесь налицо. Единственный дефект этой классификации — её недостаточная дробность: каждая группа заключает в себе обширный класс задач, в свою очередь представляющих большое разнообразие в смысле сложности. Поэтому является вполне целесообразным требование подвергнуть каждую из этих групп дальнейшему дроблению на более мелкие группы. Н. Островский проводит такое дробление, но в основу деления кладётся уже совсем другой принцип. Автор начинает изучение каждой группы с задач в так называемой „производной“ формулировке (каждая задача разбивается на две), затем даются задачи в обычной форме, затем задачи „без решающего вопроса“ и т. д. Собственно говоря, здесь уже даётся не разбивка на группы всего комплекса задач, охватываемого школой, а показываются различные, постепенно усложняющиеся способы задания одной и той же задачи.

Изложенная в следующем параграфе система классификации задач была в своём первоначальном виде разработана автором совместно с М. И. Змиевой — преподавательницей Яснополянской школы им. Л. Н. Толстого в 1935—1936 гг. Затем она подвергалась ежегодной экспериментальной проверке, вводились в связи с этой проверкой некоторые изменения, перегруппировки и к 1939—1940 гг. система сложилась в том виде, в каком она излагается здесь.

Мы не считаем, однако, и эту классификацию вполне окончательной. Проверка её в более широких масштабах может внести ещё ряд существенных поправок. Но мы считаем, что речь будет идти не об изменении основного принципа, на котором построена классификация, а лишь о тех или иных целесообразных изменениях внутри каждого из предлагаемых циклов задач, о перенесении некоторых групп из VI класса в VII или наоборот (мы покажем дальше, что такая перегруппировка в некоторых случаях вполне допустима и оставаясь в рамках данной классификации).

Прежде всего весь комплекс задач на составление уравнений разбивается на два крупных цикла: 1) пропедевтический цикл — это задачи, решаемые в VI классе и в первом полугодии VII класса до непосредственного изучения самой темы „Уравнения"; 2) основной цикл — задачи, решаемые при изучении теоретического материала об уравнениях.

Первый цикл содержит задачи, целиком базирующиеся на арифметическом материале, охватывающие весь запас знаний, полученных учеником на уроках арифметики. Можно сказать, что вся группа задач представляет собой повторительный курс арифметики в новом освещении, в новой трактовке, в переводе на алгебраический язык.

Конечно, задачи арифметического содержания встречаются в любом задачнике в той или иной дозе. Но в том-то и дело, что эти задачи „поданы" так, что совершенно исчезает их „арифметический" характер. Они не заставляют ученика „вспомнить" арифметику, использовать свои знания из этой дисциплины.

Здесь же арифметика кладётся в основу классификации; задачи этого цикла извлекают весь арифметический багаж ученика, закрепляют, углубляют его и подготавливают ученика к дальнейшему продвижению в изучении алгебры. Именно такой подход мы считаем непременным условием для успешного прохождения алгебры. Именно такой подход сможет ликвидировать тот разрыв между арифметикой и алгеброй, о котором мы говорили выше.

Как же распределяются задачи внутри этого первого „арифметического" цикла? И здесь постепенное нарастание трудностей идёт параллельно с привлечением всё нового материала из арифметики и притом в той именно последовательности, в какой он проходился в арифметическом курсе.

Весь задачный материал этого цикла разбивается на 8 групп.

К 1-й группе относятся элементарнейшие задачи-вопросы, для решения которых требуется лишь знание зависимости между компонентами четырёх арифметических действий.

Уравнения при этом получаются вида:

$$x + a = b;\ ax = b;\ \frac{x}{a} = b;\ \frac{a}{x} = b.$$

Примером такой задачи-вопроса может служить хотя бы такая: на какое число надо умножить 25, чтобы получить 3500? Вопросы решаются арифметическим и алгебраическим способом, т. е. введением символа x.

2-я группа содержит комбинированные задачи на зависимость между компонентами, решаемые двумя действиями.

3-я группа — задачи на кратное и разностное отношение. Основная цель их — преодоление трудности, с которой приходится сталкиваться на уроках арифметики и которая служит частым источником ошибок и при решении алгебраических задач. Это понятия „на столько-то больше или меньше" и „во столько-то раз больше или меньше". В эту же группу входят задачи на пропорциональное деление.

4-ую группу составляют задачи на вычисление площадей; 5-ую — задачи на проценты.

К 6-й группе относятся задачи, в которые входит нахождение части (дроби) от числа и числа по его части. Как известно, этот вид задач также представляет определённую трудность и в арифметике.

7-ю группу составляют задачи на действия с дробями. Это не значит, что до сих пор учащиеся не имели дела с арифметическими дробями. Наоборот, действия с обыкновенными и десятичными дробями повторяются при решении задач всех предыдущих групп. Здесь же имеются в виду задачи, приводящие к дробным уравнениям, как с числовыми, так и с буквенными знаменателями, не содержащими неизвестное. Они решаются параллельно с уравнениями 9-й группы (см. гл. IV).

8-ю группу задач этого цикла составляют задачи на пропорции.

Как видим, задачи пропедевтического цикла действительно охватывают весь курс арифметики в его основных и наиболее трудных для учащихся разделах.

Второй — „основной цикл" — составляют уже так называемые „сложные", или алгебраические, задачи. Эти задачи и определяют объём навыков в составлении уравнений, выдвигаемый как программой средней школы, так в известной мере и требованиями практики. Именно эти задачи наиболее трудно поддаются классификации в силу их крайнего разнообразия, как по содержанию, по характеру зависимости между входящими в них величинами, так и по виду получаемого уравнения. Мы считаем, что нашей классификацией эти трудности в значительной мере уже преодолены.

Весь комплекс задач этого цикла делится на 7 групп.

1-ю группу составляют задачи, приводящие к уравнениям вида:

$$ax + b = x.$$

Эти задачи служат как бы переходной ступенью от задач „пропедевтического" цикла к „основному". В них, как и в задачах первого цикла, приходится составлять алгебраическое выражение лишь для одной левой части уравнения. Со вторым циклом их объединяет наличие неизвестного в обеих частях уравнения.

2-ю группу составляют задачи, приводящие к уравнению вида:

$$ax + b = cx + d.$$

Содержание этих задач большей частью заключается в том, что даются две неравные однородные величины, которые в процессе их изменения становятся равными.

Типовой задачей для этой группы будет, например, такая:

„В одном резервуаре вдвое больше воды, чем в другом. Если же перелить из первого во второй 16 *л*, то в обоих воды окажется поровну. Сколько воды в каждом резервуаре?"

Понятно, почему эти задачи составляют 1-ю группу. Здесь требуется лишь выразить на алгебраическом языке изменение, которому подверглись данные величины. Наиболее трудный момент — постановка знака равенства — указывается уже самой задачей.

Задачи 3-й группы отличаются от 2-й лишь одной добавочной трудностью: результаты изменения величин не становятся равными, а находятся в определённом кратном или разностном отношении. Характерными уравнениями для этих задач (в самом общем виде) являются:

$$ax+b=k(cx+d);\ (ax+b)=(cx+d)+r;$$
$$\frac{ax+b}{cx+b}=\frac{m}{n}.$$

Несмотря на различный вид этих уравнений, метод составления их тождественен. Пример задачи из этой группы:

„В химическом кабинете в одном сосуде было 84 *г* серной кислоты, а в другом 12 *г*. Сколько серной кислоты надо перелить из первого сосуда во второй, чтобы во втором сосуде стало $^1/_2$ количества кислоты в первом сосуде?“

Решение задачи и состоит в том, чтобы определить, как полученные неравые величины сделать равными и тем привести задачу к предыдущему типу.

Задачи 4-й группы отличаются от 3-й тем, что здесь даются не две величины, с которыми происходит какое-то изменение, а их сумма. Уравнения этой группы будут того же вида, что и 2-й, только в одном из выражений x заменяется выражением $s-x$, именно:

$$a(s-x)+b=k(cx+d).$$

Задачи так и решаются, что данная сумма разбивается на два слагаемых x и $s-x$, и задача приводится к предыдущему типу.

Пример на эту группу:

„Войско состоит из 32000 человек: пехоты и конницы. В сражении выбыло 4000 человек пехоты и 400 человек конницы. После сражения конница составляла 15% пехоты. Сколько было пехоты и конницы в отдельности?“

5-я группа отличается от 4-й тем, что в результате изменений получаются не две величины, находящиеся в определённом отношении, а опять сумма (или разность), но уже изменённых величин. Уравнением, характерным для этой группы, будет:

$$ax\pm b(s-x)=c.$$

Пример на эту группу:

„При постройке здания было 50 рабочих: каменщиков и плотников. Но потом пришлось число каменщиков увеличить в 2 раза, а плотников в 3 раза, и всех рабочих стало 130 человек. Сколько было плотников и каменщиков в отдельности?“

Может показаться странным, что этой группой задач мы снова возвращаемся к задачам первого цикла: ведь здесь неизвестное фигурирует лишь в одной части уравнения. Тем не менее мы считаем место, отведённое этим задачам, наиболее подходящим по двум причинам.

1. Они близко подходят к задачам предыдущей группы по приёму составления уравнения: а) неизвестные обозначаются через x и $s - x$ и тут, и там; б) составляются два алгебраических выражения, в одно из которых входит первое неизвестное, в другое — второе.

2. С другой стороны, эти задачи являются по существу задачами на составление системы двух уравнений с двумя неизвестными. Поэтому целесообразно решение их отнести к концу изучения уравнений с одним неизвестным с тем, чтобы именно с них начать ознакомление с приёмом решения задач при помощи системы уравнений.

6-ю группу составляют задачи „на обратные величины" или, как их иногда называют, „на работу", „на бассейны". Вид уравнения:

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{x} = \frac{1}{b}.$$

По существу эти задачи значительно легче задач предыдущих групп. И если мы их относим на самый конец изучения уравнений, то только потому, что они увязываются с решением дробных уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе. Наконец, 7-ую группу составляют задачи, приводящие к уравнениям с многочленными (точнее, с двучленными) знаменателями.

Итак, мы имеем сравнительно чёткую разбивку всего комплекса задач на 15 групп. Это уже достаточно дробное деление. Но приведённая классификация допускает и дальнейшее более мелкое дробление, внутри ряда групп задачи могут быть разбиты на подгруппы, опять-таки в порядке возрастания трудности.

§ 32. Задачи.

Здесь мы даём примерный подбор задач в соответствии с изложенной в предыдущем параграфе классификацией. Считаем необходимым предпослать этим задачам несколько замечаний методического порядка.

1. Решение задач каждой группы начинается с анализа 1—2 задач из этой группы. Анализ проводится преподава-

телем при участии всего класса. Зачитывается задача, устанавливается, что́ в ней дано и что́ требуется узнать. Выбирается неизвестная величина, обозначаемая через x. При помощи x и данных величин обозначаются другие неизвестные. Устанавливается, в какой зависимости между собой находятся данные величины и как эту зависимость выразить алгебраически (т. е. получить уравнение). Для более трудных задач (например задач 3-й группы основного цикла) такой анализ следует провести на 2—3 задачах.

2. Для задач пропедевтического цикла полезно время от времени одну и ту же задачу решить сначала арифметически, а затем с помощью уравнения. Этим восстанавливается в памяти ученика данный тип задач и конкретнее вырисовываются преимущества нового метода решения. В последних целях можно применить арифметический метод решения и к некоторым задачам основного цикла (например 1-й, 2-й и особенно 5-й групп).

3. Решение задач каждой группы следует завершить проверкой того, насколько учащиеся овладели навыком в их решении. Проверку можно провести так: в конце урока всем учащимся даётся задача, для которой они должны составить уравнение. Уравнение не решается (в целях экономии времени). Полученные уравнения, как правильные, так и неправильные, выписываются на доске, и проводится их краткий анализ. Обычно такая проверка занимает не больше 5—7 минут. Ученикам, неверно составляющим уравнение, задачи этого же типа даются при вызове к доске на следующих уроках. Если же неверных решений оказалось значительное количество, то следует отвести на решение задач этой группы ещё один, а может быть, и два урока (имеются в виду задачи основного цикла, так как задачи пропедевтического цикла вообще решаются в течение длительного периода).

4. Следует и здесь не забывать о пользе повторения и систематически возвращаться к задачам уже пройденных групп.

5. Совсем не обязательно прорешать все предлагаемые ниже задачи. Как только выясняется, что учащиеся вполне разбираются в задачах данной группы, быстро и правильно составляют уравнение, нужно переходить к задачам следующей группы. С другой стороны, если та или иная задача затруднила учащихся, следует решить несколько (в том числе 2—3 задачи на дому) аналогичных задач. Может случиться, что преподавателю придётся самому добавить несколько задач к приведённым.

