А. С. ПЧЕЛКО

ХРЕСТОМАТИЯ ПО МЕТОДИКЕ НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

УЧПЕДГИЗ — 1940

А. С. ПЧЕЛКО

ХРЕСТОМАТИЯ ПО МЕТОДИКЕ НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАРКОМПРОСА РСФСР
МОСКВА ★ 1940

Редактор *С. В. Филичев*. Технический редактор *В. И. Иванов*. Корректор *И. М. Кандель*. Сдано в набор 22/XI 1939 г. Подписано к печ. 25/III 1940 г. Учетно - издательских листов 20,82. Печатных лист. 17,5. Тир. 10.000 экз. Формат бумаги $60 \times 92^1/_{16}$. Учпедгиз № 13019 А 25766.

Государственное учебно-педагогическое изд-во Наркомпроса РСФСР. Москва, Орликов пер. д. № 3, третий этаж.

Отпечатано с матриц в газ.-журн. типографии изд-ва «Уральский рабочий». Свердловск, ул. Ленина, 47. Заказ № 21

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Разработка советской методики арифметики происходит в настоящее время на основе использования главным образом богатого и ценного опыта нашей советской школы.

Советское учительство работает с большим творческим подъемом. Ежедневно, ежечасно в процессе своей работы оно проверяет на практике установленные методические принципы, улучшает ранее изобретенное, творит и изобретает новые приемы и способы обучения. В процессе повседневной учительской практики формируются новые идеи в области преподавания арифметики, которые находят свое распространение через описание опыта работы лучших учителей.

Так подготовляется материал для создания новой советской методики арифметики, в которой найдут полное отражение основные принципы советской педагогики. Уже теперь ярко вырисовываются в практике преподавания арифметики специфические черты этой методики: а) гармоническое сочетание образовательной, воспитательной и практической цели обучения арифметике, тесное их объединение, которое в истории развития дореволюционной русской школы считалось невозможным; б) стремление весь процесс обучения построить на основе сознательного усвоения и восприятия учащимися математических знаний, не оставляя ни одной области, ни одного вопроса для механического, бессознательного усвоения; в) стремление — уже в значительной мере осуществленное на практике — к тому, чтобы известной суммой математических знаний, предусмотренных программой, овладели все ученики, каждый учащийся без исключения; такой постановки вопроса не знала дореволюционная русская школа, не знают ее школы капиталистических стран и в настоящее время; г) построение всего процесса обучения арифметике на основе широко применяемого индуктивного метода как исходного, полностью отвечающего особенностям психологии детей, но с последующим использованием получаемых выводов, обобщений для приобретения новых знаний на основе дедукции; д) высокая оценка системы преподавания арифметики, напряженная борьба со всеми проявлениями бессистемности: в программах, учебниках, методиках и в практической работе.

Итак, наша методика выковывается прежде всего на опыте творческой работы сотен тысяч учителей. Но советская методическая наука и практика пользуется не только опытом сегодняшнего дня, не только теми теоретическими обобщениями, которые сделаны на основе этого опыта, но и тем наследством, которое досталось нам от прошлого русской народной школы. Нужно прямо сказать, что в области методики арифметики мы располагаем обширным и ценным наследством. Во второй половине XIX и в начале XX столетия прошла целая плеяда выдающихся русских методистов-математиков, которые, отражая требования к школе со стороны прогрессивных кругов тогдашней русской общественности и борясь с казенной методикой, создали крупнейшие, во многом самобытные и оригинальные труды по методике арифметики. Достаточно назвать имена Гурьева, Евтушевского, Гольденберга, Егорова, Шохор-Троцкого, Беллюстина, Арженикова и других, чтобы видеть, каких блестящих представителей имела методическая мысль в дореволюционном прошлом. Созданные ими методики в значительной части не утратили своего значения и до сих пор. Их методические высказывания лежат в основе некоторых современных методических систем. Знакомство с их трудами и с теми условиями, в которых они создавались, заключает в себе много поучительного: оно раскрывает картину борьбы различных методических идей и систем, различных течений и направлений в области методики, оно дает ключ к лучшему пониманию настоящего и предупреждает нас от повторения ошибок, имевших место в прошлом.

Хрестоматия по методике арифметики разделяется на две части. В первой части дан краткий обзор истории методики арифметики, причем эта история разбита на три этапа: методы преподавания арифметики в «старой», дореформенной школе, в школе после реформы 60-х годов и в конце XIX в. Здесь представлены все наиболее крупные представители методической мысли, дана краткая характеристика и оценка их деятельности.

Во второй части приведены выдержки из методик наиболее выдающихся методистов XIX в. Из методической литературы дореволюционного издания для Хрестоматии отобрано сравнительно немного. Главным критерием отбора служила не только историческая ценность той или иной статьи, но и, главное, возможность использования отобранного материала для методических целей нашей школы. В большинстве случаев взято только то, что в творчестве того или иного дореволюционного методиста пережило свою эпоху и, сохранив свое значение до настоящего времени, может быть в той или иной мере применено в нашей школе. Это полностью относится к статьям по методике решения задач и в значительной мере к статьям по изучению арифметических действий. В соответствии с такой установкой мы не придерживались в расположении материала хронологической последовательности.

Некоторые из взятых нами статей вследствие их большого объема воспроизведены в Хрестоматии не текстуально, а в извлечениях и в частичной переработке с обязательным сохранением при этом основных мыслей авторов. Чтобы сделать текст книги удобочитаемым, старые русские меры в большинстве случаев заменены метрическими мерами, а фабулы некоторых задач заменены новым содержанием.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность проф. Н. В. Чехову, предоставившему мне свои печатные труды для характеристики общего положения школы после реформы 60-х годов, и коллективу сотрудников Государственной библиотеки по народному образованию НКП РСФСР, оказавших мне большую помощь в подыскании книг, которые служили для Хрестоматии первоисточниками.

Автор

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ОЧЕРК ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ В РОССИИ МЕТОДИКИ НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ В XIX И НАЧАЛЕ XX ВЕКА.

1. МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ В «СТАРОЙ» ДОРЕФОРМЕННОЙ ШКОЛЕ XVIII И ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЫ XIX ВЕКА.

Арифметика как предмет преподавания сложилась очень рано и рано заняла в школьном и семейном обучении определенное и прочное место. Это вызывалось практической потребностью научить обучающегося простейшим расчетам и элементарным вычислениям. Что же касается методики преподавания арифметики, то она стала создаваться значительно позже. Вплоть до конца XVIII в. методики арифметики как самостоятельного учебного руководства не было; не было и потребности в ней, потому что в эти годы в России почти не было школ. Общее образование и дело обучения грамоте считалось частным делом каждого гражданина. Правительство, если и открывало школы, то только такие, которые готовили нужных для него специалистов; такими были навигационная школа, цифирные школы, гарнизонные школы, открытые в эпоху Петра I. Обучение грамоте как обязательная повинность была введена Петром I только для детей духовного и дворянского сословия, и осуществлялась эта мера семьей в порядке индивидуального обучения. Прекрасное изображение типичных для XVIII в. приемов такого обучения дано Фонвизиным в комедии «Недоросль».

Знание педагогом каких-либо методических приемов при таком обучении считалось ненужным.

Предполагалось, что одного только усердия и прилежания со стороны ученика вполне достаточно, чтобы овладеть арифметикой. В этом отношении характерно предисловие к одному из учебников арифметики, появившемуся в 1757 г. [1]. Вот что пишет автор в этом предисловии: «Хотя некоторые в оном руководстве правила с решением задач сперва учащимся несколько темными и покажутся, однако уповаю, прилежным и рассудительным читателям и без дальнего изъяснения вразумительны будут. Всякий обстоятельно порядочным и твердым учением и без особливого наставления оные познает. Сим же способом и сам решению со изобретением новых правил и задач и в прочих математических науках с добрым успехом научится. Всяк из нас то скорее понимает и

[1] Курганов, Универсальная арифметика

легче в памяти содержит, чего показания в немногих словах ясно видит, и тем больше свое рассуждение нежели память поощрять обыкнет; а при случаях способнее может употреблять в свою пользу; напротиву того, продолжительное и подробное изъяснение причиняет юношеству скуку с нерачением». Смысл этого предисловия ясен: не нужно при обучении арифметике «дальних изъяснений» и «особливых наставлений» — они порождают у ученика только скуку и отучают его самостоятельно думать; «рассудительный» и прилежный читатель (ученик) сам поймет все сказанное в немногих словах. А если не поймет, то это непонимание он должен отнести, очевидно, за счет собственного слабого разумения. После этого нам понятно, почему арифметика считалась очень трудным предметом, доступным только некоторым ученикам, наиболее способным.

Отсутствие методики как печатного учебного руководства до XIX в., однако, нельзя рассматривать как отсутствие каких бы то ни было принципов и приемов преподавания арифметики в этот период. В практике обучения арифметике были, конечно, свои приёмы, свои методы. Каждый учитель учил других так, как его самого когда-то учили. По традиции способы и приемы обучения переходили от поколения к поколению. Существовала неписанная методика, опиравшаяся на определенные методические положения, которые находили свое выражение в системе построения учебников. Положения эти сводились к следующему.

Обучение арифметике преследует чисто практическую (материальную) цель — дать учащимся знания и навыки, которые нужны человеку в практической жизни (уменье считать, вычислять, производить несложные расчеты, решать задачи житейского характера). Усвоение знаний происходит исключительно посредством памяти. Понимание усвояемого при этом необязательно. Познавание опирается также на логику самого предмета; логическая система расположения материала помогает ученику овладеть знанием этого предмета. Усвоение есть следствие логического процесса, развернутого автором в учебнике, поэтому изложение предмета должно быть строго систематическим.

Этими положениями определялась, с одной стороны, практика обучения, а с другой — система построения учебника. Преподавание носило чисто догматический характер: усвоение происходило путем зазубривания того, что говорил учитель и что задавалось и по учебнику (очень часто без понимания того, что изучается). Соответственно практическим задачам обучения главное внимание обращалось на выработку механических навыков в вычислениях, путем решения примеров по определенным правилам. Задачи занимали весьма скромное место; они были сравнительно просты, носили прикладной характер, решались по определенному правилу, и решение их заучивалось так же, как и решение примеров, как заучивались доказательства теорем.

Большую роль играл учебник. Учитель требовал, чтобы ученик выучивал наизусть страницы учебника, определяя тот размер урока, который мог быть выучен наизусть. Учебник одновременно являлся как бы методикой, так как построение учебника определяло в значительной мере и характер преподавания. На создание учебника и было обращено внимание в XVIII в. Рассмотрим некоторые из этих учебников, обращая главное внимание на методическую сторону их построения; характер изложения материала в учебниках поможет нам воспроизвести картину преподавания арифметики по этим учебникам.

Одной из первых книг по арифметике в России была книга, написанная Леонтием Магницким и изданная в 1703 г., под названием — «Арифметика, сиречь наука числительная». Для своего времени это была замечательная книга, по которой обучались арифметике несколько поколений на протяжении 50 лет. Недаром Ломоносов говорил, что эта книга открыла ему врата в храм науки. Написана эта книга весьма старательно, с большой любовью к науке, с хорошим знанием предмета и с большим вниманием к своему читателю. Это была первая в России математическая книга, где числа обозначались не славянскими, а арабскими цифрами (на стр. 11 воспроизведена одна из страниц этой книги).

Курс арифметики Магницкий разделил на две книги: на арифметику-политику, или гражданскую, и арифметику-логистику, в которой рассматривается движение небесных тел. Первая книга содержит в себе 5 частей: о целых числах, о ломаных числах, или дробях; о правилах подобных, т. е. тройных, о правилах фальшивых, о правилах квадратных и кубичных корней и, наконец, прогрессии.

Во второй книге изложено учение о числах алгебраических, извлечение корней высших степеней, решение квадратных и биквадратных уравнений, рассмотрение тригонометрических линий и приложение этих знаний к некоторым астрономическим вопросам.

Таким образом в арифметике Магницкого давались сведения не только по арифметике, но и по геометрии, алгебре, тригонометрии и астрономии; разделы математики в то время еще не были диференцированы достаточно четко. В целых числах Магницкий различает пять правил: счисление, сложение, вычитание, умножение и деление.

Рассмотрение каждого правила (действия) начинается с определения. Сложение он определяет так: «Аддицио или сложение есть, двух или многих чисел во едино собрание, или во един перечень совокупление». Дальше приведена таблица сложения, которая заканчивается следующими поучительными стихами:

«К двум един то есть три,
два же к трем пять смотри.
Так и все назирай,
таблицу разбирай,
Хотяй же не лгати,
похвально слагати.
Да тщится познати,
изустно сказати».

После этого идет подробное изложение того, как производится сложение; приведены в определенной и строгой системе примеры для упражнений, и, наконец, даны задачи на сложение с решением их. В конце говорится о поверке сложения. Поверка делается при помощи числа 9.

В таком же порядке рассматривается и каждое последующее арифметическое действие. В вычитании сначала подробно рассматривается вычитание чисел двузначных, причем таких, где каждая цифра вычитаемого меньше соответствующей цифры уменьшаемого; потом рассматриваются такие случаи, когда приходится занимать. Поверка указывается двоякая: посредством девятки и сложением. В умножении спачала дана вся таблица умножения, которую учащийся должен был «затвердить» наизусть. В конце таблицы Магницкий дает назидательное поучение своим читателям, вскрывающее методику изучения таблицы:

«Аще кто не твердит
Таблицы и гордит,
Не может познати,
Числом что множати,
И во всея науки
Не свобод от муки».

После этого дан общеизвестный способ получения табличных результатов при помощи пальцев («Ин способ к твержению таблицы по перстом ручным»).

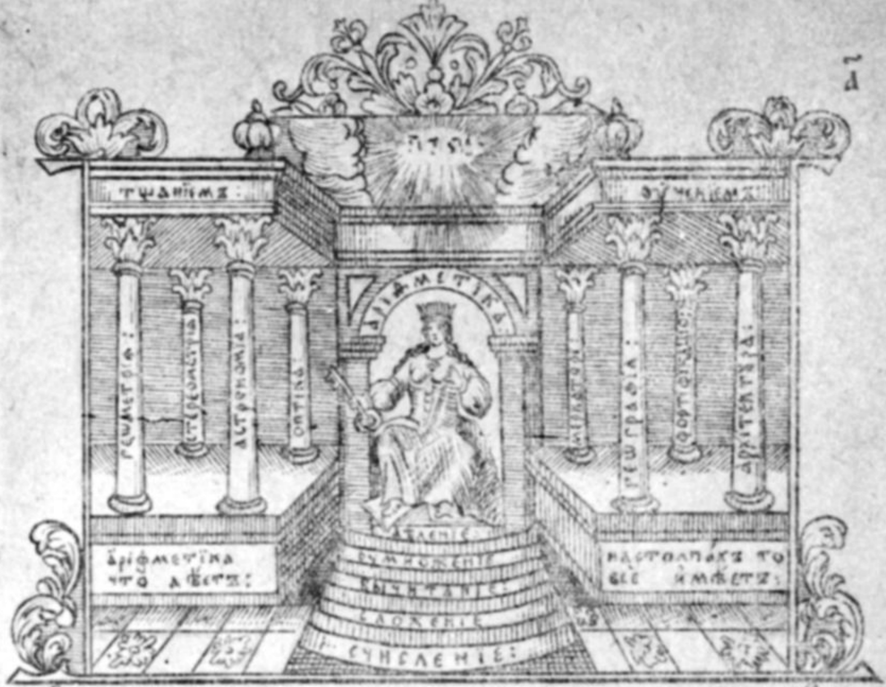
Магницкий не делал принципиального различия между множимым и множителем: большее число он всегда принимал за множимое, меньшее — за множитель. Излагая способ письменного умножения, Магницкий спачала показывает умножение, начиная с низших разрядов, а затем и с высших разрядов. Большое внимание Магницкий уделяет наряду с общими случаями и таким случаям умножения, где произведение составляется из определенных цифр; например, где произведение состоит или только из единиц (777×143), или из двоек (777×286), из троек и т. д., или где произведение состоит из 1 и 2 (252×481), из цифр 2 и 3 (483×481) и т. п. Умножение таких чисел он называет «умножением с некоим удивлением». Поверка умножения производится при помощи девятки.

Механизм деления в начале XVIII в. не был еще установившимся. Магницкий показывает 6 способов деления, останавливаясь затем на одном. Вот этот способ: допустим, что нужно 7635 разделить на 5. Числа подписываются так: $\begin{array}{l}7635\\5\end{array}$. Частное пишется справа, а остатки от вычитания сверху над делимым, причем вычтенные числа зачеркиваются.

Действие принимает такой вид:

$$\left.\begin{array}{l}213\\7635\\5555\end{array}\right\}\ 1527$$

До какой степени догматичны были объяснения, даваемые в учебнике Магницкого, можно видеть на примере объяснения того же деления. Вот как у Магницкого объяснено деление многозначного числа на двухзначное (1952:32). «Надлежит знать», говорится в книге на стр. 18, что когда делитель имеет не одно число, но два (32) или три (432), и тогда так же подписываются числа делителя, под большим



АРІѲМЕТІКА, ПРАКТІКА

ИЛИ ДѢЯТЕЛНАЯ.

Что есть аріѳметіка;

Аріѳметіка или числителница, есть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, от древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена явлшихся изряднѣйшихъ аріѳметіковъ, изобрѣтенное, и изложенное.

Коликогуба есть аріѳметіка практіка;

Есть сугуба.

1 Аріѳметіка політіка, или гражданская

2 Аріѳметіка логістика, не ко гражданству токмо, но и къ движенію небныхъ круговъ принадлежащая.

себе, делимого так $\begin{matrix}1952\\32\end{matrix}$. И рассуждают так. «Яко елико первым числом делителя, емлеши из верхних чисел делимого: толикожде бы взяти, и другим числом делителя, из тех же числ делимого, яко же зде:

$$\left.\begin{matrix}1\\1952\\32\end{matrix}\right\}6$$

Из 19 взяти на 3, по 6: по толику же бы взяти, и из 15, на 2:
и останется из 15,3, еже надпиши над 5-ю, а прочая похерь так:

$$\left.\begin{matrix}13\\1952\\32\end{matrix}\right\}6$$

Потом напиши первое число делителя против остаточных 3-х делимого, а другое делителя в ряд к правой руке, яко же зде.

$$\left.\begin{matrix}13\\1952\\322\\3\end{matrix}\right\}6$$

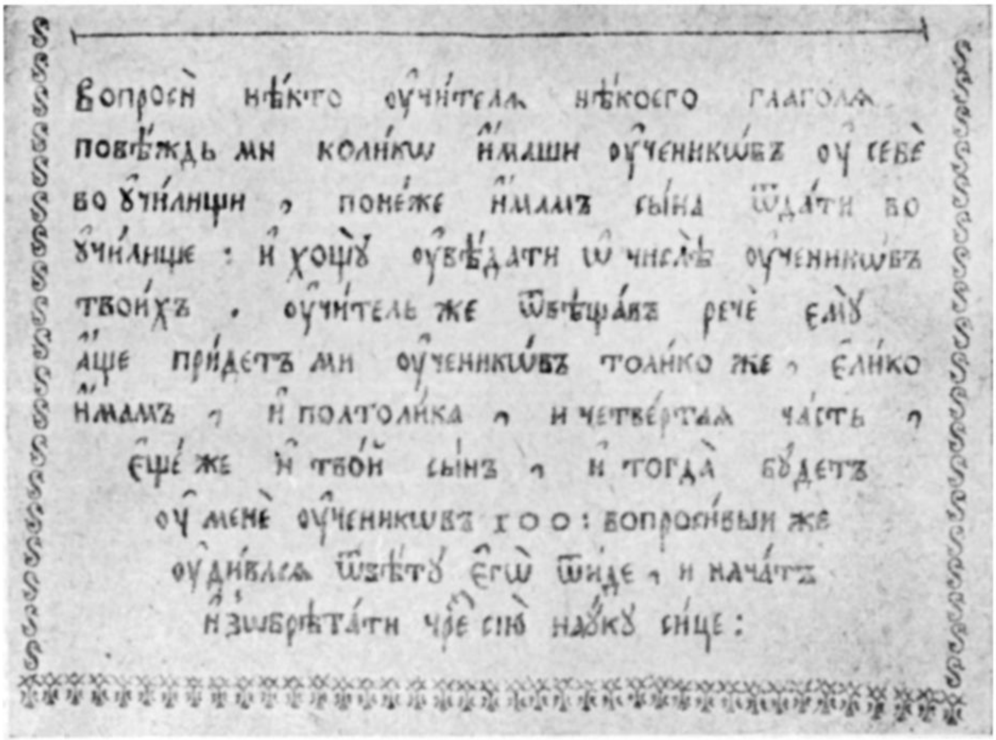
И умствуй 3 делителя из 3-х делимого, и будет 1: и сей 1 напиши подле 6 за чертою, и другим числом делителя 2-мя возьми из 2 делимого 1, который уже за чертою написан так $\left.\begin{matrix}13\\1952\\322\\3\end{matrix}\right\}61$ Толико пришло из 1952 на 32».

Как видно из приведенной цитаты, Магницкий подробно рассказывает вычисления, но при этом не дает никаких объяснений, почему нужно делать так, а не иначе.

Рассмотревши одно за другим четыре действия над целыми числами, Магницкий дает в заключение первой части очерк мер длины, веса и денег.

Вторая часть посвящена дробям, которые называются ломаными числами. Характерно, что учение о дробях Магницкий сближает с учением об именованных числах. Усвоение дробей построено также на заучивании множества п р а в и л; причем эти правила не выводятся и никак не объясняются, а просто даются в форме догматических положений. Вот как, например, Магницкий «объясняет» деление дроби на дробь (стр. 56). «Дивизио, или деление в долях. Если случится тебе делить доли на доли, и тогда надлежит одно число изменить, т. е. делимое, чтобы числитель был знаменателем, так как если хочешь $\frac{3}{5}$ делить на $\frac{1}{4}$, тогда напиши так:

$$\frac{5}{3} — \frac{1}{4}$$


Вопроси нѣкто учителя нѣкоего глаголя:
повѣждь ми колико имаши учениковъ у себе
во училищи, понеже имамъ сына отдати во
училище: и хощу увѣдати о числѣ учениковъ
твоихъ. учитель же отвѣщавъ рече ему:
аще придетъ ми учениковъ толико же, елико
имамъ, и полтолика, и четвертая часть,
еще же и твой сынъ, и тогда будетъ
у мене учениковъ 100: вопросивый же
удивлся отвѣту его отиде, и начатъ
изобрѣтати чрезъ сию науку сице:

и умножай 5 с 1, а 3 с 4: будет 12, и напиши $\frac{5}{12}$. Или, не изменяя чисел, умножай накрест».

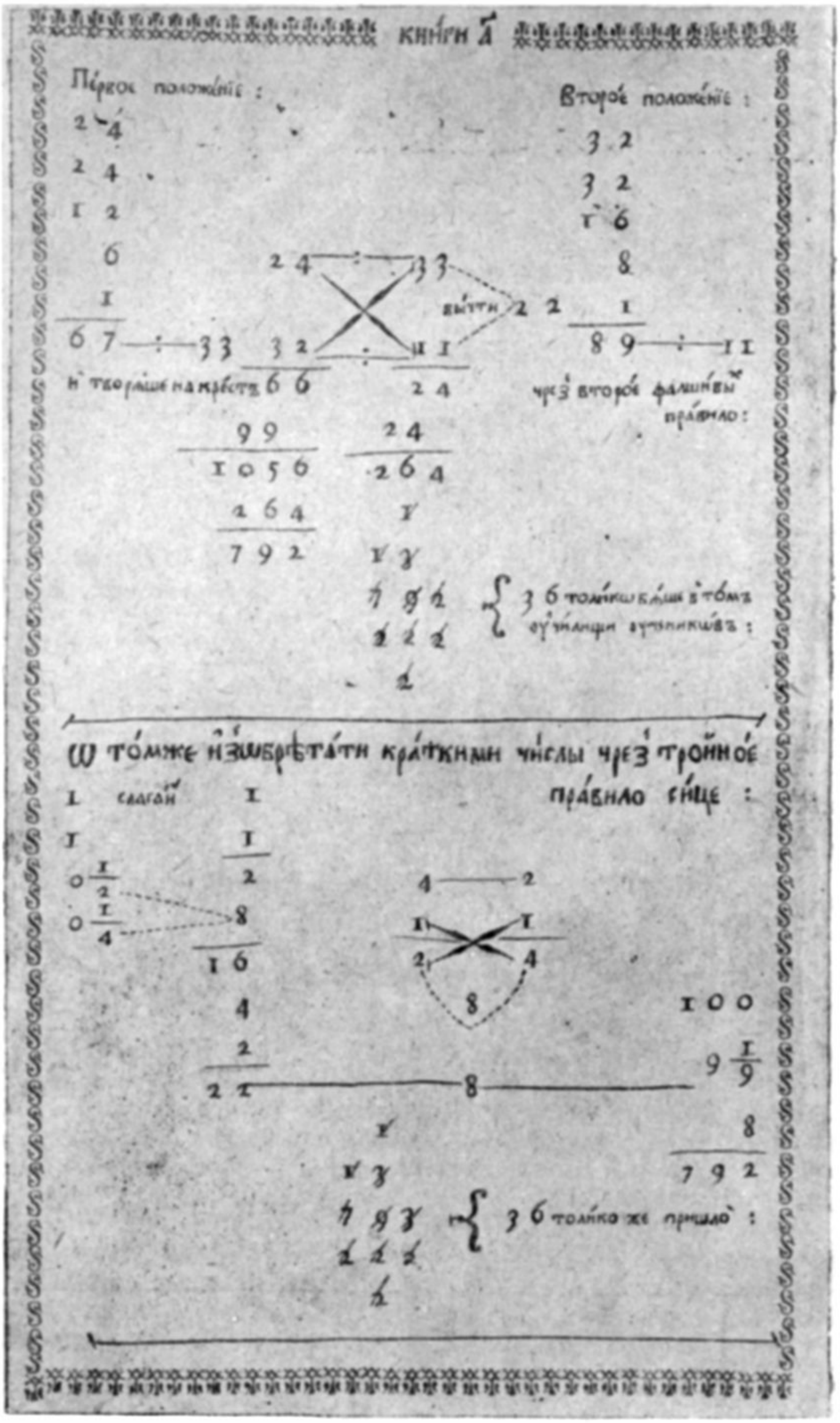
Наконец приведем решение задачи на так называемое фальшивое, или гадательное, правило, которое было очень популярным в учебниках XVIII в. Эта задача воспроизведена выше на этой странице.

Теперь эта задача решается очень просто с дробными числами, принимая число учеников за единицу

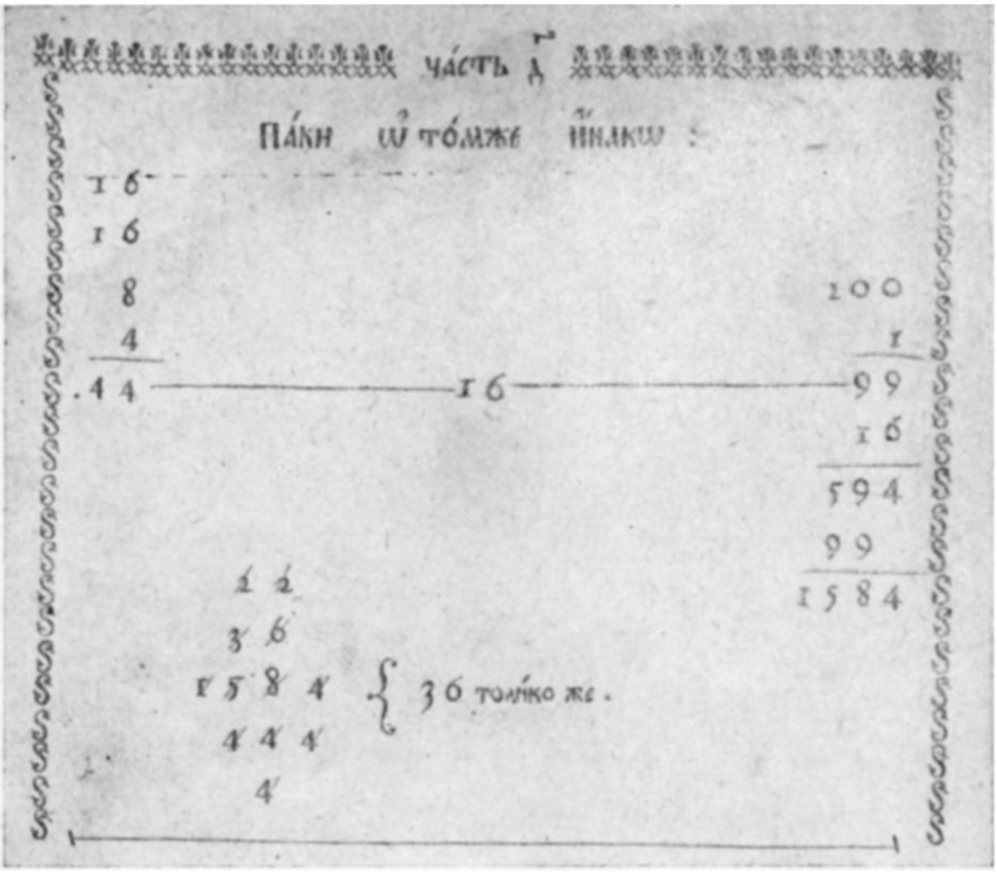
$$\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}\right).$$

У Магницкого же, как видно из приведенного решения (стр. 14, 15), она решалась так: пусть учеников было 24 («первое положение»), тогда, по условию задачи, в училище было бы $24+24+12+6+1_{"}=67$ учеников, а их было 100; значит, наше предположение неверно, и ошибка равна 33 ученикам. Возьмем учеников 32 («второе положение»), тогда их будет $32+32+16+8+1=89$, ошибка равна 11. Дальше нужно сделать следующее: первое предположение 24 умножаем на вторую ошибку 11, получится 264; второе предположение 32 умножается на первую ошибку 33, получается 1056; из 1056 вычитается 264, получается 792, и это число делится на разность ошибок от предположений $33-11=22$, получим $792:22=36$.

Магницкий дает и второй способ решения этой задачи, который близок к современному способу $(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$; но сумму эту


Книги А
Первое положение :
Второе положение :
вычти
и творяше на кресть 66
чрез второе фальшивое правило :
3 6 толико было в томъ училищи учениковъ :
О томже изобретати краткими числы чрез тройное правило сице :
слагай
3 6 толико же прииде :

14



он находит так: $1 + 1 = 2; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8}$; общая сумма $16+4+$ $+ 2 = 22$. Прилагая сюда тройное правило, находим:

$$22 — 8 — 99.$$

Отсюда по правилу получается искомое число $99 \times 8 : 22 = 36$. Приведенных примеров достаточно, чтобы видеть, насколько вычурны, рецептурны и догматичны были во времена Магницкого приемы решения задач. Такие приемы решения ни в какой мере не могли служить задаче развития у учащихся логического мышления, да эта задача и не стояла перед педагогами того времени. Учащийся мог только заучивать решение задач, запоминая те многочисленные правила, по которым решались задачи. Задачи не давались учащимся для с а м о с т о я т е л ь н о г о решения. Ученик должен был уметь решать по данному правилу только неоднократно решенную им задачу или, по крайней мере, задачу, похожую на те, которые решались им раньше. Предполагалось, что учащийся не в состоянии решать самостоятельно ту задачу, которая дается ему впервые. Задачи в XVIII в. не выделялись в особую книгу; на задачи смотрели как на продолжение теории арифметических действий и помещали их в одной книге с теорией.

В курсе арифметики Магницкого никаких доказательств не приводилось, и объяснения сводились только к констатации или изложению правил. Это был коренной недостаток учебника Магницкого. Такие учебники не могли, конечно, удовлетворять ни учителей, ни учеников. Русский педагог Василий Адодуров, написавший «Руководство арифметики» в 1740 г., в предисловии в этой книге говорил :... «Известно, что арифметика, когда она без оснований и без доказательств показывается, недовольна ни к разрешению всех случаев, ни к поощрению человеческого разума, о чем надлежало бы наипаче стараться». А дальше в том же предисловии, давая оценку своей книге, он пишет: «Надеемся мы, что через сие расположение молодые люди не только надлежащую твердость получить могут, но и при всяком арифметическом действии праведное основание и причину видеть будут, а через то и сами к основательному размышлению по малу приобыкнут». Таким образом, еще современники Магницкого сознавали необходимость давать в учебниках не только правила, но и объяснять эти правила, давать обоснования и доказательства основных математических положений; в высказываниях Адодурова проглядывает и новый взгляд на цель обучения арифметике: приучить учеников к «основательному размышлению», иначе говоря, способствовать развитию математического мышления у учащихся. И действительно, в последующих учебниках, пришедших на смену Магницкого, делаются попытки давать доказательства, приводятся подробные рассуждения, даются объяснения правил. Но система построения и материал оставались в основном неизменным во всех учебниках арифметики, издававшихся в XVIII и первой половине XIX вв. учебники начинались с определений основных понятий арифметики — что такое арифметика, что такое число, что такое единица, затем давался ряд правил и определений в связи с нумерацией. Нумерация давалась сразу в пределе чисел любой величины. После этого рассматривались одно за другим четыре арифметических действия — сначала над целыми, а потом и над дробными числами.

В 80-х годах XVIII столетия в России впервые начали открываться, и то только в городах, школы для детей различных сословий: малые училища с двухгодичным и главные училища с четырехгодичным курсом обучения. Развитие этих школ шло медленно, что видно из следующих цифровых данных:

в 1782 г.	было	8 школ,	26	учителей —	518	учащихся
« 1790 «	«	269	« 629	«	16525	«
« 1800 «	«	315	« 790	«	19915	«

Для этих школ понадобились учебники. Первым таким учебником, предназначенным для детей-учащихся народных школ, был учебник, изданный в 1783 г. под названием «Руководство к арифметике для употребления в народных училищах Российской империи».

Каждый вопрос в этом учебнике начинался с определения. Потом давалось подробное правило и применение этого правила к решению примеров. Никаких объяснений правил при этом не давалось. Такое изложение заставляло детей заучивать книгу; оно и служило одной из причин процветания зубрежки в школе.

Вместе с изданием для народных училищ учебника арифметики было издано Комиссией об устройстве народных училищ и «Руководство для учителей I и II классов народных училищ». Это в сущности и было первое элементарное методическое пособие для учителей. О преподавании арифметики в этом руководстве говорилось следующее: «Учитель должен преподавать как четыре правила арифметики, так и другие по частям и одно за другим, причем за каждым правилом тотчас следовать должен и пример. Приведя пример к к о н ц у, учитель должен объяснить, почему он поступал так, а не иначе. Потом нужно стереть с доски сделанный пример и, призвав лучшего ученика, диктовать ему т о т ж е п р и м е р, а ученик делает его вслух, явственно». А затем учителем должен быть дан новый пример, который опять решается одним учеником на классной доске, «прочие же с п и с ы в а ю т оный пример на досках своих, сидя по местам».

Таблицу умножения советовалось записывать на доске по частям, заставляя повторять хором написанное 5—6 раз, а на другой день повторять заученное.

Когда ученики, — говорилось в этом руководстве, — усвоят п р а в и л а, учитель должен предлагать им задачи, «не сказывая однако, по какому правилу какую задачу решить должно, но стараясь только нарочными и предмету задач сответствующими вопросами доводить их до того, чтобы они учились сами познавать, по которому правилу какую решать».

Методические указания, как видно из этих выдержек, были очень примитивны, по существу схоластичны, и психологию детей ни в какой мере не учитывали. Как учебник, так и руководство к преподаванию, изданные Комиссией об устройстве народных училищ, существовали в школе до 1829 г., когда была издана арифметика Ф. И. Буссе.

Нельзя не упомянуть здесь об учебнике арифметики М е м о р с к о г о, изданном в Москве в 1794 г. под названием «Краткая арифметика, служащая к легчайшему обучению малолетнего юношества в вопросах и ответах». Эта книга знаменита тем, что она выдержала более 20 изданий и просуществовала более 100 лет. Методические качества этой книги были очень невысоки; по существу это был сборник правил, отвечающий на вопросы, как поступать в каждом отдельном случае. Например об умножении дробей. Вопрос: «Как производится умножение дробей?» Ответ: «Должно умножить числителя на числителя и знаменателя на знаменателя, например $\frac{3}{5}$ умножить на $\frac{4}{9}$, умножаю так: $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{45}$ будет произведение».

И все. Во всей книге нет ни одного объяснения, ни одного вопроса, почему так, а не иначе производится то или иное вычисление.

Вопросо-ответная форма изложения содержания арифметики пользовалась при всем том большой популярностью. Она способствовала процветанию зубрежки, а не сознательному усвоению материала. В таком роде было издано в дальнейшем еще несколько учебников арифметики; например в 1806 г. — «Арифметика, служащая к легчайшему обучению малолетнего юношества, составленная Кузминским», Москва. В отличие от Меморского в этой книге обращено больше внимания на объяснения.

Таким образом, в XVIII в. была проделана немалая работа по созданию учебников арифметики. Эта работа продолжалась и на всем протяжении XIX в., когда учебники были значительно улучшены: теория была разработана лучше, изложение стало проще, объяснения давались глубже и более связно.

2. ПЕРВЫЕ ШАГИ В СОЗДАНИИ МЕТОДИКИ АРИФМЕТИКИ.

Параллельно с этим со второй четверти XIX в. началась работа и по созданию методики преподавания арифметики. К этому времени в Западной Европе произошли большие реформы в области школьного образования. Философские высказывания Бэкона Веруламского и Джона Локка, педагогические высказывания Амоса Коменского, Ж.-Ж. Руссо и французских энциклопедистов подготовили почву для построения процесса обучения и воспитания на совершенно новых основах. Великим реформатором школы, претворившим в практику теоретические высказывания философов и теоретиков-педагогов, явился швейцарский педагог Генрих Песталоцци, живший с 1746 по 1827 г. Строя весь процесс обучения по-новому, Песталоцци внес существенные изменения и в методы преподавания арифметики. Своими литературными трудами, а главное своей практической педагогической деятельностью он оказал огромное влияние на перестройку методики обучения арифметике. Под влиянием Песталоцци и его ближайших последователей находились и первые русские методисты в области арифметики. В чем же заключалась сущность высказываний Песталоцци в области методики арифметики? Песталоцци полагал, что целью школьного обучения должно быть умственное и нравственное совершенствование ребенка, развитие духовных сил учащегося. Арифметика, по мнению Песталоцци, более других предметов способствует достижению этих целей, поэтому он предоставил ей одно из главных мест в курсе начальной школы. Если до Песталоцци обучением арифметике преследовалась исключительно материальная, практическая цель, то Песталоцци со всей силой подчеркнул и выдвинул на первое место формальную цель обучения — развитие всех сил и способностей ученика; путем изучения арифметики дети должны в своем умственном развитии пройти планомерно и постепенно путь «от наглядных представлений до ясных понятий». Развитие ребенка должно совершаться изнутри; материал учебного предмета при этом решающей роли не играет.

Для достижения новых целей Песталоцци использовал и новые средства: на первое место он поставил устный счет, устные сознательные вычисления над небольшими числами. Письменные вычисления отошли у него на задний план. Песталоцци добивался от своих учащихся поразительной быстроты и правильности в устных вычислениях. Затем все обучение арифметике он стремился построить на основе самого широкого использования н а г л я д н о с т и. В качестве наглядных пособий ему служили три таблицы: одна — для целых чисел и две—для дробных чисел.

Он старался устранить механическое заучивание правил и определений и построить все обучение н а с о з н а т е л ь н о м восприятии учащимися материала, на возбуждении у детей с а м о д е я т е л ь н о с т и и и н т е р е с а, которые являются главными средствами и двигателями внутреннего развития ребенка.

Но ему не удалось избежать крайностей; увлекшись формальной целью обучения (всесторонним «извнутри» развитием учащегося), он умалил практическую очень важную цель обучения арифметике. Его упражнения часто носили отвлеченный, искусственный характер; жизненные практические задачи заняли в его системе второстепенное место. Вот образцы упражнений (описанных в трех толстых тетрадях), которые должны были проделывать его ученики: «9 раз по одному есть 4 раза по 2 и один раз половину двух». «9 раз 9 и 8 раз девятая часть 9 есть 89 раз по одному». «4 относятся к 9 как 28 относится к какому числу?» и т. д. В этих упражнениях не используется десятичный состав чисел, что при нашей десятичной системе счисления облегчает и упрощает все вычисления. Применявшиеся им формы наглядности — таблицы — носили до некоторой степени искусственный характер: в них самих заключалась некоторая доля отвлеченности.

Но, несмотря на односторонние крайности и увлечения, Песталоцци принадлежат в области создания новой методики арифметики огромные заслуги: он нанес сокрушительный удар механичности обучения письменным вычислениям, он закрепил идею наглядного обучения и дал этой идее конкретное практическое выражение (правда, не совсем удачное, как это было указано выше), он показал средства борьбы с схоластикой, с догматизмом. Идеи Песталоцци и, главное, его практическая педагогическая деятельность всколыхнули педагогическую мысль в разных странах; в школу Песталоцци приезжали педагоги из разных стран, чтобы посмотреть и поучиться у него педагогическому делу. Песталоцци имел много последователей, сторонников своего учения. Среди его учеников особенно выделялись Шольц, Кранке, Тиллих, Тюрк, Раух и другие, которые, следуя в основном принципам Песталоцци, старались исправить недостатки своего учителя. Между сторонниками и противниками Песталоцци происходили ожесточенные споры, в процессе которых выковывалась истина.

В эти же годы развертывается педагогическая деятельность известного германского педагога А д о л ь ф а Д и с т е р в е г а и учителя Г е н ч е л я, которые своими литературными трудами и непосредственной педагогической практикой оказали большое влияние на дальнейшее развитие методики арифметики и геометрии. В 1829 г. (год спустя после смерти Песталоцци) Дистервег издал

«Методическое руководство к обучению счету», а затем выпустил и задачники для учащихся.

В результате работ Песталоцци и его учеников, а также Дистервега и Генчеля к началу второй четверти XIX в. окончательно сформировались главные методические положения, которые легли в основу последующих методических руководств по арифметике. Положения эти сводились к следующему:

1. Обучение арифметике должно преследовать две цели: общеобразовательную и практическую, иначе говоря, материальную и формальную.

2. Обучение арифметике должно основываться на широком использовании наглядности.

3. Устные вычисления должны иметь место наряду с письменными.

4. Упражнения над отвлеченными числами должны чередоваться с решением жизненных практических задач.

5. Материал начальной арифметики располагается для его изучения концентрически.

Эти положения господствовали в методике арифметики на Западе вплоть до второй половины XIX в. Они были известны и первым русским методистам арифметики, П. Гурьеву и Ф. Буссе, к описанию работ которых мы и переходим.

Ф. И. БУССЕ.

Федор Иванович Буссе получил образование в Главном педагогическом институте в Петербурге, по окончании которого в 1816 г. был командирован за границу для ознакомления с педагогическим делом. По плану командировки Буссе должен был быть и в Швейцарии у Песталоцци. По прибытии из командировки Буссе был оставлен при министерстве народного просвещения, по заданию которого работал над созданием учебников и методики арифметики для уездных училищ (до 1850 г. министерство народного просвещения сосредоточивало у себя функции непосредственного издания учебников). Ф. Буссе известен главным образом своими следующими тремя книгами:

1) В 1829 г. было выпущено «Руководство по арифметике, изданное департаментом министерства народного просвещения для употребления в уездных училищах».

2) В 1830 г. «Руководство к преподаванию арифметики, изданное департаментом министерства народного просвещения для употребления в уездных училищах».

3) В 1832 г. — «Собрание арифметических задач».

Этими книгами определялись содержание и характер преподавания в уездных училищах и даже в гимназиях (начальных классах) вплоть до 60 — 70-х годов прошлого столетия. В своем руководстве к преподаванию арифметики Буссе, очевидно, предполагал дать полное методическое руководство. Уже в предисловии к этой книге мы видим заметное отражение тех идей, которые были в это время на Западе. «При обучении всякой науке», говорилось в предисловии, «должно иметь в виду д в е г л а в н ы е ц е л и; первая состоит в развитии и упражнениях умственных способностей учащихся, а вторая в сообщении им полезных и необходимых сведений; в первом отношении математика имеет великое преимущество». Далее, переходя к вопросу, как достигнуть цели, Буссе пишет: «При надлежащем руководстве учащиеся постепенно переходят от легчайших истин, основанных на наглядности, к отвлеченнейшим умозаключениям. Без сомнения, многое зависит от способов преподавания.

Если же преподаватель при объяснении какого-нибудь предложения начинает с самой простой наглядной истины и постепенно ведет своего ученика к требуемому заключению посредством наводящих вопросов, то в самих учащихся возбуждается умственная деятельность, доставляющая им внутреннее удовольствие... Если преподаватель не упускает из виду этой главной цели, т. е. развитие умственных способностей, то приобретение по этой части полезных в общежитии познаний будет верным следствием»...

Определив цели обучения и указав на возможность их гармонического сочетания, Буссе дает следующие правила, которыми должен руководствоваться учитель: 1) упражнения должно приспособлять к понятиям и возрасту учащихся; 2) не оставлять ничего без основательного объяснения; 3) соблюдать постепенность; 4) сперва развивать в ученике ясное понятие о каком-нибудь правиле, а потом уже давать определение оного; 5) заставлять учеников в уме решать легкие задачи; 6) показывать ученикам пользу и необходимость каждого арифметического правила, приспособляя оное к решению занимательных и часто встречающихся в общежитии задач. Значение каждого правила Буссе подробно объясняет. Это руководство было крупным шагом вперед по сравнению с Руководством, изданным Комиссией об устройстве народных училищ. Современная критика сочувственно отнеслась к этой книге. «Автор оказал юношеству великую услугу сим полезным сочинением», писал Гурьев в Педагогическом журнале в 1833 г. Книга Буссе, по словам Гурьева, «превосходит все то, что доселе было написано у нас об арифметике».

Но книга имела и свои недостатки: Буссе в отношении системы шел по проторенной дороге, ничего в ней не меняя. Он начинал арифметику также с определений, что есть арифметика, что называется числом, единицей и т. д. «Могут ли дети понять определение числа, могут ли так витийствовать, как заставляет их автор», говорит тот же Гурьев, находя вопросы и ответы Буссе явно неудовлетворительными. «Решительно думаем, что ученики никогда не дадут тех ответов, которые автор влагает в их уста». «Возможно ли так хорошо понимать предмет, и так много погрешить в исполнении!» такой меткой фразой заканчивает Гурьев свою критику книги Буссе. И действительно, теоретические положения автора были во много раз глубже и принципиальнее, чем практическая разработка этих положений.

Как уже было указано выше, Буссе был составлен сборник задач. К этому времени созрела мысль о том, что объяснение и изучение теории арифметики должно быть подкреплено решением задач. Это вызвало появление сборников задач, так как тех задач, которые помещались в учебниках арифметики, оказывалось мало. Первый сборник арифметических задач был издан в 1806 г. учителем Пермской духовной семинарии Алексеем Вишневским. Сборник заключал в себе 10 отделов: 1) задачи на вычисления с квадратными и кубическими мерами; 2) примеры вычислений с конечными десятичными дробями; 3) задачи на тройное правило — прямое и обратное; 4) на все случаи тройных правил; 5) на правило товарищества; 6) на правило смешения; 7) на правило фальшивое и др.

Задач на отдельные действия и задач, требующих нескольких действий, но не подведенных под правила, не было. В этих задачах говорилось о покупке, разделе прибыли, найме рабочих, наполнении бассейнов, о курьерах и т. п.; тут есть задача о вознаграждении изобретателя шахматной игры, о стаде гусей, которому встретился один гусь. Трудные задачи перемешаны с легкими. Условия некоторых задач очень длинны, некоторые задачи являются курьезами, изложенными к тому же плохим стихотворным языком, например:

Нововыезжей в Россию французской мадаме
Вздумалось ценить богатство свое в чемодане
Новой выдумал нарядное фуро
И праздничный чепец à la Figaro.
Оценщик был русак,
Сказал мадаме так...

Характерно, что каждая задача давалась с полным ее решением. Поэтому такой задачник-решебник нельзя было давать в руки учеников. Задачи на тройное правило решались при помощи пропорции.

Недостатки этого задачника очевидны: отсутствие постепенности в усложнении задач, отсутствие задач, которые нужны при обучении детей арифметическим действиям, однообразие тематики, готовые решения задач.

В 1831 г. появился еще один задачник — задачник, составленный Куртнером. Даже для того времени это был плохой задачник: длинные условия задач, искусственное и часто неинтересное содержание многих задач; например: «Сколько в году секунд, если год содержит 365 дней 5 часов 49 минут 42 секунды?» «На скольких верстах колесо, имеющее в окружности 9 аршин, 14 вершков, повернулось 5 693 600 раз?».

Задачник Буссе, изданный Департаментом М. Н. П., выгодно отличался от этих задачников большей систематичностью, наличием в конце сборника задач на все правила. Но и в этом сборнике были крупнейшие недостатки: в нем не было в задачах постепенного нарастания трудности, содержание задач страдало однообразием и отвлеченностью; решение большинства задач подсказано названием того отдела, в котором задача помещена; к каждой более или менее трудной задаче дается ее полное решение.

(Отметим попутно, что наряду с задачником Буссе в уездных училищах и гимназиях применялись задачники Иваницкого (изд. 1849 г.), в которых условия многих задач были взяты из статистики, математической географии, физики, а также из военной жизни).

Из краткого разбора работ Буссе видно, что ему только в очень малой степени удалось на практике реализовать те вполне правильные и для своего времени прогрессивные методические положения, которые были высказаны им в предисловии к «Руководству». Над ним довлела старая «неписанная методика» XVIII в., от которой он так и не мог освободиться даже в позднейшем издании своего Руководства, переизданном уже в 1860 г.[1].

[1] Очень возможно, что полной реализации методических идей Буссе мешало министерство народного просвещения. Гурьев рассказывал, что «Буссе

П. С. ГУРЬЕВ.

Гораздо больше в деле создания методики арифметики сделал современник Буссе П. С. Гурьев. Гурьева справедливо называют отцом и родоначальником русской методики арифметики. Его литературно-педагогическая деятельность началась в 30-х годах XIX столетия и продолжалась на протяжении полвека. Преподавательская работа в одном из женских учебных заведений давала ему большой практический опыт, а его глубокое теоретическое образование и хорошее знание иностранных языков помогало ему быть в курсе современных ему методических идей, господствовавших на Западе. Его педагогическое мировоззрение складывалось под влиянием идей Песталоцци, Шольца и других. Но, заимствуя некоторые идеи у швейцарского и немецких педагогов, он внес в практическую разработку их много своего оригинального, творческого, взятого из богатого собственного опыта, из своих наблюдений за развитием русской школы.

В своих работах он обнаружил последовательность, стойкость, он оставался верным до конца своей основной педагогической линии, несмотря на то, что его эпоха была богата крутыми поворотами, резкими колебаниями методических идей.

Петр Семенович Гурьев известен нам своими тремя трудами: 1) «Арифметические листки», 2) «Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям» и 3) «Практическая арифметика».

Арифметические листки были выпущены в 1832 г. под пространным названием «Арифметические листки, расположенные от легчайшего к труднейшему, содержащие в себе 2523 задачи, с решением оных и с кратким руководством к исчислению». Это сочинение названо листками, потому что было отпечатано действительно на отдельных листках, и условие одной задачи никогда не переносилось на другой листок, чтобы удобно было раздавать их в классе. Гурьев говорил, что цель этого издания заключается в том, чтобы сберечь время учителя и дать ему средство *возбудить и поддержать самодеятельность учащихся*. Кроме примеров, на листках помещены определения и правила производства всех арифметических вычислений. Гурьев так стремился изложить эти правила, чтобы ученики сами, без посторонней помощи могли итти вперед. Правила часто описываются, но не объясняются. Задач в собственном смысле этого слова в этом «рассыпном учебнике» очень мало — всего 122: все остальное — отвлеченные примеры.

В них (в листках) многое находилось в противоречии со взглядами автора на механические приемы вычислений. Враг всего механического, Гурьев в своей ранней работе, однако, оказался несвободным

издал несколько математических учебников, но до того очуренных министерской неизменной системой, что лишен был всякой возможности провести методу Песталоцци в том виде, сколько бы желал и сколько сам понимал, изучив ее еще в Швейцарии. Ему приказано было, чтобы руководство было написано по известной системе, по известным правилам, а если бы он воспротивился, то книги никогда не были бы приняты. Буссе сам говорил мне, что он должен был несколько раз совершенно переделывать свои рукописи, чтобы они удостоились наконец одобрения министерства».

от догматичности и рецептурности; так, например, он пространно описывает, как надо располагать числа в записях, очевидно придавая форме записи очень большое значение, как надо располагать числа, данные в задачах на тройное правило, какое из них на какое надо умножить в зависимости от места их расположения, как соединять числа дугами и т. д. Весь этот «рассыпной учебник» носит характер самоучителя, устраняющего учителя или во всяком случае сильно снижающего его роль.

Следующей более зрелой в методическом отношении работой Гурьева было его «Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям», изданное в 1839 г. Это было методическое пособие для начинающих учителей; в нем давалась методическая разработка материала только в пределе первой сотни. Гурьев ясно представлял себе причины плохой постановки преподавания арифметики в современной ему школе... «Дети четыре-пять лет сряду», пишет он, «учатся в школах арифметике, твердят беспрестанно одно и то же, а все таки большая часть учащихся по окончании столь долговременного курса не только не усваивает ее как бы следовало, но получает отвращение от нее и от всей математики. Между тем, при и н о м и з л о ж е н и и и заблаговременном возбуждении с а м о с т о я т е л ь н о с т и в учащихся, нет сомнения, что та же самая наука отнюдь не показалась бы им столь тяжелою и скучною...» Таким образом, неудовлетворительное изложение арифметики в учебниках и плохой метод ее преподавания, при котором отсутствует с а м о д е я т е л ь н о с т ь учащихся — вот что является, по мнению Гурьева, причиной плохих знаний учащихся по арифметике.

Вопреки тогдашним учебникам арифметики Гурьев в своем руководстве располагает материал к о н ц е н т р и ч е с к и: сначала он дает счет и четыре действия в пределе 10, а затем счет и действия в пределе 100. Он широко применяет, особенно на первых шагах обучения, н а г л я д н о с т ь, используя для этого черточки (ср. с таблицами Песталоцци). На каждое действие дано весьма большое количество упражнений, в которых строго выдержана п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь и постепенное нарастание сложности, и Гурьев настаивает, чтобы учитель проделал все эти упражнения со всеми частными случаями. Благодаря этому «Арифметика в книге Гурьева выглядит весьма сложной наукой», замечает по этому поводу В. Латышев в своем критическом разборе математической литературы XIX в. Действительно, книга во многих местах излишне растянута.

Дальнейшее свое развитие методические взгляды автора нашли в другой его книге, изданной значительно позже (а именно в 1861 г.) под названием «Практическая арифметика». В этой работе методические высказывания Гурьева достигают большой зрелости и четкости. И здесь он на первое место выдвигает с а м о д е я т е л ь н о с т ь учащихся как главное и первое условие успешного усвоения арифметики. «И в той и другой книге постоянно имелась в виду самодеятельность в учащихся, как лучшее ручательство в приобретении основательных познаний», пишет Гурьев в предисловии к «Практической арифметике». Ту же он высказывает совершенно правильный взгляд на правила, которым все еще продолжали придавать в учебниках и в практике преподавания главное значение. «Соблюдая в изложении строгую постепенность в переходе от легкого к трудному, от простого к сложному, от примеров к правилу, закону, стараясь преимущественно о том, чтобы учащийся, при беспрерывных упражнениях в решении задач, сам, по возможности, доходил до сознания необходимости в том или другом правиле, и чтоб вообще правила не заслоняли собой самого дела, а обнаруживались мало-помалу по мере приобретения им навыка и ловкости в выкладках, я имел таким образом право озаглавить мою книгу «Практическая арифметика». — Трудно что-либо прибавить нам к этой четкой и ясной формулировке, правильно раскрывающей соотношение между решением задач, примеров и выводом правил.

В связи с объяснением, почему данная книга названа «Практической арифметикой», Гурьев высказывает интересные мысли о теории. «Этим названием», пишет он, «я хотел также показать различие ее от тех руководств по этой части, где теория значит все. Да не подумают впрочем, чтоб я отвергал теорию. Никакая наука немыслима без теории... Дело не в том, чтоб обходить теорию, но как ее передать детскому уму, чтоб она усваивалась им не насильственно, не одной памятью, не в темных и непонятных для него фразах, не вдруг и не впереди фактов, подлежащих еще его рассмотрению, а как обобщение самое естественное, к которому постепенно доходит всякое мыслящее существо по мере того, как группируются перед ним собранные им факты и возбуждается в нем потребность разъяснить себе наконец и самую идею науки. Вот под каким условием может быть, по моему мнению, допущена теория в детском учебнике» (6 стр.).

Эта мысль направлена против коренной ошибки тогдашних учебников, предназначенных для начальной школы — ошибки, состоящей в том, что курс начинался с теории, теория давалась сразу вся, готовенькой, «впереди фактов», а поэтому непонятной, «темной» для детей. Теория должна быть обобщением, группировкой изученных фактов, вытекающей из естественной потребности учащегося разобраться в изученных фактах — эта мысль в дальнейшем сделалась основной, исходной в построении курсов арифметики для начальной школы. Реализация ее требовала концентрического расположения материала, и концентричность у Гурьева является одним из главных принципов построения «Практической арифметики». «Очевидно, пишет он, «надо начинать дело со счисления, однакож не должно останавливаться на исследовании этого вопроса до тех пор, пока он совершенно истощится; напротив, важнее всего и сообразнее с детским развитием дать сколь возможно ранее эскиз всей арифметики. Итак, чтобы итти в науке всегда в параллель с силами учащихся, следует научить их сперва считать и изображать цифрами только числа от одного до десяти, потом тотчас перейти к сложению и вычитанию этих чисел, к разложению или разделению их на равные и неравные части, словом, сделать над ними разного рода сравнения... Таким образом хотя сначала будет пройдено мало, однакож целое, которое потом все более и более станет развиваться не по прямой линии, а подобно концентрическим кругам, распространяющимся от центра».

«Подвергнув исчислениям все числа от одного до десяти, должно перейти на вторую ступень (второй концентрический круг) и рассмотреть также с разных точек зрения числа от о д н о г о д о с т а. Здесь уже представляется больший простор: частные приемы получают определенность, правила обобщаются, и самые законы начинают яснее обнаруживаться». Дальше — тоже с числами любой величины (8—9 стр. из «Предисловия»).

Все содержание «Практической арифметики» делится на 5 ступеней, или, как выражается автор, на 5 степеней. 1-я степень — числа от 1 до 10 и действия над ними; 2-я степень — числа от 10 до 100 и действия над ними; 3-я степень — действия над целыми числами как отвлеченными, так и именованными; 4-я степень — дроби обыкновенные и десятичные; 5-я степень — задачи, решаемые помощью пропорций».

Каждая «степень» (ступень) раскрыта очень подробно, обстоятельно. Например, 1-я степень имеет следующее содержание: счет от 1 до 10 (на черточках). Сложение. Вычитание (прибавление по 1, 2, 3 ...9). Разложение чисел на их составные части. Первоначальные понятия о частях единицы — $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ и т. д. Изображение чисел цифрами. Примеры (в большом количестве) на сложение и вычитание. Сначала упражнения проводятся только устно. Дробные числа вводятся очень рано.

2-я степень имеет следующее содержание: нумерация до 100. Сложение чисел в пределе 20. Вычитание чисел в пределе 20. Попутно дается теория: 1) из двух неравных чисел одно всегда более другого, 2) большее число всегда более меньшего на разность, заключающуюся между ними», и т. д. Дальше сложение чисел от 1 до 100; начинается оно с «цифрового исчисления», т. е. с письменного; примеры расположены в порядке возрастающей сложности:

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\,17 \\ \hline 66 \end{array}\begin{array}{l} \Big\}\ \text{слагаемые} \\ \\ \text{сумма} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ +\,40 \\ 20 \\ \hline 110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ +\,50 \\ 10 \\ \hline 85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ 19 \\ +\,15 \\ 29 \\ 19 \\ \hline 99 \end{array}$$

Тут же дается и правило: «Сперва сделают единицы. Если через сложение получится десяток, то под единицами пишут нуль, десятки прибавляют к десяткам» и т. д.

Таблица умножения составлена по постоянному множимому, например:

$$\begin{array}{ll} 4 \times 1 & 5 \times 1 \\ 4 \times 2 & 5 \times 2 \\ 4 \times 3 & 5 \times 3 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ 4 \times 9 & 5 \times 9 \end{array}$$

В конце рядов дан многоговорящий совет: «Советуем вам потверже выучить эти ряды».

Содержанием 3-й степени является «действия над целыми числами вообще». Сюда входит: «Нумерация. Сложение. Вычитание. Умножение. Деление». В каждом действии даются сначала примеры на «изустное исчисление», потом на «письменное исчисление». Из решения примеров выводится правило. Затем идут простые задачи и, наконец, «общие вопросы». По отношению к сложению эти вопросы следующие: «Что такое сложение и когда оно употребляется? Как называются данные для сложения числа? Что называется суммой? Что в сложении бывает больше: сумма или слагаемые числа? Какой знак и где он ставится? Как поступают для поверки сложения?

Так раскрывается каждое действие. Заканчивается эта глава задачами. Только здесь появляются с л о ж н ы е задачи. Условия задач отличаются часто бессюжетностью, отвлеченностью; в содержании преобладают денежные расчеты. Вот примеры таких задач:

1) «А» сказал: если к моим деньгам придать еще 1300 руб., то я могу прожить целый год, издерживая ежедневно по 9 руб. Сколько «А» имеет денег?».

Тут же приведен и образец решения этой задачи:

а) 1 год = 365 дням

б) $$\begin{array}{r} 365 \\ \times 9 \\ \hline 3285 \end{array}$$ руб.

в) $$\begin{array}{r} 3285 \\ -\,1300 \\ \hline 1985 \end{array}$$ руб. (искомое число).

2) «Некто должен 3780 руб.; у него ежемесячно вычитают из жалованья в уплату этого долга по 45 руб. Во сколько лет произведется уплата всего этого долга?»

3) «Первое из пяти данных чисел 1479, второе 3098, третье равно первому, увеличенному в 18 раз, четвертое менее третьего в 6 раз, а последнее равно всем четырем без произведения 13×79. Отыскать третье, четвертое и пятое число».

Такого рода задачи составляли 75% всех задач. Методику решения задач Гурьев не раскрыл, хотя и останавливался на разборе задач — крайне многословном и расплывчатом.

Из сказанного видно, что Гурьев заложил правильные основы создания русской методики арифметики. Он, конечно, не мог порвать окончательно с традициями старой «неписанной» методики, он повторяет некоторые ошибки этой методики (преждевременное введение правил, излишнее теоретизирование на первых ступенях обучения, предложение зазубривать такие сведения, которые можно и нужно усвоить вполне сознательно, преждевременное ознакомление с дробными числами, излишняя скрупулезность в разработке частных случаев и т. д.). Но вместе с тем он сделал гигантский шаг вперед, правильно разрешив в принципе вопросы о месте теории и правил в курсе арифметики для начальной школы, о концентрическом построении этого курса, об арифметических действиях как основном содержании курса арифметики и других. Не ограничиваясь только одними принципиальными высказываниями, он показал практическое их применение на разработке всего курса арифметики. Эти положения для нас являются азбучными истинами, но для первой половины XIX в. и для первого в сущности методического сочинения это были смелые прогрессивные мысли, опережавшие свою эпоху. Впоследствии (дальше мы это покажем) эти принципы были подхвачены лучшими представителями русской методической мысли (Латышевым, Гольденбергом и др.) и использованы ими для построения полноценной методики арифметики.

Труды Гурьева не остались без влияния и на его современников. В 1852 и 1853 гг. вышли книжки, приближающиеся к типу методических пособий для учителя; это — «Уроки практической арифметики» Ю. Симашко и «Беседы с маленькими детьми о первых началах арифметики» Ожаровского. Книга Симашко была для своего времени хорошей книгой, в которой дано много простых, удачных и правильных объяснений. Обобщения делаются после рассмотрения ряда примеров (требование Гурьева). Книга Ожаровского была значительно слабее.

3. СОСТОЯНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В ШКОЛАХ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX В.

Возникает вопрос, в какой мере работы Гурьева и Буссе влияли на школьную практику, как отражались новые веяния в методической литературе на постановке преподавания арифметики в школах? Нужно прямо сказать, что это влияние было крайне незначительным. Арифметика преподавалась в школах самыми примитивными, можно сказать, «допотопными» способами. Правительство как Александра I, так и тем более Николая I не проявляло никаких забот о распространении народного образования. Рост народных школ шел чрезвычайно медленно. Школ было очень мало, учащихся — тоже. Так в т. 39 журнала М. Н. П., издававшегося Озерецковским, приводятся следующие интересные для нас статистические данные: «Во всей Рязанской губ. учащихся было 613 человек (!); в том же году в Ярославской — 660, Владимирской — 858, Калужской — 562, Костромской — 268» и т. д. До конца 50-х годов в России издавалось всего только 2 педагогических журнала, если не считать официальных журналов министерства народного просвещения и Правления военно-учебных заведений. Но в этих журналах, заполнявшихся главным образом статистическими сведениями, почти не было статей педагогического характера. Критики и библиографии педагогической литературы тогда еще не существовало. Критики назывались людьми, «рачительно метущими сор у чужих ворот». Учебно-педагогическая литература была бедна. Гурьев в обзоре «литературы педагогики с декабря 1832 г. по декабрь 1833 г.» насчитывает только 50 изданий, хоть сколько-нибудь относящихся к учебному делу, считая в том числе и книжки для детского чтения. Подготовка учителей была поставлена плохо; учителей выпускалось мало.

Сохранилось два документа, по которым можно довольно точно воспроизвести картину преподавания арифметики в народной школе: 1) Книга Е. Стрельцова под названием «Из 25-летней практики сельского учителя. Воспоминания, очерки и заметки Е. Стрельцова. Часть первая. Сельская школа (1849—1864)», СПб., изд. И. Паульсона и 2) Статьи Н. А. Корфа.

Стрельцов в своей книге, написанной очень живо и ярко, в главе 19 «О преподавании арифметики» (стр. 189—208), рассказывает в форме разговора учителя с гостем, как один учитель преподавал арифметику. Приведем этот разговор:

«Сначала я учу считать до ста и более, — говорит выводимый автором воспоминаний учитель в беседе с лицом, обозревающим школу,— посажу всех учеников и сам громко считаю: раз, два, три, четыре и т. д., а дети повторяют хором. Так они научатся считать до ста; а там уж — то же самое пойдет далее: сто один, сто два». — «И дети все научатся таким образом считать?» — «Ну, есть всякие: иному ни за что не научиться считать дальше десяти: как дошел до одиннадцати, так и стой, собьется. Потом пишут до ста: я прописываю на доске; а когда научатся писать вразбивку до ста, то начинаю учить нумерацию. Поставлю учеников в кружок к доске, напишу им число с миллионом и, показывая на первую цифру, говорю: единицы, десятки (на них и показываю), сотни, тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч, миллионы. Так показываю и твержу, а дети повторяют за мною хором до тех пор, пока будут знать и подряд и вразбивку. Потом заставляю их выговаривать числа с миллионами (больше миллионов редко употребляю), а потом учу писать такие же числа под диктовку». — «И понимают?» — «Сначала, конечно, трудно; особенно нулей ставить долго не научаются; но после поймут хорошо. Потом сложение. Сперва расскажу, как подписывают числа: единицы под единицы, десятки под десятки и т. д. Потом покажу, с чего начинают сложение, что писать, что в уме — и все тут. Конечно есть другие, что или сложить не умеют, сколько семь да девять, восемь да шесть и пр., или в уме оставляют, но таких немного, потому что я даю учить наизусть таблицу сложения небольших чисел. Потом вычитание — то же самое, только тут занимать учу, когда нельзя вычесть. Вычитание понимают скоро. Умножение труднее: тут таблицы иному и в зиму не выучить. А кто выучит таблицу, тот скоро начнет делать; да и просто: умножай по таблице, а подписывай как в сложении. Только тут многие все сбиваются: помножит на вторую цифру, а пишет под первой; помножает на третью, а писать и не знает куда; но и то скоро привыкает писать лесенкой. А там — деление. Деление сперва на одну цифру, потом на две. Деление всего труднее; задаваться редко кто может сразу верно».

Видя, как в школе этого учителя дети решают задачи, можно было убедиться, что «ученики буквально д е л а ю т задачи, не понимая того, что они делают, как и для чего все это делается. Задачи их состояли из чисто отвлеченных чисел, обрабатываемых по заранее определенному плану: 33 125 разделить на 7, — командует старший ученик, и отделение его дружно скрипит грифелями... Пробовали дать им несколько изустных задач из крестьянского быта, и некоторые ребята считали верно, но п о-с в о е м у. Продал мужик воз сена —

25 пудов по 27 коп за пуд; сколько ему приходится получить денег? — По гривеннику — два с полтиной; по другому — опять два с полтиной, да по пятачку — 1 р. 25 к. — всего будет 6 р. 25 коп., да по копейке — 25 коп., по другой — еще 25 коп. Позабыл сосчитанное и запутался. — «Почему по гривеннику, так будет два с полтиной?» — «Так уже приходится». — Да почему приходится? Может, и не так? — «Нет, уж так; по гривеннику — всегда так». — «Кто ж тебе это сказал?» — «Отец всегда так на счетах считает».

«Но скажите, — спрашивают учителя, — какая польза детям от того, что они привыкают делать все эти задачи (т. е. задачи с отвлеченными числами на определенные, назначенные действия)?» — «Будут знать, как делается. Конечно у них дома все на счетах или на память считают,— это скорее; но так гораздо вернее». — «Как же вернее, когда вы говорите, что часто ошибаются в нулях или подписывают десятки под единицы? И где же крестьянину придется считать большие числа с миллионами? Да, наконец, ваши задачи нельзя делать без бумаги и карандаша; неужели же крестьянину всегда носить их с собой? А главное вот что: если вашему ученику придется сосчитать, сколь, например, в тысяче сороков, то кто же ему скажет: помножить надо или разделить?» — «К о н е ч н о, т у т н у ж е н с в о й у м, и я тоже заставляю делать задачи на память; но ведь вы знаете, крестьянские дети — они понимают плохо, а если показано правило, как написать и делать, то гораздо легче поймут».— «Но ведь правило они могут позабыть и тогда что же?» — «Правила я диктую и заставляю учить наизусть; конечно и тут забывают другие». — «Но пользоваться правилом, приложить его к делу может только тот, у кого, как вы сказали, е с т ь с в о й у м. Откуда же после возьмется у ребенка свой ум, если в школе не позаботятся развить его?» — «Вырастут— станут умнее. Жизнь сама учит человека».

Известный деятель по народному образованию Н. А. Корф в своей книге «Русская начальная школа» (изд. 4, стр. 158—159) дает такой отзыв о преподавании арифметики в «старой школе»: «В огромном большинстве школ старого закала вы встретите обучение счету, но вызовите к доске лучших учеников — и окажется, что они о б у ч е н ы сложению, вычитанию, умножению и делению, которых они н е п о н и м а ю т. Напишите на доске два и более слагаемых — и ученик составит из них сумму; сложивши первый ряд, он скажет, положим, «тринадцать», три пишу, а один замечаю. Спросите его: «ты пишешь три чего? Чего ты заметил «один» и почему не подписываешь о д и н там же, где ты подписал т р и, а прибавляешь один к следующему ряду слагаемых?» Ученик выпучит на вас глаза и крайне удивится вашему вопросу. Задайте такому ученику самую легкую задачу: «Было у меня 25 орехов и подарили мне 30 орехов; сколько у меня стало орехов?» Ученику и в голову не приходит, что ему необходимо прибегнуть к сложению для решения этой задачи, так как сложение заучено им как какое-то самостоятельное бесполезное упражнение, ни к чему ненужное... Я задаю задачу: «В понедельник купил я на базаре 5 кур, во вторник 7, а в среду подарил из них 3 курицы; сколько у меня осталось кур? На это заметил мне учитель, что «такой вопрос впору предлагать в гимназии». Так выразился «один» учитель, а думали так, вероятно, многие, видя, что я обращаюсь, испытывая из арифметики, к соображению, а не к памяти ученика. Все обучение счету в старой школе было основано на упражнении памяти дитяти, а не на упражнении мыслительных способностей, силы и быстроты соображения... Этим объясняется то, что ученик, знавший арифметику в марте 1868 г., в октябре того же года возвращался в школу, *забыв* арифметику; этим объясняется и то, что достигали этих *временных*, скоро улетучивающихся знаний только один или два ученика на двадцать и более учеников. «Старая школа» не имела и не могла иметь понятия о том, что значит обучить целый класс учеников арифметике; то было не обучение, а дрессировка, которую выдерживали только самые сильные натуры».

Эти две выписки полностью подтверждают высказанное нами выше замечание о крайней отсталости и рутинности методики, применявшейся в сельской школе вплоть до 60-х годов. То новое и рациональное, что было в работах Гурьева и Буссе, очевидно не доходило до сельской школы, в которой наглядные пособия не применялись, концентрического изучения материала не было, не давалось ученикам более или менее толковых объяснений, которые помогали бы им сознательно усваивать арифметику. В школе безраздельно господствовала схоластика, которой пронизано было все преподавание арифметики. Тяжесть положения усугублялась еще тем, что начальная школа не имела хоть сколько-нибудь удовлетворительного учебника; в этом сказалось полное отсутствие забот о школе со стороны царского правительства.

Общий застой всей жизни, характерный для николаевской эпохи, сказался и на постановке школьного дела. Здесь не было движения живой мысли.

4. ШКОЛА ПОСЛЕ РЕФОРМЫ 60-х ГОДОВ.

В 50-х и 60-х годах прошлого столетия, накануне освобождения крестьян от крепостной зависимости происходит большое общественное движение во всех областях хозяйственной и политической жизни страны. В широких общественных кругах возникает интерес к вопросам воспитания и народного образования; волна общественного увлечения вопросами народного образования охватывает даже те классы и общественные прослойки, которые недавно были или равнодушны к этим вопросам, или даже враждебны им. Правительство вырабатывает первый проект введения всеобщего начального обучения, который, впрочем, никакого практического осуществления не получил. Некоторые помещики открывают у себя в деревне школы и начинают учить в них крестьянских ребят (Лев Толстой, Корф, Рачинский и др.); даже сельское духовенство, которое раньше почти ничего не делало для начального обучения широких народных масс, принимается по приказу свыше обучать крестьянских детей.

Но гораздо важнее было самостоятельное движение крестьянской массы, выразившееся в открытии в 60-х годах многих тысяч крестьянских школ грамоты. Эти школы возникали по собственному почину населения, только что освободившегося от крепостной зависимости. Несмотря на самую бедную обстановку, на едва грамотных учителей, несмотря на полное почти отсутствие учебных пособий и школьной мебели, а часто даже и постоянного помещения, школы эти оказались жизненными и послужили основанием для того типа народной школы, который потом получил название земской школы.

Земские учреждения возникли в 1866 г., и с первых времен своего возникновения они обратили большое внимание на школы. Они стали приходить на помощь крестьянским школам грамоты сначала небольшим пособием на учебники и книги для чтения, затем увеличением жалованья учителю и, наконец, путем подыскания для них более подготовленных учителей. Так происходит процесс постепенного превращения школ, открытых по инициативе крестьян, в земские школы. С 60-х же годов начинается и теоретическая разработка педагогических основ земской школы; в основу ее были положены идеи, нашедшие наиболее полное выражение в сочинениях Ушинского. В разработке организационных форм построения земской школы большую роль сыграл известный земский деятель, о котором говорилось выше, Н. А. Корф, работавший в Александровском земстве Екатеринославской губернии.

Деятельность земства в области построения начальной народной школы заслуживает самой положительной оценки: земская школа была наиболее прогрессивным типом русской дореволюционной школы. Земства стремились не только к расширению школьной сети, но и к улучшению качества преподавания в этих школах. С этой целью земством было обращено большое внимание на организацию учительских курсов, на которые приглашались в качестве лекторов лучшие профессора и методисты того времени. Из дальнейшего изложения будет видно, что все наиболее талантливые и передовые методисты по арифметике принимали самое деятельное участие в этих курсах; сюда относятся Гольденберг, Беллюстин, Шохор-Троцкий, Вишневский и другие. Некоторые земства, например Вятское, Курское и другие, проводили большую работу по изготовлению наглядных пособий. Стремясь к тому, чтобы школы давали более высокий уровень знаний учащимся, земства ставили вопрос о замене 3-летней школы 4-летней; так общеземский съезд по народному образованию, происходивший в 1911 г., признал совершенно недостаточными школы с 3-летним курсом обучения.

Царское правительство относилось подозрительно к расширению деятельности земства в области народного образования. Оно все время проводило политику ограничения прав земских учреждений в школе. Министерство народного просвещения, находившееся до 70-х годов в роли пассивного наблюдателя школьного дела, начинает теперь все более и более вмешиваться в него в качестве активного руководителя. С этого времени начинается между правительством и обществом своеобразная, длившаяся почти в течение полвека борьба за влияние на школу. В 1870 г. М. Н. П. начало открывать свои начальные школы, так называемые министерские, которые должны были служить, по мнению министерства народного просвещения, образцом для земской школы.

В 1874 г было издано положение о начальных народных училищах, проникнутое тенденцией во что бы то ни стало ограничить самостоятельность земств в деле народного образования и передать функции заведывания учебной частью исключительно в руки правительственных инспекторов. Однако попытка оттеснить земство от школы не удалась.

В 80-х годах начинается еще более жестокая реакция. Убедившись в бессилии министерства народного просвещения в борьбе с земской школой, правительство выдвинуло на эту борьбу новую силу — духовное ведомство, святейший синод, который располагал громадными кадрами приходского духовенства. В 1884 г. было издано положение о церковно-приходских школах, новом типе школ, которые были выдвинуты в противовес земской школе. Борьба между этими двумя типами школ была в сущности борьбой между церковной и светской школой. И несмотря на то, что на стороне церковно-приходских школ было правительство со всем своим полицейским аппаратом и громадными кадрами духовенства, победа все же была одержана светской школой благодаря революции 1905 года. С этого времени рост церковно-приходских школ падает, хотя они и продолжали свое существование до революции 1917 года.

Таким образом, в дореволюционное время в России существовали три типа начальных школ — земские, министерские и церковно-приходские. Земская школа опередила не только церковно-приходские, но и министерские училища. Вокруг земства группировались все наиболее прогрессивные силы тогдашней педагогической общественности, и, наоборот, вокруг церковно-приходских школ сосредоточились все реакционные силы, боявшиеся подлинного просвещения народных масс. Между этими группировками за влияние на школу шла все время ожесточенная борьба вплоть до революции 1917 года.

5. МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЕЛ.

В 60-х годах в России возникают разнообразные проекты о реформе всех сторон школьного образования. При таких условиях не могли не произойти изменения и в методике преподавания арифметики; слишком очевидна была негодность существовавших тогда способов и приемов обучения этому предмету. Изменения действительно произошли — с 1860 г. начинается новое направление в методиках и в учебниках арифметики. Толчок этому новому направлению был дан выпуском книги И. Паульсона: «Арифметика по способу немецкого педагога Грубе». «Способ Грубе», описанный впервые Паульсоном, в дальнейшем в несколько измененном виде нашел свое место в методике крупнейшего русского методиста Евтушевского и через него получил господствующее место в русской начальной школе, которое занимал в продолжение 2—3 десятков лет. Что это за «способ»? В чем заключается его сущность и почему именно он одержал победу над тем методом, который был намечен Гурьевым, а потом нашел свое развитие в трудах конца XIX и начала XX в.? «Способ Грубе» — это метод изучения чисел, противопоставляемый методу изучения действий. А. В. Грубе (1816—1884) описал свой метод еще в 1842 г. в книге — «Руководство к счислению в элементарной школе, основанное на эвристическом методе». К своему методу Грубе подходил, исходя из ряда философских предпосылок — очень неопределенных, туманных, расплывчатых — изложенных им в обширном предисловии, написанном в духе тогдашних трактатов по вопросам идеалистической философии. «Субъект», «объект», «дух, созерцающий себя», «дух, становящийся свободным с той минуты, когда,будучи в другом, на самом деле остается присущим себе», «созерцание как процесс, в котором дух выдвигает себя во внешний мир» — такими словечками из философского лексикона, ничего не объясняющими и ничего не доказывающими, обильно уснащены все 26 страниц Предисловия, в конце которого автор довольно неожиданно заявляет: «Теперь мы, наконец, в состоянии определить метод образовательного обучения арифметике в начальной школе. Как последняя часть арифметики должна освободиться от гнета правил по родам задач, так и начальные арифметические упражнения должны быть независимыми от формализма действий, потому что пока эта элементарная часть обучения арифметике сохранит деление на четыре действия, до тех пор невозможно живое проникновение субъективного метода объективным». Оказывается, все вышеуказанное хитросплетение нужно было для того, чтобы доказать вред деления арифметики на четыре действия.

Наконец, Грубе выставляет следующее основное положение своей методики: «Так как непосредственному созерцанию доступны все числа от 1 до 100..., то каждое число в этом пределе должно ясно предстать пред умом ученика со всеми своими составляющими частями; из всестороннего созерцания отдельных чисел должны сами собой произойти четыре действия». В соответствии с этим положением Грубе распределяет курс арифметики в начальной школе так:

Первый курс (первый и второй год)

Первый год — целые числа от 1 до 10

Второй год — целые числа от 10 до 100

Второй курс (третий год)

Первое полугодие — числа в пределе от 100 до 1000: всестороннее рассматривание. Второе полугодие. Произвольные числа. Упражнения в отдельных числах.

Третий курс (четвертый год)

Дроби

В конце книги Грубе дает практическую разработку курса арифметики в соответствии со своими принципами. В основу изучения арифметики им положено число, а не действие. В построении курса арифметики он переходит от числа к числу, а не от действия к действию; действия как бы сами собой вытекают из всестороннего изучения каждого числа в отдельности. Грубе сравнивает числа с растениями, с геометрическими телами. Что было бы, спрашивает он, если бы мы, изучая растения, рассматривали в отдельности корни, стебли, листья и т. д., и только потом переходили к изучению растения в целом? «Числа — это те же растения», замечает он. Подобно тому как в начальной геометрии при наглядном ее изучении мы изучаем каждое тело со всех сторон и со всеми его признаками, так и при изучении арифметики надо изучать каждое число со всеми его свойствами.

Грубе резко противопоставляет свой метод методу Дистервега, Шольца. «По методу Шольца», говорит он, «чтобы ученик узнал четыре действия с числами, он должен проработать 20 параграфов, и с каждым действием он знакомится отрывочно, без связи с другими, а в конце ему уже даются упражнения сразу на все действия; все эти 20 параграфов с последними практическими упражнениями я соединяю в один, и притом для одного числа». И дальше: «Дистервег для сообщения ученикам понятия о дроби и ее свойствах, изучает ее по различным рубрикам, каковы: происхождение дроби, обращение дроби в целое число, изображение целого числа в виде дроби и т. д.; все эти упражнения я проделываю с одной дробью; так, например, на изучение $\frac{1}{6}$ я вывожу все свойства дробей и действия с ними».

На популяризацию идей Грубе в Германии понадобился десяток лет; в 50-х годах в немецких школах арифметика стала изучаться по методу изучения чисел. Когда в 60-х годах в России остро встал вопрос о реформе преподавания арифметики, тогдашние деятели по народному образованию сочли полезным пересадить этот метод на русскую почву. Паульсон, известный специалист, по выражению Егорова, по пересадке немецких методов в русскую школу, в своей книге дал подробное (а в некоторых местах дословное) изложение метода Грубе. Ф. Эвальд в 1873 г. перевел Грубе на русский язык. Воленс пропагандировал этот метод в своих статьях и рецензиях, печатавшихся в журнале «Учитель». Барон Корф всячески поддерживал его и в своей практической деятельности, и в печати. Но широкое распространение этот метод получил тогда, когда выпустил свою методику арифметики и свои задачники В. А. Евтушевский.

В. А. ЕВТУШЕВСКИЙ.

В. Евтушевский принадлежит к числу крупнейших и наиболее талантливых русских методистов в области арифметики. Его труды — методика и задачники — сделали эпоху в истории развития методики преподавания арифметики в русской школе. На протяжении 15—20 лет все школы в России занимались исключительно по учебникам Евтушевского, а учителя получали свое методическое образование, пользуясь его методикой. Он первый создал наиболее полную и законченную методику арифметики, содержавшую в себе как практическую, так и теоретическую часть с вескими (пускай не всегда удачными) обоснованиями практических способов и приемов обучения. Его задачники были неизмеримо выше того, что было создано до него в этой области. В работах Евтушевского были и ошибки:

самая крупная ошибка заключалась в том, что он пошел вслед за Грубе, что метод изучения чисел он предпочел методу изучения действий. Его преемникам пришлось исправлять эту ошибку и выводить школу на правильную дорогу. Однако эти ошибки не умаляют ценности того огромного вклада, который сделал этот популярнейший в свое время педагог в сокровищницу методики арифметики.

Василий Андрианович Евтушевский родился в 1836 г. Он окончил физико-математический факультет Петербургского университета. По окончании университета работал преподавателем математики в целом ряде средних и высших учебных заведений. Будучи активным общественным деятелем, он являлся одним из основателей Педагогического музея в Соляном городке. Сотрудничал во многих педагогических журналах: в «Педагогическом сборнике», в «Народной школе», в «Педагогическом музее» и других. С 1878 до 1882 г. был редактором журнала «Народная школа». В 1871 г. он совместно с Глазыриным выпустил методику алгебры; в 1872 г. — методику преподавания арифметики, выдержавшую 17 изданий; последнее 17-е издание было выпущено в 1904 г. В последующие годы Евтушевским были изданы сборники арифметических задач для начальных школ. Задачники выдержали до 30 изданий.

Кроме того, в 1874 г. было выпущено «Руководство к преподаванию арифметики», представлявшее собой сокращенное изложение его методики.

Умер Евтушевский 11 сентября 1888 г.

В годы, предшествовавшие выступлению на методическую арену Евтушевского, школа находилась на распутье, переживая острый кризис. Для всех было ясно, что старое преподавание арифметики (в духе той практики, которая описана Е. Стрельцовым) никуда не годится и должно быть как можно скорее оставлено. И вообще старая школа умирала, переживая агонию, по меткому выражению Евтушевского. Но какой должен быть новый путь? Намечалось два пути. С одной стороны, в это время — в 1860 г. — выступает И. Паульсон с «Арифметикой по способу Грубе», где он яростно нападает на учителей, обвиняя их в застое, неподвижности, обзывает их китайцами за то, что школьники до сих пор учатся по арифметике Буссе, тогда как в Германии, по мнению Паульсона, «давно существуют отличные руководства по элементарной математике»; он популяризирует метод изучения чисел; Паульсона энергично поддерживает Корф Воленс, Эвальд и другие педагоги. С другой стороны, год спустя, т. е. в 1861 г., выходит книга Гурьева «Практическая арифметика» с иной, как указано выше, методической платформой, построенная на основе метода изучения действий. Школе предстояло выбрать один из этих двух (взаимно исключающих друг друга) методов. Школьная практика в эти годы была самой пестрой; многие школы занимались по-старинке, некоторые (немногие) делали робкие шаги в переходе на метод Грубе, другие ориентировались на Гурьева; а в общем существовала беспорядочная смесь методов, приемов, систем.

Евтушевский становится на сторону Грубе, и картина сразу меняется, приобретая полную определенность. Евтушевский не копирует Грубе; он видоизменяет его, приспосабливает, вносит поправки. У Грубе изучается каждое число в отдельности до 1000, у Евтушевского — до 20, и только некоторые числа до 100. Грубе никакого внимания не уделяет п р и е м а м вычислений до изучения чисел любой величины. Евтушевский учит приемам вычислений в пределе 100. Грубе знакомит учащихся с цифрами с самого начала, Евтушевский — после изучения всех чисел первого десятка. Но основные, принципиальные линии их сходятся. «Мой метод», пишет Евтушевский, «основан на т е х ж е о б щ и х п о л о ж е н и я х, как и метод Грубе, и в некоторых подробностях сходен с ним» (46 стр. «Методики»). Этот метод он подробно развивает в своей «Методике». В противоположность Гурьеву он предпосылает практической части в своей «Методике» обширную общую, или теоретическую, часть, где подробно и обстоятельно (правда, не всегда удачно) развивает психологические основы обучения арифметике: законы образования у детей представлений и понятий, роль ассоциаций, памяти и внимания. Он резко противопоставляет логику предмета, логическую стройность преподавания психологическим особенностям детского восприятия, и ставит методику на прочные «психологические рельсы». Он удачно сочетает обе цели изучения арифметики — материальную и формальную, подчеркивая со всей силой образовательное значение арифметики. С достаточно большой убедительностью он обосновывает в общей части «Методики» ряд общих положений — о концентричности, о соотношении между устными и письменными вычислениями, о наглядности и катехизической форме преподавания, о роли практических задач. Ему удается разрешить очень важный, бывший до тех пор нерешенным вопрос о том, как построить курс арифметики, чтобы он удовлетворял двум требованиям: 1) психологическим особенностям детского восприятия и 2) требованиям систематичности арифметики как учебной дисциплины. Этот вопрос он разрешил, разделив весь курс на две части; первая часть — элементарный, или приготовительный, курс, продолжавшийся 3 года, и вторая часть — систематический курс, продолжавшийся 2 года. Элементарный курс целых чисел Евтушевский делит на 5 ступеней: 1) изучение чисел от 1 до 10; 2) изучение чисел до 20; 3) изучение чисел до 100 и определение действий; 4) составные именованные числа до 100 с указанием приемов письменного выполнения действий; 5) целые числа любой величины. Затем следует курс дробей, состоящий из двух концентров: 1) элементарного курса дробей и 2) систематического курса дробей; в элементарном курсе дробей он рассматривает только два действия — сложение и вычитание; умножение же и деление относит к систематическому курсу.

Специальную главу он посвящает наглядным пособиям, в которой он приводит ряд таких пособий, которые до тех пор не упоминались в русской методической литературе и не были в употреблении в школьной практике: арифметический ящик, классные счеты и др.

В практической части Евтушевский подробно останавливается на методике изучения каждого числа. За исходное начало он принял разложение числа на слагаемые. Это разложение ведется на наглядных пособиях; потом это разложение записывается в известном порядке; получается таблица, которая должна быть заучена учащимся, а для поверки ее знания дается письменная работа (записывание разложения наизусть).

