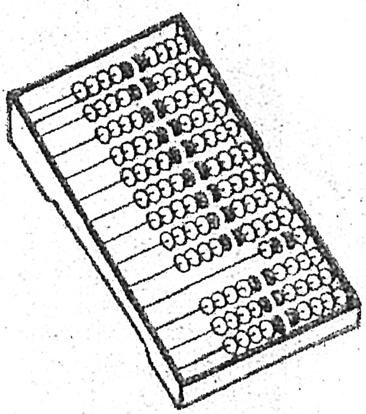
М. И. Иванов

# РУССКИЕ СЧЕТЫ
## И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ШКОЛЕ



УЧПЕДГИЗ — 1953

М. И. ИВАНОВ

# РУССКИЕ СЧЁТЫ
## И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ШКОЛЕ

*ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1953

## ОГЛАВЛЕНИЕ

*Стр.*

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . .

§ 1. О происхождении счётов . . . . . . . . . . . . . . . 5
§ 2. Устройство счётов и их разновидности . . . . . . . . 6
§ 3. Объяснение счётов . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
§ 4. Нумерация на счётах . . . . . . . . . . . . . . . . 11
§ 5. Сложение на счётах . . . . . . . . . . . . . . . . 14
§ 6. Вычитание на счётах . . . . . . . . . . . . . . . . 18
§ 7. Некоторые замечания к вопросу об умножении на счётах в школе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
§ 8. Умножение на однозначные числа . . . . . . . . . . 26
§ 9. Умножение на двузначные числа . . . . . . . . . . . 27
§ 10. Умножение на многозначные числа . . . . . . . . . . 33
§ 11. Некоторые предварительные сведения о делении на счётах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
§ 12. Деление на однозначные и многозначные числа . . . 39
§ 13. Вычисления с десятичными дробями на счётах . . . . 42
§ 14. Процентные вычисления на счётах . . . . . . . . . . 45
§ 15. Некоторые указания к организации работы со счётами в школе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
§ 16. О работе со счётами в V — VII классах . . . . . . . 53
§ 17. Использование счётов в старших классах средней школы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

Редактор *С. В. Пазельский.* Технический редактор *М. И. Миронцева*
Обложка художника *Г. С. Богачева.*

Подписано к печати 24/X 1953 г. А 05764.
Тираж 100 000 экз. Бумага 84 X 108 1/32 = 1 бум. л. — 3,28 печ. л. Уч.-издат. л. 3,23. Цена 85 коп.

Смоленск, типография имени Смирнова. Заказ № 5041

# ПРЕДИСЛОВИЕ

«В целях дальнейшего повышения социалистического воспитательного значения общеобразовательной школы и обеспечения учащимся, заканчивающим среднюю школу, условий для свободного выбора профессий приступить к осуществлению политехнического обучения в средней школе и провести мероприятия, необходимые для перехода к всеобщему политехническому обучению» [1].

Выполняя эти директивы, школа должна принять решительные меры к улучшению преподавания математики и повышению уровня подготовки учащихся к практической деятельности. В этих целях преподавание всех изучаемых в школе математических дисциплин — арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии — должно быть поставлено так, чтобы учащиеся умели не только логически правильно выводить формулы и доказывать теоремы, но и осмысленно применять их на практике. В частности, ученик должен уметь твердо и уверенно производить вычисления как в устной и письменной форме, так равно и с помощью различных вспомогательных средств вычисления: таблиц, логарифмических линеек, счётов и т. п.

Существующая школьная программа по математике из всех доступных школе счётных инструментов предусматривает ознакомление учащихся лишь с логарифмической линейкой и игнорирует многие другие счётные приборы, в том числе и русские счёты.

К сожалению, многие учителя математики также недооценивают русские счёты и в силу этого не принимают мер к широкому их использованию в школе.

Вследствие такого положения оканчивающие даже десятилетку не владеют техникой вычислений на счётах.

Иногда против употребления русских счётов в школе выдвигаются и необоснованные «принципиальные положения», что якобы «вычислительная сила» счётов слишком ограничена и, следовательно, в век изобретения многих самых совершенных вычислительных машин нет смысла культивировать в школе навыки вычислительной техники на счётах.

На самом же деле «русские торговые счёты в значительной степени механизируют выполнение действий сложения и вычитания. Уже при небольшом навыке эти действия выполняются на счётах почти столь же быстро, как и на арифмометре. Этот простой и широко распространённый прибор облегчает не только выполнение сложения и вычитания, но и других действий» (В. Брадис, Теория и практика вычислений, вып. 1, 1933).

В книге же Н. П. Юрьева «Счётная техника» (Госстатиздат, 1952) русским счётам даётся такая характеристика (стр. 52): «При доста-

[1] Директивы XIX съезда партии по пятому пятилетнему плану развития СССР на 1951—1955 годы, Госполитиздат, 1952.

точном навыке счёты могут заменить вычислительную машину при любых арифметических действиях».

Следует заметить также, что несмотря на век изобретения самых совершенных вычислительных машин, русские счёты до сих пор не потеряли своей практической ценности и широко ещё используются среди многих массовых профессий: продавцов, счетоводов, бухгалтеров, статистиков и др.

Настоящее пособие имеет своей целью, во-первых, содействовать более широкому и массовому использованию счётов на уроках математики (и тем самым содействовать привитию учащимся полезных практических навыков вычислительного характера) и, во-вторых, помочь учителю, не владеющему вычислительной техникой на счётах, самому ознакомиться с ней по доступному пособию.

При описании способов и приёмов вычислений на счётах в книге приводятся примеры, иллюстрирующие эти способы и приёмы, а также иногда поясняющие и технику вычислений на счётах.

В тексте многих параграфов имеются в достаточном количестве методические замечания для учителя по использованию того или иного приёма в школе.

Кроме того, в конце книги помещены два специальных параграфа, один из которых имеет отношение к организации работы на счётах в классе (§ 15) и другой содержит примерный план использования счётов в V классе параллельно с изучением теоретического курса арифметики (§ 16).

При составлении пособия использована следующая литература:

В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, АПН РСФСР, М., 1948.

В. Брадис, Теория и практика вычислений, вып. 1, Учпедгиз, М., 1933.

П. П. Андреев и Н. С. Беленький, Элементарный курс хозяйственных вычислений, Госфиниздат, М., 1937.

Ф Д Лившиц, Хозяйственные вычисления, Госстатиздат, 1951.

Н. И. Цагикян, Арифметика на счётах.

В. П. Юрьев, Счётная техника, Госстатиздат, 1952.

г. Калинин

*Автор*

## § 1. О ПРОИСХОЖДЕНИИ СЧЁТОВ

Русские торговые или конторские счёты — древнего происхождения. Они изобретены ещё при Иване III. Первоначальная их форма на Руси — так называемый «дощатый счёт», т. е. доска или рама с «чётками» (шариками), надетыми на шнуры или верёвки. Дощатый счёт, подобно нынешним торговым счётам, употреблялся в народе часто. «Им всякий торговый счет сочтет и сошной и померной и весчей и денежной всякой счет по всяким статьям и в долях». Так о «дощатом счёте» отзывались наши предки.

Сто с лишним лет назад русские старинные счёты проникли и за границу. Рассказывают, что французский математик Понселе, служивший офицером в наполеоновской армии и попавший в плен к русским в 1812 г., вывез счёты во Францию после своего освобождения и обучил соотечественников пользованию этим оригинальным и весьма удобным счётным прибором.

Русские счёты с давних пор были известны также и немцам, которые называли их «русской счётной машиной».

Они широко применялись в качестве наглядного пособия в прежних русских и иностранных школах.

В настоящее время русские счёты получили широкое распространение среди работников многих массовых профессий: продавцов, счетоводов, бухгалтеров, статистиков, экономистов и т. п., поэтому советская школа должна приучать учащихся с первых лет обучения к использованию при вычислениях столь простого и доступного во всех отношениях счётного прибора, как русские счёты.

К сожалению, наши семилетние и средние школы часто игнорируют употребление счётов при обучении детей не только в старших, но и в младших классах, и тем самым устраняются от привития учащимся полезных практических навыков вычислительного характера.

## § 2. УСТРОЙСТВО СЧЁТОВ И ИХ РАЗНОВИДНОСТИ

Современные счёты представляют собой прямоугольную раму, между большими сторонами которой натянуты проволоки параллельно меньшей стороне рамы и на одинаковом расстоянии друг от друга. На каждой проволоке помещены круглые косточки, которые можно свободно передвигать вправо и влево.

По своим размерам счёты делаются разной величины и с разным числом проволок, но обыкновенно в торговых счётах их бывает не более 15. Бывают и классные счёты для школьного употребления, изготовляемые по образцу торговых, но только больших размеров и на специальной подставке.

В современной практике встречаются счёты нескольких разновидностей: а) обыкновенные счёты прежнего образца, б) обыкновенные счёты современного образца, в) обыкновенные десятичные счёты и г) специальные счёты, изготовляемые по особому заказу.

Обыкновенные счёты прежнего образца перешли к нам из дореволюционной России. Эти счёты состоят из двух частей: верхней и нижней, причём к нижней части обычно относят четыре последние (нижние) проволоки.

На каждой проволоке помещено по 10 косточек, кроме нижней части, где на первой и четвёртой проволоках помещается по 4 косточки. Все косточки обычно окрашены в один и тот же цвет, за исключением двух средних (5-й и 6-й на проволоках, имеющих по 10 косточек, 2-й и 3-й на проволоках, имеющих по 4 косточки), которые окрашены иным цветом (чаще чёрным).

Нижняя часть предназначается для мелких именованных чисел, например копеек, а верхняя для именованных и отвлечённых чисел любых разрядов (рис. 1).

Устройство обыкновенных счётов современного образца отличается от описанных счётов прежнего образца только тем, что их нижняя часть состоит только из трёх проволок, причём 4 косточки имеет лишь одна третья снизу проволока (рис. 2).

Десятичные счёты совсем не имеют проволок с четырьмя косточками. У них на каждой проволоке по десяти косточек, поэтому в таких счётах нет нужды выделять верхнюю и нижнюю части (рис. 3).

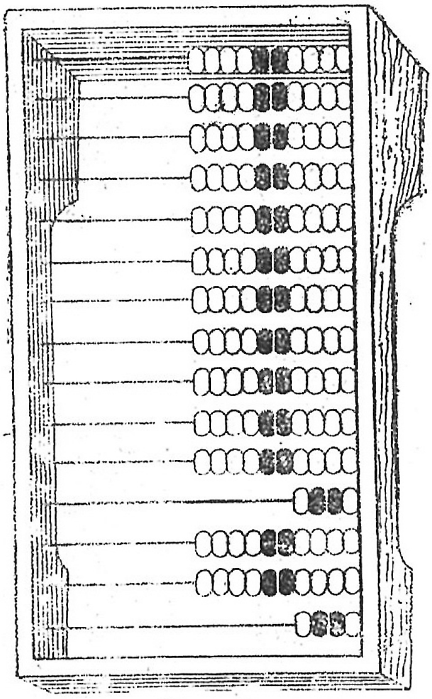


Рис. 1

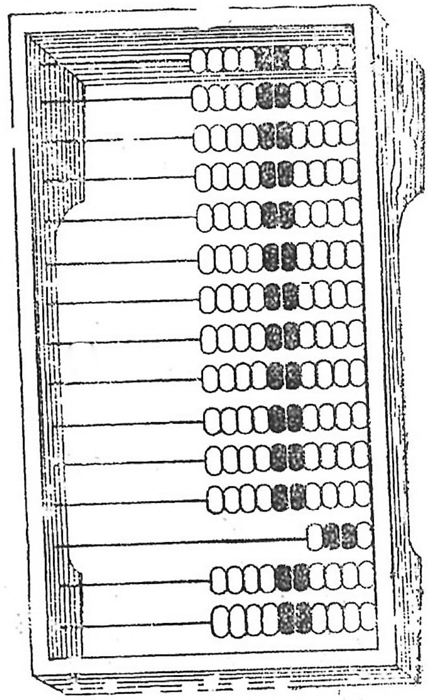


Рис. 2

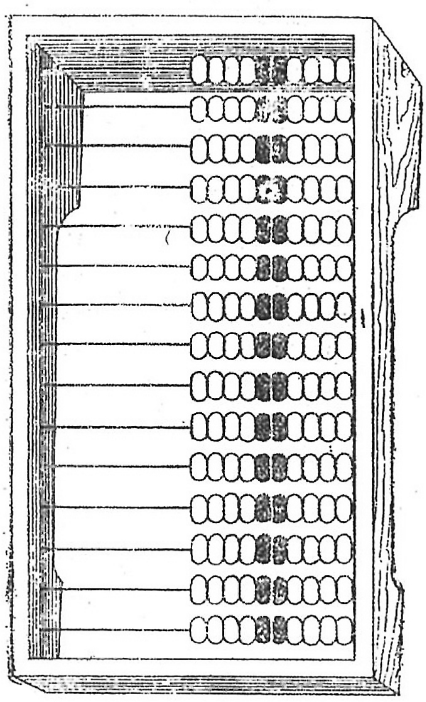


Рис. 3

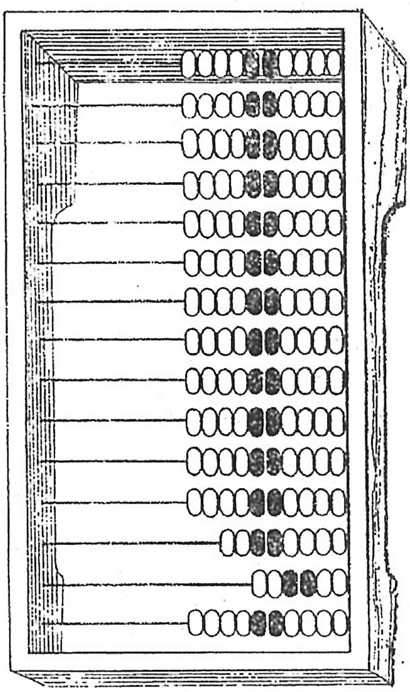


Рис. 4

Специальные счёты могут иметь различное устройство в зависимости от их назначения. Например, если на заводе или на фабрике приходится учитывать рабочее время, то для этой цели полезно иметь такие счёты, чтобы у них на нижней проволоке было 10 косточек для отсчёта минут, на второй 6 — для десятков минут, а на третьей 8 — для учёта человеко-часов в пределах одного рабочего дня. На остальных же проволоках можно иметь и по 10 косточек для подсчёта человеко-дней (рис. 4).