6. Для преподавателя переход от одной группы задач к другой знаменует некоторый пройденный этап в овладении учениками навыком в составлении уравнений. Но это не значит, что эти этапы должны фиксироваться и самими учениками. Другими словами, классификация задач служит только методическим орудием для учителя и не должна сообщаться ученикам, чтобы не наталкивать их на поиски — к какому типу принадлежит данная задача. С другой стороны, при переходе к более трудным задачам (хотя бы и в пределах одной и той же группы), важно, чтобы учащиеся находили в них элементы уже знакомого, усвоенного, отправлялись от него. Если сами учащиеся не заметили этого, то учитель должен напомнить одну из решавшихся ранее задач, в которых частично давались примерно те же соотношения, что и в данной задаче. В этом случае и новая задача будет решена быстрее и с большей сознательностью.

7. Для каждой группы задач и здесь, как и в гл. IV, указываются номера тех задач, из задачника Шапошникова и Вальцова, которые *могут быть* отнесены к этой группе. Но здесь надо иметь в виду следующее.

Одна и та же задача может быть отнесена к двум или даже к трём различным группам в зависимости от того: 1) какая величина принята за основное неизвестное (т. е. обозначена через x); 2) каким образом составлено уравнение (т. е. какие выражения взяты для левой и правой части уравнения); 3) каким способом решается уравнение. Поясним это на конкретных примерах.

Задача № 410. Из A в B вышел поезд, проходящий в час 20 *км*. Через 8 час. выходит поезд из B в A, проходящий 30 *км* в час. Расстояние AB равно 350 *км*. На каком расстоянии от A поезда встретятся?

Обозначив искомое расстояние через x, получим:

Поезд из A шёл $\frac{x}{20}$ час.

Поезд из B шёл $\frac{350-x}{30}$ час.

Поезд из A шёл на 8 час. дольше, т. е.

$$\frac{x}{20}-\frac{350-x}{30}=8.$$

Получили уравнение, которое можно отнести к 9-й группе пропедевтического цикла (уравнения с дробными коэфициентами).

Но мы могли бы составить уравнение и так:

$$\frac{x}{20}=\frac{350-x}{30}+8, \text{ или } \frac{x}{20}-8=\frac{350-x}{30}.$$

Полученное уравнение содержит уже x в обеих частях и может быть отнесено лишь ко 2-й или 3-й группе основного цикла.

Но мы могли бы принять за неизвестное время, которое шёл, например, первый поезд. Тогда получили бы уравнение:

$$20x+30(x-8)=350,$$

и задача была бы отнесена нами к 5-й группе пропедевтического цикла (умножение многочленов).

Задача № 379. Разность двух чисел 8, а кратное отношение их равно дроби $\frac{3}{2}$. Найти эти числа.

а) Обозначим второе число через x.

Тогда первое число равно $\frac{3}{2}x$.

По условию $\frac{3}{2}x-x=8$,

или $\frac{3}{2}x=x+8$.

По виду полученных уравнений задача может быть отнесена к 3-й группе пропедевтического цикла или к 3-й-группе основного цикла.

б) Обозначим опять второе число через x. Тогда первое число равно $x+8$.

По условию $\frac{x+8}{x}=\frac{3}{2}$.

Задачу можно отнести к 6-й группе основного цикла.

в) Обозначив через x первое число, получим, аналогично предыдущему:

$$\frac{x}{x-8}=\frac{3}{2}.$$

Задачу можно отнести к 7-й группе основного цикла (многочленный знаменатель).

г) Наконец, уравнения б) и в) можно рассматривать как пропорции и решить их, пользуясь производными пропорциями. Например, составив из уравнения б) производную пропорцию, получим:

$$\frac{(x+8)-x}{x}=\frac{3-2}{2};$$

$$\frac{8}{x}=\frac{1}{2}.$$

Откуда легко получаем: $x=16$.

Значит, задача может быть отнесена к 10-й группе пропедевтического цикла (пропорции). Мы считаем, что именно сюда и надо отнести данную задачу, так как уравнения б) и в) легче составить, чем уравнения а), и, кроме того, решение их способом пропорций является наиболее кратким и изящным.

В общем же случае следует при отнесении задачи к той или иной группе руководствоваться следующими соображениями.

1. Отдавать предпочтение тому способу составления уравнения, который явно легче для учащихся.

2. Если из двух групп, к которым можно отнести задачу, одна содержит значительно меньше задач, чем другая, то желательно включить задачу в первую группу.

3. Вполне целесообразно ряд задач решать двумя различными способами, включив их, таким образом, и в ту и в другую группы.

4. Если нет никаких особых мотивов для предпочтения той или иной группы, то лучше отнести задачу в более дальнюю группу, так как тогда ученик может решать задачу любым способом.

В данной здесь разбивке задач по группам и были в общем положены в основу указанные соображения. Но из этих же соображений становится совершенно очевидным, что эта разбивка является не единственно возможной и обязательной. По целому ряду мотивов преподаватель может свободно перенести ряд задач из одной группы в другую.

Отметим, наконец, что некоторые задачи из задачника, как, например, №№ 413, 414, 447 и др., мы не включили ни в одну группу, так как они явно легче решаются при помощи системы уравнений. Туда их и следует перенести.

ПРОПЕДЕВТИЧЕСКИЙ ЦИКЛ.

1-я группа.

I. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИИ.

(Простые задачи на зависимость между компонентами.)

Задачи этой группы решаются на тех 3—4 уроках, которые в начале курса алгебры специально отводятся для сообщения учащимся элементарных сведений об уравнении.

Здесь особенно следует соблюдать строгую постепенность в нарастании трудностей. Начать следует с задач такого вида.

А. **1.** К неизвестному числу x прибавили 19 и получили 57. Чему равно x?

2. К 368 прибавили неизвестное число a и получили 762. Чему равно a?

3. От числа m отняли 38 и получили 26. Чему равно m?

И т. д. на все четыре действия.

Мы видим, что эти „задачи“ есть не что иное, как та же диктовка примера (икс плюс 19 равно 57), данная несколько в другом словесном выражении. Это и надо выяснить учащимся. Нужно добиться того, чтобы ученик воспринимал задачу как диктовку, и в то время как учитель читает задачу, ученик записывал бы её „условие“ в виде уравнения: „к неизвестному числу x (ученик пишет x) прибавили (на доске: $x+$) девятнадцать (на доске: $x + 19$) и получили ($x + 19 =$) пятьдесят семь ($x + 19 = 57$).

Затем задача решается устно или письменно, в зависимости от числовых данных.

Следующая серия задач отличается от первой только незначительным нюансом:

Б. **4.** К неизвестному числу прибавили 190 и получили 120. Чему равно неизвестное число?

5. Число 35 умножили на некоторое другое число и получили 7245. На какое число умножили?

И т. д. на все действия.

Всё отличие этих задач от предыдущих в том, что неизвестное число в задаче не обозначено. Его должен обозначить сам ученик. Это — небольшая, но существенная деталь, так как в дальнейшем ученику придётся при решении задач самому обозначать буквой то число, найти которое требует задача.

Следующая серия вносит опять новую деталь:

В. **6.** К какому числу надо прибавить 287, чтобы получить 1106?

7. На какое число надо разделить 750, чтобы получить 50? и т. д.

Эти задачи усложнены по сравнению с предыдущими тем, что здесь от ученика требуется некоторая дополнительная психологическая работа: он должен сам определить, что́ здесь является неизвестным, какой компонент, затем обозначить его буквой и уже после этого записать условно в виде уравнения.

Эти же задачи выдвигают ещё один момент. Допустим, учитель читает задачу: „Какое число надо вычесть из 217, чтобы получить 168?“ По примеру предыдущих задач ученик при первых же словах „какое число“ пишет на доске x, а затем из последующего текста выясняется, что x является вычитаемым и сначала нужно было написать число 217. Таков же второй из приведённых выше примеров. На этих примерах выясняется, что целесообразнее сначала заслушать задачу полностью, затем уже определить, какой компонент является здесь неизвестным, и в зависимости от этого сделать запись. Как видим, для дальнейшего этот момент имеет существенное значение. Здесь в зачаточной форме мы имеем тот предварительный анализ задачи, который в дальнейшем следует проводить для 1—2 задач каждой группы.

Наконец, переходим к последней серии задач — задач уже в настоящем смысле этого слова.

Г. **8.** На полке лежат книги. Когда к ним приложили ещё 17 книг, то всех книг стало 53. Сколько книг было вначале?

9. На складе сложены дрова. После того как из этого запаса израсходовали 753 *куб. м*, на складе осталось 2686 *куб. м* дров. Как велик был запас?

10. Для класса было запасено 200 тетрадей. Часть тетрадей была выдана учащимся. Осталось 112 тетрадей. Сколько тетрадей было роздано?

11. В поезде из 17 вагонов ехало 884 пассажира. Сколько пассажиров в среднем было в каждом вагоне?

12. Куплено некоторое количество тетрадей. Когда их роздали 53 ученикам, то каждый получил по 6 тетрадей. Сколько тетрадей было куплено?

13. 192 тетради роздали ученикам поровну, и оказалось, что каждый ученик получил 6 тетрадей. Сколько было учеников?

Переход к этим задачам является решающим моментом в деле усвоения учащимися нового метода решения задач. Дальнейшие задачи будут представлять собой лишь постепенное и планомерное усложнение этих элементарных задач. Поэтому очень важно, чтобы именно на них учащиеся вполне уяснили себе суть метода уравнений.

Прежде всего нужно добиться, чтобы учащиеся в этих задачах узнали уже решавшиеся ими ранее задачи на отыскание неизвестного компонента. Для этого целесообразно, например, перед задачей 8 дать сначала такую: „К неизвестному числу прибавили 17 и получили 53. Чему равно неизвестное число?“ (Можно выразить задачу и в форме задач серии В.)

После решения этой задачи дать задачу 8 и выяснить, что она по существу не отличается от предыдущей, что искомое число книг и является тем неизвестным компонентом (слагаемым), которое отыскивалось в предыдущей задаче. А следовательно, и решение будет такое же.

И наоборот, дав, например, вторую задачу, следует потребовать от учащихся, чтобы они сами переделали эту задачу в аналогичную задачу на отыскание неизвестного компонента: „От неизвестного числа отняли 753 и получили 2686. Чему равно неизвестное число?“

Задач, подобных приведённым, надо решить достаточное количество для того, чтобы учащиеся вполне свободно решали их.

Обычно из трёх часов, специально отводимых на ознакомление с уравнениями, на первом решаются задачи серии А, на втором — серии Б и В и на третьем начинают решение задач серии Г, которые даются и при изучении раздела „Относительные числа“.

II. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

(Простые задачи на зависимость между компонентами.)

В отношении изучения уравнений данная группа не вносит чего-либо нового с точки зрения типов решаемых задач и уравнений: и арифметические задачи с буквенными данными, и задачи на составление уравнений остаются теми же по типу.

Но ознакомление учащихся с новыми числами — отрицательными — должно, конечно, найти своё выражение в этом материале, как то предусматривается и программой.

Это значит, прежде всего, что в упражнениях на решение уравнений должны найти место и действия с отрицательными числами:

1) $x + 37 = 29$; 2) $17 - x = 115$; 3) $25x = -450$;

4) $3x + 387 = 152$ и т. д. на все действия.

Далее, в числе задач на составление уравнений следует дать несколько и таких, которые приводят к отрицательным корням. Выяснить, когда эти корни имеют смысл и когда указывают на отсутствие решений задачи.

1) Сколько единиц надо прибавить к 17, чтобы полученное число, увеличенное в три раза, равнялось 45? [$3(17 + x) = 45$; $x = -2$; решение имеет смысл].

2) Ученик имел несколько тетрадей. После того как он купил ещё 16 тетрадей, у него стало всего 13 тетрадей. Сколько тетрадей было у ученика вначале? (задача не имеет решения.)

Приведём ещё несколько задач такого рода.

1. В шкафу находилось m книг. Когда туда положили ещё несколько книг, в шкафу стало всего p книг. Сколько книг было добавлено в шкаф? ($m = 47$, $p = 61$; $m = 47$, $p = 39$.)

2. За время от полудня до двух часов дня температура воздуха повысилась на $t°$, и термометр в 2 часа показывал $a°$. Какая температура была в полдень? ($t = 3$, $a = 19$; $t = -2$, $a = 23$.)

3. В полдень термометр показывал $a°$. Затем температура понизилась на несколько градусов и в 1 час термометр показывал $b°$. На сколько градусов понизилась температура? ($a = 5$, $b = 3$; $a = 2$, $b = -1$; $a = -5$, $b = 2$; $a = -14$, $b = -3$.)

4. Поезд находился в d *км* от Бологого по направлению к Ленинграду. Затем прошёл ещё несколько километров и остановился в m *км* от Бологого. На сколько километров и в каком направлении продвинулся поезд? ($d = 40$, $m = 70$; $d = 40$, $m = 25$; $d = 20$, $m = -15$; $d = -10$, $m = 15$.)

5. Было запасено для отопления дома a m угля. После того как израсходовали некоторое количество, угля стало b m. Сколько угля израсходовали? ($a = 230$, $b = 170$; $a = 230$, $b = 310$.)