Из таблички разложения делаются выводы, т. е. на основании таблицы ученики должны уметь определять результаты действий над данным числом. Вопросы при этом предлагаются в отвлеченной форме, например: «сколько надо прибавить к одному, чтобы получить 4?» После таких отвлеченных упражнений предлагаются задачи для приложения изученных отношений чисел к решению чисто практических вопросов. Затем следуют упражнения в беглом счете на примерах и задачах. Евтушевский принял «за исходное начало» разложение чисел на слагаемые, так как полагает, что все действия происходят от сложения «путем упрощения вычислений». «Евтушевский достиг», замечает Латышев, «очень стройной системы упражнений, но повредил их естественности и развитию свободного соображения». А Лев Толстой, касаясь этой системы, говорит, что учитель охотно принял эту систему, так как она для него удобна и легка, а ученику она трудна.

Большое место отвел Евтушевский в своей «Методике» решению задач, посвятив этому вопросу специальную главу. Он впервые наметил основные этапы в решении задачи: чтение и повторение условия, разбор задачи, составление плана решения, проверку, решение одной и той же задачи разными способами, составление задач самими учащимися. Правда, внешней стороне (повторению условия, выяснению неизвестного, форме записи и пр.) он уделил больше внимания, чем существу дела (разбору и плану), но больших требований к Евтушевскому здесь нельзя предъявлять, так как до него методика решения задач была абсолютно неразработанной. Многие мысли, высказанные Евтушевским в вопросе о решении задач, вошли как бесспорные положения в методический обиход и стали повторяться в работах последующих методистов. Например, он различал аналитический и синтетический методы разбора. Ставя вопрос об аналитическом и синтетическом методах разбора задачи, Евтушевский говорит: «На первых порах прохождения элементарного курса арифметики решение задачи естественнее и легче вести от чисел данных к искомому, что для ученика яснее и понятнее; впоследствии полезно исподволь переходить к решению обратному». Говоря о разных способах решения одной и той же задачи, Евтушевский замечает: «При решении задач хорошим средством для развития учеников служит разнообразие способов решения одной и той же задачи и подыскивание простейшего из них. Но учителю нужно быть очень осторожным, чтобы не запутать слабых учеников этим разнообразием». Ценные мысли высказаны Евтушевским о плане решения задачи («После усвоения содержания задачи учениками и прежде чем приступать к вычислениям, учитель должен предложить классу высказать план решения задачи»). Вопрос о составлении задач самими учащимися, поставленный Евтушевским чуть ли не впервые, не сходит со страниц методической печати вплоть до настоящего времени.

Не меньшие заслуги Евтушевского и в области составления задачников. До Евтушевского крайне плохо обстояло дело со сложными арифметическими задачами; эти задачи, если и были, то имели в высшей степени искусственное, надуманное содержание, нарочито запутываемое условие, однообразную тематику (купля, продажа, дележ наследства, выплата долгов). Правда, Евтушевский не освободился окончательно от этих пороков; и у него встречаются искусственное нагромождение условий в одной и той же задаче, плохой язык, однообразие в сюжетах для задач. Но наряду с этим многие его задачи имеют богатое арифметическое содержание, требуют от ученика сообразительности, жизненны по содержанию, систематичны по расположению. Неплохи у него так называемые неопределенные задачи, которые встречаются часто в разработке первой сотни.

И все же ценность этих положительных сторон деятельности Евтушевского снижалась тем, что его метод — метод изучения чисел — в основе своей был ошибочен. Ошибочно было утверждение Грубе — Евтушевского, что числа в пределе 100 доступны непосредственному созерцанию, или, как говорил Евтушевский, осязательному пониманию; в действительности способность детей наглядно представлять числа распространяется на весьма ограниченный круг чисел (примерно от 1 до 5). Ошибочно было и то положение, что объектом изучения в арифметике должны являться числа. Отождествление же чисел с растениями и другими предметами представляет собой грубейшую математическую ошибку, непонимание природы и сущности числа.

На практике применение метода Грубе — Евтушевского приводило к однообразию занятий, к потере у детей интереса к арифметике, к долгой задержке на упражнениях с малыми числами, знакомыми детям из их жизненного опыта. Вследствие того что ознакомление с арифметическими действиями при этом методе было подчинено изучению чисел и отодвигалось на позднее время, учащиеся неясно различали эти действия, смешивали одно действие с другим, а это в свою очередь плохо отражалось на решении задач.

6. БОРЬБА С МЕТОДОМ ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЕЛ.

В течение 10—15 лет этот метод безраздельно господствовал в школах. Однако многие учителя, начиная заниматься по Евтушевскому, не выдерживали однообразия его метода и переходили, по признанию самого Евтушевского, «к другой системе, чаще всего своей собственной, составленной à priori и подвергавшейся весьма частым изменениям» (71 стр. «Методики», изд. 1881 г.). Недостатки этого метода были очень существенны; волна недовольства им нарастала все больше и больше. Это недовольство шло прежде всего со стороны учителей, которые на практике убеждались в несостоятельности этого метода. Возражения не замедлили появиться и в печати. Против этого метода выступал Л. Н. Толстой, С. А. Рачинский, а несколько позже А. И. Гольденберг.

Л. Н. ТОЛСТОЙ.

В 1874 г. в журнале «Отечественные записки», издававшемся Некрасовым, появилась статья Л. Н. Толстого «О народном образовании», где автор «Войны и мира» подверг резкой критике методы, вводимые в школу Бунаковым (русский язык) и Евтушевским (арифметика). Толстой считал, что эти методисты совершают крупную

ошибку, перенимая у немцев и пересаживая на русскую почву такие методы, которые находятся в противоречии с условиями развития русской народной школы. Он нападает на предметные уроки, на бесконечные беседы с детьми по поводу известных детям вещей. «Может быть», пишет Толстой, «дети готтентотов, негров, может быть иные немецкие дети могут не знать того, что им сообщают в таких беседах, но русские дети, кроме блаженных, все, приходя в школу, знают не только, что вниз, что вверх, что лавка, что стол, что два, что один и т. п., но по моему опыту крестьянские дети, посылаемые родителями в школу, все умеют хорошо и правильно выражать мысли, умеют понимать чужую речь (если она выражена по-русски) и знают считать до 20 и более; играя в бабки, считают парами, шестерками и знают, сколько бабок и сколько пар в шестерке. Очень часто приходившие ко мне в школу ученики приносили с собой задачу гусей и разъясняли ее». Тут же Толстой критикует язык в задачниках Евтушевского и говорит, что плохой, непонятный язык задач часто является главной причиной того, что ученик плохо решает задачу. «Пусть», говорит он, «кто-нибудь сразу поймет следующую задачу Евтушевского — «у одного мальчика было 4 ореха, у другого 5. Второй отдал первому все свои орехи, а этот отдал третьему 3 ореха, а остальные роздал поровну трем другим товарищам. Сколько орехов получил каждый из последних?» Скажите эту задачу так: у мальчика было 4 ореха. Ему дали еще 5. Он отдал 3 ореха, а остальные хочет разделить трем товарищам. По скольку он может дать каждому? — пятилетний мальчик решит ее. Потому что задачи нет никакой, а затруднение может встретиться только или в дурной постановке вопроса, или в недостатке памяти» [1].

В другом месте (см. «Арифметику» Толстого, стр. 5—7) Толстой с возмущением отзывается об арифметике Грубе. «Господа эти (Грубе и Евтушевский) велят изучать просто числа 1, 2, 3, 4, забывая то, что числа эти и их отношения выучены без школы каждым ребенком. Не испытав самому той томительной скуки, которую производят такого рода вещи, нельзя было бы понять и почувствовать всей преступности такой книги, как арифметика Грубе. И уже второе

[1] Стр. 162 журн. «Отеч. Записки» № 9, 1874.

издание! Значит, сколько замучено, испорчено детских душ, сколько испорчено наивных учителей!..» «В математике», говорит там же Толстой, «прежде заучивали определение действий, теперь и самих действий не делают, так как только на третий год, по Евтушевскому, приступают к нумерации и предполагают, что нужно учить детей в продолжение целого года считать до 10».

Но Толстой не только критиковал новые методы в русской школе, он пытался сам выступить в качестве автора учебника арифметики. Об этой попытке мы скажем несколько слов, она заслуживает внимания.

В 1868 г. Толстой набросал в своей записной книжке план первоначального учебника для семьи и школы, заключавшего в себе книгу для чтения и элементарный курс арифметики. Для осуществления этого плана Толстой ведет большую подготовительную работу: просматривает литературу, иностранные учебники (преимущественно американские), советуется со специалистами, проделывает ряд опытов по физике, химии и другим естествоведческим наукам, проводит даже астрономические наблюдения, возобновляет опять Яснополянскую школу, где на опыте обучения 30 детей проверяет свой материал и методы. Над учебником Толстой работал с таким увлечением, что он в течение 3 лет (по отзывам его биографа) не читал газет, а во время поездки в Самару целый день «мучился с арифметикой», вместо того чтобы любоваться живописными берегами Волги (из письма Толстого к жене, стр. 98). «Эта азбука одна», пишет Толстой тетке,— может дать работы на 100 лет. Для нее нужно знание греческой, арабской, индусской литератур, нужны все естественные науки, астрономия, физика, и работа над языком ужасная. Надо, чтобы все было красиво, коротко, просто и, главное, ясно («Толстовский музей» I, 223). Когда 3—4 года, работа была закончена, он готов был считать ее лучшим созданием своей жизни. Особенно высоко ценил Толстой составленный им элементарный курс арифметики. «Арифметика будет лучшим в книге», писал он Страхову, который взял на себя корректуру всей «Азбуки».

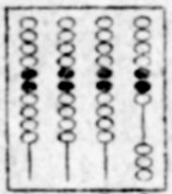
В конце 1872 г. «Азбука гр. Л. Н. Толстого» вышла в свет в количестве 3000 экземпляров. Это издание состояло из 4 книг, объемом в 750 стр. Каждая книга в свою очередь состояла из 4 частей: в первой — букварь и материал для чтения на русском языке, во второй — материал для чтения на славянском языке, в третьей — арифметика, в четвертой — советы и указания для учителя. Когда «Азбука» вышла, она подверглась большим нападкам; особенно резкой критике подвергался ее математический раздел. Его метод признавался неудобным, старым, допотопным; его объяснения арифметических действий были признаны мертвыми, сухими, убивающими интерес у детей к арифметике. «Совершенное игнорирование новых методов обучения арифметике Толстым», говорит рецензент «Современности», «остается объяснить только пословицей: у всякого барона (вероятно и у всякого графа) своя фантазия». Толстого не смущала эта критика: с защитой своих методов он выступает в Московском Комитете грамотности, дает сам публично открытый урок, организует в Москве две опытные группы, в одной из которых обучение ведется в течение 6 недель по Толстому, а в другой—по Евтушевскому и Бунакову, и наконец, обращается за помощью к Некрасову, в журнале которого и помещает свою статью «О народном образовании». Эта статья приковала к себе внимание всей общественности: ее читали и обсуждали, критиковали «старую» школу, критиковали немецкие нововведения.

В Петербургском Педагогическом обществе был поставлен реферат Евтушевского об «Арифметике» Толстого. Это обсуждение заняло 4 заседания и вылилось в конце концов в блестящий «турнир» между двумя методистами, Евтушевским и А. Н. Страннолюбским. Евтушевский нападал, Страннолюбский защищал. Евтушевский стремился доказать, что в «Арифметике» Толстого нет системы и что она представляет собой просто случайное, смешное и нелепое нагромождение материала; что она не народна, не отвечает народным требованиям ни по содержанию, ни по методам; что в ней нет ничего, что развивало бы мысль ученика, так как усвоение нумерации и действий основано на голом подражании; что в изучении нумерации, которая доводится Толстым сразу до больших чисел, на первый план поставлена цифра, а не число; что приемы умножения и деления, данные в «Арифметике», нелепы и что нелепа мысль Толстого о том, что все действия вытекают из счета.

А. И. Страннолюбский, не считая «Арифметику» Толстого образцовым курсом и находя, что в ней имеется ряд недостатков, препятствующих введению этого курса целиком в практику, тем не менее считал критику Евтушевского несправедливой, пристрастной, немотивированной. Он в пространной и хорошо аргументированной речи (длившейся 3 заседания) доказывал, что во всех упражнениях у Толстого обнаруживается единство цели, а это является признаком строго обдуманной системы; что нумерация составляет необходимое вступление в арифметику, из нее вытекают все действия, и это оправдывает большое внимание нумерации в «Арифметике» Толстого: что в развитии и объяснении действий видна последовательность и строго продуманная система, в основе которой лежало стремление избегать всего механического и искусственного, итти сообразно с детским пониманием и с логикой развития самого действия; что «Арифметика» Толстого народна и по содержанию, и по методам: в качестве наглядного пособия взяты русские счеты; введенные Толстым значки (*) напоминают крестики и зарубинки, употребляемые крестьянами; из содержания арифметики выкинуты пропорции и другие статьи, которые не имеют актуального значения для народа и т. д. (На стр. 43, 44, 45 воспроизведены страницы из «Арифметики» Толстого). В связи с защитой «Арифметики» Толстого Страннолюбский отмечал ряд недочетов в «Методике» Евтушевского: смешивание действий сложения и вычитания, неправильные определения арифметических действий (например тавтология в определении сложения), некоторую механичность в объяснении приемов письменного выполнения действий (по аналогии с составными именованными числами), искусственные приемы выделения действий и др.

Докладчик и оппонент разошлись, почти ни в чем не убедив друг

ТАБЛИЦА ЧЕТЫРЕХЪ СЧИСЛЕНІЙ.

Названія.		Славянскія.	Римскія.	На счетахъ.	Арабскія.
Ничего и одинъ. Два безъ одного.	Одинъ.	А҃	I	 0 0 0 1	1
Одинъ и одинъ. Три безъ одного.	Два.	В҃	II	 0 0 0 2	2
Два и одинъ. Четыре безъ одного.	Три.	Г҃	III	 0 0 0 3	3
Три и одинъ. Пять безъ одного.	Четыре.	Д҃	IIII или IV Пятокъ безъ одного.	 0 0 0 4	4

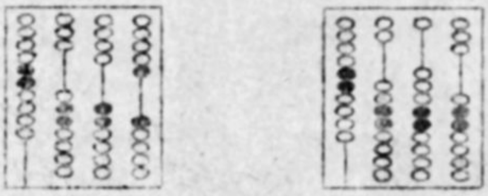
СЛОЖЕНIЕ И ВЫЧИТАНIЕ.

Если считаешь такъ: два и три будетъ пять, $2+3=5$; четыре и шесть будетъ десять, $4+6=10$; сто тридцать два и двѣсти тридцать семь будетъ триста шестьдесятъ девять, $132+237=369$, — то дѣлаешь *сложенiе*.

Если считаешь такъ: пять безъ двухъ останется три, $5-2=3$; десять безъ шести останется четыре, $10-6=4$; триста шестьдесятъ девять безъ ста тридцати двухъ останется двѣсти тридцать семь, $369-132=237$, — то дѣлаешь *вычитанiе*.

Сложить:

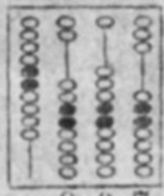
$765+132$



$7\ 6\ 5+132=\ 8\ 9\ 7$

Вычесть:

897—132. Положи на счеты восемь сотенъ, девять десятковъ, семь простыхъ.



8 9 7

Скидывай со счетовъ 1 изъ сотенъ, 3 изъ десятковъ, 2 изъ простыхъ. Осталось:

897—132= 7 6 5

Сложить:

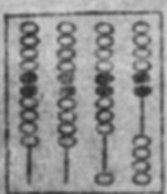
3331 + 2348; 45 + 21; 6084 + 1311; 56 + 43; 47821 + 2147.

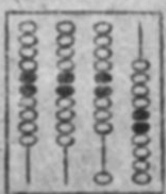
Вычесть:

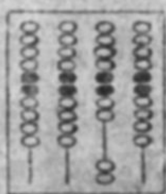
5679 — 2348; 5679 — 3331; 67 — 21; 67 — 45; 7395 — 6084; 7395 — 1311; 99 — 56; 99 — 43; 49969 — 47821; 39969 — 2147.

Сложить:

14+6







1 4 + 6 = 1 · = 2 0

друга. Но эта дискуссия, проведенная на высоком принципиальном уровне и в атмосфере напряженного к ней внимания со стороны широких кругов педагогической общественности, не могла пройти бесследно для развития методики арифметики.

Суммируя сказанное, надо отметить, что «Арифметика» Толстого не оправдала тех надежд и ожиданий, которые возлагал на нее автор. Сама по себе эта работа оказалась слабой, прошедшей бесследно, не внесшей ничего такого, что обогащало бы науку новыми плодотворными идеями. В своей «Арифметике» Толстой проявил много изобретательности и математического остроумия, много метких наблюдений, дал хорошие упражнения с задачами, но все это обесценивается искажением теории, отдельными математическими ошибками, нерациональными приемами, произвольной терминологией («переделывание чисел из одного счисления в другое», «двадцатиоднорики», «простые» вместо «единицы» и др.). Но если «Арифметика» Толстого сама по себе никакой роли не сыграла, то его статья «О народном образовании» имела большое общественное значение. Она сильно ударила по тем, кто склонен был ограничиваться только заимствованием из иностранного и внедрением заимствованного в русскую школу; она способствовала выработке самостоятельного направления в развитии русской методической мысли; она привлекла внимание широкой общественности к педагогическим вопросам и усилила интерес к методике преподавания в школе, в первую очередь к методике русского языка и арифметики.

С. А. РАЧИНСКИЙ.

В эти же годы (70-е) начинается педагогическая деятельность известного педагога-практика С. А. Рачинского, который был тоже противником методики Евтушевского с ее скучным, формалистическим и малопроизводительным изучением чисел. Рачинский для нас интересен главным образом как педагог-практик, поднявший в своей школе — сельской школе — преподавание арифметики на очень высокую ступень, в особенности — устный счет и решение задач. Своей практической деятельностью Рачинский показал, до каких больших высот можно поднять преподавание арифметики в заурядной сельской школе, как много могут усвоить наши дети, если только во главе школы стоит учитель, знающий свое дело и любящий детей. Интересным памятником исключительно плодотворной работы Рачинского в области устного счета является составленный им задачник под названием «1001 задача для умственного счета. Пособие для учителей сельских школ». Это — любопытный документ эпохи 80-х годов прошлого столетия, уже по одному тому, что он вырос целиком из практики, что каждая задача его, прежде чем попасть в печать, была десятки раз прорешена крестьянскими детьми. А среди этих задач есть много сложных и действительно трудных задач! В области теории по вопросам методики арифметики Рачинский дал немного; но в своих немногих и небольших статьях он высказал несколько очень интересных мыслей о математических способностях крестьянских детей, об условиях, необходимых для успешной работы по устному счету и др.

Небезынтересны некоторые биографические данные этого учителя. Сергей Александрович Рачинский родился в 1838 г. в Москве, в помещичьей семье (он был племянником известного поэта Баратынского). В 1853 г. окончил Московский университет по естественно-историческому факультету. В 1859 г. напечатал диссертацию «О движении высших растений», за которую получил степень магистра и занял в университете кафедру ботаники. В 1866 г. за сочинение «О некоторых химических превращениях растительных тканей» ему была присуждена ученая степень доктора ботаники. В эти же годы он перевел на русский язык сочинение Дарвина «О происхождении видов» и другие. Все это создало молодому профессору известность в ученом мире и открывало перед ним широкую дорогу. Но в это время у Рачинского происходит какой-то душевный перелом, в результате которого он покидает Московский университет и навсегда поселяется в селе Татеве Бельского уезда Смоленской губ., где становится народным учителем. С этого времени он весь отдается школе; школа стала его домом, дети — его семьей, с которыми он вместе работал, ел, отдыхал. С большим вниманием и любовью следил он за каждым учеником, за его индивидуальными наклонностями и способностями. В редкие часы досуга он пишет статьи «Из записок сельского учителя» («Русский Вестник» 1888—1889 г.) и другие, составившие сборник «Сельская школа». В 1891 г. он выпускает сборник задач для устного счета. В 1893 г. вследствие плохого состояния здоровья Рачинский прекращает педагогическую работу. На досуге он занимается иногда литературным трудом: он написал статью «Арифметические забавы», помещенную в журнале «Народное образование» (март 1900 г.) и «Геометрические забавы», помещенную в том же журнале (в феврале 1901 г.).

Умер Рачинский 2 мая 1902 г.

Как уже было сказано выше, Рачинский не создал какой-либо цельной методической системы в области преподавания арифметики, но отдельные его мысли заслуживают большого внимания, тем более что они вытекают из непосредственной его педагогической практики и подверглись тщательной проверке на опыте. Рачинский достигал изумительных результатов в устном счете, не меньших, чем Песталоцци. Но Песталоцци все внимание уделял устному счету в ущерб письменным вычислениям, Рачинский же не переоценивал значения устного счета, не заполнял ими полностью уроки арифметики, а получал хорошие результаты за счет рациональных приемов обучения. «Пользу от устного счета», пишет Рачинский, «не следует преувеличивать. Способность к нему — способность весьма специальная и от других независимая, нередко сильно развитая в детях ума самого ограниченного. Тем не менее способность эта полезна и в отношении практическом и как средство для здоровой умственной гимнастики». Тренировку в устных вычислениях дети получали у Рачинского не столько на уроках арифметики, сколько на свободных занятиях в вечернее время. Он умел увлечь детей устным счетом (см. картину Богданова-Бельского на стр. 49). Дети постоянно обращались к нему с просьбой: «Дайте мне пример на умножение! А мне на деленьице!» и т. д. Рачинский давал каждому особую задачу, особый пример в соответствии с индивидуальностью ученика. Этот индивидуальный подход, индивидуальные задания, учет особенностей каждого ребенка едва ли не главная причина огромного успеха Рачинского. Рачинский творил, создавал на уроке, тут же на глазах учеников, и этот процесс творчества заражал учеников, вызывая у них ответный процесс усиленной умственной деятельности. Секрет таких изумительных успехов С. А. Рачинский отчасти раскрыл в своей статье «Арифметические забавы», напечатанной в журнале «Народное образование» в 1900 г. Он пишет: «В то время когда я занимался преподаванием в сельской школе, я постоянно удивлял своих товарищей — учителей той быстротой, доходившей до мгновенности, с коей я изобретал сложные арифметические задачи, умственные и письменные, на числа многозначные, даже громадные. Что же касается до ребят, то они моему умению не удивлялись нисколько, а настойчиво требовали, чтобы я каждому из них задал задачу отдельную. В этом они были совершенно правы, ибо каждому доставалась задача, в точности ему посильная, которую решить было и посильно, и лестно. Злодеи приходили в неописанное оживление и решали задачи с быстротой изумительной. Не скрою, что такая гимнастика, при некоторой продолжительности, подчас доводила меня до головокружения. Но польза от таких упражнений была несомненная».

Интересен конец этой статьи. Указав на то, что в процессе работы ему под воздействием учащихся пришлось познакомиться с теоремой Ферма, Рачинский с добродушной иронией замечает: «До чего может домучить человека, в математике невежественного, ненасытная пытливость и требовательность школьных ребят!»

«Огромное количество учителей», говорит Рачинский в предисловии к своему задачнику, «затрудняются изобретать сколько-нибудь сложные арифметические задачи. Происходит это от недостатка знакомства с числами. Знакомство это должно быть твердое и полное. Для учителя, например, не безразлично, что число 40 не только $= 2^3 \cdot 5$, но также $= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$, что 365 не только $5 \cdot 73$, т. е. $= 5(8^0 + 8^1 + 8^2)$, но также $= 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = \dfrac{17^2 + 21^2}{2}$ и т. д.

Рачинский приобрел это знакомство следующими двумя приемами: «Он поставил себе за правило решать в уме во время уроков всякую письменную задачу, решаемую учениками, и разлагать в уме на первоначальные множители всякое число, не слишком крупное, попадающееся ему на глаза».

Сам Рачинский объясняет свои успехи большими способностями крестьянских ребят в математике. «Средний уровень наших крестьянских детей как мальчиков, так и девочек», пишет он, «вообще очень высок. Способности эти разнообразны, но преобладают заметно способности математические и художественные. Умственный счет — любимая забава в промежутках между классными занятиями, и в нем легко достигается значительная быстрота и ловкость так же, как и в решении сложных письменных задач».

Естественно, что Рачинский был против метода, предлагаемого Грубе — Евтушевским. «Прием этот», — говорит Рачинский, — «быть может необходимый, когда приступаешь к делу с пятилетними детьми (или с идиотами) отзывается чрезвычайной искусственностью, когда имеешь дело с детьми вдвое старшими, уже умеющими считать более 100, уже имеющими практическое понятие о десятичной системе, благодаря известному им счету на копейки, гривенники и рубли»...

«Нужно избегать слишком долгого пережевывания уже известного ученикам: оно порождает скуку, отучает их от необходимых


10 + 11 + 12 + 13 + 14
365

умственных усилий. Свойствам чисел первой сотни нет конца. Если бы мы их вздумали исчерпать прежде, чем двинуться далее, то мы бы никогда не дошли до второй » («Сельская школа», 1891 г., стр. 62—64).

Задачник «1001 задача», составленный Рачинским, интересен для нас в двух отношениях: прежде всего он показывает, до какой виртуозности доходили ученики Рачинского в устных вычислениях, легко справляясь с большими и далеко не всегда удобными числами, входящими в задачи; во-вторых, он показывает, на каком высоком уровне стояло математическое мышление у детей, ибо среди задач есть немало таких, которые вообще считаются для начальной школы трудными. Здесь есть задачи на сложное тройное правило, на части, на движение, задачи типа «галки-палки» (последних особенно много) и другие. Вот несколько образцов таких задач:

«№ 808. Стояли березы, летели галки. На каждую березу село по галке, и осталось 5 галок. Потом на каждую березу село по две галки, и осталось 5 берез без галок. Сколько галок, сколько берез?»

«№ 830. Я всем своим ученикам роздал орехов поровну. 4 из них съели по 12 орехов, и тогда у этих четверых вместе осталось столько орехов, сколько получил от меня каждый из них. По скольку орехов я раздавал?»

«№ 819. Из Москвы в Тверь выехали одновременно 2 поезда. Первый проходил в час 39 верст и прибыл в Тверь 2-мя часами раньше второго, который проходил в час 26 верст. Сколько верст от Москвы до Твери?»

Эти задачи по своей трудности отнюдь не представляют исключения, таких задач много. Задачник Рачинского широкого распространения в школах, однако, не получил: он был выше того среднего уровня, на котором стояла тогда массовая школа.

Заканчивая наши краткие заметки о Рачинском, мы должны упомянуть о том, что этот народный учитель, давший высокие образцы работы по арифметике, по своему мировоззрению был ярым реакционером, церковником, который просвещал своих детей и в то же время организацией торжественных молитв, частого посещения церковных богослужений, проведением экскурсий в святые места затемнял их сознание. Он мечтал превратить школу в придаток церкви. Все это накладывает темное пятно на моральный облик «русского Песталоцци» и заставляет нас критически относиться к его литературному наследию.

7. МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ.

Выступление Толстого в печати с критикой Евтушевского и Бунакова, обсуждение этого выступления почти во всех газетах и журналах, горячий диспут в Педагогическом обществе г. Петербурга, ответы Бунакова, а затем и Евтушевского Толстому — все это усиливало и разжигало интерес к методическим вопросам, привлекало внимание к ним со стороны педагогической общественности, заражало педагогов духом здорового критицизма. «Методическая атмосфера» сильно накалялась. Такая обстановка не могла не влиять на тех, кто начинал в эти годы пробовать свои силы на методической или просто на педагогической работе, чтобы потом развернуться в крупных методистов. А их было немало. В это время А. И. Гольденберг, покинув военную офицерскую службу, пошел в педагоги и совсем близко стал к методической работе, когда в начале 70-х годов согласился стать директором Поливановской учительской школы. В эти же годы Ф. И. Егоров помещал уже свои рецензии в «Учебно-воспитательной библиотеке», где мягко по форме, но жестко по существу критиковал полурусские, полунемецкие работы Паульсона, Беме, Леве и другие. В 1881 г. С. И. Шохор-Троцкий возвращается из-за границы и в 1887 г. приступает к педагогической работе; будучи еще очень молодым он обнаруживает большой интерес к теоретико-методическим вопросам (в 1875 г. он поместил в журнале «Семья и школа» статью на тему: «Что такое величина?»). В эти же годы развертывается деятельность В. Латышева, одного из выдающихся русских методистов арифметики.

В. ЛАТЫШЕВ.

Василий Александрович Латышев родился в 1850 г. Окончил математический факультет Петербургского университета. По окончании университета Латышев избирает себе преподавательскую работу в педагогических учебных заведениях: сначала он работает преподавателем в Гатчинской учительской семинарии, а потом вскоре переходит во вновь открытый Петербургский учительский институт, где состоял преподавателем математики и методики математики в течение 20 лет. В 1880 г. основывается журнал «Русский начальный учитель», и бессменным его редактором в течение 32 лет был Латышев. С 1892 г. по 1902 г. Латышев был директором народных училищ Петербургской губ., а с 1902 по 1909 г. — помощником попечителя Петербургского учебного округа. С 1909 г. Латышев—член совета министра народного просвещения. Умер Латышев 13 января 1912 г.

Латышев обратил на себя внимание в 1878 г. своими обширными, глубоко продуманными статьями в «Педагогическом сборнике» на тему «Исторический обзор учебников арифметики XVIII—XIX в.», а в 1880 г. в журнале «Русский начальный учитель» напечатал «Руководство к преподаванию арифметики». В. Латышеву в истории развития методики арифметики принадлежит весьма почетное место. В своем «Руководстве» он поднял методику арифметики на более высокую ступень; он разрешил ряд методических вопросов, разрешение которых требовалось условиями того времени, и выдвинул для разрешения ряд новых методических проблем. Современники высоко ценили В. Латышева как методиста и всегда считались с его авторитетом. Его меньшая популярность и известность в широких учительских кругах объясняется отчасти тем, что его «Руководство» носило по преимуществу теоретический характер; он не дал в нем практической разработки материала, что обычно выше всего ценится учителем. В. Латышев не сделал резкого поворота в методике и не создал своей методической школы, но он много сделал для того, чтобы ослабить то отрицательное, что содержалось в методике Евтушевского, и высказал ряд положений, которые подкрепили позиции методистов, работавших над методом изучения действий.

Переходя от общей оценки Латышева к его конкретным высказываниям, мы должны прежде всего отметить, что он был принципиальным сторонником метода изучения действий. «Вся арифметическая теория заключается в теории действий», пишет он в своем «Руководстве» (стр. 15). И дальше: «В самом начале курса необходимо обратить внимание на образование у детей правильных понятий о действиях и дать эти понятия по возможности в простой форме» (стр. 19). О начале работы с детьми он говорит следующее: «Ученики должны начинать занятия с таких упражнений, которые наглядны и настолько просты, что вовсе не требуют объяснений, ибо они знакомы детям. Но эти упражнения должны быть так выбраны, чтобы они сразу обратили внимание учащихся на основные понятия и познакомили их с целым предметом (ср. с высказываниями по этому вопросу Гурьева). Числа должны быть малы, чтобы сделать упражнения доступными наблюдению... Но дальше наглядность должна быть вспомогательным средством, а не источником работы». О наглядности Латышев высказывается неоднократно; но он против злоупотребления наглядностью и наглядными пособиями. «Наглядные пособия должны быть употребляемы не для того, чтобы всегда по ним производить счет, а для того чтобы, показав на них действия и результаты действий, можно было перейти к сознательным вычислениям без пособий (курсив автора). Он предупреждает также против увлечения и неумелого применения катехизической формы обучения, когда учителя предлагают бесконечное число наводящих, часто бесплодных вопросов, вместо того чтобы прямо сообщить ученику то, чего он не знает. Это те недостатки, которые под влиянием методики Евтушевского получили широкое распространение в школьной практике 70-х и 80-х годов.

Правильную позицию занял Латышев и в вопросе о соотношении между устными и письменными вычислениями. Евтушевский решал этот вопрос очень обще, неопределенно, говоря, что устные вычисления должны предшествовать письменным. Латышев несколько уточнил этот вопрос. Он не противопоставлял устные вычисления письменным: и те и другие приемы вычислений должны быть в школе, ибо одно помогает другому. «Не умея вычислять в уме, дети не могут быстро вычислять и письменно... Умственные вычисления, как более легкие, должны предшествовать того же рода письменным вычислениям. Как устные, так и письменные вычисления должны продолжаться во все время занятий» (стр. 35). Он подчеркнул главное достоинство устного счета — быстроту вычислений. «Устные упражнения в счете должны итти в одно время с письменными, но цель их составляет не столько развитие навыка к сложным вычислениям, сколько приучение к быстрому счету.

Первое знакомство с механизмом письменных вычислений должно быть дано, по мнению Латышева, при изучении первой сотни.

Латышев первым обратил внимание на трудности усвоения детьми понятий разностного и кратного сравнения чисел и выставил требование, чтобы эти понятия особенно тщательно объяснялись детям и чтобы на них давалось больше упражнений.

Особенно заметно Латышев продвинул вперед методику решения задач. По этому вопросу не мало и не плохо было сказано в методике Евтушевского; и все же ряд важнейших вопросов, связанных с решением задач, в этой методике не получил отражения. Прежде всего

Латышев дал правильную, точную и исчерпывающую формулировку значения задач в курсе арифметики: «Занятия арифметикой», говорил он, «должны постоянно сопровождаться решением задач как для развития навыка в вычислениях, так и для выяснения теории и, наконец, для развития сообразительности» (стр. 33 «Руководства»). Затем, до Латышева говорилось только о том, как решать ту или иную отдельную задачу; Латышев же указал на то, что следует говорить не только об отдельных задачах, но о системе задач, о постепенном усложнении данного вида задач, о подготовительных упражнениях к решению трудных задач, имея в виду, что каждая трудная задача данного типа имеет ряд аналогичных себе менее сложных и менее трудных задач; он требовал от авторов такой системы в расположении задач, при которой учитель мог бы легко находить нужные ему задачи. Эти мысли впоследствии, как мы увидим из дальнейшего изложения, были более подробно разработаны Ф. И. Егоровым в его «Методике».

Латышев первым указал на то, что для уменья решать задачи большое значение имеет понимание связи и зависимости между величинами, входящими в условия задач; эту связь нужно, говорил он, объяснять на простых задачах.

Латышев подчеркнул как центральный момент в объяснении решения задачи, разбор задачи и при этом дал прекрасные образцы разбора нескольких задач (стр. 101—102 «Руководства»).

Придавая большое значение выработке у учащихся уменья объяснять решение задачи, Латышев говорил не только об устном, но и письменном объяснении решения сложных задач.

Повторив мысль Евтушевского о проверке решения задач и о самостоятельном придумывании учащимися задач на данное правило, Латышев раскрыл эти требования на конкретных примерах, показал, как надо проверять решение и учить составлению задач самими учащимися.

Нам остается еще упомянуть о том большом значении, которое придавал Латышев теории. Ни один из методистов не говорил так много о теории, как Латышев, придавая изучению теории огромное значение. Сопоставляя теорию с задачами, Латышев пишет: «В 18 столетии стали отделяться задачи от теории и стали больше упражнять в решении задач; однако задачами пользовались для разъяснения теории и лишь постепенно начали пользоваться задачами для выработки теоретических понятий.

Конечно, детям трудно понять теорию, не решая задач; задачи, как практические упражнения, подготовляют к изучению теории, но нельзя допускать преобладания практических упражнений, тем более — исключение теории: это убивает мысль, как в искусстве исключительное развитие техники убивает артиста, потому что убивает чувство» («Пед. Сб.», книга XII, 1878). По вопросу о том, как преподносить учащимся теорию, Латышев, повторяя уже сказанное когда-то Гурьевым, пишет: «Нужно, чтобы теория не излагалась ученикам и не предшествовала практическим упражнениям, а чтобы, наоборот, теория постепенно вырабатывалась учениками и представляла собой ряд выводов из практических упражнений в вычислениях и в решении задач» (стр. 26 «Руководства»).

Вопрос о теории — о ее соотношении с практическими упражнениями, о ее содержании, объеме, характере ее изложения — в высшей степени важный вопрос и один из труднейших для разрешения. К сожалению, Латышев только поставил, наметил этот вопрос, но не дал решения его настолько определенно, чтобы он мог регулировать школьную практику. Латышев по этому вопросу высказывался очень обще неопределенно; он никогда не подходил к более или менее точному определению содержания теории; прочитав его «Руководство», уносишь весьма смутное представление о том, какое же содержание он вкладывал в понятие теории для начальной школы. Есть, однако, основание полагать, что он был против преждевременного введения теории и против излишнего теоретизирования курса начальной арифметики. По крайней мере, он был против того, чтобы давать определение действия во время изучения первой сотни, как это было у Евтушевского. «Во время упражнений с числами первой сотни не следует давать определений действий, представления о действиях должны быть усвоены наглядным путем». И можно думать, что это высказывание Латышева сыграло решающую роль в вопросе о месте определений; в последующих учебниках для начальной школы определения действий в пределе сотни уже не даются.

В 70-х годах обнаруживалось стремление сильно сузить круг знаний по арифметике, даваемых в народной школе, и выбросить дроби. Для народной школы предлагались в сущности обрывки знаний. Латышев возражал против такой тенденции. «Для народной школы курс необходимо сократить», писал он в 1878 г., но во всяком случае и в ней должен быть законченный и систематический курс, а не отрывок курса; но такой курс, в который не входят вычисления с дробными числами, не может быть цельным курсом».

Ценные мысли были высказаны Латышевым и о характере курса методики. Уже в те годы были методические руководства, которые состояли из одной практической части; были и такие (реже), в которых рассматривались только общие вопросы методики. «Руководство к преподаванию должно выяснить главным образом руководящую идею преподавания, иначе оно всегда будет содействовать распространению механических приемов». «Но», добавляет дальше Латышев, «каково бы оно ни было, но чтобы показать, как достигнуть цели, оно должно давать и подробное объяснение всего хода занятий, должно давать и частные практические советы». Заметим, что самому Латышеву не удалось написать именно такую методику: он хорошо выяснил руководящую идею преподавания, но написать практическое руководство ему мешала его большая практическая работа.

В. Латышев умер в 1912 г., после почти сорокалетней общественно-педагогической деятельности. Латышев был свидетелем того, как в его годы методика арифметики быстро развивалась, как один за другим вырастали методисты, вместе с учительством создававшие методику: Гольденберг, Шохор-Троцкий, Житков, Егоров, Вишневский, Мартынов, Беллюстин, Аржеников, Мукалов и другие. Создавая новое, они пользовались и тем, что было создано до них, и в частности тем, что было сделано Латышевым.

А. И. ГОЛЬДЕНБЕРГ.

Критика методики Евтушевского, шедшая со стороны Толстого, Рачинского, Страннолюбского и многих учителей-практиков, а также работы Латышева расшатывали устои, на которых была построена эта методика, но эта критика не могла до конца поколебать их и окончательно устранить из практики метод изучения чисел, так как системе Евтушевского не была противопоставлена какая-либо другая система, столь же цельная, обоснованная и законченная. Попытка Толстого в этом направлении была очень неудачной. Латышев ограничился только изложением руководящих идей и не дал практической разработки материала на основе этих идей и даже не дал серьезной критики основ метода изучения чисел. Эту задачу блестяще выполнил Гольденберг: он создал и хорошо обосновал систему обучения арифметике на основе метода изучения действий, продолжив ту линию, которая была ясно намечена еще Гурьевым. Он отбросил грубеизм и восстановил в правах 4 арифметических действия, восстановив таким образом преемственность в развитии самостоятельной методической мысли в России. Он дал исключительную по силе логики и научной глубине критику грубеизма и всех «немецких измышлений в русской школе». Основные принципы своей методики он провел в составленных им задачниках и через то довел их до каждой школы, до каждого учителя и ученика. Работа, проделанная Гольденбергом, выдвигает его на первое место в ряду других методистов арифметики. (Такая работа была по плечу именно Гольденбергу, который, будучи образованнейшим математиком, имел большую любовь к педагогическому делу и поддерживал тесную и живую связь с учительской массой.) Успех в работе Гольденберга был обеспечен в значительной мере личными качествами этого талантливого человека.

Александр Иванович Гольденберг родился в Москве в 1837 г. в семье врача. Он получил хорошее по тому времени семейное воспитание — усвоил хорошо французский и немецкий языки, учился музыке. В 1858 г. он окончил физико-математический факультет Московского университета со званием кандидата математических наук. В 1859 г. он поступил в Михайловскую артиллерийскую академию, которую окончил в 1861 г. Вскоре после этого он оставил военную службу и перешел на преподавательскую работу в частных мужских и женских учебных заведениях. В начале 70-х годов Гольденберг был приглашен директором земской Поливановской учительской школы, где он близко столкнулся с вопросами методики преподавания арифметики. Но эта работа продолжалась недолго: через год земская учительская школа перешла в ведомство министерства народного просвещения, и Гольденберг оставил в ней службу. Он явно избегал работать в казенных учебных заведениях. После этого он в течение нескольких лет преподавал математику на Лубянских женских курсах и читал методику арифметики на Педагогических курсах при Московском об-ве воспитательниц и учительниц. В эти годы он продолжает работать над вопросами методики арифметики; в 1880 г. он поместил в газете «Русские ведомости» обширную статью «Немецкие измышления в русской школе», в которой подверг критике учение Грубе, методику Евтушевского и только что изданную методику арифметики Воленса. С 1879 по 1882 г. он издает (вернее, редактирует) первый в России математический журнал под названием «Математический листок»; большинство статей в этом журнале принадлежит перу самого Гольденберга. Журнал ведется им на высоком научном уровне и характеризует редактора как глубоко образованного математика. После выхода 9-го номера журнал, однако, вынужден был прекратить свое существование из-за недостатка подписчиков. В 1884 г. Гольденберг переезжает из Москвы в Петербург, в котором он прожил последние 18 лет. Здесь он работает преподавателем математики в различных учебных заведениях (по преимуществу земских и частных) — в земской учительской школе, на курсах Лесгафта, в женских гимназиях и других. В 1885 г. Гольденберг выпускает свою «Методику начальной арифметики», которая сразу завоевала себе господствующее место, энергично вытесняя методику Евтушевского. Методика Гольденберга издавалась почти до Октябрьской революции, выдержав 25 изданий (последнее двадцать пятое издание было выпущено в 1914 г.). Вскоре им были выпущены задачники для начальной школы в 2-х выпусках, выдержавшие в течение 20 лет около 40 изданий и разошедшиеся в сотнях тысяч экземпляров. С 1895 г. Гольденберг занялся составлением «Собрания арифметических упражнений для гимназий и реальных училищ», которые были изданы в 4 выпусках.

Одновременно с этим он писал много статей, которые помещались в различных педагогических журналах: в «Педагогическом сборнике», «Педагогическом листке», «Народном образовании» и других. Статьи эти имели разнообразное содержание; здесь затрагивались вопросы арифметики, алгебры, геометрии; в них трактовались и вопросы методики; в журналах он помещал некоторые задачи с остроумными способами их решения.

Все симпатии Гольденберга были на стороне земства, земской школы.

Начиная с 1887 г. и до конца своей жизни, Гольденберг ежегодно бывал руководителем по арифметике на летних учительских курсах, организуемых земствами; так, он руководил курсами в Москве, Твери (теперь — Калинин), Саратове, Туле, Перми, Вятке (теперь — Киров) и других. На курсах он читал лекции, сам давал открытые уроки и руководил практическими занятиями учителей. Работа на курсах давала ему возможность установить живую и непосредственную связь с учительством не только гг. Москвы и Петербурга, но и с провинциальным учительством. А Гольденберг высоко ценил общение с учителями; в этом общении он черпал силу и уверенность в своей работе. Гольденберг глубоко верил в здравый смысл русского учителя. Он очень чутко прислушивался к голосу учителей и, как ни один из методистов, считался с их высказываниями, замечаниями, критикой. Мнение учителей по методическим вопросам для Гольденберга было самым авторитетным мнением. Стоило только учителям на Тульских курсах указать ему на трудность некоторых задач, помещенных в его задачниках, как эти задачи были немедленно изъяты из задачников (при их переиздании). Трудно назвать кого-либо другого из методистов, кто бы так глубоко и трогательно любил учителей, школу, занятия с детьми, как Гольденберг. Его биографы рассказывают, что даже в последние минуты своей жизни, измученный тяжелой болезнью, он едва слышным голосом объяснял воображаемым ученикам дроби.

В своей методической работе Гольденберг пережил тяжелую драму, причиной которой были кабальные условия, на которых он заключил договор с издателем его «Методики». Согласно этому договору он не имел права вносить в методику каких-либо исправлений без согласия издателя. Издатель же, довольный «ходким товаром» и большими барышами, этим правом пользовался и запрещал Гольденбергу что-либо изменять в «Методике». Создавалось для Гольденберга невыносимо тяжелое положение: шли годы, накапливался новый опыт, вырастали новые требования, методика отставала от этих требований, нужны были изменения, а вносить их нельзя было... Только в 1901 г. он получил разрешение на переделку своей «Методики». Но 19 июня 1902 г. Гольденберг умер. Смерть Гольденберга воспринята была учительством как тяжелая утрата. Шохор-Троцкий рассказывает, что, когда он, начиная лекцию на курсах учителей, объявил о кончине Гольденберга, многие учителя плакали, и лекцию пришлось отложить

Гольденберг выдвинул в качестве основного метода обучения детей арифметике метод изучения действий. Но чтобы упрочить его положение, нужно было доказать несостоятельность господствовавшего тогда метода изучения чисел. Недостатка в критике метода изучения чисел не было, но во всей этой критике нехватало научной аргументации. Впервые научно и строго обоснованную критику этого метода дал Гольденберг в «Предисловии» ко второму изданию своей «Методики», вышедшей в 1886 г. Это «Предисловие» по богатству мыслей, по строгости аргументации, по силе логики, по точности языка является лучшим из всего того, что создано в нашей методической литературе.

В этом «Предисловии» ярко выражен весь стиль письма Гольденберга: точность мысли, железная логика, простота, ясность и краткость изложения. Многие мысли из этого «Предисловия» сделались потом ходячими афоризмами (о значении математики, об основных математических понятиях и др.). Гольденберг в «Предисловии» дал исчерпывающие ответы на 4 поставленные им же вопроса:

1. В чем заключается цель, которую должно преследовать обучение детей счислению?
2. На чем основаны общеупотребительные, сокращенные способы производства действий?
3. В какой последовательности должны быть обучаемы дети производству действий?
4. Имеет ли обучение производству действий образовательное значение и в чем таковое заключается?

Давая ответы на эти вопросы, Гольденберг с большой убедительностью показал, что для усвоения счисления нужно обучить детей:

1) счету, 2) пониманию десятичного состава чисел, 3) уменью пользоваться самыми простыми, элементарными законами действий и 4) дать знание таблиц сложения и умножения. В этом и только в этом заключается практическое и образовательное значение изучения арифметики. Здесь Гольденберг прекрасно использовал метод доказательства путем исключения; он показал, что в работе по достижению целей изучения арифметики нет места созерцанию чисел и нет никакой надобности в изучении свойств каждого числа, что «созерцание чисел» — дело нереальное, невозможное, что непосредственное (без счета) «осязательное» представление больших чисел — это выдумка досужих людей и, наконец, что не метод изучения ч и с е л, а метод изучения д е й с т в и й есть единственно правильный метод обучения детей арифметике. Тут же он с огромной силой подчеркнул образовательное значение изучения математики. И обо всем этом сказано у него просто, ясно, глубоко всего на 10 печатных страницах.

Приняв за основу метод изучения действий, Гольденберг разработал следующую систему обучения начальной арифметике. Весь материал он разбил на три концентра: а) первый десяток, б) первая сотня и в) числа любой величины. В каждом концентре последовательно изучаются 4 арифметических действия. В концентре «сотня» изучаются простейшие дроби. После концентра «числа любой величины» идет изучение 4 арифметических действий над составными именованными числами, которые таким образом выделялись у него в самостоятельный и обособленный концентр. Заканчивается курс начальной арифметики изучением 4 действий над дробными числами — обыкновенными дробями.

Каждое действие у Гольденберга изучается раздельно. В делении сначала учащиеся знакомятся с делением на равные части, а потом с делением по содержанию. Объединение обоих видов деления происходит в пределе 100.

При изучении первого и второго концентров никакие правила и определения не даются; правила производства действий даются как вывод только в концентре чисел любой величины. В правилах он настойчиво рекомендует отделять существенное, главное от второстепенного, несущественного (ср. с высказываниями Латышева). Таким образом Гольденберг окончательно очистил курс начальной арифметики от всякой догматики и схоластики; знакомство с действиями дается у него вполне наглядно, на конкретных примерах; определения, дававшиеся у Евтушевского в пределе 100, он устранил из этого концентра и отнес к концу курса. Форму определений он упростил и сделал доступной пониманию детей.

В пределе 10 и 100 все действия производятся устно и полуписьменно, т. е. с записью действий, но с устными вычислениями. С механизмом письменных вычислений учащиеся знакомятся при переходе к изучению чисел любой величины. Гольденберг в своей «Методике» является сторонником применения устного счета в действиях с небольшими числами, главным образом в пределе 100.

Изучение действий на всем протяжении курса сопровождается решением задач, сначала простых, потом сложных, причем исходным моментом при ознакомлении с действием у него служит не задача, а решение примеров на наглядных пособиях, а затем уже *применение* изученного действия к решению задач. Гольденберг полагал, что если знакомить с действием на задачах, то ученику приходится одновременно преодолевать две трудности: выделять арифметическую сущность задачи и находить результат вычислений. Если же начинать с примеров, то при решении задачи остается только одна трудность чисто смыслового характера. Задачи на разностное и кратное сравнение чисел в «Методике» даются уже в связи с изучением первого десятка. В концентре «первая сотня» Гольденберг вводит ряд типовых задач, довольно трудных для решения.

Особенно большое разнообразие типов задач вводится в концентрах «Числа любой величины» и «Составные именованные числа». Среди этих задач встречаются задачи, заведомо трудные и непосильные для детей начальной школы.

Гольденберг сделал попытку классифицировать задачи. Он разделил все задачи на две основные категории: на *арифметические* и *алгебраические* задачи.

Признаки, положенные Гольденбергом в основу классификации задач, недостаточно определенные, субъективные, но для практических целей они были достаточны; они подчеркивают одно несомненное качество алгебраических задач — это их бо́льшую трудность для детей по сравнению с задачами арифметическими.

Он сделал шаг вперед и в методике решения задач; с большой четкостью он сформулировал основные этапы решения задачи (анализ, план решения задачи, решение, проверка), раскрыл типичные приемы рассуждений для целого ряда типовых задач, показал приемы объяснения зависимости между величинами — прямо и обратно пропорциональными. Главная же его заслуга в этой области заключается в том, что он составил хорошие задачи: жизненные по своему содержанию, содержательные с математической стороны и изложенные хорошим языком.

Издав свою «Методику» в 1885 г., Гольденберг продолжал работать над методическими вопросами. Под влиянием бесед с учителями у него рождались новые мысли, менялись взгляды на некоторые способы и приемы преподавания, менялось отношение и к некоторым принципиальным вопросам системы преподавания. Жизнь, практика вносили коррективы в «Методику». На курсах, в беседах с учителями он подвергал критике некоторые положения своей «Методики», обещая при первой возможности внести в нее исправления. Что же намеревался он исправлять?

Гольденберг в конце 90-х годов считал ошибкой то, что он не выделил в особый концентр «второй десяток». Ошибкой он считал и резкое отделение составных именованных чисел от отвлеченных, обособление их с отнесением к концу курса арифметики. Он намерен был также изъять разностное и кратное сравнение чисел из первого десятка и перенести эти понятия в последующие концентры как трудные для понимания детьми. Изменились взгляды его и на устный счет: он стал считать полезным устные вычисления не только в пределе 100, но и бóльших чисел. Несомненно, что все эти поправки Гольденберг внес бы в «Методику», если бы этому не помешала его преждевременная смерть.

Ф. И. ЕГОРОВ.

А. Гольденберг разработал на основе метода изучения действий методику н а ч а л ь н о й арифметики и притом главным образом в п р а к т и ч е с к о м разрезе. Вопросов теории он касался лишь постольку, поскольку эти вопросы отражаются в программе первых трех лет обучения, т. е. в самом ограниченном объеме. Гольденберг в своей методике не охватывал всего систематического курса арифметики; десятичные дроби, отношения и пропорции совершенно не вошли в его «Методику», а обыкновенные дроби и проценты были даны в сокращенном объеме, применительно к начальной школе.

Латышев много говорил о теории, но говорил очень обще, неконкретно. Методическая разработка всего курса арифметики (и элементарного, подготовительного и систематического) применительно к программе бывших шестиклассных городских училищ была сделана другим виднейшим методистом конца XIX и начала XX в., единомышленником Гольденберга — Федором Ивановичем Егоровым. Егоров полностью разделял взгляды Гольденберга на методы преподавания арифметики, и свою методику, изданную в 1893 г., строил на тех же предпосылках, что и Гольденберг. Ничего не прибавляя и не убавляя в принципиальных основах метода изучения действий, Егоров провел его через весь курс арифметики, начиная с обучения детей счету и кончая задачами на пропорциональное деление. Егоров остается в кругу тех методических идей, которые были высказаны Латышевым и Гольденбергом, но он гораздо дальше их пошел в отношении практической разработки этих идей. Он дал конкретное разрешение многих из тех методических вопросов — и в первую очередь вопросов теории арифметики, — которые до него были разрешены только в самых общих чертах. Егоров охватил весь курс арифметики и подробно раскрыл методику преподнесения учащимся теории. В этой полноте, в этом умелом сочетании практической и теоретической частей и заключается главная заслуга Егорова.

Федор Иванович Егоров родился в Москве в 1846 г. Высшее педагогическое образование он получил в Петербургском университете, по окончании которого прослушал курсы при Главном управлении военно-учебных заведений, где руководителем по математике был В. А. Евтушевский. По окончании университета он начал свою педагогическую работу в 6-й Московской гимназии, а с открытием Московского учительского института был приглашен преподавателем этого института. Здесь он преподавал математику, методику математики и руководил практическими занятиями воспитанников Института. С 1895 по 1905 г. он состоял директором Московского учительского института, но после 1905 г. он ушел с директорского поста и оставался в Институте только преподавателем. Одновременно он работал в Московской женской учительской семинарии и на Высших женских курсах. В 1876 г. он был приглашен как один из видных московских педагогов для участия в «Учебно-воспитательной библиотеке», где он вел вместе с Гольденбергом математический раздел [1]. Свой богатый педагогический опыт и большую эрудицию в математике, он отразил в составленных им задачниках, методике и учебнике арифметики, которые были изданы: в 90-х и 900-х годах:

1) «Руководство по арифметике для средних учебных заведений и городских училищ».

2) «Собрание задач, вычислений и других упражнений в пределе первой сотни чисел».

3) «Сборник задач, вычислений и других упражнений на отвлеченные и именованные целые числа».

4) «Собрание задач и вычислений на дроби, простые и десятичные, и правила: тройное, пропорционального деления, процентов и другие».

5) «Арифметика и сборник арифметических задач для начальных училищ».

6) «Методика арифметики» — в 1893 г. Методика арифметики на протяжении 24 лет выдержала 10 изданий; последнее посмертное издание было в 1917 г.

Ф. И. Егоров умер 12 мая 1915 г.

---

[1] На страницах этих сборников он подверг острой критике труды Паульсона, Воленса и других методистов немецкой ориентации.

Егоров высмеивал полурусский, полунемецкий язык книги Паульсона:

То методическое течение, которое возглавляли Латышев и Гольденберг, не только не отрицало необходимости и возможности сообщения учащимся теоретических сведений, но всемерно подчеркивало их значение. Однако конкретно по этому вопросу ничего не было сказано. Этот пробел восполнил Егоров. Он начал свою методику с рассмотрения именно теоретических вопросов: он показал, что число и единица — понятия первоначальные, не поддающиеся определению; что арифметические действия могут определяться двояко в зависимости от того, что кладется в основу определения — результат или процесс выполнения действия; второе — проще, первое — точнее. Так, например, определение вычитания может быть дано в двоякой форме; если бы хотели подчеркнуть в определении этого действия процесс его выполнения, то мы должны были бы дать такую формулировку: «Вычитанием называется такое арифметическое действие, посредством которого от одного числа (уменьшаемого) отнимается столько единиц, сколько их имеется в другом числе (вычитаемом)». Если же мы подойдем к этому действию с точки зрения получения определенного результата (остатка, или разности), то тогда мы должны сформулировать это определение так: «Вычитанием называется такое арифметическое действие, в котором по сумме двух слагаемых и одному из них находится другое слагаемое».

Далее в той же первой главе Егоров рассмотрел в методическом разрезе основные законы арифметических действий и составление таблиц действий. Всю эту главу нужно рассматривать как расшифровку, более подробное разъяснение упомянутого выше «Предисловия» к методике Гольденберга.

В практической части своей «Методики» Егоров стоит: а) за сближение арифметических действий; так, он дает совместно сложение и вычитание, умножение и деление; б) за сближение действий с отвлеченными и составными именованными числами; первоначальное знакомство с действиями над составными именованными числами у него дано в концентре *сотня*. Изучение таблицы умножения производится на основе активного участия детей в составлении таблицы по постоянному множимому и многочисленных упражнений в решении задач и примеров, в результате чего таблица усваивается наизусть. Табличное деление дается параллельно с таблицей умножения (за умножением данного числа сейчас же рассматривается и деление на это же число). Знакомство с обоими видами деления (деление на равные части и деление по содержанию), а также табличное и внетабличное деление не разделено.

«Маша пошла однажды три раза в сад»...
«Сколько в левой руке меньше»...
«Конюх на конном заводе был нанят на год за 90 руб. и молодую лошадь»...
Высмеивал также Егоров и катехизацию у Паульсона, сопровождавшуюся множеством пустых вопросов; например: показав даже палец, он обязательно спросит: «Что это такое?»
Егоров обратил внимание на действительно анекдотический характер беседы, направленный на выяснение разницы между числом и цифрой:
«Ну, а это что?» (учитель пишет слово «шляпа» или рисует шляпу).
«Это шляпа. — «Ну, братец, возьми себе эту шляпу: я тебе ее дарю».
Из этой беседы ученик должен был понять, что число и цифра это не одно и то же.

Подробно и обстоятельно разработан Егоровым вопрос о **том, как** изучать с учащимися зависимость между числами данного действия, между действиями, изменение результатов в зависимости от изменения данных. Разработка этих вопросов у Егорова дана лучше, чем у кого-либо из других методистов, и эти места «Методики» Егорова полностью сохранили свое значение и до настоящего времени.

Большое внимание в своей методике Егоров уделил **задачам**. В его время остро стоял вопрос о классификации задач. Появлялись различные системы классификации в зависимости от того принципа, который клался в основу классификации, а эти принципы были различны: а) содержание задач, б) величина чисел, входящих в содержание, в) действия и количество действий, которые требуются для решения задач (Агапьев) и другие. Принцип деления задач на арифметические и алгебраические, принятый Гольденбергом, пользовался признанием, но оставался недостаточно ясным основной признак, по которому следует одни задачи относить к арифметическим, другие — к алгебраическим. В качестве такого признака Шохор-Троцкий выдвинул функциональную зависимость искомого от данных: если над искомым не производятся действия или производится не больше одного действия, такая задача относится к арифметическим задачам; если же над искомым производится больше, чем одно действие, то эта задача — алгебраическая [для алгебраической задачи формула $f(x, a, b, c, \ldots m, n) = 0$; для арифметической $x = f(a, b\ c, \ldots\ m, n)$]. Егоров подверг серьезной критике все эти классификации и пришел к тому выводу, что за основу классификации может быть принято только **арифметическое содержание** задач и вытекающий отсюда способ решения задач. Таковыми у Егорова являются следующие способы: пропорциональное деление, способ остатков.

Разделяя полностью мысль Латышева о том, что решение трудных (типовых, алгебраических) задач должно подготавливаться «рядом методически подготовленных задач», Егоров дал несколько хороших примеров того, как к решению сложных и трудных задач учащиеся могут быть постепенно подведены путем решения менее сложных и менее трудных задач — однотипных или типов, близких друг к другу. В связи с этим Егоров сформулировал методическое положение, которое сохраняет свою силу и до настоящего времени, а именно: «Для детей полезны те задачи, в решении которых они **сами** могут принять **деятельное участие** и где участие их не ограничивается одними вычислениями, но **распространяется и на исследование зависимости между величинами, входящими в задачу, и на установление приема их решения**» (стр. 60 «Методики», изд. 1904 г.).

Вопреки мнению некоторых других методистов (например Шохор-Троцкого) Егоров придавал большое значение в деле развития математического мышления решению так называемых алгебраических (типовых) задач. Типовые задачи он вводит довольно рано; уже при изучении первой сотни (во II классе) у него появляются задачи на деление на неравные части в разностном отношении и задачи на деление в кратном отношении.

Егоров с большой обстоятельностью, почти с исчерпывающей полнотой, разработал «технику» решения задач. Он подробно осветил вопрос о сущности аналитического и синтетического методов разбора задачи, показав и их практическое применение на разборе нескольких конкретных задач. Он показал прием, ставший впоследствии общеупотребительным, перехода от решения простых задач (в одно действие) к решению сложных задач (в два действия). Он довольно конкретно разработал различные образцы составления задач самими учащимися: по заданным числам, по данному учителем вопросу и др.

Он подчеркнул значение упражнения учащихся в самостоятельном решении задач; этот момент заслуживает большого внимания: он показывает новое, более высокое качество методики преподавания арифметики, большую эволюцию, проделанную в этом вопросе, на протяжении XIX в.: к началу XX в. ученики не только не заучивали решения задач, не только решали задачи под непосредственным руководствм учителя, но учащимся стали давать новые задачи для самостоятельного разбора, для самостоятельного решения. Это стало возможным только потому, что в расположение задач был внесен порядок, система.

В «Методике» Егорова даны образцы записи решения задач с письменным планом и без плана. При записи действий у Егорова, как и у Гольденберга, наименования не ставятся.

Вообще, методика решения задач разработана Егоровым настолько полно и обстоятельно, что позднейшим методистам оставалось только доработать некоторые детали, подробности; все же существенные, принципиальные вопросы были охвачены в методике Егорова.

Открытым оставался вопрос о классификации задач.

8. СОСТОЯНИЕ МЕТОДИКИ АРИФМЕТИКИ В КОНЦЕ XIX И В НАЧАЛЕ XX В.

Развитие методики арифметики в 80-х и 90-х годах шло под знаком дальнейшего усиления внимания к ребенку и приспособления методики к особенностям детского восприятия. Педагогика того времени учила, что изучение арифметики, как и каждого предмета, не должно требовать от детей большого напряжения, больших умственных усилий; процесс обучения должен быть интересным, занятным для детей. Это требовало разбивки всего материала на отдельные ступени и расположения их в такой системе и в такой последовательности, чтобы каждая последующая ступень содержала в себе почти незаметное для ребенка усложнение по сравнению с предыдущей ступенью. Это требовало усиления в преподавании арифметики элементов наглядности, разнообразия наглядных пособий, перехода от пассивной наглядности к активной, от наглядного пособия как демонстрационного пособия — к дидактическому материалу.

В 90-х и в начале девятисотых годов в педагогике появляются идеи трудовой школы. Трудовой принцип обучения объявляется как самый надежный и действенный принцип. Все громче и громче начинает звучать требование, чтобы ребенок при изучении того или иного предмета пользовался не только памятью, слухом, зрением, но и руками, применял бы физический труд.

Педагогика того времени начинает предъявлять все большие и большие требования к активности ребенка. Ребенок в процессе обучения не должен быть пассивным слушателем или зрителем, он должен быть творческой личностью. Это творчество должно распространяться и на изучаемый материал.

Методика арифметики не могла не откликнуться на эти общепедагогические требования, а это привело, во-первых, к возникновению так называемого лабораторного метода, при котором на уроках вводятся элементы труда — вырезывание, апликации, черчение, измерение и прочее, и, во-вторых, к идее о том, что при изучении арифметики ученик должен ставиться в положение изобретателя, как бы переоткрывающего науку.

В эти же годы начинается борьба за усиление элементов геометрии в курсе арифметики. До 90-х годов о геометрическом материале шла обычно речь постольку, поскольку в курсе арифметики начальной школы давались знания об измерении площади и объемов; теперь же геометрический материал защищается как таковой, как способствующий развитию пространственных представлений и помогающий выработке более отчетливых арифметических понятий.

Все это нашло отражение в методической работе таких методистов, как Шохор-Троцкий, Беллюстин, Арженииков, Эрн и других, на деятельности которых мы и остановимся.

С. И. ШОХОР-ТРОЦКИЙ.

Семен Ильич Шохор-Троцкий родился в 1853 г. в г. Каменец-Подольске и умер в 1923 г. в Ленинграде. Среднее образование он получил в Киевской первой и Херсонской гимназиях. Высшее свое образование он начал в России на физико-математическом факультете Одесского университета и в Петербургском институте инженеров путей сообщения, а продолжал за границей в Берлинском, Гейдельбергском и Кенигсбергском университетах, где занимался математикой, физикой и педагогикой. За границей он пробыл четыре года, до 1881 г., а в 1882 г. переехал в Петербург, где первые годы работал в качестве помощника редактора сперва журнала «Семья и школа», а затем журнала «Русская школа».

В 1887 г. Шохор-Троцкий получил по специальному экзамену звание домашнего учителя, и с этого времени началась его практическая педагогическая деятельность в различных учебных заведениях — преимущественно в средних школах и некоторое время (3 года) в одной начальной школе. В 1905 г. он принял участие в политической забастовке, и за это был «удален от должности преподавателя Смольного и Александровского институтов», где он в то время преподавал.

Кроме средних школ, Шохор-Троцкий преподавал в Педагогической академии Лиги образования, на педагогических курсах военно-учебных заведений, на Фребелевских педагогических курсах, в Психоневрологическом институте, и, наконец, в Педагогической академии, созданной уже после революции.

Кроме того, он часто выезжал для чтения лекций на учительских курсах, которые устраивались земствами в разных городах России.

Литературно-педагогическая деятельность Шохор-Троцкого была очень богата и разнообразна. Он писал методические руководства, задачники, учебники арифметики, геометрии, статьи на методические темы, рецензии на книги учебного содержания.

Главнейшие его сочинения: «Методика арифметики» — 1-я часть — для начальных, 2-я часть—для средних школ; «Учебник арифметики», «Геометрия на задачах» (две книги — одна для учителей, другая — для учеников); «Арифметический задачник» (для учеников и учителей отдельно) и др.

Шохор-Троцкий работал над вопросами методики арифметики на протяжении почти полстолетия, примыкавшего непосредственно к эпохе Великой Октябрьской социалистической революции. В его методических работах отразилась борьба различных педагогических течений, характерная для предреволюционного периода. В них уже мы находим зародыши и даже ростки тех идей, которые получили полное господство в первые годы Октябрьской революции. «Трудовой метод», «лабораторный метод», «исследовательский метод», «ребенок-изобретатель, переоткрывающий математические истины» и т. д. — все это было уже заложено и обосновано у Шохор-Троцкого в его многочисленных статьях, в его «Методиках», предназначенных для различных типов школ — для начальных школ, для средних школ, для приготовительных классов, для церковно-приходских училищ (Шохор-Троцкий был одним из наиболее плодовитых методистов-писателей). Его методическая деятельность на протяжении десятков лет совпадала по времени с работой Латышева, Гольденберга, Егорова, но по содержанию она отличалась от работ этих методистов: он живо откликался на «новые» идеи в педагогике, он больше склонен был к реформизму, к обновлению всех сторон школьной практики. В этом отчасти было его преимущество, но это же было и его недостатком: в его работах не было той цельности, стройности, того единства в содержании, подчинения деталей и мелочей главному, основному, не было той самобытности, которая характерна для «Методик» Гольденберга и Егорова. Мешало Шохор-Троцкому и недостаточное знание тех условий, в которых жила и работала сельская школа, для которой он писал свои методические работы; отсюда получалась нереальность тех программ, которые он составлял для начальной школы.

Шохор-Троцкий в своей «Методике арифметики», изданной в 1886 г., выступил как изобретатель нового метода, или, как тогда говорили, «новой метóды» — «метóды целесообразных задач». Под этой методой он понимал построение курса арифметики на систематически подобранных задачах, понимая «задачу» очень широко, как задание, которое может быть и задачей в собственном смысле этого слова и примером. Сущность этого метода заключается в хорошо подобранной системе упражнений. Усвоение арифметики, по мысли Шохор-Троцкого, должно происходить не при помощи усвоения учебника или объяснений учителя, а при помощи более или менее самостоятельной работы ученика над искусно подобранными заданиями-задачами. «С задачи», пишет Шохор-Троцкий, «начинается работа, на задачах она продолжается, и задачами она заканчивается.. При догматических методах обучения математике (при книжной или объяснительной методах) задачи играют в лучшем случае только роль материала для применения уже ранее усвоенной «теории».

Задача, по мнению Шохор-Троцкого, является исходной точкой в каждом моменте обучения, причем для каждой ступени надо предлагать не какие попало задачи и не задачи ради самого их разрешения, а задачи, соответствующие цели данного урока, цели изучения данного вопроса. Арифметические задачи должны быть не целью, а средством обучения арифметике. Вот такой-то метод и назван Шохор-Троцким методом целесообразных задач.

Гольденберг, как мы видели, оспаривал и не без основания целесообразность начала изучения каждого действия с решения задач. Делая задачи только средством для усвоения арифметической теории, Шохор-Троцкий умалил значение задач, игнорировал их как средство для развития сообразительности, о чем хорошо было сказано Латышевым.

Сделав задачи главным средством для усвоения всей арифметики, Шохор-Троцкий наметил следующую схему работы над задачами:

1. Сначала задачи на наглядных пособиях и работа для рук и глаз учеников над задачами.

2. Задачи из повседневной жизни и работа воображения над этими задачами.

3. Отвлеченные задачи и работа суждения над этими задачами.

4. Логический вывод из всей работы со стороны учеников, поправка и вывод учителя.

5. Закрепление вывода на словесных упражнениях.

Эта схема как универсальная страдает некоторой искусственностью (понятие о задаче здесь дано расплывчатое, недостаточно определенное; в самом деле, что такое «отвлеченная задача?») и произвольным расчленением таких моментов, которые в действительности сливаются, например, можно ли решать задачи из «повседневной жизни», не применяя при этом «суждения»? Можно ли решать «отвлеченные задачи», не развивая и не пользуясь воображением? Ясно, что нельзя. Такое разделение возможно только на бумажной схеме.

Шохор-Троцкий много работал над классификацией задач. Он сделал попытку дать точный критерий для разделения задач на арифметические и алгебраические. Согласно этому критерию, чисто арифметическими задачами называются такие задачи, при решении которых над искомыми, обозначенными x, не производится, по условию задачи, какое-либо действие или производится только одно действие, в результате которого получается искомое число. Алгебраическими же задачами называются такие задачи, для решения которых над искомой величиной (числом), обозначенной x, приходится производить два или более действий.

Такой критерий нельзя признать ни точным, ни бесспорным. Егоров решительно возражал против классификации задач, основанной на таком признаке.

Шохор-Троцкий впервые дал разделение задач на приведенные и неприведенные.

Шохор-Троцкий не признавал решения задач как одной из целей обучения арифметике. Он говорил: «Не только ученики, но и учителя зачастую отождествляют арифметику с решением трудных арифметических задач. Между тем затрата значительного количества времени на решение слишком сложных задач не оправдывается и не окупается ни слабым влиянием их на умственное развитие учеников, ни ничтожными их приобретениями в области арифметики». Он резко возражал против помещения трудных алгебраических задач в курсе арифметики для начальной школы, полагая, что решение алгебраических задач арифметическими приемами не имеет ни практического, ни образовательного значения. Недооценка решения задач была одной из крупных ошибок Шохор-Троцкого.

Шохор-Троцкий вполне разделял установленные до него цели обучения арифметике — образовательную и практическую; но, кроме этих двух целей, он дал подробную расшифровку и третьей цели — воспитательной (см. статью «Троякая цель обучения начальной математике», стр. 105).

Шохор-Троцкий был сторонником взглядов французского педагога Жана Массе, который говорил, что учащийся должен участвовать в «изобретении арифметики». Ученик ничего не должен воспринимать на веру, догматически, он должен быть маленьким исследователем, как бы вновь переоткрывающим арифметику. Отсюда — пропаганда исследовательского метода, лабораторного метода на уроках арифметики. «Учащийся», писал Шохор-Троцкий, «не только должен видеть то, что проделывает учитель над наглядными пособиями, но сам должен проделывать то же самое. Работать должны не только зрение и слух, но и органы речи и руки». Логическим следствием из этого положения вытекал трудовой метод на уроках арифметики, широкое применение дидактического материала. Эти методические положения Шохор-Троцкого смыкаются с идеями трудовой школы первых времен революции. Из них, как из зерен, пышным цветом расцвели потом знаменитые «трудовые процессы» комплексного метода: изготовление моделей из дерева, из глины, из картофеля и пр., зарисовывание, изготовление апликаций и чертежей, различного рода работы по измерению. Центр тяжести был перенесен на работу рук, а не на работу мысли, не на развитие отвлеченного математического мышления.

Шохор-Троцкий много работал над вопросом о наглядном обучении арифметике. Он дал вертикальные счеты своей конструкции, составил довольно оригинальную таблицу для устного счета, составил «Наглядную таблицу соотношения некоторых мер протяжения» и «Сравнительную таблицу малых мер длины». Теперь эти пособия полузабыты, но в свое время они имели некоторое применение в школе.

В практической разработке «Методики» он ввел деление материала в пределах каждого концентра на множество отдельных методических ступеней, некоторые из них разработаны очень тщательно; например деление многозначных чисел. Выделение концентра 1—20 произведено только в восьмом издании «Методики», относящемся уже к 1914 г. Числа и действия в пределе 20 у него являются первым концентром; концентра «первый десяток» нет. Сложение и вычитание дано совместно; умножение и деление — раздельно. При изучении таблицы умножения последняя составляется одновременно по постоянному множимому и постоянному множителю (например, вслед за умножением 3 на все числа первого десятка дается умножение всех чисел первого десятка на 3).

3×1	1×3
3×2	2×3
3×3	3×3
3×4	4×3
3×5	5×3
3×6	6×3
3×7	7×3
3×8	8×3
3×9	9×3

Таблица умножения отделена от внетабличного умножения. Таблица умножения дается отдельно от таблицы деления. Шохор-Троцкий был сторонником более смелого и более раннего введения в курс арифметики начальной школы элементов геометрии. Знакомство с первоначальными геометрическими понятиями вводится у него уже на втором году обучения в связи с изучением чисел в пределе 100; здесь он дает учащимся представление о квадрате, прямоугольнике, треугольнике.

Первое знакомство с письменными приемами вычислений у Шохор-Троцкого дается в пределе 100. Он не противопоставляет устный счет письменному. Начальная школа должна дать учащимся хорошие навыки как в устных, так и в письменных вычислениях. Злоупотребление одним каким-либо видом вычислений вредно, «но злоупотребление письменными вычислениями вреднее», говорит Шохор-Троцкий.

Подытоживая все сказанное о методической работе Шохор-Троцкого, нужно заметить, что главной особенностью его высказываний было большое внимание к ребенку, к ученику. «Его методы и приемы обучения направлены прежде всего на то, чтобы пробудить у учащихся любознательность и интерес, поддержать самодеятельность и самостоятельность, сберечь силы ребенка. В его приемах обучения много постепенности, плавности; у него нет резких скачков, неожиданных переходов. Он с большой осторожностью раскрывает перед учениками новый материал, новые математические факты; он хорошо пользуется наглядностью, умело использует наглядные пособия». (Кавун.)

Но вместе с тем Шохор-Троцкий не свободен был от увлечений, от крайностей и от ошибок. Самой грубой ошибкой его было полное подчинение задач изучению теории, отрицание задач как средства для развития сообразительности и математического мышления. До крайности он довел и принцип самодеятельности учащихся, полагая, что учащийся должен ставиться в положение изобретателя, открывающего науку. Его высказывания о лабораторном методе и о трудовом принципе обучения арифметике толкнули школу на неправильный путь в первые годы революции, когда в школе на уроках арифметики стали больше заниматься развитием глаз и рук, чем развитием математического мышления. Дроблением курса на многочисленные и мелкие методические ступени он слишком растянул курс арифметики и без нужды усложнил процесс ее изучения для учащихся.

В. К. БЕЛЛЮСТИН.

Гольденберг в течение 15 лет не имел возможности вносить какие-либо изменения в свою «Методику», благодаря чему его «Методика» стала отставать от требований жизни. Жизнь не стояла на месте, и в методы преподавания арифметики на практике вносились существенные изменения. Сам Гольденберг многие из этих изменений разделял полностью, и в своих беседах с учителями пропагандировал их[1], но ему, как мы видели выше, не удалось внести их в свою «Методику».

Одним из существенных недочетов «Методики» Гольденберга, тяжело отражавшимся на практике преподавания, было неудовлетворительное разрешение вопроса о концентрах в расположении материала; школу явно не удовлетворяли установленные Гольденбергом 3 концентра; слишком резким был переход от десятка к сотне, от сотни к числам любой величины. Сами собой напрашивались здесь концентры «второй десяток» и «первая тысяча», которые намечались Гольденбергом для внесения в «Методику» при ее переиздании (Гольденберг намечал концентр «10 000»).

Затем учителями было обращено внимание на то, что понятия об увеличении и уменьшении чисел на несколько единиц и в несколько раз, понятие о разностном и кратном сравнении чисел усваиваются детьми с большим трудом[1], поэтому давать этот материал при изучении действий в пределе первого десятка, как это было в «Методике» Гольденберга, преждевременно. Эти и другие подобные им изменения нашли свое отражение в работах уже следующего поколения методистов — Беллюстина, Арженикова и других, начавших свою деятельность еще при жизни Гольденберга. Оба эти методиста близко стояли к школе, к учительству, к педагогической практике. Они хорошо знали нужды и запросы широких слоев сельского учительства. Близость к школе и хорошее знание ее позволили им в методических работах дать очень конкретное и практическое разрешение методических вопросов, на основе главным образом тех принципов, которые были установлены их предшественниками. Остановимся сначала на методических взглядах В. Беллюстина.

Всеволод Константинович Беллюстин родился в 1862 г. Высшее математическое образование он получил в Московском университете, на физико-математическом факультете, который окончил в 1886 г. По окончании университета он начал работать в педагогических учебных заведениях — преподавателем сначала в Поливановской, потом в Новинской учительской семинарии, а с 1903 г. — директором Поливановской учительской семинарии. С 1912 по 1916 г. он был директором народных училищ Владимирской губернии, а с 1916 г. был назначен директором Нижегородского учительского института, в котором преподавал педагогику, психологию и методику математики. На посту директора института его застала Октябрьская революция. В 1917 г. он был избран председателем Педагогического совета учительского института. В 1919 г. он

[1] См. «Беседы по счислению» Гольденберга, изд. 1906, Саратов.

перешел в Большой Вьясс Пензенской губернии Саранского уезда, где работал в течение 2 лет преподавателем школы 2-й ступени. В 1921 г. он снова вернулся в Нижний Новгород, где был назначен на должность преподавателя Нижегородского педагогического института; здесь он читал курс истории математики.

В своей педагогической работе Беллюстин большое внимание уделял вопросам методики преподавания арифметики и больше всего любил непосредственную преподавательскую работу. Уже будучи директором Поливановской учительской семинарии, он лично в течение 4 лет вел преподавание арифметики в начальной школе, чтобы еще раз на собственном опыте проверить свои методические принципы.

Как Гольденберг и Шохор-Троцкий, он принимал деятельное участие в работе на летних учительских курсах, устраивавшихся тогдашним земством, где он был руководителем и лектором (в Балашове, Рязани, Ярославле, Пскове, Владимире, Самаре, Смоленске, Харькове, Киеве и др.). На курсах он выступал не только как талантливый лектор, но и как блестящий педагог-практик, как образцовый учитель. Учителя о нем говорили: «Когда Беллюстин дает урок, дети с огромным вниманием и с большим увлечением слушают и работают. Мы видели уроки Гольденберга, Вишневского и других, но образцовые уроки мы видели только у Беллюстина. Сколько чувства, сколько жизни было в его уроках! Он был прост и близок к жизни. Наглядными пособиями ему служили все окружающие предметы: сами дети, солома, окна и т. д.» (из газетной хроники). Свой богатый педагогический опыт и хорошее знание школы и детей Беллюстин отразил в целом ряде печатных методических трудов; наиболее крупные из них:

1) Методика арифметики в четырех частях: часть 1 — курс младшего отделения, выпущена в 1899 г., часть 2 — курс среднего отделения, выпущена в 1900 г., часть 3 — курс старшего отделения, выпущена в 1901 г., часть 4 выпущена в 1905 г. Методика имела довольно широкое распространение: 1-я, 2-я и 3-я части выдержали восемь изданий (последнее в 1915, в 1916 и 1917 гг.), 4-я часть выдержала 5 изданий (5-е издание в 1915 г.).

2) Арифметические задачники для 1, 2, 3, 4 годов обучения написаны в 1899—1901 гг. В 1915 г. был выпущен задачник и для V класса.

3) Очерки методики геометрии в пределах начального курса — изданы в 1912 г.

4) Дневник занятий по арифметике в начальной школе — издан в 1899 г., в 1910 г. вышел четвертым изданием.

5) Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. Последним изданием эта книга вышла в 1923 г.

Кроме того, Беллюстин написал ряд статей, помещенных в журналах «Педагогический Вестник», «Педагогическое Обозрение» и «Школа и жизнь»; из них заслуживают внимания следующие статьи: «К реформе преподавания математики» (Пед. В. 1912 г.), «Не лучше ли вместо типических задач ввести в начальный курс геометрические сведения» (Пед. В. 1910 г.), «Новый метод обучения — трудовой» (П. Об. 1912 г.).

Беллюстин умер 21 марта 1925 г., проработав на педагогическом поприще около 38 лет.

Методические взгляды Беллюстина нашли наиболее яркое свое выражение в его «Методике» и в «Дневнике», который был издан самостоятельно и вошел как приложение в «Методику»[1] (см. отрывки «Дневника» в приложении на стр. 275). «Дневник занятий» явился результатом в значительной мере его непосредственной работы в школе с 1893 по 1897 г. По нему учителя учились планировать свои занятия по арифметике. Для нас же этот «Дневник» является ценным историческим документом, характеризующим тот уровень, на котором находилась практика преподавания у лучших учителей накануне XX в. Выход «Дневника» Беллюстина отделен от выхода в свет книги Е. Стрельцова промежутком всего только в 30 лет, а какая большая разница в практике «старой» школы и школы 90-х годов! Там полная нерасчлененность и аморфность материала, преподносимого ребенку, примитивные задачи, не рассчитанные на развитие учащегося, здесь — определенно очерченные методические ступени, четкое планирование работы, внимание задачам и притом таким, которые направлены на развитие сообразительности у детей. С другой стороны, этот «Дневник» показывает, в каких условиях работала тогдашняя сельская школа: она имела только около 120 годовых уроков арифметики (в советской школе 200 уроков и более); из них изучению нумерации и четырех действий с числами любой величины она могла уделить не более 50 уроков (у нас свыше 150 уроков), на действия с составными именованными числами (без квадратных и кубических мер) не более 35 уроков (у нас — 65 уроков) и т. д.

В «Дневнике» указаны следующие концентры:

1. Действия над числами в пределе 10.
2. Действия над числами в пределе 100.
3. Действия над числами в пределе 1000.
4. Действия над числами в пределе 1 000 000.
5. Составные именованные числа.

Действия над числами до 20 в особый концентр еще не выделены, но на усвоение таблицы сложения и вычитания обращено большое внимание. По отношению к концентру 1000 сделано примечание, что этот отдел считается необязательным. Дроби также не составляли особого концентра: они изучались попутно с целыми числами.

Одновременно с «Дневником» Беллюстиным была выпущена «Методика начальной арифметики». Первое издание этой методики (для младшего отделения) встретило одобрение со стороны Гольденберга. Разбирая на учительских курсах вышедшие в то время задачники и методики и останавливаясь на «Методике» Беллюстина, Гольденберг сказал: «Методика эта краткая и в общем очень симпатичная. Способы преподавания, высказанные в этой книжке, проверены автором на опыте. С некоторыми положениями этой методики нельзя согласиться, но эти положения касаются скорее мелочей, чем существенного». И дальше отмечает то, с чем он не согласен, а именно: с ранним (т. е. в пределе второго десятка) ознакомлением с понятиями «на столько

[1] Учителя высоко ценили «Дневник» Беллюстина. Учительница Малиновская, Загаринской школы, в своем докладе на учительских курсах говорила: «Большую услугу оказывает учащим «Дневник занятий». Дневник дает возможность не разбрасываться, не торопиться, не отставать, более правильно пользоваться данным в задачниках материалом. Отступления от «Дневника» конечно, возможны».

то больше и меньше», с включением деления с остатком в программу первого класса и двуцветными шариками на счетах как с наглядным пособием[1].

Беллюстин в своей «Методике» обнаружил хорошее знание детской психологии, понимание всех трудностей усвоения детьми арифметики и ясное представление о способах преодоления этих трудностей; дальше других методистов пошел по пути приспособления методов и приемов преподавания к ребенку, к уровню его понимания. Во многих случаях он, исходя из психологии ребенка, отказывается признавать рекомендуемые им приемы обязательными. «Пусть», говорит он, «дети сперва применяют те пути, которые им кажутся удобными, и лишь постепенно, путем опыта, на ряде подходящих наглядных примеров пусть у б е ж д а ю т с я они в удобстве нормального приема» («Методика», ч. 2, изд. 1917 г., стр. 4). Он часто рекомендует учителям не форсировать процесс усвоения детьми тех или иных фактов, не спешить, не добиваться от учащихся, чтобы они во что бы то ни стало поскорее усвоили то или иное правило, тот или иной прием. Учитель не должен навязывать учащимся правила, спешить с обобщением, предписывать определенные приемы. «Всякое обобщение», говорит он, «полезно лишь при условии, если до него доходят учащиеся с а м и» («Методика», ч. 2, 1917 г., стр. 19). «Только после многочисленного ряда примеров дети н а т о л к н у т с я, и притом с а м и с о б о й, на правило, и такой путь можно считать единственно нормальным» (там же, стр. 17). Говоря о том, что при ознакомлении учащихся с умножением однозначного числа на полные десятки не нужно давать учащимся правило приписывания нулей, Беллюстин замечает: «Пусть же они (дети) напрактикуются сперва в с в о и х способах, может быть м е н е е у д о б н ы х, но им понятных и близких, обобщенные и сокращенные способы мы терпеливо отложим до того времени, когда для них будет подготовлена почва, и дети на них н а т о л к н у т с я» (там же, стр. 17). Беллюстин предвидит, что не всегда и не до всего доходят дети «сами собой», и делает попытки в отдельных (немногих) случаях показать, как учитель должен поступать в таких случаях. Так при сложении полных десятков (80+80) возможны два приема: 1) считать 80 за 8 десятков и складывать 8 да 8, а потом 16 десятков заменить ста шестьюдесятью, и 2) складывать так: 80 да 20 будет 100, да еще 60, всего 160. Второй прием доступнее детям, но первый необходим для письменного сложения, поэтому обойти его нельзя. «Следовательно», говорит Беллюстин, «нам придется дозволить детям пользоваться путем вторым, но с тем, чтобы они *сами собой* переходили постепенно на первый путь, а для этого надо давать им упражнения с предметами: пачками спичек и т. п. (стр. 26 «Методики»).

Раздел умножения на полные десятки и полные сотни Беллюстин заканчивает так: «Тогда только надо давать правило приписывания нулей, когда дети сами на него натолкнутся и сами спросят о нем учителя» (там же, стр. 31). «При толковом изучении арифметики надо

---

[1] Интересно, что другой популярный методист того времени Шохор-Троцкий дал резко отрицательный отзыв о методике Беллюстина, помещенный в журнале «Народное обравование» за 1902 г., № X, стр. 351—355. Шохор-Троцкий не сумел подойти беспристрастно к оценке рецензируемой им книги.

терпеливо ждать, пока учащиеся сами подметят правило» (стр. 30).

Эти высказывания Беллюстина являются своеобразной реакцией на метод казенной муштры, который тогда усердно насаждался в школах чиновниками по народному образованию. Но на этих же высказываниях несомненно лежит отпечаток идей свободного воспитания: невмешательства во внутреннюю жизнь ребенка, терпеливого ожидания результатов естественного созревания мыслей у ребенка и т. д. Это подтверждается и той ролью, какую приписывает Беллюстин учителю, ролью наблюдателя, осторожного руководителя: «Учитель пусть разрешает сомнения, отвечает на вопросы учеников, указывает на допущенные ошибки, но не наводит и отнюдь не дает готовых правил» (там же, стр. 45). Здесь уже кроется начало преувеличенных представлений о детских возможностях, начало умаления роли учителя в процессе обучения детей.

В «Методике» Беллюстина, особенно в ее позднейших изданиях, деление на концентры принимает вполне определенное очертание: у него уже есть концентр «второй десяток», «тысяча» и «миллион». В особый концентр выделены «составные именованные числа», но с оговоркой — «выделяя составные именованные числа в особую ступень, мы сделаем большую ошибку, если пожелаем резко отграничить эту ступень от действий над отвлеченными числами. Между отвлеченными и именованными числами громадное сходство в действиях... Простейшие вопросы, относящиеся к составным именованным числам, вполне возможно проходить во все 3 года среди вопросов, которые касаются отвлеченных чисел («Методика», ч. 3,1915 г., стр. 31). Говоря о характере этой ступени, Беллюстин высказал ту мысль, что на действия с составными именованными числами правильнее всего смотреть, как на ряд задач, относящихся к отвлеченным числам и к мерам. «Действие над составными именованными числами», говорит он, «представляет ряд задач, а не новых теоретических вопросов. Он пытается и здесь разбить узкие рамки строгой регламентации и подчеркнутого формализма. «Положим, дано умножить 3 сут. 15 час. на 6. Пускай дети примутся за этот пример и решат его, как умеют; разобравши их способы и выделивши наиболее удобный, уместно обратить внимание и остальных детей на удобства этого способа. Но заботиться о точном однообразии записей, делать порядок записывания и вычисления обязательными — это значит главное смешивать с второстепенным» (ч. 3, стр. 31).

В действиях с отвлеченными числами Беллюстиным очень хорошо разработана таблица умножения: кратко, просто и понятно. Она построена на последовательном удвоении множимого и предполагает собой вполне сознательное усвоение ее детьми. Таблица деления проходится отдельно без связи с таблицей умножения. Табличное и внетабличное умножение и деление также разделены. Тщательно разработано у Беллюстина и деление многозначных чисел по признаку постепенного усложнения делителя.

