Г. БОЧКОВСКАЯ, А. Д. БРОННИКОВА, Ф. Н. НОВОСЕЛОВ,
Е. Н. ОТТО, Н. С. ПОПОВА, М. М. ЦИММЕРМАН

РЕШЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ I—IV КЛАССОВ

Под редакцией А. С. ПЧЕЛКО

Утверждено Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА—1949—ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *Б. И. Крельштейн.* Техн. редактор *М. Е. Зендель.*
Подписано к печати 29/III 1949 г. М-09113. Тираж 100 000 экз.
Уч.-изд. л. 12,87. Печ. л. 11. Зак. № 39.

2-я типография „Печатный Двор" им. А. М. Горького Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.

Е. И. Отто

КЛАССИФИКАЦИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Школа должна дать учащимся „точно очерченный круг систематизированных знаний". Построение занятий по арифметике, как и по другим предметам, проводится в определенной системе. Это положение относится и к обучению учащихся решению задач. Отсюда вытекает необходимость приведения задач в систему, иначе говоря, необходимость классифицировать их. Было много попыток классифицировать задачи, но, тем не менее, до сих пор мы не имеем единой системы в распределении задач. В настоящей статье мы предлагаем один из возможных вариантов этой системы.

В программах и в методиках задачи разделяются на типовые и нетиповые, причем указывается, что типовые задачи — это задачи, решаемые особыми приемами. Если появляется необходимость классифицировать какие-либо понятия или предметы, то все эти понятия или предметы разбиваются на определенные виды, отличающиеся друг от друга особыми признаками. Таким же образом и все задачи могут быть подразделены на группы, которые можно назвать типами или видами задач.

Приведение задач в систему и последовательное изучение видов задач имеет большое значение для привития учащимся уменья решать задачи. При изучении отдельных видов задач учащиеся знакомятся с различными приемами их решения и таким образом расширяют свой математический кругозор в области применения теоретических знаний к решению задач. По мере изучения видов задач у учащихся происходит накопление различных способов решения задач. Эти способы применяются при решении составных задач в III, IV, V и VI классах и таким образом закрепляются в сознании учащихся.

Задачи должны быть подразделены на виды. Встает вопрос — что положить в основу этой классификации. Вопрос о классификации задач ставился и в дореволюционное время: о нем говорится в методиках арифметики Арженикова, Евтушевского, Гольденберга. В советское время над вопросом классификации задач работали Н. Н. Кавун, Н. С. Попова, Н. Н. Никитин, Г. Б. Поляк, А. С. Пчелко, Е. С. Березанская и др. Эти методисты не расходились между собой по существу классификации задач. В дореволюционное время наиболее подробно обосновал свою точку зрения И. И. Александров, который изложил ее в своей книге „Методы решения арифметических задач" (7-е изд. 1915 г.). В своем предисловии к этой книге И. И. Александров пишет:„...я указывал, что нелепо делить арифметические задачи по рубрикам смешения, процентов и т. п., что в основание классификации задач надо положить не предметы, о которых говорит задача, а те идеи, которые направляют решение, что тип задачи зависит лишь от той математической зависимости между искомыми и данными, которая определяет тот или другой способ решения".

Беря за основу точку зрения И. И. Александрова, арифметические задачи, которые проходятся в школе, можно подразделить на два больших раздела: а) нетиповые и б) типовые задачи.

Каждый из этих разделов, в свою очередь, подразделяется на отдельные виды задач. Рассмотрим задачи каждого раздела в отдельности.

а) НЕТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

К задачам нетиповым относятся все задачи, для решения которых надо знать зависимости между величинами, уметь правильно применять арифметические действия и знать зависимость между прямыми и обратными действиями; никаких особых приемов здесь не применяется.

Правильное использование четырех арифметических действий для решения простых задач изучается в I и II классах. Учителя в этих классах должны строить свою работу так, чтобы учащиеся в конце первого полугодия II класса безошибочно находили действие, которое нужно произвести для решения того или иного вопроса. Для того, чтобы этого достигнуть, надо ознакомить учащихся с одиннадцатью видами простых задач.

Рассмотрим основные случаи применения действий. Подтвердим каждый случай применения соответствующей задачей.

Сложение. Уравнение: $y = a + b$. Сложение применяется при решении задач двух видов:

1. Нахождение суммы, например:

Девочка нашла под одним деревом 3 яблока, под другим — 5 яблок. Сколько всего яблок нашла девочка?

2. Увеличение числа на несколько единиц, например:

Один чемодан весит 9 *кг*, другой на 8 *кг* больше. Сколько килограммов весит второй чемодан?

Вычитание. Уравнение $y = a - b$. Вычитание применяется при решении задач трех видов:

3. Нахождение остатка, например:

В гавани стояло 5 пароходов; 2 парохода ушли в море. Сколько пароходов осталось в гавани?

4. Уменьшение числа на несколько единиц, например:

Лыжи стоят 12 руб., коньки на 3 руб. дешевле. Сколько стоят коньки?

5. Нахождение разности, например:

Купили две линейки. Длина одной из них 40 *см*, длина другой 25 *см*. На сколько сантиметров вторая линейка короче первой?

Умножение. Уравнение $y = ab$. Умножение применяется при решении задач двух видов:

6. Нахождение суммы равных слагаемых, например:

Купили 5 *кг* макарон по 3 руб. за килограмм. Сколько денег заплатили за всю покупку?

7. Увеличение числа в несколько раз, например:

В одном мешке 7 *кг* муки, в другом в 4 раза больше. Сколько килограммов муки во втором мешке?

Деление. Уравнение $y = \frac{a}{b}$. Деление применяется при решении следующих видов задач:

8. Деление по содержанию, например:

Тетрадь стоит 10 коп. Сколько тетрадей можно купить на 90 копеек?

9. Сюда же могут быть отнесены задачи на так называемое кратное сравнение, например:

В коробке 5 черных и 10 цветных карандашей. Во сколько раз цветных карандашей больше, чем черных?

10. Деление на равные части, например:

Проволоку длиной в 32 *м* разрезали на 4 равные части. Сколько метров в каждой части?

11. К задачам на деление на равные части следует отнести задачи на уменьшение числа в несколько раз, например:

Тушь стоит 60 коп., краска в 6 раз дешевле. Сколько стоит краска?

В начале изучения этих видов задач на применение действий решаются задачи в одно действие, т. е. простые задачи. Когда учащиеся хорошо усвоят хотя бы два-три вида, следует еще в I классе перейти к задачам в два действия, т. е. к составным задачам.

Если задачи в несколько действий требуют для своего решения только знания зависимости между величинами и умения применить действия, то такие задачи являются тоже нетиповыми задачами.

Примеры нетиповых задач

1. К половине разности чисел 2428 и 2080 прибавить $^3/_4$ суммы их и полученный результат разделить на 4. Сколько получится?

2. Магазин получил 1456 *кг* товара по 3 руб. за килограмм. При перевозке четверть товара испортилась. Сколько убытку потерпел магазин?

Решение таких задач полезно, так как, решая их, учащиеся все время тренируются в применении действий. Учащиеся III, IV классов могут их решать вполне самостоятельно.

К нетиповым задачам могут быть отнесены задачи, которые решаются на основе зависимости между прямыми и обратными действиями. Н. Н. Александров называет их задачами, решаемыми с помощью метода обратности. К такого рода задачам относятся задачи на нахождение задуманных чисел. Примеры таких задач:

1. Задумано число. Если его увеличить в 3 раза, к результату прибавить 72 и все, что получится, разделить на 6, то получится 125. Найти число.

Объяснение решения:

$125 \times 6 = 750$, так как делимое равно частному, умноженному на делитель.

$750 - 72 = 678$, так как искомое слагаемое равно сумме без данного слагаемого.

$678:3=226$, так как искомый множитель равен произведению, деленному на данный множитель.

Такую задачу можно дать учащимся IV класса.

Приведем пример более сложной задачи, решаемой методом обратности:

Крестьянка принесла на рынок несколько яиц. Одному покупателю она дала половину того, что имела, и еще $^1/_2$ яйца, второму половину того, что у нее осталось, и еще $^1/_2$ яйца, третьему половину нового остатка и еще $^1/_2$ яйца, наконец, четвертому половину того, что осталось от прежней продажи, и еще $^1/_2$ яйца. После последней продажи у нее ничего не осталось. Сколько она принесла яиц?

Объяснение решения: $^1/_2$ яйца составляет половину последнего остатка. Следовательно последний остаток равен одному яйцу. Четвертый получил весь этот остаток, т. е. одно яйцо. Третий получил $^1/_2$ второго остатка и еще $^1/_2$ яйца. Значит, $^1/_2$ второго остатка составляет $^1/_2$ яйца и еще одно целое яйцо, которое получил четвертый. Таким образом $^1/_2$ второго остатка составляет $1^1/_2$ яйца, и весь второй остаток равняется 3 яйцам. Второй получил $^1/_2$ первого остатка и еще $^1/_2$ яйца; после этого осталось еще 3 яйца. Отсюда $^1/_2$ первого остатка составляет $3^1/_2$ яйца, а весь первый остаток равен 7 яйцам. Теперь можно узнать, сколько всего было яиц. Первый получил $^1/_2$ всего числа яиц и еще $^1/_2$ яйца; после чего осталось 7 яиц. Значит, половина всего числа яиц составляет $7^1/_2$ яиц, а все число яиц равно 15.

Эти задачи могут быть решены и другими способами. Выбираем этот прием, так как он характерен для метода обратности.

Наблюдения показывают, что иногда учащиеся сами додумываются до метода обратности.

Заканчивая рассмотрение нетиповых задач, систематизируем их в табл. 1 (см. стр. 8).

б) ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

В состав данного раздела входят следующие типы задач:

I. Задачи на нахождение четвертого пропорционального данным трем числам (тройное правило).

II. Задачи на нахождение чисел по результатам действий.

III. Задачи на движение.

IV. Задачи на пропорциональное деление.

V. Задачи на исключение неизвестного.

VI. Метод средних арифметических.

Уравнение	Методы решения	Методическая зависимость между искомыми и данными	Характер задач	Классы
$y = a + b$	Сложение	1. Нахождение суммы	Простые и составные задачи	I
		2. Увеличение числа на несколько единиц		I
$y = a - b$	Вычитание	1. Нахождение остатка		I
		2. Уменьшение числа на несколько единиц		I
		3. Нахождение разности		
$y = ab$	Умножение	1. Нахождение суммы равных слагаемых		I
$y = abc$		2. Увеличение числа в несколько раз		II
		3. Нахождение дроби от данного числа		II
$b = \frac{a}{b}$	Деление	1. Деление по содержанию		II
		Кратное сравнение		II
		2. Деление на равные части		I
		Уменьшение числа в несколько раз		II
		3. Нахождение числа по данной его части		IV
		Зависимости ясны и основаны на применении действий		I—IV
	Метод обратности	Зависимость между прямыми и обратными действиями		III—IV

I. Нахождение четвертого пропорционального данным трем числам

Соответствующее уравнение: $y = \frac{ab}{c}$.

Нахождение четвертого пропорционального данным трем числам решается в начальной школе тремя методами:

1. Методом приведения к единице.
2. Методом отношений.
3. Методом обратного приведения к единице.

Во II классе начинается решение задач методом приведения к единице.

В III классе решаются задачи методом отношений и методом обратного приведения к единице.

Этот вид задач называют иногда простым тройным правилом, так как в содержание задачи входят три числа, а ищется четвертое, им пропорциональное. Слово „простое" прибавляется, чтобы отличить эти задачи от задач на сложное тройное правило, о которых будем говорить дальше.

В этих задачах имеет место прямо-пропорциональная и обратно-пропорциональная зависимости между искомыми и данными.

Метод приведения к единице

Возьмем задачу с прямо-пропорциональной зависимостью между искомыми и данными и дадим ее решение методом приведения к единице.

З а д а ч а. На шитье 12 костюмов пошло 48 *м* материи. Сколько метров материи нужно, чтобы сшить 30 таких же костюмов?

При решении этой задачи методом приведения к единице учащиеся могут дать, примерно, такое объяснение:

Прежде всего надо узнать, сколько метров материи идет на шитье одного костюма; для этого надо 48 *м* разделить на 12, получится в частном 4 *м*. Затем надо узнать, сколько метров материи пойдет на шитье 30 костюмов; для этого надо 4 *м* помножить на 30.

Этот метод называется методом приведения к единице, так как, пользуясь им, мы находим значение величины длины, веса и т. д. сначала по отношению к одному предмету, а затем уже по отношению к заданному числу предметов.

Возьмем задачу с обратно-пропорциональной зависимостью между искомыми и данными и тоже решим ее методом приведения к единице.

З а д а ч а. За провоз 39 *кг* товара на расстоянии 74 *км* заплатили некоторую сумму денег. Ту же сумму денег заплатили за провоз 26 *кг* товара, но на другом расстоянии. Найти это расстояние.

Объяснение решения этой задачи может быть примерно следующее:

Прежде всего надо найти расстояние, на которое можно было бы провезти 1 *кг* товара при уплате за его провоз той же суммы денег. Это расстояние, очевидно, будет больше 74 *км* во столько раз, во сколько раз 39 *кг* больше 1 *кг*. Чтобы его узнать, умножаем 74 *км* на 39, получаем 2886 *км*. В задаче требуется узнать, на какое расстояние за ту же сумму денег можно провезти не 1 *кг* товару, а 26 *кг*. Очевидно, что 26 *кг* товару можно провезти на расстояние, в 26 раз меньшее. Чтобы его узнать, надо 2886 *км* разделить на 26, получаем 111 *км*.

Метод отношений

Нахождение четвертого пропорционального трем данным числам методом отношений начинают изучать в III классе.

Задается задача, в которой для решения ее методом приведения к единице надо делить одно число на другое, причем при делении получается остаток, например:

На токарном станке за 3 часа нарезали 56 болтов. Сколько болтов нарежут на этом же станке за 12 час.?

Зависимость между искомыми и данными прямо-пропорциональная.

Учащиеся, зная метод приведения к единице, начинают делить 56 болтов на 3 равные части и получают в результате деления остаток. Учитель предлагает учащимся применить другой метод решения, причем рассуждает так:

Если за 3 часа можно нарезать 56 болтов, то за 12 час. можно нарезать болтов в 4 раза больше, так как 12 час. больше 3 час. в 4 раза. Решение задачи имеет такой вид:

1) 12 час. : 3 часа = 4;

2) 56 болтов $\times$ 4 = 224 болта.

Метод обратного приведения к единице

Приведем пример задачи:

На 12 костюмов требуется 48 *м* материи. На сколько костюмов израсходовано 60 *м* материи?

12 костюмов	— 48 *м*	*Решение:*
x	— 60 *м*	48 *м* : 12 = 4 *м*; 60 *м* : 4 *м* = 15.

Ответ: 15 костюмов.

Сравним эту задачу с задачей, которая решается методом приведения к единице:

На 12 костюмов требуется 48 *м* материи. Сколько метров материи пойдет на 15 костюмов?

12 костюмов — 48 *м*	48 *м* : 12 = 4 *м*
15 костюмов — x	4 *м* $\times$ 15 = 60 *м*

Первая задача решается с помощью двух делений, а вторая — с помощью деления и умножения.

В первой задаче к единице приводится число, соответствующее неизвестному; во второй задаче к единице приводится число, не соответствующее неизвестному.

Объяснение к первой задаче: Если на 12 костюмов пошло 48 *м*, то на 1 костюм пойдет в 12 раз меньше; 48 *м* : 12 = 4 *м*. Костюмов будет столько, сколько раз 4 *м* содержится в 60 *м*. 60 *м* : 4 *м* = 15. Ответ: 15 костюмов.

Сложное тройное правило

Задачи на нахождение четвертого пропорционального данным трем числам называются часто, как уже было сказано, задачами на простое тройное правило. Во всех задачах на простое тройное правило мы имеем две величины; например, в последней задаче мы имели число рабочих и время; обе эти величины находятся или в прямой или в обратной пропорциональной зависимости по отношению друг к другу.