6. Термометр показывал 0°. Затем в течение 3 часов температура поднималась каждый час на одинаковое число градусов, и в 3 часа термометр показывал $t°$. На сколько градусов в час поднималась температура? $\left(t = 6;\ t = -4\frac{1}{2}.\right)$

7. Пешеход находился на расстоянии 32 *км* к югу от города, а по истечении ещё 3 часов оказался на расстоянии a *км*. С какой скоростью шёл пешеход и в каком направлении? ($a = 44$; $a = 20$; направление к югу от города считать положительным.)

2-я группа.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

(Комбинированные задачи на зависимость между компонентами.)

Каждая из задач этой группы является по существу комбинацией двух задач из 1-й группы, и потому переход к ним обычно не представляет затруднений. Эти задачи решаются при изучении раздела „Относительные числа“ параллельно с решением уравнений 3-й группы из гл. IV. Они настолько несложны по структуре, что преподаватель сам легко составит нужное количество их.

1. Ученик купил несколько карандашей по 18 коп. за карандаш и тетрадь за 20 коп. За всё ученик заплатил 92 коп. Сколько карандашей он купил?

2. В магазине было 136 *кг* хлеба. В него привезли ещё несколько повозок с хлебом по 320 *кг* на каждой повозке, после чего в магазине стало 1096 *кг* хлеба. Сколько повозок с хлебом было привезено?

3. Школа получила 5 стоп тетрадей, поровну в каждой стопе. После того как было роздано ученикам 384 тетради, ещё осталось в запасе 106 тетрадей. По сколько тетрадей было в каждой стопе?

4. На складе лежит 467 *ц* угля. Каждый день расходуется 27 *ц*. Через сколько дней на складе останется m *ц* угля? ($m = 143$; $m = 602$.)

5. Путешественник шёл из одного пункта в другой в течение 4 часов с одинаковой скоростью. После того как он прошёл ещё 12 *км*, оказалось, что всё пройденное им расстояние равно a *км*. С какой скоростью он шёл первоначально? ($a = 32$; 30.)

6. На трёх полках лежали книги, на каждой поровну. После того как сняли 14 книг, на всех полках осталось m книг. Сколько книг первоначально было на каждой полке? ($m = 22$; 30.)

3-я группа.

I. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ И МНОГОЧЛЕНОВ.

Эта группа является одной из основных. Именно на задачах этой группы учащиеся должны приобрести твёрдый навык в изображении величин, находящихся между собой в зависимости, выражаемой понятиями: „на столько-то“ и „во столько-то раз“ больше или меньше. Как известно, этот момент особенно затрудняет учащихся при составлении уравнений. Поэтому задачам данной группы должно быть уделено наибольшее внимание в пропедевтике уравнений. Они решаются в течение всего периода изучения тождественных преобразований в VI классе и к ним следует систематически возвращаться и в VII классе. Здесь рекомендуется чаще прибегать к предварительному анализу задачи.

Начиная с этой группы, мы даём и уравнения, к которым приводят задачи данной группы. Преподаватель по их виду сможет легче обозреть структуру предлагаемых задач и их последовательность.

А. ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ ЧЛЕНОВ. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ.

(Задачи на кратное отношение и на пропорциональное деление.)

(Ш. и В. №№ 372, 374, 375, 399, 400.)

1. Два лица имели вместе 87 руб., причём у одного было вдвое больше, чем у другого. Сколько было денег у каждого?

2. На трёх складах было 3892 *куб. м.* дров, причём на втором было вдвое, а на третьем в 4 раза больше, чем на первом. Сколько дров было на каждом складе?

3. В трёх корзинах 120 яблок. Во второй втрое больше, чем в первой, а в третьей вдвое больше, чем во второй. Сколько яблок было в каждой корзине?

4. Длина прямоугольника втрое больше его ширины. Найти стороны прямоугольника, если его периметр равен 48 *см*.

5. Разделить 6300 руб. между четырьмя лицами так, чтобы второй получил вдвое больше первого, третий втрое больше второго и четвёртый в 2 раза больше третьего?

6. Периметр треугольника 180 *см*. Стороны его относятся как 9 : 11 : 16. Найти величину каждой стороны.

7. Для получения замазки для дерева берут известь, ржаную муку и масляный лак в отношении 3 : 2 : 2. Сколько каждого материала надо взять в отдельности для получения 4,2 *кг* замазки?

8. Длины рек Днепра, Дона и Камы относятся 21 : 18 : 16. Днепр длиннее Дона на 321 *км*. Найти длину каждой реки.

9. Деньги, собранные тремя организациями на постройку самолёта, относились как 45 : 40 : 64. Сколько рублей собрала каждая организация, если известно, что первая внесла на 20 руб. больше, чем вторая?

10. Киноварь состоит из ртути и серы, причём берётся 21 часть ртути, 4 части серы. Сколько надо взять ртути и серы, чтобы получить 100 *г* киновари?

11. Для приготовления пороха требуется 39 частей селитры, 6 частей серы и 5 частей угля. Сколько надо взять каждого из этих веществ, чтобы получить 40 *кг* пороха?

12. Для приготовления бронзы берётся 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Требуется изготовить 200 *кг* бронзы. Сколько килограммов меди, цинка и олова надо взять?

13. Три семьи занимают квартиру, за которую платят 90 руб. в месяц. Первая семья занимает квартиру площадью 30 *кв. м*, вторая 20 *кв. м* и третья 50 *кв. м*. Квартирная плата распределяется пропорционально занимаемой площади. Сколько должна заплатить каждая семья?

Уравнения.

1. $x + 2x = 87$.
2. $x + 2x + 4x = 3892$.
3. $x + 3x + 6x = 120$.
4. $2x + 6x = 48$ (или: $x + 3x + x + 3x = 48$).
5. $x + 2x + 6x + 12x = 6300$.
6. $9x + 11x + 16x = 180$.
7. $3x + 2x + 2x = 4{,}2$.
8. $21x - 18x = 321$.
9. $45x - 40x = 20$.
10. $21x + 4x = 100$.
11. $39x + 6x + 5x = 40$.
12. $17x + 2x + x = 200$.
13. $30x + 20x + 50x = 90$.

Б. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ.

(Задачи на разностное и кратное отношение.)

(Ш. и В. №№ 371, 373, 378, 435, 446, 448, 456, 457, 525.)

1. У двух учеников было 17 тетрадей, причём у одного было на 3 тетради больше, чем у другого. Сколько тетрадей у каждого?

2. В двух бидонах было 38 *л* керосина, причём в одном было на 6 *л* меньше, чем в другом. Сколько керосина было в каждом бидоне?

3. Стороны треугольника выражаются тремя последовательными целыми числами. Определить длину каждой стороны, если периметр треугольника равен 30 *см*.

4. Из двух смежных углов один в 4 раза больше другого. Найти эти углы.

5. Из двух смежных углов один на $\frac{2}{5}d$ меньше своего смежного. Найти эти углы.

6. Одна сторона прямоугольника на a *см* больше другой. Периметр прямоугольника b *м*. Найти стороны.

7. Мать старше дочери на 21 год и моложе своего отца на 23 года. Сколько лет каждому, если всем вместе 110 лет?

8. В трёх деревнях 1200 жителей. Во второй деревне вдвое больше жителей, чем в первой, а в третьей на 40 жителей меньше, чем во второй. Сколько жителей в каждой деревне?

9. В трёх корзинах 178 яблок. Во второй втрое больше, а в третьей на 3 яблока больше, чем в первой. Сколько было яблок в каждой корзине?

10. На заводе в трёх цехах работают 624 рабочих. Во втором цехе в 5 раз больше рабочих, чем в первом, а в третьем столько, сколько в двух первых. Сколько рабочих было в каждом цехе?

11. В первом классе на a учеников больше, чем во втором, а в третьем на b учеников меньше, чем в первом. Сколько учеников в каждом классе, если во всех трёх классах было m учеников?

12. Куплено $4^1/_2$ *м* шерстяной и $7^1/_4$ *м* бумажной материи, всего на сумму 256 руб., причём метр шерстяной материи стоил в $5^1/_2$ раза дороже метра бумажной. Сколько стоит метр материи каждого сорта?

13. Юноша некий прошёл из Париса (Парижа) града на Брюсел (Брюссель) град. А идёт на всякий день по 40 вёрст. А другой юноша пошёл в тот же день и час из Брюсела в Парис. А идёт на всякий день по 30 вёрст. А меж Парисом и Брюселом 300 вёрст. Ино, во сколько дней парисский юноша сошолся с брюселским, сочти ми. (Из русских рукописных сочинений по математике XVII века. Оттуда же задача № 14.)

14. Некий оловянишник спросил у гостя (т. е. у купца): есть ли у тебя 5000 фунтов олова? И гость ему сказал так: Только б ми ещё столько же олова, сколько ныне у меня есть, да с половину столько без 500 фунтов, ино б у меня стало олова 5000 фунтов. Ино, сколько у того гостя в те поры олова было, сочти ми.

Уравнения.

1. $x + (x + 3) = 17.$

2. $x + (x - 6) = 38.$

3. $x + (x + 1) + (x + 2) = 30.$

4. $x + 4x = 2d.$

5. $x + \left(x + \frac{2}{5}d\right) = 2d.$

6. $x + (x + a) + x + (x + a) = b.$

7. $x + (x - 21) + (x + 23) = 110.$

8. $x + 2x + (2x - 40) = 1200.$

9. $x + 3x + (x + 3) = 178.$

10. $x + 5x + (x + 5x) = 624.$

11. $(x + a) + x + (x + a - b) = m.$

12. $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4}x = 256.$

13. $40x + 30x = 300.$

14. $x + x + \frac{1}{2}x - 500 = 5000.$

II. УМНОЖЕНИЕ.

(Задачи на разностное и кратное отношение.)

(Ш. и В. №№ 411, 422, 428, 434, 462, 542, 551, 563.)

1. Ваня, Коля и Петя нашли вместе 63 гриба. Коля нашёл на 8 грибов меньше, чём Ваня, а Петя в 3 раза больше, чем Коля. Сколько грибов нашёл каждый?

2. В саду было 240 плодовых деревьев. Яблонь было в 3 раза больше, чем груш. Слив на 9 деревьев меньше, чем яблонь, а вишен в 4 раза больше, чем слив. Сколко было деревьев каждого сорта?

3. Длина прямоугольника в 3 раза больше его ширины. Когда ширину прямоугольника увеличили на 2 *м*, то площадь его увеличилась на 96 $м^2$. Найти ширину и длину прямоугольника.

4. Длина прямоугольника в 2 раза больше его ширины. Когда длину прямоугольника увеличили на 5 *м*, а ширину на 3 *м*, то площадь его увеличилась на 92 $м^2$. Какие размеры имел прямоугольник первоначально?

5. Длина прямоугольника в 3 раза больше его ширины. Когда его длину увеличили на 8 *м*, а ширину уменьшили на 2 *м*, то площадь его увеличилась на 12 $м^2$. Какие размеры имел прямоугольник вначале?

Уравнения.

1. $x + (x - 8) + 3(x - 8) = 63.$

2. $x + 3x + (3x - 9) + 4(3x - 9) = 240.$

3. $3x(x + 2) - 3x^2 = 96.$

4. $(2x + 5)(x + 3) - 2x^2 = 92.$

5. $(3x + 8)(x - 2) - 3x^2 = 12.$

4-я группа.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ.

(Задачи на площади.)

(Ш. и В. №№ 444, 445, 562.)

1. Каждую сторону квадратной площадки увеличили на 1 *м*, отчего её площадь увеличилась на 15 $м^2$. Чему была равна сторона площадки вначале?

2. Каждую сторону квадрата уменьшили на 3 *см*, отчего его площадь уменьшилась на 33 $см^2$. Чему была равна сторона квадрата?

3. Сторона одного квадрата на 1 *см* больше стороны другого, а площадь его больше на m $см^2$. Чему равна сторона меньшего квадрата?

4. Сторона одного квадрата на a *см* меньше стороны другого, а площадь его меньше на d $см^2$. Чему равна сторона большего квадрата?

5—6. Садовник, имея некоторое количество молодых деревьев, хотел рассадить их в виде квадрата. Наметив определённое число деревьев на стороне этого квадрата, он увидел, что у него недостаёт 16 деревьев (оказалось лишних 14 деревьев); тогда он уменьшил (увеличил) сторону квадрата на одно дерево и нашёл, что у него оказалось 11 лишних деревьев (недостаёт 15 деревьев). Сколько деревьев было у садовника?

Уравнения.

1. $(x+1)^2 - x^2 = 15$. **4.** $x^2 - (x-a)^2 = d$.
2. $x^2 - (x-3)^2 = 33$. **5.** $x^2 - 16 - (x-1)^2 = 11$.
3. $(x+1)^2 - x^2 = m$. **6.** $(x+1)^2 - (x^2+14) = 15$.