В сложении и вычитании он часто вводит случаи с одинаковыми слагаемыми (17+17; 185+185 и др.) и числа, выраженные одинаковыми цифрами (888 — 444 и др.).

Беллюстин стоит за раздельное изучение действий; сопоставление действий нужно, но оно дается после прохождения каждого действия в отдельности. Беллюстин не против того, чтобы дать учащимся определение каждого арифметического действия в конце курса арифметики, но он предлагает давать их в самой простой и сжатой формулировке: «сложить два числа все равно, что к одному присчитать другое», «вычесть значит отнять» «умножить, значит взять слагаемым», «делением мы узнаем часть числа, а также, сколько раз одно число содержится в другом». Эти определения грешат тем, что они мало вскрывают сущность арифметических действий и часто сводятся только к замене одних слов другими.

Относительно изменения суммы, разности, произведения и частного Беллюстин утверждает, что научная форма изложения этих вопросов недоступна учащимся III класса (отделения), но «понимание подобных свойств применительно к устным вычислениям содействует облегчению устного счета; при устных же примерах возможно и объяснение этих свойств в доступных выражениях» (ч. 3, стр. 23).

Намечая объем у с т н ы х в ы ч и с л е н и й, Беллюстин говорит, что чисто устным путем должны производиться все действия в пределе 100; вычисления же в пределе 1000 нельзя относить обязательно к устным: «Желательно, чтобы они производились устно, но необязательно». В этом вопросе Беллюстин придерживается компромиссной точки зрения, половинчатой, недостаточно определенной. Желание сблизить школу с жизнью (крестьянским обиходом) толкало его на расширение рамок устного счета, но условия школьной работы удерживали его от расширения этих рамок. Он хорошо понимал значение письменных вычислений: «Искусство письменного счета, — говорит он, — совершенно необходимо для ученика, прошедшего начальную школу: оно принадлежит к тем немногим уменьям, без которых питомцу школы нельзя ступить шагу, не рискуя навлечь обвинение в безграмотности» (ч. 3, стр. 18).

В вопросе о задачах, этом основном вопросе методики, Беллюстин дал мало нового по сравнению с тем, что было сделано его предшественниками и современниками. Следует только отметить, что он настойчиво указывал (как, впрочем, и Аржеников) на большое значение с и н т е з а в разборе задачи. Уменье по двум данным величинам найти третью, от них зависящую, — очень важное, с этим уменьем учащиеся не приходят в школу. «Синтезу нужно учить». Но он не исключает и анализ. «Вообще говоря, при начале разбора и решения более полезен синтетический прием, а при конце — аналитический». Очень хорошо даны Беллюстиным виды работ, которые сопровождают решение задачи данного типа. В главе «Окончание задачи» Беллюстин пишет: «Если ответ найден, то этим работа с задачей еще не окончилась. Требуется дополнить или повторить ее решение. К этому ведут следующие приемы: а) Полный аналитический разбор задачи. б) План решения, или перечисление, тех простых задач, из которых составилась сложная. в) Повторение всех простых задач, которые особенно затруднили детей при решении сложной», и т. д. (см. ч. 2 хрестоматии, стр. 231). Беллюстин дал простые и жизненные способы решения задач на вычисление времени — с переводом и, главное, без перевода календарного времени в арифметическое. Из типовых задач у Беллюстина хорошо разобраны задачи, решаемые так называемым способом частей; он показал, что на решении задач этого рода у учащихся происходит дальнейшее расширение представления о единице; здесь именно учащиеся получают понятие об условной единице.

Беллюстин, как и Шохор-Троцкий, стоял за усиление в курсе арифметики элементов геометрии. Он придавал изучению элементарной геометрии большое образовательное значение. Его «Очерки по методике геометрии» представляют одну из немногих для того времени (1912 г.) брошюр (стр. 48) по методике этого предмета. Она заключает в себе краткие сведения по истории геометрии и ее преподавания, а затем достаточно полное изложение тех основ, на которых должен строиться начальный курс геометрии. Главнейшие из них — соответствие с психологией детей, их возрастом и развитием, связь с жизнью, с практическими потребностями сельской жизни и соответствие историческому процессу развития геометрических знаний. Беллюстин полагает, что надо исходить от наблюдений и лабораторных занятий: измерения, черчения и вычисления; следовательно, содержание курса должно в себе заключать фактический материал, а логическую увязку его Беллюстин допускает только в меру доступности ее для учащихся. Особенно большое значение придавал Беллюстин в курсе элементарной геометрии землемерным работам и лабораторным работам с квадратиками, прямоугольниками, прямоугольными треугольниками с их вырезыванием, складыванием, перегибанием и разложением, сосчитыванием и вычислением. Начинать сообщение геометрических сведений Беллюстин рекомендовал с рассмотрения геометрических фигур, а не тел.

К. П. АРЖЕНИКОВ.

К взглядам Беллюстина близко примыкают методические взгляды другого выдающегося русского методиста, современника Беллюстина и товарища по работе в Поливановской учительской семинарии, К. П. Арженикова.

Константин Петрович Арженикова родился 17 ноября 1862 г. Среднее образование он получил во 2-й Московской гимназии, которую окончил с золотой медалью, а высшее образование—в Московском университете на физико-математическом факультете. По окончании университета Аржеников решил посвятить себя педагогической работе в педагогических учебных заведениях. В 1886 г. он был назначен преподавателем математики в Новинскую учительскую семинарию, а в 1888 г. был переведен на ту же работу в Поливановскую учительскую семинарию (около Подольска), где работал до 1899 г.

Двенадцатилетняя служба в учительских семинариях сопровождалась усиленной работой над программами и над разработкой вопросов методики преподавания арифметики в начальной школе. В 1892 г. он принимает участие в составлении программы по математике для учительских семинарий Московского учебного округа. В 1896 г. — выпускает первую большую методическую работу «Уроки арифметики». Вслед затем составляет учебники (задачники) арифметики для начальных школ и пишет методику арифметики. Выпустив первое издание методики в 1898 г., он беспрерывно работает дальше над ее усовершенствованием, дополняет, вводит новые главы, учитывая запросы учительства земских школ и следя за развитием методики в западно-европейских странах.

С 1897 г. он принимает активное участие на организуемых земством учительских курсах, где читает методику арифметики и руководит практикой (в Костроме, Рыбинске, Ярославле, Самаре и других городах).

В 1899 г. Аржеников переводится в Кострому преподавателем математики в гимназию; здесь он преподает в старших классах женской гимназии математику, а в VIII педагогическом классе — методику арифметики. Он организовал при гимназии «образцовую» школу, где под его руководством ученицы давали уроки.

С 1918 по 1930 г. Аржеников работал преподавателем математики на рабфаке. В 1926 г. рабфак торжественно отметил его сорокалетнюю педагогическую деятельность. В 1932 г. он получил звание героя труда и грамоту от ВЦИК.

Умер Аржеников 22 марта 1933 г.

Первой крупной печатной методической работой Арженикова, изданной еще в 1896 г., была его книга «Уроки начальной арифметики». Методическое руководство для учителей начальных училищ и воспитанников учительских семинарий». Она была разработана им тогда, когда он состоял преподавателем Поливановской учительской семинарии. По своему типу это была вполне оригинальная, новая книга. Названа она «Уроками начальной арифметики» потому, что учебный материал разработан в ней в виде примерных уроков, которые более или менее подробно исчерпывают различные отделы начальной арифметики. «Излагая методику предмета в форме примерных уроков, — говорит Аржеников в Предисловии, — мы хотели не только сказать, что надо делать, но и показать, как это сделать[1]; от более или менее общих методических указаний до применения их на деле довольно большой шаг». Нечего и говорить о том, что учитель нуждался в такой книге; она ответила потребности учителя в конкретном показе, как на деле, на практике надо применять методические принципы. «Уроки» сразу сделали имя Арженикова популярным среди учительства.

Разработана эта книга весьма обстоятельно. Уроки (темы для уроков) отобраны тщательно, изложение уроков простое, живое. Уже здесь в полной мере проявилось уменье Арженикова в диалогической форме развертывать содержание урока. После каждого урока даются методические указания по отношению ко всему тому разделу, который иллюстрировался данным уроком.

В основном эта книга построена на тех методических принципах, которые в свое время были изложены Гольденбергом; так, здесь еще нет самостоятельного концентра «второй десяток»; понятие о разностном и кратном сравнении дается в пределе первого десятка; составные именованные числа являются самостоятельным концентром, завершающим изучение целых чисел; в изучении квадратных и кубических

---

[1] Разрядка автора.

мер, а также мер времени повторяются приемы, приведенные в методике Гольденберга.

Но наряду с этим Арженииков уже в этой первой своей работе наметил несколько своих[1] методических положений, которые потом с большей подробностью и обстоятельностью развил в своей «Методике». Так, например, здесь он выделил в самостоятельный концентр «тысячу» и обосновал это выделение; здесь же он дал развернутую аргументацию в пользу расширения устного счета[2]. Здесь же он отказался давать какую бы то ни было теорию в начальной школе с тремя отделениями. («Вполне возможно, — говорит он, — совсем не требовать от учеников начальной школы никаких обязательных определений арифметических действий в общей форме: достаточно ограничиться тем, что ученики понимают смысл и значение арифметических действий, что они выкажут, безошибочно выбирая надлежащее действие для каждой простой задачи... Не следует требовать и того, чтобы ученики формулировали правила действий в общем виде».) В «Уроках» Арженииков много внимания уделяет решению задач, здесь он высказывается за чисто арифметические задачи, хотя не отрицает значения (содействия общему умственному развитию) алгебраических задач, в противоположность Шохор-Троцкому. В связи с изучением тысячи он рассмотрел целый ряд типовых задач и указал подробно способы и приемы их решения, повторенные затем в его «Методике». Любопытно, что еще в 1896 г. Арженииков наметил в записи решения задач отдельно записи действий (в строчку) от записи вычислений (столбиком)[3], т. е. ту форму записи, которая в 1935 г. была предложена проф. Кавуном в его брошюре «Арифметические записи в начальной школе».

Дальнейшее свое развитие методические взгляды Арженикова получили в его «Методике начальной арифметики». Характерная особенность этой методики, выгодное отличие ее от других методик заключалось в ее большой конкретности, в обилии практических указаний, в большом количестве хорошо разработанных уроков. Хорошей подготовительной работой к этой методике служили его «Уроки», которые широко были использованы в «Методике». «Методика» Арженикова создавалась, росла, совершенствовалась постепенно, на протяжении 15 лет; в первом издании это была сравнительно небольшая книга, близкая по содержанию к «Урокам» и имевшая две основные части: собственно методику и сведения по арифметике для учителей; затем в нее внесено было большое добавление — история развития методики, и, наконец, добавлены были методические указания к работе на четвертом году обучения. Рост методики отражал собой некоторый рост школы (некоторые земства в это время стали вводить четырехлетнюю начальную школу).

В своей «Методике» Арженииков завершил работу по установлению и обоснованию 6 концентров в преподавании начальной арифметики: 1) первый десяток, 2) первые два десятка, 3) круглые десятки до 100, 4) первая сотня, 5) первая тысяча, 6) числа любой величины. Причем

---

[1] «Своих» надо понимать в том смысле, что он впервые записал эти положения в своей книге.

[2] См. стр. 225.

[3] Там же («Уроки начальной арифметики»), стр. 280.

он не просто декларировал эти концентры, а вывел и обосновал их необходимость, исходя из особенностей десятичной системы счисления и законов арифметических действий. Указанные выше концентры остаются в качестве основных и до настоящего времени, а причины их выделения, приведенные Аржениковым, являются общепризнанными и принятыми во всех методиках. Характерно, что действия с составными именованными числами, а равно и дроби автором не выделены в особый концентр. «Вычисления с составными именованными числами — раздробление, превращение и четыре действия, не составляя особого отдела, могут быть, — говорит автор, — распределены по всем концентрам курса. Элементарные сведения о простейших дробях также должны быть размещены по различным отделам курса начальной арифметики». Здесь уместно отметить, что сближение действий над отвлеченными и над составными именованными числами — является общей мыслью почти всех методистов, начиная с Латышева и Гольденберга. «Приемы письменного вычисления с составными именованными числами в каждом действии должны следовать за соответствующими приемами письменного вычисления с отвлеченными числами,— говорит Егоров. («Методика арифметики», 1904 г., стр. 31). Не говоря уже о том, что такое распределение значительно сокращает время, затрачиваемое обыкновенно на составные именованные числа, оно, кроме того, позволяет ввести большее разнообразие и содержательность в практические упражнения во время курса отвлеченных чисел», — так мотивирует сближение отвлеченных и составных именованных чисел тот же Егоров. Причем все методисты, жившие в XX в., мечтали о скором введении метрической системы мер, справедливо полагая, что при этом отдел составных именованных чисел значительно сократится, и благодаря десятичной основе их построения отпадет всякая необходимость в отделении их от отвлеченных и «конкретных» чисел.

Вопрос о совместном или раздельном прохождении действий Аржениковым разрешен по-разному для разных концентров и даже для различных действий в пределе одного и того же концентра; так, например, в пределе первого десятка и второго десятка сложение и вычитание проходится совместно, а умножение и деление — раздельно; в пределе первой сотни и первой тысячи каждая пара действий проходится совместно; при изучении же чисел любой величины каждое действие проходится раздельно.

Вопросу о решении задач Аржеников в своих методических высказываниях уделил большое внимание. Он делит все задачи на две категории — чисто арифметические и типические. В методику решения арифметических задач им не было привнесено ничего нового (по сравнению с теми исчерпывающими указаниями, которые в свое время были даны Егоровым). Но при рассмотрении типовых или типических задач Аржеников сделал попытку дать с в о ю классификацию задач по типам, и эта классификация является довольно стройной и выдержанной. В основу классификации положено арифметическое содержание и с п о с о б р е ш е н и я задач. Основных типов у Арженикова насчитывается всего пять. Напомним их: I тип — тройные правила (простое и сложное), II тип — соразмерное деление, III тип — смешение, IV тип — задачи на вычисление времени, V тип — задачи на квадратные меры и VI тип — задачи на кубические меры. Но в каждом типе рассматривается несколько разновидностей основного способа решения. В результате такой классификации Арженикову удалось все большое разнообразие типовых задач свести к нескольким немногим типам, объединяющим действительно близкие по способу решения и по арифметическому содержанию задачи. Те задачи, которые на первый взгляд казались разными и у прежних методистов составляли самостоятельные типы — у Арженикова объединены в один тип; ему удалось показать их близость по способу решения. Проиллюстрируем это на том типе задач, который назван у Арженикова «Задачами на соразмерное деление, в которых даются отношение частей и разность их». Это — те задачи, в которых требуется найти два числа когда известно, во сколько раз и на сколько единиц одно из них больше или меньше другого. Конкретно к этому типу отнесены следующие задачи:

1. Ученик купил пенал и перочинный нож. Ножик втрое дороже пенала, и пришлось отдать за него на 40 коп. больше, чем за пенал. Сколько стоит пенал и сколько стоит ножик? (Задача решается способом частей или способом замены.)

2. Два поденщика кололи дрова; один работал 8 дней, другой 5 дней; первый получил больше второго на 18 рублей. Сколько заработал каждый, если поденная плата их была одинаковая? (Решается способом приведения к единице).

3. Две покупательницы сообща купили кусок полотна; одна из них дала на эту покупку 175 руб., другая 140 руб.; первая получила полотна на 5 *м* больше второй. Сколько метров полотна пришлось каждой. (Решается способом обратного приведения к единице.)

4. Далее сюда относятся такие задачи, в которых разность выражена неявно, например:

Крестьянин хочет купить лошадь и для этого продает рожь. Если он продаст 15 *ц* ржи, то ему нехватит для покупки лошади 80 руб., а если он продаст 20 *ц* ржи, то после покупки у него останется 110 руб. Сколько стоит лошадь?

5. К этой категории задач Аржеников относит и такие задачи, которые принято решать способом исключения данных при помощи вычитания; например: «Столовая закупила 20 *кг* малины и 18 *кг* клубники и заплатила за все 30 руб. Другой раз по тем же ценам купила она тоже 20 *кг* малины, а клубники 24 *кг* и уплатила 36 руб. Почем платила столовая за килограмм клубники и килограмм малины?

6. К этому виду Аржеников относит и задачи, в которых идет речь о попутном движении (один догоняет другого); например: «Собака увидала зайца, который находился от нее на расстоянии 240 *м*, и погналась за ним. Заяц пробегает в минуту 280 *м*, а собака 360 *м*. Через сколько минут собака догонит зайца?

7. И, наконец, сюда же относятся такие задачи, в которых разность выражена неявно, например: «Ученики собираются выписать газету. Если они соберут с каждого по 15 коп., то им нехватит 2 руб., а если каждый внесет по 25 коп., то получится лишних 2 руб. Сколько было учеников? Сколько стоит газета?

Рассматривая все эти задачи, мы видим, что они имеют различное содержание и структуру; но арифметическое их содержание одно и то же; способы решения их также в основном тождественны. Отнесение их к одному типу оправдывается тожеством их арифметического содержания (в каждой дано отношение частей и разность их).

Степень трудности каждой из них для учащихся различна: здесь есть задачи легкие и задачи трудные (особенно те, в которых разность выражена неявно). Классификацию задач, проведенную Аржениковым, нужно признать оригинальной и заслуживающей большого к себе внимания. Арженикова, как нам кажется, очень близко (во всяком случае гораздо ближе, чем другие методисты) подошел здесь к правильному с практической стороны разрешению вопроса о типизации задач, который относится к числу наиболее трудных и запутанных вопросов.

Методические высказывания Арженикова являются весьма конкретными. В этом отношении его «Методика» занимает первое место среди всех других методик. Разработка каждого более или менее сложного арифметического понятия иллюстрируется Аржениковым в форме урока (катехизической форме). Изданием своей «Методики» Аржеников полностью ответил практическим запросам учителя, который, как известно, никогда не удовлетворяется только одними теоретическими, принципиальными высказываниями методистов. На практическую разработку методов и приемов обращали внимание в своих методиках и другие методисты (Евтушевский, Гольденберг, Егоров); однако никому из них не удалось дать столько уроков, сколько Арженикову.

Аржеников приспособлял свою методику к запросам сельской школы (земских училищ). Ему во многих случаях удалось отразить взгляды и мнения сельского земского учительства. Это приспособление привело Арженикова к переоценке значения устного счета в школе. «Кончающему курс начальной школы, — говорит Аржеников, — редко придется делать вычисления на бумаге; устные расчеты и выкладки на счетах — вот та область, в которой он находит главное применение вынесенных из школы познаний по арифметике»[1]. Ясно, что речь идет о крестьянском мальчике, который в условиях дореволюционной безграмотной деревни не мог найти применения своим познаниям в области письменных вычислений. Это нашло свое отражение и в формулировке задач преподавания арифметики в начальной школе. Практическая цель обучения начальной арифметике заключается в том, пишет Аржеников, чтобы дать:

1) навык в быстром вычислении, главным образом устном, и выкладках на торговых счетах;

2) умение свободно решать задачи практического содержания, с которым постоянно приходится встречаться в обиходной жизни.

В согласии с такой принципиальной установкой Аржеников стоит за введение в начальную школу главным образом чисто арифметических задач; алгебраическим задачам он отводит в начальной школе третьестепенное место. Стремясь к упрощению задач и методов работы в начальной школе, он стоит за безусловное преобладание синтеза в решении задач и за всемерное ограничение анализа. Он явно недооценивает и теорию. Вся работа школы должна быть сведена, по его мнению, к решению задач практического содержания и к изучению

[1] Аржеников, Методика начальной арифметики, изд. 1936 г., стр. 77.

четырех арифметических действий с преобладанием устного счета. «Достаточно ограничиться тем, что ученики понимают смысл и значение арифметических действий. Определение должно быть даваемо лишь тогда, когда потребность в нем может быть вполне осознана, а для этого требуется сравнительно высокое развитие ума и речи[1].

Но в методах и приемах обучения Аржеников был чужд крайностей и увлечений, от которых несвободны были даже лучшие из его современников-методистов, как, например, Шохор-Троцкий, Беллюстин и другие. Его методы, простые, естественные, жизненные, всегда тесно связаны с содержанием материала и построены с учетом психологии учащегося. Он хорошо знал силы ученика и не переоценивал их. Он правильно понимал роль учителя. Недаром методика Арженикова переиздана после Октябрьской революции и получила распространение в советских школах.

9. МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ НАКАНУНЕ ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ.

Развитие методики арифметики в начале XX в. в основном определялось теми же методическими принципами, которые получили свое обоснование в последние десятилетия (80-е и 90-е годы) прошлого века. Самое широкое распространение в эти годы получает методика Арженикова (вместе с его задачниками), разошедшаяся в сотнях тысяч экземпляров; быстро растет в эти годы популярность методики Беллюстина. Вместе с тем в школах удерживаются методики Гольденберга, Егорова, Вишневского, Житкова. Шохор-Троцкий неоднократно пересматривает свои прежние методические работы и переиздает их исправленными и дополненными, работая в то же время и над созданием новых методических руководств, преимущественно для школ повышенного типа.

Но наряду со старыми методистами в 900-х годах выдвигается и ряд новых методистов, преимущественно из числа преподавателей математики средних школ: Ф. А. Эрн (Рига), Д. Д. Галанин (Москва), Д. Л. Волковский (Москва), К. Ф. Лебединцев (Москва), Н. Д. Мукалов (Киев) и другие. Они в своих методических работах отражали с большей или меньшей полнотой новые требования к методике преподавания арифметики, новые течения в области методической мысли, которыми был богат предреволюционный период. Одни из этих требований являлись результатом естественного роста русской методической мысли, насколько такой рост был возможен в условиях царского строя, другие были навеяны переводной методической литературой.

Наиболее полным и ярким выразителем состояния методической и вообще математической мысли в 900-х годах явился I Всероссийский съезд преподавателей математики, происходивший в Петербурге с 27/XII—1911 г. по 3/1—1912 г. На этом съезде, многолюдном, насчитывавшем свыше 1200 участников, работала в числе других Секция методики математики под председательством С. И. Шохор-Троцкого,

[1] Аржеников, Методика начальной арифметики, стр. 33.

на которой было заслушано 15 докладов; в том числе доклад Галанина «Об изменении метода обучения в низшей и средней школе», доклад Эрна «Спорные вопросы в современной методике арифметики», доклад Лебединцева — «Метод обучения математике в старой и новой школе» и «Вопрос о дробях в курсе арифметики», доклад Крогиуса «Приближенные и сокращенные вычисления» и другие. В этих, как и во многих других докладах, ярко проявились реформистские настроения учителей, сильно и определенно звучали требования реформы программ, методов, взаимоотношений учеников с учителями и других сторон школьной жизни.

Под реформой методики (методических руководств) понималась борьба с чисто эмпирическим характером построения методик и создание новой методики на основе экспериментальных исследований и результатов специально поставленных опытов[1].

Но для радикальной перестройки методики научно поставленные исследования считались недостаточными. Нужно привлечь к этому делу широкие учительские массы. «Мы до сих пор, — говорил в своем докладе Эрн, — изучали методику арифметики почти догматически, принимая на веру то, что вычитывали в том или другом руководстве. Пора нам самим учителям принять активное участие в выработке методики. Пусть каждый учитель, отвергнув раз навсегда всякую рутину, производит исследования в своем классе, испытывая различные приемы обучения и наглядные пособия... Нужна коллективная обработка методики арифметики всеми учителями начальной и средней школы» («Труды», т. II, стр. 266).

Реформа методов преподавания арифметики должна была итти по линии внедрения в школьную практику лабораторного метода. «Надо, чтобы преподавание было перенесено из классов в лаборатории, чтобы ученики перестали повторять за учителем далекие, ненужные, а подчас и непонятные им истины, а чтобы они сами доискивались этих истин, сами замечали и открывали основные свойства явлений, сами находили определенные математические законы и соотношения, чтобы все новое было плодом их творческой работы, как бы их маленьким открытием» (из доклада Тамамшевой — «О реформе преподавания математики», «Труды», т. II. стр. 143).

«Усвоение новых понятий и истин должно итти исключительно конкретно-индуктивным путем с широким применением так называемых лабораторных приемов», — говорил на том же съезде Лебединцев.

Широкое распространение в эти годы начинает получать мысль о том, что наиболее надежным звеном, связующим арифметику с жизнью, является усвоение учащимися идеи функциональной зави-

[1] Один из докладчиков съезда В. Мрочек, характеризуя эмпирическое направление в разработке методик Арженикова, Беллюстина, Гольденберга, Латышева и других, говорил: «В основу построения этих методик положены не научные, дидактические и психологические принципы, а «голый опыт». Каждый из авторов добавлял свои эмпирические крупицы, к той массе крупиц, которая составилась до него трудами отдельных эмпириков XVIII и XIX вв. Отдельные детали (в этих методиках) часто верны, иные замечания практического характера предвосхищают выводы экспериментальной дидактики. Но общий характер изложения совершенно не удовлетворяет поставленным требованиям» (Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики, стр. 69).

симости и воспитания у детей навыка к мышлению в области функции (влияние Меранской программы). Через весь курс математики должна ярко проходить идея о функциональной зависимости и о выражении всякой зависимости в виде уравнения» (из доклада Тамамшевой, стр. 141). В соответствии с этим в проекте программы, предложенной съезду, уже в программу III класса вводилось понятие о функциональной зависимости, вырабатываемое при помощи самостоятельных наблюдений и работ в лабораториях, а также графическое изображение функциональной зависимости.

Комментируя эту программу (первых 6 лет обучения) докладчица (Н. А. Тамамшева) говорила: «Наш элементарный курс математики не заключает в себе и совершенно не отражает этого понятия, между тем как учение о функциональной зависимости составляет основу и сущность математики. Отсутствие учения о функциональной зависимости в нашем элементарном курсе является одной из главных причин того, что он не имеет ничего общего с курсом высшей математики. Только с введением в курс понятия о функции, о функциональной зависимости, о выражении всякой зависимости в виде уравнения, о координатах и о графическом изображении функции можно будет связать эти курсы, выяснить основные математические методы...

Дать детям понятие о функциональной зависимости вполне возможно даже в самом раннем возрасте: идея эта элементарна и сталкиваться с ней в жизни приходится постоянно. Надо только научить детей подмечать функциональную зависимость» («Труды», т. II, стр. 149).

Эта же мысль нашла свое отражение и в докладе Галанина. «Я начинаю обучение, — говорил Галанин, — с непосредственного опыта ученика в измерении длин, весов, объемов и т. п. и думаю, что он уже сам из моих опытов получит идею числа и функциональной зависимости. От числа он перейдет к счету и правилам производства вычислений, а от функциональной зависимости — к идее действий над количеством».

В 900-е же годы с большой остротой встал вопрос о сущности и возникновении понятия числа у детей, с новой силой разгорелась борьба между сторонниками теории счета и теории непосредственного восприятия числа.

На постановку и разрешение некоторых из указанных здесь вопросов несомненное влияние оказал немецкий педагог В. А. Лай своими работами, переведенными на русский язык: 1) «Экспериментальная дидактика с подробным изложением учения о мускульном чувстве и воле»; 2) «Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на результатах дидактических опытов».

В первой из этих книг Лай показал, что дидактические и методические вопросы можно решать экспериментальным способом исследования. Во второй книге он приложил этот метод исследования к разрешению вопроса о возникновении числовых представлений у детей. По этому вопросу, как известно, издавна существовали две теории — теория счета и теория непосредственного восприятия числа. Сторонники последней теории полагали, что понятие о числе возникает опытным путем, причем главную роль играет наблюдение при помощи

внешних органов чувств небольших совокупностей или групп предметов, сравнение их между собой и т. д. Восприятие числа при этом происходит без всякого участия счета, лишь путем всестороннего наблюдения совокупности.

Представители другого направления полагают, что понятие о числе есть результат особого психического акта, называемого счетом; только путем наблюдения это понятие не может возникнуть, так как наблюдать и представлять мы можем только конкретные совокупности, а не число. Поэтому для сторонников этой теории каждое число есть не отдельная группа единиц, а тот или другой член целого ряда, из которого каждый последующий получается из предыдущего и путем прибавления к нему единицы.

Лай в результате своих опытов пришел к тому выводу, что понятие о числе возникает путем непосредственного восприятия, и в соответствии с этим первоначальное обучение арифметике он обосновал на так называемых числовых фигурах.

В России почти все методисты были сторонниками теории счета. Но после появления сочинений доктора Лая начинают появляться последователи теории непосредственного восприятия чисел.

Одним из русских методистов, на котором сказалось влияние Лая, был Д. Л. Волковский, который был редактором перевода на русский язык вышеупомянутой книги Лая.

Волковский был известен в дореволюционные годы главным образом как редактор посмертного издания книги А. Гольденберга «Беседы по счислению», вышедшей в 1906 г., и как редактор переводной методической литературы (Арифметики Э. Бореля, Лекций по арифметике Таннери, Методики арифметики Штеклина, Начальной арифметики Г. Уэнтворта и Э. Рида и др.). В 1911 г. Волковский издал сборник упражнений по обучению счислению в начальной школе для младшего отделения под названием «Детский мир в числах», и вслед затем в 1914 г. им была выпущена книга «Руководство к Детскому миру в числах». Это своеобразное методическое руководство поразило своих современников прежде всего огромным объемом: книга, трактующая вопросы методики только одного года обучения, занимала 576 страниц. В этой работе Волковский оказался эклектиком. Ему как редактору, с одной стороны, посмертного издания «Бесед» Гольденберга и с другой — переводов Лая и Штеклина пришлось примирять не только изучение действий в пределе первого десятка с изучением чисел, но и сторонников числовых фигур с их противниками. Так, высказавшись решительно за изучение чисел, на чем настаивают Лай и Штеклин и против чего боролся Гольденберг, он начинает обучение с нумерации в пределах 10, затем, переходя от числа к числу, изучает сложение и вычитание и, наконец, умножение и деление, т. е. фактически занимается изучением отдельных действий. От Штеклина он заимствовал пристрастие к систематизации и схематизации, проводя их с небывалой в методической литературе педантичностью и скрупулезностью.

С другой стороны, в «Руководстве к Детскому миру в числах» нашла свое выражение большая эрудиция Волковского в вопросах методики, широкое знание им русской, американской, и немецкой методической литературы.

В своем «Руководстве» Волковский, вопреки практике, установившейся в русской школе, ввел в пределе первого десятка изучение каждого числа в отдельности. «Поступая так, — писал Волковский,— мы не боимся того, что это «пахнет грубеизмом», ибо, во-первых, за изучение каждого числа в отдельности в пределе первого десятка с детьми 6—8 лет говорят данные экспериментальной психологии, а во-вторых, бесполезность и опасность метода немецкого педагога Грубе не в пределе первого десятка, а за первым десятком и особенно за вторым десятком, и, в-третьих, кстати скажем, что нами от Грубе взята только общая идея об изучении каждого числа, подробная же разработка этой идеи во многом расходится как с Грубе, так и с остальными его сторонниками» (Руководство к «Детскому миру в числах», изд. 1914 г., стр. 25).

Деятельность Волковского как методиста нашла свое продолжение в послереволюционный период, когда ему удалось издать полный курс методики арифметики, которая явилась плодом его 40-летней педагогической работы. В этой методике Волковскому удалось избежать многих недочетов, свойственных его первым работам дореволюционного периода.

Новые идеи в методике преподавания арифметики нашли отражение, как уже упоминалось выше, и в трудах методиста Дмитрия Дмитриевича Галанина. Его работа в области методики математики относится к 1900 — 1915 годам. Им были изданы:

1) «Методика арифметики, 1-й год обучения»;
2) «Методика арифметики», 2-й год обучения»;
3) «Введение в методику».

Главнейшая особенность его методического credo, наложившая своеобразный отпечаток на все его методические высказывания, заключалась в том, что, по его мнению, понятие числа получается в результате измерения и тесно связано с понятием отношения. «Я думаю, — говорит Галанин в предисловии к Методике, — что понятие числа скорее содержится в отношении». «Непонимание отношений, и эта трудность усвоения понятия «больше в несколько раз» зависят от того, что в начальном обучении не содержится никаких элементов этих понятий, а не содержится их потому, что начальное обучение особенно настойчиво проводит мысль о том, что число есть совокупность однородных счетных единиц, а в этой мысли совершенно не содержится идеи отношения».

Эту мысль, основную в своей Методике, Галанин поясняет на следующем примере. «В настоящее время, чтобы получить число пять, ребенок считает 5 скамеек, 5 пальцев, 5 карандашей, 5 стульев и т. п. В этом счете однородных предметов у него есть слуховой образ — число пять, есть ряд конкретных представлений: скамейки, пальцы, карандаши, стулья; в каждом из этих представлений есть представление единичности и совокупности, но совершенно нет представления количественности. Само число пять как определенное количество не содержится в указанных предметах. Но если мы возьмем 5 стаканов воды и сольем ее в графин, то это количество воды в графине дает конкретное представление числа пять как определенного объема, с одной стороны, а с другой — определенного количества». И дальше: «Если мы теперь эти 5 стаканов воды взвесим, то в них будет, положим, 5 фунтов весу (стаканы можно подобрать). Новое число пять является опять определенным целым, производящим определенное мускульное ощущение. Это мускульное ощущение тяжести, связанное с зрительным восприятием равновесия весов, устанавливает за числом пять новое конкретное восприятие, которое в связи с предыдущим обязательно влечет за собой мысль о функциональной зависимости объема и веса» (стр. 5, Методика арифметики).

Следуя этому принципу, Галанин начинает обучение с непосредственного опыта ученика в измерении длин, веса, объема и т. п., чтобы из этого опыта ученик мог получить идею числа и функциональной зависимости. От числа, по мнению Галанина, ученик перейдет к счету и правилам производства вычислений, а от функциональной зависимости — к идее действий над количеством. Чтобы все это осуществить, класс должен быть превращен в лабораторию, хорошо оборудованную различными предметами и пособиями для всякого рода измерений.

В пределе 10 каждое число изучается в отдельности; попутно в процессе различного рода наблюдений и опытов дается знание мер длины и веса, геометрических представлений. Числа обозначаются сначала только римскими цифрами. Следующим этапом обучения является обучение начертанию каждой цифры и в связи с этим изучение сложения и вычитания. Тут же учеников знакомят с понятиями больше и меньше, с употреблением скобок, с разностным сравнением.

При переходе ко второму десятку Галанин рекомендует выделить геометрию в отдельный урок и рассматривать ее как самостоятельный предмет. В связи с изучением умножения в пределе 20 вводится учение о прямой пропорциональности на решении задач.

Следует указать, что высказывание Галанина в силу своей односторонности и максималистских требований к детям в массе педагогов не встречали признания и тем более не получали в школе практического осуществления. Это особенно ярко выявилось на I Всероссийском съезде преподавателей математики, на котором Галанин выступал с докладом — «Об изменении метода обучения в низшей и средней школе». Известный методист Эрн, касаясь в своем докладе методики Галанина в связи с стремлением последнего подготовить учащихся уже на первых ступенях обучения к пониманию функциональной зависимости, замечает, что это является увлечением и увлечением очень вредным. «Знаток немецкой методики проф. Гефлер, — говорил Эрн, — вполне разделяя взгляды, высказанные в Меранской программе, в то же время настойчиво советует не спешить с выяснением функциональной зависимости и не навязывать детям в курсе арифметики понятий и идей, им недоступных. И здесь, как везде в арифметике, мышление в области функций должно опираться на наблюдение и опыт над изменяемостью переменных» («Труды» I Всероссийского съезда преподавателей математики, изд. 1913 г., стр. 254). Целый ряд преподавателей математики в прениях по докладу Галанина отстаивал ту мысль, что первоначальное понятие о числе создается путем счета однородных предметов или путем созерцания количества их в данной группе; измерение же предполагает уже уменье сознательно считать. Шохор-Троцкий, резюмируя прения по докладу Галанина, указал на то, «что игнорировать измерение столь же невозможно и нецелесообразно, как строить понятие о числе без счета. Без счета нет числа в полном смысле этого слова, но это не исключает чрезвычайной педагогической важности упражнений в измерении при обучении арифметике» («Труды» I съезда, стр. 201).

В той обстановке, какая создалась к I Всероссийскому съезду преподавателей математики (1911—1912 г.), при наплыве новых методических идей и течений, при наличии разногласий в понимании основных вопросов методики естественно возникала потребность глубже разобраться в основах построения методики, в теоретических вопросах, связанных с самой сущностью материала арифметики, подлежащей изучению. Для разрешения спора между сторонниками Лая и его противниками необходимо было глубже осветить теоретическую сторону вопросов о числе, об арифметических действиях; кроме того, ощущалась потребность в уточнении вопроса о цели обучения арифметике, методах преподавания, о роли задач в курсе арифметики. Ту голую эмпирику, на которой строилась методика, надо было подкрепить хотя бы общими и элементарными теоретическими положениями из области психологии, логики и философии математики. Попытку разрешения этой задачи мы находим в работе методиста Ф. А. Эрна «Очерки по методике арифметики», изданной в 1912 г. Эрн противопоставляет свои «Очерки» методикам Гольденберга, Арженикова, Житкова, Шохор-Троцкого и других. Большинство наших методик, — пишет Эрн в предисловии, — представляя собой очень полный и подробный кодекс правил и советов относительно того, **как** следует преподавать арифметику, отводят слишком мало места освещению вопросов, почему и зачем нужно при обучении арифметике пользоваться теми, а не другими приемами и методами, почему нужно проходить изучаемый материал в такой, а не иной последовательности и т. д. Чтобы подготовить учителей к пониманию этих вопросов, к усвоению специальной чисто практической части методики, Эрн решил дать теоретическое обоснование того, чему учит начальная арифметика, т. е. дать анализ понятия числа с логической и теоретической точек зрения, письменной и устной нумерации, сущности и производства арифметических действий, состава и содержания арифметических задач. Затем в главе «Зачем изучается начальная арифметика» Эрн дает обстоятельное освещение вопроса о соотношении между формальной и материальной целью обучения арифметике. В III главе «Как следует обучать арифметике» он подробно останавливается на вопросах о наглядных пособиях, о лабораторных занятиях, об индуктивном и дедуктивном методах обучения арифметике, о логических доказательствах в курсе арифметики и, наконец, о распределении материала при обучении арифметике (о постепенном развитии идеи концентрического обучения, о последовательном и концентрическом распределении материала).

Разбор вопроса о числе, единице, счете и нумерации, данный Эрном, по своей обстоятельности и глубине является лучшим в нашей методической литературе. Из этого разбора с большой очевидностью вытекает, что 1) детям не следует давать никаких определений числа, единицы, счета и прочее, потому что эти понятия не поддаются точному и правильному логическому определению, и, кроме того, даже правильные с точки зрения логики определения были бы совершенно недоступны пониманию детей и не способствовали бы уяснению самих понятий и 2) для выяснения понятия о числе необходимы планомерные наблюдения конкретных групп предметов и упражнения на числовых фигурах, сопровождаемые обязательно упражнениями в счете. Эти выводы не являлись новостью,— о них говорилось и раньше,— но Эрн дал строгие обоснования этого положения.

Ту же глубину и обстоятельность находим мы и в трактовке вопроса об арифметических действиях. Он показал, что общее понятие об арифметическом действии есть понятие сложное, слагающееся из целого ряда частных понятий и постепенно создающееся, что изучение арифметических действий должно быть основано на выяснении сущности каждого действия (сюда входит цель действия, число данных, характер данных и искомого, зависимость между данными и искомым) и его производства, что лучшим средством для выяснения сущности и производства арифметических действий является решение целого ряда надлежаще подобранных задач. Общее понятие об арифметическом действии может считаться вполне выясненным, когда детьми понята зависимость между данными и искомым, усвоены все случаи применения данного действия и понято взаимоотношение изучаемого действия с другими действиями. Для облегчения и упрощения производства действий нужно возможно раньше познакомить учащихся с применениями переместительного, сочетательного и распределительного законов.

Оценивая высказывания Эрна о числе и действиях, нужно отметить, что основа этих высказываний была дана Гольденбергом в его вышеуказанном «Предисловии» к методике; мысли Гольденберга нашли свое дальнейшее развитие сначала у Егорова, а затем еще более углубленное и всестороннее развитие у Эрна. Отметим кстати, что в его «Очерках» дается обоснование того, почему в пределе первого десятка целесообразно знакомство учащихся только со сложением и вычитанием (впервые такая система была проведена в 1899 г. в «Методическом сборнике арифметических примеров и задач, расположенных по новой системе Цветкова»).

В главе о задачах Эрн останавливается главным образом на принципиальных основных вопросах этого раздела, обходя вопросы технического порядка (записи, наименования и пр.). Повторяя в основном то, что было до него сказано, Эрн вносит некоторые новые детали, продвигающие методику решения задач несколько вперед. Например, в качестве основного признака задач алгебраического типа он считает признак условности одной из простых задач, на которые разлагается данная сложная задача, необходимость предположения для решения таких задач. «Решение задач алгебраического типа, — говорит он, — приводит к предположению, представляющему собой простую задачу, для которой комбинируются данные сложной задачи, ненаходящиеся между собой в непосредственной зависимости. После решения этой простой задачи данная сложная задача заменяется другой сложной задачей, решаемой обычными чисто арифметическими приемами» («Очерки», изд. 1915 г., стр. 116). Он высказывается против помещения в задачниках особых отделов задач, распределенных по типам, так как это приучает детей пользоваться при решении задач шаблоном, но вместе с тем он полагает, что сравнение задач, одинаковых по приемам решения, и подведение их под общий тип может служить хорошим упражнением для учащихся. Эрн пишет: «После решения какой-нибудь задачи, характерной по условию или по способу решения, учащимся могут быть предложены примерно следующие вопросы: Не решали ли вы раньше задач, похожих на только что решенную? Назовите одну из таких задач. Чем же эти задачи похожи? Что дано в этих задачах? Что требуется найти? Как решаются эти задачи? (на сколько простых задач распадаются? что ищется в каждой простой задаче?). Придумайте еще несколько задач, похожих на эти (или задач этого типа) (стр. 113). Эрн высоко ценит придумывание задач самими учащимися и дает схему, по которой могла бы итти эта работа (стр. 119). Он на очень ярких примерах показал большое методическое значение решения простых задач (стр. 113—118).

В главе «Приемы и методы обучения» большое место отведено наглядным пособиям; этот вопрос разработан почти с исчерпывающей полнотой. Эрн здесь собрал и привел в стройную систему все то, что было сделано до него.

Новым для его времени был вопрос о лабораторном методе. Придавая этому методу должное значение, он вместе с тем предостерегает школу от увлечения им.

Высказывания Эрна об индуктивном и дедуктивном методах обучения арифметике свидетельствуют о большой зрелости методической мысли этого педагога. К тому, что было сказано Эрном по этому вопросу, в дальнейшем не было прибавлено ничего нового.

В вопросе о распределении материала Эрн высказывался за всемерное сближение отвлеченных и составных именованных чисел, целых и дробных чисел. «Материал должен быть расположен так, чтобы упражнения, относящиеся хотя бы к различным отделам, но связанные между собой внутренним единством, следовали непосредственно одно за другим». Это один из тех, очень немногих вопросов, где Эрну не удалось избежать крайностей, приводивших к нарушению стройной системы.

Из сказанного видно, что методические взгляды Эрна во многом близки к тем идеям, которые получили свое признание в советской методике арифметики.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

О практике преподавания арифметики в начальной школе в начале XX в.

Появившиеся к началу XX в. в довольно большом количестве методические руководства не могли не влиять на педагогическую практику в сторону ее улучшения. Они сами были в значительной мере результатом этой практики, которая поднялась значительно выше по сравнению с тем, что было в первые годы после реформы 60-х годов.

Для характеристики этой практики остановимся на двух документах. В 1900 г. Гольденберг разослал по начальным народным училищам Саратовской губ. 14 «вопросов по обучению арифметике» с просьбой прислать на них ответы. Учителя живо откликнулись на предложение Гольденберга и прислали ему свои ответы. К сожалению, эти ответы полностью не дошли до нас; только ответ одной школы как типичный помещен в «Беседах по счислению»; кроме того, в этой же книге имеются краткие замечания Гольденберга о присланных ему ответах. Приведем некоторые вопросы и ответы на них школы с суммарными замечаниями Гольденберга.

Вопросы:	Ответы:
1. В каком объеме проходится курс счисления? Упражняют ли детей: а) в действиях над дробями? б) в решении задач на квадратные и кубические меры? в) в решении задач на «время»? г) в выкладках на торговых счетах?	1. Курс счисления проходится в объеме четырех действий над целыми числами. а) Не упражняют. б), в), г) Упражняют. Гольденберг, обобщая полученные ответы, говорит: «Упражнения на торговых счетах практикуются во всех почти школах» (стр. 39).
2. Что дети успевают усвоить к концу первого года обучения? Можно ли в течение этого срока обучить	2. К концу первого года обучения дети успевают усвоить действия над числами в пределе первого десятка

детей устному сложению и вычитанию в пределе 100, сверх четырех действий в пределе первых двух десятков?

и действия (сложение и вычитание) над числами в пределе первой сотни.

Гольденберг: «Просмотренные мною ответы на второй вопрос отличаются большим разнообразием... Что касается меня лично, то я полагаю, что надлежит признать успешным обучение в младшем отделении, если дети при переходе в среднее принесут с собой относительно навыков в вычислениях: 1) владение числами первых двух десятков, 2) уменье обращаться с полными (круглыми) десятками и 3) уменье в пределе первой сотни устно складывать и вычитать числа сознательно, уверенно и достаточно быстро» (стр. 44—45).

3. Какими наблюдениями могут поделиться учащие относительно упражнений в пределе первого десятка? Легко ли запоминают дети «табличные результаты?» Долго ли ощущают потребность добывать их путем счета? Какие наглядные пособия оказываются на этой ступени наиболее пригодными (классные счеты, спички)?

3. Наблюдается, что дети до поступления в училище знают названия чисел до десяти, прямой и обратный счет. Табличные результаты запоминаются легко.

При упражнениях в пределе первого десятка наиболее пригодными оказываются классные счеты.

Гольденберг: «Относительно запоминания табличных результатов учащие значительным большинством заявляют в своих ответах, что дети запоминают эти результаты не легко, не особенно легко, не без труда, очень трудно, с большим трудом и т. п. (стр. 45).

5. Как на втором году обучения усваивают дети таблицу умножения? Доходят ли дети до владения ею путем постоянных «настойчивых» упражнений или заучивают таблицу наизусть?

5. Таблицу умножения дети усваивают путем упражнений и заучивания наизусть.

Гольденберг: «Что касается таблицы умножения, то я продолжаю настаивать на том, что она должна быть усвоена детьми путем настойчивых упражнений в наборе равных слагаемых, отвергая между прочим целесообразность заучивания таблицы хором, как некоторые предлагают» (стр. 53).

6. Объясняют ли детям в первый же год обучения выражения «на сколько больше (меньше), во сколько раз больше (меньше)?

Легко ли дети усваивают смысл этих выражений?

6. Объясняют, но смысл этих выражений долго не могут усвоить дети.

Гольденберг: «Из полученных ответов учителей и учительниц несомненно следует, что хотя и объясняют детям в первый же год обучения те выражения, которые перечислены в шестом вопросе, но понимание смысла этих выражений очень трудно дается детям: их постоянно путает между прочим созвучное сходство этих условных выражений. Хорошо сделают, мне кажется, те из учащих, которые отнесут в средине первого года обучения или даже к концу его разъяснение детям, конечно, наглядно на примерах, тех понятий, о которых идет речь» (стр. 49).

Гольденберг: «На эти вопросы были получены самые разнообразные ответы: одни писали, что они упражняют детей на втором году обучения в простейших приемах устных вычислений и достигают хороших результатов: другие отвечали, что они не достигают хороших результатов, а третьи заявляли, что они в этом совсем не упражняют детей» (стр. 73).

7. Знакомят ли детей на втором году обучения с простейшими приемами устных вычислений, упражняют ли в применении этих приемов и каких достигают результатов?	7. Знакомят и упражняют
10. Каким упражнениям дается перевес на уроках счисления?	10. Задачам.
11. Какие вопросы предлагает учитель при решении задач? Не употребляется ли аналитический прием решения? Легко ли он дается детям? Решаются ли некоторые типические задачи алгебраического характера?	11. Аналитический прием решения употребляется: дается он детям не легко. Типические задачи алгебраического характера не решаются.

Из ответов отдельной школы и из тех обобщений, которые сделаны Гольденбергом, можно сделать следующие выводы.

К началу XX в. методы и приемы обучения арифметике, описанные в методических руководствах, находили в значительной части школ большее или меньшее применение. В преподавании арифметики в таких школах соблюдались элементарные методические требования; здесь, как видно из ответов, уделялось внимание решению задач, при решении задач находил применение аналитический прием решения (точнее, разбора) задачи, отводилось место устному счету, при изучении таблицы умножения обращалось внимание на сознательное ее усвоение, во многих школах обучали детей вычислениям на счетах. Но такая практика наблюдалась далеко не во всех школах: в некоторых школах детей вовсе не упражняли в устном счете, в других школах вся арифметика сводилась только к решению примеров, усвоение таблицы умножения строили на заучивании ее «хором». Большая пестрота наблюдалась в объеме материала, проходимого в каждом отделении. В большинстве школ в первом отделении (классе) успевали только выполнить программу, т. е. пройти четыре действия над числами в пределе 20; в других школах сверх этого проходили еще все действия над круглыми десятками, а в некоторых школах (как это видно из вышеприведенного ответа) успевали изучить полностью сложение и вычитание в пределе 100. Большой разнобой был в практике вторых классов. В программе министерства народного просвещения от 1897 г. для одноклассных училищ указывались четыре действия в пределе 100 и 1000, но на деле многие школы не успевали выполнять эту программу, другие же, как видно из ответа, проходили сложение и вычитание чисел *любой вели-*

чины за счет умножения и деления. Не выполнялась программа и в III классе; так из ответа школы видно, что дроби во многих школах не изучались, хотя в программе они и были указаны; типовые задачи не решались, хотя задачники были наполнены такими задачами.

Одной из причин невыполнения или плохого выполнения программы была малая продолжительность учебного года, недостаточное количество уроков арифметики, вследствие чего школа уделяла каждому разделу явно недостаточное количество уроков. В этом отношении весьма показателен «Дневник» Беллюстина (см. этот дневник на стр. 275). Дневник отражает работу школы, находившейся в лучших условиях (образцовой школы при учительской семинарии). Но и эта лучшая школа имела в году немногим более 120 уроков (тогда как в советской школе третьи классы имеют 196 уроков арифметики, а четвертые классы — 234 урока). Из этих 120 уроков на каждый раздел программы 3-го отделения школа могла уделить небольшое, недостаточное время, что становится особенно ясным, если сравнить число уроков в «Дневнике» с числом уроков на соответствующие разделы в III классе нашей советской школы.

Остановимся еще на отчете по Петербургским начальным школам за 1912 г. В этом отчете говорится:

	Название раздела	Дореволюционная русская школа (по «Дневнику»)	Советская школа (по Объяснительной записке к программе изд. 1938 г.
1.	Нумерация многозначных чисел	3 урока	8 уроков
2.	Сложение и вычитание многозначных чисел	8 уроков	16 уроков
3.	Умножение многозначных чисел	10 уроков	17 уроков
4.	Деление многозначных чисел	16 уроков	32 урока
5.	Доли	5 уроков	9 уроков

«В общей постановке преподавания арифметики существенных изменений в истекшем году тоже не наблюдалось, но в частностях были некоторые уклонения, касавшиеся как распределения курса, так и отдельных упражнений. Так, некоторые учащие высказались против изучения второго десятка, как того требует программа, ограничивались повторением действий над круглыми десятками в пределе 100 и, минуя второй десяток, прямо переходили к изучению действий в пределе сотни. С этим едва ли можно согласиться, так как на втором десятке при изучении сложения и вычитания всего удобнее ознакомить детей с первыми приемами десятичного счисления.

В нескольких школах нами замечено было также недостаточно обдуманное отношение к пользованию наглядными пособиями, — учащие не заботились в надлежащей мере о том, чтобы выводы, относящиеся к нумерации и действиям, вытекали на первых порах непосредственно из наглядных представлений. Ознакомление с действиями в различных школах велось различно: в некоторых каждое действие изучалось отдельно, в других — попарно: сложение с вычитанием, умножение с делением; наконец в нескольких школах преподающие, следуя методу Грубе, знакомили учеников сразу со всеми действиями в каждом отдельном числе.

В среднем отделении более всего затрудняет обыкновенно учащих таблица умножения. Здесь иногда тоже замечались ошибки в методе преподавания: изучая таблицу, учащие составляли ее исключительно по множителю. В школах, где это имело место, таблица умножения обыкновенно заучивалась напамять.

При изучении действий в пределе чисел любой величины (не свыше 1 000 000) учащие прежде всего обращали внимание на выяснение значения действий, а затем уже на отчетливость в вычислениях. Это вполне понятно. Городская трехлетная школа, не располагая достаточным временем для усвоения упражнений, должна спешить выполнением программы и по необходимости ограничиться самым существенным в курсе.

При разборе задач в начальных городских школах предпочтение отдавалось, как раньше, синтетическим приемам, с аналитическим же учащиеся знакомились только в старшем отделении. В последнее время стало заметно изменение в отношении учащих к «алгебраическим» задачам. Прежде старались избегать их, считая доступными исключительно даровитым детям, теперь же алгебраические задачи можно встретить на уроках не только в старшем, но и среднем отделении.

Из новых систематических руководств по арифметике учащих особенно интересовали вновь вышедшие методики и брошюры, трактующие о применении лабораторного метода к начальному обучению арифметики».

(Из «Отчета комиссии по народному образованию в Петербурге за 1912 г.», изд. 1913 г., стр. 360—361.)

Из этой выписки видно, что в столичных школах, как это и следовало ожидать, преподавание арифметики было поставлено лучше, чем в провинциальных школах: здесь уделялось внимание решению более замысловатых, в том числе и «алгебраических» (типовых) задач, здесь сильнее проявлялся интерес к новым методам работы. Однако и в школах столицы, как это отмечается в том же отчете, на многих сторонах преподавания арифметики была видна печать отсталости, рутины: у многих учителей процветала зубрежка таблицы умножения, преподавание носило отвлеченный (не наглядный) характер, уцелел кое-где метод изучения чисел, в системе был большой разнобой и т. д. Все это объяснялось тяжелыми условиями работы народных школ, отсутствием заботы о них со стороны царского правительства.

Итоги

Подведем кратко итоги развития методики арифметики на протяжении всего рассмотренного нами периода и отметим тенденцию этого развития по основным вопросам методики арифметики: концентричность расположения материала, изучение арифметических действий, решение задач, изучение дробей и др.

Принцип концентрического расположения материала является главным принципом в преподавании арифметики в начальной школе. Без подразделения курса арифметики на концентры не может быть и речи об успешном усвоении арифметики детьми. Этот принцип, как мы видели, завоевывал себе признание очень медленно. Еще в конце XVIII в. начали раздаваться отдельные голоса, требовавшие изучения 4 арифметических действий сначала лишь в пределе небольших чисел (от 1 до 20 или от 1 до 100). Но только со времен Дистервега он стал общепризнанным принципом методики. Однако у первых наших методистов концентры были слишком обширными по объему. Только в начале XX в. концентры были установлены в том виде, как они существуют в настоящее время (первый десяток, второй десяток, сотня, тысяча, числа любой величины). Позже других введены концентры — второй десяток и тысяча. Составные именованные числа вплоть до начала XX в. составляли особый последний раздел (за исключением методики Евтушевского, в которой этот раздел рассматривался в концентре «первая сотня»). Но в конце девяностых годов прошлого столетия возникает мысль об изучении действий с составными именованными числами параллельно с действиями над отвлеченными числами (Гольденберг, Егоров, Арженйков, Эрн и др.) с тем условием, чтобы затем в конце курса в особом отделе еще раз изложить систематически все, что относится к именованным числам.

Большую эволюцию претерпели дроби. У Гурьева и других наших методистов первоначальное знакомство с долями единицы давалось очень рано — в пределе первого десятка. Затем в 70—90-х годах первое знакомство с дробями было отодвинуто к третьему концентру (сотне), но в XX в. многие методисты опять возвращаются к более раннему ознакомлению с дробями, относя их ко второму десятку. При этом некоторые методисты (Эрн и др.) выдвигают требование, чтобы статьи о дробях не относились к концу года, а распределялись по всему курсу и следовали за соответствующими упражнениями над целыми отвлеченными числами.

До 60-х годов прошлого столетия основным содержанием курса начальной арифметики было изучение нумерации и четырех арифметических действий. С 60-х и приблизительно до начала 90-х годов в основу было положено изучение не действий, а чисел. Но затем изучение чисел снова вытесняется изучением арифметических действий. Сначала (у Гурьева) каждое действие изучается отдельно; потом появляется тенденция сближать и проходить параллельно сложение с вычитанием, умножение с делением, особенно в первом и втором десятках; но эта тенденция проводится, впрочем, не всеми методистами.

Наибольшая сложность в методическом отношении и наибольший разнобой у методистов замечается при разработке концентра первой сотни, в частности, при разработке таблицы умножения. На трактовке способов изучения таблицы умножения сказывалось общее состояние методики арифметики, ее достижений и высоты ее методических принципов. У Магницкого таблица умножения дается по частям, для заучивания. У Евтушевского она усваивается постепенно при изучении (разложении на множители) чисел в пределе 100. У Гольденберга таблица умножения составляется по частям на глазах учащихся и постепенно усваивается ими путем упражнения в решении примеров и задач. У Шохор-Троцкого, Арженикова, Беллюстина, Егорова и других предлагается множество разнообразных способов и приемов для постепенного запоминания таблицы, причем в основе их лежит сознательный счет группами, отчетливое понимание учащимися того, как получается каждое произведение таблицы. При этом у различных методистов наблюдается большое разнообразие в составлении таблицы: одни составляют таблицу по постоянному множителю, другие — по постоянному множимому, третьи — и по постоянному множимому и по постоянному множителю, четвертые — дают и тот и другой способ, но разделяют их некоторым промежутком во времени. Одни таблицу умножения дают совместно, параллельно с табличным делением, другие эти таблицы дают раздельно. Некоторые методисты табличное и внетабличное умножение дают одно вслед за другим (совместно), другие резко отделяют эти случаи один от другого. Однако, при всем разнообразии частных приемов в разработке методики таблицы умножения очень четко проводится следующая тенденция: освободить учащегося от механического заучивания таблицы, показать ученику, **как** получаются табличные результаты, научить ученика самого добывать эти результаты с тем, чтобы в случае выпадения их из памяти ученик сам мог быстро найти требуемое произведение.

В начале зарождения методики арифметики усвоение **правил и определений** считалось главной целью, основным содержанием и лучшим средством для изучения арифметики. Правила и определения безраздельно господствовали в процессе обучения. Все совершалось по правилам: и действия и решение задач; без правил нельзя было шагу ступить в арифметике. Вся дальнейшая история развития методики арифметики есть история развенчивания правил как главного средства усвоения арифметики, как исходного начала в работе, постепенное оттеснение правил и перенесение их в конце работы по изучению того или иного вопроса. У Гурьева и Евтушевского правила производства действий давались в действиях над числами в пределе 100. У Гольденберга они перенесены в область чисел любой величины. У Арженикова, Беллюстина и других усвоению правил придается вообще маловажное значение. То же происходило и с определениями арифметических действий. У Евтушевского определения действий давались при изучении чисел в пределе 100. Начиная с Гольденберга, заучиванию определений большого значения не придается; самая формулировка их упрощается.

Дольше всего правила удерживались в области решения задач. Но и здесь начальная школа уже в 70-х годах освобождается от правил, и задачи решаются по соображению. Правила удерживаются в систематическом курсе арифметики, причем здесь правила сохраняют главным образом значение принципа, по которому классифицируются задачи.

Интересную и содержательную историю имеет вопрос об устном счете, о соотношении в школьном обучении **устных и пись-**

менных приемов вычисления. Какой счет имеет преимущество — устный или письменный, какому счету школа должна уделять главное внимание — этот вопрос в различные эпохи решался по-разному. На заре создания методики, т. е. в XVIII в., безраздельно господствовали в школе письменные вычисления, усваивавшиеся чисто механически. В самом конце этого столетия Песталоцци нанес сильнейший удар практике механических письменных вычислений и выдвинул на первое место устный счет. Это оказало влияние на методику русской школы. Уже у Гурьева мы находим упражнения в устном счете, но Гурьев вводил ознакомление с механизмом письменных вычислений рано: в пределе 100. Евтушевский установил следующее соотношение между устными и письменными вычислениями: «В начале элементарного курса арифметики, — писал он в «Методике», — следует давать предпочтение вычислению устному, а в конце — письменному». Большое значение имело признание Евтушевским за письменными вычислениями такого же влияния на умственное развитие, как и со стороны устного счета. «Письменное вычисление, сознательно совершаемое, имеет такое же влияние на развитие умственных способностей ученика, как и вычисление устное». Латышев внес поправку в точку зрения Евтушевского, говоря, что между обоими приемами вычислений существует тесная связь и что упражнения в устном счете должны сопровождать весь курс обучения в начальной школе (как начало обучения арифметике, так и конец). Гольденберг в своей «Методике» устные упражнения относил к числам в пределе 100. Но по мере того как усиливается требование сблизить школу с жизнью отношение к устному счету резко меняется: и Гольденберг, и Арженииков выдвигают требование о расширении рамок устного счета, об устных вычислениях в пределе 1000. Дальше всех в этом отношении пошел, как мы видели, Арженииков, который поставил вопрос вообще о приоритете устных вычислений над письменными в начальной сельской школе. Более сдержанную позицию в этом вопросе занимали те методисты, которые имели в поле своего зрения, главным образом, городскую школу (Егоров, Эрн).

Особенно большой путь пройден в решении задач. От узко практической задачи, решаемой по правилу, до замысловатой задачи, решаемой всецело на основе рассуждения; от заучивания готового решения до самостоятельной творческой работы над задачей, до придумывания задач самими учащимися. От задачи как средства для уяснения действий, как средства для развития мысли, сообразительности до задачи, как самоцели. Все стремление передовых прогрессивных учителей и методистов было направлено к тому, чтобы сделать решение задач орудием для развития математического мышления учащихся. На этом пути были и отступления и колебания. Дореволюционная начальная школа с ее трехлетним обучением не имела условий для реализации широких замыслов. Пасуя перед объективными, крайне убогими условиями, в которых работала сельская школа, некоторые методисты (Шохор-Троцкий и др.) снижали требования к этому разделу, недооценивали задач.

Увлечение типовыми алгебраическими задачами, наблюдавшееся с конца шестидесятых до восьмидесятых годов, сменилось охлаждением к алгебраическим задачам. Все без исключения методисты 90-х и последующих годов призывают к осторожному введению алгебраических задач в задачники для начальной школы, предлагают не вводить слишком трудных задач, превышающих силы ребенка, и даже совершенно исключить типовые задачи из курса начальной школы. И все же во всех задачниках мы находим наряду с чисто арифметическими и задачи алгебраического типа.

Большая работа была проделана со стороны отдельных учителей и методистов по классификации задач; однако разрозненные усилия отдельных методистов, как мы видели, не привели к положительным результатам, и вопрос о классификации задач остался открытым, неразрешенным.

Итак, за XIX и начало (первые 17 лет) XX в. методика арифметики в своем развитии достигла довольно крупных успехов. В самом деле, что было у истоков развития методики, т. е. в конце XVIII в.? — Узко утилитарная цель обучения арифметике, чисто словесная и догматическая форма передачи знаний учащемуся, усвоение знаний по учебнику или со слов учителя, исключительно памятью, отсутствие ориентировки на психологию ученика. В результате — элементарные знания приобретались путем затраты огромных усилий со стороны ученика, арифметика считалась предметом невероятно трудным и доступным только некоторым наиболее способным учащимся. Что стало в методике арифметики в конце рассмотреннного нами периода? Более широкая постановка задач и целей обучения арифметике — образовательной и практической, признание влияния арифметики на умственное развитие ребенка, методы и приемы обучения, направленные на сознательное усвоение учащимися математических знаний, ориентировка при построении системы курса арифметики и методов ее преподавания на психологию ребенка, на особенности его восприятия.

Эти результаты достигнуты в исключительно тяжелых условиях, в условиях царского строя, когда народное образование находилось в загоне, когда о народной школе и ее учителе отсутствовала всякая забота. Неимоверно трудно, почти невозможно было создавать систематический, более или менее законченный курс арифметики в условиях 3-летней начальной школы с куцым учебным годом, с плохо подготовленным учителем, с нищенскими материальными условиями существования самой школы и учителя. Трудно, почти невозможно было рассчитывать на быстрые темпы развития методических идей, когда царским правительством душилась всякая свободная, прогрессивная мысль, когда отсутствовали все предпосылки для широкого общения учителей и для свободного обмена педагогическим опытом. Творческая работа учителя, его достижения оставались достоянием только его самого и дальше той школы, где он работал, не шли. Учительская масса творила, создавала, вынашивала методику, но она не имела голоса, не имела средств для выявления своей творческой работы. Журналы «Учитель», «Русский народный учитель» и другие меньше всего занимались методическими вопросами.

Опыт работы школ, учителей не находил освещения в печати. Мы не имеем печатных работ, источников (за исключением цитированных выше Стрельцова и Корфа), в которых обстоятельно и документально освещалась бы практика, результаты работы школ по арифметике. Толстые многотомные отчеты земств и министерства народного просвещения о состоянии школ заполнены статистическими данными, но не дают описания результатов учебно-воспитательной работы и, в частности, работы по арифметике. Это свидетельствует об отсутствии всякой заинтересованности царского правительства, правительства капиталистов и помещиков, в поднятии работы школ. Школу только терпели как неизбежное зло.

И все же вопреки этим условиям методика создавалась и росла. Творческие искания массы народных учителей непрерывно совершенствовали педагогическую практику, внося в нее все новые и новые методы, все более и более усовершенствованные приемы обучения. Из массы выделялись лучшие педагоги-методисты, которые главным образом на основе своего опыта (широкий опыт был мало доступен) и частично опыта школ делали обобщения, создавали теории и излагали их в своих методических трудах.

Благодаря отсутствию возможностей в дореволюционное время использовать широкий опыт учительства, отсутствию условий для научного экспериментирования, дореволюционные методики носили сугубо эмпирический характер с сильным отпечатком индивидуальных особенностей их авторов. Это было крупным недостатком дореволюционных методик, недостатком, мешавшим методике подняться до уровня строго научной дисциплины. Этот недостаток хорошо вскрыт одним из дореволюционных педагогов-методистов К. Ф. Лебединцевым в статье, относящейся к 1914 г., «Экспериментальные исследования в области методики начальной арифметики»[1], в которой он пишет следующее: «До последнего времени методика арифметики шла вперед и развивалась чисто эмпирическим путем: отдельные талантливые педагоги скорее чутьем, чем на основании положительных данных, находили удачные приемы для разъяснения учащимся тех или иных понятий, для сообщения им тех или иных навыков. Эти приемы связывались в более или менее стройную систему, сообразно общим педагогическим воззрениям их изобретателя, и подвергались проверке в его личной учебной практике; другие же педагоги либо воспринимали эти приемы на веру, поддаваясь авторитету творца данной системы, либо оценивали достоинства применяемых приемов на основании общих результатов своей учебной деятельности. Такой путь развития методики арифметики имел, конечно, свои ценные стороны, потому что приемы обучения создавались не без связи со школьной практикой и до известной степени проверялись в школьной жизни; но он был сопряжен и с существенными недостатками, так как по общим результатам обучения нельзя было еще судить, насколько целесообразен тот или иной отдельный прием, то или иное наглядное пособие, и личный опыт одного учителя не мог служить достаточным контролем для личного опыта других, даже не мог быть сравниваем с личным опытом других педагогов. Вот почему и методика

[1] К. Ф. Лебединцев, Метод обучения математике в старой и новой школе. Собрание статей по вопросам преподавания математики, М. 1914 г.

арифметики, подобно другим отраслям педагогической науки, должна исходить из данных, добытых точным наблюдением и опытом, доступным всестороннему контролю и проверке; иначе говоря, в помощь и на смену чисто эмпирическому способу установления истин методики арифметики должен притти способ экспериментальный...

...Можно ли в настоящее время построить методику арифметики на основании точных экспериментальных данных и на место наших приблизительных обобщений создать строго обоснованную систему методических указаний и приемов?

Бесспорно прошло уже то время, когда методика арифметики развивалась грубо эмпирическим путем, когда сторонники совершенно противоположных взглядов в подтверждение их ссылались каждый на свои личные наблюдения, и эти наблюдения велись в такой форме, что не могли быть ни проверяемы, ни сравниваемы между собой. Несомненно, спорные вопросы методики арифметики могут быть успешно разрешены только тогда, когда исследующие их педагоги будут исходить в своих заключениях из фактов, добытых объективными планомерными наблюдениями, доступными контролю и проверке, иначе говоря, вполне обоснованная система методики арифметики может быть построена только на экспериментальных данных.

Экспериментальные исследования методических вопросов представляют наиболее надежный путь к их разрешению, и на этот путь и наша методика арифметики должна непременно вступить».

Лебединцев здесь прав во всем, за исключением одного: в его время, т. е. в дореволюционные годы, нельзя было построить методику как строго обоснованную систему методических указаний, разработанную на основании точных экспериментальных данных; для этого не было необходимых условий. Эти условия появились только после Октябрьской революции, в нашем Советском государстве, где созданы научно-исследовательские методические институты и педагогические кабинеты, созданы все условия для научной планомерной постановки опытов и наблюдений за работой школы, где тщательно выявляется, собирается, опубликовывается и пропагандируется опыт лучших школ, лучших учителей.

Все это создает блестящие перспективы для развития у нас советской методики арифметики, которая должна использовать и все то, что было добыто лучшими представителями методической мысли дореволюционного прошлого.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ВЫДЕРЖКИ ИЗ МЕТОДИК МЕТОДИСТОВ XIX ВЕКА.

1. ЗНАЧЕНИЕ И ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ.

Содержание школьного курса арифметики всегда определяется теми целями и тем значением, которое в данную эпоху придается арифметике, как учебному предмету. В дореформенный период русской школы за арифметикой признавалось только чисто утилитарное значение, в преподавании этой дисциплины ставились узко практические цели. Евтушевский, первый из русских методистов, с большой силой подчеркнул огромное образовательное и воспитательное значение изучения математики и показал, что воспитывающая сила преподавания математики обнаруживает свое действие через изучение теории, механизма вычислений и через приложение теории к решению практических задач.

Гольденберг в своем знаменитом «Предисловии» к Методике доказал, что образовательные цели арифметики достигаются не изучением чисел, как то полагал Евтушевский, а изучением четырех арифметических действий, значение которых было подорвано учением Грубе и восстановлено Гольденбергом.

Шохор-Троцкий, определяя цели преподавания арифметики, выделил из этих целей практическую цель (которая сама собой подразумевалась у Гольденберга и Евтушевского) и поставил перед преподаванием начальной математики троякую цель — образовательную, воспитательную и практическую.

Иначе подошел к этому вопросу Эрн: он раскрыл подробно, как в преподавании арифметики осуществляются материальная и формальная цели обучения, высказав при этом много ценных мыслей о том, какое содержание и какие основные методы следует применять для того, чтобы лучше достигнуть поставленных целей.

Общим в высказываниях всех этих методистов по вопросу о целях обучения арифметике в начальной школе является слишком отвлеченный характер постановки этого вопроса и формальное его разрешение, что обусловливалось главным образом тяжелым положением школы в условиях царского строя. В самом деле, нельзя было серьезно говорить об образовательных целях, когда обучение в школе в лучшем случае продолжалось всего «три зимы», а большинство детей покидало школу после первого и второго года обучения. Нельзя было серьезно ставить и воспитательные задачи, ибо в тогдашних условиях это означало поставить арифметику на службу задачам воспитания детей в духе любви «к церкви, царю и отечеству». Нельзя было также говорить о широком использовании в воспитательных и образовательных целях задач, так как содержанием этих задач служили главным образом вопросы купли-продажи с барышничеством, наживой, спекуляцией и т. д. Вот чем объясняется нечеткость, недоговоренность, незаконченность и абстрактность в постановке целей даже у лучших методистов дореволюционной русской школы. Для смелой, широкой и отчетливой постановки вопроса не было у них твердой почвы; эта почва создана Октябрьской революцией.

В. Евтушевский.

Значение и прием обобщений при обучении арифметике.

Особенно важную роль в педагогическом отношении играют приемы для вывода математических истин. Строгий логический процесс, при помощи которого создается величественное здание математики, служит самым лучшим средством для воспитания логической, рассудочной стороны мышления. Араго называет математику логикой в действии. В самом деле, нигде последовательность не доходит до такой строгости, нигде софизм и неверность силлогизма не обнаруживаются с такой очевидностью. В этом отношении математика имеет громадное преимущество перед другими науками. Только материал математических наук, по своей очевидности и простоте, способен во всей чистоте обнаруживать все особенности строгой и последовательной мысли. Особенное значение в начальном преподавании имеет та постепенность, с которой раскрывается научное содержание математики. Эта постепенность проявляется и в последовательном переходе мысли от простых к более сложным и в постепенном обобщении самых идей. Эта постепенность дает рассудку возможность все более и более осваиваться с приемами точного мышления, не ослабляя его требованиями, несоразмерными с возрастом. Каждая истина в математике опирается на предшествующие и сама становится логическим основанием для последующих. Постоянная необходимость при каждом дальнейшем движении иметь в виду все предшествующие истины и понятия приучает рассудок ко вниманию, сосредоточенности, к гибкости и способности сопоставлять идеи и истины. Для того чтобы в о с п и т ы в а ю щ а я с и л а п р е п о д а в а н и я математики обнаружила свое полное действие, необходимо постоянно иметь в виду т е о р и ю, м е х а н и з м в ы ч и с л е н и я и п р и л о ж е н и я т е о р и и к р е ш е н и ю п р а к т и ч е с к и х з а д а ч. Только совместное существование этих трех важных моментов преподавания может иметь действительное развивающее значение. Теория действует развивающим образом на мысль, заставляя передумать в систематической форме то самое, что человечество открыло после длинного ряда усилий. Механизм вычисления есть тот язык, при помощи которого математика излагает свои идеи, задает и решает свои вопросы. Наконец, приложение теоретических начал и выработанного механизма к решению практических задач составляет третий, самый важный момент педагогического влияния математики на развитие умственных способностей. Воспитывающая сила математических упражнений при решении различных задач обнаруживается в развитии самостоятельности.

Развивающие средства при обучении всякому предмету суть обобщение, анализ и те приемы, по которым они совершаются.

Из всех учебных предметов математика представляет наиболее обширное поприще для обобщения и притом постепенного, легкого, доступного ученическим силам, обобщения из немногих фактов, так сказать, неизбежного и точного. Математическое условное знакоположение значительно облегчает ученику запоминание большого числа условий, комбинаций и соотношений между данными величинами и вводит необходимый механизм, облегчающий мышление. Владеть механизмом — значит владеть языком науки и уметь многие частные понятия обобщать в одно общее и закреплять его в памяти в удобной, определенной, законченной форме. Курс элементарной математики представляет, как уже сказано было, неразрывную цепь мыслей; нужно только, чтобы ученик шел шаг за шагом, не делая скачков и начиная сначала, а не с произвольного звена этой цепи. Нужно прежде вооружить ученика приемами открывать, исследовать и доказывать истину. Из изучения отдельных правил и теорем образуется целая теория, ведущая к известной, определенной цели, — нужно, чтобы ученик видел эту цель и стремился к ее достижению. Ученик, не обладая еще вполне общими приемами мышления человека развитого, быстро охватывающего и постигающего абстрактную мысль, может мыслить только обыкновенным, естественным, свойственным развивающемуся уму путем. Из наблюдения частных фактов он слагает общее заключение — вывод, а в математике вывод, если только он сделан правильно, становится уже независимым от частных фактов, переходит в область теоретическую. Такое близкое соприкосновение частных фактов с общими положениями и взаимное пояснение одного другим и составляет силу математики как учебного предмета.

(Извлечения из «Методики арифметики», Введение. Глава II, стр. 23—26).

А. Гольденберг.

Образовательное значение обучения детей производству арифметических действий.

В чем заключается цель, которую должно преследовать обучение детей счислению?

«Обучение детей счислению имеет целью научить их сознательно производить действия над числами и развить в детях навык прилагать эти действия к решению задач общежитейского содержания». Таков ответ на первый из поставленных нами вопросов; смеем думать, что этот ответ не встретит возражений.

Имеет ли обучение детей производству арифметических действий какое-либо образовательное значение, и в чем таковое заключается? Педагоги самых различных оттенков всегда единогласно признавали высоко образовательное значение математики как учебного предмета, и видели в ней могущественное орудие умственного развития. Простота и общность основных понятий, точность определений, строгость выводов, неразрывность цепи логических умозаключений, неопровержимость добытых истин — все это издавна обеспечивало за математикой выдающееся положение среди остальных наук. Легко понять, что эта точная, по преимуществу, наука должна была найти себе почетное место и во всех системах образования, как бы далеко ни расходились воззрения относительно педагогической ценности других предметов преподавания.

Но в начальной школе и в младших классах средней школы мы не преподаем математики-науки, а обучаем детей искусству счисления или счетной мудрости, как говорили встарину; утверждаем это, нисколько не скрывая от себя, что многим педагогам выражение искусство счисления режет ухо, если позволено так выразиться.

Одну из отличительных особенностей этого искусства составляет простота его материала. Действительно, понятие, выражаемое словом число, принадлежит к наиболее общим и до крайности простым понятиям; выражаясь языком логики, мы должны признать за этим понятием наибольший объем при наименьшем содержании; нет вещей, к которым понятие о числе было бы неприложимо, и в то же время нет понятия, которое было бы настолько бедно признаками, как именно понятие о числе; в сущности оно совсем неразложимо на признаки, заключая в себе лишь один признак, — признак множественности, численности, количественности, — с отвлечением от которого и само понятие исчезает из нашего сознания.

Эта простота исходного понятия делает простым и самый предмет, которому оно служит содержанием. Счисление есть предмет, по преимуществу, посильный детскому пониманию; отвлечения в нем просты, непосредственны и естественны.

Обучение счислению имеет еще и ту особенность, что в каждом отдельном случае детский ум в состоянии всецело овладеть тем, над чем ему приходится работать; ничего не остается недосказанным и предоставленным последующим разъяснениям.

Обучаясь приемам вычисления, дети ясно видят перед собой цель, которую в каждом данном случае им предстоит достигнуть, отдают себе полный отчет в тех средствах, при помощи которых они могут самостоятельно достигнуть цели, и, пользуясь десятичным счислением, приучаются видеть в нем то тонкое и совершенное орудие, которое мы недостаточно ценим только потому, что оно так просто и нам так привычно. А между тем, это орудие ускользнуло от проницательности таких глубоких геометров, какими были Архимед и Аполлоний!

Сознательное усвоение приемов вычисления, обдуманное применение арифметических действий к решению задач, хотя бы и незамысловатых, уверенность в средствах, которые всегда безошибочно приводят к цели, должная оценка этих средств и, наконец, неизменное к ним доверие — все это, по нашему крайнему разумению, представляет драгоценные стороны обучения детей счетной мудрости.

К тому же нельзя не признать, что умственные навыки, которые обучение счислению способно воспитать в детях, имеют значение не только в применении к тому простому материалу, который послужил почвой для развития этих навыков, но сохраняют всю свою ценность и далеко за чертой, замыкающей умение производить арифметические действия и способность прилагать их.

Вследствие всего этого мы глубоко убеждены, что обучение детей сознательно производить арифметические действия и с разумением применять их является не только необходимой, но и достаточной целью, которую надлежит преследовать при обучении счислению в начальной школе. В этом деле, как и во всяком другом, простота и ясность служат лучшим ручательством его успеха.

(Из «Предисловия» ко второму изданию Методики начальной арифметики А. И. Гольденберга, изд. 1886 г., стр. III—XII.)

С. Шохор-Троцкий.

Троякая цель обучения начальной математике.

Цель обучения начальной математике может быть троякая: образовательная, воспитательная и практическая.

Через сознание учащегося должен пройти известный ряд систематизованных чувственных восприятий математического содержания и известный цикл математических представлений. Ум учащегося должен поработать и над выработкой известного круга новых для учащегося математических понятий и идей. Благодаря этой работе воображение учащегося обогащается образами, ум — понятиями и идеями, зрение, мускульное чувство и органы речи — известными навыками, которых без математического образования человеку не получить. Чем больший запас осознанных чувственных восприятий, ясных представлений, точных понятий, плодотворных идей, определенных познаний и твердых навыков математического содержания приобретен учащимися, тем лучше достигнута образовательная цель обучения начальной математике в школе и дома. Но само собой подразумевается, хотя и редко принимается во внимание при обучении, то обстоятельство, что это достижимо только при том условии, что учащиеся работают с охотой, с удовольствием, с радостью. Радость должна быть как чисто физическая (если можно так выразиться), например, при хорошем исполнении чертежей или вычислений, при приготовлении моделей, — так и высшая, интеллектуальная, а равно и радость, испытываемая по исполнении работы, по преодолении ее трудностей.

Воспитательное значение занимающего нас предмета сводится преимущественно к воспитанию у учащихся некоторого ряда умственно-культурных привычек, к привитию этих привычек именно с помощью обучения этому предмету. Так, например, привычка задавать себе вопрос о том, не существует ли между данными явлениями какой-либо числовой зависимости, дается математическим образованием. Вопрос о том, не может ли зависимость между данными двумя величинами быть выражена уравнением или изображена графически — тоже вопрос, который задают себе только люди, так сказать, воспитанные в математических привычках. Такая зависимость называется функциональной, и учащийся должен быть воспитан именно в таком смысле, чтобы знать и понимать смысл главнейших функциональных зависимостей в пределах своих познаний. Осторожность суждения, столь необходимая в математических вопросах, также должна сделаться привычкой, притом настолько прочной, чтобы учащиеся испытывали потребность переносить ее и на суждения не специально математического содержания. Не менее важны в воспитательном отношении — развитие наблюдательности при чувственных восприятиях математического содержания, развитие критического отношения к достоверности показаний органа зрения, развитие вкуса к планомерному расчленению сложных вопросов, привычка к точной их постановке и к надлежащей словесной их формулировке, к основательным обобщениям, к логичности рассуждения и т. п. Воспитывать надо в учащемся интерес не только к математическому знанию, но и к применению этого знания на деле. Надо стремиться к тому, чтобы учащийся культивировал этот интерес не только в школе, но и дома, в ежедневной, обыденной своей жизни вне школы и вне школьных своих обязанностей. Этот интерес ему может пригодиться впоследствии.

Для достижения же этой цели учащиеся начальной математике должны не только переживать известные переживания, должны не только представлять себе то, что они себе должны представлять, не только верно рассуждать над тем, над чем они рассуждают, но перевоплощать то, что они знают, в действия и целесообразные поступки: измерять подлежащее измерению, выполнять надлежащие вычисления и чертежи, применять к делу усвоенное, — вообще, осуществлять на деле все то, что они собираются постигнуть или уже постигли воображением и разумом. Это возможно только тогда, когда это осуществление идет рука об руку с разумением. Такова приблизительно воспитательная цель математики как учебного предмета вообще и математики начальной — в частности.

Что касается практической, тоже в высшей степени важной цели начальной математики как учебного предмета, то она сводится к приобретению учащимися такой власти над некоторыми математическими представлениями и навыками (их не очень много), которая необходима всякому человеку, так или иначе примыкающему к некоторому культурному слою населения. Этот багаж и с общественной точки зрения не менее важен, чем то чисто воспитательное значение некоторых умственных привычек, которые может дать надлежащее обучение начальной математике. Совокупность таких представлений и практически важных навыков (это уже замечено выше) так незначительна по своему объему и так доступна по своему содержанию, что известный запас таковых может дать учащимся даже начальная школа, если программа ее не загромождена ничем излишним и недостижимым при кратковременности ее курса.

Особенно опасно для достижения практической цели обучения увлечение сложными и замысловатыми задачами, в смысле образовательном и даже воспитательном мало полезными. Когда в обучении математике господствовали догматические точки зрения, тогда решение замысловатых задач было едва ли не самым воспитательным элементом обучения. Ныне же в самом курсе начальной математики и в самом процессе его осуществления на деле содержится столько интересных, свежих и истинно развивательных элементов, что искать таковые только в замысловатых задачах уже не представляется ни оснований, ни надобности.

(Педагогическая Академия в очерках и монографиях. Под ред. А. П. Нечаева. Методы первоначального обучения, ч. I, стр. 137—140.)

Ф. А. Эрн.

1. Материальная и формальная цели обучения арифметике.

В общей дидактике, как известно, указывается, что цель преподавания учебного предмета бывает двоякая: материальная и формальная.

Материальной цели достигают при преподавании предмета, сообщая учащимся те или другие сведения и знания, ценные сами по себе, важные для практической жизни или нужные для понимания и усвоения других учебных предметов или наук. Для достижения этой цели важно, следовательно, содержание учебного предмета, материал, им разрабатываемый.

Формальная цель достигается тем, что путем обучения учитель содействует гармоническому развитию способностей и наклонностей учащихся; усваивая под руководством учителя учебный материал, учащиеся тем самым развивают в желательном направлении свой ум, чувства, волю. Следовательно, формальная цель находится в непосредственной зависимости от того, как ведется обучение, т. е. зависит от методов и формы обучения.

При преподавании арифметики в начальной школе необходимо, по возможности, преследовать обе цели: детям нужно дать надлежащую подготовку для решения вопросов практического характера, но дать эту подготовку так, чтобы вместе с тем содействовать умственному, а если возможно, то и нравственному развитию учащихся. Материальная и формальная цели преподавания начальной арифметики должны не противоречить одна другой, а дополнять друг друга.

2. Выбор материала для достижения материальной цели обучения.

Материальная цель обучения арифметике заключается в том, чтобы сообщить учащимся известный запас сведений и познаний из области этого предмета, необходимых для практической деятельности или для дальнейшего образования. С точки зрения тех требований, которые могут быть предъявлены учащимся их послешкольной практической деятельностью, наиболее важным является умение верно и быстро решать задачи.

Чтобы научить детей верно и быстро решать предлагаемые им задачи, нужно научить их: а) устанавливать, какие арифметические действия должны быть произведены для решения данной задачи и б) производить все необходимые действия.

Таким образом, решение задач сводится к изучению арифметических действий со стороны их сущности и их производства.

Сущность действий постигается исключительно путем решения простых задач. Научить производству действий с точки зрения материальной цели значит научить детей находить результаты действий верно, быстро и, по возможности, изящно.

Разумеется и при изучении производства действий должен быть постоянно соблюдаем переход от простого и легкого к сложному и трудному.

Поэтому сначала изучаются приемы устного производства действий над небольшими числами (в пределе первой сотни), затем лишь учащиеся знакомятся с механизмом письменного производства действий. При дальнейшем обучении письменное и устное производство действий должны итти параллельно, и первое никоим образом не должно вытеснять второе.

Производить арифметические действия верно и быстро дети научатся лишь после многих и разнообразных упражнений. Для этой цели одних задач недостаточно: решение задач требует слишком много времени для усвоения условия и установления плана решения. Поэтому для упражнения в быстроте и верности производства действий нужны численные примеры, т. е. вычисления над числами, в которых производимые действия обозначены явно теми или другими знаками.

Производить арифметические действия изящно, значит не только красиво и четко записывать производство действий, не только располагать удобно и наглядно все вычисления, но и уметь выбрать из различных способов производства действий наиболее простой, в данном случае, скорее других приводящий к цели. Поэтому при производстве действий имеют большое значение так называемые упрощенные приемы вычислений, основанные по большей части на применении переместительного, сочетательного и распределительного свойств действий или на теоремах об изменении результатов действий ($245+197=242+200=442$; $245-197=248-200=48$; $36\times25=25\times\times36=(25\times4)\times9=100\times9=900$ и т. д.).

В основе производства арифметических действий лежит на первой ступени счет или непосредственное наблюдение совокупностей, на следующих ступенях — применение нумерации и основных свойств арифметических действий. Поэтому в начальной школе нужно обратить самое серьезное внимание не только на упражнения в счете, в умении выговаривать и записывать числа, так как эти знания и сами по себе важны для практической жизни, но и на такие упражнения, не имеющие непосредственного прикладного значения, как разложение данного числа на десятичные группы и обратно, составление числа из десятичных групп и ознакомление учащихся с основными свойствами действий и упражнения в применении этих свойств к производству действий.

Арифметические действия производятся над числами. Числа могут быть отвлеченными, именованными или конкретными, целыми или дробными.

Курс русской начальной школы обыкновенно слагается из изучения действий над целыми числами и элементарного курса дробей, в котором чисто наглядным путем детям дается понятие о действиях и преобразованиях над простейшими, наиболее часто встречающимися в жизни обыкновенными дробями. Умножение и деление на дробь в таком элементарном курсе, разумеется, не может быть выяснены теоретически; дети ограничиваются решением задач на нахождение части от целого и целого по данной части.

Во многих иностранных школах непосредственно после действий над целыми числами изучаются действия над десятичными дробями и лишь затем переходят к курсу обыкновенных дробей. Такое распределение материала в курсе дробей вызывается тем, что десятичные дроби по своему составу и по способу обозначения близко подходят к целым числам. На целые числа и десятичные дроби можно смотреть как на два различных вида так называемых *десятичных чисел*, т. е. чисел, составляемых по десятичной системе, в которой отношение между двумя последовательными разрядными единицами всегда равно 10.

Поэтому многие немецкие методисты настаивают на изучении десятичных дробей тотчас после ознакомления с действиями над целыми числами; при этом десятичные дроби рассматриваются не как дроби, а как особый вид десятичных чисел.

Другие авторы указывают, однако, совершенно справедливо на то, что понятие о десятой, сотой, тысячной гораздо труднее выяснить детям, чем понятие о половине, трети, четверти, которые могут быть получены непосредственным наглядным делением отдельного предмета на равные части.

С другой стороны, и в практической жизни несравненно чаще приходится встречаться с дробями, выраженными в половинах, четвертях, восьмых, чем с такими мелкими долями, как сотые и тысячные. Поэтому эти авторы рекомендуют проходить сначала обыкновенные дроби, а десятичные рассматривать как частный случай обыкновенных дробей.

Нам думается, что в вопросе о последовательности в построении курса дробей, как и во многих других вопросах, наилучшим будет средний путь между двумя предлагаемыми крайностями.