Если в условие задачи входит не две прямо-пропорциональных или обратно-пропорциональных величины, а несколько, причем каждая имеет два соответственных значения и одно из всех значений неизвестно, то такие задачи называются задачами на сложное тройное правило.

При решении этих задач обыкновенно применяется или метод приведения к единице или метод пропорций.

Рассмотрим решение задач на сложное тройное правило, применяя метод приведения к единице.

З а д а ч а. Для 6 лошадей на 30 дней запасли 9 *ц* овса. Сколько овса надо запасти для 12 лошадей на 18 дней, исходя из той же нормы?

Решение методом приведения к единице.

6 лош. — 30 дн. — 900 *кг* овса;
12 лош. — 18 дн. — x;

$$x = \frac{\overset{\overset{5}{30}}{900} \cdot 12 \cdot 18}{\underset{1}{6} \cdot \underset{1}{30}} = 1080 \text{ кг}.$$

О т в е т: 10 *ц* 80 *кг*.

Объяснение решения. Для 6 лошадей на 30 дней требовалось 900 *кг* овса. Для одной лошади на 30 дней потребуется овса в 6 раз меньше $\left(\frac{900}{6}\right)$; для 12 лошадей потребуется овса в 12 раз больше $\left(\frac{900 \cdot 12}{6}\right)$. Столько овса потребуется для 12 лошадей в 30 дней, а в один день на те же 12 лошадей овса понадобится в 30 раз меньше, т. е. $\frac{900 \cdot 12}{6 \cdot 30}$ *ц*. Столько овса надо в 30 дней на 12 лошадей из расчета на один день, а на 18 дней овса понадобится в 18 раз больше или $\frac{900 \cdot 12 \cdot 18}{6 \cdot 30}$ *кг*.

Задачи на сложное тройное правило методом приведения к единице решаются в IV классе.

Задачи на сложное тройное правило методом пропорций решаются только в VI классе после изучения пропорций.

По образцу систематизации задач на применение действий дадим систематизацию задач и на нахождение четвертого пропорционального данным трем числам в табл. 2.

II. Нахождение чисел по результатам действий

К этим задачам относятся следующие:

1. Нахождение чисел по их сумме и разности.
2. Нахождение чисел по их сумме и отношению.
3. Нахождение чисел по их разности и отношению.
4. Нахождение чисел по двум остаткам или двум разностям.
5. Нахождение чисел по трем суммам этих чисел.

Во всех этих задачах для решения их приходится производить действие деления, а потому в задачниках и методиках некоторые из них иногда называют делением с добавлением признаков, характеризующих это деление; например: 1-й вид задач — нахождение чисел по их сумме и разности называют делением в разностном отношении или делением на разностно-неравные части. 2-й вид задач — нахождение чисел по их сумме и отношению носит название деления в кратном отношении или деления на кратно-неравные части.

Нахождение чисел по их сумме и разности

Соответствующая система уравнений:

$$x + y = a;$$
$$x - y = b.$$

ТАБЛИЦА 2

Уравнения	Методы решения	Математическая зависимость между искомыми и данными	Принятые названия указанных видов задач	Класс
$y=\frac{ab}{c}$	Метод приведения к единице	Нахождение четвертого пропорционального данным трем числам	Простое тройное правило	Начиная со II класса
	Метод обратного приведения к единице	Рассматриваются две величины, зависимость между которыми прямо или обратно-пропорциональная	—	Начиная со II класса
	Метод отношений			Начиная с III класса
$y=\frac{abc}{ae}$	Метод приведения к единице	Рассматриваются три величины и более	Сложное тройное правило	В IV, V классе
$y=\frac{abc}{efg}$				

Решение в общем виде.

Вычитаем второе уравнение из первого и получаем:

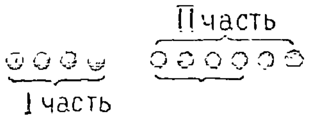
$$2y = a - b;$$
$$y = \frac{a-b}{2};$$
$$x = \frac{a-b}{2} + b.$$

Решаем таким приемом, который соответствовал бы арифметическому решению.

В III классе учащимся предлагаются задачи такого рода: Разделить 12 на две части так, чтобы одна часть была на 2 больше другой.

Решение первой такой задачи может быть объяснено учащимся на дидактическом материале. Для этого могут быть использованы кружки, квадраты, вырезанные из картона или начерченные на доске и в тетрадях.

Учитель предлагает учащимся начертить 10 кружков в тетрадях, а сам чертит их на доске. После этого он дает задание — разделить эти кружки на две части так, чтобы в одной части было на 2 кружка больше, чем в другой. Затем он предлагает выделить из большей части меньшую.



Получается две меньших части и два кружка. Отсюда вытекает и метод решения: отнимаем от суммы (10) разность (2) и полученный результат делим на 2. Находим меньшую часть. Чтобы найти большую часть, надо к меньшей прибавить разность (2). Такой метод решения соответствует и вышеприведенному алгебраическому решению.

Можно решить эту задачу, прибавив к сумме разность; тогда получим удвоенное большее число. Разделив его на 2, получим большее число; отняв разность, найдем меньшее число.

Этот метод решения соответствует алгебраическому решению:

$$+\begin{cases} x+y=a; \\ x-y=b; \end{cases} \quad 2x=a+b; \quad x=\frac{a+b}{2}; \quad y=\frac{a+b}{2}-b.$$

После достаточной тренировки в решении задач с двумя неизвестными числами можно перейти к задачам с большим числом неизвестных чисел.

Пример задачи с двумя неизвестными числами:

Задача № 402 (из сборника задач Е. С. Березанской). Кусок полотна в 104 *м* надо разделить на 2 такие части, чтобы в первой было на 16 *м* больше, чем во второй. По сколько метров полотна будет в каждой части?

Решение.

$104\ м - 16\ м = 88\ м$;
$88\ м : 2 = 44\ м$ (меньшая часть);
$44\ м + 16\ м = 60\ м$ (большая часть).

Примером задачи на нахождение большего числа неизвестных чисел может служить задача № 406 (из сборника задач Е. С. Березанской).

Три куска гранита весят вместе 156 *кг*. Первый кусок на 18 *кг* тяжелее второго, а второй на 15 *кг* легче третьего. Сколько весит каждый кусок гранита?

Решение и объяснение. Самый легкий кусок — второй. Обозначим его вес через x. Тогда первый кусок будет весить $x+18$, а третий кусок $x+15$. Вес всех трех кусков составит $3x+33$. Чтобы найти $3x$, надо из 156 *кг* вычесть 33 *кг*, получится 123 *кг*. Если $3x$ составляют по весу 123 *кг*, то один x составит 123 *кг* : 3 = 41 *кг*. Мы узнали вес второго куска. Чтобы найти вес первого, надо к 41 *кг* прибавить 18 *кг*, получим 59 *кг*, а чтобы найти вес третьего, надо к 41 *кг* прибавить 15 *кг*, получим 56 *кг*.

Проверим: сложив 41 *кг*, 59 *кг* и 56 *кг*, получим 156 *кг*.

К этим задачам следует отнести задачи, которые иногда называют задачами на перекладывание, например: у меня 12 руб. в двух кошельках. Если я переложу из одного кошелька в другой 2 руб., то в обоих кошельках будет денег поровну. Сколько денег в каждом кошельке?

Учащиеся додумываются до решения этой задачи после таких, примерно, рассуждений: после перекладывания в каждом кошельке получится по 6 руб. Отнимем 2 руб. от денег из того кошелька, в который только что положили 2 руб., останется 4 руб. Значит, в нем было 4 руб. Всего в двух кошельках 12 руб. Вычтем 4 руб. из 12 руб., получим 8 руб. Столько денег было в другом кошельке. Необходимо обратить внимание учеников на то, что до перекладывания во втором кошельке было на 4 руб. больше, чем в первом, т. е. разность между количеством денег в обоих кошельках была в 2 раза больше перекладываемой суммы денег. Этим знанием можно пользоваться при решении аналогичных задач.

К задачам на нахождение чисел по их сумме и разности надо отнести задачи на определение скорости течения реки, если известны скорость движения по течению и против течения. Пример такой задачи.

Расстояние между двумя пристанями A и B — 36 *км*. Лодка плыла по течению от A до B и проплыла все расстояние в 4 часа. Обратный путь от B до A лодка проплыла в 12 час. Определить скорость течения реки.

Решение.

$$36 \text{ км} : 4 = 9 \text{ км};$$
$$36 \text{ км} : 12 = 3 \text{ км};$$
$$9 \text{ км} - 3 \text{ км} = 6 \text{ км};$$
$$6 \text{ км} : 2 = 3 \text{ км}.$$

Ответ: Скорость течения реки — 3 *км* в 1 час.

Нахождение чисел по их сумме и отношению

Система уравнений: $\begin{cases} x + y = a; \\ \dfrac{x}{y} = b. \end{cases}$

Решение в общем виде.

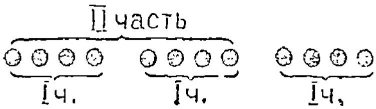
$$x = by;$$
$$by + y = a; \; y(b + 1) = a;$$
$$y = \frac{a}{b+1};$$
$$x = \frac{ab}{b+1}.$$

По программе решение таких задач впервые дается учащимся III класса. Первые задачи должны быть легкими; объяснения могут сопровождаться применением дидактического материала.

Приведем пример:

12 разделить на 2 части так, чтобы одна часть была вдвое больше другой.

Можно снова воспользоваться кружочками. Делим 12 на 3 равные части, получаем меньшую часть. Чтобы получить большую часть, умножаем меньшую часть на 2. Решение соответствует алгебраическому решению.



В дальнейшем курсе задачи усложняются. Примером такой задачи может служить задача № 425 из сборника задач Е. С. Березанской.

На заводе в трех цехах вместе работают 624 человека. В первом цехе в 5 раз больше рабочих, чем во втором, а в третьем столько рабочих, сколько в первых двух цехах вместе. Сколько рабочих в каждом цехе?

Решение и объяснение. Предположим, что число рабочих во втором цехе составляло x, тогда в первом цехе рабочих будет $5x$, а в третьем $x+5x$, т. е. $6x$. Во всех трех цехах число рабочих равно $x+5x+6x=12x$. Таким образом 624 рабочих составляют $12x$. Один x равняется 624 раб. : 12 = = 52 раб.; $5x$ составляют 52 раб. · 5 = 260 раб. и $6x$ составляют 52 раб. · 6 = 312 раб. Для проверки складываем 52 раб. + + 260 раб. + 312 раб. = 624 раб.

Нахождение чисел по их разности и отношению

$$\begin{cases} x-y=a. \\ \dfrac{x}{y}=b. \end{cases}$$

Решение в общем виде:

$$x=by; \qquad y=\frac{a}{b-1};$$

$$by-y=a;$$

$$y(b-1)=a; \qquad x=\frac{a}{b-1}\cdot b.$$

Пример задачи. Разность между двумя числами равна 3, и частное между теми же числами равно 2. Найти числа.

Такой вид задач может быть дан учащимся IV класса. Учащиеся этого класса должны знать, что, если разность между числами равна 3, то это значит, что первое число на 3 единицы больше второго. Также они должны знать, что, если частное двух чисел равно 2, то это значит, что первое число в 2 раза больше второго, т. е. первое число равно двум таким же числам, как второе. Таким образом, если из первого числа вычесть второе число, то результат будет равен второму числу или 3 единицам. Отсюда второе число равно 3, а первое, которое в 2 раза больше, равно 6.

К этому же виду задач надо отнести нахождение двух чисел по их отношению и постоянной разности.

Пример задачи. Отец старше сына на 23 года. Сколько лет тому назад отец был вдвое старше сына, если в настоящее время отцу 56 лет?

Решение и объяснение. Разность между летами отца и сына постоянна, так как она все время равна 23 годам.

Когда отец был вдвое старше сына, разность была та же самая — 23 года. Значит, отцу в это время было 46 лет, а сыну 23 года. В настоящее время отцу 56 лет. Делаем заключение, что отец был вдвое старше сына 10 лет тому назад.

Соответствующее уравнение:

$$ax - bx = c - d$$

Решение в общем виде:

$$x(a - b) = c - d;$$
$$x = \frac{c - d}{a - b}.$$

Примеры задач: 1) В магазине были два ящика одинаковых конфет: в одном 8 *кг*, в другом 12 *кг*. Второй ящик стоил на 32 руб. дороже первого. Сколько стоит 1 *кг* этих конфет?

Решение.

12 *кг* — 8 *кг* = 4 *кг*;
32 руб. : 4 = 8 руб.

2) 30 *м* полотна стоят на 14 руб. дороже, чем 40 *м* ситца, но эти же 30 *м* полотна стоят на 14 руб. дешевле, чем 50 *м* ситца. Сколько стоит 1 *м* полотна?

Решение.

1) 50 *м* — 40 *м* = 10 *м*;
2) 14 руб. + 14 руб. = 28 руб.;
3) 28 руб. : 10 = 2 р. 80 коп.;
4) 2 руб. 80 коп. · 40 = 112 руб.;
5) 112 руб. + 14 руб. = 126 руб.;
6) 126 руб. : 30 = 4 руб. 20 коп.

Объяснение решения. Сперва мы сравниваем стоимость 30 *м* полотна и 40 *м* ситца. В задаче сказано, что 30 *м* полотна на 14 руб. дороже 40 *м* ситца, иначе говоря, 30 *м* полотна стоят столько же, сколько 40 *м* ситца + 14 руб. Эти же 30 *м* полотна на 14 руб. дешевле 50 *м* ситца, т. е. стоимость 30 *м* полотна равна стоимости 50 *м* ситца без 14 руб. Здесь мы сравниваем стоимость 30 *м* полотна с 50 *м* ситца. Ситца в первом случае было 40 *м*, а во втором 50 *м*, т. е. на 10 *м* больше. Стоимость же увеличилась на 28 руб. (14 руб. + 14 руб.). Значит, 10 *м* ситца стоят 28 руб., а 1 *м* стоит 28 руб. : 10 = 2 руб. 80 коп. Дальше узнаем, сколько стоят 40 *м* ситца. 2,8 руб. · 40 = 112 руб. Чтобы узнать стоимость полотна, надо к 112 руб. прибавить 14 руб., получим 126 руб. Если 30 *м* полотна стоят 126 руб., то 1 *м* полотна стоит в 30 раз меньше. Делим 126 руб. на 30, получаем, что 1 *м* полотна стоит 4 руб. 20 коп.

Нахождение трех чисел по трем суммам этих чисел, взятых попарно

Соответствующая система уравнений:

$$x+y=a;$$
$$y+z=b;$$
$$x+z=c.$$

Решение в общем виде.

$$\begin{array}{lll} x+y=a & x-z=a-b & \\ \underline{y+z=b} & \underline{x+z=c} & x=\dfrac{a-b+c}{2} \\ x-z=a-b & 2x=a-b+c & \end{array}$$

Пример задачи: Поросенок и гусь стоят 116 руб. Гусь и утка стоят 46 руб. Поросенок и утка стоят 90 руб. Сколько стоят отдельно поросенок, гусь и утка?

1-й способ решения.

1) 116 руб. — 46 руб. = 70 руб.;
2) 90 руб. — 70 руб. = 20 руб.;
3) 20 руб. : 2 руб. = 10 руб.;
4) 90 руб. — 10 руб. = 80 руб.;
5) 46 руб. — 10 руб. = 36 руб.

2-й способ решения.