5-я группа.

ДЕЛЕНИЕ.

(Задачи на проценты.)

(Ш. и В. №№ 402, 403, 534, 539, 547.)

Как уже указывалось, трудно придумать такие задачи, которые, не нося явно искусственного характера, приводили бы к уравнениям, требующим при решении деления многочленов и разложения на множители (имея в виду лишь уравнения 1-й степени).

Поэтому навыки в указанных преобразованиях учащиеся получают путём: 1) решения примеров, данных в соответствующих разделах задачника Шапошникова и Вальцова; 2) решения арифметических задач 7-й и 8-й групп (гл. V) и решения уравнений (гл. IV), требующих применения этих преобразований.

Что касается задач на составление уравнений, то здесь мы включаем задачи двух типов: задачи на проценты и на нахождение числа по его части.

С одной стороны, эти два типа задач обычно с трудом усваиваются учащимися при изучении арифметики. Поэтому повторение их, особенно в связи с новым методом решения, является прямо необходимым.

С другой стороны, эти задачи дают хороший материал для повторения теории и практики действий с арифметическими дробями и служат введением к изучению раздела об алгебраических дробях.

1. За сутки железнодорожная станция выполнила по выгрузке 7,5% месячного плана, что составляло 37,5 *т*. Какой план был намечен?

2. План по добыче угля был выполнен на 215%, что составляет 1075 *т*. Какой план был намечен?

3. В классе письменную работу сделали плохо 2 человека, что составляет $8^1/_3$% всех учеников. Сколько всех учеников в классе?

4. Яблоки при сушке теряют 84% своего веса. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 *кг* сушёных?

5. Мясо теряет при варке около 35% своего веса. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы получить 500 *г* варёного?

6. Кофе при жарении теряет 12% своего веса. Сколько килограммов свежего кофе надо взять, чтобы получить 35 *кг* жареного?

7. Рабочий получил на руки 270 руб., причём он заплатил 2% в профсоюз, 1% в кассу взаимопомощи, 7% на заём. Как велика его месячная зарплата?

8. При продаже товара на сумму 585 руб., получено $2\frac{1}{2}\%$ убытка. Сколько стоит товар?

9. При продаже товара на 230 руб. выручено 15% прибыли. Что стоит товар без прибыли?

10. На заводе 35% всех рабочих составляют женщины, а остальные — мужчины. Найти общее число рабочих, если мужчин на 420 человек больше?

11. В руде содержится $p\%$ меди. Добыто a m меди. Сколько взято руды?

12. На фабрике b женщин, что составляет $a\%$ от всего числа рабочих. Сколько всех рабочих на фабрике?

13. Товар с перевозкой обошёлся в a руб. Расходы по перевозке составляют $p\%$ стоимости товара. Сколько стоит товар?

Уравнения.

1. $\frac{7,5x}{100} = 37,5.$

2. $\frac{215x}{100} = 1075.$

3. $\frac{8\frac{1}{3}x}{100} = 2.$

4. $\frac{16x}{100} = 16.$ [1]

5. $\frac{65x}{100} = 50.$

6. $\frac{88x}{100} = 35.$

7. $x - 0,02x - 0,01x - 0,07x = 270.$

8. $x - \frac{2,5x}{100} = 585.$

9. $x + \frac{15x}{100} = 230.$

10. $\frac{65x}{100} - \frac{35x}{100} = 420.$

11. $\frac{px}{100} = a.$

12. $\frac{ax}{100} = b.$

13. $x + \frac{px}{100} = a.$

6-я группа.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ.

(Задачи на нахождение числа по его части.)

(Ш. и В. № 421.)

Эти задачи служат для повторения действий с обыкновенными и десятичными дробями. Поэтому их следует пройти до изучения алгебраических дробей именно при прохождении раздела „Разложение на множители“ или даже „Деление одночленов и многочленов“.

Задачи здесь подобраны в такой последовательности:

1. Задачи, в которых коэфициенты при неизвестном выражены дробями с одинаковыми знаменателями.

---

[1] Эту задачу и ряд последующих можно также привести к уравнению вида $x - \frac{84x}{100} = 16$. Желательно несколько задач решить обоими способами.

2. Коэфициенты выражены десятичными дробями.

3. Коэфициенты — обыкновенные дроби с разными знаменателями.

4. Уравнения, кроме дробных, содержат и целый коэфициент (единицу) при неизвестном. В этой наибольшей по количеству (9 задач) группе задачи расположены в порядке возрастающей трудности, включительно до употребления скобок и одновременного наличия простых и десятичных дробей.

1. Два плотника работали вместе. Первый сделал $^3/_4$ всей работы, а второй остальное. Сколько получил каждый, если второй плотник получил на 16 руб. меньше, чем первый?

2. После прочтения $^2/_9$ книги оказалось, что остающаяся часть книги содержит на 95 страниц больше прочитанной. Сколько страниц в книге?

3. В кооперативе было продано в первый день 0,5 куска сукна, а во второй 0,4, причём во второй день было продано на 30 *м* меньше, чем в первый. Сколько сукна было в кооперативе?

4. От верёвки сначала отрезали 0,25 всей длины, а потом 0,3. Какова длина верёвки, если в первый раз отрезали на 0,5 *м* меньше, чем во второй раз?

5. В керосине содержится водорода 0,144 всего веса и углерода 0,849 всего веса. Сколько керосина надо взять, чтобы получить углерода на 70,5 больше, чем водорода?

6. В совхозе пашней занято $^2/_3$ всей земли, а лугами $^2/_{15}$. Сколько всей земли в совхозе, если известно, что пашни на 320 *га* больше, чем луга?

7. Из склада было выдано в первый раз 0,4 всего количества гвоздей, во второй раз 0,75 остатка, причём в первый раз было выдано на 9,5 *кг* меньше, чем во второй раз. Сколько гвоздей было на складе?

8. Сахарный песок при переработке в рафинад теряет $^2/_{15}$ своего веса. Сколько нужно взять сахарного песку, чтобы получить 52 *кг* рафинада?

9. От куска отрезали сначала $^1/_4$ часть всей материи, затем $^3/_{16}$ всего куска, после чего осталось 45 *м*. Сколько метров было во всём куске?

10. Из цистерны с керосином сначала отлили $^3/_8$ всего количества керосина, потом ещё $^1/_6$, после чего в цистерне осталось 880 *л*. Сколько керосина было в цистерне?

11. Верхнее основание трапеции составляет $^2/_3$ от нижнего. Средняя линия трапеции 5 *см*. Чему равно нижнее основание?

12. Если к числу прибавить $^2/_3$ его и от суммы отнять 15, то получится 55. Найти число.

13. При исследовании нашли, что в керосине содержится кислорода 0,007 всего веса керосина, водорода 0,144 всего веса и 84,9 *г* углерода. Определить, какое количество керосина взято для исследования?

14. Из бака со спиртом сначала взяли $^1/_5$ всего количества спирта, потом $^1/_2$ остатка, после чего в баке осталось 20 *л*. Сколько спирта было в баке?

15. Турист проехал на автомобиле $^1/_3$ расстояния между городами, прошёл пешком $^1/_5$ оставшегося пути и остальные 160 *км* ехал поездом. Каково расстояние между городами?

16. Колхоз имеет три участка земли. Во втором участке 2,3 того, что в первом, а в третьем $^2/_3$ того, что в первых двух вместе. Сколько земли в каждом участке, если всего земли 125 *га*?

Уравнения.

1. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x = 16.$
2. $\frac{7}{9}x - \frac{2}{9}x = 95.$
3. $0{,}5x - 0{,}4x = 30.$
4. $0{,}3x - 0{,}25x = 0{,}5.$
5. $0{,}849x - 0{,}144x = 70{,}5.$
6. $\frac{2}{3}x - \frac{2}{15}x = 320.$
7. $0{,}45x - 0{,}4x = 9{,}5.$
8. $x - \frac{2}{15}x = 52.$
9. $x - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}x = 45.$
10. $x - \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}x = 880.$
11. $x + \frac{2}{3}x = 10.$
12. $x + \frac{2}{3}x - 15 = 55.$
13. $x - 0{,}007x - 0{,}144x = 84{,}9.$
14. $x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{5}x\right) = 20.$
15. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{3}x\right) = 160.$
16. $x + 2{,}3x + \frac{2}{3}(x + 2{,}3x) = 125.$

7-я группа.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ.

(Задачи на действия с дробями.)

(Ш. и В. №№ 380, 384, 385, 391, 409, 412, 419, 432, 436, 440, 473, 475, 518, 530, 536, 561.)

Действия с обыкновенными и десятичными дробями повторяются при решении задач всех предыдущих групп. В задачах 7-й группы совершается переход от арифметических дробей к алгебраическим (т. е. буквенным). Решаются они параллельно с решением уравнений 9-й группы гл. IV при изучении раздела „Алгебраические дроби". По структуре эти задачи довольно однообразны, что облегчает их решение. Обычно в них даётся сумма или разность частных от деления неизвестного числа на данные числа.

1. Если одно и то же число разделить сначала на 4, затем на 6, то сумма полученных частных будет равна 20. Найти это число.

2. От верёвки отрезали сначала третью, затем четвёртую часть, и оказалось, что отрезано всего 14 *м*. Какой длины была верёвка?

3. Из одного города в другой велосипедист ехал со средней скоростью 16 *км* в час, а обратно со скоростью 12 *км* в час. На весь проезд туда и обратно он затратил $9^1/_3$ часов. Чему равно расстояние между городами?

4. Сумма частных от деления некоторого числа на 8 и на 12 равна *a*. Найти это число.

5. Из одного города в другой отправился курьер на автомобиле со средней скоростью *v км* в час. Обратно он вернулся на самолёте, скорость которого была в 3 раза больше скорости автомобиля. Весь проезд туда и обратно занял t часов. Чему равно расстояние между городами?

6. Пароход в стоячей воде идёт со скоростью a *км* в час. Скорость течения реки b *км* в час. Каково расстояние между двумя городами, если рейс туда и обратно пароход совершил в t часов?

7. По плану колхоз должен был засевать 25 *га* в день. Но колхозники смогли увеличить дневной сев до 30 *га* и закончили сев на 3 дня раньше срока. Как велика площадь посева?

8. Пароход должен проплыть расстояние между городами со скоростью 15 *км* в час. Вследствие порчи машины он мог проходить только 12 *км* в час и поэтому опоздал на 3 часа. Сколько километров между городами?

9. Два туриста выходят одновременно из одного города в другой. Первый проходит в час 4 *км*. Второй проходит в час 5 *км* и поэтому приходит на час раньше. Каково расстояние между городами?

10. Два самолёта вылетели одновременно с одного и того же аэродрома по одному и тому же направлению. Первый самолёт летел со скоростью 200 *км* в час, а второй — на 40 *км* меньше, вследствие чего он прибыл на место назначения на 2 часа позже. Найти расстояние от аэродрома до места назначения.

11. Коллектив рабочих из 14 человек получил землю для огорода. Но через некоторое время один из рабочих отказался от участия и поэтому каждому пришлось на 2 $м^2$ больше земли, чем предполагалось. Какой величины был огород?

12. Для перевозки отряда солдат нужно было иметь 30 вагонов. На станции нехватало 8 вагонов, поэтому на каждый вагон пришлось по 8 человек лишних. Сколько солдат надо перевезти?

13. По плану колхозники должны были засевать по a *га* в день. Колхозники увеличили ежедневный посев и стали засевать b *га* в день, вследствие чего закончили посев на 2 дня раньше. Как велика площадь посева?

14. Поезд должен был пройти расстояние между двумя городами со скоростью v *км* в час. Он же шёл с большей скоростью v_1, почему всё расстояние прошёл на t часов скорее. Сколько километров между городами?

15. Два путешественника выехали одновременно из одного города в другой, один на лошади, другой на автомобиле. Лошадь идёт со скоростью v *км* в час, скорость автомобиля в 5 раз больше. Каково расстояние между городами, если первый путешественник прибыл на t часов позднее второго?

16. По плану комбайн должен был убирать m *га* в день. Комбайнер-стахановец увеличил норму уборки на n *га* в день, вследствие чего всё поле было убрано на d дней ранее срока. Какова площадь поля?

17. Пешеход шёл от одной деревни до другой со скоростью p *км* в час. Обратно он шёл на q *км* в час медленнее, вследствие чего на обратный путь употребил на k часов больше. Чему равно расстояние между деревнями?

18. Гребец в спокойной воде делает a *км* в час. Скорость течения реки r *км* в час. Чему равно расстояние между двумя пристанями, если на проезд между ними против течения гребец затратил времени на t часов больше, нежели по течению?

Уравнения.