Исходя, главным образом, из педагогических и методических соображений, мы предложили бы построить курс начальной арифметики таким образом: 1) действия над целыми числами и ознакомление с простейшими обыкновенными дробями (курс элементарный, или пропедевтический); 2) изучение десятичных дробей как особого вида дробных десятичных чисел. При этом, однако, могут быть рассмотрены лишь сложение и вычитание десятичных дробей, умножение и деление десятичных дробей на целое число и простейшие случаи кратного сравнения; умножение же и деление на десятичную дробь должно быть отложено до тех ступеней обучения, когда дети усвоят условное значение умножения и деления на дробь вообще.

3. Выбор материала для достижения формальной цели обучения.

Весь намеченный в предыдущем параграфе материал должен быть изучаем так, чтобы достигались и формальные цели обучения арифметике. Из этих целей самая важная — умственное развитие учащихся: выработка точных и ясных представлений и понятий и приобретение навыков к строго логическому мышлению.

Изучая арифметику, дети прежде всего должны привыкнуть сосредоточивать свое внимание на изучаемом и правильно наблюдать отдельные факты, явления и отношения, над которыми им приходится оперировать. При этом они научаются:

1) подмечать в наблюдаемом признаки сходства и различия;
2) выделять постоянные признаки и отбрасывать случайные;
3) соединять все постоянные признаки в одно общее понятие.

В этом чрезвычайно важном для умственного развития процессе обобщения учащиеся упражняются в течение всего курса: понятие о числе, о каждом арифметическом действии, о задаче и о типе задач, все так называемые «правила» производства арифметических действий в различных случаях, основные свойства этих действий должны быть выработаны и открыты учащимися путем обобщения. Сосчитывая и сравнивая между собой совокупности, составленные из одинаковых предметов, но отличающиеся по числу предметов или, наоборот, одинаковые в количественном, но разные в качественном отношении, ученики мало-помалу вырабатывают понятие об отвлеченном числе; подмечая, что определение целого по двум данным частям совершается посредством присчитывания, а определение части, оставшейся после отделения от целого другой части посредством отсчитывания, они составляют элементарное понятие о сложении и вычитании; замечая что 3×5 дает столько же, сколько и 5×3 и что $4 \times 7 = 7 \times 4$, они выводят из этих частных случаев общий закон переместительности для умножения.

Создание в уме учащегося того или другого общего понятия, понимание ребенком свойств различных чисел и действий нужно строго различать от словесного выражения (определения) соответствующих понятий, правил и прочее. Понятие об умножении, положим, как об особом арифметическом действии, отличном от сложения и вычитания, возникает в сознании учащегося сравнительно скоро и легко, но еще долго после возникновения этого понятия ученик не будет в состоянии дать правильного с логической точки зрения определения умножения; после нескольких измерений длины, сделанных в классе, и нескольких взвешиваний, произведенных самим учеником, понятие о мере вполне выясняется, но учителю придется еще много поработать, чтобы добиться от ученика ответа: «мерой называется то постоянное значение величины, с которым сравниваются все другие значения той же величины».

Из двух моментов: 1) возникновения в сознании ясного и точного общего понятия и 2) логически построенного определения этого понятия, первый гораздо важнее для умственного развития учащихся, чем второй.

С психологической точки зрения первый должен предшествовать второму, так как нельзя выразить словами того, чего нет в сознании, и никакие словесные определения, как бы точно они ни были построены, не создадут понятия, для выработки которого необходимы, как мы видели, наблюдение, подмечание признаков сходства и различия, выделение постоянных признаков от случайных и т. д.

С логической точки зрения составление определения является указанием при помощи слов рода, к которому относится определяемое понятие (объем понятия) и тех признаков, которые отличают данный вид от других видов того же рода (содержание понятия). Следовательно, определение представляет собой словесное выражение результатов, добытых сознанием при процессе обобщения.

Ввиду изложенного не следует спешить с определениями, правилами производства действий и прочее. Если ученик правильно применяет арифметическое действие при решении задачи то это обстоятельство (а не знание определения) доказывает, что понятие о данном действии для него ясно. От ученика, верно и сознательно производящего действие, незачем требовать правила производства этого действия. Поэтому всякие определения и правила должны быть отодвинуты к самому концу курса начальной школы.

Когда общие понятия выработаны, найдены те или другие свойства чисел или арифметических действий, тогда приходится применять все выработанное, найденное и понятое к отдельным частным случаям. Этот процесс применения общего к частным случаям, противоположный до известной степени только что рассмотренному процессу обобщения, имеет для умственного развития учащихся тоже чрезвычайно важное значение, так как приучает их к строго логическим выводам.

В самом деле, здесь приходится подвести данный частный факт или явление под общую категорию, объединяющую все частные факты или явления данного вида, и на основании этого приписать частному свойства общего; приходится, следовательно, построить силлогизм простейшего типа.

Пусть, например, ученик решает задачу: Сколько стоят 15 фунтов товару, фунт которого стоит 6 коп.? Постараемся разложить на составные элементы ту умственную работу, которую должен произвести ученик, чтобы установить, каким действием решается данная задача.

1) Прежде всего ученик должен разобраться в зависимости между искомым и данными в нашей задаче; он должен заметить, что стоимость всего товара представляет собой целое, стоимость каждого фунта — часть этого целого, а число фунтов указывает число частей в целом; в данном случае все части равны, число частей и величина каждой части известны, а требуется определить целое.

2) Ученик должен подвести этот частный случай под общее понятие об умножении, согласно которому умножить значит найти целое, зная величину каждой из равных частей и число частей.

3) Из этих двух посылок ученик затем делает вывод: для решения данной задачи нужно произвести умножение, а именно 6 коп. умножить на 15.

Разумеется, у ученика начальной школы, совершенно незнакомого с формальной логикой, соответствующие рассуждения не выльются в форму таких правильно построенных силлогизмов; его выводы по форме будут короче и проще, некоторые из посылок будут, вероятно, лишь подразумеваться, но по существу эти рассуждения все же будут представлять собой силлогизм, так как иначе, как путем силлогизма, нельзя подвести частный факт под ту или иную общую категорию.

Привычка логически мыслить и путем рассуждений убеждаться в справедливости или ошибочности тех или других утверждений важна не только сама по себе, а и потому, что способствует развитию в учащихся з д о р о в о г о к р и т и ц и з м а, т. е. наклонности проверять наблюдаемые факты и явления путем логического мышления и всюду доискиваться причинной связи.

Чтобы покончить с формальными целями обучения арифметике, нам остается напомнить о развитии в учащихся привычки к самостоятельному труду путем решения арифметических задач. Мы видели, что удачное и вполне самостоятельное выполнение этой работы должно возбуждать в учениках интерес к ней, а возбужденный интерес побуждает к дальнейшей самодеятельности. Составление самим учащимся арифметических задач еще важнее для развития самодеятельности, так как представляет собой элементарную форму творчества.

4. Сравнительное значение материальной и формальной сторон при изучении арифметики.

Материальная и формальная цели обучения арифметике должны дополнять одна другую; всякое увлечение преподавателя в ту или другую сторону следует признать безусловно вредным. Нельзя, например, никоим образом согласиться с теми методистами, которые стремятся придать арифметике исключительно прикладной характер, отодвигая формальную цель далеко на задний план на том основании, что умственное развитие, даваемое изучением математики, крайне односторонне и что если человек научится строго логически мыслить в области математики, то это вовсе еще не значит, что он сумеет также правильно разбираться в гораздо более сложных явлениях природы или общественной жизни. При таком взгляде на общеобразовательное значение математики единственной целью обучения арифметике явилось бы быстрое и верное решение задач. Даже сознательного отношения к производству действий для этой цели не потребовалось бы: можно было бы научить детей находить результат действий и чисто механически. Но ведь это значило бы вернуться к временам до Песталоцци, шагнуть на полтораста лет назад.

Но, разумеется, еще большей крайностью нужно считать пренебрежение материальной целью обучения арифметике, которое и до сих пор часто дает себя знать, по крайней мере, в младших классах средней школы. Увлекаясь формальной стороной арифметики, некоторые преподаватели стараются курсу начальной арифметики придать характер строго обоснованного научного курса. Ученикам младшего возраста приходится усваивать строго логические, чисто умозрительные доказательства арифметических истин, совершенно недоступные их детскому уму. Понятно, что при этом весь ход доказательств усваивается механически, заучивается напамять без надлежащего понимания, как в прежнее время заучивались всякие определения и правила. Умственные силы учащихся при таком обучении не только не развиваются, но, наоборот, притупляются, всякий интерес к предмету заглушается массой непонятных и ненужных отвлеченностей. А между тем, на решение задач, на применение арифметических познаний к вопросам практической жизни остается времени мало, и материальная цель обучения остается невыполненной.

Из всего вышеизложенного вытекает, что при обучении начальной арифметике необходимо соблюдать известное равновесие между формальной и материальной сторонами этого предмета; придавая арифметике практический, прикладной характер, пользоваться вместе с тем осторожно и разумно усваиваемым материалом для воспитания в детях умственных и нравственных навыков.

(Извлечения из главы «Зачем изучается начальная арифметика», стр. 121—135, «Очерки по методике арифметики»).

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АРИФМЕТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ И СИСТЕМА РАСПОЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА.

Единственно правильной и целесообразной системой расположения материала в курсе арифметики, предназначаемой для начальной школы, является концентрическая система. К такой системе пришли не сразу. В течение XVIII в. и первой половины XIX в. в учебниках, предназначаемых даже для первоначального обучения арифметике, давался систематический курс арифметики, начинавшийся с определений, что такое арифметика, число, единица, с нумерации многозначных чисел.

П. С. Гурьев, первый из русских методистов, указал на необходимость концентрического расположения материала, установив 3 концентра: 1) числа от 1 до 10, 2) числа от 10 до 100 и 3) числа любой величины. Гольденберг, продолжая линию Гурьева, дал математическое обоснование этих же концентров, исходя из свойств десятичной системы счисления и законов арифметических действий. К необходимости концентрического расположения материала в арифметике пришел и Евтушевский, давая этому вопросу, однако, иное обоснование и кладя в основу своих концентров особенности чисел и их свойства. Полное и исчерпывающее обоснование всех принятых в настоящее время концентров дано Арженниковым.

П. С. Гурьев.

Содержание и система расположения материала в курсе арифметики.

Вся арифметика собственно заключается в следующих четырех действиях: сложении, вычитании, умножении и делении. Им предшествует счисление, или нумерация. Эти действия производятся над числами, которые бывают целые и дробные. Как те, так и другие разделяют еще на отвлеченные и конкретные, или именованные; наконец, последние — на числа одного наименования или простые, и числа разного наименования, или составные. И здесь предел арифметики; все прочее, что обыкновенно относят к ней, не составляет особой теории, но есть приложение тех же самых правил и законов к разным потребностям жизни. Так называемые тройные правила (простое, сложное, товарищества, смешения вещей и цепное) не требуют ни других начал, ни других операций. Задачи этого рода не только решаются, но и должны решаться помощью тех же основных действий, через приведение данных отношений к единице, а не посредством пропорций, которые вовсе неуместны в арифметике.

К тому же такой способ решения задач, т. е. через приведение данных отношений к единице, облегчит впоследствии учащимся переход от арифметики к первоначальной алгебре и уже заранее приведет к предугадыванию общности приемов последней.

Очевидно, что надобно начать дело с счисления, однакоже не должно останавливаться на исследовании этого предмета до тех пор, пока он совершенно истощится; напротив, важнее всего и сообразнее с детским развитием дать сколь возможно ранее эскиз всей арифметики. Так, чтобы итти в науке всегда параллельно с силами учащихся, следует научить их сперва считать и изображать цифрами только числа от одного до десяти, потом тотчас перейти к сложению и вычитанию этих чисел, к разложению или разделению их на равные и неравные части, словом, сделать над ними разного рода сравнения, причем не упустить также случая сообщить им понятие и о дробях, сколько позволяют пределы первых десяти чисел. Таким образом, будет сначала пройдено мало, но пройдено целое; учащиеся вдруг ознакомятся с сущностью изучаемого предмета, и идея науки, хотя темно, однакоже все-таки проявится им.

Подвергнув исчислениям все числа от одного до десяти, должно будет перейти во вторую ступень (во второй концентрический круг) и рассмотреть также с разных точек зрения все числа от одного до ста. Здесь уже представляется большой простор: частные приемы получают определенность, правила обобщаются, и самые законы чисел начинают яснее проявляться. После этого третья ступень (новый концентрический круг), где трактуется о всех возможных числах, как бы велики они не были, не представит особой трудности для учащихся; они поймут, что здесь дело идет только о повторении и дальнейшем развитии того, что им уже хорошо известно из прежних занятий. Действительно, дальнейшие арифметические выкладки над большими числами отличаются от первоначальных выкладок над числами малыми только своей сложностью, но не особой теорией. Вся сила состоит в умении сокращать; отсюда и получили начало некоторые частные приемы и правила. Впрочем число последних должно быть ограничено, и не следует в арифметику, преподаваемую детям, вводить подробные общие исследования о первых числах, о нахождении наибольшего делителя двух или более чисел, или о делимости чисел, что прилично может занимать возрастных воспитанников, и то только по ознакомлении их с алгеброй, когда снова должно будет повторить с ними курс арифметики, рассматривая ее, вообще, как частный случай науки исчисления. Тем менее пропорции, извлечение квадратных и кубических корней должны входить в состав курса первоначальной арифметики; для частных применений этого рода вопросов настоящее место в геометрии.

Такой ход преподавания, выведенный прямо из наблюдений над постепенным развитием ума, условливает многократное повторение изученных свойств или действий науки, но повторение не однообразное, которое обыкновенно наскучает детям и усыпляет их умственную деятельность, а всякий раз вмещающее в себе больший круг обзора с приобщением много нового, что находится, впрочем, в непосредственной связи с пройденным или прямо вытекает из него. Время употребится то же, какое употребляется на частное, голословное повторение пройденного, но результат, конечно, будет не тот: ибо ученик, при всяком новом повторении ставится здесь в различное положение и от него все более и более требуется рассуждение. С другой стороны, этот ход учения как нельзя лучше будет соответствовать и с разными степенями возраста воспитанников, в переходе развития вообще от внешней природы к внутренней.

Но сюда следует отнести два важные замечания, которые никогда не должно терять из вида. Если старинная метода преподавания арифметики, существовавшая в школах до Песталоцци, слишком утомляла учеников и усыпляла их умственные способности механическими выкладками над большими числами, то и сам Песталоцци и его последователи впали в другую крайность: они придали так называемым изустным исчислениям (головным счетам) слишком большую важность, оставив в небрежении цифровое письмо, и таким образом, вместо того чтобы теснее связать оба рода исчислений над числами, изустно и цифрами, разрознили их чрез введение многих лишних приемов. Надобно стараться избегать этой знаменательной ошибки. Приемы должны быть совершенно одинаковы как для исчислений цифрами, так для головных счетов; иначе это только будет сбивать учеников. Уже в первой степени, при исчислении самыми малыми числами, должно употреблять цифры так, чтобы всякая задача была непременно решаема и тем и другим способами; только тогда головные счеты получат настоящее свое значение и принесут ту пользу, какую сам Песталоцци имел в виду, когда вводил их в элементарное преподавание.

Не менее заслуживает упоминания еще одно замечание: это привычка некоторых преподавателей задавать ученикам, во-первых, слишком сложные задачи, часто неимеющие никакого приложения к жизни, как думают, для возбуждения остроумия в учащихся. И то и другое нередко не достигают своей цели: задачи слишком сложные только затрудняют маленького, неопытного счетовода, а в классе при множестве учеников и самого учителя ставят в невозможность проверять работы учеников с надлежащей точностью; задачи замысловатые переходят по большей части за ту степень мышления, какую можно требовать от детей, неспособных вообще к запутанным комбинациям. К чему, спрашивается, преждевременно насиловать детские способности над решением таких вопросов, которые впоследствии, когда ученики ознакомятся с алгеброй, не представят для них особой трудности? Если большая часть класса затрудняется решить какой-либо вопрос, то лучше отложить его до другого времени, нежели настаивать, чтобы дети решали его с большой потерей всегда драгоценного в преподавании времени. Внимательное наблюдение доказывает, что такого рода задачи решаются в классе обыкновенно немногими учениками, и то только с помощью учителя; часто помощь эта бывает так велика, что учитель расскажет все решение задачи, а ученики затвердят это решение напамять; сколько же в таком процессе выигрывает собственно развитие способностей? Конечно, немного, если вовсе ничего.

Повторяем, оба изложенные здесь замечения заслуживают строгого тщательного внимания со стороны преподавателя.

(Из книги «Практическая арифметика». Составил П. С. Гурьев. Книга 2: высший курс. Третье издание, исправленное и дополненное. С.-Петербург 1881. Ст. «Арифметика», стр. XLIV—XLVIII.)

В. Евтушевский.

Расположение учебного материала арифметики должно быть концентрическое.

Предмет учебный тогда имеет действительное влияние на развитие умственных способностей учащихся, когда он основательно усваивается учащимися, когда он переходит через сознание в область памяти и делается окончательно достоянием учащегося. Для основательного же усвоения учебного предмета во всех его подробностях необходимо, как изложено в первой главе нашего введения, возможно частое повторение одного и того же под различными видами и в комбинации с новым; тогда старые представления и понятия становятся все прочнее, а новое легко связывается со старым, будучи предложено в небольшом объеме и в тесной связи со старым материалом. Следовательно, прочному усвоению учебного материала содействует концентрация его расположения при прохождении курса. Исходя от самой сущности предмета, составляющей центр учебного материала, располагают этот материал по постепенно расширяющимся кругам, представляющим по содержанию целые, законченные и однородные курсы и отличающиеся постепенным возрастанием объема и усложнением материала. Каждый предшествующий курс служит таким образом подготовкой для курса последующего, а последующий — повторением и распространением предшествовавшего.

Центр учебного материала арифметики есть изучение состава и свойств числа и действий с числом. Изучение целого числа в элементарном курсе концентрируется так:

1) числа от 1 до 10, рассматриваемые по их составу, взаимным отношениям и действиям;

2) числа до 20 — этот курс есть только расширение первого;

3) числа до 100 — курс представляет пополнение и расширение прежних и сводит в систему различные соотношения и комбинации чисел посредством выделения и группировки действий;

4) составные именованные числа в пределе числа до 100 — этот курс представляет материал для применения и обобщения первых трех и вводит выделение самых приемов совершения действий с числом;

5) целые числа любой величины — курс, отличающийся от прежних возрастанием числа и требующий окончательного установления механических правил и приемов для письменного вычисления с большими числами.

После такого обстоятельного знакомства ученика с целым числом курс обыкновенных дробей концентрируется в два курса:

1) элементарный курс дробей, в котором на основании всего пройденного устанавливается понятие о дроби и ее свойствах, и производятся четыре действия

с дробями не по механическим правилам, а на основании знакомства с числами первой сотни и со свойствами дроби; 2) систематический курс простых дробей.

Весь же курс арифметики, как видно из первого тезиса, располагается в трех больших концентрах:

1) приготовительный, или элементарный;
2) систематический;
3) повторительный в старшем классе.

Таким образом, постепенно расширяясь, усложняясь и повторяясь, курс арифметики усваивается окончательно учеником как теоретически, так и практически, в виде стройного, последовательного и неразрывного ряда теорем и их приложений. При этом, спешу оговориться, что при таком расположении курса я имею в виду не легкость усвоения учеником учебного материала, а доступность и через то хорошее влияние обучения на умственное развитие.

(В. Евтушевский, Методика арифметики, изд. 1881 г., стр. 77—78.)

А. Гольденберг.

Последовательность в изучении арифметических действий.

Постараемся разъяснить, в какой последовательности дети должны быть обучаемы производству арифметических действий.

Элементарные свойства чисел, на которых основаны способы вычисления, принадлежат к общим свойствам, т.е. к таким, которые одинаково относятся ко всем числам и не зависят от места, занимаемого тем или другим числом в естественном ряде чисел.

Когда, например, мы для сложения 3 и 4 последовательно присчитываем к первому числу единицы второго, то пользуемся уже здесь тем самым свойством чисел, которое применяем, когда складываем, например, числа 4325 и 268. Разница заключается лишь в том, что в первом случае второе слагаемое 4, будучи не больше десяти, не подлежит десятичному расчленению, между тем как во втором случае второе слагаемое 268 представляет сумму единиц различных разрядов; этим десятичным составом второго слагаемого мы и пользуемся, чтобы придать его к первому слагаемому, а потому последовательно прибавляем число 200, 60 и 8.

Вследствие того что десятичная группировка не может быть применена к числам, которые не больше десяти, не существует сокращенных приемов для производства действий над числами в пределе первого десятка. На этом основании вполне естественно выделить в особую рубрику «действия над числами в пределе первого десятка» и начинать обучение детей счислению с упражнений в производстве действий, данные и результаты которых не больше десяти.

В этом пределе каждое число рассматривается как группа одноименных единиц, каждое число обозначается особым знаком, и все действия над числами, по необходимости, сводятся к счету. Кроме того, все результаты всех действий в пределе первого десятка мы должны помнить: иначе нам пришлось бы постоянно прибегать к инструментальному счету, чтобы каждый раз добывать результаты, в которых неизбежно будет предстоять надобность при выполнении действий над числами, большими десяти.

Нечто другое представляют, относительно производства действий, числа большие десяти, но не большие ста. В этом пределе является необходимость в новой сложной единице счета; приходится рассматривать число, как состоящее из двух групп единиц различных разрядов (из простых единиц и из десятков); действия сводятся к ряду действий над числами первого десятка, на образование из простых единиц сложных и на раздробление сложных единиц в простые.

Так как однозначные числа не подлежат расчленению на десятичные группы, то для выполнения действий над ними не существует сокращенных способов вычисления, основанных на пользовании десятичным составом чисел; другими словами, нет правил для производства действий над однозначными числами. Вследствие этого необходимо помнить так называемые таблицы сложения и умножения однозначных чисел; а также и соответствующие им таблицы вычитания и деления, иначе пришлось бы прибегать постоянно то к инструментальному счету (при сложении и вычитании), то к последовательному сложению (при умножении), то к последовательному вычитанию (при делении), чтобы каждый раз добывать результаты, отмеченные в таблицах сложения, вычитания, умножения и деления однозначных чисел.

Во всех остальных случаях результат действий над числами в пределе до ста получается применением сокращенных способов, основанных на пользовании десятичным составом чисел. Итак, при производстве действий в пределе первой сотни чисел особенности десятичного счисления находят себе применение, хотя и не во всех случаях.

Что касается до чисел больших ста, то для производства действий над ними является уже необходимость в системе сложных счетных единиц, и приходится рассматривать числа как совокупности единиц различных разрядов. Действия над числами любой величины приводятся во всех случаях к ряду действий над десятичными группами данных чисел; за пределом первой сотни чисел особенности десятичного счисления находят себе полное применение.

Все только что изложенное относительно пользования десятичным расчленением чисел при производстве арифметических действий приводит нас к следующему ответу на поставленный выше вопрос: «обучение детей счислению целесообразно распределить на три ступени: 1) обучение производству действий в пределе до десяти, 2) обучение производству действий в пределе до ста и 3) обучение производству действий над числами, большими ста».

(Из «Предисловия» к методике начальной арифметики, изд. второе, 1886 г., стр. III—XII).

К. П. Арженииков.

Обоснование концентров.

Учебный материал курса начальной арифметики располагается следующими концентрическими отделами: 1) первый десяток, 2) первые два десятка, 3) круглые десятки до ста, 4) первая сотня, 5) первая тысяча, 6) числа любой величины.

Рассмотрим подробнее, чем характеризуется каждый из этих отделов, и какие познания должны быть приобретены изучением каждого из них.

1. Первый десяток. По отношению к нумерации отдел этот характеризуется отсутствием понятия о сложной единице и о местном значении цифр: каждое число первого десятка, представляя собой только группу простых единиц (точно так же рассматривается здесь и десяток), имеет особое название (не составленное из названий других чисел) и изображается особым знаком (обозначение 10 указывается здесь без всяких пояснений о местном значении цифр и нуля). По отношению к действиям особенность этого отдела та, что все действия выполняются тут не по правилам (при которых числа разлагаются на десятичные группы), но сначала — сложение и вычитание — путем присчитывания и отсчитывания по единице, а потом на основании уже усвоенных памятью результатов: умножение при помощи сложения, деление при помощи сложения, вычитания и умножения. По изучении этого отдела должны быть усвоены напамять: половина всей таблицы сложения, половина таблицы вычитания, небольшая часть таблицы умножения и небольшая часть таблицы деления, заключенные в пределах десяти[1].

Проходя этот отдел, дети научаются правильно называть числа первого десятка в восходящем и нисходящем порядке и вести прямой и обратный счет на предметах: изучают цифры; знакомятся с понятиями «прибавить», «отнять», «повторить», «разделить», «сколько раз содержится» и с приемами выполнения действий, выражаемых этими словами; научаются обозначать действия знаками и применять их к решению практических вопросов-задач.

2. Первые два десятка. Главная цель этого отдела — закончить таблицы сложения и вычитания, половина которых уже знакома ученикам после изучения первого отдела. Вторая половина таблиц сложения и вычитания составляется, как было упомянуто раньше, на основании твердого знания половины этих таблиц, заключенной в пределах первого десятка. Так, например, сложение 7+5 мы производим, сразу дополняя 7 до 10 прибавлением 3 и затем придавая к 10 остальные 2 единицы; чтобы сделать вычитание 15—8,

---

[1] Новейшие методические течения относят первое знакомство с умножением и делением ко второму десятку, оставляя в пределе первого десятка изучение только сложения и вычитания; такой порядок изучения действий, принятый и в программе советской начальной школы, нужно считать наиболее целесообразным. — *А. П.*

отнимаем от числа 15 его 5 единиц и потом из 10 сразу вычитаем остальные 3 единицы.

Затем в этом отделе имеют место и внетабличные случаи сложения и вычитания, как, например, 12+5, 16+4, 3+15, 7+13, 17—4, 20—8, 19—15, 20—17. Здесь уже приходится данные числа разлагать на десяток и на единицы, а потому такие случаи внетабличного сложения и вычитания уже намечают пользование десятичным составом чисел и служат подготовкой к приемам сложения и вычитания в пределах сотни.

Сложение и вычитание в пределах таблиц и вне их дают возможность подвинуть далее и таблицы умножения и деления.

Рассматриваемый концентр делает шаг вперед и в изучении нумерации. Правда, здесь нельзя дать понятия о десятке как о сложной единице: десяток является здесь один или в соединении только с другим десятком; счет десятками тут не производится, а это необходимо, для того чтобы дети могли смотреть на десяток как на счетную единицу. Но все же здесь происходит выделение десятка как группы, к которой присоединяются первые девять единиц. При письменном обозначении таких чисел уже намечается местное значение цифр: десяток пишется слева — на втором месте, единицы справа — на первом месте.

Заметим, что в пределе от десяти до двадцати имеют место имена числительные, представляющие ту особенность, что название единиц предшествует в них названию десятка и сливается с ним в одно слово: одиннадцать, двенадцать и т. д.

3. Круглые десятки до ста. Главная цель этого отдела: 1) приучить детей смотреть на десяток как на единицу, что весьма важно для последующего усвоения понятия о сложных единицах и о десятичном составе чисел, и 2) развить дальше уже намеченное понятие о местном значении цифр в связи с понятием о сложной единице: десятки пишутся на втором справа месте, единицы — на первом; если единиц нет, их место должно быть отмечено нулем.

В смысле приемов вычисления этот отдел ничего нового не дает; здесь повторяется на десятках лишь то, что пройдено было на единицах в пределах десяти: к 5 прибавить 3, будет 8; к 5 десяткам прибавить 3 десятка, будет 8 десятков, или к пятидесяти прибавить тридцать, будет восемьдесят: 50+30=80 и т. д.

4. Первая сотня. Главной целью этого отдела служит изучение таблиц умножения и деления, небольшая часть которых пройдена в первых двух отделах. Намеченные во втором отделе приемы сложения и вычитания, при которых данные числа разбивались на десяток и на единицы, получают здесь дальнейшее развитие в применении к сложению двузначного числа с двузначным и к вычитанию двузначного числа из двузначного. Овладевши приемами сложения и вычитания в пределе сотни, дети продолжают и заканчивают составление и изучение таблиц умножения и деления.

Кроме табличного умножения и деления, в пределах сотни имеют место также случаи внетабличного умножения двузначного числа на однозначное и обратно и внетабличного деления двузначного числа на однозначное и двузначного на двузначное, как, например, 24×4.

3×32, $72:2$, $84:21$. Такие умножения и деления служат подготовкой к приемам умножения и деления в дальнейшей области чисел.

Более полное развитие получает в этом отделе и нумерация. В пределе 20, как сказано выше, не могло быть дано понятие о десятке как о счетной единице, так как там не имел места счет десятками; это понятие уяснено в отделе круглых десятков; но здесь дети имели дело с числами, состоящими только из десятков, при отсутствии простых единиц. В отделе сотни уже явно выступает десятичный состав чисел: появляются числа, состоящие из счетных единиц, наличность которых ведет к дальнейшему уяснению местного значения цифр.

Арифметика первой сотни представляет собой как бы отражение, в уменьшенном виде, всего курса начальной арифметики в его главных чертах, чего нельзя сказать ни об одном из предшествующих отделов. В самом деле, пройдя арифметику первой сотни, ученики: а) получают понятия об единицах разных порядков — о простой единице и десятке — и о местном значении цифр; а в этих понятиях и заключается сущность нумерации; б) усваивают таблицы всех действий, т. е. те элементы вычисления, которые должны быть удержаны памятью; в) знакомятся с такими приемами внетабличного выполнения действий, которые основаны на пользовании десятичным составом чисел и от которых потом легко перейти к правилам производства действий над числами любой величины. Все эти сведения приобретаются в теснейшей связи с уяснением значения каждого действия в смысле применения его к различного рода вопросам-задачам и прилагаются к решению задач, требующих выполнения одного или нескольких действий.

5. Первая тысяча. Говоря выше о причинах выделения первой тысячи, мы указали вместе с тем и цель, которая должна быть достигнута изучением этого отдела,— это подготовка к нумерации чисел любой величины, которая при трехразрядной классификации сводится к нумерации первого класса, т. е. чисел первой тысячи.

На область первой тысячи легко распространяются приемы выполнения четырех действий, уже знакомые детям по изучению первой сотни.

6. Числа любой величины. После прочного усвоения нумерации и приемов вычисления в пределе тысячи изучение нумерации чисел любой величины и вывод правил действий над такими числами являются делом весьма нетрудным.

Здесь придется обратить особенно внимание на правильное, аккуратное и возможно изящное расположение записей как при отдельных действиях, так и при выполнении ряда действий, необходимых для решения задач.

Как было сказано выше, вычисления с именованными числами, простыми и составными, — раздробление, превращение и четыре действия, — не образуя особого отдела, размещаются в разных концентрах курса. Здесь, в отделе чисел любой величины, дополняются, расширяются и приводятся в систему те сведения о составных именованных числах, которые приобретены учениками при изучении предшествующих отделов.

(Арженикову, Методика начальной арифметики, изд. 1916 г. стр. 77—81.)

3. МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

В этой главе приведены некоторые, наиболее ценные высказывания методистов дореволюционной школы по актуальным вопросам методики изучения целых чисел. Статья Эрна «Возникновение у ребенка понятия о числе» дает удачное разрешение одного из самых спорных и вместе с тем очень интересных вопросов в методике арифметики, от разрешения которого зависит вся постановка изучения первого десятка. В статье «Изучение числа четыре» ярко вскрыта специфика методики изучения чисел, талантливым представителем которой был Евтушевский; эта статья имеет не только историческое значение — показанные в ней приемы ч а с т и ч н о могут быть использованы и в практике современной школы при изучении первого десятка. В статье «Знакомство с разностным сравнением» Гольденберг с обычной для него краткостью, ясностью и простотой изложил методику объяснения одного из трудных в арифметике понятий—разностного отношения чисел; предложенный Гольденбергом прием получил затем всеобщее признание и широкое распространение в школьной практике. В этой статье ярко отражен характерный для методики Гольденберга порядок работы: а) выяснение математического понятия на наглядных пособиях; б) упражнения в применении этого понятия без наглядных пособий (на отвлеченных числах); упражнения в решении задач с применением усвоенного понятия. Заслуживает внимания тот факт, что уже на этой (ранней) ступени задача разобрана у Гольденберга аналитическим методом.

По вопросу об изучении таблицы умножения накопилась богатейшая литература, и в этой литературе едва ли не самым лучшим является высказывание Беллюстина. Достоинство рекомендуемых им приемов для изучения таблицы умножения заключается в единстве принципа составления таблицы (набирание групп путем удвоения), в правильности основных установок (основное — в составлении и усвоении таблицы), в простой и ясной трактовке всего этого вопроса. Статья не утратила своего значения до сих пор.

Статья Евтушевского о нумерации только частично сохранила свое практическое значение до настоящего времени; последующие методисты разработали этот вопрос более глубоко и тщательно. Статья эта имеет исторический интерес: она показывает, какое большое значение придавалось Евтушевским наглядности обучения, какой большой скачок был сделан им по сравнению с его ближайшими предшественниками и даже некоторыми современниками, дававшими нумерацию в систематическом освещении.

Деление является самым сложным и трудным арифметическим действием. Методической разработке этого вопроса уделялось большое внимание всеми методистами. Из них наиболее обстоятельное, подробное, почти исчерпывающее освещение этого вопроса дал Шохор-Троцкий, высказывания которого с некоторыми сокращениями даны в настоящей главе. То же нужно сказать о методической разработке вопроса об изменении результатов действий в связи с изменением данных: наилучшее освещение этого вопроса мы находим у Егорова, высказывание которого помещаем здесь же.

Статья Л. Н. Толстого «О признаках делимости» приведена нами для характеристики стиля его «Арифметики», отличительной чертой которого была своеобразная («толстовская») простота изложения.

Ф. А. Эрн.

Возникновение у ребенка понятия о числе.

Нам думается, что как теория непосредственного восприятия числа, так и теория счета страдают излишними крайностями и односторонностью. Эти крайности и односторонность являются, по нашему мнению, следствием того, что каждая теория старается объяснить возникновение понятия о числе на основании о д н о г о п р и н ц и п а; одна строит в с е на наблюдении и сравнении конкретных групп предметов и совершенно отрицает значение счета; другая кладет в основу понятия о числе только счет и не придает никакого значения связи понятия числа с понятием совокупности. Между тем, уже логический анализ понятия числа показал нам, что это понятие тесно связано как с понятием о совокупности, так и со счетом; поэтому и психологическая теория возникновения понятия «число» может быть, по нашему мнению, правильно построена только в том случае, если обоим принципам будет отведено подобающее им место. Необходимо из каждой теории взять то, что в ней есть бесспорно верного, необходимо сгладить противоречия, основанные иногда только на различном понимании тех или других терминов.

Так, прежде всего можно считать вполне установленным, что понятие о числе вообще образуется путем абстракции.

Но, с другой стороны, вряд ли можно допустить, чтобы счет не играл никакой роли при образовании понятия о числе. Путем сравнения двух совокупностей в количественном отношении мы можем выработать понятие о числе вообще, но чтобы ответить на вопрос, сколько именно предметов в той или другой совокупности, т. е. для возникновения понятия об определенном числе, необходимо элементы этой совокупности сосчитать, т. е. выделить из совокупности каждый отдельный предмет и объединить все выделенные объекты в одно целое, закрепляя это целое в нашем сознании соответствующим именем числительным.

Такое знание счета полезно уже при знакомстве с первыми числами 2, 3, 4. При ознакомлении со следующими числами первого десятка счет, разумеется, еще более необходим, но опять-таки и в этом пределе нельзя отрицать совершенно полезности наблюдения конкретных совокупностей и сравнения их между собой: разложение данной совокупности на несколько более мелких групп должно облегчать счет, делая его более наглядным и способствуя выделению в каждой группе отдельных предметов.

Таким образом, на первой ступени обучения, при ознакомлении детей с числами первого десятка необходимо пользоваться как наблюдением конкретных групп, так и счетом предметов, входящих в состав этих групп; мы вполне присоединяемся в этом отношении к д-ру Гартману, утверждающему, что «при первоначальном преподавании арифметики подобающее место должно быть отведено и счету; но «счету» не как таковому, ибо это повело бы только к заучиванию наизусть числительных, а «счету», дополняющему «наблюдение» и преобразующему содержание и представление объектов в «содержание и представление чисел».

Нужно отметить, что за последнее время в методике арифметики заметно стремление объединить основные принципы обеих теорий; появляются сочинения по методике и сборники задач, в которых монографическое изучение чисел первого десятка путем наблюдения и сравнения конкретных совокупностей идет параллельно с упражнениями в счете. Такое построение курса арифметики на первых ступенях обучения не только способствует лучшему выяснению понятия о числе, но и делает занятия арифметикой более интересными и живыми благодаря большему разнообразию упражнений.

Весь процесс возникновения в сознании ребенка понятия о числе, или «числового представления», протекает, по нашему мнению, приблизительно следующим образом:

1) Наблюдая различные конкретные группы, состоящие из небольшого числа более или менее однородных предметов, ребенок вырабатывает представления об этих совокупностях.

2) Подмечая признаки различия и сходства между отдельными предметами небольшой совокупности, выделяя из нее каждый отдельный предмет и объединяя все предметы в одно целое, ребенок доходит до «числовых представлений»: один, два, три, может быть, четыре или до понятия о соответствующем (конкретном) числе.

3) Наблюдая бо́льшие совокупности, ребенок не может сразу при помощи одних внешних чувств подметить количественный признак этих совокупностей. Чтобы составить ясное и отчетливое представление о числе предметов таких совокупностей, необходимо как и при малых совокупностях путем анализа и синтеза выдвинуть на первый план количественный признак совокупности; но для совокупностей, состоящих более чем из 3—4 предметов, этот анализ и синтез может быть произведен только при помощи счета, причем разложение больших совокупностей на малые, уже хорошо известные детям группы, может значительно облегчить счет; и, наконец,

4) путем непосредственного сравнения двух совокупностей, причем внимание отвлекается от всех качественных признаков предметов, устанавливается новое (количественное) о т н о ш е н и е, в котором совокупности могут быть равны или не равны между собой. Познание этого количественного отношения дает понятие о числе вообще, зарождает идею об отвлеченном, неопределенном числе.

§ 16. **В ы в о д ы д л я м е т о д и к и н а ч а л ь н о й а р и ф м е т и к и.**

Из всего вышеизложенного вытекают следующие выводы:

1) детям не следует давать н и к а к и х о п р е д е л е н и й (словесных) понятий: число, единица, счет и прочее, так как, во-первых, эти понятия не поддаются точному и правильному логическому определению, и, во-вторых, даже правильные с точки зрения логики определения были бы совершенно недоступны пониманию детей и ничуть не способствовали бы уяснению самих понятий.

2) Для полного ознакомления детей с числами первого десятка и для выяснения понятия о числе необходимы планомерные наблюдения конкретных групп предметов и упражнения на числовых фигурах; но эти упражнения должны сопровождаться упражнениями в счете. Наглядные пособия при этом должны играть чрезвычайно важную роль.

(Ф. А. Э р н, Очерки по методике арифметики, изд. второе, 1915 г., § 15, «Соединение принципов обеих теорий», стр. 22—25).

В. Евтушевский.

Изучение числа четыре.

Начиная с числа четыре, я уже провожу упражнения в стройной системе, хотя вовсе не хочу этим сказать, что упражнения нужно систематизировать, начиная именно с этого числа. Последнее зависит вполне и от учеников, и от учителя. Многие дети из собственного житейского опыта выносят уже до 6 лет такое хорошее знание многих отношений чисел первого десятка, что достаточно, для приведения в порядок и окончательного закрепления этих сведений, предложить им несколько задач и вопросов на число, стоящее на очереди, чтобы убедиться в том, что кропотливое изучение числа по систематически расположенным упражнениям совершенно излишне и может наводить на учащихся скуку и отвращение к работе. Следовательно, вводя систему при изучении числа четыре, я имею в виду только начать знакомить самого учителя с тем порядком упражнений, которого, по моему мнению, следует держаться при изучении чисел первого десятка.

Весьма важно для расположения упражнений при изучении отдельного числа выбрать самое простое и вполне естественное исходное начало, понятное всякому учащему детей, и затем распределить все упражнения так, чтобы одно вытекало из другого и одно дополняло другое.

За такое начало, дающее направление всей работе как при изучении чисел первого десятка, так и при изучении чисел всей сотни, я принимаю разложение изучаемого числа на слагаемые. Сложение есть основное арифметическое действие — все прочие действия происходят из него путем упрощения вычисления. Желая быть вполне понятным, я хотя вкратце поясню эту простую мысль. Вычитание чисел производится легко и просто посредством сложения и есть не что иное, как упрощение этого последнего посредством запоминания таблички сложения: кто знает хорошо, что 5 да 3 составит 8, тот также хорошо знает, что 8 без 5 будет 3. Например, из 25 вычесть 17 можно посредством сложения двумя способами:

а) постепенным прибавлением к вычитаемому по единице до тех пор, пока оно сравняется с уменьшаемым; оказывается, что 17 разнится от 25 на 8 единиц;

б) прибавлением к вычитаемому чисел наугад, сначала 2, потом еще 3, потом еще 2, пока получится число, равное уменьшаемому. Значит, видоизменение в нашем примере сложения в противоположное ему действие — вычитание в том только и состоит, что мы или на основании многих упражнений в подобном сложении, или на основании простого заучивания наизусть навсегда закрепили в памяти, что 15 без 7 будет 8 (так как 25 и 17 имеют оба по общему десятку, следовательно, приходится сравнивать только 15 и 7), и затем пользуемся этим знанием при всех дальнейших вычислениях.

Что умножение есть сложение, упрощенное посредством известной наизусть таблицы сложения чисел, взятых несколько раз слагаемыми, это без сомнения известно всякому, знающему это действие. Складывая по 6 пять раз, мы запоминаем, наконец, что пятью шесть будет тридцать, или просто выучиваем напамять эту комбинацию.

Деление чисел производится непосредственно через сложение делителя, который берется последовательно слагаемым до тех пор, пока в окончательной сумме получится число, равное делимому, или разнящееся от него на число, меньшее делителя. Такое продолжительное сложение делителя заменяется, для упрощения вычисления, умножением его на такое число, что в произведении получается число, равное делимому или отличающееся от него на число, меньшее делителя, и эта разность полученного произведения от делимого определяется уже посредством вычитания.

Таким образом, не знающий никакого другого действия, кроме сложения, может все четыре арифметические действия производить посредством одного этого действия. Это обыкновенно и осуществляется на практике на торговых счетах, для чего существуют и руководства.

Но мысль об упрощении действия может явиться у учащихся только тогда, когда они усвоили действие основное, из которого посредством упрощения и вытекают все другие; притом необходимо, чтобы эти упрощения и обобщения в новые действия возникали естественно, без натяжки и постепенно. Для естественности возникновения из основного действия других трех служит принятый мною порядок упражнений при изучении отдельного числа, а для постепенности служит расположение всего курса изучения чисел первой сотни. Внимательно знакомящийся с моим методом учитель удобно может проследить то и другое по самому курсу.

Таким образом, принимаемое мною основное начало изучения числа, именно состав его из слагаемых, совершенно разнится от основного начала Грубе — сравнения изучаемого числа со всеми предшествующими, и при моем приеме изучения числа таблички сравнения чисел, предлагаемые Грубе, становятся лишними, так как они заключаются в моем разложении числа на слагаемые.

При изучении отдельных чисел первого десятка упражнения располагаются в таком порядке:

1) Образование нового числа прибавлением единицы к числу предшествовавшему.

2) Разложение числа на составляющие его слагаемые самими учениками при посредстве наглядных пособий.

3) Приведение в порядок разложения, сделанного учениками. Для закрепления этого порядка в сознании учеников служат письменные упражнения посредством черчения на досках или в тетрадях черточек, кружков, крестиков и т. п., а потом и посредством цифр и знака действия.

4) Вопросы по поводу сделанного и приведенного в порядок разложения для сравнения изучаемого числа с каждым из предшествовавших и для вывода и закрепления в памяти всех отношений его к предшествовавшим числам и комбинаций с ними, выраженных четырьмя арифметическими действиями.

5) Решение практических задач для большего закрепления в памяти изучаемых на основании 3-го и 4-го упражнений отношений

чисел и приложение усвоенного в отвлеченном виде знания к частным практическим случаям. Ученик в задаче должен открыть известное соотношение между данными числами и приложить свое знание к определению результата этого соотношения.

6) Беглое устное вычисление формул и вопросы вразбивку, относящиеся прямо к числу отвлеченному, для повторения всего пройденного о числе и преимущественно для сравнения между собой чисел в кратном их отношении.

Упражнения второе и третье после изучения трех или четырех чисел могут быть соединены в одно, потому что ученики навыкают делать разложение рассматриваемого числа на слагаемые сразу в порядке. Потом иногда знакомство с новым числом можно производить и без наглядных пособий, предлагая ученикам делать разложение числа устно или письменно.

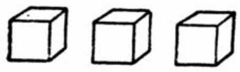
Все упражнения при изучении чисел первого десятка сначала производятся без помощи цифр и знаков действий, которые вводятся, когда уже весь десяток пройден, для повторения всего пройденного, как это видно будет из самого курса.

Не останавливаясь более на подробном теоретическом выяснении значения и применения всех перечисленных упражнений с видоизменениями, я считаю за более удобное выяснить все это на практике при изложении курса, к которому теперь и перехожу.

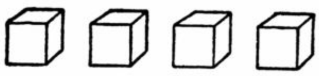
Четыре.

1) Образование числа.

На верхней планке доски учитель ставит три кубика вместе.



Сколько здесь кубиков? (Потом приставляет четвертый кубик). А теперь сколько?



Как же составляются четыре кубика из трех и одного?

Нужно к трем кубикам прибавить, приставить один кубик.

2) Разложение на слагаемые.

Как можно составить четыре кубика? или: Как четыре кубика можно разложить?

Четыре кубика можно разложить на два и два.

Четыре кубика можно составить из одного, одного, одного и еще одного, или взять четыре раза по одному кубику.

Четыре кубика можно разложить на три и один.

Можно составить из одного, одного и двух.

Можно ли еще как-нибудь иначе разложить четыре кубика? Ученики убеждаются, что никакого другого отличного от этих разложения быть не может. Если ученики станут еще разлагать четыре кубика таким образом: один, два и один, или два, один и один, или один и три, то учителю легко им показать, что эти разложения составляют повторение уже имеющихся разложений, только в другом порядке.

Всякий раз по указании нового приема разложения, предложенного учениками, учитель на одной из пластинок доски выставляет кубики в том виде, как они изображены здесь. Таким образом в нашем случае на верхней планке будут стоять четыре кубика вместе, на второй два и два, на третьей четыре кубика раздельно на некотором расстоянии один от другого, на четвертой три и один и на пятой один, один и два.

3) Разложение в порядке.

Весьма может случиться, что дети сразу укажут разложение числа на слагаемые в порядке; но и тогда третье упражнение нельзя считать лишним. Для установления порядка в разложении предлагаются классу такие вопросы:

Вот вы составили четыре кубика из двоек, из отдельных кубиков и из троек; в каком порядке лучше поставить нам кубики на доске? С чего начать разложение четырех кубиков? С разложения на отдельные кубики.

Как составить четыре кубика из отдельных кубиков? Надо взять четыре раза по одному.

Как составить четыре кубика из двоек, из пар?

Нужно взять две двойки; два раза по два кубика; две пары кубиков.

Как потом составить четыре кубика? Можно составить из троек; для этого взять три и один, или один и три.

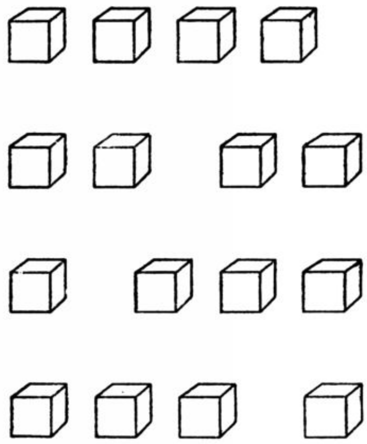
Выясняется ученикам, что последнее разложение, то-есть $1+1+2$, не подходит под принятый порядок и есть видоизменение одного из первых трех. Таким образом, путем самого разложения числа на слагаемые ученики сравнивают его с 1, с 2 и с 3. Учитель во время разговора с учениками располагает постепенно на классной доске эти разложения уже в порядке, то-есть:

На первой планке

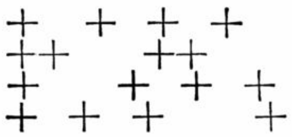
На второй

На третьей

На четвертой



Так как это упражнение есть основное и самое важное при изучении числа, то для закрепления в памяти учеников сделанных разложений им предлагаются упражнения письменные на досках или в тетрадях. Письменная работа учеников состоит в разложении того же числа посредством черточек, крестиков, кружков и пр. Кубики снимаются с классной доски, и по требованию учителя: «Возьмите ваши доски и разложите ч е т ы р е посредством крестиков так, как мы разлагали на классной доске четыре кубика», дети напамять разлагают четыре таким образом:



В случае ошибки или беспорядка в разложении, или, наконец упущения одного из разложений, учитель поправляет учеников, проверяя их работу. Проверка эта производится так: обойдя класс и познакомившись бегло с работой каждого, учитель ведет разговор с классом. Кто кончил? Скажите, такой-то, какое у вас первое разложение? У кого первое разложение не такое? Какое второе разложение? третье? Отчего прежде надо разложить четыре на единицы, потом на двойки, тройки? При этом разложении есть порядок, и нельзя пропустить ни одного разложения, а если писать в беспорядке, то легко какое-либо разложение упустить.

Такой-то, сколькими способами разложили вы четыре? Тремя способами. Нет ли у кого еще четвертого разложения?

Затем один ученик, по требованию учителя, читает все разложения, примерно так: четыре состоит из одного, еще одного, еще одного и еще одного; четыре состоит из двух и двух; четыре состоит из трех и одного.

Если учитель замечает, что есть некоторые ученики, которые еще не вполне усвоили состав четырех, то, велев спрятать доску, он обращается ко всему классу и преимущественно к этим ученикам с вопросами: «Из чего состоит четыре? Как составить четыре из кубиков или крестиков, взятых по два? Как составить четыре из единиц?» и т. п.

4) Выводы из предыдущего упражнения.

Третье упражнение, хорошо исполненное, положило прочное основание для всей дальнейшей работы с числом. Последующие упражнения состоят только в расширении понимания учениками сущности сделанных ими разложений числа, в обобщении этих разложений и в упрощении самых выражений и приемов вычислений. Для выводов ученикам предлагаются следующие вопросы:

На сложение и вычитание. Сколько надо прибавить к одному, чтобы получить четыре? Сколько к двум, трем? Сколько будет два да два? Один да три? Три да один?

Сколько раз от четырех можно отнять по одному? Сколько раз по два? по три?

Сколько останется, если от четырех отнять один, два, три?

Сколько единиц недостает одному, двум, трем до четырех?

Чем четыре больше одного, двух, трех?

Сколько останется, если от четырех отнять четыре раза по одному, два раза по два?

На умножение и деление. Сколько раз нужно взять по одному, по два, чтобы получить четыре? Сколько раз нужно повторить два, чтобы составить четыре? Сколько будет дважды два? Четырежды один?

Сколько раз один, два, четыре содержится в четырех?

Во сколько раз четыре больше одного, двух?

Как велика четвертая часть четырех, половина четырех?

Сколько получится, если взять в два раза, в четыре раза меньше четырех?

Таким образом все отношения числа четыре к предшествовавшим числам вытекают сами собой из разложения числа на слагаемые и, следовательно, из знакомства через то учеников с составом числа. В случае затруднения ученика в ответе на предложенный вопрос, учитель пользуется кубиками для наглядного представления ученику того, что его затруднило.

5) Задачи.

Задачи при изучении чисел, как уже сказано, служат для приложения узнанного учениками из предыдущих упражнений к решению чисто практических вопросов. Кроме того, решением задач имеется в виду развитие у учащихся соображения и выработка языка.

Совершенно достаточное собрание задач, составленных главным образом для развития соображения учащихся и требующих приложения самых важных отношений изучаемого числа к другим, имеется в моем «Сборнике арифметических задач и численных примеров для приготовительного и систематического курса», часть 1-я. Задачи на числа первой сотни расположены в «Сборнике» в 10 отделах по десяткам чисел, а в каждом отделе расположены по возрастанию чисел, так что имеется на каждое число по нескольку задач, стоящих в ряд.

В задачах этих условия и данные числа подобраны так, что требуют приложения всех важнейших отношений изучаемого числа к числам предыдущим. Задачи по преимуществу сложные, то-есть требующие для своего решения двух и более действий. В случае надобности учитель сам легко может составлять во время урока простые задачи, требующие для своего решения одного действия. Таких задач я не помещал в «Сборнике», так как они после предшествовавших трех упражнений вовсе не нужны, а если бы и понадобились, то именно только для закрепления в памяти учащихся какого-либо особенно трудного отношения изучаемого числа к другому числу. Но трудность эта является во время урока, и составителю Сборника практических упражнений нельзя предугадать всевозможных частных случаев, являющихся во время работы с тем или другим учеником. Учитель же составит простенькую задачу прямо применимо к данному случаю.

Здесь мне остается только изложить прием решения задачи в классе.

З а д а ч а. Хозяйка купила две пары подсвечников и один из них сломала. Сколько целых подсвечников осталось у хозяйки?

Учитель громко и раздельно читает задачу. Один из учеников повторяет ее. Если окажется, что некоторые ученики не усвоили вполне содержания задачи, то классу предлагаются вопросы: О чем говорится в задаче? О том, что хозяйка купила подсвечники. Сколько подсвечников купила она? Две пары. Что еще известно о подсвечниках? Один она сломала. Что спрашивается в задаче? Сколько целых подсвечников осталось у хозяйки?

Восстановив таким образом в памяти учеников содержание задачи по частям, учитель опять требует повторить ее всю в целости, чтобы части эти были между собой связаны. После этого учитель предоставляет ученикам решать задачу и выжидает, пока все или многие ученики поднятием руки заявят о том, что они задачу решили. Называя одного ученика, учитель спрашивает, что он получил.

О т в е т у ч е н и к а. У хозяйки осталось три целых подсвечника.

Затем, не выражая своего одобрения или неодобрения по поводу полученного ответа, учитель спрашивает то же у другого, у третьего и у прочих учеников, и только, переспросивши всех или многих, заявляет, что такой-то ответ верен. Для сокращения времени при этом выспрашивании можно, получивши ответ одного ученика, спрашивать разом, кто еще получил такой же ответ; то же самое и по поводу другого ответа, отличающегося от первого.

Обыкновенно не все ученики могут решить задачу, и притом решить ее верно, особенно если учитель не может уделить много времени на выжидание ее решения. Да если бы и все решили верно, то иногда следует все-таки выспросить у учеников прием решения задачи. Ответ ученика по этому поводу может быть в окончательном виде сформулирован так: «Хозяйка купила две пары подсвечников, то-есть четыре подсвечника, потому что два раза по два будет четыре; один подсвечник она сломала, значит целых осталось три, потому что четыре без одного будет три».

Без сомнения такую окончательную форму ответ может принять только после решения частных вопросов, предлагаемых классу учителем, каковы:

Что вы прежде всего высчитали? Сколько подсвечников купила хозяйка.

Сколько же получилось? Четыре.

Как вы узнали, что их было четыре? Было подсвечников две пары, что составляет четыре подсвечника.

Почему две пары составляют четыре? Потому что пара подсвечников все равно что два, а два раза по два дает четыре.

Что вы узнали потом? Сколько целых подсвечников осталось у хозяйки, когда она один сломала.

Сколько же осталось? Три.

Как вы получили три? Хозяйка купила четыре подсвечника, один сломала, а четыре без одного будет три.

Расскажите теперь все решение задачи.

Излагая подробно прием решения в классе этой задачи, я вовсе не думаю сказать, что все задачи должны быть разбираемы так подробно. С первого раза достаточно бывает ограничиться одним ответом числа со стороны учеников на вопрос, поставленный в задаче, не анализируя плана решения и вычислений. Затем можно довольствоваться планом решения и числовыми ответами на все вспомогательные неизвестные, и только после решения можно требовать рассуждения при решении задачи и высказывания причины, на которой основано то или другое вычисление.

6) Беглое вычисление и вопросы, относящиеся к числу отвлеченному.

а) Вычисление в форме задач. Учитель предлагает ученикам задачи сложные по числу данных чисел, но простые по условиям, каковы:

Имея четыре яблока, я дал двум мальчикам по одному яблоку, потом купил еще одно яблоко и съел сам два. Сколько яблок у меня осталось?

В саду на скамейке сидели три мальчика; к ним подошел и сел еще мальчик. Сколько мальчиков осталось на скамейке, если две пары пошли гулять по саду?

Ученики вычисляют, по мере того как учитель медленно читает задачу, и по окончании вопроса задачи тотчас дают ответ, т. е. каким-либо условным знаком заявляют, что число готово, а говорит его тот ученик, которого назвал по имени учитель.

б) Вычисление в отвлеченном виде. Учитель говорит:

От четырех отнимаю три, потом прибавляю к остатку два, от полученного числа отнимаю один, к полученному числу прибавляю еще два и все полученное делю пополам. Сколько получилось у меня в каждой половине?

Или: беру два раза два, отнимаю три раза один, к полученному числу прибавляю два и от полученного числа отнимаю один. Сколько раз полученное число содержится в четырех?

Опять-таки ответ учеников должен явиться тотчас по предложении вопроса учителем. Верность и быстрота ответа учеников покажут в этом случае учителю, насколько они овладели числом.

в) Вопросы для повторения. Сколько будет четыре раза один? Однажды четыре? Два раза два? Если взять трижды один, то чего недостает до четырех? Два сколько раз содержится в четырех? Половина четырех чем меньше трех? Сколько будет четыре без трех? без двух? Если от четырех отнять два, то полученное число во сколько раз более единицы? и т. п.

(В. Евтушевский, Методика арифметики, изд. 1881 г., стр. 125—134.)

А. И. Гольденберг.

Знакомство с разностным сравнением.

За упражнениями детей в сложении и вычитании до десяти должно, по нашему мнению, следовать ознакомление их со сравнением чисел в разностном отношении [1].

Учитель велит детям взять, например, три кубика в правую руку и ведет с ними такую приблизительно беседу:

«Возьмите столько же кубиков в левую руку. — Сколько кубиков вы взяли в левую руку? — У каждого из вас в правой и левой руке кубиков поровну. — Возьмите еще два кубика в правую руку. — Сколько у вас теперь кубиков в правой руке? Сколько кубиков в левой руке? — У вас теперь в правой руке и левой руке кубиков не поровну. — В какой руке кубиков меньше? — Что нужно сделать, чтобы в левой руке стало кубиков столько же, сколько их в правой? — Пять кубиков больше трех кубиков на два кубика. — Три кубика меньше пяти кубиков на два кубика. А семь кубиков на сколько больше пяти кубиков? — Почему вы говорите, что семь кубиков на два кубика больше пяти кубиков? (От семи кубиков нужно отнять два кубика, чтобы осталось пять кубиков; к пяти кубикам нужно прибавить два кубика, чтобы стало семь кубиков.) — Как вы узнали, что к пяти кубикам нужно прибавить два кубика, чтобы всего стало семь кубиков? (Отсчитали пять кубиков от семи кубиков — остались два кубика; поэтому к пяти кубикам нужно прибавить два кубика, чтобы стало всего семь кубиков.) — Как узнать, на сколько десять кубиков больше семи кубиков? (Надо отсчитать семь кубиков от десяти кубиков.)»

От упражнений на кубиках учитель переходит к упражнениям без помощи наглядных пособий. Если бы при этом оказалось, что дети, в некоторых случаях, затруднятся дать ответ, или дадут ответ ошибочный, то учитель предлагает им обратиться к помощи кубиков.

---

[1] В конце своей педагогической деятельности Гольденберг говорил: «Полагаю, что уяснение детям понятий, имеющих отношение к разностному и кратному сравнению чисел, должно быть вследствие своей трудности исключено из курса первого десятка.

Хорошо сделают, мне кажется, те из учащих, которые отнесут к средине первого года обучения или даже к концу его разъяснение детям, конечно, наглядно на примерах, тех понятий, о которых идет речь» (А. И. Гольденберг. Беседы по счислению, изд. 1906 г., стр. 49).

Относящиеся к этим упражнениям вопросы учитель задает в такой последовательности:

«На сколько восемь карандашей (грифелей, досок и т. п.) больше трех карандашей? — На сколько единиц восемь единиц больше трех единиц? — На сколько восемь больше трех? Какое число на пять больше трех? — Какое число на три меньше пяти? — Я задумал число, которое на три больше пяти; какое число я задумал?» и т. п.

Когда дети достаточно твердо усвоят себе разностное отношение чисел первого десятка, можно перейти к задачам. В задачах дети знакомятся попутно с выражениями: длиннее, короче; старше, моложе; дальше, ближе и т. п., а также с выражением: двумя (тремя, четырьмя и т. д.) больше (меньше), которое часто употребляют вместо выражения на два (на три, на четыре и т. д.) больше (меньше).

Задачами этой группы учитель может воспользоваться для установления с детьми хода (плана) решения. Так, например, предложив задачу:

«Обоз в первый час прошел четыре версты, а во второй — на две версты больше. Сколько верст прошел он в два часа?», учитель ставит детям такие вопросы:

«Что вы прежде всего должны узнать, чтобы решить задачу? (Мы должны узнать, сколько верст обоз прошел во второй час.) — Можете ли вы узнать это из того, что сказано в задаче? (Можем; в задаче сказано, что обоз прошел во второй час на две версты больше, чем первый, и сказано, что в первый он прошел четыре версты.) —Что вы сделаете, чтобы узнать, сколько верст обоз прошел во второй час? (Прибавим к четырем два.) — Сколько же верст обоз прошел во второй час? (Он прошел во второй час шесть верст.) — Что вы теперь должны узнать, чтобы решить задачу? (Мы должны узнать, сколько верст обоз прошел в два часа). — Можете ли вы теперь узнать, сколько верст обоз прошел в два часа? (Можем; мы узнали, что обоз прошел шесть верст во второй час, а в первый час он прошел четыре версты.)— Что вы сделаете, чтобы узнать, сколько верст обоз прошел в два часа? (Сложим четыре и шесть.) — Сколько же верст обоз прошел в два часа? (Обоз прошел в два часа десять верст.)»

Заставлять детей на первых порах излагать самостоятельно, без наводящих вопросов, весь план решения задачи мы считаем преждевременным, так как подобное изложение требует такого развития речи, которым дети на этой ступени обучения обладать, конечно, не могут.

(А. Гольденберг, Методика начальной арифметики, второе издание 1886 г., стр. 17—18).

С. В. Житков.

Условный смысл выражения

«Увеличить данное число на несколько единиц».

Обратим внимание на условное выражение «увеличить данное число на несколько единиц или на другое данное число». После предыдущего [1] ученики легко понимают, что это выражение означает:

[1] Раньше было выяснено выражение «число на несколько единиц больше данного». — *А. П.*

«к данному числу прибавить несколько единиц или прибавить другое данное число». Отличие действия в этом случае от предыдущего заключается в том, что когда мы отыскивали число, на несколько единиц большее данного, то мы производили прибавление этих единиц не к данному числу, а лишь к числу ему равному (откладывали равное ему на другой планке); когда же от нас требуют увеличить данное число, то прибавление производится именно к этому данному числу (см. гл. XIV, § 3).

Например: «У хозяина было пять коров, а потом число этих коров увеличилось на две. Сколько у хозяина стало коров?»

Для решения этой задачи надо к 5 коровам прибавить 2 коровы.

5 кор.+2 кор.=7 кор.

Возьмем теперь такую задачу:

«У хозяина было 5 лошадей, а коров на две больше, чем лошадей. Сколько коров было у хозяина?»

Ясно, что для решения этой задачи надо к пяти прибавить 2:

$$5+2=7.$$

Семь обозначает число коров, которые были у хозяина, 2 это тоже число коров, так как в задаче сказано, что коров было на 2 коровы больше. Что же такое число 5? Это не то число, которое дано в задаче, это лишь число, ему равное. Действительно, мы рассуждаем так: в задаче сказано, что лошадей было 5, а коров на две больше. Если бы коров было столько же, сколько и лошадей, то у хозяина было бы 5 коров, а их у него не пять, а на две больше; поэтому к 5 коровам (т. е. к новому числу, равному данному в задаче) надо прибавить 2 коровы, чтобы узнать число коров у хозяина. Поэтому наше решение выразится такой записью:

5 кор.+2 кор.=7 кор.

Выяснять ученикам в этом месте курса то, что нами было сейчас сказано, нет необходимости, но при объяснениях своих это надо иметь в виду, чтобы случайно не поселить недоразумения в умах учеников.

В. К. Беллюстин.

Умножение в пределе 100.

Таблица умножения.

12. Содержание этого отдела. В пределе 100 все умножение сводится, главным образом, к составлению таблицы. Умножение двузначного числа на однозначное имеет второстепенное значение. Таблицу умножения ученики должны усвоить, и под этим подразумевается не столько запоминание табличных результатов, сколько работа по составлению таблицы: составляя таблицу различными способами, ученики изощряют свою сообразительность и вместе с тем приобретают навык в быстром счете группами.

13. Подготовка к таблице. Еще при изучении нумерации, сложения и вычитания в пределе 100 должна итти непрерывная подготовка к таблице умножения; ученики должны возможно чаще упражняться в счете парами, пятками и десятками, а также группами в 2, 4 и 8 единиц, в 3, 6, 9 и 7 единиц. Если учитель будет иметь в виду эту заботу о таблице, то умножение однозначных чисел не составит для детей особого труда; если же, наоборот, он вспомнит о таблице только тогда, когда начнется умножение однозначных чисел, то усвоение таблицы представит большие трудности и потребует много времени, и при попытке ускорить дело получится не усвоение таблицы, а простое заучивание табличных результатов.

Повторяем: таблица должна быть усвоена, а не просто заучена; ученики должны не только помнить результаты, но и свободно и уверенно доходить до них. В такой школе, где таблица просто выучивается или где ученики не обладают умением доходить до табличных результатов, там, во-первых, получается сбивчивость и неуверенность, и, во-вторых, упускается чрезвычайно благоприятный случай для развития детской сообразительности.

О простом заучивании таблицы, без хорошей подготовки к ней и без уменья твердо доходить до табличных результатов, не может быть и речи в правильно поставленной школе.

14. Связь умножения со сложением. Связь умножения со сложением учителю надо помнить всегда, до тех пор пока умножение не обособлено окончательно в процессе своего производства, а это случается только в многозначных числах. Для таблицы умножения эта связь выражается в том, что мы составляем таблицу при помощи набирания равных групп; мы сперва ведем счет парами, пятками как наиболее простыми группами, затем четверками, восьмерками и т. д. При этом последовательном набирании множимое, т. е. группа, до тех пор остается неизменным, пока мы не пройдем всех однозначных множителей, т. е. пока не умножим группу на все однозначные числа. А если бы мы изменяли множимое при одном множителе (2×2, 3×2, 4×2 и т. д.), то этим мы отдалились бы от последовательного прибавления равных групп и ослабили бы связь умножения со сложением.

15. Общий порядок счета группами. Последовательный счет группами, например, последовательное набирание шестерок или семерок (т. е. $6+6$, $6+6+6$, $6+6+6+6$, $6+6+6+6+6$ и т. д.) имеет неудобства. Во-первых, оно кропотливо и утомительно; так, чтобы набрать хотя бы 8 семерок, надо по этому способу произвести 7 сложений: $7+7$, $14+7$, $21+7$, $28+7$, $35+7$, $42+7$, $49+7$. Во-вторых, благодаря однообразию набирания, внимание ученика не может останавливаться на некоторых отдельных результатах, и поэтому запоминаться эти результаты не могут сами собой, попутно, и тогда эти результаты приходится заучивать почти механически, без ясно сознаваемой связи их с какими-либо основными результатами, так сказать, с опорными пунктами.

Ведя счет группами, например семерками, мы предпочитаем пользоваться таким порядком набирания. Мы определяем 2 семерки$=14$, затем еще 2 семерки, всего будет 4 семерки: $14+14=28$, затем еще

4 семерки, всего 8 семерок: 28+28=56. Последовательное удвоение— это самый легкий и естественный путь набирания; при нем не тратится лишнего внимания на то, чтобы запоминать слагаемые, так как оба слагаемых одинаковы.

Если идет счет другими равными группами, например шестерками, то путем удвоения мы находим такие результаты: две шестерки=12, 4 шестерки=12+12=24, восемь шестерок=24+24=48. Путем удвоения можно довольно быстро доходить до результатов довольно больших, вроде 9+9=18, 18+18=36, 36+36=72, т. е. 9×8=72.

При этом предполагается, что на сложение равных слагаемых, нужных для нашей цели, было обращено внимание еще тогда, когда проходилось сложение и вычитание в пределе 100.

От последовательного удвоения удобен и легок переход к набиранию 5 и 10 слагаемых. Так, если 8+8=16, то 4 восьмерки составят 16+16=32, следовательно, 5 восьмерок будет 32+8=40, а 10 восьмерок составят 40+40=80.

Таким образом, общий порядок счета группами формулируется так: набираем 2 слагаемых, 4 слагаемых, 8; затем повторяем еще раз набирание 2 и 4 слагаемых и образуем потом сумму в 5 слагаемых, а за ней 10. Это все будут сложения довольно легкие, а получаемые при них ответы явятся для нас основными, и на них будут опираться все остальные табличные результаты, относящиеся к известной группе, т. е., например, 6 восьмерок=40+8, 7 восьмерок=64—8, 9 восьмерок= =80—8. Или еще: 2 шестерки составят 12, 4 шестерки=24, 8 шестерок=48, 5 шестерок получатся из 4 шестерок и будут равны 24+6=30, следовательно, 10 шестерок равны 30+30=60; 6 шестерок образуются из 5 шестерок и 1 шестерки, т. е. 30+6=36; 7 шестерок можно получить или из 6 шестерок прибавлением или 8 шестерок отниманием.

16. Частные приемы счета группами. Всеми мерами надо поощрять детскую сообразительность и находчивость, и это особенно относится к составлению таблицы, потому что здесь много путей, доступных для детской инициативы. Конечно, если дети поведут счет группами по одному слагаемому, то это будет длинно и однообразно, но и этим способом пренебрегать нельзя. Гораздо лучше прием последовательного удвоения и вывода, при помощи полученных удвоением результатов, всех остальных результатов. Есть и еще приемы, которые могут возникать у сметливых детей; непременная обязанность учителя — поощрять эти приемы. В пример приведем такой. Дети легко запоминают те табличные результаты, где оба множителя одинаковы, т. е. 5×5, 6×6, 7×7, 8×8, 9×9. Так и должно быть потому, что когда множители одинаковые, тогда запоминаемая фраза содержит меньше различных слов. И вот, пользуясь этими легкими результатами, дети выводят из них некоторые другие результаты. Например, если 6×6=36, то 6×7=36+6=42.

17. Таблица умножения 5. Счет парами достаточно исчерпан уже в пределе 20. Теперь его можно только повторить. Следующий по легкости счет — пятками, так как каждые 2 пятка составляет десяток. Здесь более, чем где-нибудь, уместно последовательное удвоение: два пятка — 10, 4 пятка — 10+10=20, 8 пятков = 20+20=40. Что касается 6 и 10 пятков, то их нетрудно

получить от 4 и 8 пятков, стоит только добавить по паре пятков, т. е. по десятку. Нечетное число пятков производится от четного, т. е. например 9 пятков от 8 пятков, или 40+5, всего 45.

Если слабым детям не под силу будет усвоить способ последовательного удвоения, — а он уже не так труден, — то придется допустить постепенное прибавление по пятку. При этом результат «пятью пять 25» особенно легко запоминается, и дальнейший счет пятками возможно начинать именно от этого результата 25.

18. Таблица умножения 4. Ровно половина этого счета усвоена в пределе 20, а вторая половина представляет из себя повторение первой. Так, 6 четверок = 5 четв. + 4, 7 четв. = 5 четв. + 8, 8 четв. = 5 четв. + 12, 9 четв. = = 5 четв. + 16; 10 четв. = 20 + 20 = 40.

Вот самый удобный частный прием. Но и способ последовательного удвоения так же здесь применим с удобством: 2 четв. = 8, 4 четв. = 8 + 8, 8 четв. = 16 + + 16; далее 5 четв. = 16 + 4 = 20, 10 четв. = 20 + 20 = 40, 9 четв. = 32 + 4 = 36, 6 четв. = 20 + 4 = 24, 7 четв. = 24 + 4 = 28.

Возможны и другие способы. Чем более их будет применяться, тем полезнее для развития сообразительности детей.

19. Таблица умножения 8. Ее надо признать сравнительно легкой потому, что восьмерка состоит из пар или четверок и набирание восьмерок ближайше связано с набиранием пар и четверок. Так как 2 восьмерки = 16 и 4 восьмерки = 32 и 8 восьмерок = 64, то пять восьмерок будет 40, а 10 восьмерок 80. На основании того, что 5 восьмерок 40, вычисляем 6 восьмерок = 48 и 7 восьмерок = 56. При этом результат $8 \times 5 = 40$ является исходным пунктом для соседних результатов, и запоминается он отчетливо, если почаще возвращаться к нему при вычислении соседних результатов.

Что $8 \times 5 = 40$, это можно также напомнить ученикам и перестановкой производителей: им уж известно, что 8 пятков 40, следовательно, и 5 восьмерок 40. Теперь в таблице умножения накапливается уже достаточно материала, и чем далее мы в ней идем, тем более можно пользоваться перестановкой производителей.

20. Таблица умножения 3. Мы теперь покончили с более легкими группами — пятками и парами и производными от них; теперь остаются группы более трудные: тройка с шестеркой и девяткой и семерка.

Счет тройками отчасти усвоен был в пределе 20. Остается теперь добавить, что 7 троек = 21, 8 троек = 24, 9 троек = 27, 10 троек = 30. Найти эти результаты можно последовательным удвоением, т. е. определяя 2 тройки, 4 тройки, 8 троек. Что 8 троек = 24, видно также из того, что 3 восьмерки = 24. Самые сбивчивые результаты 3×7 и 3×9 получаются из 3 восьмерок отниманием и прибавлением тройки.

21. Таблица умножения 6. Составляется она теми же путями, как и предыдущие таблицы. Запоминаются легче всего результаты: $6 \times 5 = 30$, $6 \times 6 = 36$, $6 \times 8 = 48$. Смотря по тому, какой из этих результатов ученик помнит, он может, начиная от него, доходить и до соседних. Так, сбивчивый ответ $6 \times 7 = 42$ или же $6 \times 9 = 54$ можно основать на легче запоминаемом $6 \times 8 = 48$.

При счете шестерками, может быть, кто-нибудь из учеников догадается, что если шестерка вдвое больше тройки, то счет шестерками легко получить из счета тройками, стоит только удвоить произведения, полученные для троек. Например $6 \times 7 = 21 + 21$; $6 \times 9 = 27 + 27$ и т. п. Самое лучшее будет, если до подобных способов будут доходить ученики своим собственным соображением. Учитель же может эти способы сообщать от себя не спеша и постепенно, лишь при условии, что учениками они усваиваются без отягощения.

22. Таблица умножения 9. Когда мы считаем девятками, то лучше всего ссылаться на десяток. Поэтому, прежде чем приступить к таблице умножения 9, надо заняться повторением таких вычитаний: 20—2, 30—3, 40—4, 50—5 и т. д. Затем надо выяснить, что 9 равно десятку без одной, следовательно, 2 девятки равны 2 десяткам без 2, 3 девятки=3 десяткам без 3 и т. д. Все это полезно показать наглядно. Пользуясь этим свойством, мы можем заменить счет девятками счетом десятками. Требуется, например, вычислить 9×6. Если выразить этот вопрос, для облегчения, в форме задачи, то зададим хотя бы такую: «6 *кг* мяса по 10 руб. сколько стоят?» «А если с 1 *кг* сделают 1 руб. уступки, то сколько будет стоить 1 *кг*?» «Сколько уступки будет со всех 6 *кг*?» «Сколько же стоят 6 *кг* по 9 руб.?» — «Как вы это узнавали?»

Заметим, что и нормального порядка набирания девяток избегать не надо, т. е. такого, что 2 девятки 18, 4 девятки 36, 8 девяток 72 и т. п. Нормальный путь может предшествовать частному, он оттенит собой все удобства частного пути и оба способа поддержат друг друга и этой взаимной поддержкой еще более укрепят усвоенные результаты. К частному пути переходят тогда, когда дети натолкнутся на него, когда они, следовательно, подготовились к нему путем упражнений, преимущественно на счете предметов.

23. Таблица умножения 7. Умножение 7 на однозначные числа легче всего производится перестановкой производителей. Вся таблица умножения, кроме семерок, уже пройдена, поэтому перестановка производителей полезна и для повторения. Возьмем для примера вычисление 9 семерок и укажем несколько способов, по которым можно вычислить ответ.

а) Так как 7 девяток 63, то и 9 семерок 63.
б) 10 семерок 70, 9 семерок = 70—7=63.
в) 3 семерки 21, да 3 семерки 21, да 3 семерки 21, всего 63.
г) 7 семерок 49, да еще 7 ед., да еще 7 — всего 63 и т. п.

24. Клетчатая бумага как наглядное пособие при составлении таблицы. В данном случае это пособие является лучшим и, прямо сказать, незаменимым. При счете клеточек количество их в одном ряду является множимым, а число рядов — множителем. Если нам надо, например, составлять таблицу умножения троек, то берем в ряду по 3 клеточки, а рядов столько, каков множитель. На клетчатой бумаге идет счет группами, и ответы при последовательном набирании можно записывать тут же — это будет самостоятельная работа.

Если клетки квадратные, как обыкновенно и бывает, то на куске клетчатой бумаги прекрасно видно, что производителей можно переставлять. Если в ряду 3 клетки, а рядов 7, то стоит повернуть кусок, и тогда представится 3 ряда по 7 клеток, ответ же получится прежний — 21.

Составление таблицы при помощи клетчатой бумаги много поможет, в дальнейшем, усвоению квадратных мер. Что такое квадратный метр, как не та же клетчатая площадь, в которой 10 рядов и в каждом ряду по 10 квадратных дециметров. Опыт показал, что работа с клетчатой бумагой — лучшее введение в квадратные измерения.

Если бы в училище не оказалось готовой клетчатой бумаги, то можно заставлять разлиновывать бумагу, чертить клетки —

эта самостоятельная работа приучает к тщательности, и она же дает навык в простейшем применении линейки.

Если бы ученики запаслись квадратиками из цветной бумаги и стали раскладывать эти квадратики рядами, то построение рядов и счет квадратиков нравится детям, а некоторые им увлекаются: вот это-то и желательно для арифметической работы, чтобы занятие не только не отягощало детей, но, наоборот, казалось бы им привлекательным; от этого растет расположение к учебному предмету.

25. Чтение таблицы умножения. Строки таблицы умножения читаются обыкновенно кратко: «трижды семь 21» или «пятью пять 25». И та и другая форма выражения принадлежат не столько детскому языку, сколько книжному и научному; так, «пятью пять 25» образовалось из старинной формулы славянских учебников— «пятью умножиши пять и придет 25».

Для первых занятий таблицей гораздо более идут выражения упрощенные, доступные детям, указывающие на связь умножения со сложением. Пусть дети выражаются, например, так: «3 семерки будет 21», или «3 раза по семи будет 21».

С течением времени, когда учащиеся попривыкнут к таблице и будет чувствоваться ими неудобство пространного выражения «3 раза по 7», то они охотно и сознательно перейдут к точной формуле «трижды семь». Это случится, вероятнее всего, в пределе 1000.

26. Усвоение таблицы. Если ученики не будут знать таблицы твердо, то им очень неудобно будет умножать и делить многозначные числа. Как бы ни был сообразителен ребенок, но если он каждый результат, вроде 6×7 или 5×8, не будет в состоянии говорить сразу и принужден будет его добывать, то умножение и деление многозначных чисел будет для него трудно и утомительно. Таблицу надо помнить. Но в какой срок и какими путями достигнуть запоминания? Спешить с запоминанием не следует, так как при неспешном усвоении дети могут овладеть всеми путями, ведущими к разумному составлению таблицы. Все время, пока проходятся действия в пределе 100, ученики пусть упражняются в составлении таблицы, пусть идет набирание равных групп всевозможными способами. Как было бы жаль, если бы вместо поощрения изобретательности в придумывании различных способов заставить заучивать просто ответы, не вложивши твердо в сознание, как эти ответы можно найти.

Перечислим еще раз средства, которые ведут к усвоению и запоминанию таблицы.

а) Применение всевозможных способов, которыми вычисляются различные ответы. Между прочим, благодаря перестановке производителей, таблица сокращается почти вдвое.

б) Устный счет на сложение и вычитание, именно счет равными группами как подготовка к умножению.

в) Частое повторение основных результатов, из которых легко выводятся прочие; например: 5×5, 4×5, 8×5, 6×6, 7×7, 8×8 и т. п.

г) Хоровое повторение таблицы, когда составление ее достаточно понято и проделано.

д) Самостоятельные работы по составлению, особенно работы с клетчатой бумагой или со счетом шашечек.

е) Записывание добытого в классе материала и повторение его дома вечером.

27. Пифагорова таблица умножения. Большую услугу при усвоении всего, указанного выше, может оказать Пифагорова таблица. Она, как известно, состоит из 10 вертикальных рядов. В первом ряду обозначены одно под другим числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Во втором ряду содержится счет парами и обозначены числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. В третьем ряду расположен счет тройками и обозначены числа: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. После того как пройден будет, например, счет восьмерками, полезно будет при решении задач и при самостоятельных работах вывешивать для проверки и для лучшего усвоения столбик восьмерок. Когда все столбики будут пройдены в отдельности, тогда начать вывешивать таблицу целую. Польза от нее та, что усвоение и запоминание идут не только устным счетом, но также и зрительным путем.

Если в школе нет большой таблицы, то ее легко приготовить самому учителю. Надо достать большой лист бумаги (или склеить несколько листов) и разлиновать на 10 вертикальных полос. Затем начертить (например тупой палочкой) нужные цифры в крупном размере (или наклеить вырезанные из отрывного календаря), подобную таблицу можно складывать по столбикам.

(В. Беллюстин, Методика арифметики, ч. 2, изд. восьмое, 1917 г., стр. 9—16).

В. Евтушевский.

А) Нумерация чисел до 1000.

При выяснении ученикам нумерации можно пользоваться различными наглядными пособиями. Наиболее употребительными, как уже сказано при описании наглядных пособий, считаются: спички, связанные пучками в 10 и 100 штук, шведские счеты и арифметический ящик. Мы будем пользоваться при изложении этого отдела арифметическим ящиком; учитель легко может на основании приемов, указанных при употреблении этого пособия, приложить их при употреблении всякого другого пособия.

При прохождении нумерации ученикам должно быть выяснено:

а) существование единиц различных разрядов;
б) взаимное кратное отношение единиц различных разрядов;
в) представление о величине (количестве) числа, состоящего из единиц различных разрядов;
г) чтение и написание числа на основании зависимости значения цифры от места, ею занимаемого.

Приступая к выяснению нумерации, учитель предлагает ученикам предварительные вопросы:

Как сосчитать предметы, когда их много? — Прибавляя постепенно по одному.

Как еще иначе считают предметы?

Какие предметы считают парами, тройками, десятками, дюжинами, сотнями?

Как считать предметы десятками, сотнями? Сначала насчитывают по одному десятки и откладывают, потом еще насчитывают десяток и т. д., потом сосчитывают по 10 десятков, что составляет сотню; потом сосчитывают число сотен и т. д.

Как считают деньги? Какими монетами можно считать деньги по десяткам, сотням копеек?

Затем ученики считают отдельные кубики до какого угодно числа, например до 20, 40; им показывается брусок, заменяющий десяток кубиков; этот брусок измеряется одним кубиком, или из десяти отдельных кубиков составляется ряд, к которому прикладывается брусок, и ученики убеждаются в том, что одним бруском можно в счете заменить десять кубиков; этот брусок заключает, значит, в себе д е с я т о к кубиков.

Предлагаются вопросы: «в десятке сколько единиц, во сколько раз десяток больше одного, сколько кубиков в двух, трех, пяти десятках» и т. п. Для упражнения ученикам предлагается из кубиков и брусков составить числа: 56, 79, 88, 99. На доску выставляется: 6 брусков и 4 кубика, 7 брусков и 8 кубиков, и ученики читают выставленные числа; вместо выставленных 4 брусков 16 кубиков ученики берут 5 брусков и 6 кубиков, заменяя 10 кубиков одним бруском и поясняя при этом, почему так удобнее считать.

При сравнении кубика с бруском выясняется, что то и другое составляет один предмет и что счет брусков ведется по тому же приему, как и счет кубиков, но что предметы эти разнятся между собой по величине и что, считая кубики десятками посредством брусков, мы ведем счет в 10 раз скорее, нежели считая отдельными кубиками. Таким образом и кубик, и брусок суть единицы, но кубик есть единица одного рода, а брусок единица другого рода; в счете кубик называется единицей п е р в о г о р а з р я д а, а брусок, или десяток кубиков — единицей в т о р о г о р а з р я д а.

Для закрепления в сознании и памяти учеников этих понятий им предлагаются повторительные вопросы: «Сколько составится кубиков, если я возьму 4 единицы второго разряда и 7 единиц первого; Сколько кубиков в 6 единицах второго разряда и 25 единицах первого; в 74 сколько единиц первого разряда, сколько второго; из скольких единиц первого разряда состоит все число» и т. п. После этих упражнений ученикам вкратце напоминается прием написания двузначных чисел, и выспрашивается у них значение цифры по месту ею занимаемому, а также производится разложение двузначного числа на разряды (86=80+6), и обратно: число, выраженное в отдельных разрядах, читается и пишется при совокупности обоих разрядов (50+9=59).

При переходе к счету сотнями 100 отдельных кубиков складываются в один квадратный слой; ученики насчитывают в нем 10 десятков и составляют такой же слой из 10 брусков. Такой слой брусков представляет в свою очередь десяток, а по отношению к отдельному кубику — сотню. Сотня кубиков заменяется одной е д и н и ц е й — доской. Доска эта измеряется сначала бруском, а потом отдельным кубиком. Предлагаются вопросы: «В доске сколько помещается брусков, сколько отдельных кубиков? Сотня во сколько раз больше десятка, больше единицы? Как составить сотню из десятков; как составить ее из единиц первого разряда? В двух, трех, пяти сотнях сколько десятков, сколько единиц? Какие предметы считаются, продаются сотнями? чем заменяется сотня копеек?

в рубле сколько гривенников? На сколько копеек можно разменять 3, 6, 8 руб.?» и т. п.

Сотня кубиков (доска) как отдельный предмет есть также единица в счете кубиков, но она в 10 раз больше единицы второго разряда и в 100 раз больше единицы первого разряда, а потому сотню называют единицей третьего разряда.

Для упражнения учеников в счете единиц трех разрядов им предлагается: сосчитать число кубиков, составленное учителем на классной доске из досок, брусков и отдельных кубиков; сказать, сколько в этом числе единиц каждого разряда; продиктованное учителем число выставить из ящика на доске и пояснить, почему именно столько-то взято досок и столько-то брусков. Ученики решают вопросы: «какое составится число из 2 единиц второго разряда, 4 единиц третьего и 7 единиц первого; в числе 806 сколько единиц третьего разряда, второго, первого; из скольких единиц второго, первого разрядов составлено все число; как записать число, в котором 5 единиц третьего разряда, 6 единиц второго и 8 единиц первого; почему 5 нужно поставить на третьем месте; как составить это число из кубиков, брусков и досок и т. п.

Затем идут упражнения в счете и написании чисел. Переход к написанию трехзначных чисел ученики совершают сами легко по аналогии с числами двузначными и безошибочно указывают места, на которых нужно ставить цифры, обозначающие различные разряды числа.

Учитель пишет на доске:

$$\left\{\begin{array}{lll} 5 & \text{единиц} & \text{1-го разряда} \\ 8 & \text{«} & \text{3-го «} \\ 6 & \text{«} & \text{2-го «} \end{array}\right.$$

или

$$\left\{\begin{array}{lll} 4 & \text{единицы} & \text{2-го разряда} \\ 7 & \text{единиц} & \text{3-го «} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 6 & \text{единиц} & \text{1-го «} \\ 2 & \text{единицы} & \text{2-го «} \end{array}\right.$$

Эти числа, выраженные в разрядах, ученики читают или записывают по усвоенной системе; обратно, число, написанное учителем на доске, например 486, ученики разлагают на разряды: 486=4 единицам 3-го разряда+8 единиц 2-го разряда+6 единиц 1-го разряда,

или 486=4 сотням+8 десяткам+6 единицам,

или 486=400+80+6.

При переходе к счету тысячами ученикам предлагается сосчитать число всех кубиков в ящике; счет этот они ведут по горизонтальным слоям, т. е. сотням, насчитывают в ящике 10 досок, или сотен; каждая сотня заключает в себе 10 десятков, следовательно, в ящике 100 десятков (брусков); в одном бруске 10 кубиков, следовательно во всем ящике 100 раз по 10 кубиков; получается новое число — тысяча. Тысяча кубиков есть новая единица в счете; в отличие от других единиц она называется единицей четвертого разряда.

Получив совершенно наглядное представление о количестве, о массе числа, выраженного тысячею, ученики без всякого затруднения могут образовать представление о числе, выраженном несколькими тысячами; так, вместе с выражением «8 тысяч кубиков» у них в сознании рельефно образуется представление о 8 ящиках, наполненных кубиками. Можно быть после этого уверенным, что ученик при расширении счета до какого угодно предела будет иметь дело не с цифрой только, а с действительным числом, выраженным цифрами. Имея раздельное представление о тысяче кубиков, ученик легко сам образует в своем сознании представление о тысяче каких угодно известных ему предметов и, наконец, составляет понятие о тысяче единиц вообще, то-есть незаметно переходит к числу абсолютному.

Не входя в дальнейшие подробности по изучению нумерации до 1000, как вопросу весьма легкому при употреблении наглядного пособия, я приведу только образцы вопросов и упражнений, служащих для повторения и обобщения всего усвоенного учениками.

«Как можно считать предметы? Что называется единицей в счете предметов? Что называется вообще числом? Какие единицы счета известны вам? Как называется единица первого, второго, третьего, четвертого разрядов? Какое число получится, если я возьму 7 единиц второго разряда, 5 единиц третьего, 4 единицы четвертого и 2 единицы первого разряда?