## § 3. ОБЪЯСНЕНИЕ СЧЁТОВ

Объяснение счётов начнём с обыкновенных десятичных. В этих счётах каждая проволока соответствует разрядам чисел, т. е. единицам, десяткам, сотням и т. д., а

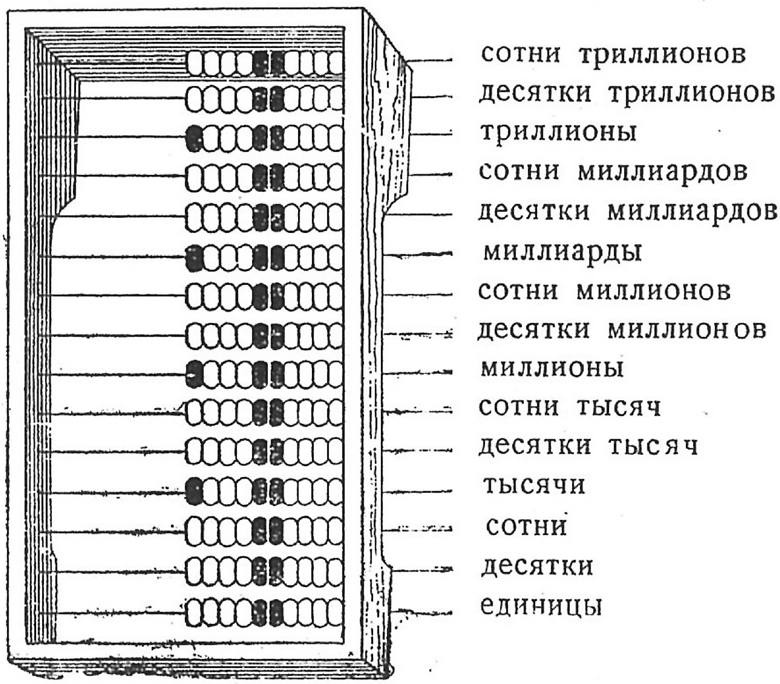



Рис. 5.

каждая группа из трёх проволок, начиная снизу, соответствует определённому счётному классу. Так, например, первые три проволоки снизу могут соответствовать классу единиц, вторая тройка — классу тысяч, третья — классу миллионов и т. д.

Но можно назначение проволок распределить и иначе: первую — третью проволоки снизу отнести к классу тысячных долей, четвёртую — шестую к классу единиц, седьмую — девятую к классу тысяч и т. д. (рис. 5).

Косточки на проволоках соответствуют единицам каждого разряда, и так как единиц в каждом разряде по 10, то столько же косточек и на каждой проволоке.

Очевидно, при таком устройстве счётов 10 косточек каждой проволоки равны по своему значению 1 косточке следующей верхней проволоки, а каждая косточка данной проволоки равна по своему значению 10 косточкам ближайшей нижней проволоки.

Средние косточки на проволоках обычно окрашиваются в чёрный цвет и служат для более лёгкого отсчитывания костей. Для той же цели первые слева косточки на «тысячной», «миллионной» и т. д. проволоках также окра-


Рис. 6.

шиваются в чёрный цвет, что облегчает чтение чисел, отложенных на счётах.

Перед началом вычислений все косточки сдвигаются к правой стороне счётов. В процессе вычисления косточки передвигаются от правой руки к левой или наоборот. В первом случае это называется «класть» или «положить» косточки, а во втором случае «сбросить» или «скинуть».

В обыкновенных счётах прежнего и нового образца проволоки, имеющие по 10 косточек, также соответствуют разрядам чисел, а косточки — единицам каждого разряда, но только в этих счётах распределение проволок по счётным разрядам целесообразнее начинать с нижней проволоки верхней части счётов (рис. 6). При этом условии две проволоки нижней части, имеющие по 10 косточек, могут быть использованы для откладывания десятых и сотых долей единицы.

Проволоки нижней части, содержащие по 4 косточки, имеют особое назначение. Так например: в счётах прежнего образца, где таких проволок две — первая и четвёртая снизу, при счёте рублями и копейками рубли откладывают в верхней части, а копейки — в нижней, на проволоках, имеющих по 10 косточек. Самая же нижняя проволока, содержащая 4 косточки, в этом случае предназначается для откладывания $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ копеек (что теперь встречается редко, поэтому в счётах нового образца эта проволока и отсутствует), а четвёртая — с таким же числом косточек используется для откладывания $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ рублей. Косточки этих проволок могут быть использованы также для счёта четвёртых долей и других единиц измерения.

Если на десятичных счётах производятся товаро-материальные вычисления в метрических мерах, то:

1) при вычислении веса на первых трёх проволоках снизу можно откладывать граммы, на трёх следующих кверху — килограммы, далее — тонны или же: на первых откладывают килограммы, затем — тонны;

2) при вычислениях с мерами длины на нижних трёх проволоках откладывают миллиметры, на следующих трёх — метры, на дальнейших — километры;

3) при вычислениях с мерами жидких и сыпучих тел на первых трёх проволоках откладывают тысячные доли литров, а выше — литры и килолитры.

На обыкновенных же счётах прежнего и нового образца для таких вычислений можно использовать верхнюю часть счётов.

В школе учитель должен тщательно объяснить ученикам и изучить с ними счётное значение каждой проволоки (её класс, разряд) и другие условия, связанные с целевым назначением проволок и их косточек.

## § 4. НУМЕРАЦИЯ НА СЧЁТАХ

Ознакомление учащихся V класса с нумерацией на счётах лучше всего проводить при повторении темы «Устная и письменная нумерация многозначных чисел», пройденной в начальной школе.

Именно здесь очень уместно ознакомить учащихся с нумерацией на счётах и показать им, что нумерация на счётах во многом подобна письменной нумерации с той лишь разницей, что на бумаге число изображается горизонтально (от левой руки к правой) с помощью цифр, а на счётах — вертикально (сверху вниз) с помощью косточек. Но в обоих случаях числа изображаются в том же порядке, как и произносятся, т. е. начиная с единиц наивысшего разряда. Затем на счётах, как и при письме, последовательно откладываются единицы следующих низших разрядов на соответствующих им проволоках, причём отсутствие единиц данного разряда, изображаемое при письме цифрой 0, на счётах изображается тем, что на проволоке, соответствующей этому разряду, не передвигается влево ни одной косточки. Такая проволока иногда называется «пустой».

Приучая учеников изображать числа на счётах, следует обратить особенное внимание на «пустые» проволоки, т. е. на нули.

Параллельно с откладыванием чисел на счётах следует приучать учеников и читать изображённые с помощью косточек числа. При упражнении учащихся в чтении чисел, уже отложенных на счётах, важно приучать учеников правильно определять наивысший разряд числа, используя окрашенные в иной цвет начальные косточки некоторых проволок.

Таким образом, в результате изучения нумерации на счётах ученик должен приобрести навыки двух видов: во-первых, уметь отложить заданное число на счётах, т. е. правильно набрать это число из косточек в правой части счётов и передвинуть их вплотную к левой стороне рамы, и, во-вторых, уметь правильно прочитать отложенное учителем на счётах число.

С первых же шагов изучения вычислений на счётах полезно знакомить учеников и с общепринятой техникой обращения со счётами, с рациональными приёмами откладывания косточек, с правилами использования пальцев рук при откладывании косточек и т. п.

Вот несколько таких полезных указаний (из книги Ф. Д. Лившица «Хозяйственные вычисления»):

1) При откладывании чисел необходимое количество косточек на каждой проволоке набирается не по одной, а в один приём, т. е. сразу «захватывается» всё необходимое их количество, например: 2 косточки, 3 косточки и 5 косточек, если надо отложить число 235.

2) При работе счёты должны лежать против правой руки вычислителя, несколько наискось— так, чтобы верхняя часть рамы была немного сдвинута влево против нижней (рис. 7). Передвижение косточек справа налево при откладывании чисел производится средним пальцем правой руки, передвижение косточек слева направо, или сбрасывание косточек, производится большим пальцем той же руки. Откладывание двух или более одинаковых цифр числа, например 66 или 333, производится сразу ребром руки, т. е. одним движением.

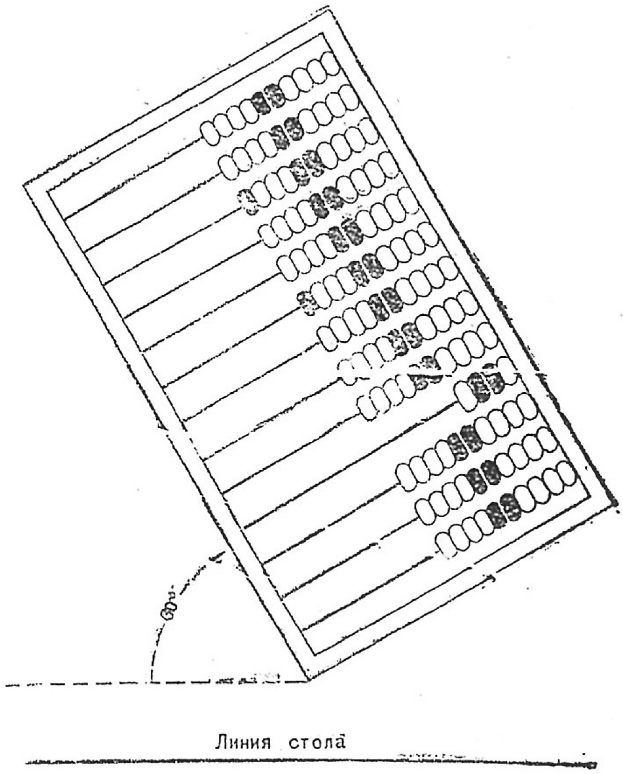



Рис. 7.

3) По окончании каждого очередного вычисления возвращают все косточки на место, т. е. опять придвигают их вплотную к правой кромке рамы. Обычно для этого приподнимают левой рукой левую кромку рамы, вследствие чего все ранее отложенные налево косточки сами механически сдвигаются направо, до упора.

Выше было сказано о назначении окраски отдельных косточек в иной цвет. Покажем теперь на некоторых примерах, как этим пользоваться.

Пусть нам нужно на какой-либо проволоке «положить» 5 косточек из 10, имеющихся на этой проволоке справа. Тогда необходимая для нас группа косточек легко определяется первой косточкой чёрного цвета.

Захватив её пальцем и передвигая вправо, мы вместе с ней передвигаем и ещё 4 светлые косточки, предшествующие чёрной. Всего же будет «положено» на место 5 косточек.

Если нужно взять 3 косточки, то и в этом случае чёрная косточка поможет легко отделить требуемую группу косточек, так как для этого достаточно не дойти до чёрной на одну светлую косточку.

С помощью чёрных средних косточек без затруднений определяются также и группы косточек, содержащие 6, 7, 8, 9 единиц данного разряда.

Изучение нумерации на счётах поможет учащимся глубже уяснить и принцип десятичной нумерации, состоящий в том, что мы единицы числа при счёте организуем в разряды по 10 единиц в каждом, а разряды в свою очередь объединяем в классы по три в каждом, что в практическом отношении даёт нам возможность в устной нумерации называть натуральные числа с помощью небольшого запаса слов, а в письменной — изображать любое натуральное число с помощью всего десяти цифр (используя поместное значение цифры в числе и 0).

Занятия нумерацией на счётах параллельно с повторением устной и письменной нумерации многозначных чисел не потребуют и нового сборника задач и примеров для упражнений на счётах. Нужные задачи и примеры учитель может черпать из стабильного «Сборника задач и упражнений по арифметике» Е. С. Березанской, производя лишь некоторую перефразировку условий в соответствии с поставленной целью. Вот несколько таких примеров для образца (пользуемся изданием 1946 г.):

1. Пример № 6 (стр. 4) можно предложить учащимся в таком виде:

«Сперва отложить на счётах, а затем написать и прочитать числа, состоящие:

а) из шести единиц второго разряда третьего класса, двух единиц третьего разряда второго класса и пяти единиц второго разряда первого класса;

б) из двух единиц первого класса, девяти десятков второго класса и восьми единиц третьего класса.

Отложив на счётах и написав каждое число, назовите, единицы каких разрядов отсутствуют в этом числе и как отсутствие этих единиц обозначено в написанном числе и отложенном на счётах».

Аналогично можно поступить с задачами № 9, 12 и многими другими того же раздела.

2. Условие примера № 45 можно изложить так: «Отложить на счётах и написать обычными цифрами следующие числа: III, XX, VII, XIII, XXIII, LII, LXXIII, CCI, CCII, DCCC, MDXXII, MDCCLXXI, MDCXVIII».

Так же можно поступить и с задачей № 47.

Полезно упражнять учащихся и в изображении на счётах составных именованных чисел метрической системы, в превращении и раздроблении этих мер.

## § 5. СЛОЖЕНИЕ НА СЧЁТАХ

Сложение принадлежит к числу наиболее простых действий на счётах и обычно быстро усваивается учащимися. Оно не требует от ученика особого умственного напряжения и не вызывает сколько-нибудь заметного утомления с его стороны.

Но всё же при обучении учащихся этой операции учитель должен соблюдать постепенный переход от простого к сложному. Для соблюдения этого принципа рекомендуется рассмотреть три возможных на практике случая сложения в следующей последовательности.

Случай 1. Сумма цифр во всех одноименных разрядах слагаемых менее 10.

В этом случае поступают так: а) на основе изученной нумерации откладывают влево первое слагаемое, б) затем набирают из оставшихся справа косточек второе слагаемое и передвигают его вплотную к первому слагаемому, в) наконец, прочитывают образовавшееся слева новое число; оно и будет искомой суммой двух данных слагаемых.

Очевидно, что указанный приём сложения применим к любому числу многозначных слагаемых, суммы цифр одноименных разрядов которых удовлетворяют поставленному выше условию. Так, например, для трёх слагаемых 304 732+51 024+2 143 на счётах слева будем иметь следующую последовательность чисел: сперва 304 732 (первое слагаемое), затем 304 732+51 024= =355 756 и наконец: 355 756+2 143=357 899. Последнее число 357 899 и будет искомой суммой трёх данных слагаемых.

Случай 2. Сумма цифр в некоторых одноименных разрядах слагаемых равна 10.

Поясним этот случай сначала на примере двух слагаемых: 47 302+61 738. Как и в первом случае сложение начинаем с того, что откладываем на счётах первое слагаемое 47 302, а затем прибавляем к нему второе по разрядам от высшего к низшему. Особенность этого случая будет состоять в следующем:

а) на пятой проволоке снизу (имеются в виду десятичные счёты) будем иметь 4+6=10 косточек, которые немедленно сбрасываем (возвращаем на исходное положение вправо) и заменяем их одной равнозначной им косточкой на ближайшей сверху шестой проволоке (пятая проволока остаётся «пустой»);

б) на четвёртой проволоке получим 7+1=8 косточек, которые и оставляем слева;

в) на третьей проволоке будем иметь 3+7=10 косточек, которые также немедленно сбрасываем и заменяем одной новой косточкой на ближайшей сверху четвёртой проволоке, в результате чего на четвёртой проволоке будет 8+1=9 косточек, а третья остаётся «пустой»;

г) на второй проволоке получим 0+3=3 косточки, а на первой 2+8=10 косточек, которые сбрасываем все вправо и заменяем новой косточкой на второй проволоке, в результате чего на второй проволоке будет 3+1=4 косточки, а первая остаётся «пустой».

Таким образом, поразрядный характер прибавления второго слагаемого к первому в нашем примере отобразится на счётах в виде следующей последовательности чисел: 47 302+60 000=107 302, 107 302+1 000= =108 302, 108 302+700=109 002, 109 002+30=109 032, 109 032+8=109 040. Последнее из чисел этой последовательности и будет искомой суммой.

Следовательно, особенность процесса сложения во втором случае состоит в том, что если при сложении единиц некоторых одноименных разрядов будут положены влево все 10 косточек на одной и той же проволоке, то их надо немедленно скинуть, заменив равнозначащей одной косточкой ближайшей верхней проволоки.