116 руб. + 46 руб. + 90 руб. = 252 руб.
252 руб. : 2 = 126 руб.;
126 руб. — 116 руб. = 10 руб.;
(стоимость утки)
126 руб. — 90 руб. = 36 руб.;
(стоимость гуся)
90 руб. — 10 руб. = 80 руб.
(стоимость поросенка)

III. Задачи на движение

Прежде чем переходить к рассмотрению этих задач, надо сказать несколько слов по поводу самого названия „задачи на движение". В этой статье мы придерживались при названии отдельных видов задач принципа математической зависи-

ТАБЛИЦА 3

Уравнение	Методы решения	Математическая зависимость между искомыми и данными	Принятые названия этих видов задач	Класс
$x+y=a$ $x-y=b$	$y=\frac{a-b}{2}$	1) Нахождение чисел по сумме и разности	Деление в разностном отношении или деление на разностно-неравные части	III—IV
$\begin{cases} x+y=a \\ \frac{x}{y}=b \end{cases}$	$y=\frac{a}{b+1}$	2) Нахождение чисел по их сумме и отношению	Деление в кратном отношении или деление на кратно-неравные части	III—IV
$x(a-b)=c$ $\begin{cases} x-y=a \\ \frac{x}{y}=b \end{cases}$		3) Нахождение чисел по их разности и отношению	—	IV
$ax-bc=c-d$	$x(a-b)=c-d$ $x=\frac{c-d}{x-b}$	1) Нахождение двух чисел по двум остаткам или двум разностям	—	III—IV
$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$	$x=\frac{a-b+c}{2}$	5) Нахождение трех чисел по трем суммам этих чисел, взятых попарно	—	III—IV

мости между искомыми и данными или метода решения. В данном названии мы от этого принципа отступаем и даем название, относящееся к содержанию задачи. Поступаем мы так ввиду таких соображений: название „задачи на движение“ кратко и весьма ясно, имеет историческую давность, помещено в программах. Можно было бы отнести эти задачи к задачам на „нахождение чисел по результатам действий“, дав им такое название: „нахождение чисел по произведению и одному из сомножителей, причем один из сомножителей представляет собой сумму данных чисел или сумму данного числа и искомого“, но такое название очень громоздко, а потому мы от него отказываемся.

Задачи на движение могут быть подразделены на задачи на встречное движение и на задачи на движение в одном направлении.

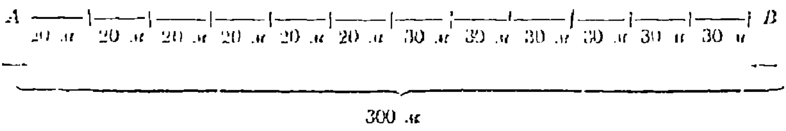
Задачи на встречное движение

Этим задачам соответствует уравнение $(v_1 + v_2)\,t = s$, где s — расстояние между начальными точками движения, v_1 и v_2 — скорости движущихся тел, t — время движения. В данном уравнении имеются 4 обозначения величин, а следовательно, оно дает возможность решать 4 вида задач, в которых одна из величин является искомой, а остальные 3 данными.

I. Дано s; v_1; v_2. Найти t.

Задача. Из A и B навстречу друг другу движутся два тела. Скорость первого тела равна 20 *м* в секунду, скорость второго равна 30 *м* в секунду. Расстояние от A до B — 300 *м*. Оба тела начали движение одновременно. Через сколько секунд они встретятся?

Особенность задач на движение заключается, между прочим, в том, что для своего анализа они требуют чертежа. Приведем чертеж, который может быть дан при решении указанной задачи:



Аналогичные чертежи выполняются и при решении задач на движение, особенно в начале изучения этих видов. Приведем пример задачи этого же вида.

Два туриста отправились одновременно навстречу друг другу, один из базы A, другой из базы B. Первый в час проходил по 5 *км*, а второй в час по 4 *км*. Через сколько времени встретятся туристы, если расстояние между базами A и B равно 54 *км*?

Решение.

1) 5 *км* + 4 *км* = 9 *км*; 2) 54 *км* : 9 *км* = 6.

Ответ: 6 час.

При изучении этих задач учащиеся должны усвоить, что расстояние между движущимися телами навстречу друг другу уменьшается на сумму скоростей этих тел в единицу времени. В III классе, где впервые начинается изучение таких задач, объяснение их вызывает затруднение; устранению этих затруднений помогает применение наглядных пособий. Одним из таких пособий является прямоугольник из картона, изображающий путь движения; на нем намечены точки отправления и конца пути и сделаны прорезы для движущихся, вырезанных из картона фигур (поездов, велосипедов, лошадей и т. п.).

Переходим к следующим видам задач на движение.

II. Дано: s; v_1; t. Найти v_2.

Задачи: 1) Из A и B начали одновременно двигаться навстречу друг другу два тела. Первое двигалось со скоростью 20 *м* в секунду. Расстояние между ними — 600 *м*. Определить скорость второго тела, если тела встретились через 12 сек.?

Решение.

1) 20 *м* · 12 = 240 *м*; 3) 360 *м* : 12 = 30 *м*.

2) 600 *м* — 240 *м* = 360 *м*; Ответ: 30 *м* в секунду.

Объяснение. Скорость первого тела — 20 *м* в секунду. Тела встретились через 12 сек. Первое тело за это время прошло 240 *м* (20 *м* · 12). Второе тело должно было за это время пройти 360 *м* (600 *м* — 240 *м*). Если за 12 сек. оно пройдет 360 *м*, то в 1 сек. оно пройдет 30 *м* (360 *м* : 12).

2) Пример задачи из сборника задач Е. С. Березанской № 389.

Из двух мест, расстояние между которыми 243 *км*, выехали одновременно навстречу друг другу 2 велосипедиста, из которых один проезжал в среднем по 13 *км* в 1 час. По сколько километров в 1 час делал другой, если известно, что они встретились через 9 час. после выезда?

Решение.

1) 13 *км* · 9 = 117 *км*; 3) 126 *км* : 9 = 14 *км*.

2) 243 *км* − 117 *км* = 126 *км*; Ответ: 14 *км* в 1 час.

Объяснение такое же, как и в предыдущей задаче.

III. Дано: s; v_2; t. Найти v_1.

Задача, аналогичная 2-й.

IV. Дано: v_1; v_2; t. Найти s.

Задачи: 1) Из A в B начали одновременно двигаться навстречу друг другу два тела. Первое двигалось со скоростью 20 *м* в секунду, второе — 30 *м* в секунду. Они встретились через 12 сек. Какое расстояние между A и B?

Решение с объяснением. Если скорость первого тела 20 *м* в секунду, а второго 30 *м* в секунду, то каждую секунду оба тела приближаются друг к другу на 50 *м* (20 *м* + 30 *м*). Они встретились через 12 сек., значит, расстояние между ними в начале движения было 600 *м* (50 *м* · 12).

2) Из двух пунктов вышли одновременно навстречу друг другу два автобуса. Один шел со скоростью 20 *км*, другой — 19 *км* в час. Они встретились через 3 часа. Определить расстояние между этими пунктами.

Решение и объяснение аналогично предыдущей задаче.

Задачи на движение в одном направлении

В этих задачах ставятся вопросы: через сколько времени одно тело догонит другое; на каком расстоянии одно тело догонит другое; с какой скоростью должны были тела при этом двигаться, а потому в школе эти задачи называют задачами на „догонку".

В этих задачах даются числа, обозначающие четыре из пяти величин s; v_1; v_2; t; t_1 [1] и требуется найти пятую.

1. Дано: s; v_1; v_2; t_1. Требуется определить t.

Примеры задач: 1) Два тела двигаются в одном направлении из одной и той же точки A. Первое тело начало свое движение на 3 сек. раньше второго. Скорость первого

[1] t_1 обозначает промежуток времени между выходами того и другого тела из точки A.

тела 20 $м$ в секунду, скорость второго тела — 30 $м$ в секунду. Через сколько секунд второе тело догонит первое?

Решение.

$20\ м \cdot 3 = 60\ м$; $\qquad 60\ м : 10\ м = 6.$

$30\ м - 20\ м = 10\ м$; $\qquad$ Ответ: Через 6 сек.

Объяснение. Ставим вопрос: какое расстояние было между первым и вторым телом, когда начало двигаться второе тело? Учащиеся говорят, что это расстояние составляло 60 $м$ (20 $м$ · 3). Второй вопрос: может ли второе тело догнать первое. Ответ: может, так как скорость второго тела в секунду на 10 $м$ больше скорости первого тела (30 $м$ — 20 $м$). Третий вопрос: на сколько метров второе тело приближается к первому каждую секунду? Ответ: на 10 $м$. Через сколько секунд второе тело догонит первое? — Через 6 сек.

2) Задача № 1144 из сборника задач Е. С. Березанской. Два поезда выходят с одной станции: один выходит в 5 час., другой — в 8 час. 16 мин. Первый, товарный, поезд идет со средней скоростью 32 $км$ в час, второй, скорый, идет со скоростью 51 $км$ в час. В котором часу и на каком расстоянии от станции отправления будет скорый поезд, когда расстояние между ними составит 26 $км$?

Решение.

1) 8 час. 16 мин. — 5 час. = 3 часа 16 мин. $= 3\frac{4}{15}$ часа;

2) $32\ км \cdot 3\frac{4}{15} = \frac{32 \cdot 49}{15} = \frac{1568}{15}\ км = 104\frac{8}{15}\ км$;

3) $104\frac{8}{15}\ км - 26\ км = 78\frac{8}{15}\ км$;

4) $51\ км - 32\ км = 19\ км$;

5) $78\frac{8}{15}\ км : 19\ км = \frac{\overset{62}{\cancel{1178}}}{15 \cdot \underset{1}{\cancel{19}}} = 4\frac{2}{15}$;

6) $4\frac{2}{15}$ час. = 4 часа 8 мин.; 4 часа 8 мин. + 8 час. 16 мин. = 12 час. 24 мин.;

7) $51\ км \cdot 4\frac{2}{15} = \frac{\overset{17}{\cancel{51}} \cdot 62}{\underset{5}{\cancel{15}}} = 210\frac{4}{5}\ км.$

Ответ: В 12 ч. 24 м. на расстоянии $210^4/_5$ $км$ от станции отправления.

Объяснение — аналогичное объяснению предыдущей задачи.

2. Дано: s; v_2; t; t_1. Требуется определить v_1.

Примеры задач: 1) Два тела двигаются в одном направлении из одной и той же точки A. Первое тело начало свое движение на 3 сек. раньше второго. Через 6 сек. второе тело догонит первое. Скорость второго тела равна 30 *м* в секунду. Определить скорость первого тела.

Решение.

1) 30 *м* · 6 = 180 *м*; 3) 180 *м* : 9 = 20 *м*.

2) 6 сек. + 3 сек. = 9 сек.;

2) Скорый поезд проходит $187\frac{1}{2}$ *км* за 3 часа. Через 4 часа он догоняет товарный, который вышел с той же станции на 6 час. раньше скорого. Определить скорость товарного поезда.

Решение с объяснением. Узнаем скорость скорого поезда; для этого $187\frac{1}{2}$ *км* : 3 = $62\frac{1}{2}$ *км*. За 4 часа скорый поезд пройдет $62\frac{1}{2}$ *км* · 4 = 250 *км*. Эти же 250 *км* товарный поезд прошел за 10 час. (6 час. + 4 час.). Значит, скорость товарного поезда равна 250 *км* : 10 = 25 *км*.

3. Дано s; v_1; t_1; t. Определить v_2.

Задача. Два тела двигаются в одном направлении из одной и той же точки A. Первое начало свое движение на 3 сек. раньше второго. Через 6 сек. второе тело догнало первое. Определить скорость первого тела, если скорость второго равна 20 *м* в сек.

Решение с объяснением. Второе тело двигалось в течение 6 сек. и за это время догнало первое, которое двигалось в течение 9 сек. (6 сек. + 3 сек.). Второе и первое прошли по 120 *м* (20 *м* · 6). Находим скорость первого тела; для этого 120 *м* : 9 = $13\frac{1}{3}$ *м*.

4. Дано: s; v_1; t; t_1. Найти v_2.

Задача. Товарный поезд проходит 288 *км* за 6 час. Через $7\frac{1}{4}$ часа после выхода товарного поезда по тому же пути отправляется скорый поезд и через 24 часа догоняет товарный. Определить скорость скорого поезда.

Решение.

1) 288 *км* : 6 = 48 *км*; 3) 348 *км* : 24 = 14,5 *км*;

2) 48 *км* · $\frac{29}{4}$ = 348 *км*; 4) 48 *км* + 14,5 *км* = 62,5 *км*.

Объяснение. Скорость товарного поезда равна 48 *км* в час (288 *км* : 6). За $7\frac{1}{4}$ час. он прошел 348 *км* $\left(48\ \text{км} \cdot \frac{29}{4}\right)$.

Значит, расстояние между поездами было 348 *км*. Скорый поезд догнал товарный в 24 часа. Значит, он приближался к товарному каждый час на 14,5 *км* (348 *км* : 24). Таким образом скорость скорого на 14,5 *км* больше скорости товарного; отсюда скорость скорого равна (48 *км* + 14,5) = = 62,5 *км*.

5. Дано v_1, v_2, t_1, t_2. Определить s.

Примеры задач: 1) Два тела двигаются в одном направлении из одной и той же точки A. Первое тело начало свое движение на 3 сек. раньше второго. Через 6 сек. второе тело догнало первое. Скорость первого тела — 20 *м* в секунду, скорость второго тела — 30 *м* в секунду. Определить, на каком расстоянии от точки A второе тело догнало первое.

Решение.

1-й способ.	2-й способ.
1) 3 сек. + 6 сек. = 9 сек.	30 *м* · 6 = 180 *м*.
2) 20 *м* · 9 = 180 *м*.	

2) От двух пристаней по одному направлению отошли одновременно два парохода. Вычислить расстояние между пристанями, если известно, что первый пароход проходил $28\frac{1}{2}$ *км* за $1\frac{1}{2}$ часа, а второй пароход проходил $34\frac{3}{10}$ *км* за $1\frac{3}{4}$ часа и догнал пароход через $6\frac{2}{3}$ часа после своего выхода.

Решение с объяснением. Находим скорость первого парохода ($28\frac{1}{2}$ *км* : $1\frac{1}{2}$), получаем 19 *км* в час, затем находим скорость второго парохода ($34\frac{3}{10}$ *км* : $1\frac{3}{4}$), получаем $19\frac{3}{5}$ *км* в час. Второй пароход проходил в час на $\frac{3}{5}$ *км* больше, а догнал он первый пароход через $6\frac{2}{3}$ часа. Значит, расстояние между пристанями равно $\frac{3}{5}$ *км* · $6\frac{2}{3}$ = 4 *км*.

6. Дано: v_1; v_2; t. Найти t_1.

Задача. 1) Два тела двигаются в одном и том же направлении из одной и той же точки A. Первое тело начало двигаться раньше второго. Скорость первого тела 20 *м* в секунду, скорость второго тела — 30 *м* в секунду. Второе тело догнало первое через 6 сек. после своего выхода из точки A. На сколько секунд первое тело начало двигаться раньше второго?

Решение.

1) 30 *м* — 20 *м* = 10 *м*;	3) 60 *м* : 20 *м* = 3.
2) 10 *м* · 6 = 60 *м*;	Ответ: На 3 сек.

2) Задача № 1141 из сборника задач Е. С. Березанской.

Скорый поезд проходит расстояние в $187\frac{1}{2}$ *км* за 3 часа, товарный поезд проходит 288 *км* за 6 час. Через $7\frac{1}{4}$ часа после выхода товарного поезда по тому же пути отправляется скорый. Через сколько времени он окажется на одной станции с товарным?

Решение.

1) $187\frac{1}{2}$ *км* : $3 = 62\frac{1}{2}$ *км*;

2) 288 *км* : $6 = 48$ *км*;

3) $62\frac{1}{2}$ *км* — 48 *км* = $14\frac{1}{2}$ *км*;

4) 48 *км* $\cdot 7\frac{1}{4} = \frac{\overset{12}{\cancel{48}} \cdot 29}{\cancel{4}} = 348$ *км*;

5) 348 *км* : $14\frac{1}{2}$ *км* $= \frac{\overset{12}{\cancel{348}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{29}}} = 24$.

Ответ: Через 24 часа.