В числе 2048 сколько единиц каждого разряда? Какое число кубиков составится из 4 полных ящиков, 16 досок, 38 брусков и 46 отдельных кубиков? Как записать число 506? На каком месте нужно поставить 5? Почему на третьем месте? Что нужно поставить на втором месте и почему? Напишите число 1547. Что означает цифра 4, цифра 1? Почему цифра 5 поставлена на третьем месте? От чего зависит значение цифры в числе? На каком месте ставится при написании числа цифра, означающая десятки, единицы, тысячи? Нужно ли писать наименование разрядов при каждой цифре? Можно ли 2 пуда 3 фунта 5 лотов написать без наименования каждой цифры? Почему тогда будет непонятно? Прочтите число 3704. Сколько надо иметь кубиков, чтобы составить это число? Почему вы читаете «3 тысячи, 7 сотен 4 единицы?»

Составить число из:

$$\left.\begin{array}{llll}4 & \text{единиц} & \text{3-го} & \text{разряда}\\ 5 & \text{«} & \text{1-го} & \text{«}\\ 2 & \text{«} & \text{4-го} & \text{«}\end{array}\right\}\ 2405$$

Составить число из:

$$\left.\begin{array}{llll}9 & \text{единиц} & \text{2-го} & \text{разряда}\\ 9 & \text{«} & \text{3-го} & \text{«}\\ 9 & \text{«} & \text{1-го} & \text{«}\end{array}\right\}\ 999$$

Чего последнему числу недостает до 1000?

Разложить число 5672 по разрядам:

5672=5000+600+70+2.

Какие числа можно написать посредством цифры 4?

(4, 44, 444, 4444 и пр.).

В числе 444 вторая цифра во сколько раз означает больше, нежели первая справа; а третья цифра во сколько раз означает более первой?

Занятие одной нумерацией в течение нескольких уроков в ряд, хотя бы и при помощи наглядных пособий, есть работа вообще однообразная и потому утомительная; вначале ученики интересуются ею в высшей степени, но потом при однообразии упражнений и вопросов начинают уставать и перестают быть внимательными.

С целью дать некоторое разнообразие классной работе, а еще более с целью освоить учеников с новыми числами, нужно параллельно с упражнениями в нумерации предлагать ученикам для решения задачи, в которые входят числа в различных комбинациях разрядов и которые решаются на основании усвоенного соотношения единиц различных разрядов из упражнений при помощи арифметического ящика, а также на основании тех приемов, которые они приобрели, проходя предшествовавшие курсы. Такого рода устные задачи помещены в «Сборнике» в отделе 1 под заглавием: Устные задачи на числа до 1000.

Образцы решения задач.

З а д а ч а (из Сборника № 767). Крестьянка повезла на рынок 4 сотни яиц; на дороге она 3 десятка разбила, а все остальные яйца продала. Сколько денег получила она от этой продажи, если 2 сотни 5 десятков яиц продала по 20 коп. за десяток, а все остальные яйца — по 1 руб. за сотню?

Из 4 сотен крестьянка разбила 3 десятка яиц, значит продала она 3 сотни и 7 десятков, потому что в одной сотне 10 десятков, а если от 10 десятков отнять 3 десятка, то останется 7 десятков, да еще было 3 сотни. Десяток первых яиц она продавала по 20 коп., значит 5 десятков продала за 1 руб., потому что 5 раз 20 будет 100 коп., или 1 рубль; если десять яиц стоят 20 коп., то сотня стоит в 10 раз более, то-есть 200 коп., или 2 рубля, а 2 сотни еще в 2 раза более, то-есть 2 руб.$\times$2=4 руб. Итак, первые яйца проданы за 4 руб.+1 руб., то-есть за 5 руб. Всех яиц было 3 сотни и 7 десятков, из них первых было 2 сотни 5 десятков, значит остальных было 1 сотня 2 десятка; сотня последних яиц продана за 1 руб., значит десяток продавался за 10 коп., потому что десяток меньше сотни в 10 раз, а 10-я часть рубля, или 100 коп., равна 10 коп., значит два десятка проданы за 2 раза 10 коп., то-есть за 20 коп. Итак, остальные яйца проданы за 1 руб.+20 коп., то-есть за 1 руб. 20 коп. Всего крестьянка получила 5 руб. да 1 руб. 20 коп., или 6 руб. 20 коп.

З а д а ч а (из Сборника № 795). Садовник сорвал в своем саду 6 сотен яблок; 120 яблок он продал в деревне нескольким покупателям, каждому по десятку, а все остальные яблоки разложил поровну в 12 корзинок и повез в город. Сколько яблок положил садовник в каждую корзинку и скольким покупателям продал он яблоки в деревне?

Садовник сорвал в саду 6 сотен яблок, что составляет 60 десятков; из них 120 яблок, или 12 десятков яблок, он продал нескольким покупателям, по десятку каждому, значит 12 покупателям; было 60 десятков яблок, а продано 12 десятков, следовательно, осталось 48 десятков; эти 48 десятков яблок садовник разложил поровну в 12 корзинок, а 12-я часть 48 есть 4, следовательно, в каждую корзинку он положил по 4 десятка яблок.

Б) Нумерация чисел до высших пределов.

Хорошим наглядным пособием при прохождении этого отдела могут служить классные арифметические счеты. Переход от арифметического ящика к счетам важен в том отношении, что прежде ученики различали единицы различных разрядов вполне наглядно, прямо по величине, а теперь они отличают их по месту, ими занимаемому в числе, и потому совершают последовательный наглядный переход к десятичному счислению посредством цифр.

1) На горизонтальных проволоках.

Все шары, расположенные по десяти на каждой проволоке, сдвигаются в одну сторону счетов и закрываются доской, приделанной к рамке, так что к классу обращена эта доска и половина проволок без шаров. Ученики считают по одному шару, передвигаемому учителем из-за доски на другой конец первой верхней или нижней проволоки, до 10 и убеждаются в том, что больше шаров на этой проволоке нет.

Десять шаров составляют десяток, и подобно тому как одна монета— гривенник заменяет 10 других монет — копеек, можно и на проволоках для дальнейшего счета, десять шаров, взятых на первой проволоке, заменить одним — на второй и помнить, что он означает десяток. Затем, если откладывать шары на второй проволоке, то это будет счет десятками, а не единицами.

Для упражнения ученикам предлагаются, вопросы: «Как откинуть на счетах 30? Почему надо взять 3 шара на второй проволоке, а не на первой? Как положить на счетах число шаров, соответствующее 9 копейкам, 10 копейкам, 7 гривенникам, 46 копейкам? Какое число составится, если на первой проволоке взять 4 шара, а на второй 7» и т. д.

Подобно тому как единицы первого и второго разрядов отсчитываются на различных проволоках счетов, так и при написании числа цифры, выражающие число единиц каждого из разрядов, получают свое значение от места, ими занимаемого.

По требованию учителя ученик откладывает на счетах число 99, взяв на первой и на второй проволоках по 9 шаров; затем решает вопрос, что получится, если прибавить еще единицу первого разряда. Тогда 10 шаров, находящихся на первой проволоке, откидываются обратно и заменяются одним шаром на второй, на которой таким образом получается 10 шаров, означающих 10 десятков. Для дальнейшего счета десятками эти 10 шаров отодвигаются и заменяются по прежнему приему одним шаром на третьей проволоке. Таким образом этот один шар заменяет собой 10 шаров, отсчитываемых на второй проволоке, или 100 шаров на первой и означает с о т н ю.

Для упражнения в счете единицами трех разрядов ученики читают числа, откидываемые учителем на счетах, или берут на счетах числа, диктуемые учителем; пишут числа по шарам, откинутым на счетах; берут на счетах числа, записанные учителем на доске, а также устно решают вопросы: «как взять на счетах число 340; какое получится число, если на первой проволоке счетов взять 6 шаров, а на третьей 7; почему это число читается 706, а не 76» и т. п.

Взяв на счетах 999, ученик прибавляет еще единицу, получает 10 шаров на первой проволоке и заменяет их одним шаром на второй; полученные 10 шаров на второй проволоке заменяет одним шаром на третьей и, наконец, 10 шаров третьей проволоки заменяет одним шаром на четвертой. Получается таким образом тысяча — единица четвертого разряда.

Затем идут те же упражнения в чтении, написании и откладывании на счетах четырехзначных чисел, как и при предыдущих разрядах.

Взяв на счетах 9999 и прибавив еще единицу, ученики получившиеся 10 шаров на четвертой проволоке заменяют одним шаром на пятой и получают десяток тысяч — единицу пятого разряда.

Точно так же получаются единицы разрядов высших до какого угодно предела.

При последовательности образования единиц различных разрядов, написание и откладывание на счетах чисел не представят для учеников ни малейшей трудности, и они весьма легко делают переход от счетов к цифрам и обратно.

Не входя по этому вопросу в дальнейшие подробности, я приведу здесь ряд вопросов и упражнений, служащих для повторения нумерации. «Какие разряды единиц различаются в числах? Как называются единицы второго, пятого, седьмого разрядов? Какое число составится из 4 единиц шестого разряда и 7 единиц третьего? Как взять на счетах 9 десятков тысяч, 72 сотни тысяч, 12 миллионов и т. п. Взять на счетах числа: 4096, 72040, 5060420 и т. п.

Читаются числа, взятые на счетах. Записываются числа, продиктованные учителем. Откладываются на счетах числа, продиктованные учителем. Разложить число 76040 по разрядам (70 000+6000+40). Составить числа из единиц следующих разрядов:

$$\left.\begin{array}{llll} 5 & \text{единиц} & \text{3-го} & \text{разряда} \\ 7 & « & \text{6-го} & « \\ 9 & « & \text{1-го} & « \\ 8 & « & \text{5-го} & « \end{array}\right\} 780\,509$$

или

$$\left.\begin{array}{llll} 4 & \text{единиц} & \text{4-го} & \text{разряда} \\ 2 & « & \text{1-го} & « \\ 8 & « & \text{7-го} & « \end{array}\right\} 8\,004\,002$$

и т. д.

В числе 547 256 сколько десятков, тысяч, миллионов? Сколько во всем числе сотен, тысяч? и т. п. Показать это на счетах.

От чего зависит значение каждой цифры в данном числе? Что сделается с числом единиц каждого разряда, если в конце числа справа приписать нуль? если откинуть нуль? Что сделается с числом, если к нему слева приписать нуль? Что сделается с числом, если вставить нуль между цифрами числа? Какие цифры получат большее значение, какие останутся при прежнем значении? Как увеличить число в 10, 100, 1000 раз? Как число, оканчивающееся нулями, уменьшить в 10, 100 раз? Как увеличить число в 20, 30, 40 раз.

При написании и чтении больших чисел учитель указывает ученикам на удобство распределения единиц разрядов по классам.

$$\text{1-й класс}\begin{cases}\text{единицы}\\ \text{десятки}\\ \text{сотни}\end{cases}$$

$$\text{2-й класс}\begin{cases}\text{тысячи}\\ \text{десятки тысяч}\\ \text{сотни} \quad\; \text{«}\end{cases}$$

$$\text{3-й класс}\begin{cases}\text{миллионы}\\ \text{десятки миллионов}\\ \text{сотни} \quad\quad \text{«}\end{cases}$$

$$\text{4-й класс}\begin{cases}\text{тысячи} \quad\quad\quad \text{миллионов}\\ \text{десятки тысяч} \quad\quad \text{«}\\ \text{сотни} \quad\; \text{«} \quad\quad\quad \text{«}\end{cases}$$

$$\text{5-й класс}\begin{cases}\text{биллионы}\\ \text{десятки биллионов}\\ \text{сотни} \quad\quad \text{«}\end{cases}$$

В новейших учебниках считается более удобной французская система распределения разрядов по классам, причем каждый класс имеет свое специальное название:

$$\text{1-й класс}\begin{cases}\text{единицы}\\ \text{десятки}\\ \text{сотни}\end{cases}$$

$$\text{2-й класс}\begin{cases}\text{тысячи}\\ \text{десятки тысяч}\\ \text{сотни} \quad\; \text{«}\end{cases}$$

$$\text{3-й класс}\begin{cases}\text{миллионы}\\ \text{десятки миллионов}\\ \text{сотни} \quad\quad \text{«}\end{cases}$$

$$\text{4-й класс}\begin{cases}\text{биллионы}\\ \text{десятки биллионов}\\ \text{сотни} \quad\quad \text{«}\end{cases}$$

$$\text{5-й класс}\begin{cases}\text{триллионы}\\ \text{десятки триллионов}\\ \text{сотни} \quad\quad \text{«}\end{cases}$$

Таким образом по этой системе

1 биллион = 1 000 000 000,
а по нашей
1 биллион = 1 000 000 000 000

2) На вертикальных проволоках.

Некоторые учителя считают более удобным наглядно выяснять нумерацию и прием написания чисел на вертикальных проволоках счетов, потому что здесь на каждой проволоке помещается только по 10 шаров (на других счетах, как сказано в описании пособия, даже только 9), так что дальнейшего счета шаров производить на этой проволоке уже нельзя, и само собой является необходимость переходить к следующей проволоке; кроме того, шары, выражающие различные разряды чисел, располагаются на счетах в том же порядке справа налево, в каком располагаются и цифры в написанном числе. Удобство же счета на горизонтальных проволоках состоит в том, что здесь шары только передвигаются с одного конца проволоки на другой, а на вертикальных проволоках их надо постоянно надевать или снимать.

Само собой понятно, после описания работ на горизонтальных проволоках счетов, как вести те же упражнения на проволоках вертикальных.

Для упражнений учеников в сравнении между собой разрядов по величине им предлагаются задачи из «Сборника», помещенные под заглавием «Устные задачи на числа до 1000».

Задача. На торговом судне привезено 10 кулей яблок, по 2 тысячи 4 десятка в каждом. Яблоки эти пересыпаны в мешки: 40 больших по 2 сотни 6 десятков и 100 меньших. По скольку яблок всыпано в каждый меньший мешок?

Решение. В одном куле яблок 2 тыс. 4 дес., то в 10 кулях 20 тыс. 40 дес., или 20 тыс. 4 сотни. В каждый большой мешок всыпано по 2 сотни 6 дес., то в 40 мешков всыпано 80 сотен 240 дес., или 8 тыс. 24 сотни, или 10 тыс. 4 сотни. Из 20 тыс. 4 сотен, если отнять 10 тыс. 4 сотни, останется 10 тыс. Эти 10 тыс. яблок всыпаны в 100 малых мешков, значит в каждый пришлось по 100 яблок, потому что в 10 тысячах 100 сотен.

(В. Евтушевский, Методика арифметики, изд. 1881 г., стр. 232—243.)

С. Шохор-Троцкий.

Деление многозначных чисел.

Деление на числа первого десятка.

При делении многозначных чисел на числа первого десятка надо различать два случая: либо в делимом и в частном одно и то же число цифр, либо в делимом одной цифрой больше, чем в частном. Подвести учеников к делению любого многозначного числа на число однозначное можно с помощью методического повторения как тех случаев деления двухзначного числа на однозначное, когда в частном получается число однозначное же, так и тех случаев, когда от деления двухзначного числа на однозначное получается число двухзначное. Первый случай деления осуществляется с помощью так называемой таблицы умножения, второй — с помощью разложения делимого на части, из которых одна наверное делится на известное число частей и дает известное число десятков в частном, а другая — либо делится, либо не делится на делителя без остатка, но в обоих случаях мы вообще пользуемся таблицей умножения.

В делимом и в частном одно и то же число цифр.

Первое место после повторительных (на всякий случай) упражнений в делении двухзначного числа на однозначное как в случаях, когда в частном получается однозначное число, так и в случаях, когда в частном получается число двухзначное, занимают упражнения в таком делении на однозначное число, при котором в делимом и в частном одно и то же число цифр. В этом случае лучше производить деление на известное число одинаковых частей независимо от того, требуется ли разделить число на известное число равных частей, или же требуется разделить число на части, в каждой из которых находится столько единиц, сколько их в делителе. Так, например, если требуется девять десятков тысяч разделить на какое-нибудь число, например на два, то удобнее рассчитать, что в каждую часть попадает целых десятков тысяч четыре. Это легче постигается, чем вопрос о том, сколько раз две единицы содержатся в девяти десятках тысяч единиц. Начинать надо с тех случаев, когда не получается остатка (например, 4888 разделить пополам, или то же самое число разделить на четыре равные части и т. п., или 3969 разделить на три одинаковые части и т. д.). Цель таких упражнений заключается в том, чтобы внедрить в сознание учеников навык рассматривать каждый разряд отдельно и отыскивать, сколько получается в частном целых единиц именно этого разряда. Затем можно перейти к таким примерам, когда первая же цифра при разделении на делителя дает в остатке одну или две, или несколько единиц, но с тем, чтобы последующие цифры уже не затрудняли учеников соображениями о том, как отыскать цифры частного. Только впоследствии можно перейти к делению таких многозначных чисел, которые после каждого отыскания цифры частного дают остаток, который надо раздробить в единицы следующего разряда. Таков, например, случай: 7596 разделить на 2; здесь каждый раз получается остаток.

В частном одной цифрой меньше, чем в делимом.

Когда механизм деления многозначного числа на однозначное, дающего в частном столько же цифр, сколько их в делителе, учениками усвоен, можно перейти к тому случаю, когда в частном получается одной цифрой меньше, чем в делимом. Больших затруднений это деление не представляет. Но, тем не менее, опыт убеждает, что хотя ученики умеют безукоризненно делить двухзначное число на двухзначное при однозначном частном, каковое умение ими усвоено отчасти в первый год обучения, но при делении многозначного числа на двухзначное первая цифра частного представляет для учеников некоторое затруднение, если надо две первые цифры делимого разделить на делителя. Однако же и эта трудность легко преодолевается, если учащиеся прибегают к делению на известное число одинаковых частей. Сначала надо избегать только таких примеров, когда в частном получаются нули. Над цифрами частного (а в случае надобности и над цифрами делимого) можно записывать первые буквы имеющихся налицо и получаемых в частном разрядов (тыс., сот., и т. д.).

Запись деления многозначного числа на однозначное. Расположение вычислений при делении многозначного числа на однозначное должно быть, по возможности, просто — без записи остатков и частных произведений. Например, вычисление 8785:5 сначала должно производить так: 5000 разделить на 5 частей, получим 1000; останутся неразделенные 3 тысячи; обратим их в сотни («разменяем» на сотни): получится 30 сотен да еще 7 сотен, будет 37 сотен; разделим 35 сотен на 5 частей, получим 7 сотен и т. д.— все изустно! И записывать должно только частные. Но можем сделать деления и по следующим образцам:

а) 8785 : 5 = 1757
3700
280
35

и б) 8785 : 5 = 1757
37
28
35

Записывать же все частные произведения не следует ни в каком случае, т. е. не следует выполнять вычисление так:

$$
\begin{array}{rl}
-\,8785 & : 5 = 1757 \\
5 & \\
\hline
-\,37 & \\
35 & \\
\hline
-\,28 & \\
25 & \\
\hline
-\,35 & \\
35 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Ибо подобное вычисление — образчик того многописания и рабского следования одному правилу, которые делают из арифметики предмет, наводящий тоску и скуку. Тоска и скука являются только следствием бессмысленного следования правилам многописания. Эти правила рассчитаны на потребности человека, производящего деление на многозначное число со многими значащими цифрами.

Деление на 10. Когда делитель равен 10, то в записи частного непременно одной цифрой меньше, чем в записи делимого. Правило, по которому частное представляет в этом случае число, обозначенное теми же цифрами, какими обозначено делимое, за исключением последней его цифры, — это правило ученики открывают не так быстро и осмысленно, как правило приписывания нуля при умножении на десять. Но тем благодарнее задача усвоения учениками методического нахождения цифр частного, следующих одна за другой по определенному закону. Вначале целесообразно над будущими цифрами частного отмечать, каких разрядов цифры получатся, с помощью одной буквы: т (тысячи), с (сотни), д (десятки), е (единицы), и т. п. Это упорядочивает работу и с самого начала выясняет ученикам, что для них вся задача сводится к тому, как бы не пропустить какой-либо цифры частного. Тогда появление нулей в частном будет не случайным и только неприятным обстоятельством, а вполне обоснованным результатом означенного разделения. Бороться, при условии методической проработки этой ступени, с ошибками в пропуске нулей в записи частного в таком случае не придется ни учащимся, ни учителю.

Ввести в интересы деления обоего рода на десять можно, начав с деления двухзначного числа на число однозначное как в тех случаях, когда в частном получается однозначное число (по таблице умножения), так и в тех, когда в частном получается двухзначное число. В этом последнем случае вычисляющий отыскивает сначала цифру десятков, а затем — цифру единиц. Затем можно перейти уже к действительному делению двухзначного и многозначного (например пятизначного) числа на десять. Речь идет о действительном разделении двухзначного или многозначного числа на 10, потому что записать, что 2375 : 10 = 237 (ост. 5), значит только записать частное и остаток. Но найдены ли при этом последовательные цифры частного и остатка рассуждением и вычислением, или же частное и остаток только записаны на основании соответствующего правила, из этой записи не видно. Для облегчения и уяснения себе самой работы вычисления полезно над получающимися цифрами частного записывать начальные буквы названий единиц разных разрядов (т, с, д, е). Не следует при этом записывать частные произведения десяти на цифру частного, т. е. не следует писать так, как пишут при делении многозначного числа на многозначное же число со многими значащими цифрами, когда изустное вычисление произведения полученной цифры на делителя трудно выполнимо. Не следует говорить при производстве деления в этом случае так: 10 в 83 содержится 8 раз, пишу 8, восемью-десять, восемьдесят, вычитаю 80, получаю 3; сношу такую-то цифру» и т. д. Без этих разговоров очень легко обойтись (такой способ вычисления вполне дозволителен и полезен только для тех случаев, когда делитель отличается от единицы высшего разряда). Лучше при этом производить деление «на части», чем «по содержанию»: 83 тысячи разделим на 10 равных частей, получим 8 тысяч, остаются 3 тысячи; раздробим их в сотни, получим 30 сотен да еще 5 сотен, всего 35 сотен; разделим их на 10 равных частей, получим 3 сотни и т. д. (Термин «раздробить» для этого случая вполне целесообразен.) Так же надо вычислять и при кратном сравнении с десятком. Ибо если производить действие приемом кратного сравнения, а не деления на известное число равных частей, то производство кратного сравнения представляет уже некоторые излишние трудности.

Неудобства кратного сравнения. При действительном кратном сравнении надо сообразить, сколько десятков составляют столько-то тысяч или столько-то сотен и т. п. А это представляет собой уже некоторые излишние затруднения. Например, требуется узнать, сколько сотен раз 10 содержится в 27 сотнях. По шаблону легко: 10 в 27 два раза:

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\;\; \text{с. д. е.} \\ 2700 : 10 = 2 \quad\quad\quad \text{и т. д.} \end{array}$$

Но шаблон на первых порах только вреден. А рассуждением этого результата можно достигнуть двояким способом: а) две тысячи —

то же, что 20 сотен; а 20 сотен — то же, что 10 сотен, да еще 10 сотен, т. е. сто десятков, да еще сто десятков, т. е. 200 десятков, или б) 27 сотен — то же, что 100 раз по 27, т. е. 100 раз по десяти, да еще сто раз по десяти или двести раз по десяти, да еще сто раз по семи; а потому десять содержится в 27 сотнях две сотни раз и т. д. Подобные рассуждения утомительны, крайне скучны, бесполезны для образования, да к тому же практически не нужны, так как учащиеся уже давно освоились с тем, что численные значения отношения при делении «по содержанию» (при кратном сравнении) и частного при делении «на части» (при делении на известное число равных частей) равны между собой. Таким образом ясно, что пользоваться шаблоном и в этом случае (как и всегда) вредно. Поэтому в нашем случае лучше всего кратное сравнение (деление «по содержанию») сводить к делению на известное число равных частей (к делению «на части»).

Делитель — одна единица высшего разряда.

Деление на одну единицу высшего разряда не содержит в себе для учащихся ничего существенно нового. Надо начать с деления трехзначного числа на сто, а затем перейти к делению четырехзначного числа на сто, пятизначного и т. д. Здесь опять-таки в обоих случаях деления полезнее производить деление так, как будто делимое требуется разделить на известное число равных частей, а не узнавать, сколько раз сто или тысяча единиц и т. д. содержатся в данном числе. Пусть, например, требуется узнать, сколько раз в двух миллионах содержится одна сотня. По правилу надо отделить от правой руки к левой две цифры, и получатся два десятка тысяч. Рассуждение же относительно того, сколько раз сотня содержится в двух миллионах, довольно утомительно. А делением на части результат добывается таким образом (все рассуждения приведены полностью): если два миллиона разделить на 100 равных частей, то в каждой части не получится ни одного миллиона; раздробим 2 миллиона в сотни тысяч, получим 20 сотен тысяч; если 20 сотен тысяч разделить на 100 равных частей, то сотен тысяч в каждой части не будет; раздробим 20 сотен тысяч в десятки тысяч, получим 200 десятков тысяч; а если 200 десятков тысяч разделить на 100 равных частей, то в каждой части получим два десятка тысяч. А потому

$$2\,000\,000 : 100 = \overset{\text{д. т.}}{2}$$

Больше делить нечего, а потому

$$2\,000\,000 : 100 = 20\,000.$$

Так как учащиеся до правила еще не дошли, то очевидно, что рассуждения в этом случае удобнее формулируются, если производить действие деления «на части», а не «по содержанию». Иногда, впрочем, удобнее прибегнуть к делению по содержанию, а именно когда делитель равен единице известного класса, например одной тысяче, одному миллиону. Пусть, например, требуется узнать, сколько раз тысяча содержится в 356 784, или разделить 356 784 на 1000 равных частей. Здесь очевидно, что с каким бы случаем мы ни имели дело, частное равно 356. Этот пример превосходно освещает непригодность мертвых правил в живом деле надлежащего обучения.

Записывать частные произведения делителя на последовательно получаемые цифры частного в тех случаях, когда делитель равен десяти, ста и т. д., можно только для большей ясности. Но необходимости в этих записях нет никакой. Во всяком случае, механизм деления учащиеся как следует и с разумением усвоят только тогда, когда они предварительно освоились с самым существом и смыслом действительного деления на единицы любого разряда и вообще освоились не с правилом, а с самым процессом (с «алгорифмом») этого действия.

Делитель — круглое число.

Деление многозначного числа не на одну единицу, а на любое однозначное число единиц высшего разряда: на 20, 30, 40 и т. д., на 200, 300, 400 и т. д., и вообще на всякое круглое число, представляет собой задачу, которая важна не только сама по себе, но отлично подготовляет к разделению многозначного числа на закруглимое число. Неумеющий делить на 200, конечно, не сумеет быстро разделить число на 201, на 199 и вообще на закруглимые числа. Полезно обратиться для должной проработки этого учения к тому способу разделения какого-нибудь числа или какой-нибудь величины на 20 одинаковых частей, на 30 и т. д., который сводится к тому, что сначала делимое делят на одну единицу высшего разряда, т. е. на 10, а потом полученное на число единиц этого разряда в делителе (т. е. на 2, на 3 и т. д.). Вся трудность заключается только в том, чтобы учащиеся не сразу записывали частное, происходящее от разделения на 10, на 100 и т. д. Такое производство деления удалило бы учащихся от основной цели письменного производства деления. Эта основная цель — постепенное, шаг за шагом, отыскание цифр частного, начиная с единиц наивысшего разряда частного и переходя к единицам следующего. Но такое уклонение учащихся, если бы оно случилось, от прямой цели не сильно задержит их. Оно может выяснить им сущность вопроса, до которой арифметика дошла, в течение веков борясь с трудностями письменного производства деления. Во всяком случае, прежде чем перейти к делению на круглое число, дающему в результате многозначное частное, надо научить делению на круглое число, дающему частное однозначное.

Однозначное частное при круглом делителе.

Когда делитель круглое число, а частное — число однозначное, можно различать два случая: 1) в делимом столько же цифр, сколько их в делителе, и 2) в делимом одной цифрой больше, чем в делителе. В первом случае (876:300; 3560:2000 и т. п.) единственная цифра частного будет найдена, если мы разделим делимое на одну единицу того наивысшего разряда, из единиц которого составлен делитель (на 100, 1000 и т. п.), а полученное частное — на число этих единиц, заключающееся в делителе. Остаток при этом вычисляется очень просто, если помножить (по возможности изустно!) делителя на частное и полученное произведение вычесть из делимого. Во втором случае (2263:300; 7684:900; 15364:4000 и т. п.) можно поступить совершенно так же, как в первом случае. Следует остерегаться несвоевременного сообщения детям правила: «надо первые две цифры делимого разделить на первую цифру делителя». До этого правила учащиеся должны и могут быстро добраться путем опыта, наблюдения и рассуждения, являющихся результатом целесообразных упражнений.

Последовательное отыскание цифр частного. Важно научить детей последовательному нахождению цифр частного при разделении многозначного числа на однозначное число единиц высшего разряда. Вопрос о том, поймут ли учащиеся возможность разделения, например на 300, основанного на том, что сначала надо делимое разделить на 100, а полученное на 3 равные части, можно разрешить в положительном смысле. Если бы это представление почему-либо затруднило учащихся, то можно прибегнуть хотя бы к такому примеру: умеем ли мы сразу разделить прямую на 6 равных частей? Конечно, умеем. Но нельзя ли разделить ее не сразу на 6 одинаковых частей, а поступить иначе: сначала разделить прямую на 3 одинаковые части, а затем каждую из частей пополам?—Умеем ли мы разделить данную прямую сразу на 40 одинаковых частей? Нельзя ли вместо этого разделить данную прямую сначала на 10 одинаковых частей, потом каждую из полученных частей — на 4 одинаковые части? и т. п. — Можно найти и более конкретные примеры. Но не в этом, как отмечено выше, главная трудность, а в том, чтобы учащиеся не сразу находили все частное от разделения делимого на 10, на 100 и т. д. равных частей, а делили бы только те части делимого, которые могут дать нужные цифры частного. Научить этому можно только путем целесообразных упражнений.

Начать эти упражнения можно с повторения деления многозначных чисел на числа первого десятка. Эти важные повторительные упражнения вернут детей к основной идее нахождения цифр многозначного частного. Эта идея составляет главную идею деления, от которого получаются цифры многозначного частного одна за другой. До нее человечество добралось в течение сотен лет упорнейшего труда и борьбы с трудностями деления.

Рассуждения при нахождении цифр многозначного частного. Требуется разделить 4261 на 40. Для отыскания одного только частного можно 4261 разделить на 10, получим 426 (остаток отбрасываем), а от разделения 426 на 4, получим 106 (остаток опять отбрасываем). Но разделить 4261 на 40 значит найти не одно только частное, но и остаток. А потому будем вычислять так: если 4 тысячи разделить на 40 равных частей, то в каждой части тысяч не будет; 42 сотни разделим на 40 равных частей, в каждую часть попадет одна сотня, — записываем в частное 1 сотню; две сотни остаются на руках; больше сотен в частном не будет; 26 десятков на 40 равных частей, десятков не будет, — записываем на месте десятков нуль; 261 единицу делим на 40 равных частей так: разделим на 10 равных частей, получим 26 единиц; 26 единиц делим на 4, получим 6 единиц; записываем 6 на месте единиц и т. д. Только настойчивые упражнения могут привести к должному уразумению сущности производства деления многозначного числа на многозначное.

Механизм деления. Надо ли сообщать известный механизм («алгорифм») деления («40 в 42 один раз, пишу 1, остается два, сношу 6; сорок в 26 не содержится, пишу нуль, сношу 1; сорок в 261 единице — 4 в 26 6 раз, пишу 6; шестью-нуль 0, шестью-четыре — 24; остаток 21»)? До этого механизма учащиеся должны добраться и дорасти. Записывать на занимающей нас ступени частные произведения делителя на получаемые цифры частного

$$\begin{array}{l} 4261:40=106 \\ \underline{40} \\ 261 \\ \underline{240} \\ 21 \end{array}$$

и остатки тоже не нужно, но по другой причине. Механизм преждевременен, а записывание остатков и частных произведений почти бесполезно. Но если сам учитель привык к этому записыванию, то оно особенного вреда учащимся уже не принесет. Только при делении на 10, на 100 и т. д. совершенно нецелесообразно записывать произведения цифр частного на 10, на 100 и т д. Желательно, конечно, избегать этого многописания. При делении же на круглое число, отличающееся от единицы высшего разряда, записывать можно остатки так:

$$\begin{array}{l} 4261:40=106 \\ 261 \\ 21 \end{array}$$

Но необходимость в такой записи не всегда имеется налицо: иногда остатки очевидны, и видеть их учащийся в состоянии.

В первых упражнениях в делении на круглое число можно рядом с цифрой частного или над нею проставить сокращенное наименование разрядов, но потом это наименование можно опускать, сначала имея его в виду, а затем чисто механически записывая цифру за цифрой. Только при многочисленных упражнениях в этом направлении, от настойчивости учителя в проведении методических точек зрения в обучении и от интереса учащихся к планомерному вычислению каждой цифры частного в отдельности зависят дальнейшие успехи в производстве деления. Этот интерес возбудить нетрудно, внеся намеченные выше точки зрения в обучение и пользуясь ритмическим производством вычисления.

Правила нахождения цифры частного. Когда делитель — однозначное число единиц высшего разряда, нужно, как известно, различать два случая: 1) когда частное — однозначное число и 2) когда частное — многозначное. Первый случай не представляет особого затруднения, потому что здесь вопрос прямо сводится к вопросу о том, сколько раз делитель содержится в делимом: 831 разделить на 300; 300 в 831 содержится только 2 раза, остается остаток; или 960 на 200; 200 в 960 содержится 4 раза, остается остаток и т. д. Несколько иначе обстоит дело тогда, когда мы делим такие числа (как, например, 2456 на 400 и т. п.), что число цифр делимого на одну единицу больше числа цифр делителя, а в частном получается однозначное число. Пусть требуется разделить 2556 на 400. Сколько раз 400 содержится в 2556? Эта задача несколько затруднительнее. Поэтому лучше обратиться к делению на известное число частей: 2556 надо разделить на 100 равных частей, получится 25 единиц, а если 25 разделить на 4 равные части, то получится 6; значит, 400 содержится в 2556 шесть раз. Другой пример: 2556 на 600. Сколько раз 600 содержится в 2556, можно только сказать либо на основании усвоенного механизма (столько раз, сколько раз 6 содержится в 25), либо на основании рассуждения (две тысячи все равно, что 20 сотен, у нас еще есть 5 сотен, всего 25 сотен; в 25 сотнях 4 сотни содержатся 6 раз), либо, наконец, можно таким образом: 2556 разделим на 100 частей, получим 25, полученное разделим на 4, получим 6, и т. д. Очевидно, что этот прием удобнее других. В случае достаточного количества упражнений, подобных только что приведенному, можно скоро достигнуть того, что учащиеся благодаря интуиции «глазами» увидят, что цифра частного получается от разделения первой цифры или первых двух цифр делимого на первую цифру делителя. Правила этого им сообщать не надо. Оно будет полезно только в том случае, если ученики сами его подметят. Чтобы не склонять числительных имен и не говорить: «в двух тысячах четырехстах пятидесяти шести» и т. д., можно говорить, что в числе 2456 и т. д. В случае многозначного частного, когда делитель — многозначное число (200, 300 и т. д., 2000, 3000 и т. д.), приходится рассуждать с самого начала так, чтобы ученики поняли, что мы последовательно вычисляем, как велики разрядные числа частного: сначала — как велика, скажем, цифра десятков тысяч, далее — цифра сотен, цифра десятков и цифра единиц, начиная с цифры высшего разряда. Пусть требуется разделить 75 638 на 200 равных частей. Говорить в этом случае «двести в семистах пятидесяти шести» с самого начала крайне неудобно, потому что учащиеся не обязаны, на основании раньше усвоенных знаний, сообразить, что так можно рассуждать. На самом деле можно сначала говорить так: «если семь десятков тысяч разделить на двести одинаковых частей, десятков тысяч в частном не получится; если семьдесят пять тысяч разделить на двести одинаковых частей, в частном тысяч тоже не получится; если семьсот пятьдесят шесть сотен разделить на двести одинаковых частей, то в частном должны получиться сотни; можно, значит, первую цифру частного пометить буквой с (сотни). А сколько получится сотен, можно рассчитать двояким способом: «или 756 разделить на 100, получится 7, а полученные семь разделить пополам, получится три»; или же сказать так: двести содержится в числе семьсот пятьдесят шесть 3 раза», и записать 3. В этом случае записывать частные произведения делителя на получаемые цифры частного уже дозволительно. Можно, конечно, обойтись и без этих записей, записывая только остатки, так как частные произведения круглых сотен на цифры частного легко вычисляются. Но если записывать частные произведения в этих случаях, то это будет первый случай, когда деление производится со значительным количеством записей, хотя оно еще и не сведено к обычно практикуемому механизму: «двести в семистах пятидесяти шести — три раза» и т. д.

Упражнения в механизме деления.

Этому последнему механизму надо посвятить отдельные упражнения. Самостоятельные же упражнения учащихся, пока они еще не усвоили материала, подготовляющего к алгорифму деления, могут относиться к любой из предыдущих ступеней, на которые учитель считает почему-либо необходимым перенести внимание учащихся. Алгорифму деления должно посвятить (как это отмечено выше) особое место. Против «механизма» можно возражать только тогда, когда с него начинают обучение производству деления, когда учитель удовлетворяется тем, что он сам несколько поговорит или «объяснит», «растолкует» ученикам, в чем дело, и когда он требует от учеников неосмысленного способа производства действия по известному шаблону. Если же учащиеся сами, путем опыта и наблюдения, пришли к механизму, или учитель умелой рукой направил их к нему, то алгорифм этот не только не вреден, но полезен, так как в конце концов ведь учащийся должен же научиться вычислять более или менее быстро. Нужно достигнуть того, чтобы учащийся не задумывался над причинами принятого им способа вычисления, если это почему-либо в данном случае не требуется. Но если это почему-либо требуется, учащийся должен быть в состоянии вернуться к рассуждениям и объяснениям, ведущим к механизму.

Алгорифм деления многозначного числа на однозначное число единиц высшего разряда, если цифр в частном более одной, сводится в конце концов, как это известно читателю, к очень большому количеству простых манипуляций. Прежде всего нужно отделить, считая от левой руки к правой, в делимом столько цифр, сколько их необходимо и достаточно, для того чтобы получить первую цифру частного. Между последней цифрой, отделенной от левой руки к правой, и следующей за ней цифрой делимого можно сверху поставить точку. Отмеченное слева число мы делим на делителя, записываем цифру частного и умножаем эту цифру на делителя. Это деление в занимающем нас случае сводится к разделению числа, обозначаемого первой или первыми двумя высшими цифрами делимого, на первую цифру делителя. Мы записываем цифру частного и частное произведение ее на делителя в надлежащем месте и делаем вычитание. В рассуждении можно обращать этот остаток в единицы следующего разряда, прибавить те единицы того же разряда, которые есть в делимом, и произвести дальнейшее деление. Вот тут-то и требуется поставить точку между «снесенной» цифрой делимого и следующей. Эти точки, которые ставятся в промежутки между цифрами делимого сверху, играя, казалось бы, только ничтожную вспомогательную роль, тем не менее помогают вычисляющему не ошибаться в так называемом «сносе» следующих цифр делимого в остаток. Что касается самого механизма нахождения каждой отдельной цифры частного, то он выше описан и для учеников должен явиться результатом предварительной методически-планомерной работы. Он важен не только для случаев, когда делитель — однозначное число единиц высшего разряда (т. е. когда он круглое число), но для случаев, когда делитель — число закруглимое, и даже для случаев, когда делитель — число незакруглимое. В этом последнем случае, как в том убедимся ниже, часто приходится его применять два раза. Очевидно, что можно довести учащихся до механизма вычисления, научив их тем рассуждениям, на которых основан этот механизм. А механизм вычисления сводится только к ряду слов и к ритмической и своевременной записи отдельных цифр частного и частных произведений делителя на цифры частного. Конечно, не словам и не записям должно учить, а тому, что лежит в основе целесообразных вспомогательных слов и записей.

Ошибочный пропуск нулей в частном.

Наибольшее количество ошибок, которые встречаются у учащихся, помимо неверных цифр частного, особенно в случаях деления на незакруглимое число, сводится к ошибочному пропуску нулей в частном. Остаток получился, сносится следующая цифра делимого, но получается новое число, которое на делителя тоже не делится нацело без остатка, и вот учащийся забывает поставить нуль в частном и торопится «снести» еще одну цифру делимого. После этого он продолжает деление, пропустивши в частном нуль. Таким образом, одна или несколько цифр частного пропадают, и частное получается совершенно неверное, меньше истинного. Особенно часто эта ошибка наблюдается в случаях, когда последняя цифра частного — нуль и когда после сноса последней цифры делимого получается число, меньшее, чем делитель; например при делении:

$$\begin{array}{ll} 24021:40=600, & 25502:50=510 \\ \quad 21 & \quad 50 \\ & \quad\; 2 \end{array}$$

В этих случаях, если «снос» цифры делимого не отмечается точкой и если учащийся работает не ритмически, он легко может здесь пропустить один из нулей частного.

Пусть, например, требуется разделить 424 823 на 600 равных частей; первая цифра частного получится от разделения 4248 на 600, эта цифра 7; в первом остатке получается сорок восемь, снеся цифру 2, получим четыреста восемьдесят два, которых тоже нельзя разделить на 600 равных частей так, чтобы в каждой части получилось по нескольку единиц следующего за уже вычисленной цифрой разряда. Надо обратиться к вопросу о том, что обозначает цифра 7; тысячи ли, или сотни, или десятки? Что мы делим на 600? (4248.) — Чего 4248? (4248 сотен.) — Мы, значит, получили семь сотен в каждой части. Когда мы снесли цифру 2, что мы получили? (482.) — Чего 482? (482 десятка.) — После цифр сотен направо от нее какая идет цифра? (Цифра десятков.) — Сколько отдельных десятков должно получиться от разделения четырехсот восьмидесяти двух десятков на шестьсот одинаковых частей? (Десятков не получится ни одного.) — Как это записать? и т. п.

Последние цифры делимого — нули, делитель — круглое число.

Следующее место занимает деление многозначного числа, в котором последние цифры нули, на круглое число, т. е. на однозначное число единиц какого-либо высшего разряда. При этом в записях делимого и делителя может на последних местах стоять одинаковое число нулей, в делителе последних нулей может быть больше, чем последних нулей в делимом, и, наконец, в делимом их может быть больше, чем в делителе. Есть искушение просто зачеркнуть одинаковое число нулей в делимом и делителе и произвести действие над полученными числами. Но это дозволительно только в следующих случаях: а) когда деление совершается без остатка; б) когда мы легко разбираемся в вопросе о том, что нужно сделать с остатком, если деление совершается с остатком; в) если мы частное выразим в виде дроби; г) если его выразим в виде смешанного числа и д) его выражаем в виде десятичной дроби. Если нам требуется разделить 72 600 на 500, то, разделив, не производя сокращения делимого и делителя, на 500, мы получим в частном 145, а в остатке 100. Если же мы сократим делимое и делителя на 100 и разделим 726 на 5, то мы в частном получим 145, но в остатке — только одну единицу. На этой ступени, в виду затруднительности вопроса, приходится отказаться от этого сокращения.

Нулей в делимом и делителе зачеркивать не надо, вот что ученики должны понимать.

Деление на закруглимые числа.

Когда учащиеся совершенно освоятся с делением многозначного числа на любое круглое число, т. е. на однозначное число единиц высшего разряда, можно перейти к делению на всякое многозначное число. При этом полезно различать: 1) деление на закруглимое многозначное число и 2) деление на число незакруглимое.

Делитель — закруглимое число.

При этом могут быть два случая, а именно: а) в делимом и в делителе одно и то же число цифр, как, например, 65 и 21 или 86 и 22 и т. п., и б) в делимом одной цифрой больше, чем в делителе, например 163 разделить на 29, или 151 разделить на 62, или 216 на 39 и т. п. Прежде всего учащиеся должны уметь рассчитать число цифр частного. Это прямо необходимо. Так как в отмеченном только что случае в частном всего только одна цифра, то это дается очень легко. Далее учащиеся должны себе усвоить, что когда надо разделить, скажем, число 738 на 29 равных частей, то мы можем определить цифры частного, считая, что надо разделить не на 29 равных частей, а на 30 частей, так как это гораздо легче рассчитать (вычислить). При этом мы не делаем никакой ошибки, потому что мы определяем только цифру частного. Если же при этом остается остаток, то уже остаток должно вычислить сообразно с условиями задачи, а именно необходимо считать, что в каждую часть попадают два десятка, а таких частей на самом деле не тридцать, а только двадцать девять. Поэтому нужно 2 десятка помножить на двадцать девять, или двадцать девять (а не 30) помножить на 2 десятка, и полученное вычесть из делимого. Таким образом закругление делителя облегчает отыскание частного, но не влияет на остаток. Можно обратиться к конкретному примеру такого рода (при этом закруглимое число меньше того круглого, к которому мы его приближаем). Предположим, что надо разделить известное количество предметов (рублей, копеек, карандашей) двадцати девяти человекам; предполагаем, что людей тридцать, разделим данное число предметов на 30 одинаковых частей, но, конечно, только мысленно прикидываем, что может получиться в каждой части; мы таким образом получаем величину этого частного. Но затем мы вычисляем, сколько будет роздано двадцати девяти человекам, чтобы узнать, как велик будет остаток. Остаток же мы в свое время примем во внимание. Надо избегать непрерывных величин (длины, веса и т. п.) в качестве конкретного примера, потому что непрерывную величину можно сразу разделить на любое число равных частей. Лучше брать группы отдельных предметов. Учащиеся не сразу понимают, что мы только при расчете цифры частного облегчаем себе вычисление, пользуясь другим делением. Требуется делить на 29, а мы считаем временно, что делитель не 29, а 30; требуется разделить на 31, мы делим тоже на 30 и т. п. Дети, после работы над наглядными пособиями и после достаточной работы воображения над вопросами и задачами этого рода, могут понять, что никакой ошибки мы при этом не делаем. Лучше всего это постигается учениками на примере, действующем, как выше уже отмечено, на воображение учеников. Разделить на 30 одинаковых частей легче, чем на 29 или на 31, т. е. легче рассчитать частное, а на величину частного наше предположение может и не повлиять, а если повлияет, то что делать? Исправим частное. Повлияло бы предположение на остаток, если бы мы приняли за делителя не данное число, а круглое. Цель будет лишь в том случае достигнута, если ученики поймут, что каждую цифру частного легче угадать, закругляя делителя, и что мы, поступая так, берем наиболее подходящее частное, а не вычисляем его наудачу. Дальнейшие упражнения должны касаться закругления трехзначных делителей, затем четырехзначных и т. д. при однозначном частном.

Делитель — многозначное закруглимое число.

Деление на многозначное закруглимое число не представляет собой существенно нового в логическом отношении. Оно требует только большого количества вычислений для отыскания остатка. Здесь также придется снова обратиться к составлению части таблиц закруглимых чисел в пределах некоторых тысяч. Например, закруглимы числа:

6001 6002 ... 6200
1001 1002 ... 1200 и т. п.
и
6801 6802 ... 6999
1801 1802 ... 1999 и т. п.

Чтобы дети лучше усвоили себе самый способ деления многозначного числа на закруглимое многозначное число, полезно проделать некоторое количество систематических упражнений в разделении одного и того же многозначного числа на числа закруглимые до величины одного и того же круглого числа, например на 398, 399, 401, 402 и т. п.

Делитель — закруглимое число, частное — многозначное число

Деление многозначного числа на закруглимого делителя, дающее в частном многозначное число, не представляет собой ничего существенно нового по сравнению с делением на круглое число, дающим многозначное частное. Методические приемы для отыскания каждой отдельной цифры частного, какие употребляются для отыскания частного,— те же, что в том случае, когда оно — однозначное число. Те же ошибки в пропуске нулей в частном, которые возможны и при делении на круглое число, и те же приемы для освобождения вычислений учащихся от этих ошибок. Дабы деление на закруглимое число можно было свести к делению на число круглое, следует обратиться к примеру, действующему на воображение учеников и способному внушить им, что, задаваясь цифрой частного, мы тотчас же проверяем, точно рассчитываем — пригодна ли для нас найденная нами, сначала как будто наугад, цифра частного. Для этой цели можно прибегнуть к следующему, действующему на воображение учеников примеру: 8 тысячных билетов (т. е. билетов, из коих каждый стоит одну тысячу рублей, — такие билеты, хотя и не кредитные, есть!), 7 сотенных, 5 десятирублевок и 6 рублевок надо раздать 31 человеку так, чтобы всем досталось денег поровну. Запишем это так:

т.	с.	д.	е.
8	7	5	6:31.

Тысячных билетов никто из них не получит (для того чтобы они могли получить хотя бы только по одному тысячному билету, необходимо было бы иметь в своем распоряжении 31 тысячный билет, а их у нас — всего 8 штук). Разменяем эти 8 билетов на сотенные бумажки, за каждый дадут 10 сотенных, а за 8 дадут 80 сотенных, да у нас еще есть 7 сотенных, стало быть всех сотенных билетов у нас будет 87 шт. Если бы людей было 30, то каждый получил бы по две сотенные сторублевки. Дадим 31 человеку по две бумажки; мы раздадим таким образом всего 62 сторублевки. Посмотрим — что из этого выйдет, а запишем это так (для ясности еще раз приводится первая строчка):

т.	с.	д.	е.		с.
8	7	5	6:31	=	2
6	2				

Чтобы узнать, сколько сотенных билетов осталось нерозданных, вычтем 62 из 87; получим, что «на руках» осталось 25 сотенных бумажек. Рассчитали хорошо: осталось столько сотенных билетов, что из них уж нельзя отдать никому из наших получателей ни одной сторублевки. — Разменяем оставшиеся сотенные поэтому на десятирублевки (на красненькие); сколько за них дадут десятирублевых бумажек? и т. д.

Способ деления. Опыт показывает, что прежде чем обратиться к делению на закруглимое число, некоторое время надо посвятить повторительным упражнениям разного рода. Иногда надо не надолго вернуться к делению числа многозначного на однозначное число в двух случаях (когда число цифр частного равно числу цифр делимого и когда оно на одну цифру меньше); далее — к делению на одну единицу какого-либо высшего разряда, затем к делению на любое однозначное число единиц высших разрядов, на каковом делении следует несколько остановиться, и наконец — к делению на закруглимое двухзначное число. Механизм («алгорифм») этого последнего деления сводится к тому, что данного делителя закругляют, а затем первую цифру или первые две цифры делимого или делимой части его делят на первую цифру круглого делителя. Так, если требуется разделить 92 на 28, то цифру частного находим, закруглив 28 и разделив 92 на 30 или 9 — на 3. А если надо разделить 237 на 48, мы закругляем 48 и делим 237 на 50 или 23 на 5 и т. п. Подобным же образом поступают при закруглимом трехзначном, четырехзначном и т. д. числах. Достойно, между прочим, внимания, что жизнь и наука редко требуют разделения на многозначное число, в письменном обозначении которого более четырех или пяти цифр.

38-я ступень. Делитель — незакруглимое или трудно закруглимое число.

Только на тридцать восьмой ступени мы приступаем к делению на незакруглимое число. Раньше всего учащийся должен вполне усвоить себе, что всякое число, не принадлежащее к числу закруглимых, для нас будет числом незакруглимым. Пусть у меня 2511 рублей. Можно ли сказать, что у меня с небольшим две тысячи рублей? Нет, этого сказать нельзя, потому, что 2511 рублей значительно больше, чем 2000 рублей. Можно ли сказать, что у меня без малого три тысячи? Тоже нельзя, — до трех тысяч нехватает сравнительно большой суммы денег: четырехсот восьмидесяти девяти рублей. Такими примерами можно достигнуть того, чтобы дети уяснили себе, что не закруглимы те числа, которые явно близки к среднему между двумя ближайшими к ним круглыми числами (к 15, к 25, к 35 и т. д., к 150, к 250, к 350 и т. д., к 1500, к 2500, к 3500 и т. д.). После этого можно достигнуть того, чтобы учащиеся более точно усвоили себе, что числа, заключенные между 221 и 280, между 321 и 380, между 4201 и 4800, между 5201 и 5800 и т. п. — числа незакруглимые. У детей явится естественный вопрос, почему мы числа 5199 и 5200 считаем еще закруглимыми числами, а 5201 или 5202 — уже числом незакруглимым. Появление этого вопроса надо не только считать естественным, но признать прямо полезным в образовательном смысле. Он только укрепит в учащихся нужную для дела твердость и рассудительность при делении на многозначное число (что крайне важно с практической точки зрения) и даст им возможность уразуметь, что к смыслу слов надо относиться серьезно и что раз смысл какого-нибудь слова установлен, то в этом смысле и надо его употреблять. Это полезно и в смысле воспитательном.

Первые упражнения 38-й ступени.

Когда все это усвоено, надо обратиться к случаям разделения многозначного числа на явно незакруглимое число 251, 249, 454, 348 и т. п. Для первых упражнений это очень важно. Если частное — многозначное число, то приходится для отыскания каждой цифры его делить только часть делимого на делителя, а именно такую часть, чтобы частное было числом однозначным. А потому надо брать сначала примеры, в которых делитель — явно незакруглимое число, а частное — число однозначное. При этом следует различать два случая: а) когда в делимом столько же цифр, сколько в делителе, и б) когда в делимом одной цифрой больше, чем в делителе.

Важность планомерной работы на 38-й ступени.

Искусство верно «задаваться» цифрами частного в случаях, когда делитель — число, явно незакруглимое или трудно закруглимое, близкое к явно незакруглимому числу, достигается путем многочисленных упражнений в планомерном взвешивании цифр частного. Начинающему читателю, может быть, чужды точки зрения, намечаемые относительно деления многозначных чисел в этой книге и в «Новых задачниках» того же автора для учителей и для учеников начальных школ. Может быть, он предпочитает тот способ вычисления частного, который для него привычен и удобен и который можно назвать «угадывающим». Но если он желает довести учащихся до полной власти над действием деления во всех случаях, то целесообразнее приучать детей не к угадыванию, а к совершенно спокойному (что часто несовместимо с угадыванием), уверенному и, если можно так выразиться, строго рассудительному способу производства этого действия. Сначала надо рассуждать подробно, указывая, какие разряды должны и могут получиться в частном, обращая внимание на то, что, прежде чем делить, надо разобраться, будут ли в данном числе единицы наивысшего разряда, единицы следующего и т. д. Но это относится уже к делению многозначного на многозначное, когда частное — тоже многозначное число.

Пробные частные на 38-й ступени.

Учитель и учащиеся должны сродниться с привычкой находить, при разделении на незакруглимое число, сначала две пробные цифры для однозначного частного, и на основании этих частных брать частное, заключающееся между ними, или из них взять меньшее. Например, при разделении на 35 надо сначала вычислить, сколько получилось бы, если бы делимое разделили на 30, затем — вычислить, сколько получится при разделении на 40, и, наконец, узнав эти цифры, «задаться» нужным частным, наиболее «безопасным», если можно так выразиться, в данном случае. При этом важно, чтобы сам учитель не торопился и таким образом приучал детей к неторопливому, спокойному и особенно сознательному производству интересующего нас действия. При этом бывают следующие случаи: а) пробные частные, найденные помощью двух закруглений, равны между собой; при делении, например, 475 на 85, мы, деля 475 на 80, получаем в частном 5, и деля на 90, получаем тоже 5; б) из двух пробных частных одно больше другого только на одну единицу: при делении 356 на 45 мы, деля делимое на 40, получаем в первом пробном частном 8, а деля его на 50, получаем во втором пробном частном 7; в) из двух пробных частных одно более другого на две единицы: при делении 156 на 25, мы, деля делимое на 20, получаем в первом пробном частном 7, а деля на 30, во втором — 5; наконец, г) из двух пробных частных одно значительно больше другого: при делении 112 на 14, мы, деля на 10, получаем в частном 9 (получить в частном 10 и больше мы не можем), а деля на 20, получаем в частном 5; при делении же 217 на 24, мы, деля делимое на 20, получаем в пробном частном 9, а деля на 30, во втором — 7.

Умение сразу во всевозможных случаях более или менее верно «задаваться» цифрой частного дается практикой, но верное, если так можно выразиться, взвешивание этой цифры с помощью не угадывания только, а также сознательного выбора подходящей цифры, все-таки может быть скоро приобретено учениками. Для этого учитель должен требовать не механического производства деления, которое при незакруглимом делителе редко дает верные цифры, а требовать также, чтобы дети различали намеченные выше случаи: а) когда оба пробных частных — одно и то же число, то они должны смело принять это число за истинное частное; б) когда разность между пробными частными — одна единица, то они должны за истинное частное принять меньшее из частных; в) если одно пробное частное более другого на две единицы, то ученики должны принять за истинное частное то число, которое заключается между пробными частными; г) если между пробными частными заключаются два числа, то из этих двух лучше выбрать меньшее; д) если между пробными частными заключается несколько целых чисел, то надо взять среднее между ними, и из двух средних — меньшее. Пусть дан пример: 17 753 разделить на 36.

$$
\begin{array}{l}
17753:36 = 4\text{ с. } 9\text{ д. } 3\text{ е.}\\
\underline{144}\\
\;\;335\\
\;\;\underline{324}\\
\;\;\;\;113\\
\;\;\;\;\underline{108}\\
\;\;\;\;\;\;\;5
\end{array}
$$

Рассуждать можно примерно следующим образом: один десяток тысяч разделить на 36 равных частей, — десятков тысяч в каждой части не получится. 17 тысяч разделить на 36 равных частей, в частном — тысяч также не получится; 177 сотен разделить на 36 равных частей, получатся сотни. Сколько? Если 177 разделить на 30 частей, то в каждой части получится целых сотен 5; если же 177 сотен разделить на 40 равных частей, то получатся 4 сотни. Возьмем поэтому 4 сотни в частном. — Теперь рассчитаем, сколько во всех 36 частях окажется сотен и сколько осталось сотен, не разделенных на части, и т. д. При этом в некоторых случаях могут получиться две пробные цифры, различающиеся более, чем на одну единицу. Например, в нашем примере 335 десятков, разделенные на 30 частей, дадут 11 целых десятков в каждой части, что невозможно, а 335 десятков, разделенные на 40 частей, дадут только 8 целых десятков в каждой части; между 8 и 11 два числа, из которых одно — десять, что невозможно; поэтому мы возьмем 9.— При этом, конечно, только вначале полезно отмечать начальной буквой название получаемого в частном разряде. Знаков же вычитания писать, строго говоря, решительно не для чего, так как вопроса о том, какое в данном случае надо совершить действие, здесь и быть не должно.

Случаи трудно закруглимых делителей. Когда учащиеся освоились с делением на явно незакруглимые числа и научились без особенных колебаний верно записывать цифры частного в этих случаях, можно перейти к делению на трудно закруглимые числа. Но в этих случаях учащиеся должны предпочитать «слабые» цифры более «сильным». Пусть требуется разделить 834 на незакруглимое число 177; делитель—трудно закруглимое число, но все же—закруглимое. Взвесив частные 800 : 100, т. е. 8, и 800 . 200, т. е. 4, получим, что среднее частное было бы 6; вернее было бы взять 5; но 177 так близко к ближайшему большему круглому числу, что лучше взять 4. Если бы делимое было не 834, а 898, то мы получили бы такую запись:

$$\begin{array}{l} 898:177=\cancel{4}=5 \\ \underline{708} \\ 190 \\ \underline{177} \\ \ \ 13 \end{array}$$

т. е. пришлось бы сделать одну поправку в частном, притом прибавить к нему только одну единицу, но не пришлось бы делать поправок в частном произведении делителя на частное.

Другой пример, в котором трудно закруглимый делитель ближе к меньшему круглому числу: 834 разделить на 124; разделив 800 на 100, получим в частном 8, а разделив 800 на 200 получим в частном 4. Среднее между ними 6; но 124 ближе к сотне, чем к двум сотням; может быть можно взять и 7. Не желая делать излишних поправок, возьмем лучше 6. Получим:

$$\begin{array}{l} 834:124=6 \\ \underline{744} \\ \ \ 90 \end{array}$$

Если бы мы побоялись рискнуть и взяли не 6, а 5, то пришлось бы сделать одну поправку в частном и произвести еще одно вычитание. Но если бы мы взяли не 6, а 7, то тогда пришлось бы вычеркнуть частное произведение или, как это часто делают учащиеся, вычеркнуть часть его, не доведя умножения до конца, что вносит беспорядок в вычислении. Аккуратная запись в таких случаях может иметь такую форму:

$$\begin{array}{l} 834:127=\cancel{7}=6 \\ \underline{\cancel{889}} \\ 834 \\ \underline{762} \\ \ \ 72 \end{array}$$

При этой записи делимое снова переписано (что важно, при многозначном частном, для верного «сноса» следующих цифр делимого), и слишком большое частное произведение вычислено до конца. Это последнее вычисление полезно во избежание торопливости и ненужного перерыва в работе и даже во избежание ошибок. Иногда это неверное частное произведение может быть полезно для суждения о том, не надо ли записанную цифру частного уменьшить не на одну, а на целых две единицы.

Угадывание и «черновое» вычисление частных произведений.

Во всяком случае важно спокойное и планомерное взвешивание искомой цифры частного, связанное с ясно формулированными рассуждениями, совершенно посильными для учащихся и никогда не вредными. Особенно они нужны, когда делитель принадлежит к числу трудно закруглимых чисел, близких к границам между ними и закруглимыми с одной стороны или между ними и незакруглимыми — с другой. Рассуждения эти часто на практике заменяются либо простым угадыванием, либо же незаписанным вычислением (приближенным или точным) частного произведения, которое получилось бы, если бы мы взяли такую-то цифру в частном. Угадывание, конечно, нельзя считать способом вычисления. Что же касается незаписанного, как бы «чернового» вычисления, то приближенное вычисление учащимся на этой ступени недоступно, а полное («черновое») вычисление не гарантировано от излишних ошибок и часто представляет собой излишнюю и утомительную затрату сил и времени.

Случаи особого рода.

Когда все это усвоено, следует перейти к некоторым особым случаям деления двухзначного числа на однозначное и двухзначное и деления трехзначного на двухзначное. В этих особенных случаях, взвешивая цифру частного, надо соблюдать некоторую осторожность по отношению к тому частному, которое получается при делении. Иногда возможно не только держаться правила, но также пользоваться соображением. Всегда угадывать не надо, но иногда возможно угадать частное с тем, чтобы быстро и изустно рассчитать, подходящая ли взятая цифра. Пусть, например, 57 надо разделить на 19. Если держаться только требований рассудительности, то надо закруглить 19 до двадцати, и выйдет, что в частном получится 2; но если взять в частном 3, потому что число 57 близко к 60, и изустно вычислить, сколько будет трижды девятнадцать, то окажется, что верное частное — три, а не два. Ученики также могут и должны обращать внимание на то, что в данном случае искомая цифра, очевидно, должна быть такая-то. Рассудительность в деле образования и самообразования никогда не вредна, — особенно для начинающего, каковым всегда был и останется учащийся. Но отсюда вовсе не следует, что учащийся письменному производству деления должен закрывать глаза на индивидуальность данных чисел. Это внимание, впрочем, нисколько не противоречит рассудительности, а является только ее следствием. Если, например, требуется найти частное 412 : 251, то очевидно, что 251 в четырехстах двенадцати не содержится больше одного раза, и никаких особых приемов тут не нужно. Этого результата можно достигнуть и с помощью двух пробных частных, но в них нет необходимости, потому что дважды 251, очевидно, больше чем 412. Когда у нас есть остаток тысяча шестьсот тринадцать, и его требуется разделить на 251, то опять-таки очевидно, что цифра частного будет 6, и т. п. Правило, осторожность и вообще твердые навыки в рассуждении — вещи очень хорошие, но здравый смысл в каждом частном случае не должен терять при этом своих прав. К развитию воли и этого важного качества ума учащихся и надо стремиться. Но, конечно, требовать находчивости от всех детей во всех случаях, по меньшей мере, нерассудительно. Полезно при проработке упражнений этого рода иметь в виду для этой цели таблицу следующих двухзначных и трехзначных чисел, делящихся на двухзначные же и представляющих собой случаи, в которых закругление делителя либо невозможно, либо недостаточно быстро ведет к цели.

51	17 × 3	98	49 × 2	121	11 × 11
52	13 × 4	102	17 × 6	123	41 × 3
57	19 × 3	104	13 × 8	129	43 × 3
68	17 × 4	111	37 × 3	133	19 × 7
76	19 × 4	112	16 × 7	136	17 × 8
78	13 × 6	114	19 × 6	138	23 × 6
87	29 × 3	116	29 × 4	141	47 × 3
91	13 × 7	117	13 × 9	143	13 × 11
92	23 × 4	119	17 × 7	147	49 × 3

(Шохор-Троцкий, Методика арифметики, ч. 1, изд. 1903 г., стр. 133—145).

Ф. И. Егоров.

Изменения результатов в связи с изменением данных.

221. Изменения суммы. Изменения суммы от изменений в слагаемых настолько легко и непосредственно вытекают из основного понятия о сложении, что могут быть выведены с детьми из этих понятий на отвлеченных примерах; задачи здесь служат главным образом для иллюстрирования и применения этих изменений. Прежде всего следует разъяснить детям положение, что каждая единица, прибавленная к слагаемому, должна войти и в сумму, ибо сумма содержит в себе все единицы, заключающиеся в слагаемых. Для этой цели может служить задача:

123)[1] Сложить 25 с 29; сложить 26 с 29. Какая из этих сумм больше?— Почему?

Она требует сравнения двух сумм, в которых вторые слагаемые одинаковы, а первое слагаемое второй суммы превышает соответствующее слагаемое первой на единицу. Результат сравнения двух сумм разъясняется сравнением их слагаемых.

Вывод формулируется в следующих словах:

От прибавления единицы к одному из слагаемых и к сумме прибавляется тоже единица, потому что сумма должна заключать в себе все единицы, которые находятся в слагаемых, следовательно, в нее должна войти и та новая единица, которую только что прибавили к слагаемому.

Для изменения суммы от прибавления к слагаемому нескольких единиц может служить задача:

124) В школе 3 класса: в I классе 20 мальчиков и 15 девочек, во II— 15 мальчиков и 16 девочек, в III — 10 мальчиков и 10 девочек. Сколько мальчиков в школе? — Сколько девочек? В каком классе мальчиков больше, чем девочек?

[1] Числа со скобками — это нумерация задач, разобранных в методике.

Работа ведется так же, как и с предыдущим примером. Затем от детей требуются ответы на вопросы: как изменяется сумма от прибавления к слагаемому 3, 5, 17 единиц, и, наконец, на общий вопрос, как изменяется сумма от прибавления к слагаемому нескольких единиц и от чего происходит такое изменение. Подобным же путем проводятся изменения суммы при вычитании из слагаемого одной и нескольких единиц, причем дети разбирают сперва несколько частных случаев и затем выводят положение в общем виде. После этого дети упражняются в определении изменений суммы при одновременном увеличении двух слагаемых и в определении измененной суммы по данной сумме и по данным изменениям в слагаемых. Для применения всего изложенного может служить задача:

125) На одной фабрике было 240 работников и 160 работниц, а на другой — работников на 50 больше, а работниц — на 30 меньше, чем на первой. На какой фабрике больше работающих?

Дети обыкновенно решают ее, определяя число всех работающих на первой и на второй фабриках и находят разность между этими числами, для чего им приходится произвести 3 сложения и 2 вычитания. Одобрив это решение, как верное, преподаватель должен указать иное решение, основанное на изменениях суммы от изменений в слагаемых и приводящееся только к одному вычитанию:

Число работающих на каждой фабрике есть сумма числа работников и числа работниц; первое слагаемое второй суммы на 50 больше, а второе на 30 меньше соответствующих слагаемых первой суммы, следовательно, вторая сумма больше первой на 50—30, т. е. на 20.

Этот прием решения дети должны самостоятельно приложить к задаче:

126) В двух кошельках лежало 1500 руб.; из первого истратили 250 руб, а во второй вложили 150 руб. Сколько денег стало в обоих кошельках.

222. Дальнейшие упражнения состоят:

1) в определении изменений суммы, при одновременном увеличении одних слагаемых и уменьшении других;

2) в определении измененной суммы, когда дана начальная сумма и изменения, сделанные в слагаемых;

3) в применении выведенных положений к производству вычислений и решению задач;

4) в определении изменений, которые нужно сделать в слагаемых, чтобы достигнуть желаемого изменения в сумме.

Приведем примеры некоторых из перечисленных упражнений: 5700+3800 + 1400.

Решение. Вместо данных слагаемых берем 6000, 4000 и 1000, которые в сумме дадут 11 000; но так как при этом мы прибавили к первому слагаемому 300 и ко второму 200, а от третьего отняли 400, то полученная сумма на 300 + 200—400, т. е. на 100, больше требуемой; отняв 100 от 11 000, получим требуемую сумму 10 900.

Сумма двух слагаемых 200. Как можно изменить слагаемые, чтобы получить в сумме 150.

Решение. Требуемая сумма меньше данной на 200—150 = 50. Чтобы уменьшить сумму на 50, можно: 1) от одного из слагаемых отнять

50; 2) от одного слагаемого отнять часть 50 (например 35), а от другого остальную часть (15); 3) от одного слагаемого отнять больше 50 (например 70), зато к другому слагаемому прибавить столько единиц (20), на сколько отнятое число превышает 50.

129) В школе 6 классов. В IV, V и VI классах всего 84 ученика; в I классе 19 учениками больше, чем в IV; во II на 17 больше, чем в V, в III на 10 больше, чем в VI. Сколько учеников в этой школе?

Решение. Число 84 есть сумма трех слагаемых: числа учеников IV, числа учеников V и числа учеников VI классов. Чтобы найти число учеников во всей школе, надо к этой сумме прибавить также сумму трех слагаемых: числа учеников I, числа учеников II и числа учеников III классов. Последняя сумма больше первой на $19 + 17 + 10$, т. е. на 46, потому что ее слагаемые превышают соответствующие слагаемые первой на 19, 17 и 10. Следовательно, вторая сумма равна $84 + 46$, т. е. 130, а число учеников в школе есть $84 + 130 = 214$.

Особенно важное приложение изменений суммы представляет решение задач, требующих деления числа в разностном отношении.

223. Изменения разности хорошо объясняются детям на основании того, что уменьшаемое показывает, сколько было всего единиц, вычитаемое — сколько единиц отнято и разность — сколько единиц осталось. Изменения разности при изменениях уменьшаемого тем легче усваиваются, что они одинаковы с изменениями уменьшаемого. Первой задачей может служить задача:

130) Два брата, из которых один получал в год 1500 руб., а другой 2000 руб., прожили в течение года по 850 руб. Сколько сберег первый брат? — Сколько второй брат? — Который брат сберег больше? — Почему?

Она требует сравнения двух разностей при одинаковом вычитаемом. После этого следует проследить с детьми на каком-либо отвлеченном примере изменения разности от прибавления к уменьшаемому одной, двух и т. д. единиц, а затем потребовать от детей формулирования правила для этих изменений. Аналогично выводится правило об изменениях разности при уменьшении уменьшаемого.

Для ознакомления с изменениями разности при изменении вычитаемого может служить задача:

131) Столяр продал два дивана, по 100 руб. за каждый. Сколько стоила работа каждого дивана, если материал для первого дивана ему обошелся в 58 руб., а для второго — в 67 руб. От которого дивана получено больше прибыли? Почему?

Она требует сравнения двух разностей при одинаковом уменьшаемом. При изменении вычитаемого детей особенно поражает противоположность в изменении разности и вычитаемого; поэтому надо постараться разъяснить, что каждая единица, прибавляемая к вычитаемому, отнимается от разности. Объяснение может быть основано на том, что, прибавив к вычитаемому единицу, мы от уменьшаемого, кроме прежних единиц вычитаемого, должны будем отнять и новую, только что прибавленную единицу, и что эту единицу придется отсчитать от того числа, которое прежде получилось в разности; следовательно, новая разность будет меньше прежней на единицу. Так же объясняется изменение разницы от прибавления к вычитаемому нескольких единиц.

Изменения разности от уменьшения вычитаемого уже не встречают затруднений и объясняются аналогично с изменениями при увеличении вычитаемого. Так, если от вычитаемого отнимем 3 единицы, то их не придется отсчитывать от уменьшаемого, и они останутся в разности; следовательно, новая разность будет больше прежней на 3 единицы.

Для изменений разности от совместных изменений в уменьшаемом и вычитаемом служат упражнения, аналогичные с упражнениями для изменений суммы. В число этих упражнений могут быть введены задачи, в которых по данным летам двух лиц требуется определить, через сколько лет одно из них будет в несколько раз старше другого. («Отцу 55 лет, Сыну 25 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?»)

При формулировании всех правил об изменениях суммы и разности следует, по возможности, избегать выражений «увеличится» и «уменьшится», а заменять их более определенными указаниями на действия, которые совершаются с результатами при изменении данных.

224. Кроме того, из правил об изменении суммы и разности полезно сделать следующие выводы:

1) чтобы прибавить к сумме какое-либо число, достаточно прибавить его к одному из слагаемых;

2) чтобы от суммы отнять какое-либо число, достаточно отнять его от одного из слагаемых;

3) чтобы к какому-либо числу прибавить сумму нескольких чисел, можно к этому числу прибавить сперва одно слагаемое, к полученной сумме прибавить другое слагаемое и т. д. до последнего слагаемого включительно;

4) чтобы к какому-либо числу прибавить разность двух чисел, можно прибавить к нему уменьшаемое и из полученной суммы вычесть вычитаемое;

5) чтобы из какого-либо числа вычесть сумму нескольких слагаемых, можно вычесть из него одно слагаемое, из полученной разности вычесть другое слагаемое и т. д. до последнего слагаемого включительно;

6) чтобы из какого-либо числа вычесть разность двух чисел, можно вычесть из него уменьшаемое и к полученной разности прибавить вычитаемое.

Все эти положения или непосредственно вытекают из правил об изменении суммы и разности, или могут быть очень легко разъяснены на основании этих правил. Для каждого случая необходимо подобрать подходящие примеры и задачи.

Например, для разъяснения последнего вывода можно взять вычитание 298 из 500, которое производится следующим образом:

Вычтем сперва 300 из 500, получим 200. Но вычитая 300 вместо 298, мы к вычитаемому прибавили 2 единицы, отчего разность уменьшилась на 2 единицы; следовательно, для определения верной разности надо к полученной разности 200 прибавить 2 единицы, получим 202.

Затем остается обратить внимание детей на то, что 298 есть разность между 300 и 2 и что для ее вычитания из 500 мы вычли сперва уменьшаемое 300 и к полученной разности 200 прибавили вычитаемое 2. Полезно этот пример облечь в форму задачи:

132) Покупатель из 500 рублей отдал в уплату за купленный товар 300 рублей и получил сдачи 2 рубля. Сколько денег у него осталось?

Она может быть решена двумя приемами.

П е р в о е р е ш е н и е. Чтобы узнать, что стоил товар, надо из 300 рублей вычесть 2 рубля, а чтобы узнать, сколько денег осталось у покупателя, надо эту разность 298 рублей вычесть из 500 рублей, получится 202 рубля.

В т о р о е р е ш е н и е. Когда покупатель отдал в уплату за товар 300 рублей, то у него осталось $500-300 = 200$ рублей, а когда он получил 2 рубля сдачи, то у него стало на 2 рубля больше, т. е. 202 рубля.

225. Для того чтобы осветить возможно больше изменения суммы и разности, полезно заставлять детей облекать в форму задач различные примеры этих изменений и на соотношении величин, входящих в задачи, проверять найденные соотношения между изменениями данных и результатов действий.

227. И з м е н е н и я п р о и з в е д е н и я при изменениях множителей можно вывести, рассматривая произведение как сумму равных слагаемых. Начинаем мы с изменений произведения при изменениях множителя, потому что они непосредственнее и легче вытекают из понятия об умножении.

Исходным пунктом может служить задача:

135) Один покупатель купил 4 *м* ткани по 3 р. 50 к. за метр, а другой 5 *м* такой же ткани. Сколько заплатил каждый? На сколько второй заплатил больше? Почему?

Она требует сравнения двух произведений, в которых, при одинаковом множимом, множитель второго на единицу больше множителя первого. Результат сравнения разъясняется указанием на то, что оба произведения представляют суммы одинаковых слагаемых, но только во второй сумме одним слагаемым больше. Сделанный вывод проверяют на отвлеченных примерах, причем для наглядности полезно произведения записывать в виде сумм равных слагаемых, например:

$$15 \times 5 = 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75$$
$$15 \times 6 = 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 90$$

Вывод формулируется в следующих словах: от прибавления к множителю единицы к произведению прибавляется множимое. Затем на отвлеченных примерах прибавляют к множителю 2, 3, 4 единицы и совершенно таким же путем приходят к выводу, что от прибавления к множителю нескольких единиц столько же множимых прибавляется к произведению. Изменения произведения при вычитании из множителя одной и нескольких единиц проводятся совершенно также.

Для вывода изменений произведения от умножения множителя на какое-либо число может служить задача:

136) В книжный магазин доставили из типографии сперва 8 пачек книг, по 25 штук в каждой, затем 8 таких же пачек и, наконец, опять 8 таких же пачек. Сколько доставлено книг в первый раз? Сколько доставлено книг в первые два раза? Сколько доставлено книг во все три раза?

При решении объясняется, что для определения числа книг, доставленных в первый раз, надо 25 умножить на 8; для определения числа книг, доставленных в первые два раза, можно или 25 умножить на 16, или сложить 200 с 200; для определения числа книг, доставленных во все три раза, можно или 25 умножить на 24, или 200 сложить с 200 и еще с 200. Таким образом, получим три произведения:

$$25 \times 8 = 200$$
$$25 \times 16 = 200 + 200 = 400$$
$$25 \times 24 = 200 + 200 + 200 = 600$$

самое образование которых показывает, что от умножения множителя на 2 и произведение умножается на 2; что от умножения множителя на 3 произведение умножается на 3. Применяя этот вывод к отвлеченным примерам, дети не только определяют изменения произведения, но и объясняют их. Объяснение может быть дано приблизительно в следующей форме.

Умножив в умножении $50 \times 7 = 350$ множителя на 3, мы к нему прибавим сперва 7 единиц, от чего к произведению прибавится 7 раз 50, т. е. 350, потом к множителю еще прибавим 7 единиц, от чего к произведению опять прибавится 7 раз 50, т. е. 350, следовательно, произведение обратится в $350 + 350 + 350$, т. е. оно умножится на 3.

Объяснение изменений произведения от деления множителя может быть основано на том, что если мы множителя, разделенного, например, на 3, снова умножим на 3, то должны из измененного произведения получить прежнее произведение, а следовательно, измененное произведение в 3 раза меньше прежнего.

(§ 228 посвящен вопросу об изменении произведения от изменений множимого.)

229. Упражнения в изменении произведения при одновременных изменениях множимого и множителя легко выполняются детьми, если требуется определить измененное произведение; но если требуется определить, как изменится произведение при данных изменениях во множимом и во множителе, то в большей части случаев дети ошибаются, полагая, что при умножении множимого на одно число и множителя на другое произведение умножится на сумму этих чисел, а не на их произведение, что при делении каждого множителя произведение разделится на сумму делителей, а не на их произведение; что при умножении одного множителя на какое-либо число и при делении другого множителя на другое число, произведение умножится или разделится на разность этих чисел вместо их частного. Объяснить эти ошибки детям, исходя из понятия об умножении, несколько трудно; более понятным для них является сопоставление измененных произведений с начальными. Так, найдя, во что обратится произведение 300, когда множимое умножится на 3, а множитель умножится на 4, можно заставить

детей сравнить полученное произведение 3600 с начальным и вывести, что начальное произведение умножилось на 12, т. е. на произведение 4×3. Несколько таких сопоставлений в различных случаях совместного изменения множителей приучают детей отдавать себе ясный отчет, как изменяется произведение в каждом из этих случаев.

230. Каждый вывод относительно изменения произведения должен сопровождаться целым рядом упражнений. Одни из них назначаются для закрепления вывода, другие для применения его к вычислениям и решению задач. Только после этого можно переходить к следующему выводу. Если же сперва сделать все выводы, а потом уже дать их применение, то работа будет иметь монотонный характер, дети легко спутают различные выводы между собой и не усвоят пройденного основательно. Вообще, каждое теоретическое положение дети ценят постольку, поскольку оно может быть применено к вычислениям и решению задач.

Относительно изменений произведений упражнения могут быть следующих видов:

1) определить, как изменится произведение при данных изменениях во множителях;
2) найти измененное произведение по начальному и по данным изменениям во множителях;
3) определить изменения во множителях, необходимые для того, чтобы получить определенное изменение в произведении;
4) приложение изменений произведения к производству вычислений;
5) приложение изменений произведения к решению задач.

Приведем образцы некоторых упражнений.

1. Произведение 600. Как можно изменить множителей, чтобы получить в произведении 50.

Решение. Произведение требуется уменьшить в 600:50, т. е. в 12 раз. Для этого можно:

1) одного из множителей разделить на 12, если он делится на это число;
2) одного множителя разделить на 4, другого на 3;
3) одного множителя разделить на число в 2,3 и т. д. раза больше 12, если он делится без остатка, а другого умножить соответственно на 2, на 3 и т. д.

2. Произведение 150, один множитель в 6 раз больше другого. Какое получится произведение, если меньший множитель сделается равным большему.

Решение. Когда меньший множитель сделается равным большему, то он увеличится в 6 раз, а от этого и произведение увеличится в 6 раз и обратится в $150 \times 6 = 900$.

3. Вычисления $48 \times 3 + 56 =$; $2 \times 395 + 210 =$.

$$25 \times 12 - 297 =;\ (60 \times 7):(12 \times 7) =.$$

Решение. В первом вычислении вместо 48 умножаем 50 на 3, но так как мы к множимому прибавили 2 единицы, то надо от произведения 150 отнять 2 множителя, т. е. 6. Во втором вычислении вместо 395 умножаем 2 на 400, но так как мы при этом к множителю прибавили 5 единиц, то отнимаем от полученного произведения 5 множимых, т. е. 10. В третьем вычислении умножаем 25 на 4, но так как мы при этом множителя разделили на 3, то полученное произведение 100 умножаем на 3. В четвертом вычислении замечаем, что в обоих произведениях множители одинаковы; а потому, чтобы узнать, во сколько раз первое произведение больше второго, надо разделить первое множимое 60 на второе 12, получаем в ответе 5.

4. На сколько умножится число, если его умножить на 60 и полученное произведение разделить на 4.

Решение. Произведение разделится на 4, когда один из множителей разделится на 4; так как первый множитель остался без перемены, то второй 60 разделился на 4, следовательно, число умножилось на 15.

5. Как умножить число на разность между 10 и 2, не находя этой разности.

Решение. Умножив число на 10 вместо 10—2 мы к множителю прибавим 2 единицы, поэтому от полученного произведения надо будет отнять 2 множимых; отсюда следует, что можно отдельно умножить на 10 и на 2 и из первого произведения вычесть второе.

Примеры полезно облекать в форму конкретных задач, двоякое решение которых может значительно помочь толковому усвоению разбираемого отдела. Приводим для образца одну задачу с ее решениями.

6. С завода отправили 9 подвод с посудой, на каждой по 2 ящика, и в каждом ящике по 45 дюжин тарелок. Сколько тарелок отправлено с завода?

Первое решение. Узнаем сперва, сколько всего ящиков было отправлено; для этого надо 2 умножить на 9, получим 18. А так как в каждом ящике было по 45 дюжин тарелок, то чтобы узнать, сколько всех тарелок отправлено с завода, останется 45 умножить на полученное произведение 18.

Второе решение. Узнаем, сколько тарелок было отправлено на каждой подводе; для этого надо 45 дюжин умножить на 2, получим 90. А так как всех подвод было 9, то для решения задачи останется 90 умножить на 9.

231. Изменения частного представляют одно из самых трудных мест курса. Объясняется это более сложной, сравнительно с другими действиями, зависимостью между числами в делении и двояким значением этого действия.

Удобнее всего начать с изменений частного от прибавления к делимому и от вычитания из него кратных делителя. Для этой цели могут служить упражнения, подобные следующим:

149) Одна артель заработала за 8 дней 1600 руб., а другая артель заработала за 8 дней на 400 руб. больше. Сколько зарабатывала в день вторая артель?

Первое решение. Узнаем, сколько зарабатывала в 1 день первая артель; для этого 1600 руб. разделим на 8, получим 200 руб. Потом узнаем, сколько сверх этого зарабатывала в день вторая артель; для этого 400 руб. разделим на 8, получим 50 руб.

Тогда, сложивши 200 руб. с 50 руб., узнаем, что вторая артель зарабатывала в день 250 руб.

Второе решение. Узнаем сперва, сколько заработала в 8 дней вторая артель; для этого надо сложить 1600 руб. с 400 руб., получим 2000 руб. А тогда для решения задачи останется разделить 2000 руб. на 8, что даст 250 руб.

Из сопоставления таких решений не трудно вывести правило о делении суммы и разности на какое-либо число. Правило это можно применить к хорошо подобранным примерам на вычисление, каковы:

151) (1200 : 3 + 240 : 3) — 1440 : 3
152) (20000 : 5 — 15 : 5) — 19 985 : 5
153) 81360 : 9 + 1440 : 12 — 695 : 5

Первые два примера дают в результате 0, и этот результат может быть найден без всяких вычислений, если обратить внимание на то, что в первом примере в скобках делятся слагаемые на 3, а вне скобок их сумма, а во втором — в скобках уменьшаемое и вычитаемое, а вне скобок — их разность. В третьем примере дети должны 81 360 разложить на слагаемые 81 000 и 360, из которых каждое легко делится на 9; 1440 разложить на слагаемые 1200 и 240, из которых каждое легко делится на 12, и 695 рассматривать как разность 700 и 5.

232. Для изменений частного от умножения делимого на какое-либо число могут служить следующие две задачи:

154) В поезд, состоящий из 8 вагонов, на станции отправления поместились 72 человека, поровну в каждый вагон; на следующей станции в поезд село 72 человека, также поровну в каждый вагон; на следующей станции в поезд село еще 72 человека, также поровну в каждый вагон. Сколько пассажиров помещалось в каждом вагоне при отправлении поезда? — Сколько после выхода его со второй станции? — Сколько после выхода его с третьей станции?

155) Четыре работника за первую неделю работы получили 196 руб., поровну каждый работник; во вторую неделю они опять заработали 196 руб.; в третью неделю они заработали еще 196 руб. Сколько заработал каждый работник в первую неделю? — Сколько в первые две недели? Сколько во все три недели?

Каждая задача разбирается отдельно. В каждой из них разъясняется, что для решения второго вопроса можно или удвоить частное, полученное при решении первого вопроса, или суммы 72 + 72 и 196 + 196 разделить на соответствующих делителей; а для решения третьего вопроса можно или утроить частное, полученное при решении первого вопроса, или суммы 72 + 72 + 72 и 196 + 196 + 196 разделить на соответствующих делителей. Решение записывается в следующей форме:

$$72 : 8 = 9$$
$$(72 + 72) : 8 = 9 + 9 = 18$$
$$(72 + 72 + 72) : 8 = 9 + 9 + 9 = 27$$
$$196 : 4 = 49$$
$$(196 + 196) : 4 = 49 + 49 = 98$$
$$(196 + 196 + 196) : 4 = 49 + 49 + 49 = 147$$

Как указанный способ решения, так и сделанная запись приведут детей к заключению, что если к делимому прибавить делимое же, т. е. умножить делимое на 2, то и частное умножится на 2; если делимое утроить, то и частное утроится. Проверяя сделанный вывод на отвлеченных примерах, дети объясняют изменения частного приблизительно в следующих выражениях:

Умножить делимое, например на 3, значит к делимому прибавить делимое же и к полученной сумме снова прибавить делимое; от этого к частному каждый раз будет прибавляться прежнее частное и, следовательно, частное умножится на 3.

Изменения частного от деления делимого на какое-либо число можно объяснить следующим образом.

Когда делимое, разделенное, например, на 3, снова умножим на 3, то из измененного частного должны получить опять прежнее частное; а так как при этом измененное частное должно умножиться на 3, то, следовательно, оно меньше прежнего в 3 раза.

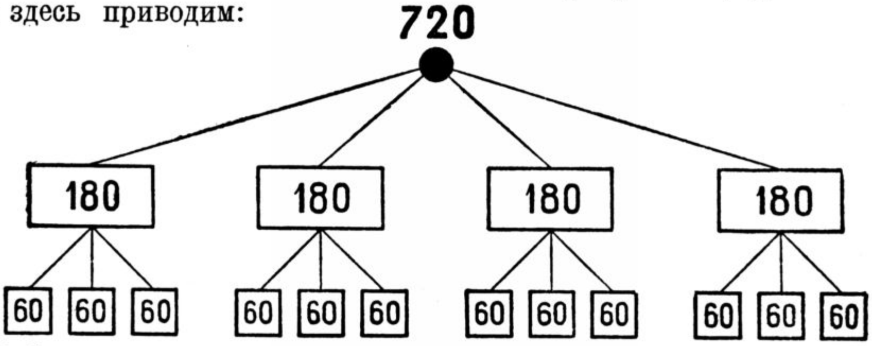
Хорошей иллюстрацией здесь может служить задача:

156) Разносчик первую сотню яблок продал за 6 руб., а вторую должен был уступить за половину этой цены. Почем он продавал каждое яблоко из первой сотни? из второй? Во сколько раз яблоко из второй сотни дешевле яблока из первой? Почему?

233. Для объяснения изменений частного от изменений делителя может служить следующая задача с ее видоизменениями, сообразно изменениям делителя.

157) 720 яблок разложены поровну в 4 ящика. Сколько яблок в каждом ящике?

После решения (720 : 4 = 180) преподаватель предлагает детям сосчитать, сколько яблок будет в каждой корзине, если яблоки из каждого ящика переложить в 3 корзины, поровну в каждую, и во сколько корзин тогда будут разложены все яблоки. Затем можно предложить решить те же вопросы, когда яблоки будут переложены из каждого ящика в 4, 5 и т. д. корзин, поровну в каждую. Для наглядности эти переложения можно пояснить схематически рисунками, один из которых здесь приводим:



Работа оканчивается выводом, что от умножения делителя на 3, 4, 5 и т. д. частное делится на 3, 4, 5 и т. д. Прилагая этот вывод к отвлеченным примерам, дети объясняют изменения частного приблизительно в следующих выражениях:

Умножая делителя на 6, мы из каждой прежней части желаем сделать 6 новых частей, и потому прежнее частное делим на 6.

Для пояснения изменений частного от деления делителя может служить задача:

158) В 18 корзин набрали 3600 груш, поровну в каждую; сколько груш в каждой корзине? Для перевозки в Москву эти груши перело-

жили в ящики. Сколько ящиков понадобилось и по скольку груш было в каждом, если из каждых двух корзин груши переложили в один ящик? Если груши из каждых трех корзин переложили в один ящик? — Из каждых 6 корзин переложили в один ящик? Из каждых 9 корзин в один ящик?