Разобранный способ сложения не зависит от числа слагаемых.

Случай 3. Сумма цифр в некоторых одноименных разрядах слагаемых превышает 10.

Прежде чем знакомить учеников с этим случаем сложения, полезно дать им понятие об арифметическом дополнении хотя бы только для однозначного числа: «Число, которое дополняет данное однозначное число до 10, называется арифметическим дополнением его» Так, для 7 арифметическое дополнение будет 3, для 9 будет 1, для 6 будет 4 и т. д. Понятие арифметического дополнения значительно упростит объяснение третьего случая сложения.

Пусть надо найти на счётах сумму 84 356+43 938, тогда, отложив на счётах первое слагаемое и прибавляя второе по разрядам, начиная с высшего, будем иметь:

а) на пятой проволоке из оставшихся справа 2 косточек нельзя отложить влево 4 косточки. В таком случае отложим на ближайшей сверху (шестой) проволоке 1 косточку влево, а на пятой скинем дополнение 4 до 10, т. е. 10—4=6 косточек из имеющихся слева 8 косточек первого слагаемого. В результате этой двойной операции (откладывания одной новой косточки на шестой проволоке и сбрасывания 6 косточек на пятой) будем иметь на шестой проволоке 1 косточку, а на пятой 8—6=2 косточки. Счёты же покажут сумму 84 356+40 000==124 356;

б) на четвёртой проволоке получим 4+3=7 косточек, которые пока и оставляем в левой части. Счёты же покажут сумму 124 356+3 000=127 356;

в) на третьей проволоке опять нельзя из оставшихся там справа 7 косточек (после первого слагаемого) набрать 9 косточек. Тогда отложим 1 новую косточку на четвёртой проволоке, а на третьей сбросим 10—9=1 косточку, которая служит арифметическим дополнением 9 до 10. В результате будем иметь на четвёртой проволоке 7+1=8 косточек, а на третьей 3—1=2 косточки. Счёты же покажут сумму 127 356+900=128 256;

г) на второй проволоке получим $5+3=8$ косточек, следовательно, предыдущая сумма увеличится на 30 ($128\,256+30=128\,286$);

д) на первой же проволоке будем иметь опять невозможный случай, где из 4 оставшихся справа косточек надо набрать 8. Используя и здесь арифметическое дополнение 8 до 10, получим на второй проволоке $8+1=9$ косточек, а на первой $6-2=4$ косточки. Окончательный результат сложения будет $128\,286+$ $+8=128\,294$.

Обобщая приёмы всех трёх случаев, можно ученикам дать следующее правило сложения на счётах: «Отложив первое слагаемое, набираем каждое следующее из остающихся направо косточек. Если косточек, остающихся на данной проволоке, недостаточно для непосредственного прибавления требуемых $m$ косточек, то прибавляется 1 косточка на ближайшей высшей проволоке и одновременно на данной сбрасывается $(10-m)$ косточек, т. е. дополнение числа $m$ до 10. Образующиеся на проволоках полные десятки косточек (как в случае 2) заменяются единицами следующей высшей проволоки» (Лившиц, Хозяйственные вычисления).

Проверка сложения на счётах производится так же, как и в устной или письменной арифметике, т. е. используя свойство переместительности суммы.

Примеры для упражнений с учащимися в сложении на счётах можно заимствовать из сборника Е. С. Березанской (раздел II, стр. 7, № 49—60).

Но для работы со счётами уместно также использовать журнальный, газетный материал, который иногда трудно поддаётся арифметической обработке с помощью устных или письменных вычислений.

Приведём пример.

В приведенной ниже таблице дано движение промышленно-производственных (основных) средств некоторого промышленного предприятия за отчётный год (в тысячах рублей):

а) с помощью счётов заполните последний столбец и последнюю строку;

б) запишите в рублях итоговые суммы каждого столбца.

По какому признаку можно видеть, что итоговая сумма третьего столбца найдена правильно?

| № п.п. | Виды промышленно-производственных средств | Наличие на начало года | Поступило в отчётном году | Наличие на конец года |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Здания | 35 805 | 15 482 | |
| 2 | Сооружения | 8 548 | 4 362 | |
| 3 | Силовое оборудование | 3 826 | 1 454 | |
| 4 | Производственное оборудование | 24 750 | 15 342 | |
| 5 | Передаточные устройства | 826 | 564 | |
| 6 | Транспортные средства | 4 838 | 2 325 | |
| 7 | Инвентарь, инструменты и прочие средства | 3 404 | 1 256 | |
| | Итого | | | |

На этом примере ученики особенно хорошо увидят преимущества сложения на счётах перед приёмами письменного сложения, так широко распространённого в школьной практике.

## § 6. ВЫЧИТАНИЕ НА СЧЁТАХ

Вычитание на счётах производится как действие, обратное сложению, т. е. сперва откладывается уменьшаемое, а затем сбрасывается с него (передвигается слева направо) вычитаемое по разрядам, от высшего к низшему. Для лучшего уяснения учащимися приёмов вычитания рекомендуется рассмотреть их в следующей последовательности.

Случай 1. Во всех разрядах вычитаемого цифры меньше, чем в одноименных разрядах уменьшаемого. В этом случае вычитание сводится к последовательному сбрасыванию косточек на каждой из проволок, начиная с высшего разряда вычитаемого.

Так, в примере 7 354—232, отложив уменьшаемое и сбрасывая затем на третьей снизу проволоке 2 косточки, на второй 3 и на первой 2, получим на счётах остаток 7 354—232=7 122.

Случай 2. В некоторых разрядах цифры вычитаемого больше цифр уменьшаемого.

В этом случае вычитание производится так: на ближайшей верхней проволоке к той, где вычитание невозможно, скидывают 1 косточку, равнозначащую 10 косточкам данной проволоки, затем на последней прикидывают число косточек, дополняющих до 10 число косточек, подлежащих сбрасыванию, т. е. прикидывается:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | косточки, | когда | вычитается | 8 |
| 3 | » | » | » | 7 |
| 4 | » | » | » | 6 |
| 5 | » | » | » | 5 и т. д. |

Поясним это на примере. Пусть требуется найти разность 82 645 — 7 382. Отложив уменьшаемое 82 645 и приступая к вычитанию единиц тысяч вычитаемого из соответствующего разряда уменьшаемого, мы будем иметь случай, когда с 2 косточек четвёртой проволоки надо сбросить 7 косточек, что явно невозможно. Теперь и обращаемся к указанной выше двойной вспомогательной операции, т. е. сбрасываем 1 косточку на ближайшей верхней пятой проволоке и откладываем 3 косточки влево на четвёртой проволоке, где вычитание было невозможно. В результате будем иметь на счётах число 82 645—7 000 = 75 645.

Сбрасывание косточек на третьей проволоке происходит без затруднений, так как имеем случай 6—3=3 косточки. После этого на счётах будем иметь 75 345.

Затруднение на второй проволоке опять легко преодолевается с помощью «двойной операции» или арифметического дополнения, в результате чего на третьей проволоке останется 3 — 1 = 2 косточки, а на второй будет 4 + 2 = 6 косточек. Счёты же покажут промежуточный результат 75 345 — 80 = 75 265.

Вычитание на первой проволоке снизу выполняется без затруднений 5—2=3 косточки, после чего на счётах получим окончательный результат 75 265—2=75 263.

Здесь важно обратить внимание учащихся на характер «двойной операции»: она аналогична той, которая применялась при сложении, но порядок её выполнения обратный.

С л у ч а й 3. Некоторые цифры уменьшаемого нули.

Здесь хотя и имеем частный случай предыдущего, но ввиду его некоторой особенности (наличие «пустых» проволок в изображении уменьшаемого) полезно разобрать его с учащимися отдельно на нескольких отличающихся друг от друга примерах.

Сначала надо взять такие числа в качестве уменьшаемого, в которых нет подряд двух и более нулей, и показать, что в этом подслучае можно поступить точно так же, как во втором случае.

Затем следует перейти к примерам, где в уменьшаемом встречаются два и более нулей подряд. В этом подслучае в каждой группе «пустых» проволок, следующих одна за другой, поступают так: сбрасывают 1 косточку на той верхней проволоке, где косточки впервые имеются вслед за «пустыми» проволоками, и откладывают влево все 10 косточек самой нижней из «пустых» проволок этой группы, на всех же остальных «пустых» проволоках данной группы откладывают влево по 9 косточек, а затем поступают, как в случае 2, причём это преобразование уменьшаемого лучше производить в самом начале действия. Так, если требуется найти разность 800 074 — 231, то, отложив на счётах уменьшаемое, производим сперва указанное выше преобразование уменьшаемого на счётах и получаем: 800 074—231 = 799 (10) 74—231, где (10) означает наличие слева 10 косточек на третьей проволоке снизу.

Теперь отчётливо видна польза произведённого преобразования, ибо нахождение разности свелось к самому простому — первому случаю. Она будет 799 843.

С л у ч а й 4. Иногда рекомендуется рассмотреть с учащимися и случай 4, когда цифры уменьшаемого и вычитаемого некоторых одноимённых разрядов равны между собой. В этом случае при вычитании цифр этих разрядов соответствующие им проволоки окажутся «пустыми», так как все косточки уменьшаемого будут передвинуты вправо.

Так как вычитание производится поразрядно, то ради общности приёма можно вычитание начинать с тех разрядов, которые имеют одинаковые цифры в уменьшаемом и вычитаемом, после чего вычитание сведётся к случаю 3.

Например, для разности 764 382—362 384 с учётом изложенных выше преобразований в случае наличия нулей в уменьшаемом, будем иметь на счётах: 764 382 — — 362 384 = 704 002 — 302 004 = 402 002 — 4 = = 4 019 (10) 2 — 4 = 401 998, где (10) означает цифру, соответствующую 10 единицам второго разряда.

В заключение можно дать учащимся следующее общее правило вычитания на счётах:

«Отложив уменьшаемое, последовательно сбрасываем с него по разрядам, от высшего к низшему, каждое вычитаемое, одно за другим, если их несколько.

Если косточек, остающихся в уменьшаемом, на какой-либо проволоке недостаточно для непосредственного сбрасывания $m$ косточек, то снимается 1 косточка на следующей высшей проволоке и одновременно на данной прибавляется $(10-m)$ косточек» (Ф. Д. Лившиц, Хозяйственные вычисления).

Проверка вычитания, как и в письменной арифметике, делается двояко: сложением вычитаемого с разностью или вычитанием полученной разности из уменьшаемого. Вычитание будет правильным, если в первом случае (при сложении) получим данное уменьшаемое, а во втором (при вычитании) будем иметь данное вычитаемое.

Для упражнений на счётах в производстве действия вычитания можно использовать примеры и задачи из сборника Е. С. Березанской (раздел II, № 61 — 85).

Но для использования счётов можно рекомендовать и более сложные случаи вычислений. Например, дать учащимся хотя бы следующую ведомость планирования прибыли от реализации продукции некоторым предприятием по оптовым ценам (в тысячах рублей) и предложить им с помощью счётов определить прибыль от намеченной планом реализации продукции по оптовым ценам как в тысячах рублей, так и в рублях.

| Наименование отдельных статей планирования | По фабрично-заводской себестоимости | По оптовым ценам предприятий |
|---|---|---|
| I. Продукция, перешедшая с прошлого года | 300 | 312 |
| В том числе: а) на складе | 100 | 104 |
| б) в пути к потребителю | 200 | 208 |
| II. Выпуск товарной продукции в планируемом году | 7990 | 8352 |
| III. Остаток нереализованной продукции на конец планируемого года | 330 | 350 |
| В том числе: а) на складе | 110 | 115 |
| б) в пути к потребителю | 220 | 235 |
| Итого реализация (I+II—III) | | |
| Коммерческие расходы | 110 | |
| Всего | | |

Этот пример поучителен и тем, что не все данные подлежат суммированию в том и другом столбце, как обычно привыкли поступать ученики при решении многих задач. Кроме того, компоненты плана под римскими цифрами I и II складываются, а под цифрой III вычитаются из предыдущей суммы. (Ответ: 144 тыс. руб.).

## § 7. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ВОПРОСУ ОБ УМНОЖЕНИИ НА СЧЁТАХ В ШКОЛЕ

Умножение принадлежит к более трудным и трудоёмким вычислительным процессам на счётах, но зато оно в большей степени, чем сложение и вычитание, побуждает вычислителя к находчивости, сообразительности, к творческому подходу в части применения арифметических знаний для нахождения произведения данных чисел с наименьшей затратой сил, труда и времени.

При обучении математике в школе эта сторона умножения на счётах заслуживает внимания со стороны учителя и может быть им использована с воспитательной целью. Занимаясь умножением на счётах, ученик сам убедится в необходимости искать пути экономии времени за счёт применения наиболее рациональных приёмов вычисления.

При умелом же подходе учителя к делу ученик будет искать преодоления трудностей в более сознательном применении теоретических знаний к процессу вычислений (законов произведения), в более прочном усвоении им некоторых искусственных приёмов вычислений и приёмов быстрого устного счёта, в приобретении и закреплении целого ряда устных практических навыков счёта.

В чём же кроются трудности умножения на счётах? Основная из них заключается в том, что для нахождения произведения мы не можем практически использовать при производстве действия во всех случаях определение умножения как частного случая сложения равных слагаемых ($am = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{m \text{ раз}}$). Например, если надо умножить 378 на 3, то, откладывая трижды множимое, легко получим $378 \times 3 = 378 + 378 + 378 = 1\,134$, но в случае умножения 378 на 57 такой путь умножения привёл бы к неоправданной затрате труда и времени со стороны вычислителя.

Вот это обстоятельство и заставляет вычислителя искать более рациональные пути умножения, для чего обычно широко используются некоторые вспомогательные приёмы вычислений, а также многие всевозможные упрощения умножения, основанные на свойствах последнего.

Рассмотрим сначала те из них, которые потребуются нам при изучении умножения на однозначное число.

1) Умножение натурального числа на 10, 100, 1000, ..., $10^n$.

В арифметике такой случай умножения сводится к тому, что к множимому приписывается справа столько нулей, сколько их имеется в множителе.

При умножении же на счётах это значит, что отложенное на счётах множимое надо перенести выше на столько проволок, сколько нулей в множителе. Например, при отыскании произведения $248 \times 100$ надо, отложив число 248, перенести его выше на две проволоки, т. е. для получения произведения надо 2 косточки с третьей проволоки перенести на пятую, 4 косточки со второй — на четвёртую и 8 косточек с первой проволоки перенести на третью. В результате такого перенесения множимого и получим на счётах произведение $248 \times 100 = 24\,800$. Но можно было и сразу отложить множимое 248 на две проволоки выше обычных.

Очевидно этот способ можно применять и при умножении натурального числа на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Отличие будет состоять только в том, что отложенное множимое придётся переносить не выше, а ниже на столько проволок, сколько нулей в дробном множителе впереди 1, считая и нуль целых, или сразу откладывать множимое ниже обычных проволок в зависимости от количества нулей множителя.

2) Деление натурального числа на 2.

Как ни странно, но этой операцией приходится широко пользоваться даже при умножении на однозначное число, при этом полезно различать два случая, а именно: когда на всех проволоках лежит чётное число косточек и когда на некоторых из них имеется и нечётное число косточек. В первом случае деление можно производить поразрядно в любом порядке, а во втором целесообразнее начинать с низших проволок. Разберём на примерах каждый из указанных случаев.