1. $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=20.$

2. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=14.$

3. $\frac{x}{16}+\frac{x}{12}=9\frac{1}{3}.$

4. $\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=a.$

5. $\frac{x}{v}+\frac{x}{3v}=t.$

6. $\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=t.$

7. $\frac{x}{25}-\frac{x}{30}=3.$

8. $\frac{x}{12}-\frac{x}{15}=3.$

9. $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=1.$

10. $\frac{x}{160}-\frac{x}{200}=2.$

11. $\frac{x}{13}-\frac{x}{14}=2.$

12. $\frac{x}{22}-\frac{x}{30}=8.$

13. $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=2.$

14. $\frac{x}{v}-\frac{x}{v_1}=t.$

15. $\frac{x}{v}-\frac{x}{5v}=t.$

16. $\frac{x}{m}-\frac{x}{m+n}=d.$

17. $\frac{x}{p-q}-\frac{x}{p}=k.$

18. $\frac{x}{a-r}-\frac{x}{a+r}=t.$

Примечание. Задачи этой группы обычно более затрудняют учащихся, чем задачи всех предыдущих групп. (По этой причине мы в первые годы относили всю эту группу задач к основному циклу и решали их перед задачами группы „на бассейны".) Поэтому здесь надо провести подробный анализ со всем классом не менее четырёх задач (две из №№ 1—6 и две из №№ 7—18, каждый раз одну с числовыми, другую с буквенными данными).

Этим задачам следует уделить внимание ещё и потому, что они могут служить хорошим пропедевтическим материалом при переходе к решению задач на составление квадратных уравнений. По своей структуре они совершенно аналогичны последним. В любой задаче этой группы стоит только перенести неизвестное из числителя в знаменатель, чтобы получить типичную задачу, приводящую к квадратным уравнениям. Так, например, задача 11 приняла бы тогда такую формулировку:

„Коллектив рабочих получил 364 $м^2$ земли для огорода. Но затем один из рабочих отказался от участия и поэтому на каждого участника пришлось на 2 $м^2$ больше. Сколько рабочих было в коллективе?

Получается уравнение:

$$\frac{364}{x-1}-\frac{364}{x}=2.$$

Так же можно переработать и все остальные задачи этой группы.

Поэтому, приступая к решению задач на составление квадратных уравнений, чрезвычайно полезно вернуться предварительно к этой группе задач, вспомнить метод решения их, решить несколько из них. Всё это намного облегчит дальнейшую работу.

8-я группа.

ПРОПОРЦИИ.

(Ш. и В. №№ 376, 377, 379.)

Эти задачи решаются параллельно с уравнениями 10-й группы гл. IV при изучении раздела „Пропорции". Основное значение этих задач в том, что они помогают запомнить формулировку производных пропорций, их виды и дают пример практического их применения.

1. Длина окружности относится к своему диаметру как 22 : 7. Найти длину окружности, если её диаметр равен $10\frac{1}{2}$ *см.*

2. Диаметр земли относится к диаметру луны как 18 : 5. Найти диаметр луны, если диаметр земли равен 12 750 *км.*

3. Шестерня имеет 72 зубца. Другая, сцеплённая с первой, имеет 48 зубцов. Сколько оборотов сделает вторая шестерня в то время, как первая сделает 18 оборотов?

4. Какое число надо прибавить к числителю дроби $\frac{2}{75}$, чтобы она обратилась в дробь $\frac{1}{5}$?

5. Когда от верёвки отрезали 6 *м*, то оказалось, что длина оставшейся части относится к длине отрезанной как $a : b$. Какова была длина верёвки? ($a = 3$, $b = 2$.)

6. В магазине было a *кг* чаю. Когда продали некоторое количество чаю, то оказалось, что весь запас относится к оставшейся части как $m : n$. Сколько чаю было продано?

7. Одно число больше другого на 6, а относятся они как 9 : 7. Чему равны эти числа?

8. Верёвку длиной в 17,5 *м* разрезали на 2 куска, длины которых относятся как 3 : 2. Какова длина каждого куска?

9. Какое одинаковое число надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{3}{14}$, чтобы она обратилась в дробь $\frac{1}{2}$?

10. Какое одинаковое число надо вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{1}{13}$, чтобы она обратилась в $\frac{3}{4}$?

11—16. Задачи, аналогичные №№ 9 и 10, с заменой буквенными обозначениями сначала одной из данных дробей, а затем обеих.

17. Один брат старше другого на 6 лет. Три года тому назад лета их относились как 4 : 3. Сколько каждому из них лет?

18. Двум братьям вместе 79 лет. Через 4 года их лета будут относиться как 14 : 15. Сколько каждому из них лет?

Уравнения.

1. $x : 10\frac{1}{2} = 22 : 7$.

2. $12\,750 : x = 18 : 5$.

3. $18 : x = 48 : 72$.

4. $\frac{2 + x}{75} = \frac{1}{5}$.

5. $\frac{x - 6}{6} = \frac{a}{b}$.

6. $\frac{a}{a - x} = \frac{m}{n}$. [1]

7. $\frac{x + 6}{x} = \frac{9}{7}$ (применить пропорцию: $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$).

8. $\frac{x}{17 - x} = \frac{3}{2} \left(\frac{a + b}{a} = \frac{c + d}{c}\right)$.

9. $\frac{3 + x}{14 + x} = \frac{1}{2} \left(\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}\right)$.

10. $\frac{11 - x}{13 - x} = \frac{3}{4} \left(\frac{a - b}{a} = \frac{c - d}{c}\right)$.

17. $\frac{x + 3}{x - 3} = \frac{4}{3} \left(\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}\right)$.

18. $\frac{x + 4}{83 - x} = \frac{14}{15}$.

Этой группой заканчивается комплекс задач пропедевтического цикла.

Что этот пропедевтический цикл даёт учащимся?

Во-первых, на задачах этого цикла учащиеся повторяют весь курс арифметики в отношении как техники действий с целыми и дробными числами, так и решения задач достаточно разнообразных типов.

Во-вторых, они приобретают навык в решении уравнений с числовыми и буквенными данными и в этом отношении продвигаются настолько далеко, что при изучении самой темы „Уравнения" упражнения в решении уравнений займут очень немного времени.

В-третьих, учащиеся приобретают опыт в решении задач методом уравнений и вполне подготовлены к решению задач более сложных типов.

Напоминаем ещё раз, что совсем не обязательно при всех условиях пройти весь рекомендованный здесь цикл упражнений и задач. Наш опыт с полной убедительностью говорит, что такой объём вполне реален. Но преподаватель на первых порах может остановиться на любой стадии этого пропедевтического цикла с тем, чтобы оставшуюся часть отнести к самой теме „Уравнения".

---

[1]) Получаемое уравнение $an = ma - mx$ решается не переносом членов, а на основании соотношения: вычитаемое равно уменьшаемому минус разность. Можно также применить производную пропорцию.

II. ОСНОВНОЙ ЦИКЛ.

1-я группа.

Уравнения вида: $ax + b = x$.

1. Если к $^1/_4$ некоторого числа прибавить $^1/_6$ его и ещё 7, то получится само это число. Чему оно равно?

2. В первый день пешеход прошёл $^5/_{12}$, во второй $^1/_3$ всего пути, а в третий остальные 24 *км*. Какова длина всего пути?

3. Из куска сукна была продана сначала третья часть всего куска, затем пятая, затем седьмая и, наконец, последние 34 *м*. Сколько метров было в куске?

4. Капитан на вопрос, сколько имеет в команде своей людей, ответствовал, что $^2/_5$ его команды в карауле, $^2/_7$ в работе, $^1/_4$ в лазарете да 27 человек налицо: спрашивается число людей его команды. (Из руководства Ефима Войтяховского „Курс чистой математики", 1811 г.)

5. Задача Бега Эддина, третья часть рыбы застряла в болоте, четверть погружена в воду, а три пяди находятся над поверхностью воды. Найти длину рыбы.

Примечание. Бега Эддин — иранский математик XVI в. Его сочинение „Эссенция искусства счисления" служило руководством по математике в школах Ирана и Индостана до XIX в.

6. В стаде были коровы, овцы и козы. Коров было 36. Овцы составляли половину, а козы одну восьмую всего стада. Сколько скота было в стаде?

7. Эпитафия Диофанту. Здесь погребён Диофант, и камень могильный расскажет, сколь долог был век его жизни. Часть шестую её составляло прекрасное детство, двенадцатой части равна его светлая юность. Ещё часть седьмая прошла — браком себя сочетал. Пять лет прошло и прислал Гименей ему сына, коему рок половину лишь жизни прекрасной дал по сравненью с отцом. И в печали глубокой старец кончину воспринял, четыре лишь года с тех пор прожив, как сына лишился. Скажи мне, скольких лет жизни достигнув, смерть восприял Диофант?

Примечание. Диофант — знаменитый греческий математик (около II в. нашей эры). Свою „Арифметику" Диофант посвящает главным образом решению уравнений. Эпитафия написана Митродором, греческим математиком. Она якобы была высечена на могильном камне Диофанта.

8. Задача из „Греческой антологии". „Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть ещё три женщины". Сколько было учеников у Пифагора?

Примечание. „Греческая антология" — сборник задач, составленных в стихотворной форме. Такие сборники были в большом ходу в Европе в X—XIV вв. Следующая задача того же типа.

9. Статуя Минервы. „Я — изваяние Минервы из злата. Поэты то злато в дар принесли: Харизий принёс половину всей жертвы, Феспия — часть восьмую дала; десятую — Солон. Часть двадцатая — жертва певца Фемисона, а девять всё завершивших талантов — обет, Аристоником данный". Сколько весила статуя? (Талант — мера веса и денежная единица.)

10. Задача Бхаскары. „Из пучка чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве — третья доля, Вишну — пятая и Солнцу — шестая; одну четверть получил Бхавани, а остальные 6 лотосов были даны глубокоуважаемому учителю. Сосчитай мне быстро число всех цветков?"

Примечание. Бхаскара — индусский астроном и математик XI в. В своих двух сочинениях „Лилавати" (прекрасная) и „Виаганита" (отыскание корней) Бхаскара дал полное изложение десятичной системы счисления и правил действий по этой системе, приёмы решений уравнений 1-й и 2-й степени, причём пользуется и отрицательными числами. Задачи изложены в стихах. Следующая задача тоже принадлежит Бхаскаре.

11. Задача о пчёлах. „Пятая часть пчелиного роя поместилась на цветке кадамба, одна треть на цветке силиндха. Утроенная разность этих двух чисел улетела к цветам кутая. И одна пчёлка летает от жасмина к ланданусу, очарованная их ароматом. Скажи мне, прекрасная, число всех пчёл".

12. Некто прошёл расстояние между двумя городами в три дня; в первый день он прошёл $^3/_8$, а во второй $^5/_{12}$ всего пути; в третий день он прошёл на 3 *км* больше шестой части всего пути. Определить расстояние между городами.

13. Трое рабочих распределили следующим образом сумму, полученную за выполненную работу: один получил $^3/_{10}$ всей суммы и ещё 100 руб.; второй — $^4/_{15}$ всей суммы и ещё 200 руб. третий $^7/_{30}$ всей суммы и ещё 300 руб.; как велика была сумма и сколько получил каждый?

14. Магазин продал сначала $^5/_8$ бывшего в нём кофе, затем $^2/_3$ остатка и, наконец, остальные 50 *кг*. Сколько кофе было в магазине?

15. Некто, пришед в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $^1/_3$ часть всех своих денег, за другую $^3/_7$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $^3/_5$ остатка от второй покупки; а по приезде в дом нашёл остальных в кошельке денег 1 руб. 92 коп.; спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено? (Е. Войтяховский.)

Уравнения.

1. $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+7=x.$

2. $\frac{5}{12}x+\frac{1}{3}x+24=x.$

3. $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+34=x.$

4. $\frac{2}{5}x+\frac{2}{7}x+\frac{1}{4}x+27=x.$

5. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+3=x.$

6. $36+\frac{x}{2}+\frac{x}{8}=x.$

7. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$

8. $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x.$

9. $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+9=x.$

10. $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+6=x.$

11. $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1=x.$

12. $\frac{3}{8}x+\frac{5}{12}x+\frac{1}{6}x+3=x.$

13. $\frac{3}{10}x+100+\frac{4}{15}x+200+\frac{7}{30}x+300=x.$

14. $\frac{5}{8}x+\frac{1}{4}x+50=x.$

15. $\frac{1}{9}x+\frac{24}{63}x+\frac{96}{315}x+192=x.$

На задачи этой группы следует отвести 2 урока и решить (включая задания на дом) 7—8 задач. В дальнейшем в порядке повторения следует иногда дать задачу и из этой группы.

2-я группа.

Уравнения вида: $ax+b=cx+d$.

(Ш. и В. №№ 381—383, 386, 387, 401, 420, 429, 430, 441, 471, 531.)

Эта группа задач является основной для последующих. Поэтому на ней следует остановиться дольше (примерно 4—5 уроков). Задачи 2-й группы разбиваются на несколько типов. При переходе к задачам нового типа следует проводить детальный анализ одной-двух задач.