Объяснение. Находим скорость скорого и товарного поездов. Узнаем, что скорость скорого на $14\frac{1}{2}$ *км* больше скорости товарного. Узнаем, какое расстояние должен пройти товарный за $7\frac{1}{4}$ часа. Затем решаем последний вопрос: когда скорый поезд догонит товарный.

Из всех указанных видов задач наиболее трудными являются задачи первого вида на определение времени встречи движущихся тел.

ТАБЛИЦА 4

Уравнения	Методы решения, данные в виде формул	Математическая зависимость между искомыми и данными	Принятые названия этих видов	Класс
$(v_1+v_2)t=s$	$t=\frac{s}{v_1+v_2}$ $v_1=\frac{s-v_2t}{t}$ $v_2=\frac{s-v_1t}{t}$ $s=t(v_1+v_2)$ Использование чертежа	1) Движение в противоположном направлении (встречное) 2) Движение в одном направлении	Задачи на встречу Задачи на догонку	II—IV IV—V

IV. Пропорциональное деление

Выше было сказано, что задачи на пропорциональное деление представляют собой дальнейшее развитие задач на деление в кратном отношении. Деление в кратном отношении по программе начинается в III классе, и в этом же классе может быть начато изучение задач на пропорциональное деление. В III и IV классах в основном решаются задачи, в которых производится деление прямо-пропорционально заданным числам. Изучение же деления обратно-пропорционально заданным числам должно быть отнесено на VI класс. Что значит — разделить заданное число прямо-пропорционально заданным числам a, b и c? Это значит, что при делении надо получить три числа, причем в первом должно быть a таких же точно частей, каких во втором — b, а в третьем — c. При делении обратно-пропорционально заданным числам происходит по существу то же, только пропорциональное деление производится относительно чисел обратных заданным.

Изучение задач на пропорциональное деление начинается в III классе, но самое название этих задач „задачи на пропорциональное деление" может быть дано учащимся только после изучения пропорциональной зависимости в VI классе.

Какие же задачи на пропорциональное деление можно предлагать учащимся III и IV классов? Возьмем примеры из соответствующих задачников Н. С. Поповой:

1) Задача № 126 из сборника задач для III класса.

Два куска одинаковой материи стоят 40 руб. В одном куске 5 *м*, в другом — 3 *м*. Сколько заплатили за каждый кусок?

Задача очень легкая, и учащиеся III класса без всякого труда ее решат, даже не прибегая к чертежу, который приложен к этой задаче в сборнике.

Она приведена в настоящей статье только для того, чтобы показать, с каких задач надо начинать задачи на пропорциональное деление. После таких задач можно перейти к задачам несколько более трудным, как например, следующая:

2) Задача № 516 из сборника задач для IV класса.

Двум сторожам за охрану материалов на стройке заплатили 299 руб. 20 коп. Сколько получил каждый из них, если первый сторожил 20 дней по 8 час., а второй — 10 дней по 7 час.

Такая задача на пропорциональное деление тоже не может затруднить учащихся IV класса.

3) Задача № 957 из сборника задач для IV класса является трудной задачей на пропорциональное деление.

В квартире одна хозяйка положила в общую плиту 8 полен дров, другая — 12 полен дров. Третья, у которой не было дров, заплатила обеим хозяйкам 1 рубль за право пользоваться плитой. Как должны были они поделить между собой этот рубль?

Объяснение и решение задачи. Все три хозяйки должны были в одинаковой мере участвовать в расходах. Если третья хозяйка дала 1 рубль, то и расход каждой из остальных надо считать равным 1 рублю. В плите сгорело 20 полен дров (12 полен + 8 полен). Следовательно, эти 20 полен дров стоили 3 рубля (расход всех трех хозяек вместе). Каждое полено стоило 3 руб. : 20, т. е. 15 коп. Первая хозяйка дала 8 полен, или 15 коп. · 8, что составляет 1 руб. 20 коп. Она должна была дать 1 руб., следовательно 20 коп. должны быть ей возмещены из денег третьей хозяйки. Вторая хозяйка дала 12 полен, или 15 коп. · 12, что составит 1 руб. 80 коп. Следовательно, эта хозяйка заплатила больше, чем должна была, на 80 коп. Эти 80 коп., как излишне выданные, должны быть ей возвращены из денег третьей хозяйки. Таким образом, первая хозяйка получает 20 коп., а вторая 80 коп.

Указанную задачу можно решить и другими способами.

В выбранном нами приеме решения имеется деление 3 руб. пропорционально 8 и 12.

Задачи, решаемые методом подобия

Некоторые задачи с пропорциональной зависимостью Н. Н. Александров предлагает решать методом подобия, который тоже может быть отнесен к пропорциональному делению.

Объясним этот метод на следующей задаче:

Три брата получили 144 руб., первый получил втрое меньше второго, а третий вдвое больше, чем первый и второй вместе.

Сколько получил каждый из них?

Решение и объяснение. Допустим, что первый получил 1 руб. Тогда второй должен был бы получить 3 руб. Первый и второй вместе, при этом допущении, получили бы 4 руб., а третий 8 руб. (4 руб. · 2). Все вместе получили бы 12 руб. На самом деле они получили 144 рубля, т. е. в 12 раз больше.

Чтобы получить верный ответ, надо сумму денег, полученную каждым, увеличить в 12 раз.

Первый получил 1 руб. · 12 = 12 руб.

Второй получил 3 руб. · 12 = 36 руб.

Третий получил 8 руб. · 12 = 96 руб.

V. Исключение одного из неизвестных

Эти задачи могут быть подразделены на задачи, решаемые методами:

1) Исключения одного из неизвестных вычитанием.

2) Исключения неизвестного заменой одного неизвестного другим.

Соответствующие системы уравнений: $\begin{cases} ax + by = c. \\ a_1x + b_1y = c_1. \end{cases}$

Решение $\begin{cases} aa_1x + a_1by = a_1c. \\ aa_1x + ab_1y = ac_1. \end{cases}$

$$y = \frac{a_1c - ac_1}{a_1b - ab_1}.$$

Исключение одного из неизвестных вычитанием

(уравнивание коэффициентов)

Решение этих задач начинается в IV классе.

Дадим примеры задач, располагая их в той последовательности, в которой они изучаются в *школе*.

1) Задача № 700 из сборника задач Н. С. Поповой для III класса.

В первый раз для буфета купили 3 *кг* шоколадных конфет и 5 *кг* фруктовых, всего на 105 руб. В другой раз по тем же ценам купили 3 *кг* шоколадных конфет и 8 *кг* фруктовых конфет, всего на 141 руб. Сколько платили за 1 *кг* конфет каждого сорта?

Анализ условия задачи дается в виде следующей записи (на доске):

3 *кг* шок. конфет и 5 *кг* фрукт. конфет стоят 105 руб.
3 *кг* шок. конфет и 8 *кг* фрукт. конфет стоят 141 руб.

3 *кг* фрукт. конфет стоят 36 руб.

Сопоставление этих двух строчек приводит к возможности свести задачу к следующей: (8—5) *кг* фруктовых конфет стоят (141—105) руб., и таким образом временно исключить вопрос о стоимости шоколадных конфет.

При этом сопоставлении учащимся задаются такие вопросы:

1) Почему стоимость конфет, записанных во второй строчке, на 36 руб. дороже стоимости конфет, записанных в первой строчке?

Ответ: Потому что фруктовых конфет во второй строчке записано на 3 *кг* больше.

2) Какой можно сделать вывод?

Ответ: 3 *кг* фруктовых конфет стоят 36 руб.

2) Задача № 949 из сборника задач Н. С. Поповой для IV класса.

В первый раз продали 108 *кг* сахару и 18 *кг* чаю, всего на 1882 руб. 80 коп. Во второй раз по тем же ценам продали 54 *кг* сахару и 6 *кг* чаю, всего на 701 руб. 40 коп. По какой цене продавали сахар и чай?

Подходя к таким задачам в IV классе, необходимо, чтобы учитель предпослал им решение одной или двух задач такого характера, как предыдущая, причем задачи могут быть решены и устно; важна только вышеприведенная запись задач.

Данную задачу тоже записываем так:

108 *кг* сахару и 18 *кг* чаю стоят 1882 руб. 80 коп.
54 *кг* сахару и 6 *кг* чаю стоят 701 руб. 40 коп.

Сопоставляя обе строчки, учащиеся приходят к необходимости изменить данные в одной из покупок так, чтобы получилось одно и то же по весу количество сахару или чаю.

Могут быть предложены два варианта этого изменения:

1-й вариант:

54 кг сахару и 9 кг чаю стоят 941 руб. 40 коп.
54 *кг* сахару и 6 *кг* чаю стоят 701 руб. 40 коп.

2-й вариант:

108 *кг* сахару и 18 *кг* чаю стоят 1882 руб. 80 коп.
162 *кг* сахару и 18 *кг* чаю стоят 2104 руб. 20 коп.

Исключение неизвестного заменой одного неизвестного другим
(подстановка)

Эти задачи еще носят название задач „на предположение". В простейшем виде они могут проходиться в IV классе; например, следующая задача на замену одного неизвестного другим может быть отнесена к виду задач на нахождение чисел по их сумме и отношению и может быть дана учащимся IV класса, которые с указанным видом знакомы:

3 *м* сукна и 6 *м* материи стоят 240 руб. Сколько стоят 1 *м* сукна и 1 *м* материи, если стоимость 1 *м* сукна в 2 раза больше стоимости 1 *м* материи?

Большинство же задач этого вида решаются в V классе.

Приведем примеры:

1) В саду были фазаны и кролики; все они имели 128 ног и 37 голов. Сколько было фазанов и кроликов? (Задача № 21 из книги И. Н. Александрова „Методы решения арифметических задач".)

Решение и объяснение. У каждого фазана и у каждого кролика по одной голове, значит, общее число фазанов и кроликов равно 37. Предположим, что в саду были только фазаны. В таком случае они все должны бы были иметь 74 ноги (2 · 37). В условии задачи сказано, что ног было 128, т. е. на 54 ноги больше (128—74). Эти 54 ноги получились потому, что в саду были, кроме фазанов, еще и кролики. Каждому кролику надо добавить по 2 ноги. Отсюда следует, что кроликов столько, сколько раз 2 содержится в 54. Разделив 54 на 2, получим 27. Значит, в саду было 27 кроликов. Вычтя 27 из 37, получим 10, т. е. число фазанов.

2) № 492 из сборника задач Е. С. Березанской.

Буфетчик рассчитал, что если бы он продавал лимоны по 1 руб. 20 коп. за штуку, то он потерял бы 2 руб., если же он будет продавать по 1 руб. 50 коп. за штуку, то получит 4 руб. сверх себестоимости лимонов. За сколько он должен был продавать 1 лимон (по себестоимости)?

Решение и объяснение. Предположим, что буфетчик продал лимоны по 1 руб. 20 коп. за штуку, в таком случае он должен был бы получить с каждого лимона на 30 коп. меньше, чем если бы он продал лимоны по 1 руб. 50 коп. за штуку, а всего со всех лимонов он получил бы на 6 руб. меньше (2 руб. + 4 руб.). Это дает нам возможность найти количество всех лимонов (600 коп. : 30 коп. = 20). Лимонов было 20 шт. Если буфетчик продаст лимоны по 1 руб. 20 коп., то за все лимоны выручит 24 руб., но при этом потеряет 2 руб. Значит, все лимоны стоили 26 руб., а каждый лимон стоил 1 руб. 30 коп. (26 руб. : 20 = 1 руб. 30 коп.).

Уравнения	Методы	Математическая зависимость между искомыми и данными	Виды задач	Класс
1) $ax + by = c$ $ax + b_1y = c_1$	1) Исключение неизвестного вычитанием	Даны суммы двух произведений, в которых два множителя повторяются. По разности этих сумм и разности сомножителей находим искомое. По разности двух произведений и по сумме двух сомножителей находим искомое число	Задачи на исключение неизвестного	IV
2) То же	2) Уравниванием коэффициентов			
3) То же	3) Исключение неизвестного подстановкой		Задачи на предположение	V

VI. Метод средних арифметических

Соответствующее уравнение:

$$(ab + cd) : (a + b) = x$$

$$x = \frac{ab + cd}{a + b}$$

Так называет И. И. Александров задачи, которые больше известны под названием задач на смешение 1-го и 2-го рода. С точки зрения метода решения название И. И. Александрова является правильным, а потому мы и сохранили его в нашей статье. Эти задачи могут быть подразделены на 2 вида:

а) Задачи на нахождение среднего арифметического или задачи на смешение первого рода.

Приведем пример такой задачи:

Смешано 7 *кг* товару по 2 руб. 40 коп. за килограмм и 3 *кг* товару по 2 руб. 80 коп. за килограмм. Что стоит 1 *кг* смеси?

Решение.

1) 2 руб. 40 коп. · 7 = 16 руб. 80 коп;
2) 2 руб. 80 коп. · 3 = 8 руб. 40 коп.;
3) 16 руб. 80 коп. + 8 руб. 40 коп. = 25 руб. 20 коп.;
4) 7 *кг* + 3 *кг* = 10 *кг*;
5) 25 руб. 20 коп. : 10 = 2 руб. 52 коп.

б) Задачи на использование данного среднего арифметического для нахождения неизвестных или задачи на смешение 2-го рода.

Соответствующее уравнение.

$$(ad - cd) : (a - b) = x;$$
$$x = \frac{ad - cd}{a - b} = \frac{d\,(a - c)}{a - b}.$$

Приведем пример такой задачи:

Смешано 2 сорта товара по 20 руб. и по 16 руб. за килограмм, всего 36 *кг*. Сколько килограммов каждого сорта взято для смеси, если получилась смесь в 17 руб. за килограмм?

Решение и объяснение решения.

20 руб.	17 руб.	— 3 руб.	$x_1 : x_2 = 1 : 3$;	$x_1 = 9$ *кг* · 1 = 9 *кг*;
16 руб.		+ 1 руб.	1 + 3 = 4;	$x_2 = 9$ *кг* · 3 = 27 *кг*;

36 *кг* : 4 = 9 *кг*.

Килограмм смеси стоит 17 руб., а килограмм 1-го сорта стоит 20 руб. Таким образом каждый килограмм смеси стоит меньше, чем каждый килограмм 1-го сорта, на 3 руб. Пишем в третьей графе на одной строчке с 20 руб. — 3 (минус три). Килограмм 2-го сорта стоит 16 руб., следовательно, килограмм смеси на 1 руб. дороже килограмма 2-го сорта; пишем на одной строчке с 16 руб. в 3-й графе + 1 (плюс один). Чтобы килограмм смеси стоил действительно 17 руб., надо чтобы недостаток на 1-м сорте был покрыт излишком со 2-го сорта. Для этого необходимо, чтобы количества смешиваемого товара находились в отношении 1 : 3, т. е. были обратно-пропорциональны недостатку и излишку со стоимости 1 *кг* 1-го и 2-го сорта по отношению к стоимости 1 *кг* смеси.

Эта же задача может быть решена методом исключения неизвестного. Вообще многие из вышеназванных задач могут решаться различными приемами. Приводимые нами приемы решения задач не являются единственными и даже лучшими приемами решения той или иной задачи. Они приводятся только для иллюстрации метода или математической зависимости между искомыми и данными. Покажем хотя бы на этой задаче другой способ решения ее.

Предположим, что был только один 1-й сорт. В таком случае весь товар стоил бы 20 руб. · 36 = 720 руб. На самом деле он стоил 17 руб. · 36 = 612 руб., т. е. на 108 руб. меньше. Эти 108 руб. получились потому, что часть товара стоила не 20 руб., а 16 руб. за килограмм, т. е. на 4 руб. меньше. Следовательно, килограммов 2-го сорта получится столько, сколько раз 4 руб. содержатся в 108 руб. Делим 108 руб. на 4 руб., получаем 27. Значит, 2-го сорта было 27 *кг*, а первого (36 *кг* — 27 *кг*) 9 *кг*.