а) В случае, когда на всех проволоках лежит чётное число косточек, то деление на 2 выполняется просто: отложив данное делимое, оставляем на каждой проволоке лишь половину из имеющихся на ней косточек, а остальные (также половину) сбрасываем. Так, в примере 8 264 : 2 оставим на четвёртой проволоке 4 косточки (8 : 2=4), на третьей — 1 (2 : 2=1), на второй — 3 (6 : 2=3) и на первой — 2 (4 : 2=2). Оставшиеся косточки и дадут на счётах частное 8 264 : 2 = 4 132.

б) В случае, когда на какой-либо проволоке лежит нечётное число косточек, то нечётное число косточек этой проволоки мысленно усиливают на 1, например, вместо фактических 3 косточек считают 4, затем сбрасывается с этой проволоки число косточек, соответствующее половине «усиленного» числа, так в указанном примере с 3 сбрасывается 2 и одновременно с этим откладывается влево ещё 5 новых косточек на ближайшей нижней проволоке к той, с которой скидывали «половину» косточек.

С проволоками же, имеющими чётное число косточек, поступают, как было указано выше.

Поясним сказанное примером. Пусть надо 87 436 : 2. Тогда, отложив делимое, приступаем к делению, начиная с низших разрядов, для чего: на первой проволоке оставляем 3 косточки, на второй — 1 и одновременно откладываем влево 5 косточек на первой проволоке (где их будет теперь 3 + 5 = 8), на третьей оставляем 2 и на четвёртой — 3 и сейчас же откладываем влево на третьей проволоке 5 новых косточек (где их будет теперь 2 + 5 = 7); на пятой проволоке оставляем 4 косточки. Этим и заканчивается деление. Искомое частное будет 43 718.

Если цифра единиц данного делимого будет нечётная, а счёты десятичные, то при откладывании делимого надо нижнюю проволоку оставить «пустой» для десятых долей, которые получатся от деления нечётного числа единиц на 2. На счётах же обыкновенных для этой цели можно использовать проволоки нижней части, имеющие по 10 косточек.

Кроме разнообразных вспомогательных приёмов, при умножении на счётах даже на однозначное число приходится пользоваться многими свойствами произведения. Укажем некоторые из них:

1) При умножении на небольшие однозначные числа 2, 3 широко используется само определение действия умножения на натуральное число. Например, нахождение произведения $724 \times 3$ сводится на счётах к сложению: $724 \times 3 = 724 + 724 + 724 = 2\,172$, о чём уже было сказано выше.

2) При умножении на составное число широко применяется теорема об умножении числа на произведение, т. е. $a\,(вс) = (ав)\,с$. Например, на счётах выгодно находить следующие произведения по таким схемам:

$$а)\ 724 \cdot 4 = (724 \cdot 2) \cdot 2 = (724 + 724) \cdot 2 = 1\,448 + \\ + 1\,448 = 2\,896.$$

$$б)\ 724 \cdot 200 = (724 \cdot 2) \cdot 100 = (724 + 724) \cdot 100 = \\ = 1\,448 \cdot 100 = 144\,800 \text{ и т. д.}$$

3) Распределительный закон умножения в применении к сумме и разности значительно облегчает многие случаи умножения на счётах, что можно видеть на следующих примерах:

$$а)\ 724 \cdot 12 = 724 \cdot (10 + 2) = 724 \cdot 10 + 724 \cdot 2 = \\ (7\,240 + 724) + 724 = 7\,964 + 724 = 8\,688.$$

$$б)\ 724 \cdot 8 - 724 \cdot (10 - 2) = 724 \cdot 10 - 724 \cdot 2 = \\ (7\,240 - 724) - 724 = 5\,792.$$

Используя таблицу умножения, распределительный закон и небольшие устные вычисления, предыдущее произведение можно найти на счётах и по иной схеме:

$$724 \cdot 8 = (700 + 20 + 4) \cdot 8 = (5\,600 + 160) + 32 = 5\,792.$$

Эти вспомогательные приёмы вычислений и свойства умножения в первую очередь дают возможность систематизировать различные случаи и практические приёмы умножения на счётах на однозначное число, что и будет сделано в следующем параграфе.

## § 8. УМНОЖЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Применяя рассмотренные в § 7 приёмы умножения на счётах к частному случаю умножения числа 724 на однозначные числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, можно с учащимися составить следующую сводную таблицу наиболее целесообразных правил умножения на однозначные числа, поясняя каждое из них как словесно, так и с помощью числовых компонентов данного примера.

| Множитель | Приёмы умножения на счётах | Правило умножения |
|---|---|---|
| 2 | $724 \cdot 2=724+724=1448$ | Множимое следует отложить на счётах дважды |
| 3 | $724 \cdot 3=(724+724)+724=2172$ | Множимое следует отложить трижды |
| 4 | $724 \cdot 4=(724+724)+1448=$ $=1448+1448=2896$ | Множимое откладывают дважды и к полученному числу прибавляют такое же |
| 5 | $724 \cdot 5=\frac{724 \cdot 10}{2}=3620$ | Множимое откладывают на одну проволоку выше, чем ему положено быть, и результат делят на 2 |
| 6 | $724 \cdot 6=724 \cdot 5+724=4344$ или $724 \cdot 6=(724 \cdot 2) \cdot 3=4344$ | Множимое умножают на 5 (как показано выше) и к результату прибавляют множимое. Или: сперва множимое удваивают через сложение, а затем полученный результат утраивают через сложение |
| 7 | $724 \cdot 7=724 \cdot 5+724+724=$ $=5068$ или $724 \cdot 7=724 \cdot 10-724 \cdot 3=$ $=7240-724-724-724=5068$ | Множимое умножают на 5 и к результату дважды прибавляют множимое. Или: множимое умножают на 10, откладывая его проволокой выше, и от результата трижды отнимают множимое |

| Множитель | Приёмы умножения на счётах | Правило умножения |
|---|---|---|
| 8 | $724 \cdot 8 = 724 \cdot 10 - 724 \cdot 2 = 7240 - 724 - 724 = 5792$ | Множимое умножают на 10 и от результата дважды отнимают множимое |
| 9 | $724 \cdot 9 = 724 \cdot 10 - 724 = 7240 - 724 = 5816$ | Множимое умножают на 10 и от результата отнимают множимое |

Приведённую таблицу (схема заимствована из книги Лившица «Хозяйственные вычисления») полезно сделать большого размера и пользоваться ею на классных занятиях, когда применяются счёты.

В качестве материала для упражнений можно взять примеры из сборника Е. С. Березанской № 166—167 (стр. 15).

Но можно использовать и следующие примеры для закрепления навыков в приёмах умножения на однозначное число:

1) $375 \cdot 10$; $536 \cdot 100$; $7342 \cdot 1000$; $37{,}4 \cdot 10$; $38{,}2 \cdot 100$; $5{,}85 \cdot 10$.

2) $748 \cdot 0{,}1$; $346 \cdot 0{,}01$; $8246 \cdot 0{,}001$; $25{,}6 \cdot 0{,}1$; $356{,}4 \cdot 0{,}01$.

3) $286:2$; $8662:2$; $4480:2$; $254:2$; $3854:2$; $354:2$; $375:2$.

4) $524 \cdot 2$; $340 \cdot 2$; $756 \cdot 2$; $524 \cdot 3$; $340 \cdot 3$; $826 \cdot 3$.

5) $350 \cdot 4$; $246 \cdot 4$; $324 \cdot 6$; $245 \cdot 6$; $780 \cdot 6$; $550 \cdot 8$; $652 \cdot 8$; $340 \cdot 5$; $420 \cdot 5$.

6) $56 \cdot 20$; $35 \cdot 300$; $53 \cdot 200$; $280 \cdot 12$; $350 \cdot 15$.

7) $75 \cdot 7$; $36 \cdot 7$; $82 \cdot 9$; $540 \cdot 7$; $325 \cdot 9$.

## § 9. УМНОЖЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

При умножении любого числа на двузначное пользуются в каждом отдельном случае приёмом, который окажется наиболее удобным. Но всё же можно указать такие частные случаи умножения на двузначное число, которые широко используются и в общем случае. К таким частным случаям относятся:

1) Умножение на любое число, у которого только первая цифра значащая.

В этом случае используется свойство умножения на составное число: $724 \cdot 300 = (724 \cdot 3) \cdot 100$. Следовательно, такая операция на счётах сводится к тому, что множимое сперва умножается на значащую цифру согласно правилам § 8, а затем полученный результат переносится кверху на столько проволок, сколько нулей во множителе. Например, при умножении $724 \cdot 20$ поступаем так: откладываем на счётах дважды по 724 и получаем 1 448, затем переносим это число на одну проволоку выше и получаем на счётах 14 480.

В случае же умножения $724 \cdot 500$ поступаем по схеме: $(724 \cdot 5) \cdot 100 = \frac{724 \cdot 10}{2} \cdot 100$, т. е. откладываем множимое на одну проволоку выше, затем полученное число делим на 2 и результат переносим ещё на 2 проволоки выше. В этом примере на счётах будем иметь такую последовательность чисел: 724 (данное множимое), 7 240 (после перенесения множимого кверху на одну проволоку), 3 620 (после деления предыдущего числа на 2), 362 000 (после перенесения предыдущего результата на 2 проволоки выше).

2) Умножение на двузначные числа в пределах второго десятка, т. е. на 11, 12, 13, . . . ., 19.

Общий приём умножения на двузначные числа в пределах 20 состоит в том, что данный множитель разлагают на сумму одного десятка и единиц, а затем, применяя распределительный закон, используют рассмотренные выше правила умножения на 10 и на однозначное число.

При этом могут быть два случая в применении закона дистрибутивности. В первом из них множимое сначала умножают на 10, потом — на цифру единиц множителя и результаты складывают, а во втором — множимое сперва умножают на цифру единиц множителя, а затем — на 10 и результаты объединяют в сумму.

Но первый из них уместен лишь тогда, когда цифры единиц множителя небольшие по значению, а второй предпочтительней первого при больших значениях цифры единиц множителя.

В применении к счётам эти правила будут состоять в следующем.

Первое. Откладываем данное множимое на одну проволоку выше, чем следовало бы его отложить, затем к полученному результату (при небольшом значении цифры единиц множителя) прибавляем множимое столько раз, какова цифра единиц множителя.

Второе. Умножаем множимое на цифру единиц множителя по правилам § 8, а потом к полученному результату прибавляем множимое, откладывая его на одну проволоку выше обычного. На примерах эти правила будут выглядеть так:

а) $724 \cdot 12 = 724 \cdot 10 + 724 \cdot 2 = 7\,240 + 724 + 724 = 8\,688.$

б) $724 \cdot 18 = 724 \cdot 8 + 724 \cdot 10 = (724 \cdot 10 - 724 \cdot 2) + 724 \cdot 10 = (7\,240 - 724 - 724) + 7\,240 = 5792 + 7\,240 = 13\,032.$

Ввиду практической важности случая умножения на двузначные числа (до 20) составим сводную таблицу наиболее рациональных приёмов этого умножения.

| Множитель | Приём умножения на счётах | Правило умножения |
|---|---|---|
| 11 | $724 \cdot 11 = 724 \cdot 10 + 724 = 7\,964$<br>Или:<br>$724 \cdot 11 = 724 + 724 \cdot 10 = 7\,964$ | Множимое откладываем на одну проволоку выше обычного и прибавляем множимое.<br>Или: один раз откладываем множимое на обычных проволоках, а другой на одну проволоку выше |
| 12 | $724 \cdot 12 = 724 \cdot 10 + 724 + 724 = 8\,688$<br>Или:<br>$724 \cdot 12 = 724 + 724 + 724 \cdot 10 = 8\,688$ | Множимое откладываем на одну проволоку выше обычного и дважды прибавляем множимое.<br>Или: множимое откладываем дважды на обычных проволоках и один раз на проволоку выше |

| Множитель | Приём умножения на счётах | Правило умножения |
|---|---|---|
| 13 | $724 \cdot 13 = 724 \cdot 10 + 724 + 724 + 724 = 9\,412$<br>Или:<br>$724 \cdot 13 = 724 + 724 + 724 + 724 \cdot 10 = 9\,412$ | Множимое откладываем на одну проволоку выше обычного и к результату трижды прибавляем множимое<br>Или: множимое откладываем трижды на обычных проволоках и один раз на проволоку выше |
| 14 | $724 \cdot 14 = (724 + 724) + 1\,448 + 724 \cdot 10 = 10\,136$ | Множимое откладываем дважды, прибавляем полученный результат и затем откладываем множимое на проволоку выше |
| 15 | $724 \cdot 15 = \frac{724 \cdot 10}{2} + 724 \cdot 10 = 10\,860$ | Множимое откладываем на проволоку выше и делим полученный результат на 2, затем ещё раз откладываем множимое на проволоку выше |
| 16 | $724 \cdot 16 = \frac{724 \cdot 10}{2} + 724 + 724 \cdot 10 = 11\,584$ | Множимое откладываем на проволоку выше, результат делим на 2, прибавляем множимое и наконец ещё раз откладываем множимое на проволоку выше |
| 17 | $724 \cdot 17 = 724 \cdot 20 - 724 - 724 - 724 = 12\,308$ | Множимое откладываем два раза на проволоку выше и из результата трижды вычитаем множимое |
| 18 | $724 \cdot 18 = 724 \cdot 20 - 724 - 724 = 13\,032$ | Множимое откладываем дважды на проволоку выше и из результата дважды вычитаем множимое |
| 19 | $724 \cdot 19 = 724 \cdot 20 - 724 = 13\,756$ | Множимое откладываем дважды на проволоку выше и сбрасываем его один раз на обычных проволоках |

3) Умножение с помощью округления множителя.

Этот способ особенно выгодно применять в тех случаях, когда после умножения множимого на значащую цифру с нулём приходится сбрасывать или прикидывать то же произведение, но уменьшенное в 10 раз.

а) Прибавление того же произведения

Примеры.

При умножении числа:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| на 22 | следует | умножить | на 20 | и прибавить то же произведение, положив его на одну проволоку ниже. |
| » 33 | » | » | » 30 | |
| » 44 | » | » | » 40 | |
| » 55 | » | » | » 50 | |
| » 66 | » | » | » 60 | |
| » 77 | » | » | » 70 | |
| » 88 | » | » | » 80 | |

Теоретическое оправдание этот случай находит в том, что во всех примерах цифра единиц одинакова с цифрой десятков, поэтому произведение на цифру единиц должно быть в 10 раз меньше произведения на такую же цифру десятков.

б) Вычитание того же произведения.

Примеры.

При умножении числа:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| на 18 | следует | умножить | на 20 | и отнять то же произведение, скинув его на одну проволоку ниже. |
| » 27 | » | » | » 30 | |
| » 36 | » | » | » 40 | |
| » 45 | » | » | » 50 | |
| » 54 | » | » | » 60 | |
| » 63 | » | » | » 70 | |
| » 72 | » | » | » 80 | |
| » 81 | » | » | » 90 | |

Подобным же образом можно поступать и при умножении на множители, близкие к показанным в предыдущих таблицах, причём скидывать или прикидывать данное множимое приходится уже не один раз, а нужное число раз. Например: $724 \cdot 24$. Умножая 724 на 20, получим 14 480; к этому числу прибавляем два раза то же произведение, взятое на одну проволоку ниже, т. е. 1 448. Окончательный результат будет: $14\,480 + 1\,448 \cdot 2 = 14\,480 + 1\,448 + 1\,448 = 17\,356$.