Сообразно с этой задачей легко видоизменить и приведенный схематический чертеж. Объяснение для отвлеченных примеров делается в следующей форме.

Деля делителя на 4, мы соединяем каждые 4 прежние части в одну новую, и потому новое частное должно быть в 4 раза больше прежнего.

234. Изменения частного при совместных изменениях делимого и делителя вызывают со стороны детей такие же недоразумения и могут быть разъяснены тем же путем, как и аналогичные изменения произведения. При совместных изменениях делимого и делителя надо обратить особое внимание на случаи неизменяемости частного, которые объясняются обычным путем.

235. Все рассмотренные изменения частного относятся к делению без остатка; когда в делении получается остаток, то изменения частного могут отступать от выведенных правил, за исключением правила о неизменяемости частного от умножения или деления делимого и делителя на одно и то же число, и от прибавления к делимому и от вычитания из него кратных делителя.

236. Материал для применения положений об изменениях частного заключается:

1) в определении изменений частного по данным изменениям делимого и делителя;

2) в определении измененного частного по данному частному и изменениям в делимом и делителе;

3) в определении изменений, которые необходимо сделать в данных числах для того, чтобы достигнуть желаемого изменения в частном;

4) в приложении изменений частного к вычислениям и к решению задач. Приводим некоторые из этих упражнений.

161) В каком из делений удобнее прибавить к делимому, в каком удобнее отнять делителя, повторенного несколько раз?

$$392:4;\quad 144:12;\quad 375:75;\quad 272:8.$$

Решение. В первом делении можно к делимому прибавить удвоенного делителя; тогда придется делить 400 на 4 и от полученного частного отнять 2 единицы. Во втором надо от делимого отнять удвоенного делителя; тогда придется делить 120 на 12 и к полученному частному прибавить 2 единицы. В третьем делении надо от делимого отнять делителя; тогда придется 300 делить на 75 и к полученному частному прибавить единицу. В четвертом делении можно от делимого отнять учетверенного делителя; тогда придется 240 делить на 8 и к полученному частному прибавить 4 единицы.

162)
$$\begin{gathered}700:14-49=?\\1800:25+28=?\\1800:24\times 500=?\\9600:1600\times 50=?\\400:8-376:8=?\end{gathered}$$

Решение. В первом примере делим 700 на 7, но так как мы при этом делителя разделили на 2 и частное от этого умножилось на 2, то полученное частное 100 делим на 2. Во втором делим 1800 на 100, но так как мы при этом делителя умножили на 4 и частное от этого разделилось на 4, то полученное частное 18 надо умножить на 4. В третьем примере делим 1800 на 6, но так как мы при этом делителя разделили на 4 и частное от этого умножилось на 4, то полученное частное надо разделить на 4. В четвертом примере делим делимое 9600 и делителя 1600 на 100, от чего частное не изменится. В пятом примере второе делимое 376 меньше первого на 400—376 = 24, а 24 есть утроенный делитель, поэтому первое частное больше второго на 3.

237. В конце этого отдела хорошо дать ряд задач отвлеченного характера, в которых 1) по различным изменениям данных чисел и по измененному и истинному результатам действий требуется определить данные числа и 2) по ошибочному результату, полученному вследствие изменений в данных числах, требуется определить верный результат. Приведем некоторые из этих задач:

163) Произведение двух чисел 98 000, а если от множителя отнять 5, то в произведении будет 63 000. Найти эти числа.

Решение. Когда от множителя отнимаем 5, то от произведения отнимается 5 множимых, у нас от произведения отнялось 98 000— 63 000 = 35 000; следовательно, в 35 000 содержится 5 множимых, множимое равно 35 000 : 5 = 7 000, а множитель равен 98 000:7000 = = (98 000:7) : 1000 = 14 000 : 1000 = 14.

164) Частное двух чисел 36, а если от делимого отнимем 1000, то в частном получим только 28. Найти эти числа.

Решение. Вследствие того что от делимого отняли 1000, от частного отнялось 36 — 28 = 8 единиц. От частного отнимается 8 единиц тогда, когда от делимого отнимаем 8 делителей; следовательно, делитель в 1000 содержится 8 раз и равен 1000:8=125, а делимое равно 125 × 36 = (125 × 4) × 9 = 500 × 9 = 4500.

165) Ученику надо было 15 умножить на некоторое число, произведение разделить на 60 и частное вычесть из 92, а он к множителю прибавил 2, разделил только на 10 и, вычтя из 92, получил 17. Какое число должно было получиться? Какие поправки в действиях ученик забыл сделать?

Решение. Ученик получил в разности 17, когда уменьшаемое было 92, следовательно, вычитаемое у него было 92 — 17 = 75. Это вычитаемое он получил от деления на 10, следовательно, делимое у него было 75 × 10 = 750. Это делимое ученик получил от умножения 15 на множителя, который был больше данного на 2; следовательно, верное произведение меньше 750 на удвоенное множимое, т. е. на 15 × 2 = 30. Верное произведение есть 750 — 30 = 720; верное частное равно 720 : 60 = 72 : 6 = 12, и верная разность равна 92 — 12 = 80. Ученик забыл из произведения вычесть удвоенное множимое, а частное, полученное от деления на 10, забыл разделить на 6.

166) Ученику надо было некоторое число умножить на 8, из произведения вычесть 5391 и разность разделить на 9. Чтобы быстрее сделать вычисление, он прибавил к множимому 75, вместо 5391 взял 5400, но забыл сделать надлежащие поправки, и потому от деления на 9 по-

лучил в частном 2066 и в остатке 6. Какое частное должно получиться, если ошибки исправить?

Решение. Делимое ученика было $2066 \times 9 + 6 = 18\,600$ и получено им от вычитания, в котором к уменьшаемому прибавлено $75 \times 8 = 600$, а к вычитаемому $5\,400 - 5391 = 9$; от этого разность получилась больше требуемой на $600 - 9 = 591$; следовательно, ученику надо было разделить на 9 число $18\,600 - 591 = 18\,009$, и он должен был получить в частном 2001.

(Ф. И. Егоров, Методика арифметики, изд. четвертое, 1904 г., стр. 212—232.)

Л. Н. Толстой.

Как объяснить детям признаки делимости чисел.

Чтобы знать, какие дроби можно переделывать из мелкого счисления в крупное, надо знать, какие числа на какие делятся без остатка.

Чтобы узнать, делится ли число на 2, надо только счесть, делятся ли единицы на два. Если единицы делятся, то какое бы число большое ни было, оно все делится на два; потому что каждый десяток делится на два, и каждая сотня, и каждая тысяча, каждый десяток тысяч, и все другие разряды, сколько бы их ни было.

$\frac{28}{36}$ 8 и 6 делятся на два, и все делится на два без остатка.

$28 : 2 = 14$; $36 : 2 = 18$.

$\frac{3578}{4896}$ $3578 : 2 = 1789$; $4896 : 2 = 2448$.

Чтобы узнать, делится ли число на три, надо сложить все цифры числа, и сложенное разделить на 3. Если сложенное разделится на три, то все число разделится на 3; потому что, сколько бы ни было десятков, сотен, тысяч, каждый десяток разделится на 3, и останется от него только 1;

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{9} & 3 \\ 1 & \end{array}$$

и каждая сотня разделится на 3, и останется от нее только 1;

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{99} & 33 \\ 1 & \end{array}$$

и каждая тысяча разделится на 3, и останется от нее только 1;

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \underline{999} \\ 1 \end{array}$$

И так же каждый десяток тысяч и каждая сотня тысяч и так дальше. Стало-быть, когда сочтешь все цифры, то сочтешь те самые единицы, какие остаются от десятков, сотен тысяч, и т. д. Если эти единицы делятся с последними единицами, то все делится.

$$\frac{24}{36}\quad \begin{array}{l} 2+4=6;\quad 6:3=2 \\ 3+6=9;\quad 9:3=3 \end{array}$$

$$\frac{75402}{82371}\quad \begin{array}{l} 7+5+4+2=18;\quad 18:3=6 \\ 8+2+3+7+1=21;\quad 21:3=7 \end{array}$$

$$75402:3=25134;\quad 82371:3=27457.$$

Чтобы узнать, делится ли число на 4, надо счесть, делятся ли десятки и единицы на 4. Если десятки и единицы делятся, то сотни, тысячи и все другие наверно разделятся, потому что каждая сотня делится на 4; 100 : 4 = 25, и 1000 : 4 = 250 и т. д.

$$\frac{2784}{9532}\quad \begin{array}{l} 84:4=21 \\ 32:4=8 \end{array}$$

$$2784:4=696;\quad 9532:4=2383.$$

Чтобы узнать, делится ли число на 5, надо только заметить, делятся ли единицы на 5. А если единицы делятся, то все число делится, потому что каждый десяток, и каждая сотня, и тысяча делятся на 5.

$$\frac{57890:5=11578}{37925:5=7585.}$$

Чтобы узнать, делится ли число на 6, надо узнать, делится ли оно на 3 и на 2. Если делится на 3 и на 2, то делится и на 6, потому что $6 = 2 \times 3$.

$$\frac{57324}{67932}$$

$$5+7+3+2+4=21;\quad 21:3=7,$$

и последняя цифра $4:2=2$.

$$6+7+9+3+2=27;\quad 27:3=9,$$

и последняя цифра $2:2=1$.

$$\frac{57324:6=}{67932:6=}\ \frac{9554}{11322}$$

Чтобы узнать, делится ли число на 8, надо счесть, делятся ли единицы, десятки и сотни на 8. Если делятся, то и все число делится, потому что каждая 1000 делится на 8; 1000 : 8 = 125; и каждый десяток тысяч 10 000 : 8 = 1250, и все остальные.

$$\frac{20135368}{79541272}\quad \begin{array}{l} 368:8=46 \\ 272:8=34 \end{array}$$

$$\frac{20135368:8=2516921.}{79541272:8=9942659.}$$

Чтобы узнать, делится ли число на 9, надо сложить все цифры числа, и сложенное разделить на 9. Если сложенное разделится, то и все число разделится, потому что каждый десяток, и каждая сотня, и тысяча, когда делятся на 9, то от них остается 1. Если эти единицы, когда их сложить с настоящими единицами, делятся на 9, то и все число разделится на 9.

$$\frac{543213}{810576} \quad 5+4+3+2+1+3=18; \quad 18:9=2$$
$$8+1+5+7+6=27; \quad 27:9=3$$

$$\frac{543213:9=60357}{810576:9=90064.}$$

Чтобы узнать, делится число на 10, надо только заметить, есть ли единицы. Если нет единиц, то все число делится на 10, потому 10 делится, а сотни и тысячи, сколько бы их ни было, все из десятков.

$$\frac{457510:10}{301100:10}=\frac{45751}{30110}.$$

(Из «Арифметики» Толстого, стр. 77—79).

4. УСТНЫЙ СЧЕТ.

По вопросу об устном счете дореволюционная школа имела несколько книг — Бобровникова, Виноградова, Морозова, Куприянова, Рачинского и других. Наиболее оригинальной из них была книга С. Рачинского «1001 задача для умственного счета». Большой популярностью пользовался переводный классический труд Мартеля по устному счету. В ходу была таблица Мартеля, а затем и Шохор-Троцкого, которые приведены ниже.

В общих методиках также затрагивался вопрос о приемах устного счета. Ниже приводятся: 1) выдержка из методики Евтушевского «Беглое вычисление», в которой описан один из интересных приемов устного счета; 2) выдержка из методик Егорова, в которой ярко подчеркнуто отличие устных приемов вычислений от письменных; 3) статья Рачинского — этого выдающегося мастера по устному счету и решению задач; Рачинский в своей статье выходит из узких рамок устного счета и приводит ряд ценных наблюдений над крестьянскими детьми; в этой же статье он высказал свое отрицательное отношение к методу изучения чисел, здесь же помещены и две странички из задачника Рачинского, из которого взяты наиболее интересные задачи; 4) высказывания об устном счете Гольденберга, аргументы которого в защиту устного счета отличаются большой силой и убедительностью.

В. Евтушевский.

Беглое вычисление.

Беглое вычисление производится в этом курсе преимущественно на числах отвлеченных и служит для сообщения ученикам навыка свободно обращаться с числом. Состоит оно, как было объяснено уже в первом курсе, в том, что учитель медленно и раздельно говорит классу задачу, в которой прямо указываются действия с данными числами; ученики совершают умственно названные действия и дают ответ вслед за предложением учителем вопроса задачи. Если некоторые ученики утеряли число или не умели сделать во-время вычисления, то задача восстанавливается и вычисления производятся ими по частям. В первом курсе приведено мною достаточно примеров для подобных упражнений; примеры эти могут служить образцами для составления учителем во время урока подобных же примеров при изучении чисел от 21 до 100. Здесь я приведу только образец особенного рода задач для беглого вычисления.

Одному ученику предлагается задумать число между какими-нибудь пределами; например, если изучены числа до 40, то число может быть задумано между 20 и 40. От задуманного числа ученик отнимает число, указанное учителем, например 17, полученное число увеличивает в два раза и говорит классу результат, который получил. Класс обратным вычислением должен узнать задуманное число. Работа эта очень интересует учеников и весьма полезна, так как, во-первых, основывается на обратных поверочных вычислениях и, во-вторых, знакомит учеников мало-помалу с составом и анализом сложных формул.

Задача. Задумайте четное число не больше 60 и не меньше 40; разделите ваше число пополам и от полученной половины отнимите 16. Сколько получили вы?

Ученик говорит, положим, 12.

Решение. 12 получилось, когда от половины задуманного числа отняли 16; значит, половина задуманного числа была $12 + 16 = 28$; так как половина задуманного числа 28, то все число равно $28 \times 2 = 56$.

Задача. Задумайте число не больше 16 и не меньше 10. Увеличьте ваше число в 6 раз; от полученного числа отнимите 39 и возьмите треть остатка. Какое число получилось?

Ученик говорит, положим, 15.

Решение. 15 есть третья часть некоторого числа, значит, само число равно $15 \times 3 = 45$; 45 получилось, когда от некоторого числа отняли 39, значит, это число было $45 + 39 = 84$; 84 получилось, когда задуманное число увеличилось в 6 раз, значит, задуманное число в 6 раз менее 84, а 6-я часть $84 = 14$; значит, задумано было 14.

Само собой разумеется, что первые упражнения в этом роде должны быть простейшие и усложняться мало-помалу, чтобы ученики могли хорошо выработать прием обратного вычисления.

Привожу примеры для показания постепенности их усложнения.

1) Задумайте число не больше 30 и не меньше 20; отнимите от него 13. Какое число получилось? Классу: какое число задумано?

2) Возьмите число не больше 10; придайте к нему 18. Какое число получилось? Классу: какое число задумано?

3) Возьмите число не больше 10; увеличьте его в 6 раз. Скажите полученное число. Какое число задумано?

4) Задумайте число, делящееся на 8 без остатка; возьмите 4-ю часть вашего числа. Скажите полученное число. Какое число задумано?

5) Возьмите четное число; разделите его пополам и к половине придайте 9. Какое число получилось? Какое число задумано?

6) Задумайте число не больше 20; увеличьте его в 4 раза; от полученного числа отнимите 15. Скажите полученное число. Какое число было задумано?

7) Возьмите число не больше 17; увеличьте его в 4 раза; от полученного числа отнимите 8, остаток разделите пополам. Скажите полученное число. Какое число задумано?

8) Задумайте число не меньше 60, которое бы делилось на 6 без остатка; возьмите 3-ю часть вашего числа; придайте сюда 18, получен-

ное число разделите пополам; от полученного числа отнимите 13. Скажите, что получилось? Какое число задумано?

Такое усложнение задач должно совершаться не в один и не в два, три урока, а постепенно; так что упражнения эти предлагаются ученикам вперемежку с другими, исподволь. Ученики, задумывающие числа, постоянно меняются, и для них-то эти упражнения особенно важны, так как сами они вычисляют в прямом порядке, а товарищи их, отыскивающие задуманное число, в обратном; следовательно, тот и другой путь вычисления и состав формулы для этих учеников становятся совершенно ясным.

(В. Евтушевский, Методика арифметики, изд. 1881 г., стр. 198—200.)

А. И. Гольденберг.

Об устных вычислениях.

Нас всегда поражало, что школа, заботясь о развитии в своих учениках различных навыков и умений, приобретение которых необходимо для всякого дальнейшего обучения, всегда уделяла так мало значения умению владеть числами, умению считать (последнее слово мы принимаем в смысле «Rechnen»). Школа требует от ученика, чтобы он владел механизмом чтения и письма — и не распространяет этого требования на механизм счета. Называют полуграмотным человека, читающего с запинками, не бегло, по складам, или человека, который, при письме, употребляя большие усилия, рисует каждую букву, припоминая элементы ее начертания, — а между тем нисколько не поражаются, если человек и образованный прибегает к помощи пальцев или ищет неизбежного карандаша, чтобы сделать самое простое вычисление, если при этом он ошибается или даже является совершенно беспомощным в области элементарных арифметических вычислений.

Мы смотрим на дело иначе и полагаем необходимым для всякого владеть до известной степени техникой счета наравне с другими навыками и умениями, составляющими необходимое достояние образованного человека, доводимыми в нем до автоматичности и представляющими необходимую основу всякой умственной деятельности. Остается только решить вопрос, как далеко должны быть простираемы требования относительно этой техники. Новейшим методам преподавания арифметики, бесспорно, принадлежит и та заслуга, что они обратили внимание на изустное вычисление, и этим положили основание той технике, о которой мы говорим. Впрочем, многие последователи этих методов, односторонне поняв их и слишком далеко простирая свое увлечение изустным счислением, непроизводительно тратят время и силы своих учеников, стремясь довести их до какой-то «виртуозности», если можно так выразиться, в изустных вычислениях с большими, неудобными для таких вычислений числами. Мы полагаем, что здесь необходимо установить меру требований, и предъявляем следующие:

1) Ученик должен знать наизусть результаты сложения и умножения каждых двух чисел первого десятка (таблицы сложения и умножения однозначных чисел); 2) он должен знать один из элементов этих комбинаций, когда даны другой и результат: по данной сумме

двух однозначных чисел и одному из них найти другое; по данному произведению двух однозначных чисел и одному из них—другое, 3) ученик должен знать путь, следуя которому могут быть получены результаты напамять незаученные, и восстановлены результаты, утраченные памятью.

В устных упражнениях дети имеют дело с числом, а не с цифрой, с понятием, а не с его внешним знаком; они приучаются мыслить число, так сказать, целиком, независимо от его десятичного, поразрядного расчленения. Эти упражнения развивают память детей, побуждают их к постоянному вниманию и тем самым помогают схватывать задачу целиком, не разлагая ее на части; они, кроме того, воспитывают в детях самообладание — ценное качество, отсутствие которого в детях и юношах так хорошо знакомо всем тем, кому приходится обучать их. Дети очень часто схватывают смысл задачи, но не в состоянии довести решение ее до конца, потому что радостное чувство понимания задачи мешает им делать вычисления. Этот психологический акт свидетельствует о том, что дети не научены толково производить вычисления и не обладают уменьем разумно распоряжаться материалом задач.

В качестве вычислений естественных, а не искусственных, по свободному соображению, а не по неизменным правилам, творческих, а не скованных, устные вычисления развивают в детях сообразительность, находчивость, осмотрительность, дают пищу их самодеятельности и награждают радостным чувством достигаемых успехов.

В практическом жизненном отношении устные вычисления приносят неоценимую пользу для сельского быта. Расчеты житейского обихода крестьян вращаются, по большей части, в области небольших чисел и в круге незамысловатых арифметических соотношений. Взрослое население вправе требовать, чтобы обученные в школе ребята умели производить эти простейшие расчеты, вправе быть недовольным, когда школа не наделяет детей этим уменьем.

К стыду своему, даже образованное общество не владеет в достаточной мере устными вычислениями для своего обихода, и всегда, при сравнительно мелочных выкладках, должно прибегать к письменному счету.

(Из «Бесед по счислению», стр. 74—75 и 195—197).

Ф. И. Егоров.

Особенности устных и письменных вычислений.

171. Особенности устного вычисления. Общий характер всех приемов вычисления состоит в стремлении привести разбираемый случай действия к таким действиям, результаты которых нам известны. При устном вычислении вычисляющий пользуется вообще всеми результатами, которыми располагает, и часто определяет результаты не по разрядам. В устном вычислении гораздо чаще, сравнительно с письменным, прибегают к изменению данных чисел с тем, чтобы, по возможности, упростить вычисление. Устное вычисление есть по преимуществу вычисление по свободному соображению, и потому правила для него могут заключать в себе только общие

указания способа, помощью которых данный случай действия может быть приведен к таким случаям, которые уже ранее разобраны: подробности выполнения действия, порядок выполнения, последовательность в переходе от действия с единицами одного разряда к действию с единицами другого и т. п. должны быть предоставлены выбору вычисляющего, потому что они могут значительно видоизменяться сообразно с характером чисел, подлежащих вычислению. Например, устное сложение казалось бы удобнее начинать с единиц высшего разряда, но есть много случаев, в которых обратный порядок скорее и легче ведет к цели. Так, для сложения 493 и 257 лучше к 493 приложить сперва 7 единиц второго слагаемого, потому что тогда сложение полученной суммы с остальными 250 единицами второго слагаемого совершается без всякого затруднения.

Упражнения в устном вычислении способствуют развитию в детях навыка в выборе приемов, наиболее соответствующих данному случаю действия, и тем значительно ускоряют ход вычислений.

172. Особенности письменного вычисления. Письменное вычисление имеет целью освободить вычисляющего от необходимости держать в памяти данные числа в действиях и большую часть тех промежуточных (неполных) результатов, через которые приходится пройти для определения окончательного (полного) результата действия. При установлении приемов письменного вычисления предполагаются известными только те результаты действий, которые даются таблицами сложения и умножения однозначных чисел. Для того чтобы возможно меньше чисел держать в памяти и вводить как можно меньше изменений в сделанных уже записях, результаты действий при письменном вычислении определяются по разрядам. Письменное вычисление, в противоположность устному, есть вычисление по правилам, устанавливаемым в более или менее общей форме для всех чисел и имеющим целью свести вычисление к результатам основных таблиц и к некоторым чисто механическим приемам в расположении чисел и обозначающих их цифр.

В каждом правиле для письменного вычисления легко раскрыть три элемента, существенное значение которых весьма различно, но которые одинаково необходимы, для того чтобы вычисление было выполнено письменно. Первый элемент состоит в указании, каким путем независимо от того, письменно или устно производится вычисление, рассматриваемый случай действия может быть приведен или непосредственно к основным таблицам, или к таким действиям, способ выполнения которых при помощи основных таблиц установлен уже ранее. Второй элемент состоит в установлении, каким путем эти указания могут быть выполнены при письменном вычислении с тем, чтобы возможно меньше чисел держать в памяти, возможно меньше делать записей и исправлений в них. Наконец, третий элемент заключается в установлении формы и расположения записей. Например, для умножения многозначного числа на однозначное указывается:

1) как действие приводится к таблице умножения;

2) в каком порядке удобнее определять произведения единиц каждого разряда при письменном вычислении;

3) как следует располагать данные числа и получаемые результаты.

Первая сторона письменного вычисления — самая существенная и в общих чертах одинакова с устным вычислением; вторая, представляя существенное отличие письменного вычисления от устного, может быть мотивирована с достаточной основательностью и требует непременного установления, потому что отступления от нее ведут часто к утрате всех выгод письменного вычисления сравнительно с устным, к целому ряду поправок в результатах и в некоторых случаях могут совершенно запутать вычисление; что касается третьей, то она наименее существенна, не всегда может быть достаточно мотивирована и допускает различные видоизменения.

173. Чтобы дети сознательно усвоили приемы письменного вычисления и научились правильно прилагать их, необходимо, чтобы они умели отличать в каждом приеме существенное от несущественного и могли сделать надлежащую оценку того облегчения, которое доставляет обозначение промежуточных и окончательного результатов по мере их определения. При ознакомлении с одними приемами письменного вычисления все три стороны его настолько тесно сливаются друг с другом, что различение их становится для детей недоступным, и они привыкают придавать преимущественное значение расположению чисел, так как оно нагляднее всего остального и легче усваивается. Вследствие же того что письменное вычисление обставлено правилами, регулирующими каждый шаг вычисляющего и предоставляющими очень мало его собственной находчивости и соображению, дети усваивают преимущественно внешнюю, механическую сторону вычисления, не отдавая себе ясного отчета ни в значении этого механизма, ни в основаниях, на которых он построен. Замечательно, что дети, знакомые с одними приемами письменного вычисления, даже в самых простых случаях не могут приблизительно определять величину результата раньше полного его вычисления.

Чтобы избегнуть указанных недостатков, особенно важно ознакомить детей с общими началами вычисления независимо от той частной формы, которая придается им письменным выполнением, а для этой цели необходимо ознакомить детей с устным вычислением.

Введение устного вычисления над числами любой величины не обременяет курса арифметики, требует сравнительно небольшой затраты времени и значительно облегчает усвоение приемов письменного вычисления.

(Ф. И. Егоров, Методика арифметики, изд. четвертое, 1904 г., стр. 164—168.)

С. Рачинский.

Арифметика в начальной школе.

Посторонних посетителей, изредка заглядывающих в мою школу, всего более поражает умственный счет ее учеников. Та быстрота и легкость, с которой они производят в уме умножения и деления, обращаются с мерами квадратными и кубическими, соображают данные сложной задачи, то радостное оживление, с которым они предаются этой умственной гимнастике, наводят на мысль, что в этой школе употребляются особые усовершенствованные приемы для преподавания арифметики, что я обладаю в этом отношении каким-то особым искусством или секретом.

Ничего не может быть ошибочней этого впечатления. Конечно, теперь я владею некоторым навыком к умственному счету, могу импровизировать арифметические задачи в том быстром темпе, в котором они решаются моими учениками. Но до этих скромных умений довели меня, или, лучше сказать, домучили, сами ученики.

Именно домучили. Никогда не занимался я специально арифметикой, упражняться в умственном счете никогда и не думал. Принялся я за преподавание счета в сельской школе, не подозревая, на что я иду.

Не успел я приступить к упражнениям в умственном счете, которые до тех пор в школе не практиковались, как в ней к ним развилась настоящая страсть, не ослабевающая до сих пор. С раннего утра и до позднего вечера стали меня преследовать то одна группа учеников, то другая, то все вместе, с требованием умственных задач. Считая эти упражнения полезными, я отдал себя в их распоряжение. Очень скоро оказалось, что они опережают меня, что мне нужно готовиться, самому упражняться. На пятом десятке некоторые умственные способности утрачивают свою эластичность. Эта первая зима была для меня очень тяжела.

К этому вскоре присоединилась страсть к письменным упражнениям в счете. Ребята вздумали щеголять друг перед другом быстрым и точным умножением и делением на доске многозначных чисел, не поддающихся умственному счету. Тут я было совершенно стал втупик. Эти припадки обыкновенно случались вечером. Наши вечерние занятия, теперь все более и более принимающие характер правильных уроков, тогда были гораздо свободнее, да и теперь, во избежание утомления, часто приходится нарушать их однообразный строй. Вечером же происходили и спевки, в которых участвовали все мои помощники, все лучшие ученики. Я оставался один с непоющими учениками. Этого только и ждали мои мучители. Разом, все они, человек тридцать, сорок, накидывались на меня с дощечками: «Сергей Александрович, деленьице!». — «Мне на сотни! — Мне на единицы! — Мне на миллионы! — Мне на тысячи!» И решения подавались с такою быстротой, что я едва успевал писать задачи. Поверять — никакой физической возможности.

Тут однажды, в минуту отчаянья, я бессознательно тиснул у себя в мозгу какую-то неведомую мне пружинку, и все деления стали выходить без остатка.

Восторгу ребят не было границ. Но увы! На следующий вечер они потребовали от меня того же, и я не мог исполнить их желания. Лишь впоследствии мало-помалу выяснил я себе то простое сочетание мнемонических приемов с быстрым умственным умножением, которое дает возможность придумывать безостановочный ряд десяти- и двенадцатизначных чисел, делимых без остатка на любые другие числа и вместе с тем — бесконечный простор для импровизации задач, устных и письменных.

Эта беспрестанная усиленная возня с цифрами нагнала на меня настоящий арифметический кошмар, загнала меня в теорию чисел, заставила меня неоднократно открывать Америку, т. е. неизвестные мне теоремы Фермата и Эйлера...

Часто задавал я себе вопрос, какими основными способностями обусловливается та необыкновенная ловкость в обращении с числами, тот живой интерес к цифрам и к сочетаниям, которыми отличаются наши крестьянские ребята. Нет сомнения, что тут значительную роль играет их удивительная память. Но, кроме памяти, тут очевидно участвуют и другие способности: воображение, живо рисующее перед ними состав чисел из первоначальных множителей и их сочетания [1], способность связывать внешний вид цифры с этим составом. Почти всегда у хороших счетчиков оказывается и художественная струнка. Этому обстоятельству, впрочем, особого значения придавать нельзя. Крестьянские дети тем и отличаются от детей высших сословий, что односторонние способности встречаются у них весьма редко. Тот из них, который способен к пению, непременно окажется способным и по арифметике, и по русскому языку, — и наоборот, мальчики, умственно слабые, редко имеют какие-либо художественные способности и склонности. Эта соразмерность дарований распространяется даже на сферу нравственную и придает этим детям их особенную привлекательность.

Говоря тут о преподавании арифметики в сельской школе, ограничиваюсь беглыми указаниями на мои наблюдения и впечатления. Подробные рассуждения о методике этого предмета были бы неуместны на этих страницах... Но считаю возможным связать с вышесказанным два замечания, имеющие практическую важность.

Первое касается того приступа к преподаванию арифметики, который выработан немецкими педагогами и получил у нас право гражданства, благодаря повсеместному распространению учебников Евтушевского. Основан он на долговременном и всестороннем изучении чисел первого десятка, за которым следует столь же кропотливое изучение чисел первой сотни. Прием этот, быть может, необходимый, когда приступаешь к делу с пятилетними детьми (или с идиотами), отзывается чрезвычайной искусственностью, когда имеешь дело с детьми вдвое старшими, уже умеющими считать более ста, уже имеющими практическое понятие о десятичной системе благодаря известному им счету на копейки, гривенники и рубли. А таково большинство детей, поступающих в наши сельские школы. Нередко приходилось мне наблюдать любопытный факт, что крестьянские дети, не умеющие называть чисел далее двадцати, подчас имеют ясное представление о числах до ста и далее. Поддерживать с такими детьми фикцию, что далее девяти — чисел нет или что они им неизвестны, совершенно непрактично. Разумеется, им по большей части совершенно прозрачен лишь первый десяток, и состав чисел первой сотни должен быть им разъяснен рядом упражнений. Но в этих упражнениях нужно избегать педантической медленности, постоянно ощупывать дорогу вперед, имея в виду необыкновенную восприимчивость количественного созерцания в наших крестьянских ребятах. Притом нет никакой причины скрывать от них в течение

[1] Вчера один мальчуган на вопрос, сколько 84×84, отвечал мгновенно 7056. «Да это квадратная сажень (т. е. число в ней кв. дюймов): я взял 50, 144 и выкинул 144. Проще произвести это умножение, чем превративши 84^2 в $7^2 \times 12^2$ — невозможно.

всего первого года существование тысяч, десятков и сотен тысяч — бесконечную перспективу чисел, группирующихся по системе, уже известной им по копейкам, гривенникам и рублям. Конечно, нужно избегать упражнений, превышающих силы учащихся, сообщения таких математических истин, которые могут быть восприняты только их памятью. Но не менее того нужно избегать слишком долгого пережевывания уже известного ученикам: оно порождает скуку, отучает их от необходимых умственных усилий. Свойствам чисел первой сотни нет конца. Если бы мы вздумали их исчерпать прежде, чем двинуться далее, мы бы никогда не дошли до второй.

Другое замечание, более общего свойства, сводится к тому, что ничтожные знания, приобретаемые в сельской школе, только и получают некоторую цену, если сопряжены с соответствующими умениями. В области арифметики — разумею тут быстрый и верный счет, умственный и письменный — этих умений инстинктивно добиваются сами ученики, и обязанность учителя — всячески помогать их приобретению. Так, в моей школе всякий ученик, постигший тайны деления, считает долгом сделать вне уроков несколько сотен деленьиц на все числа подряд, начиная от 2 до 300, 400, 500, смотря по усердию, чтобы набить себе руку. Это положительно полезно: мне остается только благодарить бога, что у ребят на это хватает терпения, и поддерживать их похвальное рвение задаванием им делений без остатка или с остатком, по их заказу, и целым рядом подобных письменных и умственных упражнений.

Для успеха дела, разумеется, нужно, чтобы учитель сельской школы владел приемами умственного счета и имел к нему порядочный навык. К сожалению, знакомство с этими приемами, этот навык — у наших учителей встречается редко. Особенно слабы в этом отношении те, которые прошли через учительские семинарии. Практическое знакомство с цифрами, как и с формами русского языка, необходимо учителю, для того чтобы придать некоторое оживление неизбежным внеклассным занятиям.

И это опять приводит нас к истинной оценке того громадного преимущества, которое дает русской школе одна из самых затруднительных, повидимому, ее особенностей — постоянное присутствие в ней учеников. Эта особенность, конечно, отчасти обусловливается причинами чисто внешними: невозможностью для детей уходить домой между классами. Но только отчасти. Везде, где есть внимательный учитель, ученики, живущие в двух шагах от школы, точно так же проводят в ней всю свою жизнь. Это соответствует и собственному их инстинкту, и совершенно сознательному желанию их родителей. Эти родители отлично понимают, что при кратких сроках учения, которыми пользуются их дети, для достижения какого-либо успеха нужно пользоваться каждой минутой. Требовательность как учеников, так и родителей относительно учителей не знает границ. Им не приходит в голову, чтобы в учебное время учитель мог подумать об отдыхе.

И они тысячу раз правы. Разве дома, в тесной и темной избе, возможны для крестьянских детей какие-либо самостоятельные занятия? Разве при казенном количестве учебных часов возможны какие-либо результаты, кроме оффициально-удовлетворительных ответов на экзаменах, кроме умножения свидетельств на льготу по воинской повинности? Разве дело в этих жалких экзаменах, в этой несчастной льготе? Нет, дело не в этом, и это понимают те, для которых сельская школа составляет не отвлеченный предмет сочувствий, а кровное дело, те, которые вверяют ей всю жизнь своих детей.

Вот почему я твердо верю в будущность этой бедной, темной, едва возникающей сельской школы, ощупью создаваемой на наших глазах безграмотным народом. Ибо — не нужно обольщаться — все, что в ней есть живого, доброго, внесено в нее не нашими просвещенными стараниями, не мерами правительства, но здравым смыслом и нравственным строем этого безграмотного народа.

О, если б в наших образованных классах замечалась хотя тень этого прямого, бескорыстного духовного отношения к делу, хотя тень этой истинной веры в пользу истинного просвещения! С какой радостью сказал бы я без ограничений, что верю в будущность русской школы.

(Из сб. статей «Сельская школа».)

С. А. Рачинский.

Задачи для устного счета.

№ 8. Некто был учителем в течение 14 лет. Сколько дней он учительствовал? — 5110.

№ 14. Некто тратит 40 коп. в день. Сколько он тратит в год? — 146 руб.

№ 338. Машина печатает в минуту 5 листов. Сколько в сутки? — 7200 лист.

№ 880. Некто работает 273 дня в году и тратит на себя в день 60 коп., а откладывает в год 600 руб. Сколько он получает за рабочий день? — 3 руб.

№ 892. Сколько ударов пробили часы (бьющие половины одним ударом) в течение февраля 1892 г.? — 5040.

№ 893. Сколько минут в феврале простого года? — 40320.

№ 895. Летом у меня целые сутки было открыто окно. В первый час влетел 1 комар, во второй — 2, в третий — 3 и т. д. Сколько комаров налетит в сутки? — 300.

№ 851. Переднее колесо делает 19 оборотов, пока заднее делает их 13. Заднее колесо сделало 624 оборота. Сколько сделало переднее?— 912.

№ 295. Нужно проверить 360 тетрадей диктанта. Один учитель может проверить в 15 час., другой в 10 час., третий в 6 час. Во сколько времени проверят они тетради втроем? — В 3 часа.

№ 299. В школе равное число девочек и мальчиков. Я принес 234 ореха, и каждому мальчику досталось по 5 орехов, каждой девочке по 4 ореха. Но девочки обиделись, и в другой раз я принес столько орехов, что всем досталось по 6. Сколько орехов я принес? — 312.

№ 296. Двум братьям досталось 240 руб. Если младший из своей части отдаст старшему 25 руб., то у старшего будет вдвое больше, чем у младшего. Сколько досталось каждому? — 105 руб.; 135 руб.

№ 336. Я провел год в деревне, в Москве и в дороге — и притом в Москве в 8 раз более времени, чем в дороге, а в деревне в 8 раз более, чем в Москве. Сколько дней провел я в дороге, в Москве и в деревне?— 5; 40; 320.

№ 378. Родник в 24 минуты дает бочку воды. Сколько в сутки? — 60.

№ 430. У меня вдвое больше денег, чем у брата. Если же он мне из своих денег отдаст рубль, у меня будет втрое больше денег, чем у него. Сколько денег у каждого из нас? — 8 руб.; 4 руб.

№ 448. В году 150 учебных дней, но по субботам мы умственных задач не решаем. Сколько мне нужно запасти задач на год, если каждая из двух старших групп решает по 8 задач в вечер? — 2000.

№ 532. Дочь ткет по 3 арш. в день, 4 дня она ткала одна, но затем стала ткать и мать, которая ткет по 5 арш. в день. Когда их тканья стало поровну, они прекратили работу. Сколько соткали они вдвоем?—60 арш.

№ 730. Двое выехали одновременно из одного города в другой. Первый ехал по 12 верст в час и приехал на место 2 часами ранее, чем другой, который ехал по 9 верст в час. Какое расстояние между городами? — 726 верст.

№ 737. Я дал одному ученику 3 ореха, а всем остальным по 5. Если бы я всем дал по 4 ореха, у меня осталось бы 15. Сколько было орехов? — 83.

№ 740. Если к моим деньгам прибавить 4 руб., у меня будет столько же, сколько у моего брата. Если к моим деньгам прибавить 55 руб., у меня будет вчетверо больше, чем у брата. Сколько денег у каждого?— 13 руб; 17 руб.

№ 751. За 1000 руб. я купил 44 коровы, по 18 руб. и 26 руб. Сколько тех и других? — 18; 26.

№ 794. Учитель дает уроки в трех домах: в одном получает 352 руб. в год, в другом — 28 руб. в месяц, в третьем — 6 руб. в неделю. Сколько получает он за уроки в год? — 1000 руб.

№ 809. Старший брат сказал младшему: дай мне 8 орехов, тогда у меня орехов будет вдвое больше, чем у тебя. А младший сказал старшему: ты дай мне 8 орехов, тогда у нас будет поровну. Сколько орехов у каждого? — 56; 40.

№ 838. У меня 5 человек детей. Дал я им пряники поровну. 3 из них съели по 5 пряников, и тогда у всех 3 осталось столько пряников, сколько у 2 остальных. Сколько всех пряников роздано? — 75.

№ 867. От Москвы до Тамбова 450 верст. Выехали одновременно из М. почтовый, а из Т. товарный поезд друг другу навстречу. Второй мог бы пройти весь путь в 18 часов, первый вдвое скорее. Через сколько часов они встретятся? — Через 6 час.

№ 875. 2 мальчика играли в шашки. Через несколько минут на доске оказалось пустых клеток втрое больше, чем занятых шашками, а у одного мальчика 2 шашками более, чем у другого. Сколько осталось у каждого? — 9; 7.

№ 874. Я купил столько коробок с мылом, сколько было кусков в коробке. Сестра купила 3 коробками меньше, чем я, но в каждой было

3 кусками больше, чем в купленных мной. У кого больше кусков? — У меня, девятью.

№ 883. В будущем (1892) году думаю провести в Петербурге столько минут, сколько часов проведу в деревне. Сколько времени проведу в Петербурге? — 6 дней.

(Из задачника «1001 задача для умственного счета» Пособие для учителей сельских школ. Составил С. Рачинский, изд. 3-е, исправленное. С.-Петербург 1899 г. Первое издание 1891 г.)

С. Шохор-Троцкий.

Таблицы для упражнений в изустных вычислениях.

К числу пособий, служащих для усвоения учениками способов вычисления, принадлежат таблицы, на которых напечатан ряд цифр и их совокупностей. «Таблица Шохор-Троцкого для классных упражнений в изустных вычислениях» (изд. третье, дополненное) содержит ряд цифр:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13		14		15	11	16		19
10		20		21	24	27		26
40		50		60	70	80		90
36		49		64	81	91		93
23		37		43	59	97		73
75		68		66	62	69		38
56		91		57	51	68		78
111		117		119	121			144

Выписывать каждый день, на время, ряд цифр на доске, конечно, неудобно. Гораздо лучше повесить подобную таблицу на одну из свободных стен классной комнаты с тем, чтобы к таблице можно было с любым отделением класса обращаться во всякое время. «Таблица Шохор-Тропкого» в последних изданиях заключена в раму, нижняя и верхняя части которой представляют собой аршин в его соотношениях к вершку, дюйму, сотой доле сажени и центиметру; боковые же части рамы представляют собой метр в его соотношениях к центиметру, к аршину (22 1/2 в.), к футу (3 ф. 3 д. 3 линии слишком) и к сотой доле сажени (47 сотых).

Употребление таблиц

Подобные таблицы, при надлежащем их употреблении в классе, приводят к хорошим результатам. Среди урока, после письменного вычисления, одно отделение встает, обращается лицом к «таблице» и начинает упражнения в изустном вычислении. Взяв в руки палочку, учитель (смотря по надобности) предупреждает, что дети должны все показываемое либо прибавлять, либо все вычитать, либо первые два числа сложить, следующее — вычесть, четвертое — опять прибавить и т. д. Учитель может, показывая число, сказать: «прибавить», потом, показав следующее число, сказать: «помножить», затем — «вычесть» и т. д. Класс же, приученный к соблюдению ритма, по указанию и безмолвной команде учителя может хорошо, в течение двух-трех минут и долее, поупражняться в почти самостоятельном изустном вычислении. Оно является как бы переходной ступенью от изустных вычислений под непосредственным руководством учителя к изустным, совершенно самостоятельным вычислениям. Благодаря этим классным вычислениям, при которых ученики стоят, а учитель почти не говорит, и класс, и учитель несколько освежаются (в особенности эта передышка нужна тем учителям, которые, к сожалению, склонны к слишком громкому ведению урока, — от каковой склонности, как известно, очень трудно, хотя и следует, освободиться). Молчаливые или самые краткие указания учителя относительно того, что ученики должны делать, имеют очень важное психологическое и воспитательное значение. При этом воспитываются речь, воля и внимание учеников, а зрительные их впечатления, при помощи немногих слуховых, являются источником волевой работы.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	
А	5	14	27	31	48	56	69	72	87	93	А
Б	3	11	25	39	50	54	68	76	82	94	Б
В	2	19	23	38	47	51	70	74	86	91	В
Г	6	18	22	40	45	59	67	71	84	99	Г
Д	4	20	26	37	43	58	62	79	81	100	Д
Е	1	17	24	35	42	60	63	78	89	92	Е
Ж	9	15	21	33	46	57	62	80	88	99	Ж
З	8	13	29	32	44	55	66	77	90	95	З
И	10	12	28	36	41	53	64	75	83	97	И
К	7	16	30	34	49	52	61	73	85	98	К
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	

Известно, что дети когда вычисляют по полному требованию учителя, приучаются изустно вычислять только по этому полному требованию, как бы поддаваясь внушению и голосу учителя. Но они зато оказываются слабыми в самостоятельных изустных вычислениях, переход к которым и облегчается описанной выше «таблицей». Сверх того, «таблица» полезна при задавании ученикам самостоятельных работ в тех школах, в которых не употребляются книжки, предназначенные специально для учеников, а если и употребляются, то с недостаточным для данного отделения количеством числовых примеров.

Заслуживает внимания таблица Мартеля, изображенная выше. Нумерации А, Б, В и т. д. и I, II, III и т. д. отпечатаны в ней красной краской и служат для облегчения указаний, о каких числах идет речь.

(Из методики арифметики Шохор-Троцкого.)

5. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Методам решения задач дореволюционные методисты уделяли большое внимание; этому вопросу в их методиках посвящены обширные главы. Многие главы полностью сохранили свое значение до настоящего времени. Не имея возможности из-за большого объема этого материала полностью воспроизвести его на страницах Хрестоматии, мы остановились только на некоторых методистах — Евтушевском, Гольденберге, Егорове, Беллюстине и Эрне, которые, по нашему мнению, наиболее полно и оригинально разрешали вопросы, связанные с методикой решения задач, печатая из их работ только некоторые главы и притом с значительным сокращением.

Первые наиболее обстоятельные высказывания по методике решения задач принадлежат Евтушевскому. Он наметил два «приема» разбора задач (синтетический и аналитический — без употребления, однако, этих терминов), подчеркнул большое значение предварительного составления плана решения задачи, решение одной и той же задачи различными способами. В соответствии с методом изучения чисел он придавал большое значение решению так называемых неопределенных задач.

Гольденберг четко и определенно сформулировал четыре основных этапа в решении задачи: а) анализ, б) синтез (план), в) определение действий, посредством которых решается задача, г) вычисления. Синтез в понимании Гольденберга отождествляется с планом решения задачи. Он ввел классификацию задач на собственно-арифметические задачи и алгебраические задачи, признав за арифметическими способами решения алгебраических задач большое образовательное значение. Он придавал большое значение уяснению учащимися прямой и обратной пропорциональной зависимости между величинами и в соответствии с этим подробно разработал приемы решения задач на простое и сложное тройное правило.

В противоположность Евтушевскому Гольденберг не признавал большой пользы от решения неопределенных задач.

Егоров развил и значительно дополнил то, что было сказано о решении задач Гольденбергом. Он впервые подчеркнул большое значение решения простых задач, наметив главные виды этих задач, подробно разработал методы решения сложных задач, глубоко раскрыв сущность анализа и синтеза. Егоров дал обстоятельную разработку методов решения алгебраических задач арифметическими способами, показав, как можно на хорошо подобранных задачах подготовить учащихся к самостоятельному решению даже трудных задач. Как и Гольденберг, он придавал особое значение решению задач с пропорциональными величинами, на пропорциональное деление, усматривая во многих типах задач только различные вариации пропорционального деления. Из обширного материала, посвященного решению задач, здесь дан только один вопрос — арифметические приемы решения типовых задач. — Хотя материал этого раздела в некоторых частях и выходит за пределы начальной школы, тем не менее ему отведено место в Хрестоматии ввиду того большого значения, который имеет в настоящее время вопрос о типах задач и о приемах их решения.

Беллюстин подробно остановился на вопросе о разборе задач анализом и синтезом, показав их в действии, т. е. в применении к решению целого ряда задач. Он придавал равноправное значение этим методам, подчеркивая большое значение синтеза. В противоположность Гольденбергу он различает синтез и план решения задачи как самостоятельные этапы в решении задач. Много полезных указаний практического характера дает Беллюстин в «Подробностях решения»; особого внимания заслуживают те упражнения, которые связаны у Беллюстина с «Окончанием решения задачи».

Ценные замечания даны и по вопросу о решении типовых задач — как сделать, чтобы решение задач по типам не превращалось в механическую работу — по шаблону, по трафарету. В главе о типовых задачах Беллюстин дал краткое, но глубокое обоснование значения «условной единицы», допускаемой в задачах на «части».

Эрн снова остановился на коренном вопросе методики решения задач — анализе и синтезе и дал исчерпывающее изложение этого вопроса. Ярче, чем у других методистов, у него освещен вопрос о способах подготовки учащихся к решению сложных задач путем: 1) придумывания учащимися вопросов к условию задачи, 2) придумывания условия и числовых данных к вопросу, 3) составления сложной задачи из простых.

Не удовлетворяясь теми признаками, которые были положены в основу разделения задач на арифметические и алгебраические, Эрн указал как на существенный признак алгебраических задач — на необходимость предположения для решения таких задач, на условность одной из простых задач, на которые разлагается данная сложная задача.

Большое значение в деле обучения детей решению задач Эрн придавал составлению задач самими учащимися.

Классификацией задач много занимался Шохор-Троцкий (см. часть первую, стр. 66). Достаточно хорошо обоснованную классификацию задач дал Арженикову (см. «Методику» Арженикова, изд. 1939 г., стр. 242—269).

В. Евтушевский.

О решении задач.

Курс Арифметики должен проходиться при значительном участии практических задач.

Задачи, предлагаемые в классе, заключают в себе живой материал для упражнения мышления ученика, для вывода математических правил и для упражнения в приложении этих правил к решению частных практических вопросов. А потому подбор задач должен быть строго систематический.

На первых порах прохождения элементарного курса «Арифметики» решение задачи естественнее и легче вести от чисел, данных к искомому, что для ученика яснее и понятнее; впоследствии полезно, исподволь переходить к решению обратному, то-есть исходя от искомого и определяя его связь с числами, данными в задаче. Для уяснения этого вопроса привожу пример решения одной и той же задачи по двум приемам.

Задача. У двух братьев было вместе 39 коп.; когда они купили у разносчика по 3 груши, то у одного осталось 9 коп., а у другого 12 коп. Сколько денег было у каждого брата до покупки груш?

Первый прием решения. У одного брата после покупки груш осталось 9 коп., а у другого 12 коп., значит у обоих вместе $9+12=$ $=21$ коп. У них было 39 коп., а осталось 21 коп., значит на груши они истратили 39—21 = 18 коп. Из этих 18 коп. каждый истратил поровну, следовательно, по 18 : 2 = 9 коп. Итак, первый брат на груши истратил 9 коп., и у него осталось еще 9 коп., значит до покупки груш у него было 9 + 9 = 18 коп. У второго брата было 9 + 12 = 21 коп.

Второй прием. Требуется узнать, сколько было денег у каждого брата до покупки груш. Для этого надо знать, сколько каждый из них истратил на груши и сколько денег у него осталось.

Сколько денег осталось у каждого, известно, а чтобы узнать, сколько каждый истратил на груши, нужно узнать, сколько они истратили поровну. А чтобы узнать, сколько они истратили вдвоем, нужно прежде высчитать, сколько у двоих осталось из 39 коп. после покупки груш. Итак, надо прежде узнать, сколько у обоих осталось денег, потом сколько оба истратили на груши, потом сколько истратил каждый, и, наконец, сколько каждый имел денег до покупки груш.

Замена одного приема решения задачи другим служит одним из сильнейших орудий развития мышления ученика и в то же время подготовляет прием, необходимый ученику впоследствии при составлении формул и уравнений из задач. Переход от первого приема решения ко второму производится постепенно и легко, если ученики, решая задачи по первому приему, получили отчетливое понятие о значении чисел, данных в задаче, чисел искомых и о связи одних с другими посредством условий, выраженных содержанием задач.

При решении задач хорошим средством для развития учеников служит разнообразие способов решения одной и той же задачи и подыскивание простейшего из них. Но учителю нужно быть очень осторожным, чтобы не запутать слабых учеников этим разнообразием, и потому каждый новый способ решения должен следовать тогда, когда прежний был классу достаточно уяснен. Само собой разумеется, что приискание различных способов решения должно исходить от самих учеников при помощи наводящих вопросов учителя. Навык в таком упражнении развивает быстроту соображения; хорошо развитые ученики предлагают часто такое разнообразие приемов рассуждения при решении какой-либо задачи, которое при задавании иногда не приходит и на мысль учителю.

Только значительный опыт и понимание цели и средств преподавания «Арифметики» могут дать преподавателю средство удачно и сообразно с целью составлять быстро во время урока задачи как необходимый материал при прохождении курса. Всего труднее подбирать содержание задачи; легко очень надоесть классу, предлагая задачи с пустым содержанием, вращающимся около понятий «купил», «продал» и т. п. Естественнее всего выбирать содержание задачи из сферы, окружающей ученика, применяясь к его понятиям и видоизменяя это содержание по мере развития ученика. Также важен подбор в задачах условий и данных чисел сообразно с целью преподавания и с постепенностью проходимого курса. Здесь легко забежать вперед и запутать ученика, вводя в задачи данные числа, превышающие предел, около которого мысль ученика привыкла вращаться. Для избежания этого учителю следует являться в класс с готовым материалом.

Предложение и решение задачи. Задачи, служащие для изучения свойств и состава чисел, для вывода правил, открытия и усвоения математических истин, для последовательного развития мышления учеников и для повторения пройденного курса, бывают двух родов: устные и письменные. Здесь я приведу, насколько возможно, только общие приемы предложения учителем и процесса решения учениками задач устных и письменных и образец катихизации при решении одной задачи по двум приведенным выше приемам; частности же или видоизменения приема катихизации при решении задач, относящихся к различным отделам курса, приведены в самом курсе.

Задачи устные. В начале обучения дети приучаются держать в памяти не только содержание предлагаемой задачи, но и данные числа, которые поэтому не следует записывать. Запоминание это облегчается тем, что содержание и числа задачи отличаются на этой ступени обучения простотой. Впоследствии с усложнением содержания задач и с возрастанием числа, если учащиеся уже познакомились с цифрами, можно не только записывать, для облегчения рассуждения при решении задачи и вычислений, числа на классную доску, но и пользоваться во время урока сборником задач, из которого ученики сначала читают задачу вслух, а потом решают.

Предложенная задача повторяется одним или, если нужно, двумя и тремя учениками; после чего предлагаются преимущественно слабым ученикам частные вопросы касательно того, что ищется в задаче, что известно, что означает какое-либо данное в задаче число и т. п. Затем задача снова повторяется в целости и ученики решают ее в уме. Предлагая ученикам задачу, следует с достаточной подробностью и наглядностью выяснить им всякое новое понятие, входящее в задачу, каковы, например, бассейн, урожай, проба и т. п. Выждав некоторое время, пока большинство класса каким-либо внешним знаком (поднятием руки, постукиванием карандаша и т. п.) заявит о том, что задача решена, учитель спрашивает, кто какое получил число. Заметив по ответам, что некоторые ученики утеряли из памяти содержание задачи или переиначили числа, учитель снова воспроизводит то и другое по частям, обращаясь к классу с вопросами.

Не нужно увлекаться быстротой ответов некоторых учеников, решивших задачу, а по возможности наводящими вопросами доводить весь класс до ее решения. Наиболее значительное внимание следует обратить в начале знакомства с новыми учениками на то, чтобы слабые ученики не повторяли ответов своих более способных товарищей, когда сами еще не дошли до решения задачи.

Когда весь класс или большинство учеников решили задачу, то решение это воспроизводится вначале по частям посредством вопросов, обращенных к классу, затем и в целости, причем ученик излагает полное рассуждение, ведущее к отысканию искомого числа. При решении задачи, высказываемом учеником, нужно предоставить ему полную свободу в направлении своих рассуждений. Часто преподаватель, решив сам задачу, предложенную ученикам, по своему легчайшему и скорейшему приему, старается направить рассуждение ученика на тот путь, по которому шло его собственное. Гораздо производительнее сделать поправки в рассуждении, высказанном учеником, нежели насиловать мысль его, которая, по особенности своего склада, весьма часто отличается оригинальностью.

Для образца привожу решение в классе одной устной задачи.

Брат и сестра купили у разносчика фрукты; брат купил 5 апельсинов за 40 коп., а сестра 10 яблок за 40 коп; сестра дала брату 6 яблок и получила в обмен несколько апельсинов. Сколько апельсинов получила сестра?

Один ученик повторяет содержание задачи.

Учитель: О чем говорится в этой задаче?

Ученик: В этой задаче говорится о том, что брат и сестра менялись купленными фруктами.

Учитель: Какие фрукты были у брата и какие у сестры?

Ученик: У брата были апельсины, а у сестры яблоки.

Учитель: Сколько апельсинов было у брата?

Ученик: У брата было 5 апельсинов.

Учитель: За сколько брат купил эти 5 апельсинов?

Ученик: Брат купил эти 5 апельсинов за 40 коп.

Учитель: Сколько яблок было у сестры?

Ученик: У сестры было 10 яблок.

Учитель: Сколько яблок дала сестра брату в обмен на апельсины?

Ученик: Сестра дала брату 6 яблок.

Учитель: Что ищется в этой задаче?

Ученик: В этой задаче ищется, сколько апельсинов получила сестра.

Затем задача снова повторяется в целости, ученики решают ее в уме и потом на вопрос учителя: «кто решил задачу» заявляют внешним знаком, и дает ответ тот, кого учитель назвал по фамилии. После получения ответа от учеников, правильного или неправильного, учитель для словесного воспроизведения всего рассуждения при решении задачи ведет катихизацию таким образом:

По первому приему.

Учитель: Что прежде всего вы узнали для решения задачи?

Ученик: Я узнал, сколько стоит 1 апельсин.

Учитель: Сколько же он стоит?

Ученик: 1 апельсин стоит 8 коп.

Учитель: Как вы узнали, что 1 апельсин стоит 8 коп.?

Ученик: Брат заплатил за 5 апельсинов 40 коп., следовательно, 1 апельсин стоит в 5 раз менее 40 коп., а уменьшив 40 коп. в 5 раз, или взяв пятую часть 40 коп., получим 8 коп.

Учитель: Что узнали потом?

Ученик: Потом я узнал, сколько стоит 1 яблоко.

Идет подобный же разговор относительно определения цены 1 яблока.

Учитель: Что узнали потом?

Ученик: Потом я узнал, сколько стоят 6 яблок.

Учитель: Сколько же они стоят?

Ученик: 6 яблок стоят 24 коп.

Учитель: Как вы это узнали?

Ученик: 1 яблоко стоит 4 коп.; 6 яблок стоят в 6 раз более 4 коп., а 6 раз 4 коп. составляет 24 коп.

Учитель: Затем что узнали?

Ученик: Затем я узнал, сколько апельсинов получила сестра за 24 коп.

Учитель: Сколько же апельсинов получила сестра?

Ученик: 3 апельсина.

Учитель: Как вы это узнали?

Ученик: 1 апельсин стоит 8 коп., на 24 коп. приходится столько апельсинов, сколько раз 8 содержится в 24, а 8 в 24 содержится 3 раза, значит сестра получила 3 апельсина.

После этого идет катихизация с более пространными вопросами.

Учитель: Как узнали вы, сколько стоит 1 яблоко?

Ученик: За 10 яблок заплачено 40 коп., то 1 яблоко стоит в 10 раз менее 40 коп., а десятая часть 40 коп. будет 4 коп., значит 1 яблоко стоит 4 коп.

Учитель: Зная, сколько стоят 1 яблоко и 1 апельсин, как вы узнали, сколько апельсинов получила сестра?

Ученик: 1 яблоко стоит 4 коп., то 6 яблок стоят 24 коп., потому что 6 раз 4 составляет 24. 1 апельсин стоит 8 коп., то на 24 коп. придется 3 апельсина, потому что 8 содержится в 24 3 раза. Следовательно, сестра получила 3 апельсина.

Наконец, все решение задачи высказывается одним учеником.

Ученик: За 10 яблок заплачено 40 коп., то 1 яблоко стоит 4 коп., потому что десятая часть 40 коп. будет 4 коп. За 5 апельсинов заплачено 40 коп., то 1 апельсин стоит 8 коп., потому что пятая часть 40 коп. будет 8 коп. Сестра дала брату 6 яблок, а так как каждое яблоко стоит 4 коп., то она дала яблок на 24 коп., потому что 6 раз 4 коп. будет 24 коп. Сестра получила апельсинов на 24 коп., а так как каждый апельсин стоит 8 коп., то она получила 3 апельсина, потому что 8 содержится в 24 3 раза.

Если ученики сами не заявляют о том, что они знают другой простейший способ решения этой задачи, то следует подвести их к тому наводящими вопросами, каковы:

Учитель: Что дороже, как видно из задачи, апельсин или яблоко?

Ученик: Апельсин дороже яблока.

Учитель: Из чего это видно?

Ученик: Из того, что на 40 коп. куплено 10 яблок и только 5 апельсинов.

Учитель: Во сколько раз апельсин дороже яблока и почему?

Ученик: В два раза, потому что 10 больше 5 в 2 раза.

Учитель: Следовательно, сколько апельсинов получила сестра за 6 яблок?

Ученик: 3 апельсина, потому что за каждые 2 яблока она получала по одному апельсину, следовательно, за 6 яблок получила 3 апельсина, так как 2 в 6 содержится 3 раза.

После этого один ученик высказывает полное рассуждение решения этой задачи по новому способу, а другие поясняют, почему этот прием решения следует предпочесть первому.

Приводя здесь в подробности классную работу при решении этой задачи, я вовсе не имею в виду этим сказать, что всякую устную задачу следует решать и разбирать так подробно. Для одной задачи учитель ограничится только ответом числа, выражающего искомую величину, для другой — предложит все частные вопросы касательно определения всех вспомогательных неизвестных (в нашей задаче: цена яблока, цена апельсина, цена 6 яблок), для третьей потребует высказать сразу полное решение. Но и вся приведенная работа при решении одной задачи не должна казаться слишком кропотливой и утомительной, если принять во внимание, что работа ведется всем классом, что ответы даются различными учениками, и таким образом работа распределяется между всеми. А если учитель достиг на подобной работе того, что ученик может ясно и сжато высказать полное решение задачи, то он достиг многого в развитии мышления ученика, в анализе вопроса и в приеме вычисления.

По второму приему.

Предполагая, что ученики не могут решить предложенной им задачи, я привожу здесь образец наводящей катихизации в сокращенной форме.

Учитель: Что ищется в задаче?

Ученик: Сколько апельсинов получила сестра.

Учитель: Что надо знать, для того чтобы это вычислить?

Ученик: Надо знать, сколько стоят 6 яблок и сколько стоит один апельсин?

Учитель: Что надо прежде узнать для определения цены 6 яблок?

Ученик: Надо узнать, сколько стоит одно яблоко.

Учитель: Можно ли из задачи узнать, сколько стоит одно яблоко?

Ученик: Можно, потому что из задачи мы знаем, что за 10 яблок заплачено 40 коп.

Учитель: Итак, в каком порядке нужно вести вычисления для решения этой задачи?

Ученик: Сначала надо узнать, сколько стоит одно яблоко, потом сколько стоят 6 яблок, затем сколько стоит один апельсин и, наконец, сколько апельсинов получила сестра за 6 яблок.

Или катихизация ведется, исходя из искомой величины:

Учитель: Что в этой задаче требуется узнать?

Ученик: Сколько апельсинов получила сестра за 6 яблок.

Учитель: Могла ли сестра получить от брата 6 апельсинов?

Ученик: Нет, не могла, потому что яблоки дешевле апельсинов.

Учитель: Во сколько раз сестра получила меньше апельсинов, чем дала яблок брату?

Ученик: В 2 раза, потому что 1 апельсин дороже 1 яблока в 2 раза, и т. д.

После объяснения приемов решения задач в классе, считаю настоятельно необходимым обратить внимание учащих на то, что дети на первых порах обучения обыкновенно выражаются с большим трудом; передача мысли в словах представляет для них неодолимое затруднение вследствие малого запаса слов, а еще более вследствие непривычки связывать слова в длинные фразы. Таким образом, дети могут вполне хорошо решить задачу и дать верный численный ответ, но не могут высказать плана решения и причины вычислений, необходимых для решения задачи.

Кроме того, дети, опять-таки при начале обучения, решавшие задачу и получившие верный ответ, решительно не понимают требования учителя объяснить решение задачи; задача и ее решение до того ясны детям, если только задача выбрана соответственно силам детей, что им кажется совершенно лишним давать какое-либо разъяснение. А потому настойчивое требование учителя — объяснить решение задачи — кажется детям бесполезной придирчивостью, утомляет их и отбивает иногда даже охоту заявлять учителю о решении задачи, чтобы не подвергнуться неприятному разговору с учителем по поводу решения задачи.

А потому: во-первых, как сказано выше, в начале обучения достаточно ограничиться ответом числа, получаемого от решения задачи, и мало-помалу требовать самых кратких разъяснений решения и то не всей задачи, а сначала определения какой-либо одной вспомогательной неизвестной в задаче, а потом уже переходить к объяснению всего решения, и, наконец, к предварительному построению плана решения; во-вторых, для приучения детей устанавливать предварительный план решения задачи и потом уже переходить к вычислениям, лучше предлагать задачи с неопределенными данными числами; дети самой задачей будут поставлены в необходимость думать не о вычислениях с данными числами, а только о плане решения задачи. Для пояснения этого приема привожу образец такой задачи и работы с детьми по поводу ее решения.

З а д а ч а. Мальчик купил несколько яблок; за каждое яблоко он заплатил одинаковую цену и с денег, данных продавцу, получил сдачу. Сколько сдачи получил мальчик?

Как видно, задача представляет только собрание условий и вопрос; числа, данные в ней, не определены. Дети вначале выражают недоумение и говорят, что такой задачи решать нельзя. На вопрос учителя, почему нельзя, дети поясняют, что не указано ни числа яблок, ни цены яблока, ни количества денег, данных продавцу, следовательно, ответа на вопрос дать невозможно.

У ч и т е л ь: Как вы будете решать эту задачу, когда я дам все необходимые вам числа?

У ч е н и к и: Тогда мы узнаем, сколько стоят купленные яблоки, и затем узнаем, сколько приходится сдачи.

У ч и т е л ь: Как вы узнаете, сколько стоят яблоки?

У ч е н и к и: Цену одного яблока мы повторим столько раз, сколько куплено яблок.

У ч и т е л ь: А как потом узнаете сдачу?

У ч е н и к и: Для определения сдачи мы из денег, данных продавцу, вычтем то, что ему следует получить за яблоки.

У ч и т е л ь: Итак, скажите теперь весь ход решения задачи.

У ч е н и к и: Для решения этой задачи мы узнаем сперва, сколько следует заплатить за купленные яблоки; для этого цену одного яблока повторим столько раз, сколько куплено яблок; потом узнаем сдачу;

для этого из денег, данных продавцу, вычтем то, что ему следует получить за яблоки.

Такой разговор по поводу решения задачи, как видно, легко завести с детьми, потому что числа не отвлекают их внимания, и они по необходимости сосредоточивают его на условиях задачи.

После высказанного плана решения учитель предлагает детям взять числа, какие им угодно, поставить эти числа в данную задачу и решать ее по установленному плану. Эта работа всегда нравится детям и возбуждает их внимание. При подборе чисел и вычислений с ними легко обнаруживается как степень навыка детей обращаться с числами, так и предел, в котором дети свободно обращаются с числом.

После двух, трех подобных задач, обстоятельно разобранных, можно перейти к установлению предварительного плана решения для всякой определенной задачи.

При изучении чисел первой сотни вообще весьма важное значение имеют *неопределенные задачи*, заключающие в себе неполное число данных чисел и требующие разложения изучаемого числа на слагаемые и множители; допуская много решений, они особенно интересуют учащихся и служат для упражнения их в беглом вычислении. Образцы такой работы приведены в самом курсе.

Задачи письменные, решаемые в классе.

Если ученики не имеют в руках сборника задач, то, предлагая письменную задачу для решения в классе, учитель выписывает на доску только одни данные числа с их наименованиями. Для подробного усвоения задачи содержание ее воспроизводится по частным вопросам, как это указано для задачи устной, и, наконец, повторяется в целости. Если же ученики имеют сборник задач, то читают прямо из сборника по указанному учителем номеру и приступают прямо к решению задачи. Так как на решении письменных задач, кроме развития соображения ученика на раскрытии плана решения, преследуется приучение его к аккуратному письменному расположению и исполнению действий и вообще к приложению на практике усвоенных им правил, то в случае предложения классу задачи, сложной по числу условий или замысловатой по содержанию, следует *разграничить две эти работы, то-есть установление плана решения и исполнение действий*. Без такого разделения этих работ часто случается, что слабейшие ученики не могут приступить к вычислениям, и работа ведется в классе так неравномерно, что учителю бывает весьма трудно следить за ходом работы всего класса. Таким образом, после усвоения содержания задачи учениками и прежде приступления к вычислениям, учитель предлагает классу высказать план решения задачи. Ученики говорят последовательно, какие неизвестные величины они будут определять для отыскания главной неизвестной, потом уже называют одно за другим действия, необходимые для решения задачи. Установив план решения задачи и наметив действия, ученики приступают к их исполнению на своих досках или тетрадях. Задачи легкие по содержанию или повторительные, то-есть сходные по содержанию с прежде решенными, а также задачи, предлагаемые для контроля развития учеников, решаются без предварительного установления всем классом плана решения.

К классным доскам вызываются ученики преимущественно слабейшие в классе, для того чтобы они работали под непосредственным наблюдением учителя и повнимательнее относились к самой работе, исполняя ее в виду всего класса. От времени до времени следует вызывать к классной доске и способнейших учеников, чтобы приучить их к писанию больших цифр мелом и к исполнению работ перед целым классом.

После нескольких минут, употребленных учителем для обхода класса с целью посмотреть, все ли ученики принялись за работу, он обращается к слабейшим ученикам с вопросами: что они узнают, какое действие делают, какой результат получили от исполнения такого то действия и т. п. Вопросы эти необходимы для направления работы всего класса и для указания ошибок тем, которые с первого приступа повели решение неправильное, а также и для тех, которые, несмотря на предшествовавшие указания, вовсе не могут приступить к работе. Вопросы обращаются к слабейшим ученикам, чтобы в случае надобности воспроизвести с ними по частям сделанное предварительное рассуждение; иначе после ответа сильнейших учеников слабейшим оставалось бы только пассивно следовать их указаниям. Наблюдая за работающими у классных досок, учитель исправляет ошибку тотчас, как заметит ее, чтобы не допустить ее пройти через все выкладки. Исправление это производится или просто указанием на ошибку, или помощью вопроса, обращенного к классу или к отдельному ученику и относящегося к результату или обозначению, написанному неверно.

Нужно заботиться, чтобы все ученики доводили решение задачи до конца, имея в виду, что не так опасно в деле классного обучения некоторое задержание развития учеников успевающих, как упущение из виду неуспевающих.

По окончании решения задачи один из учеников, по выбору учителя, но без наводящих вопросов, повторяет содержание задачи, высказывает полное рассуждение, ведущее к определению, какое действие необходимо для отыскания вспомогательной и главной неизвестной, и указывает вычисления, которые сделаны для получения ответа на вопрос задачи. При этом ему и всему классу предлагаются вопросы, касающиеся исполнения действий и вообще механизма вычислений.

Весьма полезно также приучить учеников после окончания всех действий, ведущих к решению задачи, письменно производить в порядке все вычисления посредством строчек. Каждая строчка состоит из трех частей: в первой части записывается словами, что ищется, во второй обозначается действие, посредством которого находится искомое, и в третьей — результат, полученный от совершения действий. Такое приведение всех рассуждений и вычислений в порядок приучает ученика охватывать в своем соображении всю задачу в целости и относиться внимательно как к условиям задачи, так и к вычислениям.

Изложенный в общих чертах процесс письменного решения задачи в классе требует вначале, при работе с непривычными учениками, много времени; но приобретаемые учениками, по мере упражнения, точность рассуждений и выражений и быстрота вычислений дают возможность не только сокращать время для решения задачи, но сокращать и самый процесс. Для полноты выяснения важного вопроса относительно процесса письменного решения задачи в классе привожу образец этой работы.

Возьмем задачу: У мастера было 1443 *м* тонкой проволоки; из всей этой проволоки он сделал клетки, сетки и спицы; на клетки он употребил 37-ю часть всей проволоки, а на сетки в 17 раз более, чем на клетки. Сколько метров проволоки пошло на приготовление спиц?

Усвоение содержания задачи. Задача, прочитанная учителем или учениками из «Сборника», повторяется одним учеником. Слабейшие или менее внимательные ученики отвечают на вопросы учителя: что означает в задаче 1443 *м*, 37, 17? Что ищется в задаче? Что известно из задачи? и т. п. После усвоения содержания задачи по частям она снова повторяется одним учеником в целости.

План решения, высказанный одним учеником в целости или несколькими учениками по частям. Сначала надо узнать, сколько проволоки употребил мастер на клетки, потом на сетки, затем на клетки и сетки вместе и, наконец, сколько пошло проволоки на приготовление спиц.

Другой прием:

Требуется узнать, сколько пошло проволоки на приготовление спиц; для этого нужно узнать, сколько проволоки употребил мастер на клетки и сетки вместе, а так как из задачи видно, что на сетки пошло проволоки в 17 раз более, чем на клетки, то мы прежде всего должны узнать, сколько проволоки употребил мастер на приготовление клеток. Итак, надо прежде вычислить, сколько проволоки пошло на приготовление клеток и т. д.

Выделение действий. На вопросы учителя, какие действия нужно совершить для решения этой задачи и почему именно такие действия, ученики отвечают: «Для решения этой задачи нужно:
1) разделить 1443 *м* на 37, потому что на клетки мастер употребил 37-ю часть всей проволоки, а для определения одной из равных частей числа нужно его разделить на число частей;

2) умножить полученное число на 17, потому что на сетки пошло проволоки в 17 раз более, чем на клетки, а чтобы число увеличить в 17 раз, нужно сделать умножение;

3) сложить числа, полученные от деления и умножения, чтобы узнать, сколько проволоки пошло на клетки и сетки;

4) полученную сумму вычесть из 1443 *м*, так как на клетки, сетки и спицы пошло 1443 *м*, а для того чтобы узнать, сколько проволоки пошло на спицы, нужно от всего числа метров проволоки отнять то число метров проволоки, которое употребил мастер на клетки и сетки».

Полезно предложить одному ученику, после выделения действий, перечислить в порядке все действия, необходимые для решения задачи, и ответить на вопросы, для определения какой неизвестной служит то или другое действие.

Вычисление:

$$\begin{array}{r|l} -1443 & 37 \\ \underline{111} & 39 \\ -333 & \\ \underline{333} & \\ - & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 39 \\ \underline{17} \\ 273 \\ \underline{39} \\ 663 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 39 \\ \underline{663} \\ 702 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 1443 \\ \underline{702} \\ 741 \end{array}$$

Строчки:

На клетки пошло проволоки 1443 *м* : 37 = 39 *м*
На сетки » » 39 *м* × 17 = 663 *м*
На клетки и сетки вместе 39 *м* + 663 *м* = 702 *м*
На спицы пошло проволоки 1443 *м* — 702 *м* = 741 *м*

После всех вычислений, необходимых для решения задачи, ученики пишут строчки, то-есть выписывают вкратце план решения задачи, намечают действия, произведенные для определения той или другой неизвестной, и пишут самый результат. Таким образом, каждая строчка должна состоять из трех частей:

а) какая неизвестная определялась — эта часть записывается словами;

б) какое действие совершено для определения неизвестной;

в) какой получился результат от совершения действия.

Число строчек зависит от числа простых задач, на которые разбивается данная сложная задача, значит, — от числа всех неизвестных, главных и вспомогательных, которые нужно определить. Когда ученик правильно написал строчки после решения задачи, то тем он показал полнейшее понимание всего хода вычислений и обнаружил точность и последовательность своего рассуждения при решении задачи.

Письменные задачи для решения вне класса. Задачи, предлагаемые ученикам для решения вне класса, имеют преимущественную цель повторения пройденного в классе, а потому не должны отличаться особенной замысловатостью, могущей сильно затруднить ученика, а должны походить содержанием своим на задачи, решенные в классе, и могут заключать данные числа в больших размерах, так как ученики могут располагать временем, достаточным для вычислений с большими числами. Задача, подобная проделанной в классе, дает возможность и слабейшим ученикам выполнить внеклассную работу самостоятельно и предупреждать распространение между учениками дурной привычки — непроизводительного списывания чужой работы.

При некоторой опытности учителя можно при задавании внеклассной работы разделять учеников по успехам и способностям на группы, предлагая каждой группе особенную задачу.

(В. Евтушевский. Методика арифметики, изд. 1881 г., стр. 88—101.)

А. Гольденберг.

Задачи на числа первой сотни.

60. Мы отвергаем пользу задач с лишними или несообразными условиями; прибавим к этому, что и неопределенным задачам мы придаем лишь второстепенное значение. Решение задач этого рода требует или разложения данного числа на слагаемые, или разложения данного числа на множители. Так, например, решение задачи: «Как можно раздать 10 копеек трем мальчикам» требует разложения числа 10 на три слагаемых и допускает всего 36 решений; решение задачи: «Как можно раздать 19 коп. трем мальчикам?» допускает всего 153 решения. Трудно предположить, чтобы сторонники подобных задач имели в виду требовать от детей составления полных таблиц, представляющих разложение того или другого числа на слагаемые; можно обучить детей и этому, но мы сомневаемся, чтобы нашелся — даже в среде фанатических сторонников «изучения чисел» — педагог, который решился бы признать образовательное значение за подобными занятиями.

В несколько ином виде представляются задачи, требующие разложения данного числа на два множителя. Во-первых, число таких разложений не велико (для чисел, не превосходящих ста); число 96, например, имеет десять делителей (не считая единицы и самого числа) и допускает поэтому десять разложений на произведение двух множителей, из которых пять разложений отличаются от остальных только порядком множителей; вследствие этого вопрос о разложении данного числа на два множителя может быть всегда, так сказать, исчерпан детьми вполне. Во-вторых, разложение некоторых чисел первой сотни на множителей имеет и практическое значение; выполняя такое разложение, дети упражняются в производстве деления и попутно запоминают некоторые разложения, что, без сомнения, полезно. При этом мы считаем, по меньшей мере, излишним облекать в многословную задачу требование разложить то или другое число на два множителя и полагаем, что гораздо проще потребовать, например, от детей, чтобы они пересказали (или написали) все различные разложения числа 12 на два множителя, чем предлагать детям задачу вроде следующей: «Отец дал сыну 12 орехов и обещал дать ему еще столько раз по 3 ореха, сколько раз он может разложить все данные ему орехи на равные кучки. Сколько еще орехов может получить сын?» [1]

На основании только что изложенного мы и не поместили в нашем «Сборнике» так называемых неопределенных задач.

61. Обращаясь теперь к изложению нескольких замечаний относительно задач, решением которых должны сопровождаться упраж-

[1] Заметим мимоходом, что смышленый мальчик, решающий задачу, таким образом выраженную, может получить от отца очень много орехов: ему стоит только разложить полученные орехи, например, на две равные кучки, собрать их, разложить их еще раз на две равные кучки и продолжать так до тех пор, пока ему не надоест раскладывать орехи или пока он не сообразит, что заработал достаточное их количество.

нения в вычислениях до ста, укажем на группу задач, которую можно назвать задачами на вычисление стоимости; они представляют, собственно говоря, задачи на тройное правило, о котором считаем нелишним сказать здесь несколько слов.

В задачи, решаемые простым тройным правилом, входят величины или прямопропорциональные, или величины обратнопропорциональные.

Две величины называются прямопропорциональными, если увеличение (или уменьшение) одной из них в несколько раз влечет за собой увеличение (или уменьшение) другой величины во столько же раз.

К таким прямопропорциональным величинам принадлежат, например, следующие:

Количество товара и стоимость товара. Во сколько раз больше (меньше) количество товара, во столько же раз больше (меньше) стоимость товара, при прочих равных обстоятельствах (условиях) [1].

Продолжительность работы и плата за работу. Во сколько раз больше (меньше) время, потребное для работы, во столько же раз больше (меньше) плата за работу, при прочих равных обстоятельствах.

Длина равномерно проходимого пути и время его прохождения. Во сколько раз больше (меньше) пройденный путь, во столько же раз больше (меньше) время, употребленное на его прохождение, при прочих равных обстоятельствах (при одной и той же скорости).

Длина прямоугольника и его площадь. Во сколько раз длина прямоугольника больше (меньше), во столько же раз больше (меньше) его площадь, при прочих равных обстоятельствах (при одной и той же ширине).

Две величины называются обратнопропорциональными, если увеличение (или уменьшение) одной из них в несколько раз влечет за собой уменьшение (или увеличение) другой величины во столько же раз.

К обратнопропорциональным величинам принадлежат, например, следующие:

Число работников, назначенное для выполнения работы, и продолжительность этой работы. Во сколько раз больше (меньше) число работников, во столько же раз меньше (больше) время, потребное для выполнения работы, при прочих равных обстоятельствах.

Скорость равномерного движения и время, необходимое для прохождения с этой скоростью некоторого расстояния. Во сколько раз больше (меньше) скорость движения, во столько же раз меньше (больше) время, потребное для прохождения одного и того же расстояния.

Длина и ширина прямоугольника, площадь которого не изменяет своей величины. Во сколько раз увеличена (уменьшена) длина прямоугольника, во столько же раз должна быть уменьшена (увеличена) ширина прямоугольника, если площадь его должна сохранить свою величину.

В задачу на простое тройное правило входят три данных, по которым требуется определить искомое число (четвертое пропорциональное).

---

[1] Иногда, для краткости, выражаются, хотя и неправильно, так: «Чем больше количество товара, тем больше его стоимость».

Пусть, например, предложены задачи:

1) «7 *м* сукна стоят 28 рублей; сколько следует заплатить за 11 *м* такого сукна?»

2) «8 работников могли бы окончить работу в 6 дней; сколько нужно работников, чтобы эту работу окончить в 4 дня?»

В первую из этих задач входят две прямопропорциональные величины: количество сукна и стоимость сукна; два соответствующих значения этих пропорциональных величин даны: количество 7 *м* и соответствующая стоимость 28 руб.; кроме того, дано другое значение первой величины: 11 *м*; требуется определить то значение второй величины, которое соответствует этому значению первой величины,— проще: требуется определить стоимость 11 *м* сукна.

Во вторую из приведенных задач входят две обратнопропорциональные величины: число работников и число дней работы; два соответствующих значения этих обратнопропорциональных величин даны: число 8 работников и соответствующее число 6 дней работы; кроме того, дано другое значение второй величины: 4 дня работы; требуется определить то значение первой величины, которое соответствует данному значению второй величины,— проще: требуется определить число работников, необходимое для выполнения работы в 4 дня.

При сокращенной записи задач подобного рода удобно располагать данные предложенной задачи так:

1) 7 *м* . . . . 28 руб.
11 *м* . . . . ?
2) 8 работников . . . . . . 6 дн.
? . . . . 4 дн.

Самый простой, естественный и образовательный способ решения задач на тройное правило есть тот способ, который известен у нас под названием способа приведения к единице; его можно было бы назвать также способом последовательных заключений или последовательных выводов. Этот способ в применении к решению выбранных нами задач состоит в следующем:

1) Зная, что 7 *м* сукна стоят 28 рублей, мы заключаем, что стоимость 1 *м* составляет 4 рубля (число рублей, которое найдем, разделив 28 на 7); узнав, что 1 *м* сукна стоит 4 рубля, мы заключаем, что стоимость 11 *м* сукна составит 44 рубля (число рублей, которое найдем, умножив 4 на 11).

2) Зная, что для выполнения работы в 6 дней требуется 8 работников, мы заключаем, что для выполнения работы в 1 день потребовалось бы 48 работников (число работников, которое найдем, умножив 8 на 6); узнав, что для выполнения работы в 1 день потребовалось бы 48 работников, мы заключаем, что для выполнения работы в 4 дня потребуется 12 работников (число работников, которое найдем, разделив 48 на 4).

Из хода решения этих задач видно, что способ приведения к единице состоит в том, что от данной совокупности единиц переходят к одной единице, а, затем от одной единицы переходят к искомой совокупности единиц. Этот способ, как легко понять, может быть приложен всегда к решению задач на тройное правило и потому должен быть признан общим. Но следует заметить, что, в частных случаях, переход к единице может дать в результате дробное число, несмотря на то, что и данные предложенной задачи выражены в целых числах и что искомое задачи также выражается целым числом.

Пусть, например, требуется узнать, сколько стоят 10 *кг* соли, если 15 *кг* стоят 36 коп.; решая эту задачу путем приведения к единице, мы рассуждаем так: 15 *кг* стоят 36 коп.; 1 *кг* стоит одну пятнадцатую часть 36 коп., или, что то же, 36 пятнадцатых одной копейки, т. е. $2^2/_5$ коп., а 10 *кг* стоят 10 раз по $2^2/_5$ коп., т. е. 24 коп.

Но дело в том, что когда данные предложенной задачи выражены в целых числах и когда эти данные подобраны так, что и искомое должно получиться в виде целого числа, то всегда можно избежать промежуточного дробного результата: для этого стоит только решать задачу не приведением к единице, а приведением к общей мере двух соответствующих данных чисел.

Так, для определения в нашем случае стоимости 10 *кг* соли, достаточно знать стоимость 5 *кг* соли, так что нет необходимости знать стоимость 1 *кг* соли. Так как 5 *кг* в 3 раза меньше 15 *кг*, то стоимость 5 *кг* в 3 раза меньше стоимости 25 *кг*; но 15 *кг*, по условию, стоят 36 коп.; отсюда 5 *кг* стоят 12 коп.; 10 *кг* стоят 24 коп.

На основании изложенного следует прийти к тому выводу, что, решая задачи на тройное правило способом последовательных заключений, нет надобности переходить всегда через единицу; этот переход через единицу необходим лишь в тех случаях, когда входящие в задачу соответствующие данные выражены числами, имеющими общей мерой только единицу (13 *кг* товару стоят 65 коп.; сколько стоят 15 *кг* товару?).

Усвоение детьми этого приема должно совершаться путем чисто практическим; всякие теоретические разъяснения были бы здесь неуместны. Дети должны только приобрести навык находить ту или другую из кратных частей данного числа, повторением которой может быть составлено соответствующее число, а затем — выбрать, сообразуясь с третьим данным задачи, подходящую из этих кратных частей (т. е. которая не привела бы к промежуточному результату, выраженному дробным числом).

Пусть, например, 1 *ц* товара стоит 80 руб., и требуется узнать стоимость 15 *кг* товару. Чтобы определить стоимость 15 *кг*, достаточно, конечно, знать стоимость 5 *кг*; 5 *кг* составляют кратную часть центнера, именно — одну двадцатую часть центнера; отсюда центнер стоит 80 руб.; 5 *кг* стоят 4 руб., 15 *кг* стоят 12 руб. (Если бы третье данное задачи — 80 руб. — не делились бы в этом примере без остатка и на 20, то результат не мог бы быть выражен целым числом).

Подобные упражнения мы считаем весьма полезными, и притом полезными в общеобразовательном отношении, а не с точки зрения преследования целей узко утилитарных. Когда учитель найдет возможным давать детям эти задачи для самостоятельных письменных занятий, то он должен приучить их располагать записи так:

1 *ц*	80 руб.
15 *кг*	?
5 *кг*	4 руб.
15 *кг*	12 руб.

62. Не можем, наконец, не сделать еще одного замечания относительно задач на вычисление стоимости. Решение этих задач способом приведения к общей мере (приведением к общей кратной части) требует выполнения двух действий: деления и умножения. Но решение подобных задач допускает применение и других частных приемов, которые трудно подвести под какое-либо общее правило. Эти частные приемы основаны на возможности составлять, в тех или других случаях, искомое число не только путем повторения (умножения) кратной части другого данного числа, но и путем соединения (сложения различных кратных частей этого данного числа). Так, например, для получения числа 28 из кратных частей числа 40 (эти кратные части: 2, 4, 5, 8, 10, 20) мы можем повторить 7 раз число 4, т. е. десятую часть числа 40, или мы можем сложить число 20 и 8, т. е. сложить половину и пятую часть числа 40. (Дальше Гольденберг приводит пример решения задачи способом приведения к единице, способом приведения к кратной части и способом сложения кратных частей. *А. П.*)

63. Переходя к дальнейшим замечаниям относительно задач, мы должны прежде всего остановиться на задачах, которые называют обыкновенно «Задачами на все четыре действия».

Задачи на все действия, решение которых требует выполнения ряда арифметических действий, называют сложными в отличие от задач, требующих выполнения одного арифметического действия и получивших название простых задач. Выбор этих названий несколько неудачен, так как выражение простая задача принимается почти всегда в смысле легкая (нетрудная) задача, а выражение сложная задача — в смысле трудная задача. Это значение придается словам простая, сложная не только по отношению к арифметическим или, вообще, математическим задачам, но и в применении к различным научным и житейским вопросам. Нет, впрочем, достаточных оснований изменять раз установившиеся термины, и мы под сложной задачей будем, прежде всего, разуметь такую задачу, решение которой требует последовательного выполнения нескольких арифметических действий.

64. Всякая сложная задача распадается на определенное число простых задач, или, выражаясь точнее, решение сложной задачи сводится всегда к решению ряда простых задач, содержание и последовательность которых обусловлены теми соотношениями, в которых находятся данные и искомые предложенной задачи. Установить план решения задачи (ход решения задачи) значит: установить содержание и порядок тех простых задач, последовательное решение которых должно привести к решению предложенной задачи.

Чтобы установить ход решения задачи, необходимо уяснить себе с полной отчетливостью ту определенную зависимость между искомым задачи и ее данными, которая логически вытекает из содержания задачи. Эта зависимость может быть, в иных случаях, настолько проста (настолько прозрачна, если можно так выразиться), что можно непосредственно, или почти непосредственно, охватить ряд тех действий, выполнение которых должно привести к ответу на предложенный вопрос.

Для пояснения сказанного рассмотрим подробно весь ход решения сложной задачи:

«Столяр изготовил 87 рамок в 8 дней; в первые три дня он изготовлял по 13 рамок в день, в следующие четыре дня — по 8 рамок. Сколько рамок изготовил столяр в восьмой день?»

Чтобы ответить на предложенный вопрос, нужно узнать, сколько рамок столяр изготовил в первые семь дней; это число мы можем узнать, так как по данным задачи можем узнать число рамок, изготовленных в первые три дня, и число рамок, изготовленных в следующие четыре дня; узнав же число рамок, изготовленных в первые семь дней, мы можем узнать и число рамок, изготовленных в последний, т. е. в восьмой день, так как знаем, по данным задачи, число рамок, изготовленных в течение всех восьми дней.

Это рассуждение, которое называют анализом задачи, приведет нас к установлению такого плана решения, или, как говорят, к такому синтезу задачи:

1) Узнать число рамок, изготовленных в первые три дня.
2) Узнать число рамок, изготовленных в следующие четыре дня.
3) Узнать число рамок, изготовленных в первые семь дней.
4) Узнать число рамок, изготовленных в восьмой день.

Когда, таким образом, будет установлен ход решения сложной задачи, и она будет сведена к ряду простых задач, тогда останется уяснить себе, какое арифметическое действие должно быть применено к решению каждой из простых задач и как удобнее выполнить каждое из этих действий (устно или письменно, применением нормального приема или какого-либо частного приема и т. п.).