Систематизация задач, решаемых методом средних арифметических, дана в следующей таблице:

ТАБЛИЦА 6

Уравнение	Методы	Математическая зависимость между искомыми и данными	Виды задач	Класс
$x = \frac{ab + cd}{a + b}$	Нахождение среднего арифметического	Искомое является средним арифметическим между данными числами	Смешение 1-го рода	IV
c — среднее арифметическое $x = \frac{d(a - c)}{a - b}$	Использование среднего арифметического для нахождения неизвестных	Среднее арифметическое между данными числами дано	Смешение 2-го рода	V

Можно считать, что учащиеся IV, V и VI классов имеют опыт в решении задач, что они владеют целым рядом приемов их решения, а потому в этих классах можно их тренировать в задачах, представляющих собой комбинацию из различных видов. Учителя, конечно, знают различие между составными задачами и комбинированными задачами (будем называть их так). Составными задачами называются такие, для решения которых надо применить не одно, а два или несколько действий. Такие задачи изучаются в школе, начиная с I класса. Комбинированными задачами называются задачи, для решения которых надо применить методы, употребляемые для решения различных видов задач. Комбинированные задачи часто трудные и сложные. Чтобы перейти к ним, полезно приучить детей еще в младших классах усложнять задачу.

Приведем примеры: 1) Учитель дает решать такую задачу (№ 403 из сборника задач Е. С. Березанской). На двух полках 765 книг. Если с одной полки снять 35 книг, то на обеих полках книг будет поровну. Сколько книг на каждой полке? В данной задаче изменяется число книг на одной полке. Учитель предлагает усложнить ее так, чтобы изменилось число книг на каждой полке. Учащиеся дают такую задачу: На двух полках 765 книг. Если с одной полки снять 35 книг, а с другой снять (или добавить) 30 книг, то на обеих полках книг будет поровну. Сколько книг на каждой полке?

2) Учитель дает задачу. Костюм и платье стоят 750 руб. Сколько стоит каждая вещь, если костюм стоит в 2 раза дороже платья? Предлагается усложнить задачу. Указаний, как это сделать, не дается. Ученики придумывают такую задачу: Костюм и платье стоят 750 руб. Сколько стоит каждая вещь, если костюм в 2 раза и еще на 30 руб. дороже платья? Ответ: костюм стоит 510 руб.

Изучение типовых задач в школе

Настоящая статья не ставила своею целью исчерпать все типы арифметических задач; такая цель по самому существу своему просто недостижима. Нам хотелось ознакомить начинающего учителя с большинством видов задач, имеющихся в существующих учебниках и задачниках, и предложить более опытному учителю попытку связать между собой различные виды задач.

Указанное нами подразделение задач является попыткой классифицировать задачи, исходя в основном из математического построения или метода их решения. Это подразделение не должно рассматриваться как вполне четко оформленное. Многие задачи, как мы старались показать, могут быть решаемы различными методами, а потому могут быть отнесены к различным разделам. Таким образом, учителю, который учит детей решать задачи, надо самому уметь отлично решать задачи, а для этого надо понимать до конца каждую задачу, четко представлять себе математические зависимости между искомыми и данными в ней, знать соответствующее уравнение, которое помогает установлению этих зависимостей, знать различные приемы его решения и понимать связь различных задач между собой. В силу этих соображений мы и попытались распределить задачи по разделам и типам и тем самым показать учителю, что некоторые внешне непохожие задачи являются родственными. В дальнейшем над этой классификацией задач надо еще много поработать с целью облегчить работу учителя с детьми по решению задач.

Сделаем еще несколько общих замечаний к решению задач.

1. Необходимо приучить учащихся делать проверку решения задачи. Уменье делать проверку воспитывает у учащихся уверенность в своих силах и знаниях. Кроме того, проверку можно производить различными способами; при проверке выявляется уменье догадываться, какой способ лучше применить в данном случае, а отсюда воспитание сообразительности.

2. Надо обратить особое внимание учителя на значение самостоятельной работы учащихся при решении задач, как на уроке, так и дома. В начале изучения того или иного вида задач одна задача этого вида подробно разбирается и решается в классе учителем совместно с учащимися. Вторая задача, аналогичная ей, решается учащимися самостоятельно в классе. Если учащиеся справились с задачей, то третью задачу того же вида можно задать на дом. Если не справились, то надо еще раз разъяснить изучаемый вид в классе и тогда уже аналогичную задачу дать на дом. Это домашнее задание должно быть проверено на следующем же уроке.

При изучении видов задач в той системе, которая намечена программой, надо переходить от предыдущего вида к последующему только после того, как учащиеся вполне усвоят предыдущий вид.

Время от времени надо возвращаться к изученному ранее виду с целью его повторения.

Строить работу при изучении приемов решения задач надо по возможности так, чтобы учащиеся сами додумывались до приема решения, а учитель их только наводил на прием, который учащиеся должны изобрести. Полезно решать задачу разными приемами, выбирая из них лучший.

Приступая к повторению, учителю очень важно заранее ознакомиться с повторительным отделом задачника, самому прорешать все задачи и продумать систему, в которой он будет давать учащимся эти задачи при повторении.

В конце года полезно повторить все изученные виды задач в той связи, которая между ними имеется и которая указана в настоящей статье.

О. Т. Бочковская

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Система задач

Простые задачи, т. е. задачи в одно действие, по степени трудности подразделяются на три ступени.

Первую ступень составляют задачи, на которых уясняется первоначальный смысл арифметических действий. Выбор арифметического действия в этих задачах подсказан условием.

Вторую ступень составляют задачи, включающие понятия увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и в несколько раз, а также задачи на разностное и кратное сравнение.

Третью ступень составляют задачи, вскрывающие зависимость между прямыми и обратными действиями, между результатами и компонентами действий.

В сложных задачах также намечаются три ступени трудности.

Первую ступень составляют задачи, включающие хорошо знакомую зависимость между величинами.

Вторую ступень составляют задачи с менее привычной зависимостью между величинами (по данной сумме определить слагаемое).

Третью ступень составляют задачи, включающие более сложные зависимости и требующие глубокого понимания взаимосвязи между действиями и между компонентами действий (найти числа по сумме и разности их, по сумме и отношению и др.).

Изложенная система дает материал для развития операций мышления: при сопоставлении аналогичных задач ученик сравнивает, устанавливает сходство и различие. Эти же мыслительные операции участвуют при сопоставлении разных задач на одно арифметическое действие, а также и при сопоставлении задач, объединенных общностью структуры при отличном искомом задачи.

Такой путь ознакомления с задачами устраняет обычное затруднение, с которым сталкивается учитель, распределяя задачи по типам (задачи, решаемые способом отношений, задачи на нахождение чисел по сумме и разности и др.).

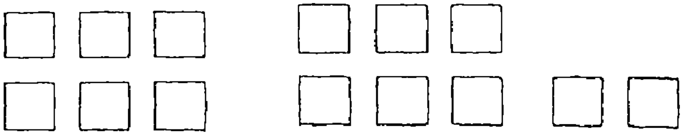
Рассмотрим три последовательные ступени развития понятия о сложении и вычитании целых чисел на простых задачах.

Исходным моментом при уяснении первоначального смысла сложения и вычитания служит зрительное и моторное восприятие конкретных действий над предметами, что дает возможность, используя имеющиеся у детей дошкольные ассоциации между конкретными действиями и счетными операциями, ввести соответствующее название арифметического действия. Для этой цели решаются задачи, в которых используются слова: „дали, принесли, купили" и т. д. и „ушли, потеряли, отдали" и т. д.

Работа над этими задачами составляет первую ступень в осмысливании арифметических действий. Повторяющееся решение ряда аналогичных задач с числами в пределах 10, 20, 100, 1000 и с многозначными числами, обобщая широкий круг задач, создает прочную основу для осознания сложения как действия, в котором находится сумма двух или более групп однородных единиц.

На основе задач первой ступени осознаются задачи на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение. Проследим последовательное развитие этих понятий на задачах.

1. На доске в верхнем ряду 3 квадрата и в нижнем столько же. Сколько квадратов на доске?



На задачах подобного рода конкретизируется термин „столько же".

2. На доске в верхнем ряду 3 квадрата, а в нижнем столько же и еще 2. Сколько квадратов в нижнем ряду?

Выбор действия в данной задаче не затруднит детей.

3. На доске в верхнем ряду 3 квадрата, а в нижнем на 2 квадрата больше. Сколько квадратов в нижнем ряду?

Наглядный образ этой задачи тот же, что и второй.

Выбор действия производится на основе предыдущего: на 2 больше — это значит „столько же и еще два", а поэтому, чтобы вычислить, сколько квадратов во втором ряду, нужно к 3 прибавить 2.

Далее понятие „больше на столько-то" распространяется на выражение „старше, тяжелее, глубже, длиннее, дороже на столько-то" и др.

4. Брату 5 лет, а сестра старше на 3 года. Сколько лет сестре?

5. Сестре 8 лет, а брат на 3 года моложе. Сколько лет брату?

Сопоставление задач на уменьшение на несколько единиц с задачами на увеличение на несколько единиц помогает осознать эти задачи.

6. Брату 5 лет, а сестре 8 лет. На сколько лет брат моложе сестры? На сколько лет сестра старше брата?

Сопоставление данной задачи с двумя предшествующими подводит детей к установлению зависимости между ними. (В последней задаче искомым является разность, которая в первых двух была дана в условиях задач.)

Сколько надо добавить к 5, чтобы получить 8? Сколько надо отнять от 8, чтобы получить 5? На сколько 8 больше 5? На сколько 5 меньше 8?

Ряд аналогичных упражнений как на конкретных задачах, так и на отвлеченных числах помогает учащимся глубже уяснить наиболее трудные из них — задачи на разностное сравнение — и осмысленно высказывать суждение: чтобы ответить на вопрос, на сколько одно число больше или меньше другого, нужно из большего числа вычесть меньшее, т. е. найти разность этих чисел.

7. Более трудными являются задачи в следующей формулировке:

Брату 5 лет, он старше сестры на 2 года. Сколько лет сестре?

Но и эта задача не затрудняет детей, если она является последующей ступенью в работе над задачами. Учащиеся отмечают, что слово „старше" относится не к искомому числу, как это было раньше, а к данному числу 5, а следовательно эту задачу можно выразить иначе: „сестра моложе брата".

Числа в рассмотренных выше задачах не превышали числа десять, но, как и задачи первой ступени, они будут повторяться во всех концентрах программы.

Решение задач этой группы расширяет область применения сложения и вычитания и способствует уяснению смысловых связей между задачами данной ступени и задачами первой ступени, а также вскрывает связь между увеличением числа на несколько единиц, уменьшением его и разностным сравнением. Эта последняя связь с отчетливостью воспринимается при сопоставлении задач с одинаковыми числовыми данными.

Примеры задач:

№ 1. Пешеход прошел в час 4 *км*, а лошадь пробежала на 8 *км* больше. Сколько километров пробежала в час лошадь?

№ 2. Лошадь пробежала в час 12 *км*, а пешеход прошел на 8 *км* меньше. Сколько километров прошел в час пешеход?

№ 3. Пешеход прошел в час 4 *км*, а лошадь пробежала 12 *км*. На сколько километров больше пробежала в час лошадь, чем прошел пешеход?

Решение этих задач составляет более высокую, вторую ступень осмысливания арифметических действий.

Следующая — третья ступень осмысливания действий заключается в работе над задачами, вскрывающими связь между прямыми и обратными действиями и между результатами и компонентами действий.

Примеры таких задач:

№ 1. В корзине было несколько крупных огурцов и 6 мелких, а всего в корзине было 13 огурцов. Сколько крупных огурцов было в корзине?

№ 2. Когда от куска отрезали 7 *м*, в нем осталось 5 *м*. Сколько метров было в куске первоначально?

В этих задачах зависимость между данными числами и искомым дана в неявной форме. Дети подмечают эту зависимость при наблюдении конкретного действия: учитель на глазах у детей проделывает все то, что сказано в условии, зарисовывает или вычерчивает на доске, а кроме того, записывает условие задачи в виде примера с неизвестным:

$$? \text{ огурцов} + 6 \text{ огурцов} = 13 \text{ огурцов}$$

и читает его: несколько огурцов крупных да 6 огурцов мелких, а всего 13 огурцов. Подобным образом оформляется задача № 2.

$$? \text{ м} - 7 \text{ м} = 5 \text{ м}.$$

Через эти же три ступени должно пройти развитие понятий о действиях умножения и деления. Смысл умножения вскрывается при сопоставлении знакомых задач на сложение равных чисел с задачами, в которых новый знак и новое название действия; это первое звено в осмысливании действия умножения.

На основе задач на умножение, в которых данное число повторяется слагаемым несколько раз, уясняются задачи на увеличение числа в несколько раз, что расширяет круг задач на применение умножения.

На основе умножения осмысливается деление по содержанию.

З а д а ч а   н а   у м н о ж е н и е.

Купили 4 пера по 3 коп. каждое. Сколько израсходовали денег на покупку?

Примерная запись решения задачи.

3 коп. 3 коп. 3 коп. 3 коп.
3 коп. + 3 коп. + 3 коп. + 3 коп. = 12 коп.
3 коп. × 4 = 12 коп.

З а д а ч а   н а   д е л е н и е   п о   с о д е р ж а н и ю.

На 12 коп. купили несколько перьев по 3 коп. за каждое перо. Сколько перьев куплено?

Примерная запись решения задачи.

12 коп. = 3 коп. + 3 коп. + 3 коп. + 3 коп.
12 коп. : 3 коп. = 4.

О т в е т: 4 пера, так как в 12 копейках 3 коп. содержатся 4 раза.

Первоначальное осмысливание деления на равные части протекает на основе зрительного и моторного восприятия конкретного действия, сопровождаемого объяснением.

З а д а ч а. 12 карандашей нужно разделить поровну между четырьмя детьми. Сколько карандашей получит каждый ребенок?

Берем 4 карандаша, делим их на 4 равные части, каждый получает по одному. Снова берем 4 карандаша и поступаем так же. Завершив конкретное деление, записываем процесс деления.

$$\begin{array}{c} 12 : 4 \\ \hline 4 : 4 = 1 \\ 4 : 4 = 1 \\ 4 : 4 = 1 \\ \hline 12 : 4 = 3 \end{array}$$

Второй способ деления на 4 равные части.

Делим 12 карандашей на 2 равные части и далее каждую часть еще на 2 части.

$$\begin{array}{r} 12:4 \\ \hline 12:2=6 \\ 6:2=3 \\ \hline 12:4=3 \end{array}$$

Третий способ получения результата деления на равные части заключается в использовании умножения. Чтобы подсчитать, сколько придется уплатить за каждое перо, если купили 4 пера за 12 коп., нужно ответить на вопрос: какое число нужно повторить 4 раза, чтобы получить 12.

$$? \text{ коп.} \cdot 4 = 12 \text{ коп.}$$

Таким образом, умножение и деление осмысливаются так же, как сложение и вычитание.

Осмысливание действий первой ступени (сложения и вычитания) и действий второй ступени (умножения и деления) при первоначальном ознакомлении протекает последовательно одно за другим. В дальнейшем сопоставление задач с аналогичным содержанием способствует четкому разграничению понятий увеличения числа на несколько единиц и в несколько раз; уменьшения числа на несколько единиц и в несколько раз; разностного и кратного сравнения чисел.

Постоянное сопоставление задач обеих групп поможет учащимся разграничивать их и не путать выбор действия при решении их.

№ 1. а) С одного участка собрали 13 мешков картофеля, а с другого на 3 мешка больше. Сколько мешков картофеля собрали со второго участка?

б) С одного участка собрали 13 мешков картофеля, а с другого в 3 раза больше. Сколько мешков картофеля собрали со второго участка?

№ 2. а) Колхозник проехал на лошади 42 *км*, а пешком прошел на 3 *км* меньше. Сколько километров прошел колхозник пешком?

б) Колхозник проехал на лошади 42 *км*, а пешком прошел в 3 раза меньше. Сколько километров прошел колхозник пешком?