Для умножения на прочие двузначные числа нельзя дать общей наиболее рациональной схемы.

Приходится самому вычислителю подбирать формулу вычисления для каждого отдельного случая. Вот несколько примеров, где для каждого из них применена своя формула в зависимости от особенностей множителя:

а) $724 \cdot 48$

Так как $48=50-2$, то поступаем по формуле: $724 \cdot 48=\frac{724 \cdot 100}{2}-724-724=36\,200-724-724=$ $=34\,752$.

б) $724 \cdot 57$

Так как $57=60-3=50+10-3$, то избираем схему: $724 \cdot 57=\frac{724 \cdot 100}{2}+724 \cdot 10-724-724-724=36\,200+$ $+7\,240-724-724-724=41\,268$.

в) $724 \cdot 89$

Так как $89=100-10-1$, то вычисления ведём по схеме: $724 \cdot 89=724 \cdot 100-724 \cdot 10-724=72\,400-$ $-7\,240-724=64\,436$.

г) $724 \cdot 92$

Так как $92=100-10+2$, то избираем для вычислений схему: $724 \cdot 92=724 \cdot 100-724 \cdot 10+724+724=$ $=72\,400-7\,240+724+724=66\,608$.

д) $724 \cdot 75$

Так как $75=50+25$, то можно принять схему: $724 \cdot 75=\frac{724 \cdot 100}{2}+\frac{724 \cdot 100}{2} : 2=36\,200+18\,100=$ $=54\,300$.

е) $724 \cdot 83$

Так как $83=100-17=100-10-7=100-10-$ $-5-2$, то возьмём формулу: $724 \cdot 83=724 \cdot 100-$ $-724 \cdot 10-\frac{724 \cdot 10}{2}-724-724=72\,400-7\,240-$ $-3\,620-724-724=60\,092$.

Для упражнений в классе с учащимися и на дому можно рекомендовать следующие примеры:

1) $986 \cdot 11$; $742 \cdot 12$; $654 \cdot 13$; $498 \cdot 14$; $265 \cdot 15$; $362 \cdot 16$; $468 \cdot 17$; $354 \cdot 18$; $250 \cdot 19$.

2) $35 \cdot 22$; $48 \cdot 33$; $24 \cdot 44$; $37 \cdot 55$; $25 \cdot 66$; $72 \cdot 77$; $42 \cdot 88$.

3) $36 \cdot 18$; $45 \cdot 27$; $5436$; $62 \cdot 45$; $48 \cdot 54$; $82 \cdot 63$; $48 \cdot 72$; $35 \cdot 81$.

4) $320 \cdot 48$; $726 \cdot 57$; $324 \cdot 89$; $360 \cdot 92$; $542 \cdot 75$; $620 \cdot 75$; $532 \cdot 83$.

5) $43 \cdot 64$; $98 \cdot 38$; $54 \cdot 72$; $164 \cdot 91$; $648 \cdot 25$; $64 \cdot 32$; $45 \cdot 75$; $65 \cdot 23$.

## § 10. УМНОЖЕНИЕ НА МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Умножение на многозначное число представляет ещё большие трудности, чем на двузначное. Техника такого умножения на счётах даже у профессионалов вырабатывается с течением длительного срока и в результате многочисленных упражнений, специальной тренировки и вдумчивого отношения к применению теоретических сведений по арифметике к практике вычислений на счётах.

В школе не следует требовать от учащихся виртуозной техники в обращении с косточками счётов. Надо добиваться лишь того, чтобы ученики поняли теоретические основы вычислений на счётах при умножении на многозначное число и усвоили некоторые наиболее доступные им приёмы этого умножения. А это во многом будет зависеть от той последовательности, в которой будут излагаться учащимся способы умножения, приёмы упрощения вычислений и какова будет степень близости их к школьной арифметике.

Поэтому изучение умножения на многозначное число на счётах лучше начинать в школе с такого приёма, который производится так же, как и на бумаге, т. е. данное число сперва умножается поразрядно на единицы множителя, потом на десятки, на сотни и т. д., а получаемые отдельные произведения суммируются. Рассмотрим один из таких приёмов.

Пусть требуется найти произведение 324 . 265. Поступаем так:

а) умножаем 4 на 5, получаем 20 единиц, которые и откладываем на счётах; б) далее умножаем 2 на 5, получаем 10 десятков (или одну сотню), которые и откладываем на счётах на соответствующей проволоке; в) затем умножаем 3 на 5, получаем 15 сотен (или 1 тысячу и 5 сотен), которые и откладываем на счётах на соответствующей проволоке.

Так же продолжаем умножать цифры множимого 4, 2, 3 на следующие цифры 6 и 2 множителя и полученные произведения откладывать на счётах с учётом характера получающихся единиц в произведениях.

Чтобы не сбиться при таком способе умножения в употреблении проволок, следует иметь в виду и хорошо помнить, что частные произведения от умножения множимого на первую цифру (справа) множителя следует класть на счётах, начиная с проволоки единиц и выше, частные произведения от умножения множимого на вторую (справа) цифру множителя следует класть на счётах, начиная с десятков и выше и т. д. Обыкновенно рекомендуется большим пальцем левой руки отмечать проволоки, на которых должны быть отложены произведения, и с каждым новым произведением передвигать палец на одну проволоку кверху.

Разумеется, этот способ не является рациональным, но для школьника он наиболее доступен в силу его близкого родства с письменным приёмом умножения, причём он отличается и всеобщностью.

Дальше следует постепенно приучать учеников рационализировать технику вычислений с помощью известных ученику свойств умножения на специально подобранных учителем частных случаях. Рассмотрим некоторые из них.

1) Если множимое однозначное или двузначное, то следует воспользоваться переместительным свойством произведения и свести умножение к случаям, рассмотренным в § 8 и 9. Так, если требуется найти произведения $7 \cdot 134$ или $88 \cdot 348$, то следует по указанным выше способам вычислить произведения $134 \cdot 7$ и $348 \cdot 88$.

2) Если один из сомножителей может быть разложен на однозначные или двузначные множители (необязательно простые), то целесообразнее за множимое принять тот сомножитель, который не разлагается. Например, если имеем $2\,657 \cdot 315$ и $2\,213 \cdot 364$, то можно в том и другом случае свести вычисление к умножению на произведение: $2\,657 \cdot 315 = 2\,657 \cdot (9 \cdot 7 \cdot 5)$ и $2\,213 \cdot (91 \cdot 4)$, так как $315 = 9 \cdot 7 \cdot 5$ и $364 = 91 \cdot 4$.

3) Приучать учащихся шире пользоваться таким приёмом, когда множимое приходится умножать на одну и ту же значащую цифру, но с различным числом нулей справа, что приводит к откладыванию на счётах одного и того же числа (некоторого вспомогательного произведения), но с использованием разных проволок.

П р и м е р ы: а) При умножении числа $A$ на 632 можно поступить так: $A \cdot 632 = 700A - 68A = 700A - 70A + 2A$, таким образом, умножение на число 632 сводится к тому, что множимое следует умножить на 700, затем скинуть это произведение, понизив его на одну проволоку, и, наконец, прибавить удвоенное данное множимое.

б) При умножении на 875 можно умножить данное число на 800, прибавить то же произведение, понизив его на одну проволоку, и скинуть пятикратное множимое, что вытекает из следующих преобразований: $A \cdot 875 = 800A + 75A = 800A + 80A - 5A$.

в) При умножении на 4 962 можно воспользоваться следующей схемой: $A \cdot 4\,962 = 5\,000A - 38A = 5\,000A - 50A + 12A = 5\,000A - 50A + 5A + 5A + 2A$.

Примеры для упражнений в классе и на дому.

1) Составить наиболее целесообразную схему для умножения числа $A$ на множитель, выраженный одинаковыми цифрами (777; 555; 6 666 и т. п.) и объяснить словами порядок операций с косточками на счётах.

2) Составить схемы для умножения на двузначные числа, кратные 9, и объяснить их словами применительно к операциям с косточками на счётах.

Указание. Например, для умножения на 36 схема будет: $A \cdot 36 = 40A - 4A = 4A \cdot 10 - 4A$, которая означает, что число $A$ надо сперва умножить на 4 и полученное произведение отложить на одну проволоку выше, а затем сбросить полученный результат на одну проволоку ниже.

3) Составить и объяснить схемы для умножения на 25 и 125.

Указание. $A \cdot 25 = \frac{A \cdot 100}{4}$, т. е. отложить число $A$ на две проволоки выше и результат разделить на 4 (применяя дважды способ деления на 2).

4) Используя способ округления множителя, составить схемы для умножения числа $A$ на числа 3 297, 2 396 и объяснить их применение к вычислениям на счётах.

Указание. Для множителя 3 297 схема будет: $A \cdot 3\,297 = 3\,000A + 300A - 3A$.

5) Заменяя множитель удобной суммой или разностью, составить схемы для умножения на 165.

6) Составить схемы и произвести по ним вычисление на счётах следующих произведений:

$$321 \cdot 142;\ 321 \cdot 145;\ 4\,321 \cdot 1\,883.$$

7) Вычислить на счётах следующие произведения:

$$14\,958 \cdot 274;\ 14\,981 \cdot 125;\ 4\,563 \cdot 525;$$
$$297\,364 \cdot 747;\ 547 \cdot 997;\ 248 \cdot 315.$$

Из сборника Березанской можно для упражнений взять примеры: № 170—175 (стр. 17).

Проверка умножения на счётах производится так же, как и при письменном умножении, т. е. на основе переместительного свойства. Получив произведение на счётах один раз, меняют порядок сомножителей и повторяют умножение. Если новое произведение окажется равным первому, то можно надеяться, что умножение выполнено правильно.

## § 11. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДЕЛЕНИИ НА СЧЁТАХ

Прежде чем приступить в школе к изучению действия деления на счётах, полезно вспомнить с учащимися, что деление во многих случаях можно заменить сложением, вычитанием или умножением. Для этого достаточно рассмотреть хотя бы такой пример: пусть требуется 30 разделить на 6, тогда частное можно найти, прибавляя последовательно к 6 число 6 до тех пор, пока не получим 30. И так как $6+6+6+6+6=30$, то число 5, показывающее число слагаемых нашей суммы, и будет частным.

Но частное 5 можно найти и вычитанием, для этого достаточно от 30 отнимать по 6 до тех пор, пока в разности не получится 0 (или остаток будет меньше 6). Сосчитав, сколько раз пришлось отнимать по 6, и узнаем искомое частное.

Для нахождения частного умножением достаточно подыскать такое число, которое при умножении на 6 даёт 30. Такое число есть 5, поэтому оно и будет частным.

Приведённые способы деления почти не употребляются в арифметике. О них учителя даже не упоминают на уроках математики, но при делении на счётах ими приходится пользоваться очень часто и особенно способом вычитания. При делении по способу вычитания—кладут на счётах делимое, а затем скидывают делитель столько раз, сколько возможно, наконец подсчитывают, сколько раз сбросили делитель, и получают частное (а вместе с ним и остаток, если он был).

Разумеется, способ деления с помощью вычитания хотя и кажется простым и наиболее общим по идее, всё же на практике при многозначном частном он является слишком трудоёмким и отнимает столько времени, что применение его в этих случаях представляется крайне неудобным. Поэтому приходится прибегать к другим правилам, хотя и менее общим, но зато наиболее рациональным.

К числу их относятся следующие:

### 1. Деление на число, состоящее из единицы с нулями.

Деление на разрядные единицы 10, 100, 1000 ... и т. д. производится механически путём откладывания делимого соответственно на одну, две, три и т. д. проволоки ниже обычных. Объясняется это тем, что при делении на число, состоящее из единицы с нулями, цифры делимого и их порядок следования не изменяются, а только уменьшается значение каждой из них соответственно в 10, 100, 1000 и т. д. раз (36 500 : : 10 = 3 650; 36 571 : 100 = 365,71).

Для этого случая деления можно дать следующие два правила:

Правило 1. Если делимое имеет на конце нулей не менее, чем их имеется у делителя, то для получения частного надо данное делимое отложить на столько проволок ниже обыкновенных, сколько нулей на конце делителя.

Правило 2. Если делимое имеет на конце нулей меньше делителя или совсем их не имеет, то для получения частного (на десятичных счётах) надо отложить делимое на счётах, затем отделить большим пальцем левой руки снизу вверх столько проволок, сколько нулей в делителе. Тогда число, лежащее выше большого пальца, покажет целую часть частного, а число, лежащее на отделённых нижних проволоках, покажет дробную часть частного в десятичных долях (или остаток).

### 2. Деление на 2, 4, 8.

Приёмы деления на 2, 4 и 8 были уже рассмотрены выше, но деление на 8 можно производить и путём трёхкратного деления данного числа на 2, о чём выше не упоминалось.

3. Деление на 5, 50, 500 и т. д.

а) При делении числа $a$ на 5 используется схема $\frac{a}{5}=\frac{a\cdot 2}{10}$, т. е. делимое откладывается на счётах дважды и полученная сумма переносится на одну проволоку ниже.

б) Деление на 50 совершается аналогично делению на 5.

Данное делимое откладывается дважды и полученная сумма переносится на две проволоки ниже, ибо $\frac{a}{50}=\frac{a\cdot 2}{100}$.

в) Для деления на 500 поступаем по схеме: $\frac{a}{500}=$ $=\frac{a\cdot 2}{1000}$ (рекомендуется учащимся прочесть её словами применительно к счётам).

4. Деление на 25 и 125.

В первом случае используется формула $\frac{a}{25}=\frac{a\cdot 4}{100}$, т. е. данное делимое $a$ умножается на 4 по схеме $(a+a)+2a$ и полученный результат делится на 100, что ученик уже умеет делать.

Во втором случае поступают аналогично, а именно: $\frac{a}{125}=\frac{a\cdot 8}{1000}$, т. е. на счётах откладывают $(a+a)+2a+$ $+4a$ и полученную сумму переносят на 3 проволоки ниже.

5. Деление на 9 числа, состоящего из одной значащей цифры с нулями.

При делении на 9 числа, состоящего из одной значащей цифры с нулями, для нахождения частного используется следующее известное из арифметики положение, а именно, что в частном при таком делении получается число, состоящее из той же значащей цифры делимого, повторяющейся столько раз, сколько в делимом нулей, а в остатке—значащая цифра делимого. Поэтому в таких случаях частное можно найти, не производя деления.

Например: $50:9=5$ и в остатке 5
$600:9=66$ » 6
$8000:9=888$ » 8 и т. д.

Это свойство частного и остатка может быть использовано для нахождения частного не только в случае деления на 9 числа, состоящего из единицы с нулями, но и при делении многозначного числа на 9. Рассмотрим пример: $375:9$, применяя распределительный закон и указанное выше свойство частного и остатка, получим: $375:9=(300+70+5):9=33+7+1$ и остаток 6, где 1 в частном и остаток 6 получились от деления на 9 суммы цифр данного делимого.