1. В одном цехе завода в утренней смене работают 128 рабочих, а в вечерней — 160. Сколько рабочих надо перевести из вечерней смены в утреннюю, чтобы в той и другой смене рабочих стало поровну?

2. В одном сарае *a кг* угля, в другом *b кг*. Сколько угля надо переложить из второго сарая в первый, чтобы в обоих стало поровну?

3. В одной корзине вчетверо более яблок, чем в другой. Если же из первой переложить во вторую 18 яблок, то в обеих корзинах станет поровну. Сколько было яблок в каждой корзине?

4. Один рабочий имел на сберкнижке 250 руб. и ежемесячно вносил в сберкассу 75 руб. Другой имел 400 руб. и ежемесячно вносил по 50 руб. Через сколько месяцев их сбережения сравняются?

5. Термометр показывает в комнате 16° тепла, а во дворе 6° тепла. В течение каждого часа воздух в комнате нагревается на ½°, а во дворе — на 3°. Через сколько часов температура воздуха в комнате и во дворе сравняется?

6. Два всадника едут по шоссе в одну и ту же сторону. Первый, отъехав от деревни на a *км*, удаляется от неё со скоростью $12\frac{1}{2}$ *км* в час. Другой, отъехав от той же деревни на b *км*, удаляется от неё со скоростью 10 *км* в час. Через сколько часов оба всадника будут на одинаковом расстоянии от деревни?

7. Задача № 6 — для двух автомобилей, скорости которых также задать в буквенной форме (m и n).

8. На одном складе было 2300 *куб. м* дров, на другом 2800 *куб. м*. Со второго взяли впятеро больше дров, чем с первого, и тогда на обоих складах дров стало поровну. Сколько дров взяли с каждого склада?

9. Для одной паровой машины имеется запас угля в 7680 *кг*, а для другой 9600 *кг*. Первая сжигает ежедневно 352 *кг*, вторая 480 *кг* угля. Через сколько дней оба запаса сравняются?

10. Один самолёт находится над землёй на высоте a *м*, а другой b *м*. Первый опускается вниз на 2 *м* в секунду, а другой на 5 *м* в секунду. Через сколько секунд они будут находиться на одной высоте над землёй?

11. В шахте движутся 2 тележки. Одна находится на глубине 120 *м*, другая 40 *м*. В каждую минуту первая поднимается на 10 *м*, а вторая опускается на 10 *м*. Через сколько минут они будут на одной глубине?

12. Один самолёт находится над землёй на высоте 15 *м*, а другой на высоте 140 *м*. Первый поднимается на $2\frac{1}{2}$ *м* в секунду, а другой опускается на 10 *м* в секунду. Через сколько секунд они будут на одной высоте над землёй?

13. В одной цистерне a *кг* керосина, а в другой b *кг* ($a < b$). В первую цистерну добавили керосину в 2 раза больше, чем из второй взяли, после чего в обеих цистернах стало поровну. Сколько керосину израсходовано из второй цистерны и сколько добавлено в первую?

14. Два автомобиля едут по шоссе навстречу друг другу. Первый из них находится на расстоянии m *км* от города и удаляется от него со скоростью a *км*. Второй находится на расстоянии n *км* от города и приближается к нему со скоростью b *км* в час. Через сколько часов они встретятся?

15. Послан человек с Москвы на Вологду и велено ему в хождении своём совершати на всякий день по 40 вёрст, потом другий человек в другий (т. е. на следующий) день послан в след его и велено ему идти на день по 45 вёрст и ведательно есть в коликий день постигнет вторый первого (из „Арифметики“ Магницкого, изданной в 1703 г. По этой арифметике учился М. В. Ломоносов. Он знал всю её наизусть и впоследствии называл „вратами своей учёности“).

16. Каждый из сомножителей двух произведений $44 \cdot 11$ и $16 \cdot 32$ увеличен на одно и то же число, после чего получены два равных произведения. Определить это число.

17. Каждый из сомножителей двух произведений $25 \cdot 51$ и $31 \cdot 40$ уменьшён на одно и то же число, после чего получились два равных произведения. Определить это число.

18. На какое число надо уменьшить каждый из сомножителей произведения $30 \cdot 147$ и увеличить каждый из сомножителей произведения $14 \cdot 62$, чтобы эти произведения стали равными.

19. Для отряда солдат составляется поезд. Если поезд будет состоять из 13 вагонов, то 20 мест будут лишних, а если из

12 вагонов, то 20 мест нехватит. Сколько мест в вагоне и сколько было солдат.

20. Если рассадить учеников по 2 человека за парту, то останется 5 человек без мест. А если посадить по 3 ученика за парту, то останется свободных 7 мест. Сколько было парт и сколько учеников?

21. Несколько купцов хотят сообща купить товар. Если каждый даст на покупку 8 кашов, то окажется 3 каша лишних. Если же каждый даст по 7 кашов, нехватит четырёх кашов. Сколько купцов и какова стоимость товара? (Из китайского трактата „Девять отделов арифметики". Согласно летописям, это древнейший китайский математический трактат, составленный около 2600 г. и изданный около 1250 г. до нашей эры. Он содержит задачи на измерение объёмов, действия со степенями и корнями, ряд задач арифметических, алгебраических (уравнения) и геометрических, в том числе на применение теоремы Пифагора.)

22. Некто муж благоговеин, вниде в сиротопитательницу милостыню дать убогим, дав же каждому из них по три пенязя и усмотре, яко недостанет денег на три человека. Аще же бы дал им по два пенязя и тогда бы осталось денег на 4 человека; и ведательно есть, колико бяше убогих в сиротопитательнице оной, такожде и денег колико у того мужа было. (Из „Арифметики" Магницкого.)

23. Два ученика имели одинаковую сумму денег. Один купил тетрадей по 20 коп. за тетрадь, другой столько же карандашей по 17 коп. за карандаш. Сколько тетрадей и карандашей купили они, если у первого осталось после покупки 30 коп., а у второго 48 коп.?

Уравнения.

1. $128 + x = 160 - x.$

2. $a + x = b - x.$

3. $4x - 18 = x + 18.$

4. $250 + 75x = 400 + 50x.$

5. $16 + \frac{1}{2}x = 6 + 3x.$

6. $a + 12\frac{1}{2}x = b + 10x.$

7. $a + mx = b + nx.$

8. $2200 - x = 2800 - 5x.$

9. $7680 - 352x = 9600 - 480x.$

10. $a - 2x = b - 5x.$

11. $120 - 10x = 40 + 10x.$

12. $15 + 2\frac{1}{2}x = 140 - 10x.$

13. $a + 2x = b - x.$

14. $m + ax = n - bx.$

15. $40(x + 1) = 45x.$

16. $(44 + x)(11 + x) = (16 + x)(32 + x).$

17. $(25 - x)(51 - x) = (31 - x)(40 - x).$

18. $(30 - x)(147 - x) = (14 + x)(62 - x).$

19. $13x - 20 = 12x + 20.$

20. $3x - 7 = 2x + 5.$

21. $8x - 3 = 7x + 4.$

22. $3x - 9 = 2x + 8.$

23. $20x + 30 = 17x + 48x.$

3-я группа.

Уравнения вида: $ax + b = m(cx + d)$ и $ax + b = (cx + d) + r$ (Ш. и В. №№ 390, 392—396, 410, 412—418, 426, 427, 432, 438, 442, 449, 452, 458, 459, 474, 476, 524, 526, 533, 535.)

Наряду с предыдущей эта группа задач занимает центральное место в нашей системе классификации. Это наиболее типичные задачи на составление уравнений первой степени. По трудности они уже приближаются к тому нормальному уровню, который является обязательным для учителя и учеников. В качестве вводных здесь даётся несколько задач, в которых неизвестное входит лишь в одну часть уравнения (задачи 1—5). При затруднениях учащихся в составлении уравнения полезно сравнить данную задачу с аналогичной задачей из предыдущей группы. Так, перед задачей № 8 можно дать её же, сформулировав вопрос так: сколько нужно перелить из первого сосуда во второй, чтобы в обоих сосудах кислоты стало поровну? На задачи этой группы надо отвести не менее 4—5 уроков.

1. В одном сарае 6000 *кг* торфа, а в другом 3000 *кг*. Из первого ежедневно расходуют 250 *кг*. Через сколько дней в первом сарае останется $\frac{2}{3}$ того количества торфа, которое было во втором сарае?

2. В одном сарае *a кг* угля, в другом *b кг*. После того, как из второго израсходовали часть угля, в первом стало в 3 раза больше, чем во втором. Сколько угля израсходовали из второго сарая?

3. В одном сарае *a кг* торфа, в другом *b кг*. Из первого ежедневно расходуют 500 *кг*. Через сколько дней в первом сарае останется $\frac{3}{4}$ того количества торфа, которое было во втором сарае?

4. В первом из двух складов *a куб. м* досок. В него привезли *c куб. м*, а во второй *d куб. м*. Тогда в первом сарае стало досок в 5 раз больше, чем во втором. Сколько было досок во втором сарае?

5. Длина прямоугольника *a см*, ширина *b см*. На сколько надо увеличить длину, чтобы площадь получившегося прямоугольника увеличилась на *m см²*?

6. Один ученик купил карандашей по 18 коп. за карандаш. Другой купил столько же тетрадей по 12 коп. и истратил на 30 коп. меньше. Сколько карандашей и тетрадей было куплено?

7. Куплено одинаковое количество берёзовых и осиновых дров. В течение месяца было сожжено 18 *куб. м* берёзовых и 58 *куб. м* осиновых. В конце месяца оказалось, что берёзовых дров осталось в 3 раза больше, чем осиновых. Сколько было куплено осиновых и берёзовых дров?

8. В химическом кабинете в одном сосуде было 84 *г* серной кислоты, а в другом 12 *г*. Сколько серной кислоты надо перелить из первого сосуда во второй, чтобы во втором сосуде стало вдвое меньше кислоты, чем в первом сосуде?

9. Отцу 32 года, сыну 12 лет. Через сколько лет возраст отца будет в два раза больше возраста сына?

10. Младшему брату 8 лет, старшему 20 лет. Через сколько лет возраст младшего будет составлять $\frac{4}{5}$ возраста старшего?

11. Отцу 41 год, а сыну 14 лет. Сколько лет тому назад отец был вчетверо старше сына?

12. Отец на 26 лет старше сына, а через 4 года будет старше сына в 3 раза. Сколько лет тому и другому?

13. В одном сарае угля на 250 *кг* меньше , чем в другом. Из первого сарая израсходовали 100 *кг*. Во второй привезли ещё 200 *кг*, тогда в нём стало втрое больше, чем в первом. Сколько угля было в каждом сарае?

14. В V классе одним учеником больше, чем в VI. В течение года из VI класса выбыло 2 ученика, а в V класс вновь поступило тоже 2 ученика, причём оказалось, что количество учеников VI класса составляет 80% количества учеников V класса. Сколько учеников было в каждом классе в начале года?

15. В двух стаканах налито по *a г* азотной кислоты в каждом. Надо распределить эту кислоту так, чтобы в первом стакане кислоты стало в 3 раза больше, чем во втором. Сколько кислоты надо перелить из второго стакана в первый?

16. В одном сосуде воды в 4 раза больше, чем в другом. Из первого перелили во второй 10 *кг*, после чего оказалось, что количество воды во втором сосуде составляет $^2/_3$ количества воды, находящейся в первом сосуде. Сколько воды было в каждом сосуде первоначально?

17. В двух цистернах было по 50 *т* керосина. Из первой взяли керосину втрое больше, чем из второй. Тогда во второй осталось керосину вдвое больше, чем в первой. Сколько керосину взяли из каждой цистерны?

18. В одном баке вдвое больше воды, чем в другом. Из второго перелили в первый 5 вёдер, и оказалось, что во втором баке стало $^2/_3$ того количества воды, какое было в первом. Сколько воды было в каждом баке?[1])

19. В одном баке 99 *л* бензина, а в другом 57 *л*. Из первого бака ежедневно берут 12 *л*, а из второго 10 *л*. Через сколько дней в первом баке будет в 3 раза больше бензина, чем во втором?

20. В одном сарае 6000 *кг* торфа, а в другом 2500 *кг*. Из первого израсходовали вдвое больше, чем из второго, после чего во втором осталось втрое меньше торфа, чем в первом сарае. Сколько торфа израсходовали из каждого сарая? (После решения задачи учащимся предлагается изменить формулировку условия, заменив дробь $^1/_3$ целым числом и оставив то же содержание.)

21. Мать вдвое старше дочери, а через 24 года она будет в $1\frac{1}{2}$ раза старше её. Сколько лет каждой?

22. Отец вчетверо старше сына, а три года назад он был впятеро старше его. Сколько лет каждому?

23. Ученик на вопрос — сколько ему лет — ответил, что через 10 лет ему будет в 5 раз больше, чем было 10 лет назад. Сколько ему лет теперь?

---

[1]) Задача не имеет решения: отрицательный корень здесь не годится. Дать задачу вторично, изменив условие задачи: „из первого перелили во второй“.