№ 3. В одном куске 12 *м* полотна, а в другом 36 *м*. На сколько метров в первом куске меньше? На сколько метров во втором куске больше? Во сколько раз в первом куске меньше, чем во втором? Во сколько раз во втором куске больше, чем в первом?

Дальнейшее развитие понятия об арифметических действиях осуществляется путем сравнения специально подобранных задач, а также в процессе сравнения разных способов решения одной и той же сложной задачи. Указанные сравнения подготовляют почву для уяснения основных законов и свойств арифметических действий.

Примеры задач:

№ 1. В одном кошельке 3 пятачка, а в другом 5 трехкопеечных монет. В котором кошельке больше денег?

Сравнение полученных результатов на ряде конкретных задач сможет заронить мысль о перестановке сомножителей.

№ 2. В одном кармане 5 монет по 15 копеек, а в другом 5 гривенников и 5 пятачков. В котором кармане больше денег?

Решение подобных задач и сравнение полученных результатов поможет осознать умножение суммы на число.

№ 3. В бидоне было 15 *л* молока. Для завтрака взяли 5 *л* и для обеда 7 *л*. Сколько молока осталось в бидоне?

Решение.

1-й способ.	2-й способ.
1) 5 *л* + 7 *л* = 12 *л*;	1) 15 *л* — 5 *л* = 10 *л*;
2) 15 *л* — 12 *л* = 3 *л*;	2) 10 *л* — 7 *л* = 3 *л*;
15 — (5 + 7).	15 — 5 — 7.

Различные способы решения задачи, выражение этого решения сложным примером, соответствующее чтение записанных примеров (из числа 15 вычесть сумму чисел 5 и 7), сопоставление способов решения одной задачи с решением аналогичных задач — все это последовательные этапы, подводящие учащихся к понятию об арифметических действиях, их законах и свойствах и обеспечивающие осмысленную формулировку их.

Сложные задачи обеспечивают развитие мышления при том условии, если соблюдается последовательность в нарастании их трудности. Трудность же задачи зависит, с одной стороны, от качества и количества входящих в нее простых задач, а с другой стороны, от условия задачи. В условии задачи по-разному могут быть расположены числа и вопрос. Различной по степени сложности может быть и та жизненная ситуация, которая положена в основу задачи.

Приведем несколько задач в 2 действиях, расположив их в порядке постепенно нарастающей трудности, по трем ступеням.

Первая ступень. № 1. Карандаш стоит 20 коп., а книга дороже на 30 коп. Сколько придется уплатить за карандаш и книгу?

№ 2. Три одинаковые булки весят 6 *кг*. Сколько будут весить 5 таких же булок?

Вторая ступень. № 1. Карандаш, резинка и книга стоят 1 руб. Карандаш стоит 20 коп., резинка 7 коп. Сколько стоит книга?

№ 2. Три одинаковые булки весят 6 *кг*. Сколько булок того же веса составят 10 *кг*?

Третья ступень. № 1. Карандаш и книга стоят вместе 80 коп. Книга дороже карандаша на 30 копеек. Сколько стоит карандаш?

№ 2. Три булки весят 7 *кг*. Сколько будут весить 12 таких булок?

Сопоставление решения ряда задач определенной группы приводит к словесному обобщению (искомое задачи — сумма, искомое — разность, сумма дана, разность дана, сумма и разность даны), а также и к выражению задачи в виде числового примера.

Те же ступени трудности встречаются при решении задач на движение. Решение этих задач требует более высокого уровня развития, так как в этих задачах рассматривается соотношение величин, мало знакомое детям. Рассмотрим некоторые задачи на движение.

№ 1. Велосипедист ехал 3 часа со скоростью 12 *км* в час и 2 часа со скоростью 13 *км*. Какое расстояние проехал велосипедист?

$$12 \cdot 3 + 13 \cdot 2$$

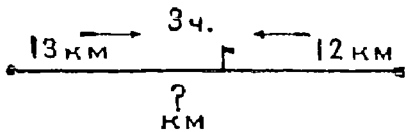
В задаче требуется найти расстояние по данной скорости и времени. Это наиболее легкая по своей структуре задача, так как в ней требуется найти сумму двух произведений. Трудность ее заключается в том, что детям мало знакомо соотношение между скоростью, временем и расстоянием.

№ 2. Велосипедист проехал 62 *км*, причем 3 часа он ехал со скоростью 12 *км* в час, а остальное расстояние он проехал в 2 часа. С какой скоростью проехал велосипедист остальное расстояние?

Возможно, изменив искомое число, составить еще 3 аналогичные задачи, в соответствии с примерами:

$12 \cdot 3 + ? \cdot 2 = 62$; $\quad 12 \cdot 3 + 13 \cdot ? = 62$;
$12 \cdot ? + 13 \cdot 2 = 62$; $\quad ? \cdot 3 + 13 \cdot 2 = 62$.

№ 3. Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу. Один проезжает в час 13 *км*, другой 12 *км*. Встретились велосипедисты через 3 часа. На каком расстоянии друг от друга были велосипедисты первоначально?



Вычислительная сторона этой задачи аналогична задаче № 1, но встречное движение для детей необычно, почему для конкретизации этой задачи можно использовать подвижные фигурки, на которых показать встречное движение конкретно или на чертеже.

Эта задача может быть решена двумя способами.

Первый способ решения:

1) Сколько километров проехал первый велосипедист?
2) Сколько километров проехал второй велосипедист?
3) На каком расстоянии друг от друга были велосипедисты первоначально?

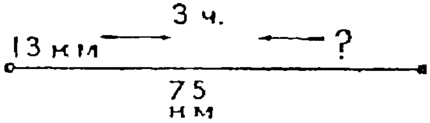
Формула решения: $13 \cdot 3 + 12 \cdot 3 = 75$.

Второй способ решения:

1) На сколько километров сближаются велосипедисты за час?
2) На каком расстоянии друг от друга были велосипедисты первоначально?

Формула решения: $(13 + 12) \cdot 3 = 75$.

№ 4. Из городов, находящихся на расстоянии 75 *км*, одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста и встретились через 3 часа. Один проезжал в час 13 *км*. С какой скоростью ехал второй велосипедист?



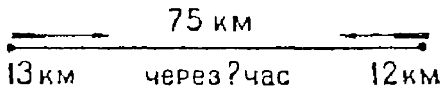
Запись условия этой задачи:

а) $13 \cdot 3 + ? \cdot 3 = 75$

б) $(13 + ?) \cdot 3 = 75$.

По структуре эта задача аналогична задаче № 2, но необычное встречное движение делает ее для учащихся более трудной.

№ 5. Из двух городов, расстояние между которыми 75 *км*, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и едут один со скоростью 13 *км*, а другой 12 *км* в час. Через сколько часов встретятся велосипедисты?



Это наиболее трудная из всех приведенных выше задач.

Кроме чертежа проводится инсценировка, помогающая уяснить движение: движение детей навстречу друг другу. При решении этой задачи ставятся вопросы:

1) На сколько километров сближаются велосипедисты в час?

2) Через сколько часов встретятся велосипедисты?

Запись условия в виде сложного примера $(13 + 12) \times ? = 75$.

Решение задачи в виде формулы: $75 : (13 + 12) = 3$.

№ 6. Из двух городов, расстояние между которыми 75 *км*, одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Один проезжал в час 13 *км*, другой 12 *км*. На каком расстоянии от места выезда второго встретились велосипедисты?

В этой задаче вопрос сформулирован так, что он требует, по сравнению с решением предыдущей задачи, лишнее действие:

$$13\ км + 12\ км = 25\ км;$$
$$75\ км : 25\ км = 3;$$
$$12\ км \cdot 3 = 36\ км;$$
$$12 \cdot [75 : (13 + 12)] = 36.$$

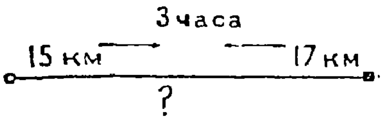
В последующих задачах добавляется время выезда и требуется узнать время встречи.

В IV классе повторяются все виды задач на движение и решаются задачи на движение в одном направлении. Приведем выдержку из тетради ученика IV класса 181-й школы г. Ленинграда, где дано повторение задач на движение.

Задачи на встречное движение

Задача № 1.

Определить, чему равно расстояние между пунктами, из которых выехали велосипедисты.



$$15 \cdot 3 + 17 \cdot 3 = ?$$
или $$(15 + 17) \cdot 3 = ?$$

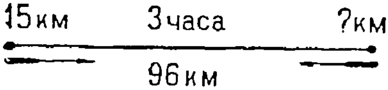
Решение задачи.

$$(15 + 17) \cdot 3 = 96.$$

Ответ: Расстояние равно 96 *км*.

Задача № 2.

Найти скорость движения второго велосипедиста.



$$(15 + ?) \cdot 3 = 96.$$

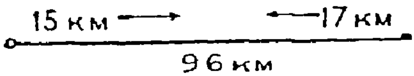
Решение задачи.

$$96 : 3 - 15 = 17.$$

Ответ: Скорость второго велосипедиста 17 *км*.

Задача № 3.

Через сколько времени встретятся велосипедисты?



$$(15 + 17) \cdot ? = 96.$$

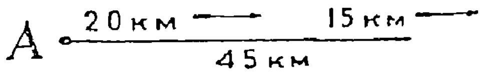
Решение.

$$96 : (15 + 17) = 3.$$

Ответ: Велосипедисты встретятся через 3 часа.

Задачи на движение в одном направлении.

Задача № 4.

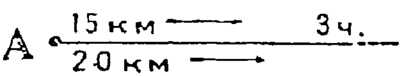


Через сколько времени и на каком расстоянии от пункта A первый велосипедист догонит второго?

$$45 : (20 - 15) = 9$$
$$20 \cdot [45 : (20 - 15)] = 180.$$

Ответ: Через 9 час., в 180 *км* от A.

Задача № 5.



Второй велосипедист выехал через 3 часа после первого. Через сколько времени после своего выезда и на каком расстоянии от A он догонит первого велосипедиста?

$$15 \cdot 3 : (20 - 15) = 9;$$
$$20 \cdot [15 \cdot 3 : (20 - 15)] = 180.$$

Ответ: Через 9 час., и на расстоянии 180 *км* от A.

Задача № 6.

Два самолета вылетели в одно и то же время и пролетели одинаковое расстояние — один со скоростью 200 *км* в час, другой — 175 *км* в час. Второй самолет прилетел в назначенное место на 4 часа позднее первого. Сколько часов летел каждый самолет?

План и решение задачи. 1) На сколько километров отставал второй самолет от первого самолета за час?

200 *км* — 175 *км* = 25 *км*.

2) На сколько километров отстал второй самолет за время пребывания в пути первого самолета?

175 *км* · 4 = 700 *км*.

3) Сколько часов летел первый самолет?

700 *км* : 25 *км* = 28 (час.)

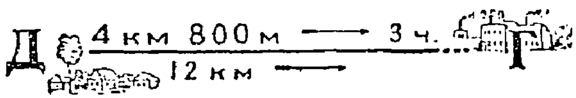
4) Сколько часов летел второй самолет?

28 час. + 4 часа = 32 часа.

Ответ: 28 часов и 32 часа.

Задача № 7.

Из деревни в город вышел колхозник, который проходил по 4 *км* 800 *м* в час. Через 3 часа из той же деревни в город выехал второй колхозник, который проезжал по 12 *км* в час. Через сколько времени и на каком расстоянии от деревни второй колхозник догонит первого?



Решение:

1) Какое расстояние пройдет первый колхозник за 3 часа?

4 *км* 800 *м* · 3 = 14 *км* 400 *м*.

2) На какое расстояние обгоняет второй колхозник первого за один час?

12 *км* — 4 *км* 800 *м* = 7 *км* 200 *м*.

3) Через сколько времени догонит второй колхозник первого?

14 *км* 400 *м* : 7 *км* 200 *м* = 2 (часа).

4) На каком расстоянии от деревни второй колхозник догонит первого?

$$12\ \text{км} \cdot 2 = 24\ \text{км}.$$

Ответ: Через 2 часа на расстоянии 24 *км* от деревни.

Задача любой структуры и любой степени трудности хорошо усваивается учащимися при условии постепенного включения ее в круг знакомых задач. Проследим необходимую постепенность при ознакомлении с задачами на нахождение чисел по данной сумме их и разности. Исходным моментом должна быть хорошо знакомая задача. Например: „В одной корзине 5 *кг* ягод, а в другой на 3 *кг* больше. Сколько килограммов ягод в двух корзинах?“ Эта задача может быть тем мостиком, который необходим, чтобы установить прочную связь между данными задачами и задачами на нахождение двух чисел по данной сумме и их разности. Запись этой задачи в виде примера довольно легко подводит детей к осознанию новых трудных задач на нахождение чисел по их сумме и разности, вскрывая зависимости между данными числами и искомым.

$$5 + (5 + 3);\ \text{или:}\ (5 + 5) + 3;\ \text{или:}\ 5 \cdot 2 + 3.$$

Зависимость между величинами в новой задаче будет еще более очевидной, если в только что рассмотренной задаче изменить искомую величину и выразить ее так: „В двух корзинах 13 *кг* ягод. Когда из одной корзины взяли 3 *кг*, то в обеих корзинах стало ягод поровну. Сколько ягод было первоначально в каждой корзине?“ Это наиболее легкая задача на нахождение чисел по данной сумме и их разности.

Небольшое изменение условия этой задачи даст обычную задачу рассматриваемого вида: „В двух корзинах 13 *кг* ягод, причем в одной на 3 *кг* больше, чем в другой. Сколько ягод в каждой корзине?“ Обобщением этих задач является запись их решения в виде сложного примера $(13 - 3) : 2$, которая уже в III классе разъясняется следующим образом: из суммы двух неравных чисел (13) вычли разность их (3), получили сумму двух чисел, каждое из которых равно меньшему числу.

Указанная выше постепенность в переходе от знакомого вида задач к новому помогает при ознакомлении с любым видом трудных, сложных задач.

Развитие способности обобщений на основе наглядности

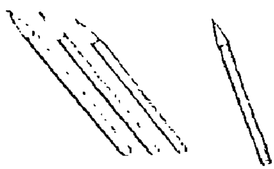
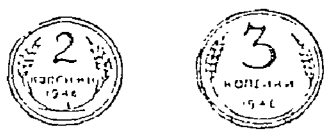
Важнейшим средством, способствующим переходу от предметного, конкретного мышления к отвлеченному, абстрактному, является наглядность.

Наглядность может иметь различные формы. На первых порах, при ознакомлении с новыми задачами или при решении задач, включающих только что изученные понятия, используется предметная наглядность. При этом объектами счета являются предметы классной обстановки, учебные вещи, сами дети. В процессе обучения предметы очень скоро заменяются подвижными фигурами, на которых изображены знакомые детям предметы, и геометрическими фигурами, которые, в свою очередь, вытесняют рисунки.

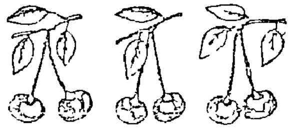
В дальнейшем наглядность теряет предметный характер; предметы заменяются чертежами и схемами.

Предметная наглядность используется при первоначальном ознакомлении с каждым арифметическим действием.

Примеры задач и наглядные образы их

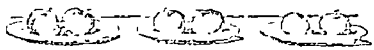
Текст задачи.	Наглядные образы
№ 1. У девочки было 3 красных карандаша и 1 черный. Сколько всего карандашей было у девочки?	 3 кар. + 1 кар. = 4 кар.
№ 2. У девочки было 4 карандаша. Один из них синий, а остальные черные. Сколько черных карандашей было у девочки?	4 кар. — 1 кар. = 3 кар.
№ 3. В кошельке было 2 монеты: одна в 2 коп., а другая в 3 коп. Сколько денег было в кошельке?	 2 коп. + 3 коп. = 5 коп.