Таким образом, деление многозначного числа на 9 можно совершать в уме, используя счёты лишь для суммирования отдельных частных: $33+7+1=41$.

Примеры для упражнений.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) $8708:2$ | 2) $17516:4$ | 3) $61440:8$ | 4) $2450:25$ | 5) $8749:9$ |
| $21784:2$ | $18964:4$ | $3756000:8$ | $350375:125$ | $34658:9$ |
| $197755:2$ | $27356:4$ | $204568:8$ | $37525:50$ | $406374:9$ |

## § 12. ДЕЛЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНЫЕ И МНОГОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

### Деление на однозначные числа

Кроме рассмотренных в § 11 частных приёмов деления на 2, 4, 8 и 5, можно применять общий способ деления на однозначное число, подобный тому, который употребляется при делении на бумаге.

Сущность его состоит в том, что деление начинают с единиц высшего разряда делимого и соображают (по таблице умножения), сколько раз содержится делитель в единицах высшего разряда, потом умножают в уме это число на делитель и произведение сбрасывают со счётов, а частное откладывают на самой верхней проволоке счётов.

После этого приступают к делению единиц следующего низшего разряда с той лишь разницей, что частное откладывают на второй проволоке сверху. Так поступают до тех пор, пока на счётах не останется никакого числа (в этом случае деление получилось без остатка), или до тех пор, пока на счётах не остается число, меньшее, чем делитель (в этом случае деление получилось с остатком).

Если случится, что делитель не содержится ни разу в единицах какого-либо разряда, то их раздробляют в единицы следующего низшего разряда, затем суммируют с имеющимися на счётах единицами этого разряда и делят уже двузначное число на однозначное. Так же поступают и в том случае, если при делении единиц некоторого разряда получается свой остаток.

Разумеется, деление в уме единиц каждого разряда на однозначный делитель с целью определения частного можно с успехом заменить непосредственным сбрасыванием делителя (вычитанием) с каждой проволоки делимого.

Поясним это примером: пусть надо найти частное 738:3, тогда откладываем в частном (на верхней проволоке счётов) 2 косточки (так как $7:3 \approx 2$) и сбрасываем 6 косточек с проволоки сотен делимого. Оставшуюся в делимом одну сотню раздробляем в десятки и прибавляем к ним 3 десятка делимого, после чего для следующего деления получаем уже 13 десятков. Так как $13:3 \approx 4$, то откладываем 4 косточки в частном на месте десятков (т. е. одной проволокой ниже отложенного частного при первом делении) и сбрасываем со счётов $4 \cdot 3 = 12$ десятков. Оставшийся в делимом 1 десяток раздробляем в единицы, затем прибавляем к ним единицы делимого и сумму 18 делим на 3. Частное $18:3=6$ откладываем на третьей сверху проволоке. В верхней части счётов получаем окончательное частное: $738:3 = 2$ сот. $+$ $+$ 4 дес. $+$ 6 ед. $= 246$.

## Деление на двузначные и многозначные числа

Деление на двузначное или многозначное число производится так же, как и деление на однозначное. Деление начинается с высших разрядов делимого, для чего, отложив делимое на счётах, отделяют сверху столько проволок делимого, сколько цифр в делителе, и соображают, сколько раз делитель заключается в отложенной части делимого. Если в отложенном числе делитель не содержится ни разу (отложенное число меньше делителя), то отделяют ещё одну проволоку делимого. Затем, определив первую цифру частного, умножают полученное частное на делитель (поразрядно) и произведение сбрасывают с отделённой части делимого. К полученному первому остатку присоединяют следующую проволоку делимого и снова определяют, сколько раз делитель содержится в полученном числе, откладывают вторую цифру частного на верхней части счётов на соответствующем месте, умножают её на делитель и произведение вычитают из делимого. Так же поступают со вторым и следующими остатками до тех пор, пока не будут использованы все проволоки делимого. Частное всякий раз откладывается на верхних свободных проволоках.

Пример. Требуется 133 994 разделить на 238. Откладываем на счётах делимое 133 994 и делим 1 339 сотен на 238. Чтобы избежать вычислений в уме для определения первой цифры частного, будем постепенно скидывать с отделённого числа 1 339 по 238, пока не получим в остатке 0 или число меньше 238; на верхней проволоке счётов по мере скидывания делителя будем откладывать по одной косточке. Отложив на самой верхней проволоке 5 косточек и скинув 5 раз по 238 с делимого, получим на счётах первый остаток 14 994. Далее так же делим число 1 499 десятков на 238 и на второй сверху проволоке получаем в частном 6 косточек; скинув соответственно 6 раз по 238 с первого остатка, имеем на счётах второй остаток 714, от деления которого на 238 и получаем цифру 3 единиц частного. Таким образом, в результате трёх последовательных шагов деления в окончательном частном на верхних проволоках счётов будем иметь полное частное: 133 994:238 = 5 сот. + 6 дес. + 3 ед. = 563.

Проверка деления на счётах производится на основе того, что делимое равняется делителю, умноженному на частное, а делитель равен делимому, делённому на частное. Следовательно, для проверки деления можно на счётах умножить делитель на частное или делимое разделить на частное. В первом случае должны получить данное делимое, и во втором — данный делитель, если деление было сделано верно.

Для упражнений с учащимися можно использовать примеры из сборника Березанской № 225—232.

Полезно будет решить на счётах и следующие задачи:

1) Фактические средние остатки оборотных средств

за месяц исчисляются по сумме остатков на начало и конец месяца, делённой на 2.

Вычислить на счётах средние месячные остатки оборотных средств за январь, февраль, март 1948 г. некоторого предприятия, если известно, что остатки оборотных средств были:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| на | I/I | 1948 г. | 100 | тыс. | руб. |
| » | I/II | 1948 г. | 120 | » | » |
| » | I/III | 1948 г. | 140 | » | » |
| » | I/IV | 1948 г. | 130 | » | » |

2) Средние остатки оборотных средств за квартал исчисляются по сумме трёх средних месячных остатков, делённой на 3.

Используя результаты решения предыдущей задачи, вычислить на счётах среднеквартальный остаток оборотных средств того же предприятия за 1 квартал.

3) Средний остаток оборотных средств за год исчисляется по сумме четырёх средних квартальных остатков, делённой на 4.

Вычислите на счётах средний остаток оборотных средств за год, если известно, что среднеквартальные остатки были:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| за | I | квартал | 125 | тыс. | руб. |
| » | II | » | 130 | » | » |
| » | III | » | 145 | » | » |
| » | IV | » | 140 | » | » |

## § 13. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ НА СЧЁТАХ

Так как действия над десятичными дробями производятся так же, как и с целыми числами, и особенность их сводится лишь к отделению запятой некоторого определённого числа цифр в результате действия, то вычисления на счётах с десятичными дробями можно производить по тем же правилам, какие были указаны выше для операций с целыми числами.

Желательно только на десятичных счётах для каждого конкретного примера заранее отделить снизу нужное число проволок для десятичных долей.

Рассмотрим на примерах все действия с десятичными дробями.

## Сложение и вычитание

а) Пусть надо найти сумму 746,253 + 582,38. Так как в сумме будет три десятичных знака, то отделяем для них три нижние проволоки. В этом случае нет нужды и отмечать эти проволоки каким-либо способом (хотя бы большим пальцем левой руки, как это часто делают счётные работники), так как первая косточка четвёртой проволоки обычно окрашена в иной цвет, чем остальные.

Складывая затем данные числа, как целые, предварительно преобразовав второе слагаемое к виду 582,380, и помня о значении косточек трёх нижних проволок, легко прочтём на счётах искомую сумму: 746,253+ + 582,38 = 1 328,633.

б) Пусть надо найти разность 746,253—582,38. И в этом случае, оперируя данными компонентами, как целыми числами, предварительно уравняв число десятичных знаков после запятых в каждом из них, без особого труда получим на счётах, что 746,253 — 582,38 = 163,873.

## Умножение

Так как при умножении десятичных дробей в произведении отделяется запятой справа столько цифр, сколько их было после запятой во всех данных сомножителях, то мы можем заранее определить количество нижних проволок, необходимых для десятичных долей произведения, причём в этом случае нет необходимости заранее уравнивать число десятичных знаков у данных компонентов, что надо было делать ради удобства при сложении и вычитании.

Так, например, для умножения 52,3 на 25 мы можем перемножить на счётах целые числа 523 и 25 и в произведении 13 075 отделить один десятичный знак справа, для чего на счётах кладём большой палец левой руки сбоку между первой и второй проволоками и прочитываем образовавшийся результат (1 307,5).

Для умножения же 52,3 на 2,5 также перемножаем целые числа 523 и 25, затем, получив на счётах то же число 13 075, отделяем пальцем две нижние проволоки и прочитываем произведение (130,75).

## Деление

Деление десятичных дробей на счётах производится так же, как на бумаге, причём все случаи деления сводятся к делению десятичной дроби на целое число с помощью перенесения запятой в делимом и делителе на соответствующее число десятичных знаков.

При делении десятичной дроби на целое число можно поступать так: отложить делимое на обычных проволоках, затем большим пальцем левой руки отделить десятичную часть делимого и последовательно сбрасывать делитель с целой части делимого, откладывая цифры частного на крайних верхних проволоках.

Получив остаток от деления целой части меньше делителя, присоединяем к нему проволоку с десятыми долями и продолжаем опять скидывать делитель, как с целого числа, с той части делимого, которая состоит теперь из десятых долей. В результате этого деления получаем первый десятичный знак частного, который откладываем также на верхних проволоках. Откладывая его в частном, полезно теперь перенести большой палец левой руки в частное и отделить им целую часть частного от его десятичных долей.

Так же поступают и дальше при определении следующих цифр частного.

Деление продолжают до тех пор, пока оно не закончится или пока не получится частное с определённой заранее заданной десятичной степенью точности.

Указанный способ деления при участии большого пальца левой руки предохраняет от ошибок при определении целой части частного.

Поясним сказанное примером. Пусть надо разделить 1 642,56 на 472; тогда кладём на счётах целое число 164 256 и большим пальцем левой руки отделяем две нижние проволоки, получаем 1 642,56, затем скидываем с целой части делимого три раза подряд по 472 и одновременно на верхней проволоке откладываем 3 косточки частного. Остаток целой части будет 226. Присоединяя к нему проволоку с десятыми долями, получим на счётах 2 265 десятых долей. Поступая с ним, как с целым, и скидывая с него четыре раза делитель, откладываем 4 косточки на второй проволоке сверху и переносим большой палец левой руки кверху для отделения первой верхней проволоки. Остаток после второго шага деления будет 377 десятых.

Присоединяя к нему нижнюю проволоку, получим в делимом 3 776 сотых долей. Поступая с этим числом, как с целым, и скидывая с него восемь раз делимое, получим в частном на третьей проволоке сверху 8 косточек и в остатке 0. Таким образом, всё частное будет: 3 ед. + +4 десятых и 8 сотых или $1\,642{,}56:472 = 3{,}48$.

## § 14. ПРОЦЕНТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА СЧЁТАХ

В школьном курсе арифметики, прежде чем решать три основные задачи на проценты, приходится учить школьника совершать следующие преобразования: 1) переходить от десятичной или обыкновенной записи дробей к процентной и 2) обратно: от процентной записи дроби к десятичной или обыкновенной.

Первое из этих преобразований совершается по правилу: *для того чтобы перейти от десятичной или обыкновенной записи дроби к процентной, достаточно умножить данную дробь на 100 и к полученному результату приписать справа знак* $^0/_0$, что в случае данной десятичной дроби сводится лишь к перенесению запятой на два знака слева направо и приписыванию справа знака $^0/_0$.

На счётах же в случае данной десятичной дроби достаточно будет отложить её на две проволоки выше обычного, а в случае обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$ поступить по формуле $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot 100}{n}\,^0/_0$, что потребует на счётах двух операций: откладывания числителя дроби $m$ на две проволоки выше обычного и деления полученного результата на $n$.

Обратное преобразование, т. е. переход от процентной записи дроби к десятичной или обыкновенной, совершается по правилу: *чтобы перейти от процентной записи дроби к десятичной или* обыкновенной, достаточно данное число разделить на 100 и в полученном результате отбросить знак $\%$.

На счётах при этом преобразовании приходится различать два случая: когда процентная запись дана в форме десятичной дроби или целого числа, например $25{,}4\%$ или $36\%$, и когда процентная запись дана в форме обыкновенной дроби, например $\frac{3}{4}\%$.

В первом из этих случаев достаточно данное число отложить на счётах на две проволоки ниже обычного, а во втором—поступить по формуле: $\frac{m}{n}\% = \frac{m}{100n} = \frac{m}{100} : n$, т. е. отложить числитель данной дроби на две проволоки ниже обычного и результат разделить на знаменатель $n$.

Примеры: 1) Выразить дроби 0,356 и $\frac{5}{8}$ в процентах с помощью счётов.

В первом случае откладываем на счётах дробь 0,356 на две проволоки выше обычного и получаем $0{,}356 = 35{,}6\%$.

Во втором же—сперва только числитель откладываем на счётах на две проволоки выше и получаем 500, а затем делим 500 на 8. В результате получим $\frac{5}{8} = 62{,}52\%$.

2) Выразить с помощью счётов следующие проценты в виде дробей: $2{,}5\%$ и $\frac{3}{4}\%$.

В первом случае откладываем на счётах число 2,5 на две проволоки ниже обычных и получаем $2{,}5\% = 0{,}025$.

Во втором же случае сперва откладываем числитель 3 на две проволоки ниже обычных и получаем 0,03, а затем полученное число 0,03 делим на 4. Окончательный результат будет: $\frac{3}{4}\% = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$, который уже легко представить в форме обыкновенной дроби, если это потребуется.

Для закрепления навыков в указанных преобразованиях с помощью счётов можно использовать из сборника задач и упражнений по арифметике Е. С. Березанской следующие примеры: № 1928, 1929, 1931 (раздел VII «Проценты»).

### Первая основная задача на проценты

Первая из основных задач на проценты состоит в нахождении процентов от данного числа и решается в арифметике по формуле: $b = \frac{ap}{100}$, где $a$ — данное число, а $p$ — число процентов. Следовательно, для решения этой задачи на счётах можно поступить двояко: или данное число умножить на $p$ и результат отложить на две проволоки ниже обычных, или же сперва число $a$ отложить на две проволоки ниже обычных и полученный результат умножить на $p$.

Пример: Найти $12\%$ от 365.

В первом случае будем иметь на счётах следующую последовательность операций. Сперва откладываем на счётах число 365 на одну проволоку выше обычных, затем прибавляем дважды по 365 и полученный результат 4 380 откладываем на две проволоки ниже, что и даст 43,8.

Такой порядок вычислений следует из выражения:

$$\frac{365 \cdot 12}{100} = \frac{365 \cdot 10 + 365 + 365}{100}.$$

Во втором случае поступаем так: сперва откладываем на счётах число 365 на две проволоки ниже обычных и получаем 3,65, затем найденный результат переносим на одну проволоку выше и получаем 36,5, наконец, к этому результату прибавляем дважды по 3,65. Такой порядок операций следует из схемы: $\frac{365 \cdot 12}{100} = \frac{365}{100} \cdot 12 = 3{,}65 \cdot 12 = 3{,}65 \cdot 10 + 3{,}65 + 3{,}65 =$ $= 36{,}5 + 3{,}65 + 3{,}65 = 40{,}15 + 3{,}65 = 43{,}8.$

## Вторая основная задача на проценты

Эта задача состоит в нахождении числа по его процентам и решается по формуле: $a = b : \frac{p}{100} = \frac{b \cdot 100}{p}$, где $b$ — данное число, а $p$ — число процентов, содержащихся в нём.