Из сказанного мы приходим к тому заключению, что в процессе решения арифметической задачи надлежит различать четыре момента:

1) Анализ задачи, т. е. то рассуждение, которое необходимо должно предшествовать установлению плана решения.

2) Синтез задачи, т. е. установление содержания и порядка тех простых задач, на которые должна быть разложена данная сложная задача.

3) Определение для каждой простой задачи того арифметического действия, помощью которого она решается.

4) Выполнение того арифметического действия, применением которого решается каждая из простых задач, на которые разложена данная сложная задача.

Если бы предложить кому-либо вопрос, как решить только-что приведенную задачу, то пришлось бы получить, конечно, такой ответ: нужно узнать сперва, сколько рамок изготовлено в первые три дня, затем — сколько рамок изготовлено в следующие четыре дня, потом сколько рамок изготовлено в первые семь дней, и, наконец, сколько рамок изготовлено в последний, восьмой день.

Таким образом, решающий задачу установил бы непосредственно план решения задачи (синтез), не отдавая себе ясного отчета в том рассуждении (анализе), которое необходимо должно было предшествовать установлению этого плана. Такое обстоятельство находит себе объяснение в том, что в задачах, подобных предложенной, зависимость искомого числа от данных чисел настолько проста (прозрачна), так явно подсказана самой задачей, что представляется возможным обнять сразу (интуитивно, как иногда говорят) весь ряд тех арифметических действий, последовательное выполнение которых должно привести к требуемому ответу.

Обняв этот ряд действий, мы между прочим могли бы составить и так называемую «формулу» решения задачи, т. е. то числовое выражение, которое остается только «вычислить» (преобразовать в число десятичного вида), чтобы получить искомое число. Для задачи, нами выбранной, эта формула была бы следующая:

$$87-(13 \cdot 3)-(9 \cdot 4).$$

Вычислив это выражение, мы нашли бы в результате число 12 и дали бы на предложенный вопрос такой ответ: «Столяр изготовил в восьмой день 12 рамок».

65. Из сказанного мы должны прийти к следующему заключению: В некоторых арифметических задачах зависимость искомого числа от данных чисел настолько проста, что представляется возможным обнять как бы сразу, или почти сразу, те подсказанные изложением задачи действия над данными числами, выполнение которых необходимо и достаточно для определения искомого числа.

При решении таких задач анализ так прост и мимолетен, что иногда он даже совершенно ускользает от нашего внимания, и может показаться, что установлению плана решения задачи, т. е. синтезу, не предшествовало никакого предварительного рассуждения. Собственно говоря, только задачи подобного рода должны быть признаны задачами начальной арифметики.

Отличительный признак этих задач чисто арифметического характера заключается в том, что для такой задачи непосредственно, или почти непосредственно, может быть составлена, как говорят, формула решения, или, как предпочитаем говорить мы, составлено равенство, которым явно выражается зависимость искомого числа от всех данных чисел задачи.

Все разнообразие задач чисто арифметических зависит не столько от их арифметического, сколько от их словесного содержания. Относительно арифметического содержания такие задачи различаются только тем, что одни из них коротки, другие — длинны (иногда, к сожалению, слишком длинны), что числа, входящие в задачу, малы или велики, что эти числа удобны или неудобны для вычисления.

66. Совсем иное представляют задачи алгебраического характера. В этих задачах зависимость между искомым числом и данными числами не настолько прозрачна, что можно было бы непосредственно установить план решения, как для задач чисто арифметических. Напротив, в задачах алгебраического характера ближайшая связь между числами искомыми и данными является, большей частью, настолько скрытой самими условиями задачи, что может потребоваться длинный ряд рассуждений, чтобы, как выражаются довольно метко, распутать задачу, т. е. установить порядок тех арифметических действий над данными числами, выполнение которых приведет к ответу на предложенную задачу.

Один из приемов — и притом общий прием — решения арифметических задач алгебраического характера заключается в составлении, по данным условиям задачи, уравнений, т. е. составления того равенства, которым неявно выражается зависимость неизвестного числа от данных чисел. После того как соответствующее уравнение будет составлено, останется только, для определения неизвестного числа, решить полученное уравнение.

Составление и решение уравнений не входят в арифметику и принадлежат алгебре, вследствие чего мы и не останавливаемся на этом вопросе.

67. Но, кроме общего приема решения задач алгебраического характера, существует целый ряд частных приемов, которые называют иногда арифметическими; подвести их под какие-либо общие правила едва ли возможно.

Хотя решение задач алгебраического характера путем арифметическим, т. е. без помощи уравнений, представляет значительно большую трудность, чем решение их приемами алгебры, но нельзя не признать, что именно такое применение арифметических приемов к решению задач алгебраического характера несомненно имеет большое образовательное значение. Вот почему во многих сборниках задач по начальной арифметике, наряду с задачами собственно арифметическими, вошло в обычай помещать и задачи алгебраического характера.

В нашей учебной литературе эти задачи носят весьма различные названия; их называют трудными или труднейшими задачами, называют также замысловатыми задачами, называют их, наконец, задачами с условиями.

Мы предпочли бы оставить за этими задачами название задачи алгебраического характера.

Что касается до пользования задачами алгебраического характера при обучении начальной арифметике, то мы полагаем невозможным, в большинстве случаев, требовать от детей, чтобы они самостоятельно решали такие задачи наравне с задачами собственно арифметическими. Мы считаем необходимым, чтобы учитель рядом вопросов наводил детей на приемы решения подобных задач, причем, в иных случаях, придется даже прямо указать детям на тот или другой прием решения.

Задачи алгебраического характера весьма разнообразны относительно своего числового содержания, и степень трудности, которую представляет их решение, может быть весьма различна. Многие из этих задач следует признать общеизвестными в школах; таковы задачи о курьерах, о бассейнах, задачи на смешение (второго рода), на пропорциональное (соразмерное) деление и прочие и прочие. Изложение приемов решения всех этих задач мы считаем излишним и ограничимся лишь указанием арифметического приема решения задач на смешение второго рода. С этой целью мы выберем из нашего «Сборника» задачу № 628:

«Хозяйка купила на 71 руб. гречневой крупы и рису, всего 13 *кг*; за 1 *кг* гречневой крупы она заплатила 2 руб., за 1 *кг* рису — 7 руб. Сколько гречневой крупы купила хозяйка?»

Если бы хозяйка купила только рис, и притом купила бы его 13 *кг*, то стоимость этой крупы была бы 91 руб. (7×13), т. е. эта стоимость была бы на 20 руб. (91—71) больше той суммы, которую хозяйка в действительности издержала. Из этого мы заключаем, что не все килограммы товара составлял рис, а что часть товара составляла крупа, 1 *кг* которой на 5 руб. (7—2) дешевле 1 *кг* рису. Заменяя 1 *кг* риса 1 *кг* крупы, мы понижаем, следовательно, стоимость покупки на 5 руб., но так как эта стоимость должна быть понижена на 20 руб., то замену 1 *кг* риса 1 *кг* крупы мы должны произвести столько раз, сколько раз 5 содержится в 20, т. е. четыре раза. Таким образом мы приходим к тому выводу, что хозяйка купила 4 *кг* гречневой крупы.

Эту задачу можно решить и несколько иначе: стоит только предположить, что покупка состояла из 13 *кг* гречневой крупы. В этом случае придется, конечно, повысить стоимость покупки с 26 руб. (2×13) до 71 руб., т. е. повысить эту стоимость на 45 руб. (71—26), заменив 9 *кг* гречневой крупы таким же количеством риса. Таким образом, мы приходим к тому выводу, что хозяйка купила риса 9 *кг*; следовательно, гречневой крупы 4 *кг*.

68. Чтобы показать пример решения арифметическим путем задачи алгебраического характера, приведем еще следующую задачу:

«В одном закроме 76 *ц* ржи, в другом 12. Сколько раз нужно насыпать в каждый закром по 5 *ц* ржи, чтобы в первом закроме стало ржи в три раза больше, чем во втором?» Задача может быть решена путем такого рассуждения:

Предположим, что первое данное число не 76, а 36, т. е. число, которое в три раза больше второго данного числа 12. Тогда, для сохранения между числами 36 и 12 их отношения, надлежало бы каждый раз прибавлять к большему числу втрое больше, чем к меньшему; так, в нашем случае, прибавляя к 12 по 5, надлежало бы одновременно прибавлять к 36 по 15, т. е. надлежало бы каждый раз прибавлять 10 лишних единиц. Но в числе 76 заключается, сверх числа 36, четыре раза по 10 единиц, и потому, прибавив к каждому из данных чисел четыре раза по 5, мы приведем их в требуемое отношение.

Из этого мы заключим, что нужно насыпать в каждый закром четыре раза по 5 *ц* ржи, для того чтобы в первом стало в три раза больше ржи, чем во втором.

69. Нельзя не признать, что подобные приемы решения задач несомненно содействуют умственному развитию учащихся, и мы нисколько не отрицаем, что иногда полезно решать такие задачи с детьми; но мы настаиваем на том, что замысловатые задачи алгебраи-

ческого характера не составляют необходимой принадлежности курса начальной арифметики. Обучение детей сознательно производить арифметические действия и с разумением прилагать их к решению несложных задач общежитейского обихода заключает в себе достаточно образовательных элементов, чтобы не ставить нас в необходимость искать таких элементов в упражнениях излишних, каковы, например, нескончаемые разложения чисел с целью их созерцания или в упражнениях непосильных, какими являются упражнения детей в решении трудных, запутанных задач алгебраического характера.

Задачи на числа любой величины.

131. Задачи на «Все действия над числами любой величины» представляют, в общих чертах, такое же расположение, какое мы приняли для соответствующих задач на числа в пределе до 100; сперва мы даем задачи собственно арифметические, затем — более известные и распространенные задачи — алгебраического характера.

В задачах собственно арифметических связь между данными предложенной задачи и искомым, независимо от величины входящих в них чисел, настолько проста и прозрачна, что план решения задачи может быть установлен непосредственно. Значение подобных задач заключается в том, что детям представляется случай прилагать свое умение производить арифметические действия и научиться в порядке располагать более или менее длинные письменные вычисления.

Навыку детей располагать письменные вычисления в порядке мы придаем большое значение, хотя решительно восстаем против многописания, которое, к крайнему сожалению, в большом ходу в наших школах; если действие, которое предстоит выполнить, может быть удобно произведено без промежуточных записей, то нет никакого основания требовать от детей подробных записей. Ошибаются те, которые полагают, что многописание при письменных вычислениях может служить мерилом отчетливого понимания; напротив, если дети в письменных работах держатся всегда одних и тех же шаблонных записей, записывают все промежуточные записи и в тех случаях, когда они излишни, то это должно служить лишь указанием на то, что они вычисляют, так сказать, без оглядки, не вникая в то, что им предстоит выполнить, и не владеют или не пользуются теми средствами, которые ведут к достижению цели проще, легче и скорее.

Для пояснения нашей мысли приведем один только случай из числа многих, которые нам приходилось наблюдать. При решении задачи в классе нужно было вычислить произведение 3000 на 112; дети следующим образом расположили вычисление:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3000\\112\end{array}\\ \hline 6000\\ 3000\\ 3000\\ \hline 336000 \end{array}$$

Подобные записи мы и считаем бумагомаранием; дети, которые не успели еще отупеть вследствие занятий бумажной или меловой арифметикой, должны были бы прямо написать ответ: 336 000.

132. При письменном решении задач дети должны, ввиду соблюдения порядка, располагать под нумерами те отдельные, простые задачи (решаемые применением одного только из арифметических действий), последовательное решение которых должно привести к искомому ответу на заданную задачу. Все эти записи не следует сопровождать наименованиями; надлежащее наименование должно быть придаваемо только окончательному результату.

Решая какую бы то ни было числовую задачу, в которой говорится о конкретных предметах, мы производим вычисления не над этими предметами, а над числом их; когда, например, нам говорят, что разносчик продал 8 груш одному покупателю и 6 другому и спрашивают нас, сколько всего груш продал разносчик обоим покупателям, то для получения ответа мы не складываем в одну кучу 8 груш и 6 груш (да и откуда взяли бы мы их?), а делаем такое заключение: так как 8 да 6 составляют 14, то разносчик продал 14 груш обоим покупателям; если бы мы не знали, как при десятичной группировке называется сумма чисел 8 и 6, то принуждены были бы добыть этот результат путем инструментального счета на каких-либо подходящих предметах, которые могут быть и не грушами. Возможность почти непосредственного, раннего и притом полного отвлечения от конкретной группы предметов и составляет ту особенность материала арифметики, которая делает этот предмет вполне доступным детскому пониманию. (В § 133—134 показаны примеры записей решения задач.— *А. П.*)

135. В числе других задач в нашем «Сборнике» помещено несколько задач на так называемое сложное тройное правило; решение их сводится к решению ряда задач на простое тройное правило; а потому все, что нами сказано о последних, сохраняет свое значение и в применении к задачам на сложное тройное правило. Положим, что предложена следующая задача:

«12 машин вытянули 25 395 *м* проволоки в 45 дней. Сколько проволоки вытянули 8 машин в 36 дней?»

Чтобы решить задачу, мы рассуждаем так:

По условиям задачи 12 машин вытянули 25 395 *м* проволоки; узнаем сколько проволоки вытянули бы 8 машин при тех же условиях, т. е. в течение 45 дней. Чтобы узнать это, нет надобности узнавать, сколько проволоки вытянула бы одна машина, а достаточно узнать, сколько проволоки вытянули бы 4 машины; четыре машины вытянули (25 395 : 3) *м*, т. е. 8465 *м*, поэтому 8 машин вытянули (8465 · 2) *м*, т. е. 16 930 *м* проволоки.

Такое количество проволоки 8 машин вытянули бы в 45 дней; остается узнать, какое количество проволоки они вытянули бы в 36 дней; чтобы рассчитать это, нет надобности узнавать, сколько проволоки 8 машин вытянули бы в один день, а достаточно узнать, сколько проволоки они вытянули бы в 9 дней; в 9 дней 8 машин вытянули бы (16 930 : 5) *м*, т. е. 3386 *м*; поэтому в 36 дней они вытянули (3386 · 4) *м*, т. е. 13 544 *м* проволоки.

Относящаяся к решению этой задачи запись должна быть расположена так:

12 машин 45 дней 25395 *м*
8 « 36 « ?

---

25 395 : 3
8 465 × 2
16 930 : 5
3 386 × 4
13 544 Ответ: 13 544 *м*.

136. Решим еще следующую задачу:

«28 наборщиков в 24 дня, работая ежедневно по 10 часов, набирают 5 880 300 букв. Сколько букв наберут 35 наборщиков в 32 дня, работая по 12 часов ежедневно?

Чтобы произвести требуемый расчет, рассуждаем таким образом:

Узнаем сперва, сколько букв наберут 35 наборщиков при тех условиях, при которых 28 набирают 5 880 300 букв, т. е. в течение 24 дней при 10-часовой работе; для этого нет надобности узнавать, сколько букв набрал бы один наборщик, а достаточно узнать, сколько букв набрали бы 7 наборщиков (так как $28=7 \cdot 4$, $35=7 \cdot 5$); 7 наборщиков набрали бы (5 880 300 : 4) букв, т. е. 1 470 075 букв, а 35 наборщиков набрали бы (1 470 075 · 5) букв, т. е. 7 350 375 букв; такое количество букв набрали бы 35 наборщиков, работая при прежних условиях, т. е. 24 дня, по 10 часов в день.

Узнаем теперь, какое количество букв они набрали бы, работая не 24 дня, а 32 дня по 10 часов в день; для этого нет надобности узнавать, сколько букв они набрали бы в один день, а достаточно узнать, сколько букв они набрали бы в 8 дней (так как $24=8 \cdot 3$, $32=8 \cdot 4$). В 8 дней они набрали бы (7 350 375 : 3) букв, т. е. 2 450 125 букв, а в 32 дня они набрали бы (2 450 125 · 4) букв, т. е. 9 800 500 букв. Такое количество букв набрали бы 35 наборщиков в 32 дня, работая по 10 часов в день.

Остается, наконец, узнать, какое количество букв они набрали бы, работая не 10, а 12 часов в день; для этого нет надобности узнавать, сколько букв набрали бы наборщики, работая один час в день, а достаточно узнать, сколько букв они набрали бы, работая 2 часа в день (так как $10=2 \cdot 5$, $12=2 \cdot 6$); при двухчасовой работе они набрали бы (9 800 500 . 5) букв, т. е. 1 960 100 букв, а при 12-часовой работе они набрали бы (1 960 100 · 6) букв, т. е. 11 760 600 букв.

Все вычисление должно быть записано так:

28 наборщ. 24 дня 10 часов 5 880 300 букв.
35 « 32 « 12 « ?

---

5 880 300 : 4
1 470 075 · 5
5 350 375 : 3
2 450 125 · 4
9 800 500 : 5
1 960 100 · 6
11 760 600. Ответ: 11 760 600 букв.

137. Из приведенных примеров видно, что при решении задачи на сложное тройное правило мы сводим ее к ряду задач на простое тройное правило, поступая так:

Выбираем пару соответствующих данных (в последней задаче: число наборщиков в первом случае и число их во втором) и то данное, которое не имеет себе пары в задании (в последней задаче: число набранных букв в первом случае); таким образом мы имеем задачу на простое тройное правило, которую решаем или приведением к единице, когда непосредственно не усматриваем общей наибольшей меры чисел, составляющих взятую пару, или приведением к наибольшей общей мере взятой пары чисел, когда эта мера, так сказать, бросается в глаза. Решив эту первую задачу на простое тройное правило, мы переходим к следующей: выбираем для нее следующую пару соответствующих данных (число дней работы в первом случае и число дней во втором) и то число, которое мы только что нашли в ответ на первую задачу простого тройного правила; это число и служит во второй задаче тем данным, которое не имеет себе пары. Поступая таким образом, мы придем к окончательному ответу на предложенную задачу, когда все пары ее данных будут последовательно введены в цепь наших заключений. Само собой разумеется, что порядок, которому мы следуем при составлении отдельных задач на простое тройное правило, зависит вполне от нас.

138. При решении задач на тройное правило в тех школах, где обучению арифметике может быть уделено значительно больше времени, чем в народных школах, можно показать детям составление формулы, решающей задачу, так как, во-первых, в этом случае формула очень прозрачна, и, во-вторых, упрощение ее путем сокращения может быть вполне усвоено детьми.

Для второй из приведенных нами задач решение ее путем составления формулы представится в следующем виде:

$$\frac{5\,880\,300 \cdot 35 \cdot 32 \cdot 12}{28 \cdot 24 \cdot 10}$$

При составлении этой формулы дети должны рассуждать и говорить так:

Если бы во втором случае условия были те же, что и в первом, то и число букв было бы то же, т. е. 5 880 300 (пишут это число и проводят под ним черту); таково было бы число букв, если бы работало 28 наборщиков; если бы работал один наборщик, то это число было бы в 28 раз меньше; чтобы узнать его, нужно 5 800 300 разделить на 28 (обозначают это); если бы работало 35 наборщиков вместо одного, то число букв было бы в 35 раз больше; чтобы узнать это число, нужно помножить на 35 обозначенное число. Таково было бы число букв, если бы 35 наборщиков работали 24 дня; если бы они работали один день, то число букв было бы в 24 раза меньше; чтобы узнать это число, нужно обозначенное число разделить на 24 и т. д.

Известно, что при составлении формулы для решения задач на тройное правило ученики очень часто ошибаются, когда в задачу входят величины обратнопропорциональные. Приучая детей при составлении формулы излагать словесно ход рассуждения в том виде, какой мы только что привели, мы этим избавляем их от возможности впасть в ошибку, или, во всяком случае, уменьшаем вероятность ее сделать.

Когда формула будет таким путем составлена, остается ее вычислить.

В настоящем случае надлежало бы перемножить все числа, стоящие над чертой, перемножить затем все числа, стоящие под чертой, и разделить первое произведение на второе.

Но все вычисление может быть, очевидно, ведено иначе: так как число 5 880 300 надлежит умножить на 35 и разделить полученное произведение на 28, то эти действия можно заменить умножением на 5 и делением на 4; так как, далее, полученное число должно быть последовательно умножено на 32 и разделено на 24, то ряд этих двух действий может быть заменен последовательным умножением на 4 и делением на 3 и т. д.

Таким образом, не приступая к выполнению действий, необходимых для вычисления формулы, удобно упростить ее, что может быть отмечено так:

$$\frac{5\,880\,300 \cdot 35 \cdot 32 \cdot 12}{28 \cdot 24 \cdot 10} = \frac{5\,880\,300 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 5} = 5\,880\,300 \cdot 2;$$

а теперь видно, что все вычисление сводится к умножению 5 880 300 на 2, произведя его, найдем ответ на предложенную задачу.

Прием упрощения формул, получаемых при решении задач на тройное правило, настолько прост, что может быть выяснен детям вполне, вследствие чего мы и привели его.

(А. И. Гольденберг. Методика начальной арифметики, второе издание, 1886 г., стр. 47—57, 101—106.)

Ф. И. Егоров.

О классификации арифметических задач.

55. Неудача попыток классифицировать арифметические задачи заставляет думать, что едва ли и возможна сколько-нибудь строгая и последовательно проведенная классификация их, по крайней мере, в том направлении, в котором это до сих пор делалось. Да, если бы какую-либо классификацию арифметических задач и удалось установить, то едва ли в значительной степени можно было бы ею пользоваться в преподавании. Пример Гольденберга и Шохор-Троцкого, разделивших задачи на чисто арифметические и алгебраические и принужденных задачи обоих родов ввести в свои арифметические задачники, по нашему мнению, в достаточной степени подтверждает это положение. Гораздо важнее в педагогическом отношении последовательный подбор задач сообразно с целями курса и постепенность в ознакомлении детей с приемами решения. Если мы обратимся к существующим сборникам, из которых каждый посильно разрешает

этот вопрос, то заметим, что большая часть заключающихся в них задач, помимо задач на сложение и вычитание, относятся или непосредственно к правилам тройному и пропорционального деления, или заключают элементы этих правил (большая часть простых задач на умножение и деление), или представляют комбинации задач того и другого правила, или, наконец, каким-либо иным путем примыкают к этим правилам. Другими словами: почти все задачи сборников относятся к пропорциональным величинам. Так, например, задачи о курьерах принадлежат к правилу пропорционального деления. Действительно, чтобы решить, через сколько часов встретятся два курьера, находящиеся на расстоянии 120 *км* и едущие первый со скоростью 15 *км* в час, а второй со скоростью 9 *км*, мы, разделив 120 пропорционально 15 и 9, узнаем, сколько километров проехал каждый курьер до встречи, и тогда уже легко решим предложенный в задаче вопрос. Задача о том, через сколько лет отец, имеющий от роду 40 лет, будет втрое старше сына, которому теперь 6 лет, может быть приведена к особому виду пропорционального деления. Для этого надо сперва узнать, сколько лет будет отцу и сколько лет сыну тогда, когда отношение лет их будет равно 3, т. е. найти два числа, разность которых равна 40—6=34, а отношение 3. И очень многие задачи, повидимому, имеющие мало общего с пропорциональным делением, могут быть тем или иным способом сведены к этому последнему. Поэтому в каждом курсе арифметики обязательно познакомить детей не только с приемами решения задач на правила тройное и пропорционального деления, но по возможности и с разнообразными видоизменениями этих задач. Затем останется еще ряд задач, трудно поддающихся подведению под эти правила или требующих особенных, более или менее искусственных приемов. Выбор таких задач должен быть сделан особенно тщательно и осторожно. Не следует при этом задаваться мыслью, что чем труднее задача, тем производительнее ее решение для детей. *Производительны для них только те задачи, в решении которых они сами могут принять деятельное участие и где участие их не ограничивается одними вычислениями, но распространяется и на исследование зависимости между величинами, входящими в задачу, и на установление приема решения.* В особенности следует избегать искусственного затруднения задач, состоящего в многосложности условий, в неясном их изложении, в опущении некоторых условий и в введении лишних условий, потому что от этого задачи теряют свой характер математических вопросов и обращаются в загадки, отгадывание которых едва ли можно считать производительной работой.

Арифметические приемы решения задач.

56. Во главе всех арифметических приемов решения задач должен быть поставлен способ приведения к единице со всеми его видоизменениями (способ обратного приведения к единице, способ приведения к общей мере и т. п.). Этот способ применяется к задачам

на пропорциональные величины. Получил он свое название оттого, что в нем, прежде чем определить требуемый задачей размер одной из пропорциональных величин, определяют размер одной из них, соответствующий единичному размеру другой. При этом, если единичный размер берется для той величины, оба размера которой даны в задаче, то способ сохраняет свое общее название — способа приведения к единице; если же единичный размер берется для той величины, один из размеров которой ищется, то он носит название способа обратного приведения к единице. Каждая задача тройного правила может быть решена обоими способами.

Способом приведения к единице решаются также задачи об определении частей целого и целого по его частям.

Из задач на пропорциональное деление хорошо подчиняются способу приведения к единице те, которые могут быть названы задачами на правило товарищества.

57. Способ пропорционального изменения применяется к тем же задачам, что и способ приведения к единице, и в некоторых случаях имеет преимущество перед последним. Это те случаи, когда способ приведения к единице во время решения дает несообразные числа, хотя задача сама по себе ничего несообразного не представляет. Такова, например задача:

33) Для исполнения некоторой работы 24 человека должны работать ежедневно по $10^5/_9$ часа; по скольку часов в день должны работать 40 человек, чтобы исполнить ту же работу и в тот же срок?

Приводя к единице число рабочих, найдем, что один человек, для того чтобы исполнить работу к назначенному сроку, должен работать ежедневно по $10^5/_9 \times 24$, т. е. по $253^1/_3$ часов, а приводя к единице времени, найдем, что при ежедневной работе в течение одного часа нужно $24 \times 10^5/_9$, т. е. $253^1/_3$ человека. Чтобы избежать несообразностей при способе приведения к единице, приходится вводить понятие об особой составной единице, в данном случае о таком количестве работы, которое может исполнить один человек в один час и которое можно назвать рабочим часом. Между тем способ пропорционального изменения дает очень простое и не содержащее несообразностей решение задачи: число рабочих увеличилось в $40 : 24 = 1^2/_3$ раза, а потому время ежедневной работы должно уменьшиться во столько же раз; следовательно, 40 рабочих должны работать ежедневно по $10^5/_9 : 1^2/_3 = 6^1/_3$ часов.

Как видим из приведенного примера, в способе пропорционального изменения определяется отношение данных размеров, как в приведенной задаче изменяется данный размер другой величины. В каком отношении, прямом или обратном, следует изменить данный размер другой величины, зависит от того, входят ли в задачу величины прямопропорциональные или обратнопропорциональные. Свободное применение способа пропорционального изменения требует основательного знакомства с учением об отношениях. При этом условии дети легко понимают этот способ и любят применять его к решению задач.

58. Способ пропорционального деления применяется как к задачам, непосредственно относящимся к этому пра-

вилу, так и к задачам, приводимым к нему, а потому имеет почти столь же важное значение, как и способ приведения к единице.

В арифметике целых чисел задачи этого рода могут быть даны только в том случае, когда отношения между частями выражаются целыми числами. Приводим такую задачу с ее решениями.

34) Число 99 разделить на 3 части так, чтобы вторая была втрое, а третья впятеро больше первой; первую часть отнять от 40, разность повторить 7 раз, к произведению прибавить 17 и сумму разделить на 5.

Решение. Чтобы вторая часть была втрое, а третья впятеро больше первой, надо сделать так, чтобы первая содержала в себе 1 число, вторая 3 таких же числа, а третья 5 таких же чисел; значит 99 должно содержать в себе $1 + 3 + 5$, т. е. 9 таких же чисел, а потому 99 надо разделить на 9 равных долей и в первую часть взять 1 такую долю, во вторую 3 таких доли и в третью 5 таких же долей. Разделив 99 на 9, получим 11; в первой части будет 11, во второй $11 \times 3 = 33$; в третьей $11 \times 5 = 55$. Дальнейшее решение понятно.

Другое решение. Первая часть в самой себе содержится 1 раз, да во второй 3 раза, да в третьей 5 раз, следовательно, во всем числе 99 она должна содержаться $1 + 3 + 5 = 9$ раз; поэтому первая часть равна $99 : 9 = 11$, вторая $11 \times 3 = 33$, третья $11 \times 5 = 55$. Дальнейшее решение понятно.

Решение таких задач полезно начать с задач следующего характера:

35) Из 45 учеников третья часть училась хорошо, третья часть — удовлетворительно, а остальные слабо. Хороших и удовлетворительных учеников перевели в следующий класс, а слабых оставили в том же классе. Сколько учеников перевели? Сколько оставили? Во сколько раз перевели больше, чем оставили?

59. Деление в разностном отношении. Нет такой книги по арифметике, где в том или другом виде не трактовался бы вопрос о пропорциональном делении, но в очень немногих из них разбирается вопрос о делении числа в разностном отношении, хотя задачи, сюда относящиеся, встречаются почти во всех задачниках, и простейшие из них помещаются обыкновенно, и совершенно справедливо, на первых страницах. Задачи эти гораздо легче задач на пропорциональное деление и с приемами решения их дети без всякого сомнения должны быть ознакомлены раньше, чем с приемами решения задач на пропорциональное деление. Под делением числа в разностном отношении мы подразумеваем разложение числа на несколько слагаемых, между которыми дано разностное отношение. Приведем несколько задач на такое деление с их решениями.

36) Два мальчика разделили между собой 25 орехов так, что одному досталось 7 орехами больше, чем другому. Сколько орехов досталось каждому?

Решение. Чтобы первому досталось 7 орехами больше, чем второму, можно ему с самого начала отделить 7 орехов, а затем остающиеся $25—7 = 18$ орехов разделить между обоими поровну. Из них каждому придется по $18 : 2 = 9$ орехов. Столько орехов достанется второму, а первый получит такие же 9 орехов, да раньше ему отделено 7 орехов, следовательно, всего он получит $9 + 7 = 16$ орехов.

Для разъяснения этого приема решения может служить следующая задача:

37) Из 17 карандашей старший брат взял себе сперва 3 карандаша, а остальные разделил поровну с своим младшим братом. Сколько карандашей досталось старшему? Сколько — младшему? На сколько старшему досталось больше, чем младшему? Приводим другой прием решения таких задач.

38) В барку нагрузили 4080 четвертей пшеницы, ржи и овса; пшеницы было на 180 четв. меньше, чем ржи, а ржи на 120 четв. меньше, чем овса. Сколько было пшеницы? Сколько ржи? Сколько овса?

Решение. 4080 есть сумма трех неравных слагаемых: числа четвертей пшеницы, ржи и овса. Сравняем первое и третье слагаемые со вторым, для чего к первому надо прибавить 180, а от третьего отнять 120; от этого и к сумме прибавится 180 и отнимется 120, и она обратится в $4080 + 180 - 120 = 4140$. Так как 4140 есть сумма трех слагаемых, из которых каждое равно второму, то для определения второго слагаемого, т. е. числа четвертей ржи, остается 4140 разделить на 3, получим 1380. Для определения числа четвертей пшеницы надо от 1380 отнять 180, а для определения числа четвертей овса — к 1380 прибавить 120; найдем, что пшеницы было 1200 четв., а овса 1500 четв.

Подготовкой к такому приему решения может служить задача:

39) Сумма трех слагаемых 300, второе слагаемое на 50 единиц больше, а третье на 20 единиц меньше первого. Какая получится сумма, если каждое из последних двух слагаемых сделать одинаковым с первым? — Если каждое из первых двух сделать одинаковым с третьим? Если и первое и третье сделать одинаковым со вторым? Чему равно каждое слагаемое?

Этот прием может быть дан только после того, когда дети ознакомятся с изменениями суммы при изменении слагаемых. Тогда он представляет очень хорошее приложение теоретических положений арифметики к решению задач. К делению числа в разностном отношении могут быть приведены такие задачи, которые на первый взгляд кажутся к нему не относящимися. Например задача:

40) В двух коробках лежало 63 карандаша, а когда из обоих истратили поровну, то в одной осталось 27 карандашей, а в другой 18. Сколько карандашей было в каждой коробке?

Приводится к делению числа в разностном отношении помощью следующего соображения: если из обеих коробок истратили поровну, то в той из них было больше, в которой больше осталось, и на столько, на сколько больше в ней осталось; поэтому для решения задачи надо 63 разделить на 2 части так, чтобы одна была на $27 - 18 = 9$ единиц больше другой. Задача может быть решена, впрочем, и иначе: в обеих коробках осталось $27 + 18 = 45$ карандашей; из обеих истрачено $63 - 45 = 18$, а из каждой $18 : 2 = 9$; следовательно, в первой было $27 + 9 = 36$ карандашей, а во второй $18 + 9 = 27$ карандашей.

60. Способ произвольного допущения прилагается к решению многих задач и может в значительной степени видоизменяться. В общих чертах он состоит в том, что мы при решении задачи делаем сознательно некоторое ошибочное предположение и затем его исправляем. Способом произвольного допущения решаются

многие задачи, по условиям близким к 4-му виду задач на смешение, но которые в собственном смысле к смешению не относятся. Такова, например, задача:

41) Разносчик продавал яблоки по 30 коп. и груши по 80 коп. за штуку. Сколько он продал яблок и сколько груш, если за 60 штук тех и других выручил 30 рублей.

Решение. Допустив, что разносчик продал одни яблоки, мы найдем, что он должен был выручить $30\times60 = 18$ руб., т. е. на $30 - 18 = 12$ руб. меньше его действительной выручки. Эта разность в 12 руб. произошла оттого, что каждая груша дороже яблока на $80-30=50$ коп. Если бы мы допустили, что разносчик только вместо одной груши продал одно яблоко, то тогда высчитанная нами выручка отличалась бы от действительной на 50 коп., а так как всего она отличается от действительной на 12 руб., то разносчик всего продал груш $1200 : 50 = 24$ штуки, а яблок $60-24 = 36$ штук.

61. К способу произвольного допущения примыкает способ подобия. Способ подобия применяется к задачам на пропорциональные величины. Состоит он в том, что неизвестным дают произвольные значения, сохраняя между ними заданные отношения, и при помощи этих значений находят размер величины, данной в задаче, и которая пропорциональна неизвестным; затем находят отношения двух размеров этой величины данного и найденного, и производят соответствующие изменения во взятых значениях неизвестных. Применения способа подобия очень обширны. Приведем несколько задач с их решениями.

44) На склад доставлено три ящика чаю, всего 130 *кг*, первый ящик стоимостью в 720 руб., второй в 660 руб. и третий 400 руб. Сколько чаю было в каждом ящике, если 1,1 *кг*. из первого ящика стоили столько же, сколько $1^4/_5$ из второго, а $6^2/_3$ *кг* из второго, сколько $5^1/_2$ *кг* из третьего?

Решение. Допустим, что в первом ящике было 8 *кг* чаю; тогда 1 *кг* его стоил $720:8=90$ руб., следовательно, 1,1 *кг* его стоили $90 \cdot 1{,}1 = 99$ руб., а так как столько же стоили $1^4/_5$ *кг* чаю из второго ящика, то 1 *кг* его стоил $99 : 1\,^4/_5 = 55$ руб., и чаю во втором ящике было $660 : 55 = 12$ *кг*. Если 1 *кг* чаю из второго ящика стоил 55 руб., то $6\,^2/_3$ *кг* его стоили $55 \times 6^2/_3 = 366^2/_3$ руб; столько же стоили $5^1/_2$ *кг* из третьего ящика, следовательно, 1 *кг* его стоил $366 :5^1/_2 = 66^2/_3$ руб., и в третьем ящике было $400 : 66^2/_3 = 6$ *кг* чаю. Таким образом, мы найдем, что чаю в трех ящиках тогда было бы $8 + 12 + 6 = 26$ *кг*. А у нас дано, что его было 130 *кг*, т. е. в $130 : 26 = 5$ раз больше, следовательно, и в каждом ящике было тоже в 5 раз больше, т. е. в первом было $8\times5=40$ *кг*; во втором $12\times5=60$ *кг*, в третьем $6 \times 5 = 30$ *кг*.

45) Из двух сортов муки, в 1 р. 74 к. и в 1 р. 55 к. за 1 *кг* составлена смесь в 1 р. 68 к. за 1 *кг*. Сколько взято муки каждого сорта, если первого сорта вошло в смесь на 48 *кг* больше, чем второго?

Решение. Возьмем первого сорта 13 *кг*. Каждый килограмм первого сорта дает $175 - 168 = 7$ коп. убытку, а 13 *кг* дадут $7 \times 13 = 91$ коп. убытку. Столько же прибыли должен дать второй сорт. Каждый килограмм его дает $168-155 = 13$ коп. прибыли; следовательно, второго сорта, при 13 *кг* первого, надо взять $91 : 13 = 7$ *кг*.

Тогда первого сорта войдет в смесь на 13—7 = 6 *кг* больше, чем второго, а нам надо, чтобы его вошло только на 48 *кг* больше; 48 больше 6 в 48 : 6 = 8 раз, следовательно, и каждого сорта надо взять в 8 раз больше, т. е. первого сорта надо взять 13 × 8 = 104 *кг*, а второго 7 × 8 = 56 *кг*.

62. Остальные из существующих приемов арифметического решения задач по большей части заключают в себе элементы перечисленных приемов, очень разнообразны и трудно поддаются точному формулированию. Как на один из таких приемов можно указать прием, которым решена вышеприведенная задача о четырех игроках и который, следуя Александрову, можно назвать способом перемещения, или перестановки данных. Тот же автор выделяет как особые способы арифметического решения задач: способы исключения неизвестных (сложения и вычитания, подстановки, уравнивания неизвестных), способ метатезиса известного и неизвестного, т. е., если можно так выразиться, перенос наименований от известных к неизвестным (например, цену метра, выраженную в рублях, считать за число метров, а число метров за цену метра), способ средних арифметических, способ остатков и, наконец, способ двойных гипотез (фальшивое или гадательное правило Магницкого). Относительно способа исключения неизвестных следует сказать, что он носит скорее алгебраический, чем арифметический характер. Способу метатезиса сам автор не придает существенного значения. И действительно, задача, к которой он его применяет, может быть решена без этого способа, слишком искусственного. Приводим задачу и ее решение, которое нам кажется более подходящим.

47) Продано несколько метров синего сукна по 21 руб. и несколько метров черного по 9 руб., всего на сумму 132 руб.; в другой раз продано и синего, и черного сукна по стольку же метров, что и в первый раз, но выручено только 129 руб., потому что синее сукно продано по 15 руб., а черное по 18 руб за 1 *м*. Сколько продано каждого сукна?

Р е ш е н и е. Если бы в первый раз было продано все сукно вдвое дороже, т. е. синее по 21 × 2 = 42 руб. и черное по 9 × 2 = 18 руб. за 1 *м*, то и выручил бы вдвое больше, т. е. 132 × 2 = 264 руб., на 264 — 129 = 135 руб. больше, чем во второй раз. Но тогда черное сукно он продавал бы в оба раза по одинаковой цене, а синее сукно в первый раз на 42—15 = 27 руб. за 1 *м* дороже, чем во второй. Так как от этого стоимость всего сукна повышается на 135 руб., то синего сукна продано 135 : 27 = 5 *м*. Дальнейшее решение понятно.

С п о с о б с р е д н и х а р и ф м е т и ч е с к и х есть по существу способ решения задач на правило смешения, соответствующих четвертому виду приведенных нами выше задач на это правило.

Чтобы познакомить со способом, который Александров называет с п о с о б о м о с т а т к о в, приведем несколько задач, удобно решающихся этим приемом.

48) Если поезд железной дороги будет итти по 40 *км* в час, то на все расстояние между двумя городами употребит 3 часами 46 мин. 30 сек. меньше времени, чем назначено; если же он будет итти по 30 *км* в час, то ему потребуется на 1 час 15 мин. 30 сек. больше времени, чем назначено. Сколько километров между этими городами?

Р е ш е н и е. Проходя 40 *км* в час, поезд на каждый километр затрачивает 1 час: 40 = 1 мин. 30 сек., а проходя 30 *км* в час, на километр затрачивает 1 час : 30 = 2 мин. Затрачивая на 1 *км* 2 мин.—1 мин. 30 сек. = = 30 секундами меньше времени, поезд выгадывает на всем расстоянии 3 час. 46 мин. 30 сек. + 1 час. 15 мин. 30 сек. = 18120 сек.; следовательно, расстояние между городами заключало в себе 18120 : 30 = 604 *км*.

50) Поезда железной дороги в прямом направлении двигаются со скоростью 24 *км* в час, а в обратном — со скоростью 16 *км* в час и на обратный путь употребляют 4 часами более, чем на прямой. Какой длины дорога?

Р е ш е н и е. Когда в обратном направлении поезд будет итти столько же времени, сколько и в прямом, то ему останется пройти до конца дороги еще $16 \times 4 = 64$ *км*. Этого остатка не бывает при движении в прямом направлении оттого, что в этом направлении поезд проходит на 24—16 = 8 *км* в час больше, чем в обратном; следовательно, в прямом направлении поезд все расстояние проходит в 64 : 8 = 8 час.; длина всей дороги равна $24 \times 8 = 192$ *км*.

Что касается с п о с о б а д в о й н ы х г и п о т е з, или так называемого фальшивого правила, то он очень трудно поддается разъяснению и введен был в арифметику в то время, когда способы решения уравнений были еще не разработаны. В настоящее время он не имеет значения и во всяком случае не может быть вводим в преподавание, так как задачи, разрешаемые при его помощи, могут быть или решены иными приемами, или уже настолько трудны и запутаны, что решение их детьми немыслимо. Все задачи, которые приведены Александровым на этот способ в его «Методах решения арифметических задач», безусловно, как и он сам указывает, могут быть решены иными способами.

Считаем долгом обратить внимание преподавателей арифметики на эту книгу, которой и мы отчасти пользовались при предлагаемом изложении способов решения арифметических задач.

В заключение надо сказать, что перечисленные способы арифметического решения задач далеко не обнимают всех возможных приемов решения. Почти каждая задача позволяет видоизменить один из общих приемов, а некоторые задачи могут потребовать и специально для них подобранного приема решения.

Мы здесь не остановились подробно на правиле процентов и совершенно не коснулись правил учета векселей и перевода мер. Задачи эти не требуют специальных приемов и разрешаются теми же способами, которые вообще применимы к задачам на пропорциональные величины.

79. Ознакомление детей с различными приемами решения задач.

Нам остается сказать о самом важном при решении, задач, именно о том, как поступать с теми задачами, которые затрудняют детей и вследствие этого не могут быть ими решены самостоятельно. Затруднения эти могут происходить от различных причин и потому здесь трудно указать какие-либо общие средства.

Если затруднения происходят от незнания детьми приема, которым задача решается, то самостоятельного решения нельзя и требовать от детей, за исключением выдающихся из них по своим способностям к решению математических вопросов.

С такими приемами необходимо ознакомить рядом методически подобранных задач. Как пример такого подбора, приводим следующий ряд задач:

57) Один покупатель купил в лавке 4 *м* сукна, а другой 9 *м* того же сукна, и второй заплатил 6 рублями больше первого. Сколько заплатил за свое сукно первый покупатель? Сколько второй?

58) Из мебельной лавки одному покупателю продали диван и 8 кресел за 96 руб., а другому по тем же ценам диван и 9 кресел за 104 руб. Что стоит диван? Что стоит каждое кресло?

59) Разносчик в воскресенье продал 60 яблок и 80 груш и выручил за них 2 р. 90 к., а в понедельник 60 яблок и 40 груш и выручил за них 1 р. 90 к. Что стоит десяток яблок? Что стоит десяток груш?

Если бы при решении первой из этих задач встретилось все-таки некоторое затруднение, то оно тотчас же будет устранено, когда преподаватель предложит детям обдумать, отчего второй покупатель за свое сукно заплатил больше первого.

После этого можно рискнуть предложить и следующую задачу:

60) За 15 *м* сукна и 7 *м* бархату заплатили 109 руб., а за 10 *м* такого же сукна и 14 *м* такого же бархата — 138 руб. Что стоит метр сукна? Что стоит метр бархата?

Разумеется, переход к этой задаче требует большой сообразительности и, может быть, не будет сделан самими детьми, но все-таки у преподавателя будет на что опереться при разъяснении ее детям. Считаем нужным оговориться, что вообще задачи, требующие при исключении неизвестного предварительного преобразования условий, надо давать крайне осторожно.

Чтобы навести детей на прием решения задач о встрече двух движущихся предметов, может служить задача:

61) Между двумя городами 420 *км*; из них навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Первый в час проходит 32 *км*, второй 28 *км*. На каком расстоянии друг от друга будут оба поезда через час после их выхода? Через 2 часа? Через 3 часа? Через 5 часов? Через 7 часов?

Чтобы ознакомить с приемом решения задачи под номером 56, могут служить для наведения на прием решения задачи 62 и 63.

56) Четыре работника копали канаву: первый мог ее выкопать в 72 дня, второй в 60 дней, третий в 80 дней и четвертый в 90 дней. Когда они проработали 12 дней, то им осталось копать еще 651 *м*. Какой длины была канава?

62) Для переписки сочинения заняты 3 писца: первый в день переписал $\frac{1}{24}$ сочинения, второй $\frac{1}{30}$ и третий $\frac{1}{40}$. Какую часть сочинения переписали все в один день?

63) Для очистки сада наняты 4 работника: первый мог исполнить всю работу в 18 дней, второй — в 20 дней, третий — в 24 дня и четвертый — в 36 дней. Через 5 дней они были рассчитаны. Какая часть сада осталась неочищенной?

Хорошим средством для наведения на надлежащий прием решения служит видоизменение одной и той же задачи и решение друг за другом взаимно-обратных задач [1]. Так, например, задача:

64) Артель плотников зарабатывает каждый рабочий день по 70 руб., а на свое содержание тратит ежедневно по 20 руб. Сколько дней в августе месяце артель не работала, если у нее от заработанных в этом месяце денег осталось 10 руб?

скорее будет решена детьми самостоятельно, если перед ней будет решена обратная задача:

65) Артель плотников зарабатывала в день по 70 руб., а тратила на свое содержание по 20 руб. в день. Сколько она сберегла денег в апреле, если в течение его не работала 16 дней?

Последняя задача укажет детям, как образуется избыток заработанных денег над издержанными, чем и поможет найти прием решения первой задачи.

Вообще, строго соображенным подбором задач можно многого достигнуть в деле постепенного ознакомления детей с приемами их решения. *На своем месте поставленная даже и трудная задача, если она хорошо подготовлена вспомогательными задачами, дается детям сравнительно легко и представляет благодарную и производительную работу.*

Решение многих задач может быть основано на соотношениях между числами в действиях, на изменениях результатов действий при изменении данных и вообще на различных теоретических положениях арифметики. Место таких задач определяется временем сообщения детям соответствующих теоретических положений. Так, приведенный нами способ деления числа в разностном отношении, основанный на свойствах суммы, может быть дан, как уже было замечено, только после ознакомления детей с этими свойствами. Точно так же только после полного ознакомления с основными свойствами вычитания может быть дана следующая задача:

66) Отцу 55 лет, сыну 25 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?

При этом ее придется обставить целым рядом упражнений и задач, которые и приводим.

67) Отцу 40 лет, сыну 12. На сколько лет отец старше сына? На сколько лет отец будет старше сына через 5 лет? Через 18 лет? На сколько лет отец был старше сына 5 лет тому назад? 11 лет тому назад?

68) Брат старше сестры 7 годами. На сколько лет брат будет старше сестры через 2 года? Через 8 лет? На сколько лет он был старше сестры 3 года тому назад? 5 лет тому назад?

69) Какова должна быть разность, для того чтобы уменьшаемое было вдвое больше вычитаемого? Чтобы уменьшаемое было втрое больше вычитаемого?

70) Сыну 24 года, через 12 лет он будет вдвое моложе отца. Сколько лет отцу?

---

[1] Взаимно-обратными называются такие задачи, в которых при тех же условиях одно из данных первой служит искомым во второй и искомое первой входит в число данных второй.

71) Отец старше сына на 24 года; сыну теперь 20 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?

Первые две задачи обратят внимание детей на неизменяемость разности между летами двух лиц, пока они живут; третья заставит вывести соотношение между вычитаемым и разностью, при котором кратное отношение между уменьшаемым и вычитаемым принимает данную величину; последние две окончательно выяснят прием решения приведенной задачи.

Для пользы дела необходимо, чтобы вспомогательные задачи и упражнения имели самостоятельное образовательное значение; при этом нет надобности, чтобы они непосредственно предшествовали задаче, для решения которой они служат подготовкой.

80. При всей строгости и последовательности в подборе задач дети все-таки иногда не могут напасть на требуемый прием решения. В таких случаях иногда бывает достаточно разобрать с ними, как могло образоваться одно из данных чисел задачи при помощи других данных и искомого числа. Иногда придется вдаваться в более подробное исследование соотношения между величинами, входящими в задачу. Например, для выработки приема решения задач на смешение, необходимо разъяснить детям, как образуется прибыль и убыток при продаже смесей и в каком соотношении прибыль на одном сорте должна находиться с убытком на другом, для того чтобы в результате дать прибыль или убыль на всей смеси, или отсутствие той и другой. Все эти приемы, по существу своему аналитические, не представляют полного анализа задачи, но в большей части случаев оказываются достаточными для ее решения. Постоянно прилагать полный анализ излишне и бесцельно.

Иногда все затруднение в решении задачи происходит оттого только, что дети неясно представляют себе зависимость между величинами, в нее входящими. Примером может служить задача об определении высоты предмета по длине его тени, когда известна длина тени, отбрасываемой другим предметом данной высоты. Разъяснение неизвестной детям зависимости между величинами предпочтительнее делать раньше задания задачи, потому что, с одной стороны, дети легче усваивают содержание задачи, условия которой для них вполне ясны, а с другой — во время разъяснения зависимости между величинами дети легко могут забыть задачу, и ее все равно придется повторить еще раз.

Хорошим средством для разъяснения условий задачи могут служить схематические чертежи, например, при решении задач о встрече двух движущихся предметов расстояние между ними может быть изображено отрезком прямой, направление движения — стрелками, причем скорость может быть надписана над соответствующей стрелкой.

81. П р о в е р к а р е ш е н и я. Пониманию решения задач и соотношений между ее данными много помогает поверка решения, т. е. определение, согласно ли найденное решение со всеми условиями задачи. В случае верного решения поверка разъясняет и укрепляет в детях приложенный ими к задаче прием решения; в случае же неверного решения — представляет лучшее средство для убеждения детей в неправильности решения, а иногда может повести и к открытию верного решения задачи. Так очень часто задачи о делении четного числа на две части в разностном отношении дети решают, разделив

число на две равные части и затем к одной части прибавив, а от другой отняв заданную разность. Только поверка решения убеждает их в неверности этого приема. Разбор же, от чего произошла ошибка, может привести к верному решению.

(Извлечение из Методики арифметики Ф. И. Егорова, стр. 59—94.)

В. Беллюстин.

Способы решения задач.

Последовательность в усложнении задач. Постепенность усложнения задач требует: а) чтобы известный сорт задач был пройден сперва на малых числах, а потом уже проделан и на больших; б) чтобы задачам отвлеченным предшествовали соответственные задачи на предметах; в) чтобы задачам обратным предшествовали прямые.

Синтетическое решение задач. Вникнем в вопрос: что значит решить задачу? В чем состоит решение задачи? Из каких процессов мысли оно слагается? Берем пример: 1 *кг* овса стоит 50 коп. Сколько стоят 10 мешков овса по 40 *кг* в каждом? Условие содержит в себе три данных: а) 1 *кг* стоит 50 коп.; б) в мешке 40 *кг*; в) мешков 10. Берем какие-нибудь 2 из этих данных, но такие, чтобы они могли составить простую задачу. Здесь простую задачу можно составить из данных *а* и *б*, получается такая: «1 *кг* стоит 50 коп., в мешке 40 *кг*. Сколько стоит мешок?»

Этот вопрос решаем, получаем цену мешка 20 руб. Теперь вновь полученное данное «цена мешка 20 руб.» сочленяем с оставшимся данным *в*, т. е. с тем, что «мешков 10». Получаем 2-ю простую задачу: «Мешок стоит 20 руб. мешков 10. Сколько они стоят?» Решаем этот вопрос, ответ 200 руб. служит окончательным ответом нашей задачи. Теперь мы можем видеть, из чего состоит решение задачи. Оно состоит из сочетания данных, т. е. соединения или сложения их в простые задачи. Так, в нашем примере данное *а* вместе с данным *б* образовало первую простую задачу, а вновь полученное данное вместе с данным *в* — вторую простую задачу. Это сложение условий называется синтезом. Благодаря синтезу сложная задача приводится к менее сложным. Так, наша задача в 2 действия благодаря синтезу условия *б* с условием *в* привелась к задаче в одно действие.

Если бы мы из условий *а* и *б* не могли составить простой задачи, т. е. не могли бы сказать, что именно можно узнать по этим данным, то мы никогда не решили бы и сложной задачи. Чтобы дойти до ответа сложной задачи, надо непременно сочленять данные и образовывать из них простые задачи. Этому умению производить синтез надо учить и учить серьезно. Во все три года школьного учения, при всяком удобном случае надо приводить детей к тому, чтобы они по данным в условии числам умели ставить вопрос. Ввиду этого в простых задачах очень полезно опускать вопрос и давать задачи, например, в такой форме: «В одной книге 100 страниц, а в другой 10. Что отсюда можно узнать?» На это может последовать много ответов, и чем больше, тем лучше.

Если дети исчерпают все ответы, то этим они докажут свое полное знание синтеза, уменье образовывать из данных чисел простые задачи.

Не только в вопросах на одно действие, но и в вопросах на 2—3 и т. д. действий полезно производить синтетический разбор, т. е., установивши данные, спрашивать, «что по ним можно определить»...

Синтетический разбор задачи не то, что ее план. В плане точно указывается, что мы сперва узнаем, что потом, что далее, что в конце. Если устанавливать предварительный план, то надо иметь в виду следующее: не обратить бы решение задач в простое запоминание, вместо рассуждения. А это легко может случиться, если план будет установлен учителем с помощью лишь лучших учеников, придется запомнить порядок решения и потом вычислить как бы по данному рецепту, но **ведь при решении задач не то важно, чтобы запомнить, а то, чтобы додуматься самому.** Синтетический разбор в противоположность плану не дает детям готового порядка решения, не указывает прямого пути. Он предоставляет на выбор возможные сочетания и предлагает подумать самостоятельно, какими из этих сочетаний можно воспользоваться.

Неопределенность синтеза. Почему в предыдущей задаче: «1 *кг* стоит 50 коп. Сколько стоят 10 мешков по 40 *кг*», мы соединили данное «50 коп.» с данным «40 *кг*» и образовали из них простую задачу? Да потому, что данное «50 коп.» нельзя соединить с данным «10 мешков». Но можно было бы количество «10 мешков» заключить в одну простую задачу с количеством «40 *кг*». Тогда 1-я простая задача была бы такая: «Сколько килограммов в 10 мешках, если в каждом по 40 *кг*?» Тогда полученное число «400 *кг*» пришлось бы сочленять с числом «50 коп.»; этот синтез дал бы такую простую задачу: «Сколько стоят 400 *кг* по 50 коп. за 1 *кг*?» Итак, синтез в нашей задаче может быть двоякий, следовательно, он неопределенен. Но эта неопределенность не мешает делу. Тем или другим путем, но мы дойдем до ответа задачи, притом решим ее чисто синтетически, не прибегая ни к какому другому рассуждению. Эта задача легка, и легка не тем, что в ней мало действий, а тем, что в ней нет синтеза лишнего, т. е. нет такого сочетания данных, которое не приводило бы к ответу задачи.

Но вот пример задачи, в которой может встретиться лишний синтез: «За 3 пряника мальчик заплатил 75 коп. Сколько таких пряников дали бы ему на 1 рубль?» В задаче 3 данных: а) 3 пряника; б) 75 коп.; в) 1 рубль. Если ученик соединит в простую задачу *а* с *б*, то этот синтез будет удачен. Но если он попытается соединить *б* с *в*, то этот синтез будет лишним; получится, например, такая простая задача: «На сколько мальчик заплатил во 2-й раз дороже, чем в 1-й?». Эта простая задача нисколько не помогает решению сложной, так как ее ответ (25 коп.) ни с чем не сочленяется. Приходится ученику отбрасывать лишний синтез, обращаться к началу задачи и искать такие сочетания, ответы на которые могли бы, в свою очередь, соединяться с другими данными и приводить к окончательному ответу задачи.

Итак, некоторые задачи не допускают лишнего синтеза. Они прямо и верно решаются чисто синтетическим путем. Для таких задач ученику достаточно одного: пусть он умеет по данным числам ставить вопрос.

В других же задачах лишний синтез встречается. В таком случае, чтобы скорее и вернее прийти к синтезу необходимому и, следовательно, к решению задачи, можно пользоваться разбором обратным, именно анализом.

Аналитический разбор задачи. В основе всякого синтеза лежит сложение, в основе же анализа — разложение. При синтезе данные в задаче величины постепенно слагаются в простые задачи с тем, чтобы прийти к окончательному вопросу сложной задачи. При анализе, наоборот, разлагается вопрос сложной задачи, с тем, чтобы прийти к данным. Возьмем пример. «За три пряника мальчик заплатил 75 коп. Сколько таких пряников дали бы ему на 1 рубль?» Аналитический разбор должен быть таков: «Нам надо узнать, сколько пряников получит мальчик. Для этого достаточно знать: а) сколько он заплатил за покупку и б) сколько стоит пряник. Но сколько стоит покупка — мы знаем: 1 рубль; остается узнать, сколько стоит пряник. Для этого достаточно знать, сколько стоит какое-нибудь определенное число пряников; это нам дано: за 3 пряника заплачено 75 коп.» Этим анализ кончается. Сложный вопрос мы разложили на простые, на такие, которые решаются одним действием. — В подобной полной форме аналитический разбор ведется редко. К нему не обращаются дети, если учитель их не заставляет. Причина заключается в сложности и в трудности подобного разбора. Он полезен лишь как новая форма логического мышления и как освещение синтетического пути. Лучшее ему место в тех задачах, которые уже решены синтетически. Анализ задачи, после того как она уже решена, не труден и доступен для детей; он уясняет и дополняет синтез.

Сокращенный анализ. В большинстве случаев анализ задачи детьми производится, но сокращенный; они его ведут, обыкновенно, молча, про себя, часто смутно, т. е. со скачками в логическом мышлении, с отклонениями в сторону и отступлениями назад. Это именно та работа мысли, когда про детей говорят: «Они разбирают задачу» или «они обдумывают решение». Сокращенный анализ в наиболее правильной форме должен состоять в следующем: сложная задача расчленяется не на простые, как в полном анализе, а на 2 менее сложные. Пример: «Смешано 2 ящика чаю; в 1-м было 30 *кг*, во 2-м на 5 *кг* менее 1-го. 1 *кг* 1-го ящика стоит 20 руб., 1 *кг* 2-го — 18 руб; что стоит 1 *кг* смешанного чаю? Эта задача разлагается на две: в 1-й содержится уменьшение числа (30—5), а в другой — употребительный вопрос на смешение (смешано столько-то килограммов, по стольку-то рублей за килограмм, со столькими-то килограммами, по стольку-то рублей за килограмм; что стоит килограмм смеси?)

Сокращенный анализ, при котором сложная задача расчленяется на две менее сложные, пригоден и употребителен во многих случаях, если выполняется основное требование — постепенное усложнение условий задач. При последовательном усложнении задач каждая новая задача является суммой какой-нибудь предыдущей задачи и какого-нибудь добавочного условия. Анализ устремляется на то, чтобы разложить эту новую задачу на какую-нибудь известную задачу и добавочное условие.

Сравнение синтеза с анализом. Анализом решить задачи нельзя, можно лишь разложить ее на простые с тем, чтобы, складывая потом эти простые задачи, дойти до вопроса сложной задачи. Синтезом решить можно или прямо, или путем некоторых попыток: прямо — тогда, когда задача не содержит лишнего синтеза. Путем попыток — тогда, когда данные в задаче величины могут входить в такие сочетания, которые не ведут к решению задачи. Чтобы сделать попытки более верными и, следовательно, уменьшить их число, мы должны пользоваться анализом.

Таким образом, ни синтез отдельно, ни тем более анализ отдельно не могут считаться приемами решения задач. Задачи должны решаться совместным применением анализа и синтеза. В синтезе задача нуждается прежде всего. Отсюда ясно видно, насколько важно научить детей тому, чтобы они по данным числам могли ставить вопрос. Анализ для большинства задач полезен тем, что сокращает число синтетических попыток и быстрее и вернее приводит к цели.

В некоторых методиках анализ противопоставляется синтезу. Чтобы научить детей решению задач, советуют приучать их к аналитическому разбору задач.

Несомненно, умение анализировать существенно помогает решению задач. Но, приучая к анализу, мы тем более должны приучить к синтезу. Анализ и синтез взаимно-обратны. Правильный метод должен начать с прямого действия — синтеза, чтоб тем легче было развить обратное— анализ. Ограничиваться же обратным действием в надежде, что усвоение обратного действия попутно, само собой, вызовет усвоение прямого — рискованно. Итак, весьма желательно приучить детей к разбору задач. Но это приучение будет односторонним, если мы разовьем только привычку к анализу, не образовывая привычки к синтезу.

Многие склонны думать, что анализ отличается большей определенностью, в то время как синтез неопределенен. Это — недоразумение. И синтетический прием может быть определенным, когда в задаче нет лишнего синтеза. И анализ может быть неопределенным. Например, в разобранной выше задаче «3 штуки пряников стоят 75 коп. Сколько таких пряников дали мальчику на рубль?» анализ начинается с вопроса: что нужно знать, чтобы решить, сколько пряников получил мальчик? Ответ может последовать такой: чтобы знать, сколько пряников получил мальчик, достаточно знать, сколько штук было у продавца и сколько осталось после того, как мальчик купил. Разумеется, что такое рассуждение непригодно для решения задачи, но оно логически правильно. Его как непригодное надо отвергнуть и начать анализ снова. Следовательно, и анализ допускает, подобно синтезу, попытки, а потому и он не вполне определенен.

Подробности решения.

Предварительный синтетический разбор, образцы которого даны выше, имеет целью: а) вообще приучить детей к синтезу, без которого немыслимо уменье решать задачи; б) путем сочетания условий данной задачи помочь уяснению ее.

Производить до решения задачи ее анализ — полезно. Но эта работа оказывается часто трудной для детей, особенно, если учитель требует полного анализа. Хорош сокращенный анализ, когда сложная задача разлагается на две менее сложные, знакомые задачи. Хороши аналитические вопросы, т. е. такие, которые вытекают из вопроса задачи. Например, пусть в задаче отыскивается прибыль. Учитель обращается по этому случаю с вопросом: «Почему здесь получится прибыль?» Если бы в вопросе задачи содержалось про то, что один человек догоняет другого, то можно спросить, что требуется для того, чтобы один догнал другого.

Лучшее место для предварительного плана и для анализа — это во время обдумывания учениками условия, обдумывания молчаливого и самостоятельного. В это время мысль перебегает от одного сочетания данных к другому, строит ряд планов, иногда не доводя их до конца, потому что доходит до синтезов лишних, т. е. таких, которым нет продолжения; делает, наконец, ряд разложений вопроса, — вся эта работа мысли в высокой степени полезна. Но чтобы дети во время обдумывания задачи действительно работали над ее планом и над ее разложением, надо сообщить им умение делать то и другое. А для этого можно на задачах, уже решенных, повторять полный план их решения или производить их аналитический разбор.

Самостоятельность решения. Мы особенно настаиваем на том, чтобы решение задач являлось не простым запоминанием приемов, но самостоятельным обдумыванием в синтетическом и аналитическом направлении. С этой целью мы и предоставляем личной работе учеников, без помощи учителя, последовательное составление и решение тех простых задач, на которые распадается сложная. В наших примерах дети решали по одному действию: как только действие произведено, простая задача проверяется. Но в более легких задачах можно позволить детям решить всю задачу сполна. Если же путем анализа сложная задача была расчленена на несколько частей, то и решение можно вести по этим частям.

Иногда бывает, что лучшие ученики, вместо того чтобы решить одно действие, забегают вперед и решают несколько действий. Препятствовать им в этом не надо. Чем живее идет работа, тем лучше. Но они обязаны участвовать в классной проверке последовательных простых задач. Иначе может случиться так, что, увлекшись своим способом, они ошибутся, и учителю придется разъяснять им ошибки отдельно.

Как поступать в тех случаях, когда, при самостоятельном решении, ученики пойдут различными путями, один начнет решать одним способом, а другой — другим? Как проверять и согласовывать различные решения? — Если разница только в порядке строк, т.е. если один ученик начинает с одного действия, а другой — с другого, но оба действия необходимы для решения задачи, то поступить так: пусть каждый объяснит свою строку, а потом впишет себе то действие, которого у него нет и которое только что объяснил его товарищ.

Но бывает, что ученики идут совершенно различными путями. Тогда всех их надо привести к одному пути, наиболее удобному, а потом, когда уже вся задача решена, вспомнить и про оставленный путь и вкратце выяснить его ход. Различные способы, которыми решается задача, полезно сравнить, выясняя, в чем между ними разница, который способ удобнее и чем именно.

Окончание задачи. Если ответ найден, то этим работа с задачей еще не окончилась. Требуется дополнить или повторить ее решение. К этому ведут следующие приемы: а) Полный аналитический разбор задачи. б) План решения или перечисление тех простых задач, из которых составилась сложная. в) Повторение тех простых задач, которые особенно затруднили детей при решении сложной. Эти простые задачи полезно проделать на других числах, притом на более легких, чтобы производством трудного вычисления не отвлечь внимания учащихся от хода решения задачи. г) Разработка других способов решения, кроме тех, которыми дети пользовались. При этом новые способы надо вводить осторожно, постепенно, только тогда, когда прежние способы усвоены; иначе можно подавить учащихся обилием новых приемов, и эти приемы перепутаются в их сознании. Но если старые способы усвоены, то, наоборот, надо всеми мерами стремиться к тому, чтобы изыскивались и применялись новые пути. Если задача решена несколькими способами, то полезно их сравнить. д) Примеры учеников, т. е. задачи, которые придумывают ученики по образцу решений. Эти примеры важны тем, что заставляют детей вникать в сущность задач и в их особенности. е) Сравнение нескольких задач, решенных в последнее время, если между этими задачами существует значительное сходство, так что они принадлежат к одному типу. ж) Продолжение задачи. Это значит следующее. Когда задача пришла к концу и ответ на нее найден, учитель может спросить: «Решена ли задача?» — «Откуда видно, что она решена?» Затем предлагает распространить задачу, т. е. подыскать новый вопрос, для которого требуется еще несколько дополнительных действий и несколько новых данных. Это продолжение задачи служит хорошим упражнением в синтезе. з) Поверка задачи. Для поверки особенно пригодны вопросы сложные, на которые дается несколько ответов. Поверка начинается с этих ответов и приводит к данным числам. Например, для поверки удобна такая задача: «Разделить 25 коп. на двоих так, чтобы один получил 5 копейками более другого». Ответы: 15 и 10 складываем, получаем данное число 25. и) Перечисление ошибок, сделанных детьми во время решения задачи, с указанием их исправления. к) Если данная задача является довольно новой и интересной, то не лишне проделать еще подобную задачу, с небольшими изменениями в содержании; такое упражнение еще лучше уяснит и укрепит ход решения.

Мы указали несколько видов работы, которой должно заканчиваться решение задачи. Не все эти виды, разумеется, можно присоединить к решению одной и той же задачи. Это было бы утомительно, так как слишком долго пришлось бы останавливаться на одном и том же вопросе. Достаточно воспользоваться при каждой задаче 1—2 подобными дополнениями, разнообразя их при различных задачах и выбирая в каждом отдельном случае наиболее нужные, удобные и полезные.

Типические задачи.

Цель распределения задач по типам. Главная цель выделения типов — расположить вопросы в последовательности, начиная с легких и переходя к трудным.

Вторая цель состоит в следующем. На типических задачах мы уясняем способ решения или же знакомим детей с особенной, неизвестной для них связью между числами. В том и другом случае требуется, чтобы примеров было несколько, а не один. Поэтому и задачи должны располагаться группами, а не по одной. Но при такой группировке нужна большая осторожность со стороны учителя, чтобы истинное, сознательное решение не перешло в простое запоминание, чтобы работа собственной мысли учащихся не заменилась простым усвоением того, что дает чужая мысль, т. е. мысль учителя. Чтобы избежать этой опасности, мы рекомендуем следующие средства.

1. Не давать вперед определенного правила, как решать известный сорт задач. Правило должно быть сообщено после, когда тип пройден; оно является, в таком случае, обобщением всего сказанного об известном типе.

2. Не давать подряд массу задач одного рода, чтобы не приучать к механическому решению: примеров надо взять ровно столько, чтобы дети могли хорошо понять способ решения или сущность задачи.

3. Не дробить задач на мелкие типы. Чтобы отнести задачу к той или другой группе, — на это тоже нужна работа мысли. И эту-то работу учитель вполне берет на себя, когда указывает даже мельчайшие подразделения. Лучше предоставить это ученику: пусть он догадывается, относится ли задача к данному типу, и если да, то в чем ее сходство с типом.

4. Чередовать решение типических задач с решением задач смешанных, чтобы опять-таки не вселить в детях уверенности, что достаточно только знать образец, а уж по нему решать вопросы легко, подряд, не вдумываясь.

5. Сознательному пониманию типов, в противоположность заучиванию, помогает сравнение типов между собой, а также решение типических задач несколькими способами.

Разберем теперь несколько наиболее трудных типов.

Приведение к общей мере. Про способ приведения к единице было упомянуто во II вып. § 48. Продолжением его служит приведение к общей мере. Здесь является уже не простая единица, а сложная, именно общий делитель данных чисел. Пусть дана задача такая: «666 груш стоят 18 руб. Сколько стоят 444 груши?» Этот вопрос можно бы решить приведением к единице, но от деления 18 руб. на 666 получается трудная дробь; поэтому мы узнаем, сколько стоит не 1 груша, а 222, т. е. третья часть всего количества (666). Так как 222 груши стоят 6 руб., то 444, т. е. дважды по 222, стоят дважды 6 =12 руб. Мы узнали про 222 потому, что это число является общим делителем обоих данных чисел, 666 и 444; иначе сказать, 222 для первого данного числа служит третью, а для второго — половиной.

Чтобы способ приведения к общей мере был понятен детям, надо предварительно разъяснить им тот синтез, который нужен для этого способа. Надо, чтобы в условии, например, таком: «в 30 дней поденщик заработал 24 рубля», дети могли ставить следующие вопросы: «сколько он заработал бы в 15, 10, 6, 5, 3, 2 дня» и решать их делением 30 руб. на 2, 3, 5, 6, 10, 15, а также ставить такие вопросы: «сколько он заработал бы в 60, 90, 120, 150 и т. д. дней?» и решать их умножением на 2, 3, 4, 5 и т. д. [1]

Решение задач при помощи условной единицы. Относительно этих задач мы говорили выше и причислили их к задачам алгебраического характера, так как в решение их вводится «часть» или «условная единица», т. е. общее количество, которому в каждом частном случае придается определенное значение. Эти задачи мы считаем очень важными по следующей причине. В них понятие об единице достигает своего высшего, возможного в арифметике, развития. В самом начале учения дети считали наглядные предметы; постепенно они перешли к отвлеченной единице. Далее явились единицы сложные, которые состоят из определенного числа простых. Потом счет стал чередоваться с измерением, которое представляет собой более сложный процесс сравнительно с простым счетом: в нем требуется сперва выделить единицы, а потом уже их пересчитать. Теперь, наконец, понятие о единице еще распространяется: вместо сложной определенной единицы берется сложная неопределенная; притом эта единица в задаче не намечена, и ее требуется выделить. Благодаря подобному теоретическому значению этого способа, мы за него и стоим. Теория арифметики важна не менее практических приложений. Но она в начальной школе не должна быть сухой, отвлеченной, выражающейся научным языком. Она должна вырабатываться постепенно и незаметно, на ряде подобранных упражнений, следовательно, между прочим и на задачах.

При помощи условной единицы мы решим два типа задач: а) по сумме и отношению найти числа, б) по разности и отношению найти числа. Примером первого типа может служить такая задача: «Разделить 150 на такие две части, чтобы одна была вдвое более другой». Эту задачу надо считать обратной, так как в нее, кроме сложения, входит еще действие деление. Но, по общему правилу, чтобы выяснить обратную задачу, лучше всего начать дело с прямой. В нашем случае прямая задача должна включать в себе сложение вместе с умножением, так как деление обратно умножению.

Задача будет, например, такая: «Найти сумму двух чисел, из которых первое равно 6700, а второе в 19 раз более первого». Дети решают ее, конечно, обыкновенным способом: $6700 \times 19 = 127\,300$, $127\,300 + 6700 = 134\,000$. Но их надо навести на другой способ. Если второе число в 19 раз более первого, то это значит, что оно содержит в себе 19 первых чисел. Поэтому первое действие в задаче будет $19 + 1 = 20$, а второе $6700 \times 20 = 134\,000$. На нескольких подобных примерах дети поймут, как считать при помощи условных единиц или частей: в первом числе, положим, 1 часть, тогда во втором числе таких частей будет 19, а в сумме 20.

На прямых задачах сущность способов объясняется легче, так как сами задачи легче. И уже за прямыми задачами должны следовать обратные. Первая такая: «Разделить 150 коп. на двоих так, чтобы одному досталось вдвое более другого». Второму отделим 1 условную единицу, а первому 2, так как ему требуется дать вдвое более; всего будет

[1] Здесь мы опустили рассматриваемые автором два типа задач: «Сложение кратных частей» и «Умножение и деление суммы вместо слагаемых». — *Ред.*

3 условных единицы, или «части»; каждая часть равна 50 простым единицам, следовательно, второму достанется 50 коп., а первому 1 рубль.

Точно так же решается и задача второго типа: «Пушка в 100 раз тяжелее ядра. В то же время она тяжелее его на 4950 пудов. Сколько весит ядро? Вес ядра примем за одну «часть». Вес пушки равен 100 таким «частям». Следовательно, пушка содержит лишних таких «частей» 99. В то же время этот излишек составляет 4950 пудов. Отсюда и определяется вес ядра. 4950 пуд. : 99 = 50 пуд.

(В. Беллюстин, Методика арифметики, изд. восьмое, 1917 г., стр. 51—73.)

Ф. А. Эрн.

Задачи и их решение.

Необходимые элементы в составе задачи: условие, численные значения и вопрос.

Задачей в арифметике называется требование определить численное значение какой-либо совокупности или величины, зная численные значения других совокупностей и величин, которые находятся в совершенно определенной зависимости как между собой, так и с искомым.

Эта зависимость между данным и искомым, а равно и само требование по нескольким данным числам найти новое число могут быть устанавливаемы самой жизнью или придумываются искусственно.

Решить задачу значит: 1) установить точно зависимость между данными и искомым и 2) на основании установленной зависимости произвести надлежащее арифметическое действие или ряд последовательных действий над данными численными значениями.

Уже из только что сказанного явствует, что необходимыми элементами каждой арифметической задачи являются:

1) численные значения, выражающие величину данных совокупностей или значений величин и количественный характер их взаимоотношений в определенных числах;

2) условия задачи, поясняющие характер данных, их взаимную зависимость и зависимость между данными и искомыми;

3) вопрос задачи, указывающий, что именно требуется найти в задаче.

Условие задачи, как уже указано выше, должно выяснить характер данных и зависимость между данными. Для того чтобы условие достигало своей цели, оно должно быть выражено, по возможности, просто (без лишнего многословия), но в то же время ясно и точно.

Кроме ясности и точности условий огромное значение для правильного решения задачи имеет число условий.

Число условий должно быть таково, чтобы между всеми данными и искомым устанавливалась определенная зависимость.

Если число условий будет слишком мало, то нельзя будет установить определенную зависимость, и тогда задача будет неопределенной, т. е. будет допускать несколько или бесчисленное множество различных решений.

Если же число условий будет слишком велико, то при решении задачи не все данные будут связаны непосредственно или посредственно с искомым, некоторые условия останутся неиспользованными, т. е. окажутся лишними; если же и в этом случае установить зависимость между всеми данными и искомым, то может оказаться, что некоторые из этих зависимостей будут противоречить друг другу, тогда решение задачи станет уже совсем невозможным.

На первых ступенях обучения учащимся должны быть предлагаемы только задачи с достаточным и необходимым числом условий.

Образовательная цель решения задач, как будет подробно выяснено ниже, состоит в том, чтобы научить детей разбираться в условии задачи, находить зависимости между данными и искомыми; для этого эта зависимость должна быть выражена, по возможности, яснее; недостающие же, лишние или противоречащие условия только затрудняют установление нужной зависимости.

Задачи неопределенные и с лишними условиями могут быть предлагаемы детям лишь после того, как они приобретут достаточный навык в решении задач с необходимым и достаточным числом условий. В этом случае решение задач неопределенных или задач с лишними условиями может служить хорошим средством контроля над сознательностью в решении задач.

Численные значения данных в задаче должны быть подобраны прежде всего так, чтобы решение задачи было возможно.

Кроме того, численные значения в задаче должны соответствовать тем значениям, которые данные величины и совокупности действительно имеют в жизни. Нельзя признать удовлетворительными задачи, в условии которых говорится, что лошадь пробегает 100 верст в час, что фунт сахару стоит 40 коп., что отец старше сына на 10 лет и т. д.

Наконец, вопрос задачи должен быть редактирован ясно и точно, чтобы у решающего задачу не могло возникнуть никаких недоумений относительно искомого в данной задаче.

Задачи простые и сложные.

По числу действий, производимых для решения задачи, все задачи делятся на простые и сложные. Простой называется задача, решаемая одним действием, задача же, требующая для своего решения двух или более действий, называется сложной.

Решение сложной задачи состоит в разложении данной сложной задачи на ряд простых задач, причем для каждой простой задачи нужно выбрать два данных и одно искомое.

Это разложение сложной задачи на простые может быть производимо двумя раличными способами, характерные особенности которых лучше всего выясняются на разборе конкретного примера.

Синтетическое решение сложной задачи.

Возьмем, например, задачу:

«Магазин продал 15 *м* ткани по 4 руб. и 25 *м* по 3 руб. за 1 *м*. Сколько метров ситца может купить он на вырученные деньги, если 1 *м* ситца стоит 5 руб.?»

В этой задаче главное искомое — число метров ситца, которое можно купить на вырученные деньги. Данных же в задаче (явных) пять, а именно число проданных метров ткани I и II сорта (15 и 25), стоимость 1 *м* ткани I и II сорта (4 руб. и 3 руб.) и цена 1 *м* ситца (5 руб.).

Для составления первой простой задачи мы из этих пяти данных должны выбрать какие-нибудь д в а, находящиеся между собой в известной зависимости, и к этим данным подыскать соответствующее искомое, т. е. придумать вопрос для нашей простой задачи. При этом, чтобы составить первую простую задачу, нужно взять не какие-нибудь два данные, находящиеся между собой в зависимости и допускающие постановку вопроса; нужно выбрать эти данные так, чтобы соответствующее им искомое п р и г о д и л о с ь б ы нам в качестве данного для одной из следующих простых задач; нам приходится таким образом, составляя первую задачу, уже з а г л я д ы в а т ь в п е р е д и думать о возможности составления следующих простых задач.

В данном случае, например, мы должны прийти к заключению, что ни все число метров проданной ткани, ни разность между ценой I и II сорта, ни разность между ценой метра ситца и метра ткани того или другого сорта не могут пригодиться для составления следующих простых задач, потому что не могут быть приведены в зависимость ни между собой, ни с другими данными нашей сложной задачи. Единственными искомыми, в ы г о д н ы м и для нас с этой точки зрения, являются стоимость всей ткани I сорта и стоимость всего II сорта.

Итак, первая простая задача, выделяемая из нашей сложной задачи, будет такова:

1) Магазин продал 15 *м* ткани по 4 руб. за 1 *м*. Сколько рублей выручил он при продаже ткани?

Таким же образом составим вторую простую задачу:

2) Магазин продал 25 *м* ткани по 3 руб. за 1 *м*. Сколько рублей выручил он при продаже этой ткани?

Решив эти две задачи, мы будем иметь два новых данных для сложной задачи: стоимость всей ткани I сорта — 60 руб. и стоимость всей ткани II сорта — 75 руб.

Сама сложная задача, если мы опустим уже использованные данные, примет такой вид:

Магазин продал ткани I сорта на 60 руб. и ткани II сорта на 75 руб. Сколько метров ситца может он купить на вырученные деньги, если 1 *м* ситца стоит 5 руб?

Чтобы выделить из этой задачи следующую простую задачу, нужно снова рассмотреть все возможные комбинации данных и соответствующие им искомые и выбрать наиболее выгодные для нас. Комбинации данных и искомые в данном случае могут быть следующие:

	Данные	Искомые
I	Стоимость ткани I сорта Стоимость ткани II сорта	Стоимость всей проданной ткани.
II	Стоимость ткани I сорта Стоимость ткани II сорта	Разница в стоимости ткани I и II сорта
III	Сумма, вырученная за ткань I сорта Стоимость 1 *м* ситца	Число метров ситца, купленных за деньги, вырученные от продажи ткани I сорта.
IV	Сумма, вырученная за ткань II сорта Стоимость 1 *м* ситца	Число метров ситца, купленных за деньги, вырученные от продажи ткани II сорта.

Только навык в решении задач и изощренная в известном направлении сообразительность может привести учащихся к заключению, что II комбинация совершенно непригодна для дальнейшего решения задачи, так как разницу в стоимости ткани I и II сортов ни с каким из остальных данных комбинировать нельзя; что III и IV комбинации возможны, но невыгодны, так как затягивают решение задачи, и что, следовательно, необходимо остановиться на I комбинации, т. е. решить следующую простую задачу:

3) Магазин продал ткани I сорта на 60 руб. и ткани II сорта на 75 руб. Сколько рублей выручил он от продажи всей ткани?

Решив эту задачу (60 руб + 75 руб = 135 руб.), мы снова получаем новое данное: сумму, вырученную от продажи всей ткани — 135 руб. и, опуская использованные уже данные, получаем из сложной задачи новую задачу:

4) Магазин от продажи ткани выручил 135 руб. Сколько метров ситца может купить он на эти деньги, если каждый метр ситца стоит 5 руб.

Эта задача содержит только два данных: стоимость метра ситца (5 руб.) и сумму, затраченную на покупку ситца (135 руб.), поэтому это — простая задача, и так как вопрос ее совпадает с вопросом сложной задачи, то, решая ее, мы решим и заданную нам сложную задачу.

135 руб. : 5 руб. = 27 (*м* ситца).

Итак, мы видим, что решение нашей сложной задачи свелось к последовательному решению четырех простых задач, причем искомое последней простой задачи было и искомым сложной задачи.

Для наглядности все решение сложной задачи можем представить в следующей схеме:

	Данные	Искомое	Решение
1	Цена 1 *м* ткани I сорта (4 руб.). Число проданных метров I сорта (15)	Стоимость всей ткани I сорта	4 руб. × 15 = 60 руб.
2	Цена 1 *м* ткани II сорта (3 руб.). Число проданных метров II сорта (25)	Стоимость всей ткани II сорта	3 руб. × 25 = 75 руб.
3	Стоимость ткани I сорта (60 руб.) Стоимость ткани II сорта (75 руб.)	Сумма, вырученная от продажи ткани	60 руб. + 75 руб. = = 135 руб.
4	Сумма, вырученная от продажи ткани и затраченная на покупку ситца (135 руб.) Цена метра ситца (5 руб)	Число купленных метров ситца	135 руб. : 5 руб. = = 27 (*м*).

Тот прием, посредством которого мы разложили данную сложную задачу на ряд простых задач, состоит стало-быть в следующем:

1) из ряда данных сложной задачи выбирают наиболее подходящую пару данных, находящихся между собой в той или другой зависимости;

2) по этим данным и их зависимости устанавливают искомое и таким образом образуют первую простую задачу;

3) составленную задачу решают;

4) найденное искомое первой задачи становится данным для сложной задачи и должно войти в качестве данного в одну из последующих простых задач;

5) продолжают этот процесс составления и решения простых задач до тех пор, пока не дойдут до простой задачи, вопрос которой совпадает с вопросом сложной задачи;

6) решение последней простой задачи будет вместе с тем и решением сложной задачи.

Такой прием разложения сложной задачи на ряд простых задач принято называть синтетическим.

Аналитическое решение сложной задачи.

Но возможен и другой прием, аналитический, во многих отношениях обратный первому приему.

Мы можем начать составление простых задач не с выбора той или другой пары данных, а с вопроса, т. е. с искомого. Так как в условии сложной задачи только одно из искомых выражено явно, то с этого главного искомого, или, иначе, с вопроса сложной задачи мы и начнем составление простых задач.

Итак, вопросом первой задачи будет вопрос: сколько метров ситца можно купить на деньги, вырученные от продажи ткани?

Но, кроме вопроса, в каждой задаче должны быть два данных, находящихся в зависимости между собой и с искомым. При выборе данных к намеченному искомому могут представиться такие же трудности, как и при синтетическом приеме; и здесь мы должны будем сделать выбор между несколькими различными комбинациями данных.

При внимательном просмотре данных сложной задачи мы прежде всего заметим, что ни одна из пар этих данных, как бы их ни комбинировали, не находится в непосредственной зависимости от намеченного искомого. Следовательно, искомое находится в непосредственной зависимости от таких данных, численные значения которых в условии задачи не встречаются, т. е. от других неизвестных или искомых, явным образом в задаче не обозначенных. Так в данном случае число купленных метров ситца может находиться в зависимости от следующих пар данных:

1) стоимость всего ситца и стоимость одного метра;

2) число метров ткани, положим, I сорта и отношение количества ситца к количеству этой ткани;

3) число метров проданной ткани и купленного ситца и т. д.

Рассматривая эти комбинации данных, мы замечаем, что в первой комбинации только для одного данного (стоимость одного метра ситца) в условии задачи имеется численное значение, другое же данное (стоимость всего ситца) численного значения не имеет, т. е. является для нас неизвестным, искомым; во второй комбинации известно число метров ткани I сорта, но намеченное там же отношение количества ситца к количеству ткани I сорта неизвестно; наконец, третья комбинация приводит даже к двум искомым, так как ни для числа метров проданной ткани, ни для разности между количеством проданной ткани и купленного ситца численных значений в условии задачи не дано.

Но из того, что последняя комбинация приводит нас к двум неизвестным, еще нельзя заключить, что она менее выгодна, чем остальные две. Очень часто наиболее выгодной комбинацией данных для намеченного искомого бывает именно комбинация, приводящая к двум новым искомым. Здесь дело не в количестве неизвестных в той или другой комбинации, а в их качестве, т. е. в их отношении к остальным данным и искомым нашей задачи. Нужно выбрать комбинацию данных, приводящую к таким искомым, которые легче всего могут быть определены либо непосредственно через данные сложной задачи, либо посредством новых искомых.

Таким образом, и здесь при выделении простой задачи приходится заглядывать вперед, и при выборе комбинации данных для намеченного искомого принимать в расчет возможность составления следующих простых задач. Разумеется для этого требуется не меньшая сообразительность, не меньшее умение разбираться в условии сложной задачи, чем при синтетическом приеме. В данном случае наиболее выгодной комбинацией данных для искомого числа метров купленного ситца мы должны признать стоимость одного метра ситца и стоимость всего ситца, так как стоимость одного метра нам известна из условия задачи, а стоимость всего ситца, т. е. сумма, вырученная от продажи всей ткани, легко может быть определена.

Но пока она не определена, она является искомым, и к этому искомому второй простой задачи мы должны снова наметить наиболее выгодную комбинацию данных.

Не будем рассматривать все возможные в данном случае комбинации, а укажем сразу, что для определения искомой стоимости всей ткани наиболее выгодной комбинацией данных будет стоимость ткани I сорта и стоимость ткани II сорта. Хотя эта комбинация приводит сразу к двум новым искомым, однако каждое из них может быть легко определено непосредственно при помощи данных сложной задачи. В самом деле, чтобы определить стоимость ткани I сорта, нужно знать цену одного метра и число метров этой ткани; численные же значения этих данных встречаются в условии нашей задачи.

Таким образом, третья простая задача будет иметь такой вид: сколько выручено за ткань I сорта, если продано этого сорта 15 *м* по 4 руб. за 1 *м*? Так же составим и четвертую простую задачу: сколько выручено за ткань II сорта, если этого сорта продано 25 *м* по 3 руб. за 1 *м*? Эти две последние задачи, содержа все необходимые элементы каждой задачи: условие, численные данные и вопрос, могут быть решены; вместе с тем будут определены стоимость ткани I сорта и стоимость ткани II сорта, т. е. будут найдены численные значения для намеченных нами данных второй задачи, которую и можно будет решить; после решения этой задачи мы будем знать стоимость всей проданной ткани, или сумму, затраченную на покупку ситца, а следовательно, узнаем недостававшее нам численное значение данного для решения первой задачи, вопрос которой совпадает с вопросом сложной задачи.

Итак, аналитическим приемом, исходя из вопроса сложной задачи, мы разложили данную задачу на 4 простые задачи. Из следующей схемы видно, что порядок этих задач как раз обратен порядку простых задач при синтезе:

	Искомое	Данные	Действие
1	Число метров купленного ситца (x)	Стоимость всего ситца или сумма, вырученная от продажи всей ткани (y). Цена 1 *м* ситца (5 руб.)	$x = y : 5$
2	Сумма, вырученная от продажи всей ткани (y)	Стоимость ткани I сорта (z) Стоимость ткани II сорта (u)	$y = z + u$
3	Стоимость ткани I сорта (z)	Цена 1 *м* ткани (4 руб.) Число метров ткани (15)	$z = 4 \times 15$
4	Стоимость ткани II сорта (u)	Цена 1 *м* ткани (3 руб.) Число метров ткани (25)	$u = 3 \times 25$

Итак, аналитический прием разложения сложной задачи на простые состоит в следующем:

1. Составление первой простой задачи начинают с вопроса сложной задачи, принимая главное искомое за искомое первой задачи.
2. К этому искомому намечают пару данных, зная которые можно было бы определить искомое.
3. Так как численные значения одного, а иногда и обоих намеченных данных неизвестны, то составленную таким образом «задачу» *решить нельзя*; можно лишь *указать действие*, которое нужно произвести над выбранными данными для определения искомого.
4. Данное, численное значение которого неизвестно, представляет собой одно из неявных искомых сложной задачи и должно стать искомым для следующей простой задачи.
5. Процесс выделения простых задач продолжается до тех пор, пока не дойдем до задачи, у которой численные значения обоих данных известны из условий сложной задачи.

6. Лишь после составления последней простой задачи можно приступить к решению этих задач, начиная с последней и постепенно переходя к первой. Решение первой задачи будет вместе с тем и решением сложной задачи.