№ 4. Мальчик сорвал 3 веточки с вишнями. На каждой веточке было по 2 вишни. Сколько всего вишен сорвал мальчик?



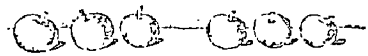
2 вишни $+$ 2 вишни $+$ 2 вишни $=$
$=$ 6 вишен
2 вишни $\cdot$ 3 $=$ 6 вишен.

№ 5. Мама разложила на тарелки 6 яблок. На каждую тарелку она положила по 2 яблока. Сколько тарелок заняла мама яблоками?



$6 = 2 + 2 + 2$
6 ябл. : 2 ябл. $=$ 3.
Ответ: 3 тарелки.

№ 6. Мама разложила 6 яблок поровну на две тарелки. Сколько яблок положила она на каждую тарелку?



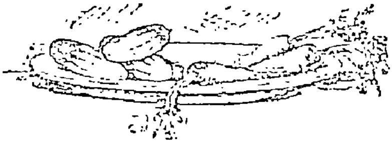
6 ябл. : 2 $=$ 3 ябл.

При уяснении понятия об увеличении числа на несколько единиц используются предметы, вырезанные из картона, фигурки знакомых детям предметов и чертежи.

Текст задачи.	Наглядные образы.

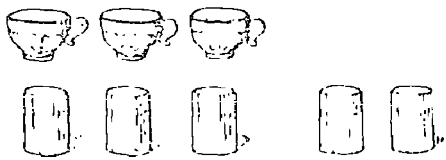
№ 1. На полку поставили 3 белых кубика и столько же черных. Сколько черных кубиков поставили на полку?

№ 2. На тарелке лежало 3 огурца и столько же морковок. Сколько морковок лежало на тарелке?



№ 3. В гараже стояли 4 грузовика, а легковых машин столько же и еще 3. Сколько легковых машин стояло в гараже?

№ 4. На стол поставили 3 чашки, а стаканов на 2 больше. Сколько стаканов поставили на стол?



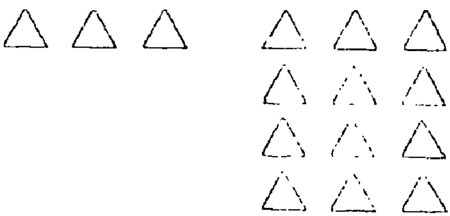
3 ст. + 2 ст. = 5 ст.

В дальнейшем при сопоставлении задач на увеличение числа на несколько единиц с задачами на уменьшение числа на несколько единиц и с задачами на разностное сравнение чертежи помогают вскрывать связь между увеличением числа и уменьшением его, а также помогают уяснить, что для определения, на сколько одно число больше другого, нужно от большего числа отнять меньшее.

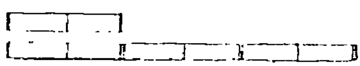
Связь задач, включающих понятия увеличения числа в несколько раз, уменьшения в несколько раз и определение, во сколько раз одно число больше или меньше другого (кратное сравнение) возможно провести на следующих чертежах.

3 увеличили в 4 раза. 12 уменьшили в 4 раза. Во сколько раз 12 больше 3?

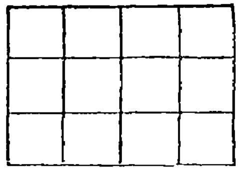
2 увеличили в 3 раза. 6 уменьшили в 3 раза.



Сколько раз 2 *см* укладывается в 6 *см*? (Во сколько раз 2 *см* меньше 6 *см*?)



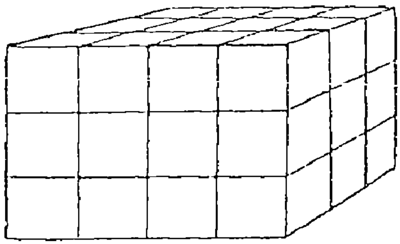
Непосредственное наложение квадратных единиц на измеряемую площадь и чертежи вскрывают способы вычисления площади.



Найти площадь:

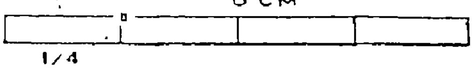
4 *кв. см* $\cdot 3 = 12$ *кв. см.*

Непосредственное заполнение кубическими единицами ящика, объем которого требуется определить, и соответствующие чертежи вскрывают способы вычисления объемов.

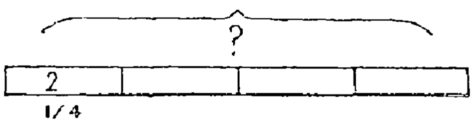


Чертежи помогают установить зависимость между целой величиной и частью.

Найти $^1/_4$ от 8 *см.*

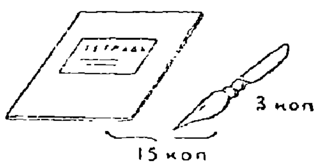


$^1/_4 x = 2$ *см.* Чему равно целое?



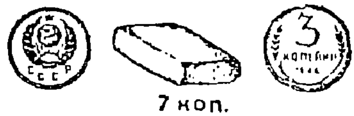
Связь между задачами, решаемыми на основе зависимости между действиями, иллюстрируется рисунками и вскрывается примером с неизвестным.

Задача № 1. Девочка купила тетрадь и перо. За перо она заплатила 3 коп. и за всю покупку 15 коп. Сколько стоит тетрадь?



? коп. + 3 коп. = 15 коп.

Задача № 2. Девочка дала в уплату за резинку, которая стоила 7 коп., монету и получила сдачи 3 коп. Какую монету дала девочка?



? коп. — 7 коп. = 3 коп.

Задача № 3. У ученика было 20 коп. Он купил карандаш и после этого у него осталось 3 коп. Сколько стоил карандаш?

20 коп. — ? коп. = 3 коп.

Использование наглядности дает возможность развивать способность к абстракции, т. е. умение отвлечься от несущественных признаков и мысленно *выделить существенные* признаки данной группы. Легче сравнивать простые задачи, а потому такого рода упражнения сначала проводятся на задачах в *одно действие*. Решая задачи на сложение, когда слагаемые выражены в разнородных предметных числах (ели и сосны, караси и щуки), учащиеся подбирают обобщающие слова (деревья, рыбы и т. д.). Большой материал для развития способности к абстракции дает сравнение решения задач одного и того же вида с одинаковыми числами, но с разными наименованиями, а также различных видов задач с одинаковыми наименованиями.

Примеры задач на сложение с одинаковыми наименованиями.

№ 1. В одной коробке 5 карандашей, а в другой 2 карандаша. Сколько карандашей в двух коробках?

№ 2. В одном куске материи 5 *м*, а в другом 2 *м*. Сколько метров материи в двух кусках?

№ 3. В бидоне было 5 *л* керосина, туда добавили еще 2 *л*. Сколько литров керосина в бидоне?

Сопоставление решения этих трех задач приводит к обобщению: $5 + 2 = 7$.

Примеры задач на вычитание с одинаковыми наименованиями.

№ 1. Лесорубы приготовили 51 бревно, из них увезли 26 бревен. Сколько бревен осталось?

№ 2. Одна артель приготовила 51 бревно, а другая на 26 бревен меньше. Сколько бревен приготовила вторая артель?

№ 3. Одна артель приготовила 51 бревно, а другая 26 бревен. На сколько бревен больше приготовила первая артель?

№ 4. Артель приготовила несколько березовых бревен и 26 бревен сосновых. Сколько березовых бревен приготовила артель, если всего приготовили 51 бревно?

№ 5. Артель приготовила 51 бревно. Часть бревен увезли и после этого осталось 26 бревен. Сколько бревен увезли?

Сопоставление решения этих пяти задач приведет к выделению отвлеченного примера: 51 — 26.

Переход от конкретных задач к отвлеченным примерам совершается постепенно, проходя последовательно через все концентры, намеченные программой, и распространяясь на сложные задачи сначала в два, затем в три действия. Планомерная работа в этой области развивает способность схватывать быстро структуру довольно сложной (в 4—5 действий) задачи и обозначать план ее решения сложным примером, не производя вычислений.

Если учащиеся затрудняются понять условие задачи, полезно конкретизировать задачу привлечением наглядного образа или же выполнением конкретного действия.

Например, девочка читает задачу о чулках. Чтение условия и интонация показывают, что она не представляет конкретно тех образов, о которых читает. Но стоило учительнице только сказать: „Посмотри на свои ноги, вот об этих чулках задача", — как изменилась интонация, и задача сразу сделалась доступной.

Учитель сможет помочь детям осмыслить даже трудную задачу, если ему удастся сблизить ее с конкретной жизненной обстановкой, если при решении задач дети представят себе те операции, о которых сказано в задаче.

Целесообразное использование наглядности, которая оттеняет необходимые стороны изучаемого, обеспечивает развитие хорошей содержательной абстракции: от предметного образа к числовому соотношению между величинами, к числовому выражению.

Развитие способности к абстракции при изучении арифметики создает предпосылки для успешного развития следующей, более высокой ступени абстракции, имеющей место при переходе от числового выражения к буквенному.

Развитие способности устанавливать логические связи

Существенное значение в развитии мышления имеет способность устанавливать логические связи между предметами и явлениями. Решение задач дает обильный материал для развития этой способности.

Дошкольнику свойственно держать в памяти какой-либо один объект, думать о чем-то одном. При обучении учащихся решению задач соответствующее использование наглядности даст возможность развивать способность держать в поле внимания несколько объектов. Цветная иллюстрация задачи: „Девочка нашла 3 белых гриба и 2 рыжика. Сколько грибов нашла девочка?", в которой особым цветом закрашена каждая группа грибов, дает возможность помнить о каждом слагаемом, когда в сознании будет сумма их.

В процессе решения простых задач развивается целый ряд мыслительных способностей, участвующих в установлении логических связей. Прежде всего развивается способность осознать и выделить вопрос, далее — установить связь между величинами, установить связь между конкретным и арифметическим действиями; одновременно с этим развивается умение применить на практике имеющиеся вычислительные навыки.

Рассмотрим задачи, вскрывающие зависимость между ценой, стоимостью и количеством. Уже с I класса при изучении умножения решаются задачи, в которых по данной цене и количеству требуется определить стоимость, и при изучении деления — задачи на определение цены, но в I классе слова „цена", „количество", „стоимость" не имеют места; эти слова вводятся в лексикон детей позднее, и к IV классу учащиеся свободно оперируют ими. Зависимость между рассматриваемыми величинами с отчетливостью подчеркивается при сопоставлении этих задач. Например, дается условие „купили 25 тетрадей по 36 коп. каждая" и предлагается подобрать недостающий вопрос к данной задаче. Учащиеся отмечают, что можно узнать стоимость всех тетрадей, применив умножение. Далее в задаче изменяется искомая величина — требуется узнать цену тетради на основании стоимости и количества и, наконец, искомым является количество тетрадей. Две последние задачи решаются делением: в первом случае по произведению и множителю находится множимое — это деление на равные части; во втором по произведению и множимому находится множитель — это деление по содержанию.

Цена	Количество	Стоимость	Решение
36 коп.	25 тетрадей	x	36 коп. · 25 = 9 руб.
x	25 „	9 руб.	9 руб. : 25 = 36 коп.
36 коп.	x	9 „	9 руб. : 36 коп. = 25 (тетрадей).

Сопоставление указанных задач даст возможность заключить, что к одной задаче на умножение можно составить две обратные задачи на деление. Этот вывод подкрепляется наблюдениями над группами задач, вскрывающими зависимость между скоростью, расстоянием и временем; зависимость между нормой выработки, временем и общей выработкой и т. д.

Понимание зависимости между величинами углубляется путем замены в задачах искомого. Например:

№ 1. Поезд прошел расстояние в 10 504 *км* со скоростью 52 *км* в час. Сколько времени был поезд в пути?

№ 2. Самолет пролетел 10 504 *км* в течение 52 час. С какой скоростью в час летел самолет?

Сопоставляя задачи, дети отмечают, что в первой задаче, зная расстояние и скорость, определили время движения, а во второй, зная расстояние и время, определили скорость. Сопоставляя скорость движения самолета и поезда при одинаковом расстоянии, дети отмечают, что при большей скорости требуется меньше времени.

Сопоставление задач заканчивается составлением новых задач, искомым в которых будет расстояние.

Для осознания зависимости между величинами большое значение имеет подбор недостающих элементов в задаче.

В I классе эта работа принимает следующую форму: на вкладку ставятся или отдельные вырезанные из картона предметы или рисунки; например, ставится пучок из 5 морковок и пучок из 3 морковок. Учитель говорит: „Мама купила пучок в 5 морковок и пучок в 3 морковки. Что можно узнать в этой задаче? (Какой вопрос поставим?)“

При подборе недостающих данных учитель кладет несколько карандашей в одну коробку, 5 карандашей в другую и говорит: „В одной коробке несколько карандашей и в другой 5 карандашей. Сколько карандашей в двух коробках вместе?“ Дети отмечают, что для решения недостает числа. Учитель называет это число, дети повторяют задачу и решают ее. Такого рода работа проводится неоднократно в связи с решением задач на каждое арифметическое действие.

Начиная с I класса и на протяжении четырех лет обучения, развивается умение составить задачу по примеру. Вариации заданий зависят от класса. Так, к примеру 15 руб. + + 12 руб. можно предложить следующие задания: составить задачу: а) на увеличение числа на несколько единиц, б) на нахождение суммы, в) на нахождение уменьшаемого по данным вычитаемому и остатку. К примеру 20 коп. — 14 коп. составить задачу: а) на нахождение остатка, б) на уменьшение числа на несколько единиц, в) на разностное сравнение, г) на нахождение неизвестного слагаемого по данной сумме и слагаемому.

К примеру 13 *л* · 6 составить задачу: а) на повторение числа слагаемым несколько раз, б) на увеличение числа в несколько раз, в) на нахождение числа по данной его одной части; к примеру 13 · 6 — составить задачу на нахождение площади.

К примеру 54 *кг* : 6 *кг* составить задачу: а) на деление по содержанию, б) на кратное сравнение (во сколько раз одно число больше другого), в) на определение — какую часть составляет одно число от другого. К примеру 54 : 6 составить задачу на определение длины по данной площади и ширине.

К примеру 42 *м* : 3 составить задачу: а) на деление на равные части; б) на уменьшение числа в несколько раз, в) на нахождение части от числа.

В мыслительном процессе существенное значение имеет способность осознания операций собственного мышления. Обычно эта способность начинает развиваться после 7—8 лет. Дети семилетнего возраста, решив сложную задачу в два действия и получив правильный ответ, обычно рассказывая о решении задачи, говорят только о последнем действии. Это объясняется отсутствием способности следить за операциями своего мышления.

Работа над задачами дает много возможностей для развития этой способности. Решающим в этом отношении моментом является переход к сложным задачам, во время которого развивается умение фиксировать в своем сознании все те операции, которые производятся при решении задач. Для этой цели используется наглядность, которая помогает запечатлеть последовательные моменты решения. Возьмем задачу:

На площади стояло 4 легковых машины и 5 грузовиков. 7 машин уехало. Сколько машин осталось на площади?

Расположение числовых данных в отдельных строках выделяет простые задачи. Следует отметить, что используемые иногда в этих случаях неудачные предметные иллюстрации не дают нужного результата, ибо ребенок, созерцая 9 предметов, воспринимает их как одну группу, а не как результат вычисления и, естественно, в суждении отмечает только одно действие: 9 м. — 5 м. =

Запись числовых данных в необходимом для решения задачи сочетании, как это показано выше в краткой записи условия, помогает учащимся отметить в суждении каждое действие. Наиболее легкая группа задач в два действия — это вычитание данного числа из полученной суммы. Примером такой задачи может служить приведенная выше задача.

Устные рассуждения при решении задачи протекают в вопросо-ответной форме. На основании чисел, расположенных в первой строке, составляется детьми первая простая задача: „На площади стояло 4 легковых машины и 5 грузовиков. Сколько всего машин стояло на площади?"