Следовательно, для решения данной задачи на счётах также можно поступать двояко: или сперва отложить данное число $b$ на две проволоки выше обычных, а затем результат разделить на $p$, или сперва число $b$ разделить на $p$, а затем результат отложить на две проволоки выше обычных.

Пример. Найти число, если $8\%$ этого числа составляют 164.

В первом случае поступаем так: откладываем на счётах число 164 на две проволоки выше обычных и результат (16400) делим на 8, что следует из формулы $a = \frac{b \cdot 100}{p}$, получим неизвестное число 2050.

Поступая по второму способу, мы должны следовать порядку: $a = \frac{164}{8} \cdot 100 = 20{,}5 \cdot 100 = 2050$, т. е. сначала 164 разделить на 8 и полученный результат перенести на две проволоки выше.

## Третья основная задача на проценты

Третья задача состоит в нахождении процентного отношения двух чисел и решается по формуле: $p\% = \frac{a}{A} \cdot 100\%$, где $a$ и $A$ данные числа, процентное отношение которых находится.

Очевидно, решение её на счётах сводится к тому, чтобы найти частное $\frac{a}{A}$ и отложить его на две проволоки выше обычных, или сперва число $a$ отложить на две проволоки выше обычных и полученный результат разделить на $A$.

Примеры для упражнений можно найти в достаточном количестве в указанном выше сборнике задач Е. С. Березанской (разд. VII, стр. 190—201).

## Упрощение процентных вычислений на счётах

Пример 1. В первый месяц квартала завод перевыполнил плановое задание $A$ на $25\%$, во второй — на $50\%$ и в третий — на $100\%$. Какова выработка завода за квартал?

Выработку за квартал легко найдём на счётах по схеме: $x = 3A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}A + A$. $\left(\text{Так как } 100\% = 1;\right.$ $\left.50\% = \frac{1}{2} \text{ и } 25\% = \frac{1}{4}.\right)$

Пример 2. Со стоимости товара в $A$ руб. была сделана скидка в $10\%$, и затем со стоимости, получившейся после первой скидки, ещё $15\%$. Определить стоимость товара после второй скидки.

Так как $10\% = \frac{1}{10}$, а $15\% = 10\% + 5\% = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$, то на счётах будем иметь: а) стоимость товара после первой скидки: $A - \frac{1}{10}A = B$, б) стоимость же товара после второй скидки будет: $x = B - \frac{1}{10}B - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}B\right)$ (рублей).

Вычисления по указанным схемам не вызовут затруднений со стороны учащихся, так как вспомогательные компоненты $\frac{1}{10}A$, $\frac{1}{10}B$ и $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}B\right)$ легко определяются как устно, так и с помощью счётов.

Из приведённых примеров видно, что для решения упрощённым способом задач, аналогичных приведённым, ученику надо усвоить лишь нахождение упрощённым приёмом нескольких процентов от числа.

Для этого полезно будет обратить внимание учащихся на следующую таблицу:

| так как | составляют | то для нахождения указанного числа процентов от числа $A$ достаточно взять: |
|---|---|---|
| $100\%$ | $1$ | число $A$ |
| $50\%$ | $\frac{1}{2}$ | половину числа $A$ |
| $25\%$ | $\frac{1}{4}$ | четвёртую часть числа $A$ |
| $75\% = 50\% + 25\%$ | $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ | три раза четвёртую часть числа $A$, или к половине $A$ прибавить четвёртую часть $A$ |
| $40\%$ | $\frac{2}{5}$ | два раза пятую часть числа $A$ |
| $5\%$ | $\frac{1}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$ | половину десятой части числа $A$ |
| $2{,}5\%$ | $\frac{1}{40} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10}$ | четверть от десятой части числа $A$ |
| $12{,}5\%$ | $\frac{1}{8}$ | восьмую часть числа $A$ |
| $33\frac{1}{3}\%$ | $\frac{1}{3}$ | третью часть числа $A$ |
| $66\frac{2}{3}\%$ | $\frac{2}{3}$ | удвоить третью часть числа $A$ |
| $16\frac{2}{3}\%$ | $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ | половину от одной трети числа $A$ |
| $8\frac{1}{3}\%$ | $\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ | половину от шестой части числа $A$ |

Пример 3. Из имеющихся 200 руб. истратили $7\frac{1}{2}\%$. Сколько денег осталось?

Так как $7\frac{1}{2}\% = 5\% + 2{,}5\% = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20}$, то расход будет составлять: 10 руб. + 5 руб. = 15 руб., а остаток денег будет 200 руб. — 15 руб. = 185 руб. На счётах же поступаем так: 200 откладываем на одну проволоку ниже обычного и результат делим на 2. Это даст $\frac{1}{20}$ от 200, т. е. 10 руб. Затем прибавляем $\frac{1}{2}$ от десяти, т. е. 5 руб. и т. д.

Пример 4. Найти $45\%$ от 350.

Так как $45\% = 50\% - 5\%$, то $x = 175 - 17{,}5 = 157{,}5$. Операция на счётах очевидна.

Пример 5. Найти $10\frac{3}{4}\%$ от 1 248.

Так как $1\%$ от $1\,248 = 12{,}48$, а $10\% = \frac{1}{10}$ и $\frac{3}{4}\% = \frac{1}{2}\% + \frac{1}{4}\%$, то $10\%$ от 1 248 будут составлять 124,8 (находим устно), $\frac{1}{2}\%$ от 1 248 будет составлять 6,24 (находим устно), $\frac{1}{4}$ от 1 248 будет составлять 3,12 (находим устно). Следовательно, $10\frac{3}{4}\%$ от 1 248 будут составлять 134,16 (находим на счётах).

В приведённых примерах вычисления на счётах уместно сопровождать устными вычислениями, например, в последнем случае $1\%$ от 1 248 определяем устно, устно определяем и $10\%$ от 1 248, но полученное число 124,8 откладываем на счётах. Устно находим также $\frac{1}{2}\%$ и $\frac{1}{4}\%$ от 1 248 и найденные результаты 6,24 и 3,12 последовательно прибавляем на счётах к ранее отложенному числу 124,8. В результате на счётах будем иметь следующую последовательность чисел: 124,8; $124{,}8 + 6{,}24 = 131{,}04$; $x = 131{,}04 + 3{,}12 = 134{,}16$.

## § 15. НЕКОТОРЫЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ СО СЧЁТАМИ В ШКОЛЕ

Чтобы обеспечить успех работы со счётами, надо прежде всего проявить школе и учителю заботу о том, чтобы учащиеся были обеспечены счётами. Для этого есть два пути: во-первых, следует выявить в классе тех учеников, которые уже имеют счёты у себя дома, и предложить им приносить их в школу, а во-вторых, приобрести недостающее количество счётов для школьного математического кабинета. Уместно будет также порекомендовать приобрести собственные счёты тем учащимся, которые имеют возможность это сделать.

В классе на уроке математики надо иметь по крайней мере одни счёты (средней величины) на каждую парту, т. е. 18—20 счётов на класс в 36—40 человек.

Расход на приобретение одного такого комплекта счётов составит для школы около 540—600 рублей, а учитывая то, что некоторые ученики могут приносить счёты из дома, то расход будет и того меньше.

Один комплект счётов вполне может обслужить до 3—4 классов (комплект на учителя).

В интересах же дела следует добиваться такого положения, чтобы каждый ученик имел свои счёты, так как тогда он может ими пользоваться не только в школе, но и на дому.

Ученики V—VII классов, где арифметические вычислеления наиболее часто встречаются, должны иметь счёты при себе почти на каждом уроке математики. Иногда же ученику полезно иметь счёты и на других уроках, например географии, истории, если учитель демонстрирует на этих уроках статистические данные и в ходе урока требует от учащихся выполнения некоторых математических операций над этими данными.

Чтобы счёты не мешали ученику для дальнейших занятий на уроке, следует на каждой боковой стороне парты приделать по небольшому крючку, а к верхней стороне рамы счётов прикрепить тесьму или шнурок с петлей и подвешивать счёты на указанные крючки.

Неотъемлемую часть учебного оборудования класса должны составлять также и классные счёты. На них учитель может показывать классу как наиболее рациональные приёмы вычислений на счётах, так и наиболее лёгкие, изящные приёмы в обращении с косточками счётов. Его личный пример в этом отношении будет всегда поучительным для учащихся.

Классными счётами будет пользоваться и ученик, отвечающий у доски.

## § 16. О РАБОТЕ СО СЧЁТАМИ В V—VII КЛАССАХ

Арифметические операции на счётах не отличаются одинаковой степенью лёгкости и доступности даже для взрослого человека. В то время, как сложение и вычитание обычно усваиваются многими легко при наличии некоторой сравнительно небольшой тренировки, другие действия — умножение и деление — даются с трудом даже достаточно грамотным людям. В совершенстве этими операциями владеют только наиболее квалифицированные счётные работники.

Вот это обстоятельство и заставляет учителя критически отнестись к использованию счётов на своих уроках. Счёты в школе надо употреблять только тогда, когда они действительно полезны, а нужные в этом случае способы вычислений доступны для учащихся данного возраста и учащиеся подготовлены в теоретическом отношении к сознательному усвоению вычислительных приёмов на счётах.

Наиболее правильным, пожалуй, будет следующий путь использования счётов на уроках математики.

В V—VII классах уместно счёты употреблять преимущественно для выполнения действий сложения и вычитания как натуральных (§ 5, 6), так и дробных чисел (особенно десятичных дробей, § 13).

Но чтобы подготовить учащихся к процентным вычислениям на счётах к концу пятого года обучения, всё же следует от времени до времени ещё в V классе употреблять счёты и для простейших случаев умножения на однозначный и двузначный множители, а также и для деления чисел на 2 (§ 7—9) и в других частных случаях деления (§ 11).

В конце пятого года обучения учащиеся должны всё же овладеть простейшими навыками процентных вычислений на счётах (§ 14).

Окончательное же закрепление навыков в указанном выше объёме следует отнести на VI—VII классы.

При употреблении счётов учителю следует также добиваться и того, чтобы изучение вычислительных приёмов на счётах находилось в каждый данный момент по возможности в тесной связи с теоретическим материалом школьной программы.

Приведём один из возможных вариантов планирования работы со счётами в V классе.

| Тема программы и её содержание | Употребление счётов |
|---|---|
| 1. Повторение пройденного в начальной школе (21 час) | |
| а) Устная и письменная нумерация многозначных чисел | Счёты используются как наглядное пособие для уяснения вопросов устной и письменной нумерации. Вместе с тем объясняется ученикам устройство счётов и нумерация на счётах (§ 2 — 4) |
| б) Сложение и вычитание многозначных чисел | Ознакомление учащихся с приёмами сложения и вычитания на счётах (§ 5, 6) |
| в) Умножение и деление многозначных чисел | Ознакомление с приёмами умножения на однозначный множитель (на основе определения произведения) и деление на 2 и 4 (§ 7 — 9) |
| г) Проверка действий. Порядок действий. Зависимость между данными и результатами действий. Изменение результата действий от изменения данных | Вместе с устными и письменными приёмами повторения перечисленных слева вопросов (на конкретных числовых примерах) используются и счёты для закрепления навыков сложения, вычитания и простейших случаев умножения и деления на счётах |
| д) Законы арифметических действий и вытекающие из них следствия | Законы арифметических действий (преимущественно суммы и разности) проверяются и с помощью счётов, что также будет содействовать закреплению ранее полученных навыков в обращении со счётами |
| е) Решения задач на все действия | По мере возможности наравне с письменными и устными приёмами вычислений применяются и счёты для суммирования и определения разностей. Возможно применение счётов и для определения произведений и частного в простейших случаях, указанных выше, и некоторых других (например, умножение на единицу с нулями) |

| Тема программы и её содержание | Употребление счётов |
|---|---|
| ж) Решение задач на вычисление периметров простейших фигур | Определение периметров с помощью счётов (закрепление навыков сложения и др.) |
| 2. Обыкновенные дроби (90 час.) | |
| а) Вопросы о происхождении и преобразовании дробей | Откладывание на счётах дробей: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ и десятичных дробей, записанных со знаменателем. Использование счётов как наглядного пособия в некоторых случаях: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ и т. п. |
| б) Сложение и вычитание дробей | Сложение и вычитание смешанных чисел со знаменателями 4, 10, 100 на счётах |
| в) Умножение дроби на целое число | Умножение дроби и смешанного числа со знаменателями 4, 10, 100 на небольшие однозначные числа, используя главным образом определение этого вида умножения |
| 3. Десятичные дроби (50 час.) | |
| а) Нумерация и чтение десятичных дробей, записанных без знаменателя | Использование счётов как наглядного пособия при объяснении принципа нумерации десятичных дробей. Откладывание десятичных дробей на счётах и чтение отложенной десятичной дроби |
| б) Сложение и вычитание десятичных дробей | Сложение и вычитание десятичных дробей на счётах (§ 13) |
| в) Умножение и деление десятичных дробей | Ознакомление учащихся с приёмами умножения и деления десятичных дробей на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. путём перенесения данного множимого на соответствующее число проволок выше или ниже обыкновенного (§ 7, п. 1) |

| Тема программы и её содержание | Употребление счётов |
|---|---|
| г) Решение задач на все действия с обыкновенными и десятичными дробями | Применение счётов там, где это является уместным. Полезно разобрать все случаи умножения на однозначное число (§ 8) |
| 4. Проценты (30 час.) | |
| а) Переход от десятичной или обыкновенной записи дробей к процентной и обратно | Соответствующие процентные вычисления на счётах (§ 14) |
| б) Три основные задачи на проценты | Применение счётов к решению основных задач на проценты там, где будет уместно и доступно учащимся по технике вычислений на счётах (§ 14) |
| в) Решение более сложных задач на проценты и задач на денежные расчёты | Ознакомление учащихся с некоторыми упрощениями при процентных вычислениях на счётах (§ 14) |
| 5 Повторение и решение задач на все разделы пройденного курса | Использование счётов там, где уместно и доступно учащимся по технике вычислений. Закрепление всех вычислительных навыков, приобретённых в V классе. |

Ввиду того что в VI—VII классах изучается несколько математических дисциплин и арифметика в них или совсем отсутствует (VII класс) или сводится преимущественно к повторению пройденного и решению задач (VI класс), то не представляется возможным дать такой же систематический план употребления счётов, как это было сделано выше для V класса.

Но большой беды в этом нет, ибо ученики в V классе ознакомились со всеми основными и доступными им приёмами вычислений на счётах. Следовательно, употребление счётов в VI—VII классах должно иметь целью лишь закрепление тех навыков в обращении со счётами, которые ученики получили в V классе. Но в VI—VII классах такое закрепление навыков может быть и эпизодическим в зависимости от изучаемого в данный момент теоретического материала (по преимуществу алгебраического характера).

Приведём несколько примеров употребления счётов в курсе алгебры VI—VII классов.