24. В одном сосуде спирта в m раз больше, чем в другом. Из второго перелили в первый a *г* и в результате оказалось, что количество спирта во втором сосуде составляет $^2/_4$ того количества, которое стало в первом. Сколько спирта было в каждом сосуде?

25. В колхозе собрали a *ц* ржи и b *ц* овса. Овса государству сдали втрое больше, чем ржи. После сдачи в колхозе ржи осталось вдвое больше, чем овса. Сколько сдано государству ржи и овса?

26. В колхозе собрали ржи втрое больше, чем овса. За трудодни колхозникам выдали a *ц* ржи и b *ц* овса. Оставшийся после раздачи колхозникам овёс составляет 80% от количества ржи. Сколько было собрано ржи и овса?

27. Несколько человек издержали 40 руб. и решили уплатить эту сумму поровну. Если бы их было на 3 человека меньше, то каждому пришлось бы заплатить в $2\frac{1}{2}$ раза больше. Сколько было человек?

28. Два ученика хотели купить книгу, стоимость которой превышала деньги одного ученика на 35 коп., а деньги другого на 40 коп. Когда они сложили свои деньги и отдали их за книгу, то получили сдачу, равную $^2/_5$ стоимости книги. Сколько стоит книга?

29. Три ученика хотели купить географическую карту. У первого для её покупки недоставало 1 р. 60 к., у второго 1 р. 80 к., а у третьего 1 р. 90 к. Когда они сложили свои деньги, то оказалось, что для покупки карты у них всё-таки недостает $^5/_{24}$ стоимости карты. Сколько стоит карта?

30. Некий человек нанял работника на год, обещав ему дати 12 рублёв и кафтан. Но той по случаю работав 7 месяцев восхотел отити и прошаше достойныя платы с кафтаном; он же даде ему по достоинству 5 рублёв и кафтан и ведательно есть: коликия цены оный кафтан бяше? (Из „Арифметики“ Магницкого.)

Уравнения.

1. $6000 - 250x = \frac{2}{3} \cdot 3000.$
2. $a = 3(b - x).$
3. $a - 500x = \frac{3}{4}b.$
4. $a + c = 5(x + d).$
5. $(a + x)b = ab + m.$
6. $18x = 12x + 30.$[1])
7. $x - 18 = 3(x - 58).$
8. $84 - x = 2(12 + x)$ или $\frac{1}{2}(84 - x) = 12 + x.$
9. $32 + x = 2(12 + x).$
10. $8 + x = \frac{4}{5}(20 + x).$
11. $41 - x = 4(14 - x).$
12. $x + 26 + 4 = 3(x + 4).$
13. $3(x - 250 - 100) = x + 200$ или $3(x - 100) = x + 250 + 200.$
14. $x - 2 = 0{,}80(x + 1 + 2).$
15. $a + x = 3(a - x).$
16. $\frac{2}{3}(4x - 10) = x + 10.$
17. $50 - x = 2(50 - 3x).$

---

[1]) Понятно, что ученик может составить уравнение и в таком виде: $18x - 12x = 30$. Разница в том, что до теорем об эквивалентности он только и мог прийти к такому уравнению; теперь же вид полученного уравнения не играет роли для его решения.

18. $\frac{2}{3}(2x+5)=x-5$.

19. $99-12x=3(57-10x)$.

20. $(6000-2x)=3(2500-x)$.

21. $2x+24=1\frac{1}{2}(x+24)$.

22. $4x-3=5(x-3)$.

23. $x+10=5(x-10)$.

24. $\frac{2}{3}(mx+a)=x-a$.

25. $a-x=2(b-3x)$.

26. $x-b=0{,}8(3x-a)$.

27. $\frac{40}{x-3}=\frac{2{,}5\cdot 40}{x}$.

28. $(x-35)+(x-40)=$
$=x+\frac{2}{5}x$.

29. $(x-160)+(x-180)+$
$+(x-190)=x-\frac{5}{24}x$.

30. $\frac{7}{12}(12+x)=5+x$.

4-я группа.

Уравнения вида: $ax+b=m[c(s-x)+d]$.

(Ш. и В. №№ 389, 398, 454, 455, 464, 469, 470.)

Эти задачи по ходу составления уравнения аналогичны предыдущим, но требуют предварительной разбивки данной суммы на два слагаемых (x и $s-x$). С другой стороны, этот добавочный момент сближает их с задачами следующей 5-й группы. Обычно задачи этой группы не затрудняют учащихся (если, конечно, они приобрели достаточно твердый навык в решении задач третьей группы), и на них достаточно отвести один, много, два урока.

1. Из кооператива было продано 32 *кг* чаю по цене 21 руб. за килограмм первого сорта и по 15 руб. за килограмм второго и выручено за первый сорт на 384 р. больше, чем за второй. Сколько продано чаю того и другого сорта?

2. В двух сараях было 1000 *кг* угля. Из первого сарая израсходовали 100 *кг*, а во второй привезли ещё 200 *кг*, и оказалось, что во втором сарае стало втрое больше угля, чем в первом. Сколько угля было в каждом сарае вначале?

3. Войско состоит из a человек пехоты и конницы. В сражении выбыло b человек пехоты. После сражения пехоты стало в 2 раза больше конницы. Сколько было пехоты и конницы до сражения?

4. Войско состоит из 32000 человек пехоты и конницы. В сражении выбыло 4000 человек пехоты и 400 человек конницы. После сражения конница составляла 15 % пехоты. Сколько было пехоты и конницы до сражения?

5. Эскадра состоит из 22 кораблей: крейсеров и миноносцев. Во время боя вышло из строя $^1/_4$ крейсеров и $^1/_7$ часть миноносцев. После боя оказалось, что миноносцев в 2 раза больше, чем крейсеров. Определить состав эскадры до боя.

Уравнения.

1. $21x=15(32-x)+384$.
2. $3(x-100)=1000-x+200$.
3. $x-b=2(a-x)$.
4. $(x-4000)\cdot 0{,}15=32000-x-400$.
5. $\left(x-\frac{1}{4}x\right)\cdot 2=(22-x)\cdot\frac{6}{7}$.

5-я группа.

Уравнения вида: $ax + b(s - x) = c$.

(Ш. и В. №№ 388, 397, 439, 443, 450, 453, 460, 463, 465—468, 472, 543.)

По сравнению с задачами предыдущей группы новое здесь в том, что полученные два выражения приходится не уравнивать, а брать их сумму и приравнивать некоторой данной величине. На эти задачи достаточно отвести 2—3 урока. В дальнейшем их легче будет решать при помощи системы уравнений.

1. Сумма двух чисел равна 30. Если одно из них увеличить в 2 раза, то сумма полученных чисел будет равна 44. Чему равнялось каждое из данных чисел?

2. За 13 *м* материи двух сортов заплатили всего 124 руб. Метр первого сорта стоит 12 руб., метр второго сорта 8 руб. Сколько куплено метров материи того и другого сорта?

3. Колхоз в 10 дней обмолотил при помощи молотилки 230 копён ржи и овса. Молотилка обмолачивает в день 20 копён ржи или 25 копён овса. Сколько дней молотили рожь и овёс в отдельности?

4. При постройке здания было 50 рабочих: каменщиков и плотников. Но потом пришлось число каменщиков увеличить в 2 раза, а плотников в 3 раза, и всех рабочих стало 180 человек. Сколько было плотников и каменщиков?

Примечание. Задача не имеет решения.

5. В одном совхозе было 50 постоянных и временных рабочих. На другой год число постоянных рабочих увеличилось в 4 раза, а временных в 3 раза. Всего рабочих стало 180 человек. Сколько постоянных и временных рабочих в отдельности было первоначально?

6. Смешали хлопок двух сортов. Килограмм первого сорта стоит 2 руб., килограмм второго сорта 1 руб. 60 коп. Всего смеси получили 50 *кг*. Сколько хлопка того и другого сорта взяли, если вся смесь стоит 92 руб.?

7. В одном совхозе было 350 *га* пахотной земли и луга. В другом совхозе пахотной земли было на 50 *га* меньше, чем в первом совхозе, а луга в 2 раза больше, чем в первом совхозе. Всего земли во втором совхозе было 450 *га*. Сколько пашни и луга в отдельности было в первом совхозе?

8. Куплен сатин двух сортов: красный и синий всего m *м*. Метр красного сатина стоит a руб., а метр синего 8 руб. За всё заплачено 50 руб. Сколько метров сатина каждого сорта куплено?

9. Для отопления здания куплено m *куб. м* дров: берёзовых и сосновых. Кубометр берёзовых стоит a руб., а сосновых b руб. Сколько дров каждого сорта куплено, если за всё заплачено s руб.?

10. Куплено m *м* сукна двух сортов. Метр первого сорта стоит a руб., а метр второго в три раза дороже, чем метр первого. Сколько куплено сукна каждого сорта, если за всё заплачено s руб.?

11. На элеватор поступило 2000 *ц* пшеницы двух сортов. Первый сорт содержит 5 % отходов, а второй сорт 9 %. После очистки получили 1880 *ц* чистой пшеницы. Сколько пшеницы того и другого сорта поступило на элеватор?

12. В колхозе участок пшеницы и участок овса давали всего 1472 *кг* зерна. По очистке этих участков от сорняков урожайность пшеницы повысилась на 80 %, а урожайность овса на 24 %. После очистки с этих же участков получено 2050 *кг* зерна. Определить урожайность пшеницы и овса до очистки.

13. Смешано m *кг* чаю двух сортов. Килограмм первого сорта стоит a руб., а килограмм второго сорта 60 % цены килограмма первого сорта. Сколько взято для смеси того и другого сорта, если за всё заплачено s руб.?

14. Смешано два сорта чаю ценой по a руб. и b руб. за килограмм. Получилось m *кг* смеси. Весь чай продан по n руб. за килограмм, причем было получено s руб. прибыли. Сколько было чаю каждого сорта?

Уравнения.

1. $x + 2(30 - x) = 44.$

2. $12x + 8(13 - x) = 124.$

3. $20x + 25(10 - x) = 230.$

4. $2x + 3(50 - x) = 180.$

5. $4x + 3(50 - x) = 180.$

6. $2x + 1{,}6(50 - x) = 92.$

7. $x - 50 + 2(350 - x) = 450.$

8. $ax + 8(m - x) = 50.$

9. $ax + b(m - x) = s.$

10. $ax + 3a(m - x) = s.$

11. $0{,}95x + 0{,}91x(2000 - x) = 1880.$

12. $1{,}8x + 1{,}24(1472 - x) = 2050.$

13. $ax + 0{,}6a(m - x) = s.$

14. $ax + b(m - x) = mn - s.$

6-я группа.

Уравнения вида: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}$ и т. п.

(Ш. и В. №№ 404—408, 451, 537, 538, 540, 544.)

К этой группе относятся задачи, стоящие несколько обособленно, известные под названием задач „на бассейны“, „на работу“ и т. п. Характерная особенность получаемых уравнений заключается в том, что здесь неизвестное находится в знаменателе и что для составления уравнения приходится брать величины, обратные данным в задаче.

Задачи эти решаются одновременно с упражнениями в решении дробных уравнений.

1. Одна машинистка может переписать 24 листа рукописи в 6 час., другая — в 8 час. Во сколько часов перепишут ту же рукопись обе машинистки, если они будут работать одновременно?

2. Одна машинистка может переписать рукопись в 8 час., другая — в 6 час. Во сколько времени обе машинистки смогут окончить работу, если будут работать одновременно?

3. Бассейн наполняется одной трубой в 4 часа, другой в 2 часа. Во сколько времени наполнится он, если открыть одновременно обе трубы?

4. Бассейн наполняется водой через одну трубу в 3 часа, а через другую вся вода может вытечь в $4\frac{1}{2}$ часа. Через сколько времени наполнится бассейн при одновременном действии обеих труб?

5. Двое рабочих могут кончить работу в a час. Первый рабочий может исполнить её в b час. Во сколько времени сделает ту же работу второй?

6. В бассейн проведены 3 трубы. Через первые две вода вливается, через третью вытекает. Через первую трубу бассейн может наполниться в 3 часа, через вторую в 4 часа, а через третью вода может вытечь из бассейна в 6 час. Во сколько времени бассейн наполнится, если открыть все три трубы?

7. Из трёх труб, проведённых в бассейн, первая наполняет его в m час., вторая наполняет в n час., а через третью вся вода из бассейна вытекает в 3 часа. Во сколько времени может вытечь вся вода из бассейна при одновременном действии всех труб?

8. Трое рабочих могут окончить работу в a час. Один первый может кончить её в b час., один второй в c час. Во сколько времени сделает ту же работу третий?

Уравнения.

1. $\frac{24}{6}+\frac{24}{8}=\frac{24}{x}$. [1]
2. $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{x}$.
3. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$.
4. $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{x}$.
5. $\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$.
6. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$.
7. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{3}=\frac{1}{x}$.
8. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$.