Сравнение синтетического и аналитического приемов.

Сравнивая синтетический прием разложения сложной задачи с аналитическим, замечаем между ними следующие существенные различия:

1. При синтезе составление простых задач начинается с выбора пары данных сложной задачи, к которым подбирается соответственный вопрос (искомое); при анализе начинают, наоборот, с вопроса сложной задачи (главного искомого) и к нему подбирают пару данных, необходимых для решения этого вопроса.

2. При синтезе искомое каждой простой задачи после его определения становится данным для одной из последующих задач; при анализе, наоборот, данные простой задачи, численные значения которых неизвестны, становятся искомыми для последующих задач.

3. При синтезе каждая простая задача содержит все необходимые элементы задачи (условие, численные данные и вопрос) и поэтому может быть тотчас же решена; при анализе только последняя (или последние) задача может быть решена сразу, во всех же предыдущих задачах недостает численных данных, поэтому эти задачи не могут быть решены; может лишь быть указано действие, которое необходимо произвести для решения задачи.

4. Поэтому при синтезе составление и решение отдельных простых задач идут параллельно; при анализе сначала выделяются все простые задачи в известной последовательности, т. е. с о с т а в л я е т с я п л а н р е ш е н и я с л о ж н о й з а д а ч и и лишь после составления плана приступают к решению отдельных задач.

Подготовка к решению сложных задач.

Раз решение сложных задач представляет значительные трудности, то возникает вопрос о тех приемах, которыми детей можно было бы подготовить к решению сложных задач.

В этом отношении можно дать следующие советы:

1. Так как решение сложных задач сводится к решению простых задач, то приступать к решению сложных задач следует только тогда, когда учащиеся уже достаточно поупражняются в решении простых задач.

2. Так как главное затруднение при решении сложных задач заключается в выборе данных и искомого, то необходимо уже при решении простых задач упражнять учащихся в придумывании вопроса к той или другой комбинации данных, и наоборот, в подборе данных к поставленному вопросу.

Упражнения эти могут быть приблизительно таковы:

1. Придумать вопросы к следующим задачам и решить их:

а) В саду 30 яблонь и 10 груш . . . .
б) Крестьянин прошел утром 12 *км* и вечером 6 *км* . . .
в) Ученики сидят на 8 скамейках по 4 ученика на скамейке . . .
г) 48 *кг* товару разложено поровну в 4 ящика . . .

2. Придумайте условие и численные данные к следующим вопросам и решите составленные задачи:

а) . . .Сколько чаю в обоих ящиках вместе?
б) . . .Сколько учеников стало в классе?
в) . . .Сколько кружек молока осталось в кувшине?
г) . . .Какое расстояние прошел крестьянин за все время?
д) . . .Во сколько часов крестьянин прошел все расстояние?
е) . . .Сколько *км* проходил крестьянин в час? и т. д.

3. Чтобы выяснить учащимся разложение сложной задачи на ряд простых, полезно предварительно вместе с ними составить сложную задачу из простых.

Для этого можно решить последовательно такие, положим, две задачи:

1) Сыну 12 лет, а мать в 3 раза старше. Сколько лет матери?

2) Матери 36 лет, а отец на 6 лет старше. Сколько лет отцу?

Затем при активном, по возможности, участии учеников соединить эти две задачи в одну сложную:

«Сыну 12 лет, мать в 3 раза старше сына, а отец на 6 лет старше матери. Сколько лет отцу?»

Проработав несколько раз соединение двух задач в одну сложную задачу, можно перейти к решению сложной задачи, разлагающейся на две простые задачи.

При этом следует сначала научить детей пользоваться синтетическим приемом как более простым. На первых порах учитель может сам указывать данные сложной задачи, которые приходится комбинировать для составления простой задачи, и требовать от учащихся только придумывания соответствующего вопроса.

Только после решения таким путем нескольких задач ученики будут настолько подготовлены, что будут в состоянии сами намечать комбинации данных и придумывать к ним надлежащие вопросы.

Решение сложной задачи аналитическим путем представляет для детей несомненно больше трудностей, чем применение синтеза.

Уже придумывание данных к поставленному вопросу само по себе труднее, чем подыскивание вопроса к намеченным данным; здесь же эта трудность увеличивается еще тем обстоятельством, что некоторые из нужных для решения вопроса данных не имеют численных значений, т. е. являются в свою очередь искомыми.

Аналитическое решение задач, следовательно, требует от учащихся большего умственного развития, большего навыка к отвлеченному мышлению и поэтому должно быть отнесено к высшей ступени обучения. Можно было бы, конечно, ограничиться в курсе начальной школы одним синтетическим приемом, но вряд ли это желательно. Анализ при решении арифметических задач представляет собой первое и простейшее применение тех приемов мышления, которые имеют такое важное значение в алгебре (при составлении уравнений) и в геометрии (при решении задач и доказательстве теорем). Поэтому знакомство с анализом в его элементарной форме желательно и в начальной школе, если эта школа должна служить подготовительной ступенью для средней школы.

Но, разумеется, не следует приступать к аналитическому решению арифметических задач слишком рано и без надлежащей подготовки учащихся.

Одним из средств такой подготовки является придумывание данных к поставленному вопросу, т. е. упражнения, о которых говорилось выше. Но в этих упражнениях придумываются определенные данные с известными численными значениями. Чтобы научить подбирать данные, нужные для решения поставленного вопроса, независимо от их численного значения, полезнее всего упражнять учащихся в аналитическом разборе уже решенных синтетическим путем задач. При этом должно быть выяснено, что ответить сразу на вопрос сложной задачи невозможно, что искомое, обозначенное в этом вопросе, может быть определено лишь после того, как будут найдены некоторые другие неизвестные, причем часть этих неизвестных, в свою очередь, зависит от других неизвестных. Разумеется, разбор решенных задач нужно начать с простейших задач на два действия и лишь постепенно переходить к более сложным задачам с большим числом действий, а следовательно, и с большим числом искомых. Только когда решение целого ряда задач будет разобрано таким образом, и учащиеся привыкнут к новому для них ходу мысли от искомого к данным, нужным для определения этого искомого, можно будет приступить к решению аналитическим приемом задачи, еще нерешенной синтетически; для этого должна быть, конечно, выбрана задача, по возможности, простая, т. е. разлагающаяся на 2 простые задачи, с простой и очевидной зависимостью между данными и искомыми, и похожая по своему типу на одну из разобранных раньше задач.

4. Из предыдущего, пожалуй, можно вывести заключение, будто при установлении порядка и последовательности в решении сложных задач нужно руководствоваться только числом простых задач, на которые данная сложная задача разлагается, или, иначе говоря, числом действий, употребляемых при решении задачи. Такое заключение было бы совершенно неверно. Число действий имеет большое, но не исключительное влияние на сложность задачи. Необходимо также внимательно относиться к простоте или сложности зависимости между данными и искомыми.

Поэтому задачи должны быть правильно распределены и по степени их трудности в зависимости от простоты или сложности условия, так, чтобы всегда соблюдался и в этом отношении переход от простого к сложному, от легкого к трудному.

Задачи чисто арифметические и алгебраического характера.

Во всех сборниках арифметических задач встречаются такие задачи, которые нельзя решить, применяя к ним только общие приемы, указанные нами при разборе синтетического и аналитического решения задач.

Возьмем, например, такие задачи:

1) На 845 руб. куплено 35 *м* сукна двух сортов по 25 и по 23 руб. за 1 *м*. Сколько метров сукна каждого сорта куплено?

2) За 1 фунт чаю и 10 фунтов кофе заплачено 8 руб. 50 коп. В другой раз куплено 3 фунта чаю и 4 фунта кофе по той же цене и за покупку заплачено 8 руб. 60 коп. Сколько стоит фунт чаю и фунт кофе?

Решая первую задачу синтетическим приемом, мы должны были бы для составления первой простой задачи выбрать комбинацию данных, находящихся в известной зависимости, и к этим данным подобрать соответствующий вопрос.

Внимательно всматриваясь в данные этой задачи, мы могли бы наметить такие простые задачи:

а) Метр сукна I сорта стоит 25 руб., метр II сорта—23 руб. На сколько метр I сорта стоит дороже метра II сорта?

б) Метр сукна I сорта стоит 25 руб., метр II сорта — 23 руб. Сколько стоит метр I сорта и метр II сорта вместе?

в) На 845 руб. куплено 35 *м* сукна двух сортов. Сколько стоит в с р е д н е м метр этого сукна?

Но, решив первую (а) задачу и найдя таким образом новое данное — разность между ценой метра I и II сорта, равную 2 руб., учащиеся, вероятно, затруднились бы продолжать решение задачи, так как это новое данное ни с одним из других данных задачи не находится в непосредственной зависимости.

Точно так же мало пригодилось бы и решение другой (б) задачи, так как и сумму стоимости метра I сорта и метра II сорта нельзя привести в непосредственную зависимость ни с общим числом купленных метров (35), ни с суммой, уплаченной за все сукно.

Решение третьей из намеченных задач (в) могло бы подвинуть учеников вперед при решении сложной задачи, так как с р е д н ю ю цену сукна можно было бы сравнить с ценой метра каждого сорта, но решение этой задачи приводит к дробям, так как 845 не делится без остатка на 35.

Применение анализа, в его обычной форме, к решению этой задачи тоже не дало бы благоприятных результатов.

В самом деле, мы должны узнать, сколько метров сукна каждого сорта куплено; если пожелаем сначала узнать, сколько метров I сорта куплено, то естественно будет к этому искомому указать необходимыми данными все число метров сукна, которое по условию задачи равно 35, и число метров II сорта, которое является вторым искомым. Для его определения нужно было бы знать сумму, заплаченную за сукно II сорта, и цену одного метра II сорта; так как для последнего данного численное значение в задаче дано, то новым искомым должна стать стоимость всего сукна II сорта. Для определения этого нового искомого нужно знать стоимость всего сукна обоих сортов (что в задаче дано) и стоимость сукна I сорта; но чтобы узнать стоимость всего сукна I сорта, нужно знать цену одного метра (25 руб.) и число метров I сорта, т. е. наше первое искомое, с которого мы начали разрабатывать план решения задачи.

Таким образом, мы здесь оказались в каком-то заколдованном кругу. Можно было бы, конечно, повести анализ несколько иначе, но результаты были бы те же.

Неудача применения в данном случае обычных приемов синтеза и анализа объясняется тем, что для решения предложенной задачи нужно комбинировать данные, повидимому, ни в какой зависимости не находящиеся.

В самом деле, для составления первой простой задачи нужно взять данными цену метра I сорта (или II сорта) и число метров всего купленного сукна, привести их в зависимость искусственным образом и поставить вопрос: сколько стоило бы все сукно, если бы все 35 *м* были I сорта. Найдя, что при таком предположении все сукно стоило бы 875 руб., и зная, что в действительности оно стоило только 845 руб., мы могли бы узнать, что действительная стоимость всего сукна меньше предположенной на 30 руб. Эта разность, очевидно, зависит от того, что не все 35 *м* принадлежали к I сорту, а некоторые из них были, так сказать, заменены метрами II сорта.

Кроме того, мы можем узнать, что метр I сорта стоит дороже метра II сорта на 2 руб. (вот когда лишь пригодилась наша первая простая задача (а), составленная по синтетическому приему). Следовательно, заменяя метр I сорта метром II сорта, мы уменьшаем стоимость сукна на 2 рубля; чтобы довести предполагаемую стоимость сукна (875 руб.) до действительной стоимости (845 руб.), т. е. чтобы уменьшить предполагаемую стоимость на 30 руб., нужно эту замену метра I сорта метром II сорта сделать столько раз, сколько раз 2 рубля содержатся в 30 руб., т. е. 15 раз. Итак, не все 35 *м* принадлежали к I сорту: 15 *м* были II сорта; следовательно, I сорта было куплено только 20 *м*.

Предоставляем читателям самим убедиться, что и вторая из предложенных в начале этого параграфа задач не может быть решена обычными приемами синтеза и анализа.

Напомним только тот искусственный прием, который употребляется для ее решения.

Предположим, что в первый раз было куплено не 1 фунт чаю и 10 фунтов кофе, а того и другого товара в 3 раза больше, т. е. 3 фунта чаю и 30 фунтов кофе. Тогда, конечно, и заплатить за товар пришлось бы не 8 руб. 50 коп., а в три раза больше, т. е. 25 руб. 50 коп. Теперь имеем:

3 фунта чаю и 30 фунтов кофе стоят 25 р. 50 к.
3 фунта чаю и 4 фунта кофе стоят 8 р. 60 к.

Так как чая оба раза куплено одно и то же количество, то очевидно, что разница в стоимости обеих покупок (25 руб. 50 коп. — 8 руб. 60 коп. =16 руб. 90 коп.) зависит от того, что во второй раз было куплено больше кофе. Стало-быть лишние 26 фунтов кофе (30 фун.—4 фун.=26 фун.) стоят 16 руб. 90 коп.; отсюда находим, что каждый фунт кофе стоит 1690 коп.: 26, т. е. 65 коп. Теперь уже не трудно определить цену чая.

Если мы попробуем теперь, уже после решения, разложить нашу сложную задачу на простые, то увидим, что первая задача имеет такой вид:

«В первый раз чаю куплено 1 фунт, во второй раз — 3 фунта. Во сколько раз во второй раз чаю куплено больше, чем в первый раз?»

Найденное отношение (3) затем совершенно неожиданно комбинируется с количеством чая, количеством кофе, купленным в первый раз, и стоимостью всей покупки.

Такая комбинация основана на предположении, что в первый раз товару куплено в 3 раза больше, чем в действительности, а предположение это представляет собой, разумеется, совершенно искусственный прием, до которого мы не могли бы дойти ни синтезом, ни анализом.

Итак, мы видим, что кроме обыкновенных арифметических задач, решаемых обычными приемами синтеза или анализа, встречаются еще особые задачи, для решения которых нужны свои особые, очень искусственные приемы, благодаря которым приводятся в зависимость такие данные задачи, которые, повидимому, ни в какой непосредственной зависимости не находятся.

Все такого рода задачи крайне просто решаются алгебраическим путем, составлением уравнений и их решением.

Вероятно, благодаря тому обстоятельству, что задачи рассматриваемого типа гораздо проще решаются составлением уравнений, чем чисто арифметическими приемами, им в методике арифметики присвоено название задач алгебраического типа.

Нужно, однако, признать, что все признаки, указываемые в наших методиках для установления классификации задач на чисто арифметические и алгебраического типа, отличаются крайней неустойчивостью, неопределенностью и субъективностью.

При этом нужно заметить, что делаемые для решения данных задач *предположения* представляют собой простые задачи, в которых скомбинированы такие данные первоначальных задач, которые в непосредственной зависимости между собой не находятся (в первой задаче: цена одного метра сукна I сорта и число метров *всего* сукна, во второй задаче — количество товара и стоимость товара, купленного в первый раз, и отношение между количеством чая, купленного в первый и второй раз).

Таким образом, как нам кажется, характерные признаки задач алгебраического типа заключаются в следующем:

1. Решение задач алгебраического типа приводит к предположению, представляющему собой простую задачу, для которой комбинируются данные сложной задачи, не находящиеся между собой в непосредственной зависимости.

2. После решения этой простой задачи данная сложная задача заменяется другой сложной задачей, решаемой обычными чисто арифметическими приемами.

Мы предвидим возражения, которые могут быть сделаны против устанавливаемого нами признака. Нас могут, разумеется, упрекнуть в недостаточной определенности и ясности выражения «непосредственная зависимость между данными» и отсюда заключить о субъективности нашего признака: одним ученикам зависимость между данными будет казаться непосредственной, другие не признают ее за таковую. В этих возражениях несомненно заключается доля истины. Но главный признак *условности* одной из простых задач, на которые разлагается данная сложная задача, необходимость *предположения* для решения задачи во всяком случае остается в силе.

Распределение задач «по типам» и задачи на специальные правила.

Говоря о попытках классификации арифметических задач, нельзя умолчать о выделении в особые отделы задач, распределенных «по типам»; такие отделы типичных задач имеются во многих сборниках, появившихся за последнее время [1].

Задачи, распределяемые по типам, вообще говоря, очень разнообразны и объединяются в один тип или по приемам решения, или по своему содержанию. К этим задачам относятся прежде всего многие задачи алгебраического характера (определение двух чисел по их сумме и разности или по сумме и кратному отношению; задачи подобные тем, решение которых рассмотрено в предыдущем параграфе и пр.); затем к типичным задачам относятся и многие чисто арифметические задачи, решаемые особыми приемами, общими для всех задач данного типа (например, задачи, решаемые приведением к единице; задачи на «встречи и попутное движение» и пр.); наконец, в этих же отделах встречаются и чисто арифметические задачи, не требующие никаких особых приемов решения, но объединенные в один «тип» своим содержанием или каким-нибудь термином, встречающимся в их условии (например задачи «на прибыль и убыток» или «на обмен товаров»). Распределение этих задач по типам вызывается, разумеется, желанием внести в решение задач известную планомерность и систему. Отрицать значение системы в распределении арифметических задач, вообще говоря, конечно, нельзя, но нам кажется, что та система, которая создается благодаря распределению задач «по типам», приносит учащимся больше вреда, чем пользы.

В самом деле, благодаря этой системе в курс начальной арифметики вводятся все те задачи алгебраического характера, которые, по нашему мнению, должны быть перенесены в курс алгебры, так как не имеют прикладного значения и решаются «арифметически» слишком искусственными приемами.

Но даже чисто арифметические задачи не следует распределять «по типам», так как такая группировка задач, решаемых одним и тем же приемом, в один отдел приучает детей пользоваться при решении задач шаблоном; вместо самостоятельной разработки плана решения задач, вместо сознательного и вдумчивого отношения к решению каждой отдельной задачи может получиться механическое применение того или другого «правила».

В настоящее время многие преподаватели и методисты высказываются против отдела задач «на специальные правила» даже в курсе средней школы. Этот отдел признается лишним, потому что задачи, к нему относящиеся, могут быть распределены по всему курсу арифметики без всякого ущерба для дела; ведь задача: «5 яблок стоят 10 коп. Сколько стоят 7 таких же яблок?» есть задача на тройное правило и решается приведением к единице, а между тем каждый ученик, понявший сущность деления и умножения и усвоивший таб-

[1] См. Новый арифметический задачник под редакцией Н. И. Соколова и И. П. Сахарова: «Живые числа». Наглядный арифметический задачник под редакцией Н. И. Лаврова. Сборник арифметических задач и примеров под редакцией Ф. Борисова и В. Сатарова.

лицы этих действий в пределе двух первых десятков, решает эту задачу без всякого затруднения, не подозревая, что он при этом применяет «специальное правило». Точно так же легко решаются уже на первых ступенях обучения простейшие задачи на правила смешения, товарищества или пропорционального деления. Следовательно, собрание всех этих задач в один отдел, проходимый в конце всего курса арифметики, является прежде всего ненужным. Но оно оказывается и вредным, так как приучает пользоваться готовым специальным правилом и вносит в обучение арифметике шаблон и мертвящую рутину.

Но если выделение задач на специальные правила не пригодно даже для средней школы, то в начальной школе оно и подавно не может быть терпимо; а между тем задачи, распределенные «по типам», являются именно задачами на специальные правила; вся разница в том, что, кроме задач на тройное правило, правила пропорционального деления и смешения, здесь мы имеем еще десяток других правил: правило встречного и попутного движения, правило водоемов (бассейнов), правило «сравнения условий» (?), «обмена товаров» и т. д.

При этом надо заметить, что всякая классификация задач по типам, понимаемая так, как ее понимает большинство составителей новейших сборников задач, будет всегда не полной, так как трудно охватить все возможные «типы». В самом деле, если имеется тип задач на «определение прибыли или убытка» или на «обмен товаров», то почему не выделить в особые типы те задачи, в которых идет речь о припеке хлеба, о скорости движения вверх и вниз по течению реки, о средней температуре дня, об урожае хлебов и т. д.

Высказываясь таким образом против помещения в задачниках особых отделов задач, распределенных по типам, мы думаем, однако, что сравнение задач, одинаковых по приемам решения, и подведение их под общий тип могут служить хорошим упражнением для учащихся. После решения какой-нибудь задачи, характерной по условию или по способу решения, учащимся могут быть предложены примерно следующие вопросы: не решали ли вы раньше задач, похожих на только что решенную? Назовите одну из таких задач. Чем же эти задачи похожи? Что дано в этих задачах? Что требуется найти? Как решаются эти задачи? (на сколько простых задач распадаются? что ищется в каждой простой задаче?). Придумайте еще несколько задач, похожих на эти (или задач этого типа).

Разумеется, на все эти вопросы учащиеся будут в состоянии ответить только в том случае, если у них будет достаточный запас сведений относительно условий и приема решений арифметических задач и если предыдущими упражнениями они будут приучены к процессу обобщения. Поэтому эта работа, распределение решенных уже задач по типам, может быть предложена учащимся в начальной школе только на высшей ступени обучения.

Придумывание учащимися своих собственных задач еще полезнее, чем решение готовых задач, предложенных учителем или взятых из сборника. К сожалению, в этом направлении наша методика начальной арифметики еще очень мало разработана, а между тем составление задач самими учениками, начиная с самых простых и кончая довольно сложными, могло бы внести в преподавание арифметики свежую, живительную струю, возбуждая в учащихся интерес к предмету и давая им возможность проявлять и в области арифметики свои способности к творчеству.

Разумеется, и здесь, как всегда при обучении арифметике, должна быть соблюдаема разумная последовательность и постепенность, постоянный и непрерывный переход от простого к сложному, от легкого к трудному, от конкретного к отвлеченному.

Начинать упражнения в составлении простых задач можно было бы тотчас после решения нескольких задач на изучаемое действие, так что решение и составление задач велось бы почти параллельно. При этом вначале учащиеся могли бы составлять не всю задачу, а лишь дополнять недостающие к ней элементы, т. е.

а) к данному условию и численным значениям придумать вопрос;
б) к данному условию и вопросу придумать численные значения;
в) к данному вопросу и численным значениям данных придумать условие;
г) к данному условию придумать численные значения данных и вопрос;
д) к данному вопросу придумать условие и численные значения;
е) к данным численным значениям придумать условие и вопрос.

Затем могло бы итти составление простых задач полностью, причем детям могла бы быть предоставлена полная свобода в выборе материала для задач или могли бы быть даны общие указания, из какой области материал должен быть взят.

Упражнения в составлении сложных задач следовало бы вести по такому же плану, причем, конечно, сначала составлялись бы задачи более простые по числу действий и зависимости между данными и искомым, а потом уже более сложные в том и другом отношении.

(Извлечение из Очерков методики арифметики Ф. А. Эрн, изд. 1915 г., стр. 77—121.)

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ.

Для решения трех основных видов задач на вычисление времени существует два способа: первый, при котором время каждого события отсчитывается от начала эры (или от начала года, суток) и календарное обозначение времени заменяется арифметическим; второй, при котором за начальный, отправной момент при вычислении принимается не начало эры, а одно из тех событий (обычно раннее), которое дано в задаче.

Полное, четкое, обстоятельное описание первого способа дано в «Методике» Гольденберга; описание второго способа дано в «Методике» Беллюстина. Высказывания Гольденберга полностью сохранили свое значение до настоящего времени. Приемы, рекомендуемые Беллюстиным, которые признавал и Гольденберг, как более естественные, жизненные могут иметь частичное применение как дополнительные к основному (арифметическому) приему.

А. И. Гольденберг.

Меры времени.

170. Основной единицей для измерения времени служат сутки. Их, обыкновенно, определяют как время одного оборота земли около своей оси. Это определение не вполне точно, так как время одного оборота земли около своей оси равно звездным суткам; средние же,

или гражданские, сутки, т. е. те, которыми пользуются в общежитии, несколько продолжительнее звездных суток. Но объяснять детям это различие мы считаем излишним и полагаем, что достаточно им только сказать, что за меру времени принята указанная нам самой природой продолжительность одного оборота земли около своей оси.

Само собой разумеется, что при этом следует дать детям понятие как о суточном, так и о годичном движении земли. Изложение такой беседы не может, впрочем, входить в план настоящего сочинения.

Сутки разделяют на двадцать четыре равные части; каждая из этих равных частей называется часом. Час подразделяется на 60 равных частей — минут, минута на 60 равных частей — секунд. Семь суток (дней) составляют неделю.

Таким образом, система мер времени или мер продолжительности времени следующая:

1 сутки = 24 часам
1 час = 60 минутам
1 минута = 60 секундам
1 неделя = 7 суткам (дням)

Производство действий над величинами, выраженными в этих постоянных мерах времени, не представляет никаких особенностей.

171. Другая единица времени, более крупная, есть солнечный год. Она также указана нам самой природой и есть время одного полного оборота земли вокруг солнца; это время приблизительно 365 дней 6 часов.

Так как гражданский год должен быть составлен из целого числа дней, то ввиду этого с давних пор установлено следующее летосчисление. Из четырех последовательных годов три года подряд считают по 365 дней в каждом, а четвертый в 366 дней. Таким образом достигается (хотя только приблизительно) то, что времена года, смена которых зависит от годичного движения земли, приходятся на одни и те же месяцы. Годы, состоящие из 366 дней, называются високосными, а остальные, т. е. годы в 365 дней,— простыми. Всякий год, который без остатка делится на 4, есть год високосный; всякий год, обозначенный числом, которое без остатка не делится на 4, есть год простой.

Гражданский год подразделяется на двенадцать неравных промежутков, которые называются месяцами. Одни месяцы содержат по 30 дней, другие по 31 дню, за исключением февраля, который имеет 28 дней в простом году и 29 дней в високосном году.

Мерой времени еще более крупной, чем год, служит столетие, или век, т. е. промежуток времени, равный ста годам.

172. Итак, кроме постоянных мер времени, т. е. суток и их подразделений, в общежитии еще употребляются меры времени непостоянные: месяц и год. Число дней в месяце может быть или 28, или 29, или 30, или 31; число дней в году может быть или 365, или 366. Вследствие этого всякий промежуток времени, в обозначение которого входят эти непостоянные единицы, не представляет вполне определенной величины. Так, например, определяя продолжительность какого-нибудь промежутка времени словами: 2 месяца и 5 дней, мы выражаем только приблизительно его величину. Если бы мы пожелали

точно выразить эту величину, то должны были бы превратить месяцы в дни, что окажется возможным лишь в тех случаях, когда будет известно, о каких месяцах года, простого или високосного идет речь в каждом отдельном случае. Заметим, впрочем, что такая точность большей частью и не требуется в вопросах, которые касаются как обыкновенных житейских расчетов, так и исторических событий. На практике термины: месяц и год употребляются наравне с постоянными единицами времени, причем для упрощения и облегчения некоторых расчетов (например торговых) принимают месяц за постоянную величину, равную 30 дням, а год полагают равным 360 дням.

Вот расписание месяцев с обозначением числа дней в каждом из них:

Январь	31	Июль	31
Февраль	28(29)	Август	31
Март	31	Сентябрь	30
Апрель	30	Октябрь	31
Май	31	Ноябрь	30
Июнь	30	Декабрь	31

Если мы разобьем год на четыре промежутка (четверти года), по три месяца в каждом, то увидим, что первая четверть содержит или 90 дней, или 91 день, вторая четверть — всегда 91 день, а третья и четвертая четверти — всегда по 92 дня. Таким образом, число дней по четвертям года распределяется так:

Простой год	90, 91, 92, 92
Високосный	91, 91, 92, 92

Если же мы распределим эти числа по полугодиям, то увидим, что на второе полугодие всегда придется 184 дня, а на первое или 181 день, или 182 дня, смотря по тому, будет ли первое полугодие принадлежать простому году или високосному.

Полезно — и притом не трудно — запомнить эти числа; во многих случаях они могут пригодиться для сокращения вычислений. Несколько труднее запомнить число дней в различных месяцах года.

После объяснения детям всего только что изложенного необходимо дать им понятие о календаре, т. е. о расписании всех дней того года, на который календарь составлен.

173. Перейдем теперь к нескольким замечаниям относительно задач на вычисление времени.

В задачу на вычисление времени входят: 1) величина некоторого промежутка времени; 2) начало этого промежутка; 3) конец этого промежутка. Так как каждый из этих элементов может служить искомым задачи, а остальные два — ее данными, то предложенная на вычисление времени задача будет принадлежать к одной из следующих трех групп:

1) Даны: начало и конец промежутка времени; требуется определить продолжительность этого промежутка.

П р и м е р. Пароход вышел в море 12 мая в 9 час. 40 мин. пополуночи и прибыл к месту назначения 21 числа того же месяца в 4 часа 20 мин. пополудни. Сколько времени продолжался переезд?

2) Даны: начало промежутка времени и его продолжительность; требуется определить конец промежутка времени.

Пример. Пароход вышел в море 12 мая в 9 час. 40 мин. пополуночи, употребив 9 суток 6 часов 40 минут на переезд до места назначения. Когда пароход прибыл на место назначения?

3) Даны: конец промежутка времени и его продолжительность; требуется определить начало промежутка времени.

Пример. Пароход прибыл на место назначения 21 мая в 4 часа 20 мин. пополудни, употребив на переезд 9 суток 6 часов 40 минут. Когда пароход вышел из места отправления?

147. Данные, входящие в задачи, о которых мы говорим, представляют ту особенность, что, по крайней мере, одно из них предлагается обыкновенно в виде порядкового числа, т. е. в виде календарного числа, указывающего, когда то или другое событие совершилось.

Заметим, что точность такого календарного указания может быть весьма различна. Так, например, когда мы говорим, что книгопечатание изобретено в XV в., то этим указываем только, что это событие отделено от начала нашего летосчисления промежутком времени в 14 вв. и в несколько лет, число которых не составляет полного века. Переводя это календарное обозначение на точное арифметическое, мы можем только сказать, что изобретение книгопечатания отделено от начала нашего летосчисления промежутком времени, равным 14 вв.

Когда мы говорим, что первый календарь был напечатан у нас в 1587 г., то этим указываем только, что появление первого печатного календаря у нас отделено от начала нашего летосчисления промежутком в 1586 лет и в несколько дней, число которых не составляет полного года. Переводя это календарное обозначение на точное арифметическое, мы можем только сказать, что появление у нас первого печатного календаря отделено от начала нашего летосчисления промежутком времени, равным 1586 годам.

Когда мы говорим, что Петр Великий родился 30 мая 1672 года, то этим только указываем, что рождение Петра Великого отделено от начала нашего летосчисления промежутком времени, равным 1671 году 4 месяцам 29 дням и нескольким часам, число которых не составляет полных суток. Переводя это календарное обозначение на точное арифметическое, мы можем только сказать, что промежуток времени, отделяющий указываемое событие от начала нашего летосчисления, равен 1671 году 4 месяцам 29 дням.

Так как число, обозначенное календарным способом, не может быть непосредственно введено в вычисление (такое, например, требование, как вычесть 18 декабря из 2 сентября следующего года, лишено всякого смысла), то при решении задач на вычисление времени приходится календарное обозначение преобразовать в число, которое выражало бы в единицах времени промежутки, считаемые от какого-нибудь момента, принятого за начало. Это начало, от которого ведется счет времени, может быть, смотря по обстоятельствам, и началом летосчисления, и началом того или другого столетия, и началом того или другого года, и началом того или другого месяца и пр.

175. Приступая с детьми к решению задач на вычисление времени, мы, во-первых, предпочитаем начинать с тех задач, в которых даны начало и конец промежутка времени, и, во-вторых, располагаем эти задачи по возрастающей величине искомого промежутка времени. Относящиеся сюда упражнения можно вести в следующем порядке.

Прежде всего нужно объяснить детям, что за начало суток принимают обыкновенно полночь, что часы считаются от полуночи до полудня и от полудня до полуночи, что время от полуночи до полудня называется временем пополуночи (3 часа пополуночи, 8 часов пополуночи), что время от полудня до полуночи называется временем пополудни (4 часа пополудни, 12 часов пополудни).

Разъяснив все это, учитель предлагает детям несколько вопросов такого рода:

«Сколько часов прошло от начала суток (от полуночи) до 4 (до 8, 11) часов пополуночи?»

«Сколько часов прошло от начала суток до 5 часов (до 7, до 9) пополуночи?»

«Сколько часов прошло от 3 часов пополуночи до 7 часов пополудни»?

«Сколько часов прошло от 5 часов пополуночи до 3 часов пополудни?» и т. п.

После этого учитель должен перейти к тем случаям, когда в обозначение времени входят минуты, секунды. При этом необходимо указать детям на обозначение часов порядковыми числами («Который час наступил, если от начала суток прошло: 5, 7, 11, 13, 15 час.?»), а также и на весьма употребительные выражения: двадцать минут второго, тридцать пять минут пятого и т. п.

При решении вопросов, сюда относящихся, нет надобности заставлять детей производить вычисление всегда устно. Чтобы ответить, например, на вопрос: «Сколько времени прошло от 9 час. 40 мин. пополуночи (утра) до 7 час. 15 мин. пополудни (вечера) того же дня?», дети выполняют письменно следующее вычисление:

$$\begin{array}{r} 60\phantom{\text{ мин.}} \\ 19\text{ час. }15\text{ мин.} \\ -\ 9\text{ час. }40\text{ мин.} \\ \hline 9\text{ час. }35\text{ мин.} \end{array}$$

За этим должны следовать вопросы, которые требуют определения промежутка времени, отделяющего моменты двух смежных суток; учитель спрашивает, например, так:

«Сколько времени прошло от 2 час. пополудни до 5 час. пополуночи следующих суток»?

Ответ на подобные вопросы может быть найден различными приемами; в данном, например, случае можно считать так: от 2 час. пополудни до конца суток — 10 час., от начала следующих суток до 5 час. пополуночи — 5 час., итого — 15 час.; или еще так: от 2 час. пополудни до 2 час. пополуночи следующих суток — 12 час., от 2 час. пополуночи до 5 час. пополуночи — 3 часа, итого 15 час. Дети сами нападают на эти приемы; но полезно указать им и на то, что удобно при таких вычислениях относить данные моменты к одному (к общему) началу, например, в нашем случае, к началу первых суток, и определять, какой промежуток отделяет каждый из данных моментов от выбранного начала времени. Для нашего примера счет часов представится в таком виде: от начала суток до 5 час. пополуночи следующих суток — 29 час.; от того же начала до 2 час. пополудни тех же суток — 14 час.; а потому искомый промежуток — 15 час.

Сюда естественно примыкает решение задач вроде следующей: «Пароход вышел из пристани в среду в 9 час. 5 мин. пополудни и прибыл на место назначения в субботу на той же неделе в 7 час. 45 мин. пополуночи. Сколько времени продолжался переезд?»

Если отнесем оба момента к началу первых суток (полночь среды), то найдем, что конец искомого промежутка отделен от этого начала промежутком в 79 час. 45 мин., а начало искомого промежутка отделено от выбранного начала промежутком в 21 час. 15 мин. Вычтя из первого промежутка второй, найдем, что переезд продолжался 58 час. 30 мин.

176. Подобным путем дети будут достаточно подготовлены к тому, чтобы перейти к упражнениям в преобразовании календарного обозначения в арифметическое и в тех случаях, когда за начало счета времени должно быть принято или начало года, или начало столетия, или начало летосчисления.

Относящиеся сюда подготовительные вопросы могут быть распределены в такой последовательности:

1) Сколько полных месяцев и дней прошло от начала года до: 19 февраля, 25 марта, 2 августа и т. п.

2) Сколько дней прошло от начала простого года до тех же чисел?

3) Сколько дней прошло от начала високосного года до тех же чисел?

4) Сколько полных лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 2 августа 1837 г., до 22 июля 1845 г.?

5) Сколько полных лет и дней прошло от начала летосчисления до тех же чисел?

6) Сколько полных лет, дней и часов прошло от начала летосчисления до 5 час. пополудни 7 августа 1884 г.?

При счете дней, протекших от начала года, удобно пользоваться указанием, которое мы сделали выше относительно числа дней в четвертях года и в полугодиях. Чтобы определить, например, число дней, протекших от начала простого года до 16 августа того же года, мы считаем так:

в первом полугодии	181 день
в июле	31 »
из августа	15 дней
	227 дней

Или, чтобы определить число дней, протекших от начала високосного года до 27 ноября того же года, мы считаем так:

в первом полугодии	182 дня
в третьей четверти	92 »
в октябре	31 день
из ноября	26 дней
	331 день

Когда дети усвоят себе преобразование календарного обозначения в арифметическое, следует приступить к решению задач первой группы, т. е. тех задач, в которых данными служат начало и конец промежутка времени, а искомым является продолжительность этого промежутка.

Вот подобные задачи:

1) «Пароход, вышедший из порта 4 марта 1874 г., вернулся 27 июля того же года. Сколько времени находился он в плавании?»

Чтобы решить задачу, нужно отнести к началу названного года моменты двух событий: возвращение и отправление парохода.

Так как пароход вернулся 27 июля, то от начала года (простого) до этого числа протекло 207 дней (181+26); так как пароход вышел 4 марта, то от начала года до этого числа протекло 62 дня (31+28+3); пароход находился, следовательно, в плавании 145 дней (207—62).

2) «Некоторое событие произошло 5 августа 1802 г., а другое — 6 апреля 1829 г. Какой промежуток времени отделяет второе событие от первого?»

Чтобы решить задачу, отнесем к началу столетия данные моменты событий и выразим промежутки, отделяющие их от выбранного начала, в полных годах и днях.

От начала столетия до 6 апреля 1829 г. прошло

28 лет 95 дней

(число дней: 90 дней в первой четверти простого года и 5 дней апреля).

От начала столетия до 5 августа 1802 г. прошло

1 год 216 дней

(число дней: 181 день в первом полугодии простого года, 31 день июля и 4 дня августа).

Чтобы определить промежуток времени, отделяющий эти два события, нужно вычесть 1 год 216 дней из 28 лет 95 дней. Для этого нужно раздробить в дни последний из 28 годов, входящих в обозначение уменьшаемого; так как этот раздробляемый год високосный, то в нем 366 дней, таким образом, вычисление примет следующий вид:

		366	
28	лет	95	дней
1	год	216	дней
26	лет	245	дней

Искомый промежуток времени выражен в полных годах и днях. Если бы мы пожелали выразить его в постоянных единицах, т. е. в днях, то должны бы раздробить 26 лет в дни; чтобы это раздробление произвести точно, мы должны по необходимости принять в расчет все високосные годы, приходящиеся на эти 26 лет. Но такой точный арифметический расчет не прилагают обыкновенно к задачам, взятым из обиходной или исторической жизни, а довольствуются тем, что выражают искомый промежуток в полных годах и днях, как мы это и сделали.

3) «Петр Великий вступил на престол 15 мая 1682 г.; 28 января 1725 г. он умер. Сколько времени царствовал Петр Великий?»

Если отнести моменты данных событий к началу нашего летосчисления, то от этого начала до дня смерти Петра Великого прошло

1724 года 27 дней,

а от начала нашего летосчисления до дня вступления на престол Петра Великого прошло

1681 год 134 дня.

Вычитая из первого промежутка времени второй, найдем, что Петр Великий царствовал 42 года и 259 дней.

178. От задач на вычисление времени, относящихся к первой группе, можно перейти к задачам, в которых данными служат начало промежутка времени и его продолжительность, а искомым является конец промежутка времени.

Чтобы решить такую задачу, нужно календарное обозначение данного момента преобразовать в арифметическое и к полученному промежутку приложить данный промежуток времени, после чего мы получим искомый конец промежутка, выраженный арифметическим способом; останется преобразовать найденное арифметическое выражение в календарное.

Так как дети еще не упражнялись в таком преобразовании, то следует их познакомить с ним в такой последовательности:

1. Какое число наступило, если с начала года прошло 4 полных месяца и 16 дней, 7 полных месяцев и 2 дня и т. п.

2. Какое число наступило, если от начала простого года прошло 100 дней, 215 дней, 307 дней и т. п.?

3. Какое число наступило, если от начала високосного года прошло 105 дней, 182 дня, 317 дней?

4. Какое число наступило, если от начала летосчисления прошло 1817 лет, 5 полных месяцев и 18 дней?

5. Какое число наступило, если от начала летосчисления прошло 1852 полных года и 214 дней; 1863 года и 205 дней?

При этом преобразовании арифметического обозначения в календарное удобно пользоваться распределением дней года по четвертям года, по полугодиям. Чтобы ответить, например, на вопрос: «Какое число наступило, если от начала простого года прошло 215 дней?», можно исключить из этого числа дней 181 день (число дней в первом полугодии простого года), из остатка 34 дней исключить 31 день июля; новый остаток 3 покажет, что протекло 3 первых дня августа месяца и что, следовательно, наступило 4 августа.

179. Приведем две задачи, относящиеся к нашей второй группе.

1) «Некоторое событие произошло 3 февраля 1882 г., а другое — 102 дня спустя. Какого числа произошло второе событие?»

Отнеся первое событие к началу года, найдем, что оно отделено от него промежутком в 33 дня; придав 102 к 33, найдем 135, из чего заключим, что второе событие отделено от начала того же года промежутком в 135 дней. Чтобы это арифметическое обозначение перевести на календарное, вычитаем 90 (число дней в первой четверти простого года) из 135, из остатка 45 вычитаем 30 (число дней в апреле); остаток 15 укажет, что прошло 15 дней мая до момента второго события, из чего заключим, что оно произошло 16 мая 1882 г.

2) «Один человек родился 18 апреля 1818 г. и умер, имея от рождения 42 г. 10 мес. 2 дня. Какого числа умер человек?

Так как данный в этой задаче промежуток выражен в годах, месяцах и днях, то удобно выразить в годах, месяцах и днях и промежуток, отделяющий 18 апреля 1818 г. от начала летосчисления; вычисление в таком случае примет следующий вид:

1817	лет	3	мес.	17	дней
42	года	10	«	2	дня
1860	лет	1	мес.	19	дней

Смерть совершилась, следовательно, 20 февраля 1861 г.

180. Относительно этих задач нужно заметить следующее. Данный промежуток времени, входящий в задачи, большей частью дается в виде совокупности годов, месяцев и дней. В таких случаях удобно приводить к подобному же виду и другое данное задачи, предложенное в календарном обозначении; после произведенного сложения этих двух данных задачи останется перевести полученный результат на календарное обозначение.

Но не трудно видеть, что весь этот расчет может быть произведен другим путем; так, например, вторая из только что приведенных нами задач может быть решена следующим образом:

Через 42 года, считая от 18 апреля 1818 г., наступило 18 апреля 1860 г.; 10 месяцев спустя наступило 18 февраля 1861 г.; два дня спустя, наступило 20 февраля 1861 г.; итак, смерть совершилась 20 февраля 1861 г.

Всякий согласится с нами, что этот способ ближе к жизни и естественнее того книжного способа, который приведен выше. Мы полагаем необходимым познакомить детей с таким способом расчета и приучить их пользоваться им при решении задач на вычисление времени, когда даны начало события и продолжительность его, выраженная в годах, месяцах и днях, как это обыкновенно и делается.

181. В заключение нам остается сказать несколько слов о задачах третьей группы. Сюда относятся те задачи на вычисление времени, в которых даны конец и продолжительность промежутка времени, начало которого требуется определить. Прием решения этих задач состоит в том, что данное календарное обозначение переводят в арифметическое и из полученного составного именованного числа вычитают данный в задаче промежуток времени, выраженный подобным же составным именованным числом; полученный остаток выразит промежуток, отделяющий искомое начало данного промежутка от выбранного начала счета времени; остается только перевести обозначение на календарное, чтобы получить требуемый ответ.

Вот задача, относящаяся к этой последней группе.

1) «Бородинское сражение происходило 26 августа 1812 г.; за 431 год 11 мес. 18 дней до этого дня происходила битва на Куликовом поле. Когда происходила Куликовская битва?»

		12			
1811	лет	7	мес.	25	дней
431	год	11	«	18	«
1379	лет	8	мес.	7	дней

Битва на Куликовом поле происходила, следовательно, 8 сентября 1380 года

Или иначе:

	1812 г. 26 августа
431 год тому назад . . .	1381 г. 26 августа
11 месяцев тому назад. .	1380 г. 26 сентября
18 дней тому назад. . .	1380 г. 8 сентября

(А. И. Гольденберг, Методика начальной арифметики, изд. второе, 1886 г., стр. 135—143.)

В. Беллюстин.

Необходимость задач на вычисление времени и способ их решения.

Уменье точно и скоро высчитывать время имеет большую практическую ценность. «Время» — говорят — «деньги», но время никогда не будет для нас деньгами, если мы не будем уметь считать его так же легко и хорошо, как считаем деньги. В учебниках арифметики дается так называемый арифметический способ решения задач на время. Это способ сложный, относящий все события к началу христианской эры.

Для начальной школы надо воспользоваться более легким способом, который допускал бы, главным образом, устное вычисление и более приближался бы к тем приемам, которыми пользуются деловые люди при своих расчетах. Основание этого более легкого способа состоит в следующем: за начальный момент при вычислении принимается не начало эры, а одно из тех событий, которые даны в задаче, притом более раннее. Подробности этого способа мы выясним по отделам, сперва применительно к низшим мерам времени, а потом — к высшим.

Вычисление минут и часов.

Вопросы, касающиеся минут и часов, предполагают, что дети предварительно ознакомились со стенными или карманными часами и умеют ими пользоваться. Решим для примера несколько задач.

«Сколько времени прошло с 3 час. утра до 7 час. вечера того же дня?».

Объяснение: с 3 час. утра до 3 час. пополудни прошло 12 час., с 3 час. пополудни до 7 час. вечера — 4 часа, всего 16 час.

Другая задача:

«Занятия начались в 7 час. 45 мин. утра, окончились в 2 час. 30 мин. пополудни. Сколько времени они продолжались?»

Объяснение: с 7 час. 45 мин. до 1 час. 45 мин. прошло 6 час. (12+1 = = 13, 13—7 = 6); с 1 час. 45 мин. до 2 час. 30 мин. — 45 мин., всего 6 час. 45 мин.

Во всех подобных задачах за начало счета лучше всего принимать не начало суток, т. е. полночь, а время первого, раннего, события.

Вычисления в пределе месяца.

Вычисления времени отличаются значительной неопределенностью по двум причинам. Во-первых, когда мы говорим «с такого-то числа до такого-то», например «с 15 до 20», то неизвестно, принимать ли в счет и крайние числа, и если принимать, то оба или одно. Обыкновенно принимают в расчет которое-нибудь одно из крайних чисел, чаще первое. Но для учеников начальной школы необходимо дать более определенное условие, особенно на первое время, когда они только еще знакомятся с подобными задачами. Необходимо указывать точнее, с какого именно времени дня считать до какого; например полезно бы выражаться так: «с полудня 15 числа до полудня 20» или «с вечера 15 до вечера 20». Тогда из 15 числа надо будет счесть вечер до полудня, а из 20 — начало суток до вечера; эти два куска и дадут полные сутки, так что два крайних числа, т. е. 15 и 20, сократятся в 1 сутки.

Во-вторых, вопрос «сколько дней прошло с 15 числа до 20» неопределенен благодаря выражению «дней». Подразумевать ли под этим сутки, или только дни, т. е. время с 6 час. утра до 6 час. вечера? Если только дни, то непременно полные, или же принимать в счет и часы дня? Полных дней с 15 числа до 20—4: 16 число, 17, 18, 19. Но, очевидно, наш вопрос предполагает не одни полные дни, он подразумевает сутки. Поэтому будем говорить определеннее — «сколько суток».

Итак, вопросы, касающиеся вычисления времени, надо ставить в начальной школе определеннее, чтобы не сбивать ими детей. Надо указывать, с какого времени дня считать до какого, и вместо термина «день» употреблять «сутки».

Разберем теперь три вида задач: один на сложение и два — на вычитание.

Сложение. «Сейчас полдень 4 июля. Какое число будет через 5 суток?» Чтобы вывести правило решения, разберем вопрос для небольшого промежутка времени, для 1—2 суток. Именно через сутки будет полдень 5 июля, через 2 суток полдень 6 июля. Как мы получим эти ответы: 5, 6? К четырем прибавили единицу, получили 5, следовательно, ответ — пяток; к четырем прибавили 2, получили 6, следовательно, ответ—6; поэтому через 5 суток, считая с полудня 4 июля, будет полдень 9 июля, так как $4 + 5 = 9$. Вообще во всех подобных задачах к числу, выражающему первый момент (у нас только 4, первый момент— 4 июля), надо прибавить число промежуточных суток (у нас 5: через 5 суток), и тогда получим число, выражающее второй момент (число 9, следовательно, 9 июля).

Уяснивши себе этот порядок на малых числах, дети воспользуются им и при больших числах. Если сегодня 4 июля, сейчас полдень, то через 20 суток будет полдень 24 июля, через 25 — полдень 29 июля и т. д. Если сложение усвоено, то вопросы на вычитание решаются легко, так как правило их решения такое же. Если сейчас утро 4 июля, то сутки назад было утро 3 июля, а двое суток назад было утро 2 июля. Эти ответы, 3 и 2, получились, очевидно, вычитанием: $4—1 = 3$, следовательно, 3-е число, $4—2 = 2$, следовательно, 2-е число. Приходим к общему выводу: надо из числа, обозначающего день месяца, вычесть число промежуточных суток, тогда и получим то число месяца, которое требуется найти. Это правило прилагается и к большим числам. Например, если сейчас вечер 29 июля, то 20 суток назад был вечер 9 июля, так как 29—20 = 9.

На основании сложения решается второй вопрос вычитания, именно, когда требуется найти, чему равен промежуток времени между 2 числами месяца. Задача: «Сколько суток заключается в промежутке времени, считая с полудня 4 июля до полудня 7? Отвечаем: 3 суток. Что это так, доказываем поверкой: 4 + 3 = 7. Сметливые дети, наверно, изложат и другой вывод этого же правила, такой: «С полудня 4 июля до полудня 5 — сутки, до полудня 6 — двое; эти ответы находим вычитанием: 5—4 = 1, 6—4 = 2, следовательно, и в нашем примере надо вычесть 4 из 7, получится 3». Общее правило: чтобы высчитать, сколько суток в промежутке, надо из одного числа, выражающего день месяца, вычесть другое.

Переход из одного месяца в другой.

Все предыдущие вычисления производятся легко, когда они заключаются в пределе одного и того же месяца. Но к ним можно привести и тот случай, когда числа принадлежат разным месяцам. Поясним на примере. За 30 апреля следует не 31 апреля, а 1 мая; мы же условимся счет продолжать, т. е. 1 мая будем считать за 31 апреля, 2 мая за 32 апреля и т. д., 10 мая за 40 апреля. При таком распространении счета разные месяцы будут приводиться к одному. Разберем задачи.

1. «Событие случилось в полдень 15 апреля. Когда исполнится 40 суток с момента этого события?» Первоначальный ответ — 55 апреля, так как 40 + 15 = 55. Но в апреле только 30 дней, остальные дни принадлежат маю: 55 — 30 = 25, следовательно, 25 мая.

2. «Событие случилось в полдень 15 апреля. Другое событие было на 40 суток ранее. Когда оно произошло?» Надо бы из 15 вычесть 40, согласно правилу. Но так как 15 менее 40, то преобразовываем число, принадлежащее апрелю, в соответствующее число марта, будет 46 марта (31+15=46). Из 46 вычитаем 40 и получаем в ответе 6 марта...

Задачи с годами, месяцами и днями.

С л о ж е н и е. «И. А. Крылов родился 2 февраля 1768 г. и прожил 76 лет 9 месяцев 7 дней. Когда он скончался?» Наиболее доступным для начальной школы объяснением может быть такое: И. А. Крылов родился 2 февраля 1768 г.; год ему исполнился 2 февраля 1769 г., 2 года — 2 февраля 1770 г., мы к 1768 прикладывали 1 год и 2 года.; чтобы узнать, когда исполнилось ему не год и не два, а 76 лет, надо к 1768 приложить 76, следовательно, 1-е действие: 1768 + 76 = 1844, т. е. 2 февраля 1844 г. ему исполнилось ровно 76 лет, но он прожил еще 9 месяцев, начиная с 2 февраля, 1 месяц исполнился 2 марта, 2 месяца 2 апреля, 3 месяца 2 мая и т. д. 9 мес. 2 ноября. Итак, 2 ноября 1844 г. Крылову исполнилось 76 лет. 9 мес.; но он еще прожил 7 дней; остается приложить еще 7 дней, и тогда получим окончательный ответ: 1844 г. 9 ноября. Все решение задачи можно записать такими строками: 2 февраля 1768 г. присч. 76 лет = 2 февраля 1844 г.; 2 февраля 1844 г. присч. 9 мес. = 2 ноября 1844 г.; 2 ноября 1844 г. присч. 7 дней = 9 ноября 1844 г.

В ы ч и т а н и е. «Император Петр I скончался 28 января 1725 г., имея отроду 52 года 7 месяцев 29 дней. Когда он родился?» Как видно из условия, 28 января 1725 г. Петру I исполнилось 52 года 7 месяцев 29 дней. Решим первый вопрос такой: когда ему исполнилось ровно 52 года 7 месяцев без дней? Получится строка: 1725 г. 28 января отсч. 29 дн. = 1724 г. 30 декабря (здесь мы 28 января заменяем 59 декабря). Итак, Петру I исполнилось 30 декабря 1724 г. ровно 52 года 7 месяцев. Теперь задаемся таким вопросом: когда ему исполнилось ровно 52 года? Получаем вторую строку: 30 декабря 1724 г. отсч. 7 мес. = 30 мая 1724 г. (1 месяц назад — 30 ноября, 2 месяца назад — 30 октября и т. д.). Следовательно, 30 мая 1724 г. Петру I исполнилось ровно 52 года. Теперь легко узнать, когда он родился: 30 мая 1724 г. отсч. 52 года = 30 мая 1672 г.

Сравнивая ход решения обеих задач, мы видим, что в сложении мы прибавили сперва года, потом месяцы, потом дни, в вычитании же отнимали наоборот: сперва дни, потом месяцы, потом годы. Такая обратность совершенно понятна: вычитание обратно сложению. Когда строят здание, то сперва кладут фундамент, потом строят стены, потом кроют крышу. Когда же разбирают здание, то сперва снимают крышу, потом разбирают стены и, наконец, приступают к фундаменту. — До сих пор в отвлеченных и составных именованных числах было безразлично, с каких мер или разрядов ни начинать сложение и вычитание. Ответ получался одинаковый. Для удобства устное вычисление начинали с высших разрядов, а письменное с низших. В мерах времени не то. Благодаря неопределенности мер времени (переменное число дней в году и в месяце), с изменением порядка действия может измениться и ответ. Это видно на следующей задаче:

«Сегодня 25 февраля 1900 г. Какое число будет через год 15 дней?» Если сперва прибавить один год, потом к полученному 15 дней, то ответ будет 12 марта 1901 г.; при этом в феврале мы будем принимать 28 дней, так как это февраль 1901 г. Если же приложить сперва 15 дней, а потом к полученному 1 год, то ответ обратится в 11 марта 1901 г.; февраль будет содержать 29 дней, так как это будет февраль 1900 г., високосного года.

Отсюда видно, что при сложении и вычитании составных именованных чисел, выражающих время, надо держаться определенного порядка. Нормальным порядком надо признать такой: при сложении прибавлять сперва годы, потом месяцы, потом дни, при вычитании же отнимать последовательно дни, месяцы и годы. Что при вычитании надо поступать именно так, это доказывается и поверкой задач при помощи сложения. Если при вычитании начинать действие с годов, то по поверке может оказаться, что ответ поверки не сошелся с данными в задачнике числами.

О п р е д е л е н и е п р о м е ж у т к а в р е м е н и. Я родился 22 апреля 1877 г. Сколько мне исполнилось лет, месяцев и дней 2 января 1910 г. День своего рождения я праздную ежегодно 22 апреля, и последний раз мне исполнилось несколько полных лет 22 же апреля. Это случилось 22 апреля 1909 г. Сколько же мне исполнилось лет?

Решение: 22 апреля 1909 г. отсч. 22 апреля 1877 г. = 32 годам, следовательно, мне исполнилось 32 года. Но сверх этого я прожил несколько целых месяцев. Целые месяцы истекают для меня 22 числа. 22 декабря 1909 г. истекло 8 мес. Наконец, с 22 декабря 1909 г. до 2 января 1910 г. прошло 11 дней. Всего 32 года 8 месяцев 11 дней.

(В. Беллюстин, Методика арифметики, изд. 1915 г., ч. III, стр. 41—48.)

7. НАЧАТКИ ГЕОМЕТРИИ.

В. Беллюстин.

Необходимость геометрических сведений и их доступность.

Мы указывали в начале методики, что преподавание арифметики должно исходить от жизни и приводить к жизни. Преследуя цели образовательные, т. е. развивая ум, доброту и бодрый труд, мы везде начинаем с того материала, который дается жизнью и природой, и не уклоняемся от него до тех пор, пока это не вредит образовательным целям. Этим учение ставится в ближайшую связь с жизнью, а в результате — улучшение жизни. Но на что более наталкиваются дети в окружающей обстановке, как не на пространственные отношения? Не линии ли и фигуры стоят всегда перед нашими глазами? Лишать начальную школу геометрического элемента значит делать начальное образование односторонним. Но так как объем геометрических сведений не может быть велик в начальной школе по недостатку времени, то лучше всех их присоединить к тому предмету, который является наиболее родственным, — к арифметике. В этом будет их обоюдная выгода.

Употребляя слово «геометрия», мы отнюдь не имеем в виду систематического курса геометрии ни в полной, ни в сокращенной форме. Мы желаем дать наглядные представления геометрических фигур и их простейших отношений. Лучший способ выражения фигур — вырезывание из бумаги. Лучшая оценка отношений — числовая, тем более, что она дает много материала для чисто арифметических занятий. Если повести дело так, т. е. наглядно и с участием личного творчества детей, то мы получим учебный материал, в высокой степени доступный и интересный для детей. Учитель, сумевший отрешиться от приемов систематического курса геометрии и ставший на почву наглядной и трудовой разработки геометрических сведений, убедится, что они не только не труднее арифметических, но даже, пожалуй, легче и интереснее.

С чего начинать сообщать геометрические сведения.

В настоящее время установилось начинать геометрические сведения с рассмотрения геометрических тел. Но мы, следуя Песталоцци, предпочитаем начинать с фигур и именно с простейшей, с квадрата. Мы полагаем, что фигура ближе детям, чем тело, потому что тело мы видим и осязаем не в целости, а только лишь с поверхности, поверхность же и есть фигура. Кроме того, фигуры вырезывать и строить гораздо легче, чем тела. А что касается до небольшой неточности, когда бумажная фигура имеет все-таки размер и в толщину и представляет собой тело, то эта неточность значения никакого не имеет и не превышает той неточности, которая допускается в чертежах, когда мы мелом обозначаем линию.

Есть еще преимущество раннего введения фигуры квадрата. Если дать стороне квадрата определенную длину, например вершок, то дети будут иметь перед глазами квадратный вершок; хорошее знакомство с ним облегчит квадратные измерения и даст материал для числовых задач.

Геометрические термины и правила.

На этой ступени геометрических сведений нет никакой нужды в геометрических терминах и правилах. Наоборот, они могут обременить детей и тогда являются вредными. На этой ступени все дело состоит не в словах и понятиях, а в осязаемых фигурах и в действиях над ними. Не о мудреных словах, большей частью иностранных (греческих), надо заботиться, а о том, чтобы дети живо представляли себе фигуры и свободно переделывали одни фигуры в другие. Дети всегда будут иметь перед собой полосу или листок бумаги, или дощечку; они ясно видят, о чем идет речь, и поэтому не ощутится никакой нужды, например, в термине «прямоугольный четырехугольник». Точно так же слово «клин» или просто «треугольник» может заменить собой временно более трудный термин «прямоугольный треугольник». И лишь тогда, когда впоследствии накопится порядочно похожих представлений и уж простыми выражениями не в силах будут дети обойтись, тогда уместно будет вводить и термины. Но это все лежит вне области начальной школы. Во всяком случае, гораздо лучше опоздать с мудреными словами, чем спешить.

С геометрическими выводами нельзя спешить, а с правилами надо обращаться крайне бережно. Пусть вывод и пусть правило зреет в сознании детей постепенно, медленно, тихо. Учитель дает только работу для вывода, но отнюдь не работу на основании готового правила. Работой с квадратными прямоугольниками, прямоугольными треугольниками, с их вырезыванием, складыванием, перегибанием и разложением, сосчитыванием и вычислением дети самостоятельно придут к доступным им выводам, а от недоступных учитель должен их избавить — это яд для учения.

Учитель пусть разрешает сомнения, отвечает на вопросы учеников, указывает на допущенные ошибки, но не наводит и отнюдь не дает готовых правил. В противном случае вместо здорового зерна геометрических знаний он рискует дать пустую шелуху.

(В. Беллюстин, Методика арифметики, ч. II, изд. 1917 г., стр. 40—45.)

С. И. Шохор-Троцкий.

Площади и объемы.

§ 6. В состав учения об именованных числах, об их преобразованиях и действиях над ними входят также задачи на так называемое вычисление площадей и объемов, притом, конечно, площадей — только прямоугольников и объемов прямоугольных параллелепипедов. Начинать дело с рассмотрения тел с тем, чтобы впоследствии перейти к основным геометрическим понятиям, нет особенной надобности. Вообще, все предварительные геометрические понятия и представления, которые необходимы и достаточны для должного обоснования решения задач на вычисление площадей и объемов, не предполагают сколько-нибудь объемистого пропедевтического курса, каковым начинается большинство учебников геометрии, предназначенных для элементарных школ. Можно начать прямо с точки, не давая никакого определения этому геометрическому образу, затем перейти к прямой, к направлению, к углу, вершине его, сторонам и т. д., подчиняясь с самого начала только тому требованию, по которому учащиеся всегда должны начинать приобретение познаний с представлений, а не с понятий.

Цель сообщения малолетним учащимся некоторых познаний по предмету геометрии может заключаться: 1) в ознакомлении их с важнейшими геометрическими названиями, которые часто употребляются в ремеслах в жизни (угол, квадрат, параллельный, перпендикулярный и т. п.), а также 2) в ознакомлении с измерением некоторых геометрических протяжений: прямых линий, разных углов, окружности, площадей прямоугольника, параллелограмма, прямоугольного треугольника, а также объемов куба и вообще прямоугольного параллелепипеда и т. п. Те учения, которые детям не могут быть разъяснены, должны быть приняты ими на веру, точно так же, как ими принимаются на веру некоторые учения из других областей знания, сообщаемые им на других уроках.

Преподавание должно отличаться, прежде всего, полной осязательностью, наглядностью и ясностью. К наглядным пособиям и чертежу надо прибегать с разумением, с толком. Сообразно с сим можно повести, вовсе не задумываясь над определениями точки, прямой линии, угла и т. п., упражнения в следующем роде:

Предварительные геометрические упражнения.

Вот точка; проведем из нее на доске прямую... — Можно ли от руки? (Можно.)... — Но можно и с помощью линейки... — Что мы провели? (Прямую.) — Откуда? — В каком направлении? (Вот в этом!..) [1]. Много ли можно из точки провести прямых? (Сколько угодно.)—Вот прямая линия...—А вот это—не прямая...— Это тоже линия, но не прямая!... и т. д. (Ученики должны, конечно, и сами поупражняться в проведении прямых на доске, полу, в тетради.) — Проведу прямую из точки... — Что я сделал?.. — Проведу из той же точки еще одну прямую в направлении прямопротивоположном... — Где направление прямопротивоположное? (Все, без исключения, ученики

[1] Ученик должен показать рукой — в каком направлении проведена прямая.

должны поупражняться в изображении прямых и в продолжении прямых в ту же и в прямопротивоположную сторону.) — Проведу прямую из точки... — Проведу другую прямую, в другом направлении, но не в прямопротивоположном... — Что получилось?.. — Получился угол... — Начертите угол!.. — Еще угол!.. — Где вершина угла?.. — Где стороны его?.. — Кто знает?.. — Начертим угол!..— Еще один!.. — Вырежем из бумаги такой же угол, как второй!.. — На длину сторон не смотрите, — угол все тот же, хотя стороны его меньше сторон этого угла... Вот уголки из бумаги — одинаковые, хоть у них стороны и разные... Это — углы, равные между собой...— Этот угол равен тому... — Вот угол! — Начертим еще один... Вырежем из бумаги угол, равный второму... — Вот первая сторона (нижняя) первого угла, вот вторая сторона первого угла?.. Где первая сторона второго, где вторая сторона второго угла... — Приложим первую сторону вот этого (вырезанного из бумаги) угла ко второй стороне первого, вершину угла (вырезанного из бумаги) на вершину, а весь угол на доску... — Проведем по второй стороне (бумажного) угла мелом прямую... Получим новый (четвертый) угол, который состоит из двух углов... — Мы сложили два угла... — Мы получили сумму двух углов... — В этом новом углу где первая сторона, где вторая?.. — Какой угол образуют эти две стороны?.. — Какие тут углы равны между собой? (первый и третий).

П р я м ы е у г л ы.

Вот два одинаковых угла [1]. — Сложим их... Что получим? (Не получим угла.)... — Вторая сторона второго угла и первая первого образуют ли угол? (Нет, не образуют.)... — Что же они составляют? (Они составляют одну прямую, одну прямую линию.)... — Такие два угла называются прямыми углами, и каждый из них называется тоже прямым углом!.. — Сложить следующие два угла! — Найти сумму вот таких двух углов!.. — Прибавить вот этот угол к следующему!.. и т. д.

Надо поупражнять детей в сложении не только одинаковых, но также различных углов. Потом могут итти такие упражнения: Возьмем прямую (прямую линию!) и на ней точку... — Из этой точки проведем на доске еще прямую...—Сколько получилось углов? (Два.)... — Можно провести из точки на прямой такую прямую, чтобы оба угла были равны между собой... — Проведем... — Получим прямые углы... Когда получим два прямых угла? — Два прямых угла можно получить, если из точки на прямой проведем другую прямую так, чтобы оба угла, которые при этом получатся, были одинаковы... — Проведите прямые углы... — Из куска бумаги вырежем два прямых угла... Разорвем бумажку так, чтобы получилось два прямых угла (сложим кусок бумаги сначала, как следует)... — Начертите один прямой угол...— Любая сторона прямого угла, — так говорят, — перпендикулярна к другой стороне... — Говорят «перпендикуляр» к другой стороне...— Вот прямая, а вот точка на ней... Проведем из точки перпендикуляр к этой прямой... — Проведите перпендикуляры к следующим прямым из следующих точек (вверх, вбок, вниз, влево, вправо!)...

[1] Надо взять два прямых угла, оторванные от осьмушки бумаги.

Прямоугольник. Проведем прямой угол; от вершины его отложим на каждой стороне одинаковые прямые (одинаковые куски, отрезки прямых линий)... Вершина прямого угла — начало обоих отрезков... Из конца другого отрезка проведем перпендикуляр к этому отрезку вверх... — Получим ленту, полосу... — Из конца другого отрезка проведем перпендикуляр к этому отрезку... — Получим кусок ленты, кусок полосы... — Это — четырехугольник... — Почему? (Потому, что здесь четыре угла.)... — Это прямоугольный четырехугольник.. — Почему? (Потому что все четыре угла — прямые углы.)... Но в этом прямоугольном четырехугольнике, очевидно, все четыре стороны равны между собой... — Такой четырехугольник называется квадратом... — Начертим квадрат, в котором каждая из четырех сторон имеет в длину дециметр...

Площадь. Квадратный метр, это — некоторая площадь; это — площадь того квадрата, в котором длина стороны равна одному метру... — У пола в классе есть своя площадь... — Не вся площадь стола оклеена клеенкой... — Площадь оконного стекла меньше площади стола... — Квадратный метр более квадратного дециметра во сколько раз?.. — Площадь, занимаемая листом бумаги, если его положить на стол и развернуть хорошенько, больше или меньше площади стола?..

Сколько *кв. дм* в 1 *кв. м*? Сколько *кв. см* в 1 *кв. дм* и т. д. — Почему 1 *кв. м* = 10 *кв. дм* × 10 = 100 *кв. дм*. Потому что из квадрата, которого сторона 10 *м*, можно составить десять полос, десять лент (вроде I, II, и III на чертеже), из которых каждая содержит в себе ровно 10 *кв. дм* и т. д. — То же справедливо для определения величины прямоугольника, которого длина 7 *дм*, а высота, например, 4 *дм*. Такой прямоугольник разбивается на 4 полосы, ленты, из которых в каждой 7 *кв. дм.*, а потому величина такого прямоугольника равна 7 *кв. дм* × 4, т. е. 28 *кв. дм*.

Квадратные и линейные меры. Полезно напоминать при этом ученикам, что в 1 *м* 10 *дм* и что стало-быть в 1 *кв. м* 100 *кв. дм*. Кроме того, они должны ясно понимать, что нелепо спрашивать — сколько дециметров в квадратном метре и думать, что 1 *кв. м* 10 *дм*. Надо показать ученикам, что в 1 *кв. м* 100 *кв. дм* и что вопрос о том, сколько в квадратном метре линейных *дм.*, столь же нелеп, как вопрос о том, сколько килограммов в месяце, сколько центнеров в одном метре или сколько метров в одном часе. Одна тонкость почти неизбежна в занимающем нас отделе, и избегать ее не следует учителю, стремящемуся не только к усвоению его учениками механических приемов, но и к надлежащему уразумению учащимися самой сущности дела. Мы говорим о том, что ученики не должны думать, будто квадратным метром называется квадрат, которого сторона равна метру; квадратным метром называется площадь этого квадрата, точно так же, как линейным метром — длина известной прямой, а не самая эта прямая, кубическим же метром — не куб, а объем куба, которого ребро равно метру. Учитель только не должен думать, что это можно объяснить словами: до этого можно довести учеников, употребляя слово площадь надлежащим образом, притом не сразу. Пусть ученики раньше освоятся с квадратом как фигурой, пусть они, далее, научатся его чертить, понимать, что называется площадью, пусть даже сначала говорят, что квадратный метр есть квадрат известной величины; всегда наступит такой момент, когда учитель не только сможет поправить ученика (этого еще мало), но и привить уму учеников сознание, что не самый квадрат, у которого длина равна одному метру, а площадь этого квадрата есть квадратный метр.

Объем. Что касается кубических мер и измерения объемов куба и прямоугольного параллелепипеда, то учение об этом измерении не представляет столь значительной, как учение об измерении некоторых площадей, практической важности. Это измерение исчерпывается только наглядным выяснением того, почему, например, в кубическом метре не 10 и даже не 3 раза по 10 кубических дециметров, а 10 раз 100 кубических дециметров. Эта причина может быть изложена примерно следующим образом: «Почему в 1 *куб. м* не 10 *куб. дм*, и даже не 10 раз 10 *куб. дм*, а 10 раз 100 *куб. дм*, т. е. 1000 *куб. дм*? — Дело в том, что *куб* величиной в кубический метр может быть разделен на 10 одинаковых слоев, пластов, из которых каждый, в свою очередь, может быть разделен на 10 одинаковых частей, и в каждой из этих последних будет заключаться по 10 *куб. дм*. Но выяснение этой причины должно быть поведено на основании наглядных пособий, наиболее для оного пригодных, и при сильном воздействии на геометрическое воображение учеников. Если учитель пожелает и найдет возможным подольше остановиться на терминах и разъяснениях, то он мог бы это сделать примерно следующим образом.

Тело, куб, грани куба и т. п. Всякий вещественный предмет называется телом...— Телом называют не только человеческое тело, а всякий предмет, всякую вещь, которая состоит из вещества: из дерева, железа, меди, из камня, стекла... — Назовите тела!.. Всякое тело занимает много или мало места, много или мало пространства ... — Количество пространства (сколько пространства занимает тело?) называется объемом тела... — Что больше: объем полена или объем карандаша?.. объем морковки или объем редьки?.. объем картофелины или горошинки?.. Когда у нас есть посудина, сосуд, — например, стакан, чашка, самовар, то говорят, что емкость стакана больше емкости чашки.. — Емкость ведра?.. — Емкость бочки?.. — Бутылки? Бревно можно обтесать разно... Можно из дерева сделать тело, чтобы оно было похоже на кубик... — Ящик можно сделать такой, чтобы он имел вид (т. е. форму) кубика, куба..., чтобы он имел форму кубическую... — У куба шесть граней, — каждая грань у куба — квадрат... — У куба длина, ширина и высота одинаковы... — Покажите грани куба... — Покажите длину, ширину и высоту куба... — Можно из железа сделать тело, чтобы оно было похоже на кубик...— Ящик можно сделать такой, чтобы он имел вид, форму кубика, куба..., чтобы он имел форму кубическую... Объем куба, которого длина один метр (у него ширина и высота такие же, как длина)..., называется кубическим метром..., и т. д. — Можно ли узнать, сколько кубических дециметров в кубическом метре? (Можно.) Как это сделать?.. — Надо себе представить, что у нас есть ящик, которого емкость — кубический метр, которого внутренний объем — кубический метр... — Тогда заключенный в нем воздух имеет форму куба... — Положим в этот ящик куб, объем которого *куб. дм*, на дно, придвинем этот куб к двум смежным стенкам... Рядом приставим к этому кубу еще такой и придвинем его к одной из стенок, но чтобы он вплотную стал к первому кубу...— Таких кубов на дно можно будет положить сколько? (100 штук.) — Еще раз!.. — На эти 100 кубов можно положить еще 100 штук, и ящик еще наполнен не будет... и т. д. — В 1 *куб. м* не 10 *куб. дм* и даже не 100 *куб. дм*, а 10 раз 100 *куб. дм*, т. е. 1000 *куб. дм*..., и т. д.

З а п и с и. Записи, выражающие зависимость между единицами меры площадей высшего наименования и единицами меры площадей наименования низшего, должны быть вполне согласованы с самым смыслом и порядком вычисления, основанными: а) на разделении каждой квадратной меры на известное количество равных полос, из которых в каждой содержится определенное числю квадратных единиц меры площадей низшего наименования, и б) на разделении каждой кубической меры на слои, в каждом из которых содержится определенное число кубических единиц меры объемов. Ученик не только должен совершенно ясно себе представлять, что 1 *кв. м* равняется 100 *кв. дм*, но и записывать, что 1 *кв. м* = 10 *кв. дм* × 10, а площадь прямоугольника, которого длина равна 75 *м*, а высота — 26 *м*, равна 75 *кв. м* × 26.

Точно так же ясно ученик должен разбираться в вопросе о том, сколько кубических дециметров в прямоугольном параллелепипеде, которого длина равна 7 *дм*, высота 5 *дм*, а ширина 3 *дм*; он должен понимать, что ему надо (и почему это надо) 7 *куб. дм* помножить на 5, а полученное — на 3, т. е. что объем этот равен 7 *куб. дм* × 5 × 3.

Далее ученики должны с полным разумением вычислять одно из измерений прямоугольника, если даны его площадь и другое его измерение, а также — вычислять одно из измерений прямоугольного параллелепипеда, если даны его объем и каких-нибудь два измерения параллелепипеда. Ясность разумения будет засвидетельствована, ежели ученик будет в состоянии сказать и понять следующее: ежели площадь прямоугольника равна 70 *кв. дм*, а длина его — 5 *дм*, то это значит, что прямоугольник может быть разрезан на 5 одинаковых прямоугольных полос и что в каждой из этих полос содержится 70 *кв. дм*: 5, т. е. 14 *кв. дм*., но ширина каждой из этих полос 1 *дм*, сталобыть в каждой из полос квадрат, длиной и шириной в 1 *дм*, умещается столько раз, сколько отвлеченных единиц содержится в отношении — 14 *кв. дм*: 1 *кв. дм*, т. е. 14 раз, а это свидетельствует о том, что длина полосы или высота нашего прямоугольника равна 14 *дм*. Нечто подобное ученики должны уразуметь и относительно прямоугольного параллелепипеда: пусть объем прямоугольного параллелепипеда равняется 360 *куб. см*, пусть длина его равна 15 *см*, а ширина — 6 *см*, и пусть спрашивается, как велика высота его? — Конечно, можно исходить из мало говорящих сознанию и представлению учеников логических соображений о том, что объем прямоугольного параллелепипеда равняется произведению трех измерений и т. д. Но тогда именно истинному уразумению фактического положения дела неоткуда взяться.

Гораздо лучше, ежели ученики представляют себе, что данный параллелепипед разрезан на 15 слоев, из которых каждый содержит в себе 360 *куб. см*: 15, т. е. 24 *куб. см.*; что каждый из этих слоев разрезан на 6 столбов, из которых каждый содержит в себе 24 *куб. см*: 6, т. е. 4 *куб. см*; что каждый из этих столбов состоит из стольких же кубов и что стало-быть высота нашего параллелепипеда содержит в себе столько линейных сантиметров, сколько отвлеченных единиц содержится в отношении 4 *куб. см*: 1 *куб. см*, т. е. 4.

Работы для воображения в этом упражнении и рассуждении, конечно, неизмеримо больше, чем в отвлеченной ссылке на теоремы о площади прямоугольника и об объеме прямоугольного параллелепипеда; но зато и результаты подобной работы воображения неизмеримо ценнее результатов, добываемых одной логической ссылкой на теоремы, известные ученикам лишь понаслышке.

(Шохор-Троцкий, Методика арифметики, ч. I, изд. 1903, стр. 228—232.)

ПРИЛОЖЕНИЯ

В. Беллюстин.

ДНЕВНИК ЗАНЯТИЙ В 3-м ОТДЕЛЕНИИ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ.

1-е полугодие.

15 сентября,	урок	1.	Счет тысячами. Обозначение четырехзначных чисел цифрами. Откладывание их на счетах.
16 »	»	2.	Счет десятками тысяч. Письменное обозначение и откладывание на счетах пятизначных чисел. Задачи: 8—12.
18 »	»	3.	*Самостоятельная работа.* Письмо таблицы умножения.
20 »	»	4.	*Самостоятельная работа.* Умножение трехзначных чисел на однозначные в пределе 1000 (повторение). Примеры (из вып. 2).
21 »	»	5.	Окончена и повторена нумерация. Задачи: 12—22.

---

22 сентября,	урок	6.	Сложение многозначных чисел: устное, письменное и на счетах.
23 »	»	7.	Задачи на сложение: 22—37.
25 »	»	8.	*Самостоятельная работа.* Повторение умножения и деления в пределе 1000.
28 »	»	9.	Письменное вычитание многозначных чисел, когда в обозначении уменьшаемого нет нулей или есть только один нуль. Задачи: 37—46.
29 »	»	10.	Письменное вычитание многозначных чисел, когда в обозначении уменьшаемого на месте единиц и десятков стоят нули. Задачи: 46—59.
30 »	»	11.	Письменное вычитание многозначных чисел, когда в обозначении уменьшаемого встречается несколько нулей подряд. Задачи: 59—71.
2 октября,	урок	12.	*Самостоятельная работа.* Повторение умножения и деления в пределе 1000.
4 »	»	13.	*Самостоятельная работа.* То же, что на предыдущем уроке.
5 »	»	14.	Устные задачи на вычитание многозначных чисел: 71—76. Вычитание на счетах. Задачи на счетах: 76—82.
6 октября,	урок	15.	Умножение многозначного числа на однозначное, а также на 10, 100, 1000. Задачи: 82—90.
7 »	»	16.	Умножение многозначного числа на разрядное число, например 30, 500, 6000 и т. п. Задачи: 90—100.
9 »	»	17.	*Самостоятельная работа* Сложение и вычитание в пределе миллиона.
11 »	»	18.	*Самостоятельная работа.* То же, что на предыдущем уроке.

12	»	»	19. Умножение многозначного числа на двузначное. Задачи: 100—110.
13	»	»	20. Повторение умножения на разрядное число и на двузначное. Задачи: 110—120.
14	»	»	21. Умножение на трехзначное число. Задачи: 120—130.
16	»	»	22. Самостоятельная работа. Умножение многозначного числа на однозначное и на разрядное. Примеры умножения: 1—13.
18	»	»	23. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.
19	»	»	24. Умножение на многозначное число. Задачи: 130—137.

20	октября,	урок	25. Деление многозначного числа на 10, 100, 1000 и т. д. Задачи: 137—147.
23	»	»	26. Повторение деления трехзначного числа на однозначное и двузначное, например: на 2, 20, 21, 22.
25	»	»	27. Деление четырехзначного числа на двузначное, например: на 21, 22. Задачи: 147—155.
26	»	»	28. Самостоятельная работа. Умножение многозначного числа на двузначное. Примеры умножения: 13—28.
27	»	»	29. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.
28	»	»	30. Деление многозначного числа на двузначное и трехзначное, например: на 21, 210, 215. Задачи: 155—165.
30	»	»	31 Повторение деления, например: на 5, 50, 51, 52. Задачи 165—172.

1	ноября,	урок	32. Повторение деления, например на 52, 520, 525. Задачи: 172—180.
2	»	»	33. Самостоятельная работа. Деление на однозначное число и на 10, 1—12.
3	»	»	34. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.
4	»		35. Повторение деления, например: на 515, 516, 521. Задачи: 180—187.
6	»	»	36. Деление на такое двузначное число, в котором количество простых единиц составляет около половины десятка, например: на 25, 24, 26. Задачи: 187—194.
8	»	»	37. Деление на такое трехзначное число, в котором количество десятков составляет около половины сотни, например: на 251, 252, 261, 262. Задачи: 194—201.
9	»	»	38. Самостоятельная работа. Деление на двузначное число. Примеры: 12—24.
10	»	»	39. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.
11	»	»	40. Деление на такие числа, в которых следующий за высшим разряд составляет почти единицу высшего, например: на 19, 191. Задачи: 201—205.
13	»	»	41. Продолжение предыдущего урока. Деление на 28, 282. Задачи: 205—209.
15	»	»	42. Вычисления на счетах. Задачи: 209—215.
17	»	»	43. Самостоятельная работа. Деление на двузначное число. Примеры: с 24 по 35.

18	ноября,	урок	44. Задачи на все действия (смешение 2 веществ): 215—223.
20	»	»	45. Задачи на все действия (смешение нескольких веществ): 223—231.
23	»	»	46. Задачи на все действия (смешение при прибыли и убытке): 231—236.
24	»	»	47. Самостоятельная работа. Примеры на все действия, вып. III, стр. 38: 1 по 11. (Задачи на смешение).

25 » » 48. Задачи на все действия (по данному слагаемому и по отношению 2 слагаемых найти сумму): 236—243.
29 » » 49. Задачи на все действия (по сумме и отношению слагаемых найти слагаемые): 243—249.
30 » » 50. Задачи на все действия (по сумме нескольких слагаемых и отношению найти слагаемые): 249—255.
1 декабря, урок 51. Самостоятельная работа. Примеры на все действия. Задачи на все действия: 11—24.

---

2 декабря, урок 52. Образование и обозначение простейших дробей, например: $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^1/_6$, $^5/_6$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$. Задачи: 255—265.
4 » » 53. Доли пятые и десятые. Обращение крупных долей в мелкие и мелких в крупные, например: третьих в шестые, пятых в десятые и обратно. Задачи: 265—273.
7 декабря, урок 54. 4 действия над половинами, четвертками и восьмушками. Задачи: 273—283.
8 » » 55. Самостоятельная работа. Примеры на все действия и задачи: 24—33.
9 » » 56. Простейшие вычисления с долями третьими и шестыми, а также пятыми и десятыми.

---

11 декабря, урок 57. Решение задач приведением к общему числу (иначе к общему делителю, общей мере): 283—293.
13 » » 58. Продолжение предыдущего урока, задачи: 293—303.
14 » » 59. Самостоятельная работа. Примеры на все действия с целыми числами и простейшими долями, стр. 40; 33 по 44.
15 » » 60. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.
16 » » 61. Задачи на все действия.
18 » » 62. Задачи.
20 » » 63. Задачи.

2-е полугодие.

Составные именованные числа.

7 января, урок 64. Меры длины (повторение). Раздробление и превращение составных именованных чисел. Задачи: 370—380.
8 » » 65. Самостоятельная работа. Примеры на раздробление и превращение, стр. 43: 1—13. Задачи стр. 34: 334—340.

---

10 января, урок 66. Меры веса (повторение). Сложение и вычитание составных именованных чисел.
11 » » 67. Самостоятельная работа. Примеры на раздробление, превращение, сложение и вычитание составных именованных чисел.
12 » » 68. Самостоятельная работа. То же, что и на предыдущем уроке.

---

13 января, урок 69. Меры вместимости (повторение). Умножение составных именованных чисел.
15 » » 70. Задачи на умножение составных именованных чисел.
17 » » 71. Меры времени. Деление составных именованных чисел на части.
18 » » 72. Самостоятельная работа. Примеры на умножение составных именованных чисел.
19 » » 73. Самостоятельная работа. То же, что и на предыдущем уроке.

20 » » 74. Меры бумаги. Задачи на деление составных именованных чисел на части.
22 » » 75. Деление составных именованных чисел по содержанию.
24 » » 76. Задачи на деление по содержанию.
25 » » 77. Самостоятельная работа. Примеры деления составных именованных чисел на части.
26 января, урок 78. Самостоятельная работа. То же, что и на предыдущем уроке.
27 » » 79. Задачи на деление составных именованных чисел.
29 » » 80. Задачи на все действия.
31 » » 81. Задачи на все действия.
1 февраля, урок 82. Самостоятельная работа. Примеры деления составных именованных чисел по содержанию.

---

3 февраля, урок 83. Задачи на все действия.
5 » » 84. Задачи на все действия.
7 » » 85. Задачи на все действия.
10 » » 86. Задачи на все действия.
12 » » 87. Задачи на все действия.
14 » » 88. Задачи на все действия.
15 » » 89. Самостоятельная работа. Примеры на все действия.
16 » » 90. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.
21 » » 91. Задачи на все действия.
22 » » 92. Самостоятельная работа. Задачи на все действия.
23 » » 93. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.

---

24 февраля, урок 94. Понятие о треугольнике, четырехугольнике, прямоугольнике и квадрате. Расчленение данного прямоугольника на малые прямоугольники.
26 » » 95. Кв. вершок. Измерение площади прямоугольника. Кв. аршин, кв. фут, кв. дюйм. Числовые (единичные) отношения кв. мер.
28 » » 96. Измерение площади прямоугольника (повторение). Кв. сажень. Десятина. Задачи на кв. измерения.
29 » » 97. Практические упражнения в измерении площадей.
1 марта, урок 98. Самостоятельная работа. Примеры на кв. меры.
2 » » 99. Площади таких прямоугольников, стороны которых выражены различными мерами. Задачи.
4 » » 100. Даны площадь прямоугольника и ширина его, вычислить длину. Задачи. Площадь треугольника.
6 » 101. Задачи на все действия с квадратными мерами.
7 » » 102. Самостоятельная работа. Примеры на квадратные меры.
8 » » 103. Самостоятельная работа. То же, что на предыдущем уроке.

---

9 марта, урок 104. Куб. Куб. фут и куб. дюйм. Понятие о вместимости, или объеме. Измерение объемов при помощи куб. дюйма. Правило измерения. Число куб. дюймов в куб. футе.
11 » » 105. Куб. вершок, куб. аршин и куб. сажень. Число куб. вершков в куб. аршине и куб. аршин в куб. сажени. Измерение объема ящика, комнаты, печи и т. п.
13 » » 106. Решение задач на кубические измерения.
14 » » 107. Задачи на кубические измерения.
15 » » 108. Самостоятельная работа. Задачи на квадратные и кубические меры.

---

16 марта, урок 109. Устное решение задач на вычисление времени: вычисления в пределе часа, в пределе суток; переход из одних суток в другие; вычисления в пределе месяца, без перехода из одного месяца в другой. Число дней в каждом из 12 месяцев. Год простой и високосный. Задачи.

18 » » 110. Устное решение задач на вычисление времени: переход из одного месяца в другой; вычисления в пределе года. Задачи.

20 » » 111. Самостоятельная работа. Задачи на кубические меры.

21 » » 112. Решение задач на вычисление времени (время выражено в годах, месяцах и днях).

22 марта, урок 113. Вычисление девятого, сорокового и т. д. дня. Вычитание именованных чисел, выражающих время. Задачи.

23 » » 114. Определение промежутка времени в годах, месяцах и днях. Задачи.

27 » » 115. Самостоятельная работа. Задачи на вычисление времени.

---

28 марта, урок 116. Понятие о проценте. Задачи на проценты.

29 » » 117. Задачи на проценты.

30 » » 118. Обозначение десятичных долей.

В последующие уроки, начиная с 1 апреля, решены задачи до конца, а также повторено и дополнено пройденное за 3 года.

(Из «Методики арифметики», ч. III, изд. 1915 г., стр. 77—80.)

МЕТОДИКИ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РУКОВОДСТВА ПО НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКЕ.

	Автор	Название книги	Год издания
1.	Комиссия об устройстве народных училищ	Руководство для учителей I и II классов народных училищ.	1786 г.
2.	Буссе Ф. И.	Руководство к преподаванию арифметики.	1830 »
3.	Гурьев П. С.	Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям.	1839 »
4.	Семашко Ю.	Уроки практической арифметики	1852 »
5.	Ожаровский	Беседы с маленькими детьми о первых началах арифметики.	1853 »
6.	Паульсон И. И.	Арифметика по способу немецкого педагога Грубе.	1860 »
7.	Гурьев П. С.	Практическая арифметика.	1861 »
8.	Евтушевский В. А.	Методика арифметики.	1872 »
9.	Беме	Методика начальной арифметики.	1876 »
10.	Воленс	Методика арифметики.	1880 »
11.	Латышев В. А.	Руководство к преподаванию арифметики.	1881 »
12.	Гольденберг А. И.	Методика начальной арифметики.	
		Изд. 1	1885 »
		Изд. 25	1914 »
13.	Шохор-Троцкий С. И.	Методика арифметики.	1886 »
14.	Мартынов Д.	Учебник методики арифметики.	
		Изд. 4	1897 »
15.	Вишневский Г. М.	Записки по методике элементарной арифметики. Изд. 1	1892 »
		Изд. 23	1917 »
16.	Житков С. В.	Методика арифметики. Изд. 4	1894 »
		Изд. 11	1916 »
17.	Егоров Ф. И.	Методика арифметики.	1893 »
18.	Беллюстин В. К.	Методика арифметики в 4 частях.	1899 »
19.	Аржеников К. П.	Уроки начальной арифметики, методическое руководство для учителя.	1896 »
20.	Аржеников К. П.	Методика начальной арифметики.	1898 »
21.	Гольденберг А. И. (посмертное изданче, под ред. Волковского)	Беседы по счислению.	1906 »
22.	Галанин Д. Д.	Методика арифметики. Первый год обучения.	1910 »
	—	Второй год обучения. Введение в методику арифметики.	1911 »
23.	Мукалов К.	Записки по методике арифметики	1910 »
24.	Эрн Ф. А.	Очерки по методике арифметики.	1912 »