1) Учитель знакомит ученика с понятием коэффициента на примерах: а) $a+a+a$, б) $m+m+m+m$, в) $x+x+y+y+y$, г) $t+t+t+k+k$, д) $n+n+n$, е) $l+l+l+l+l$ (П. А. Ларичев, Сборник алгебраических задач, ч. 1). Почему в этом случае, после того как ученик запишет: $a+a+a=3a$, $x+x+y+y+y=2x+3y$ и т. д., не предложить ему вычислить на счётах левые и правые части полученных тождеств при некоторых частных значениях входящих в них букв?

Вычисляя левые части, ученик будет закреплять навыки сложения на счётах, а вычисляя правые—усваивать приёмы умножения на однозначное число.

Да и обучение алгебре от этого только выиграет.

2) Уместным будет употребление счётов также и при нахождении числового значения алгебраических выражений в посильных для учащихся случаях.

Вот несколько таких примеров.

а) $10(x-y)$, б) $a+100(c+d)$, в) $2(a-d)+c$, г) $5(x+y)$ и т. п., где числовые значения букв будут даны учителем.

На этих примерах ученик будет закреплять или заново приобретать навыки умножения чисел на 10, на 100 с помощью перенесения другого сомножителя на новые проволоки и учиться применять комбинированный приём умножения на 5 (отложить другой множитель $x+y$ на проволоку выше обычного и результат разделить на 2).

Алгебраические выражения и числовые значения входящих в них букв без большого труда может подбирать сам учитель, он может также разнообразить примеры, исходя из цели, поставленной для употребления счётов на данном уроке.

3) Счёты можно использовать с успехом и при изучении некоторых формул сокращённого умножения, например $(a+b)^2$.

Эта формула даёт возможность легко возводить в квадрат двузначные числа с помощью счётов и знания лишь таблицы квадратов однозначных чисел.

Так, вычисление $67^2$ на счётах можно вести по следующей схеме: $67^2=(6 \cdot 10+7)^2=3\,600+2 \cdot 420+49=$ $=3\,600+420+420+49=4\,489$. Все компоненты последней суммы легко находятся устно.

Такие примеры будут не только совершенствовать вычислительные навыки ученика на счётах, но и повышать в его глазах ценность формул сокращённого умножения.

Зная квадрат одного двузначного числа, легко найти на счётах и квадрат следующего за ним по порядку натурального числа. Так, например, для квадрата числа 68 будем иметь при вычислениях на счётах $68^2=$ $=(67+1)^2 = 67^2+2 \cdot 67+1=4\,489+67+67+1=4\,624$. В последней сумме все слагаемые известны, так как квадрат 67 известен из предыдущего.

Умея находить на счётах квадрат двузначного натурального числа, можно вычислять на счётах и числовую величину таких алгебраических выражений, как $a^2+b^2$; $a^2-b^2$.

4) В VII классе счёты можно использовать при решении неполных квадратных уравнений.

Так, например, в „Сборнике задач по алгебре" П. А. Ларичева (ч. 1, гл. IX) имеются такие задачи:

Задача 29. Вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого 56 *см* и 33 *см*.

Задача 30. Вычислить катет прямоугольного треугольника, если гипотенуза и другой катет соответственно равны 65 *см* и 56 *см*.

Так как решение этих задач требует нахождения суммы или разности квадратов двух чисел, то применение счётов возможно, как было показано выше.

Счёты могут быть также использованы и при решении задач № 31—34 того же сборника.

Из приведённых примеров видно, что в VI—VII классах учитель также имеет большие возможности для целесообразного использования счётов, от него требуется лишь тщательная подготовка к уроку.

## § 17. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЧЁТОВ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Не надо думать, что счёты можно использовать только на уроках в V—VII классах. Они могут найти широкое применение и при вычислениях в старших классах как на уроках алгебры, так и геометрии с тригонометрией.

Так, например, в VIII классе после ознакомления учащихся с формулой квадрата многочлена (в теме «Степени и корни») очень уместно познакомить учащихся с применением этой формулы к возведению в квадрат многозначных чисел с помощью счётов.

Пусть надо найти $248^2$, тогда, записав число 248 в форме многочлена, будем иметь: $248^2=(2\cdot 100+4\cdot 10+8)^2$, откуда и видим, что для получения искомого квадрата надо отложить на счётах сумму квадратов сотен, десятков, единиц, а затем к ней прибавить последовательно удвоенные произведения сотен на десятки, сотен на единицы и десятков на единицы.

Все эти слагаемые легко находятся устно при помощи таблицы умножения. В нашем случае сумма будет: $(40\,000+1\,600+64)+(8\,000+8\,000)+(1\,600+1\,600)+(320+320)=61\,504$.

На счётах же будем иметь следующую последовательность чисел: $40\,000$; $40\,000+1\,600=41\,600$; $41\,600+64=41\,664$; $41\,664+8\,000=49\,664$; $49\,664+8\,000=57\,664$; $57\,664+1\,600=59\,264$; $59\,264+1\,600=60\,864$; $60\,864+320=61\,184$; $61\,184+320=61\,504$.

Итак, без единой записи на бумаге лишь с помощью таблицы умножения и счётов находим, что $248^2=61\,504$.

Здесь же следует обратить внимание учащихся и на то, что, зная квадрат одного многозначного числа, легко найти на счётах квадрат следующего по порядку числа. Например, если знаем, что $248^2=61\,504$, то $249^2=(248+1)^2=248^2+248+248+1=61\,504+248+248+1=62\,001$, т. е. возвышение в квадрат многозначного числа в этом случае свелось к сложению нескольких известных уже чисел, что легко выполняется на счётах.

Разумеется, последняя схема нахождения квадрата числа $a+1$, когда известно $a^2$, отличается общностью, так как $(a+1)^2=a^2+a+a+1$.

Указанный способ нахождения квадрата многозначного числа на счётах даёт возможность с помощью счётов находить третью сторону прямоугольного треугольника, если известны две другие, что следует из теоремы Пифагора: $c^2=a^2+b^2$, где $c$ — гипотенуза, а $a$ и $b$ — катеты.

Счёты учитель может использовать в VIII классе в той же теме «Степени и корни» и тогда, когда будет давать ученикам понятие о действиях над иррациональными числами.

Так, если учитель будет выяснять понятие суммы на примере $\sqrt{2}+\sqrt{5}$, то ему придётся суммировать приближённые значения по недостатку и по избытку слагаемых $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, которые (приближённые значения) уже с четвёртого своего приближения выражаются многозначными десятичными дробями и письменное их сложение было бы утомительным для учителя и учеников. На счётах же сложение указанных компонентов будет произведено без большого напряжения и с заметным выигрышем во времени.

Счёты можно использовать и в теме „Графики и функции", например при построении по точкам графиков функций $y=ax^2+bx+c$ и $y=\frac{k}{x}$.

Так, составив схему для первой из них вида:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | | | | | | |
| $x^2$ | | | | | | | | | |
| $ax^2$ | | | | | | | | | |
| $bx$ | | | | | | | | | |
| $c$ | | | | | | | | | |
| $y$ | | | | | | | | | |

и давая значения для $x$, учитель может предложить ученикам заполнить эту схему с помощью счётов (разумеется, не пренебрегая и устным счётом там, где это возможно). В этих примерах ученику придётся производить на счётах различные операции: умножение, возвышение в квадрат, суммирование, что поможет закреплению навыков ученика в обращении со счётами.

Так как умножение и деление принадлежат к более трудным операциям на счётах, то при отборе примеров для упражнений следует проявить некоторую осторожность. Например, сначала рассмотреть такие случаи, когда коэффициент $a=1$, а $b$ выражается однозначным числом ($y=x^2+x+c$, $y=x^2+2x+c$ и т. п.).

Счёты в классе могут быть использованы и при обработке результатов некоторых геодезических работ на местности, например, при составлении плана полигона, когда съемка последнего производилась обходом по контуру с измерением внутренних углов и сторон полигона. В этом случае счёты будут полезны при вычислении фактической суммы внутренних углов, при определении периметра полигона и при суммировании площадей отдельных частей фигуры, если последняя для определения её площади была разбита на более элементарные части (треугольники, прямоугольники, трапеции и т. п.).

Если к этому времени ученики овладеют умножением на счётах, то последние можно использовать и при вычислении площадей элементарных частей, на которые разбита вся фигура.

В связи с измерениями на местности (и в других случаях) счёты полезно применять также и при определении средних результатов многократных измерений и уклонений от среднего.

Приведём два примера, где требуется определить средний результат измерения и уклонения от него.

| Пример 1 | | | Пример 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Какое измерение по порядку | Результаты отдельных измерений в метрах | Уклонение от среднего | Какое измерение по порядку | Результаты отдельных измерений в метрах | Уклонение от среднего |
| 1-е измерение | 1305,6 | Заполняется с помощью счётов | 1-е измерение | 51,63 | Заполняется с помощью счётов |
| 2-е » | 1308,4 | | 2-е » | 52,12 | |
| 3-е » | 1306,6 | | 3-е » | 52,20 | |
| 4-е » | 1307,5 | | 4-е » | 51,87 | |
| 5-е » | 1308,4 | | 5-е » | 51,91 | |
| 6-е » | 1308,8 | | 6-е » | 52,16 | |

Использование счётов в этих примерах значительно облегчит все вычисления.

Обратимся теперь к IX и X классам. Разве непосредственное суммирование и вычитание мантисс логарифмов на бумаге не является тягостным для учащихся? А разве нельзя эти операции над логарифмами производить на счётах? Сложение и вычитание мантисс логарифмов на счётах не только можно практиковать в школе, но и надо это делать.

Например, пусть требуется узнать полную поверхность $S$ цилиндра, если радиус $r=5{,}64$ *м* и высота $h=$ $=4{,}28$ *м*. Для определения искомой поверхности имеем формулу: $S=2\pi rh+2\pi r^2$ или $S=x+y$, где $x=2\pi rh$ и $y=2\pi r^2$. Применяя логарифмы к вычислению каждого слагаемого отдельно, мы получим следующие два столбца логарифмов.

Для вычисления $x$. Для вычисления $y$. Вычисление $S$.

| | |
|---|---|
| $\lg 2$ | 0,3010 |
| $\lg \pi$ | 0,4971 |
| $\lg r$ | 0,7513 |
| $\lg h$ | 0,6314 |
| $x$ | применяются счёты |

| | |
|---|---|
| $\lg 2$ | 0,3010 |
| $\lg \pi$ | 0,4971 |
| $2\lg r$ | 1,5026 |
| $y$ | применяются счёты |

| | |
|---|---|
| $x$ | |
| $y$ | |
| $S$ | применяются счёты |

Здесь нахождение логарифмов вспомогательных величин $x$ и $y$ вполне уместно произвести с помощью счётов.

Так как характеристики логарифмов по абсолютной величине обычно бывают однозначные и мантиссы в искусственной форме всегда положительные, то ученик не будет испытывать затруднений при сложении и вычитании на счётах логарифмов как с положительными, так и с отрицательными характеристиками.

От учащихся старших классов можно потребовать употребления счётов и при делении многозначных чисел для определения разностей от вычитания из делимого и последующих остатков — произведений цифр частного на делитель.

Например, если ученик находит частное $1:\pi=$ $=1\,000\,000:3\,141\,592\approx 0{,}31\,831$, то он располагает записи так:

$$1:\pi\approx 1\,000\,000:3\,141\,592\approx 0{,}31\ldots$$

$$\begin{array}{rl} -\begin{array}{r}10\,000\,000\\ 9\,424\,776\end{array} & \text{(можно применить счёты)}\\ \hline -\begin{array}{r}5\,752\,240\\ 3\,141\,592\end{array} & \text{(можно применить счёты)}\\ \hline 2\,610\,648 & \text{и т. д.}\end{array}$$

и производит вычисление указанных выше разностей по всем правилам письменного вычитания, между тем как эти разности выгодней вычислить на счётах.

А разве нельзя от учащихся старших классов потребовать также более сознательного отношения к приближённым вычислениям, и применения счётов не только к сложению и вычитанию, но и к умножению там, где это особенно выгодно и посильно им при этих вычислениях?

Пример 1. Пусть требуется найти произведение $2{,}449 \cdot 0{,}12$, где данные числа приближённые с точностью до половины единицы последнего десятичного знака.

Зная правила приближённых вычислений, ученик сначала должен сообразить, что искомое произведение будет иметь только две значащие цифры, а промежуточные—три. После этого умножение данных чисел уже легко произвести на счётах по следующей схеме:

$2{,}449 \cdot 0{,}12 = 2{,}45 \cdot 0{,}1 + 2{,}45 \cdot 0{,}02 = 0{,}245 + 0{,}024 + 0{,}024 = 0{,}293 = 0{,}29$, т. е. сперва откладываем множимое 2,45 на одну проволоку ниже обычных, а затем прибавляем дважды по одной десятой этого числа.

Пример 2. Пусть надо найти $a\sqrt{6}$, если точное значение сомножителя $a$ есть 160 и $\sqrt{6} \approx 2{,}449$.

Так как в этом случае множитель $a$ число точное, то число значащих цифр произведения зависит лишь от второго сомножителя и в данном примере будет равно 4.

Умножение же на счётах можно произвести по следующей схеме: $2{,}449 \cdot 160 = 2{,}449 \cdot 100 + 2{,}449 \cdot 50 + 2{,}449 \cdot \frac{100}{10} = 244{,}9 + 122{,}45 + 24{,}49 = 391{,}84 \approx 391{,}8$, т. е. сначала откладываем первый сомножитель на две проволоки выше обычных, а затем один раз прибавляем половину получившегося на счётах числа, а другой раз десятую часть того же числа.

Приведём ещё несколько примеров для упражнений в применении счётов.

1. Некоторое расстояние было измерено пять раз; причём получены следующие результаты: 763,8 *м*; 764,5 *м*; 761,8 *м*; 762,7 *м*. Требуется найти среднюю

величину этого расстояния и уклонение от среднего каждого отдельного измерения.

2. Вычислить квадраты следующих чисел:

а) 57; 324; 567; 4 263; 2 572; 3,8; 32,1; 25,4.

б) 58; 325; 568; 4 264; 2 573; 3,9; 32,2; 25,5.

3. Отрезки, длины которых 2,65 *см*; 3,62 *см*; 4,11 *см*; 10,8 *см* и 14,69 *см* надо увеличить в 16 раз.

4. С помощью логарифмов вычислить:

а) $x = \dfrac{56{,}3 \cdot 7{,}94 \cdot 0{,}431}{0{,}0622 \cdot 19{,}6 \cdot 24{,}5}$;

б) $x = \dfrac{(a^2 - b^2)c}{(a^2 - c^2)b}$, если $a = 10{,}31$; $b = 8{,}46$; $c = 7{,}28$;

в) площадь треугольника, если его стороны равны: $a = 6{,}37$; $b = 5{,}25$; $c = 4{,}86$.

5. Найти сумму $\sqrt{3} + \sqrt{7} + \pi$ с точностью до пятого десятичного знака.

Применяя таким образом счёты на уроках математики в старших классах в течение трёх лет, можно надеяться, что ученики вполне овладеют вычислениями на счётах с целыми числами и десятичными дробями и даже получат навыки „изящной и лёгкой“ техники в обращении со счётами.