7-я группа.

ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МНОГОЧЛЕННЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ[2].

(Ш. и В. №№ 376, 379, 423—425, 431, 433, 437, 527, 529, 532, 546, 548.)

1. Площадь двух участков земли равна 220 *м*². Площадь большего участка относится к площади меньшего как 9 : 2. Как велика площадь большего участка?

2—3. Какое одно и то же число надо прибавить к (отнять от) дроби $\frac{a}{b}$, чтобы она сделалась равной $\frac{1}{2}$?

$$(a=5,\ b=7;\ a=2,\ b=7;\ a=5,\ b=10.)$$

4. Окружность переднего колеса экипажа на $\frac{1}{2}$ *м* меньше окружности заднего. Первое колесо на протяжении 30 *м* сделало столько же оборотов, сколько второе на протяжении 36 *м*. Определить окружность каждого колеса.

---

[1]) Заменить 24 другими числами и объяснить, почему значение ответа не меняется. После этого перейти к задаче № 2.

[2]) См. также задачи №№ 6—18 группы 10 пропедевтического цикла.

5. Сумма окружностей переднего и заднего колёс экипажа равна 9 *м*. Одно из них на протяжении 60 *м* делает столько же оборотов, сколько другое на протяжении 75 *м*. Найти окружность каждого колеса.

Уравнения.

1. $\frac{x}{20-x}=\frac{9}{2}$. **3.** $\frac{a-x}{b-x}=\frac{1}{2}$.

2. $\frac{a+x}{b+x}=\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{30}{x}=\frac{36}{x+\frac{1}{2}}$. **5.** $\frac{60}{x}=\frac{75}{9-x}$.

Приведённые группы охватывают все основные типы задач и виды получаемых уравнений.

Они дают учащимся вполне достаточный навык для того, чтобы перейти к решению более сложных задач разнообразного содержания (конечно, в пределах той степени трудности, которая принята для средней школы). Дальнейшая работа преподавателя и будет заключаться в закреплении полученного навыка путём решения задач, не охваченных данной классификацией, перемежая их с задачами из всех приведённых выше групп.

ЛИТЕРАТУРА [1]).

I. Теория.

1. П. С. Александров, Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1939.
2. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ОНТИ, ч. 1, 1934, ч. 2, 1937.
3. Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I, изд. „Матезис", Одесса, 1906.
4. И. А. Гибш, Элементарная математика, Общий курс, Пособие для высших педагогических учебных заведений, Учпедгиз, 1936.
5. Ф. Клейн, Вопросы элементарной и высшей математики, ч. 1, изд. „Матезис", Одесса, 1912.
6. Р. Кэджори, Введение в современную теорию уравнений, Казань, 1928.
7. П. Я. Окунев, Высшая алгебра, ОНТИ, 1937.
8. И А Серре, Курс высшей алгебры, изд. Вольфа, изд. 2-е.
9. А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, изд. 3-е, ОНТИ, 1937.
10. Н. Чеботарёв, Основы теории Галуа, ч. 1, ОНТИ, 1934.
11. Г. М. Шапиро, Высшая алгебра, изд. 4-е, Учпедгиз, 1938.
12. О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, Киев, 1916.

---

[1]) Сокращения названий журналов:

ВОФЭМ — Вестник опытной физики и элементарной математики.

МО — Математическое образование.

МвШ — Математика в школе (в 1933—1936 гг. журнал имел название „Математика и физика в школе").

ПС — Педагогический сборник.

II. История.

1. А. В. Васильев, Целые числа (гл. IV. Диофант).
2. Г. Вилейтнер, Как рождалась современная математика, ГИЗ, 1927. ГТТИ, 1938.
3. Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, ОНТИ, 1935.
4. Ф. Кэджори, История элементарной математики с указаниями на методы преподавания, изд. 2-е, „Матезис", Одесса, 1937.
5. В. И. Лебедев, Очерки по истории точных наук, вып. I. Кто изобрёл алгебру, М. 1916.
6. О. Нейгебауэр, Лекции по истории античных математических наук. т. I, ОНТИ, 1937.
7. Г. Н. Попов, Исторические задачи, ГТТИ, 1932.
8. Г. Н. Попов, Очерки по истории математики, изд. 2-е, М.—Л. 1925.
9. Г. Т. Цейтен, История математики в древности и в средние века, ОНТИ, 1938.
10. Г. Т. Цейтен, История математики в XV и XVII веках, ГТТИ, 1933.
11. В. П. Шереметьевский, Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.

III. Методика.

А. Руководства.

1. С. С. Бронштейн, Методика алгебры, Учпедгиз, 1937.
2. В. Евтушевский и А. Глазырин, Методика приготовительного курса алгебры. СПб. 1876.
3. В. Мрочек и Ф. Филиппович, Педагогика математики, т. I. СПб. 1910.
4. М. Симон — Дидактика и методика математики, изд. 3-е, Л., 1922.
5. И. И. Чистяков, Методика алгебры, Учпедгиз, 1934.
6. Дж. В. А. Юнг, Как преподавать математику, т. I и II, изд. 2-е, 1918.

Б. Статьи.

1. П. Гурьев, Предварительные упражнения в алгебре входящие собственно в состав алгебраического языка. „Педагогический журнал", СПб. 1834, III.
2. В. Рутковский, Краткое изучение уравнений, Киев, 1864.
3. В. Евтушевский, Несколько уроков для выяснения материала и метода преподавания пропедевтики алгебры, ПС, 1866, IV.
4. В. Евтушевский, Пропедевтика алгебры, ПС, 1868, VII и VIII.
5. А. Н. Страннолюбский, Курс алгебры, основанный на постепенном обобщении арифметических задач (дидактические указания для преподавания начальной алгебры), СПб. 1868.
6. В. А. Латышев, Исторический обзор учебных руководств по математике, ПС, 1878.
7. А. Гольденберг, Как решать уравнения 1-й степени с одним неизвестным, ПС, 1883.

8. С. И. Шохор-Троцкий, Из области низшей алгебры, „Семья и школа", 1885. I и II.
9. Р. Шидловский, Из области элементарной алгебры. К вопросу о решении уравнений, содержащих неизвестное в знаменателях дробных членов, ВОФЭМ, 1891, № 118.
10. В. Ермаков, Введение в алгебру, ПС, 1890, XI.
11. Н. Сенигов, О некоторых основных вопросах начальной алгебры, М. 1893.
12. П. Свешников, Заметка о составлении уравнений для решения задач, ПС, 1893. II.
13. Р. Конокотин, О задачах на составление уравнений, „Русская школа", 1896, IV.
14. М. Попруженко, Заметка о статье Конокотина, ВОФЭМ, 1896, № 292.
15. В. Ермаков, В чём сущность алгебры? ПС, 1896, V.
16. С. Гирман, Равносильность уравнений с одним неизвестным, ВОФЭМ, 1897, № 260.
17. Д. Агапов, Пособие к решению алгебраических задач на составление уравнений, Оренбург 1902.
18. Н. Извольский, Начальное знакомство учащихся с уравнениями, „Математический вестник", 1915, VIII.
19. Б. Пиотровский, Тождественные преобразования и уравнения в школе II ступени. МвШ, Л., 1925, III.
20. К. Бряснев, Как проработать тему „Тождества и уравнения", „Просвещение Сибири", 1932 XI—XII.
21. В. В. Адрианов, Составление уравнений, „Горьковский просвещенец", 1933, VII—VIII.
22. П. Лезедов, Уравнения с буквенными коэфициентами, Сб. „Методические разработки по математике в средней школе", ЛООНО, 1934.
23. П. Сапунов, Решение задач методом составления уравнений с одним неизвестным, МвШ, 1934, III.
24. Н. Островский, Метод составления уравнений с одним неизвестным. МвШ, 1934, III.
25. С. Д. Скрутовский, О методике составления и решения уравнений 1-й степени с одним неизвестным. „Просвещение Сибири", 1934, XI—XII.
26. В. С. Софронов, Понятие об уравнении и эволюция методов решения уравнений, Сб. „Элементарная математика в средней школе" под ред. С. Е. Ляпина. М.—Л. 1934.
27. В. М. Мосин, Уравнения 1-й степени с одним неизвестным и составление уравнений из условий задачи, „Северо-Кавказский учитель", Пятигорск 1935, I.
28. М. К. Гребенча, Функции и уравнения, МвШ, 1935, IV.
29. Т. Островский, Решение уравнений, в том же сборнике.
30. Л. Горская, Из опыта обучения решению уравнений, там же.
31. К. Сенкевич, Из опыта обучения решению уравнений, там же.
32. Н. Нестеров, Составление уравнений по условиям задач, „В помощь учителю", Л. 1935, I.
33. М. Дятлов, Составление и решение буквенных выражений как первый шаг к алгебраическому способу решения задач, „Методический путеводитель", Куйбышев 1935, IV.

34. А. Д. Дмитриев, Приёмы решения и составления уравнений 1-й степени, „Северо-Кавказский учитель", 1935, VI.
35. М. И. Змиева, Опыт подготовки учащихся к составлению уравнений 1-й степени, МвШ, 1935, V.
36. З. Костина, Первоначальные упражнения на составление уравнений, там же.
37. Л. Лейферт, Кратные отношения и пропорции и применение их свойств к решению линейных уравнений, МвШ, 1936, V.
38. И. Браун, О составлении уравнений, там же.
39. Л. Маергойз, К методике составления уравнений по условиям задачи, там же.
40. Н. Семёнов, Определение уравнения с функциональной точки зрения, там же.
41. М. Черняев, К методике решения уравнений 1-й степени, там же.
42. Германов, О составлении уравнений с одним неизвестным, там же.
43. Е. Рачко, К методике составления уравнений по условию задачи.
44. Рудницкий, Уравнения — больное место в преподавании алгебры.
45. Е. Березанская, О составлении уравнений из условий задач. МвШ, 1940, II.
46. С. Петров, О составлении уравнений из условий задач, там же.
47. П. Сердобольский, Методика составления уравнений, там же.
48. И. Макаревич, Методические соображения к практике составления уравнений по условию задач, там же.
49. А. Лебедев, Решение задач на составление уравнений 1-й степени с одним неизвестным, там же.
50. Н. Козьмин, Составление уравнений с одним неизвестным в VII классе, там же.
51. А. Горский, К вопросу методики решения задач на составление уравнений, там же.
52. О. Дирекчиянц, О составлении уравнений, там же.
53. И. Альтшулер, К вопросу о методике обучения составлению уравнений, там же.
54. Г. Жураховский, Составление уравнений по условию задачи, там же.
55. Г. А. Тарасов, Решение задач при помощи уравнений, Сб. „Из практики преподавания математики и физики", Куйбышев 1941.
56. В. В. Репьёв, Решение задач с помощью уравнений, Горький 1941.
57. А. Н. Барсуков, Уравнения в VI классе, МвШ. Методический сборник, вып. I, 1943.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
26	12 сверху	$a \pm (n \pm 5)$	$a \pm (a \pm 5)$
35	13 снизу	$\frac{py}{p} - \frac{py}{p} = a$	$\frac{py}{q} - \frac{qy}{p} = a$
69	16 снизу	$ab = bc$	$ad = bc$
85	17, 18, 25 сверху	$\sqrt{x+3}$	$\sqrt{x-3}$
111	3 сверху	$\frac{c \pm d}{d}$	$\frac{c \pm d}{c}$
120	2 снизу	60 *см*	60 *см*^{2}
123	19 сверху	85	35
128	4—5 снизу	... то на 4 карандаша истрачено $x - 18$ коп., на один карандаш $\frac{x-18}{4}$ коп.; по условию $\frac{x-18}{4} = 10$	... то на 4 тетради истрачено $x - 18$ коп., на одну тетрадь $\frac{x-18}{4}$ коп.; по условию $\frac{x-18}{4} = 12$
176	3 снизу	стр. 145	стр. 156
183	18 сверху	«совершенно» не отвечать	«не совершенно» отвечать
201	19 сверху	8 руб.	9 руб.
209	5 сверху	стр. 192	стр. 207
218	18 сверху	b см.	m см.
231	18 снизу	28 *км*	20 *км*
234	9 снизу	стр. 215	стр. 231
238	9 снизу	1-ую группу	1-ую группу после «переходной».
239	3 сверху	$\frac{ax+b}{cx+b}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
250	3 снизу	$4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}x$
253	19 сверху	$\frac{65x}{100} = 50$	$\frac{65x}{100} = 500$
261	10 снизу	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
263	8 сверху	2300	2200
264	7 снизу	$62 - x$	$62 + x$
264	2 снизу	$48x$	48
267	3 сверху	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{3}$
270	15 сверху	$0{,}91\,x\,(2000 - x)$	$0{,}91\,(2000 - x)$
272	6 сверху	$\frac{x}{20-x}$	$\frac{x}{220-x}$

А. Н. Барсуков, Уравнения первой степени в средней школе.