Намечается действие для решения этой простой задачи или первого вопроса сложной задачи и производится вычисление 4 м. + 5 м. = 9 м. На основе полученного числа „9 машин" и данного в задаче „7 машин" составляется вторая простая задача. „9 машин стояло на площади, 7 уехало. Сколько машин осталось на площади?" Выбирается действие и производится вычисление. По записанному решению дети дают объяснение каждой строчки.

Более трудную группу составляют задачи на вычитание из данного числа полученной суммы. „Мальчик купил резинку за 5 коп. и перо за 3 коп. В уплату он дал 10 коп. Сколько сдачи получит мальчик?" На решении такого рода задач учащиеся увидят возможность применения двух способов решения одной задачи.

Рисунок при схематической записи условия применяется только на первых порах. При последующей работе схематическая запись не теряет своего значения, но применяется без рисунков.

Схема условия.

Задача № 1. Коля и Вася удили рыбу. Коля поймал 5 рыбок, а Вася 3 рыбки. Мама зажарила 6 рыбок, а остальных рыбок пустила в банку. Сколько рыбок в банке?

5 рыбок 3 рыбки
6 рыбок

Задача № 2. На три рубашки пошло 12 *м*. Сколько метров пойдет на 5 таких рубашек?

3 рубашки — 12 *м*
5 рубашек — ? *м*

Задача № 3. В шкафу на верхней полке 40 книг, на средней — половина этого числа, на нижней на 15 книг меньше, чем на верхней. Сколько книг в шкафу?

Верхняя — 40 книг
Средняя — половина 40
Нижняя — на 15 книг меньше, чем на верхней

Задача № 4. С 4 грядок собрали огурцы по 8 *кг* с каждой грядки. Часть огурцов засолили в 9 банках по 3 *кг* в каждой банке. Сколько огурцов осталось?

Собрали с 4 грядок по 8 *кг*
Засолили в 9 банках по 3 *кг*

Задача № 5. Из 32 *м* материи сшили 4 рубашки и 5 платьев. На каждую рубашку пошло по 3 *м*. Сколько метров пошло на каждое платье?

4 рубашки по 3 *м*
32 *м*
5 платьев по ? *м*

Учащиеся уже II класса довольно быстро научаются кратко записывать условие задачи, располагать числовые данные таким образом, что сразу очевидна связь между числами.

Задача № 6. Один покупатель за 5 *м* ситца и 6 *м* полотна уплатил 81 руб. 25 коп., а другой за 9 *м* ситца и 6 *м* полотна уплатил по тем же ценам 98 руб. 25 коп. Сколько стоит метр ситца и сколько стоит метр полотна?

I — 5 *м* с. и 6 *м* п. — 81 р. 25 к.
II — 9 *м* с. и 6 *м* п. — 98 р. 25 к.

Задача № 7. Для трех коров на 7 дней запасли 105 *кг* сена. Сколько сена потребуется для 8 коров на 15 дней при тех же нормах?

3 коровам	на 7 дней	105 *кг*	
8 „	на 15 „	? *кг*	

В процессе решения задач получает развитие сложный мыслительный процесс — анализа и синтеза. Анализ и синтез — это две стороны одного и того же процесса, они неотделимы. Для получения ответа в сложной задаче необходимо расчленить ее на простые и, последовательно производя решение каждой из них, подойти к ответу задачи.

Трудность расчленения зависит от следующих условий: прежде всего, от наличия в составе задачи легких или трудных простых задач; во-вторых, от количества входящих в составную задачу простых задач и, наконец, от структуры задачи — от расположения в ней чисел (в соответствии с последовательностью использования их или нет), от расположения в условии вопроса задачи (в конце задачи или раньше). Трудность задачи зависит также от того, в какой связи находятся между собой числовые данные и в какой мере знакома учащимся та жизненная ситуация, которая развертывается в задаче.

При расчленении сложной задачи на простые исходным моментом может являться или вопрос задачи, или же числовые данные. В первом случае для получения ответа на вопрос задачи выделяются необходимые числовые данные из условия задачи, если же таковые в условии отсутствуют, то выдвигается новый вопрос, разрешение которого дает недостающее число; если же для разрешения и этого вопроса среди числовых данных условия задачи нет необходимых чисел, возникает новый вопрос. Так протекает постепенное расчленение задачи до тех пор, пока не будет среди данных чисел обнаружена необходимая пара чисел. После этого намечается план решения задачи, который приведет к получению ответа. Этот путь есть путь анализа.

Рассмотрим процесс расчленения сложной задачи методом анализа на примере следующей задачи.

Колхоз отправил на ссыпной пункт 1400 *кг* зерна — овса и ржи. Овса было 11 мешков. Ржи в мешке было 80 *кг*, а овса вдвое меньше. Сколько всего мешков отправил колхоз?

Запись условия задачи.

1400 кг	ржи	80 кг в мешке
	овса 11 мешков	в 2 раза меньше
	? мешков	

После повторения задачи проводится беседа. „Что спрашивается в задаче?". Дети повторяют вопрос задачи, и он записывается внизу на доске.

„Есть ли в условии числовые данные, которые необходимы для получения ответа сразу одним действием?" Ответ: „Одно число дано — 11 мешков, а другого числа, которое обозначало бы число мешков ржи, не дано". Число 11 мешков подписывается под вопросом.

„Прежде чем приступить к решению последнего вопроса, что надо узнать?" Ответ: „Сколько было мешков ржи?" Этот вопрос записывается на доске выше последнего. „Какие числа используем, чтобы получить ответ на этот вопрос?" Ответ: „80 кг". „Что обозначает это число?" Ответ: „Вес мешка ржи". Число подписывается под соответствующим вопросом. „А какое второе число? Что оно должно обозначать?" Ответ: „Вес всей ржи". „Дано ли оно?" Запишем выше вопрос: „Сколько было ржи?"

В таком плане проводится беседа до тех пор, пока к поставленному вопросу найдем в условии два числа.

К концу рассуждения запись на доске принимает следующий вид:

Сколько овса в мешке?

в 2 раза меньше 80 кг.

Сколько отправлено овса?

11 мешков.

Сколько отправлено ржи?

1400 кг.

Сколько мешков ржи?

80 кг.

Сколько мешков отправил колхоз?

11 мешков.

После этого нумеруются вопросы, помечаются действия и приводятся в соответствующий вид наименования.

1) Сколько овса в мешке?

80 кг : 2 =

2) Сколько отправлено овса?

$\times$ 11 =

3) Сколько отправлено ржи?

1400 *кг* —

4) Сколько мешков ржи?

: 80 *кг* =

5) Сколько мешков отправил колхоз?

11 мешков +

Указывая действия, учащиеся поясняют, каким действием получили недостающее число: так, поясняя второй вопрос, учащиеся говорят: „Чтобы узнать, сколько отправлено овса, полученное в первом действии частное умножим на 11“.

Другой путь расчленения сложной задачи на простые имеет исходным моментом числовые данные. Из данных в условии чисел выбираются два и по ним находится новое число, которое, наравне с имеющимися в условии, используется для нахождения новых числовых данных. Такое составление простых задач протекает до тех пор, пока не будет получен ответ на вопрос задачи. Путь разбора задачи от числовых данных — это путь синтеза.

Как невозможно расчленить задачу *анализом* без учета имеющихся в условии числовых данных, так невозможно осмысленно применить синтез без учета вопроса задачи.

В отдельных этапах мыслительного процесса ярче выступает либо анализ, либо синтез.

Использование анализа при решении задач даст наиболее благоприятный результат при условии ознакомления с ним на задачах с небольшим количеством действий и ясной структурой при непременном условии отчетливого понимания взаимосвязи между искомой величиной и числовыми данными. Он может быть применим при решении некоторых групп задач уже во II классе.

Синтез же может иметь место при решении сложных задач в момент усвоения зависимости между величинами. Таким образом, в разные периоды к задаче одной и той же структуры может быть применен ранее синтез и позднее анализ.

Рассмотрим на задачах в 3 действия последовательные этапы работы, способствующие развитию уменья анализировать задачу.

1) Предлагается задача без числовых данных. С грядки сняли несколько килограммов капусты и несколько килограммов брюквы. Сколько килограммов овощей сняли с грядки?

Учащиеся отмечают, что для ответа на вопрос задачи необходимо знать, сколько сняли килограммов капусты и сколько брюквы.

Подбираются числовые данные, и задача решается.

2) С грядки сняли 10 кочанов капусты по 2 *кг* каждый и 22 *кг* брюквы. Сколько килограммов овощей сняли с грядки?

Отметив, что для ответа на вопрос задачи надо знать, сколько сняли с грядки килограммов капусты и сколько брюквы, выделяется в условии число 22 *кг* и намечается план решения задачи:

а) Сколько килограммов сняли капусты?

б) Сколько килограммов овощей сняли с грядки?

Задача решается.

3) С грядки сняли 10 кочанов капусты по 2 *кг* и 6 брюкв по 3 *кг* каждая. Сколько килограммов овощей сняли с грядки?

Отмечается, что для решения задачи надо знать, сколько сняли килограммов капусты и сколько брюквы.

Указанная работа помогает учащимся наметить путь расчленения задач, последний вопрос которых — нахождение суммы двух чисел.

Для закрепления этого умения дается ряд упражнений в решении задач в 3 действия и даже в 4 действия на разные комбинации арифметических действий, но в которых ответ на последний вопрос неизменно находится сложением — нахождением суммы. Например:

Купили коробку цветных карандашей за 1 руб. и коробку черных за 60 коп. Сколько всего купили карандашей, если цветной карандаш стоит 20 коп., а черный 10 коп.?

В одном куске 17 *м* материи, в другом на 4 *м* больше, а в третьем на 2 *м* меньше, чем в первом. Сколько метров материи в трех кусках?

Все задачи этой группы имеют целью показать ученикам, что для нахождения суммы двух чисел надо знать эти числа, а также показать путь получения слагаемых.

$$100 : 20 + 60 : 10 =$$
$$17 + (17 + 4) + (17 - 2) =$$

Устный план к этим задачам составляется в форме вопросов. При записи решения задач возможно использовать однословные пояснения.

1) 17 *м* + 4 *м* = 21 *м* 2-й кусок;
2) 17 *м* — 2 *м* = 15 *м* 3-й кусок;
3) 17 *м* + 21 *м* + 15 *м* = 53 *м* в трех кусках.

Мы рассмотрели, как дети знакомятся с анализом задач на нахождение суммы. В таком же плане проводится работа еще над тремя группами задач: над задачами на нахождение остатка, на нахождение разности и на кратное сравнение.

Примеры задач:

№ 1. Было 3 куска материи по 6 *м*. Из 13 *м* сшили большое одеяло и из 4 *м* маленькое. Сколько метров материи осталось? Искомое — остаток.

№ 2. За коробку цветных карандашей заплатили 15 руб., а за черные — 12 руб. Каких карандашей куплено больше и на сколько, если цветной карандаш стоит 3 руб., а черный 2 руб? (Искомое — разность.)

№ 3. В одном мешке 8 кочанов капусты по 3 *кг* каждый, а в другом 2 больших тыквы по 6 *кг*. Что тяжелее — мешок с капустой или с тыквой? Во сколько раз тяжелее?

Работа над каждой группой задач развивает умение целесообразно подбирать числовые данные: чтобы найти остаток, надо знать, сколько было и сколько истрачено; чтобы найти разность двух чисел, надо знать эти числа. Такого рода работы вполне доступны учащимся II класса.

В дальнейшем эти задачи доводятся до четырех действий. Например:

Купили две коробки с карандашами. Коробка с цветными карандашами стоит 1 руб., а с черными на 40 коп. дешевле. Сколько всего купили карандашей, если цветной карандаш стоит 20 коп., а черный 10 коп.?

С участка увезли 5 мешков картофеля по 80 *кг* в каждом и 7 мешков по 60 *кг*, после этого на участке осталось 180 *кг*. Сколько картофеля собрали с участка?

Завершается работа над задачами каждого вида записью решения в виде примера (числовой формулы) и составлением к ним новых конкретных задач.

Запись решения сложной задачи в виде примера развивает умение обобщать, переходить от конкретного к отвлеченному, а составление по этим примерам новых задач развивает умение использовать полученное обобщение для нового частного случая.

Некоторые трудности представляет расчленение на простые таких задач, которые решаются обратными действиями. Например:

В мастерской из куска в 43 *м* сшили 9 мужских рубашек и несколько детских. На каждую мужскую рубашку пошло по 3 *м*, а на детскую по 2 *м*. Сколько сшили детских рубашек?

Установить зависимость между числовыми данными и искомой величиной в задаче такого рода будет легко, если подойти к ней от легкой прямой задачи: Из куска сшили 9 мужских рубашек и 8 детских. На каждую мужскую рубашку пошло 3 *м*, а на детскую 2 *м*. Сколько метров было в куске? Запись условия этой последней задачи в виде сложного примера: $3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = ?$ Она соответствует и записи решения этой задачи: $3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 43$. По отношению к этой задаче приведенную выше задачу можно рассматривать как обратную: $3 \cdot 9 + 2 \cdot ? = 43$.

Выражение условия таких задач в виде примера с неизвестным облегчает составление плана решения задачи, так как из примера очевидно, что число 43 является суммой двух произведений.

Изменение искомого числа углубляет работу.

$$3 \cdot 9 + ? \cdot 8 = 43;$$
$$? \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 43;$$
$$3 \cdot ? + 2 \cdot 8 = 43.$$

Такого рода упражнения раньше проводятся на задачах с конкретным содержанием, а далее на примерах с неизвестным.

Зависимость между числовыми данными в этом случае может быть вскрыта схемой условия.

$$43\ \text{м} \begin{cases} 9 \text{ рубашек по } 3\ \text{м} \\ ? \text{ рубашек по } 2\ \text{м} \end{cases}$$

Последующее усложнение этих задач

$$43\ \text{м} \begin{cases} 9 \text{ рубашек по } 3\ \text{м} \\ ? \text{ рубашек по } 2\ \text{м} \end{cases}$$
$$\overline{\quad ? \text{ рубашек} \quad}$$

или

$$43\ \text{м} \begin{cases} 9 \text{ рубашек по } 3\ \text{м} \\ 8 \text{ рубашек по } ?\ \text{м} \end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad ?\ \text{м}}$$

Сколько метров пошло на 1 мужскую и 1 детскую рубашку вместе?

Переход к более трудным задачам через знакомые легкие, как это было показано выше, следует применять неоднократно, так как в этом случае обычно затрудняющие детей задачи воспринимаются осознанно.

Рассмотрим еще один случай такого перехода:

В мастерскую привезли 111 *м* полотна и 120 *м* сатина. Из этой материи сшили рубашки. На полотняную рубашку пошло 3 *м*, а на сатиновую 4 *м*. Сколько сшили рубашек из всей материи?

Данная задача без труда решается учащимися; решение ее может быть выражено примером $111 : 3 + 120 : 4 = x$. Видоизменив искомую величину, получим ряд примеров, к каждому из которых может быть составлена задача.

$$x : 3 + 120 : 4 = 67;$$
$$111 : x + 120 : 4 = 67;$$
$$111 : 3 + x : 4 = 67;$$
$$111 : 3 + 120 : x = 67.$$

Условие одной из новых задач, записанное по схеме, будет иметь следующий вид:

$$67 \text{ рубашек } \begin{cases} 120 \text{ м по } 4 \text{ м}; \\ x \quad\quad \text{по } 3 \text{ м}. \end{cases}$$

Аналогичный переход от легких задач к более трудным, в применении к задачам на движение даст возможность усвоить и эти обычно затрудняющие детей задачи. (Примеры задач см. на стр. 46 и след.)

Во II классе при решении задач рассмотренной ступени анализ затруднителен, так как дети только еще усваивают обратную взаимосвязь между величинами; в III же классе он возможен и должен найти свое место.

Успешное использование анализа при решении задач в 5—6 действий обусловливается подбором задач с постепенно возрастающей трудностью анализа: сперва он применяется при решении задач, когда для получения ответа на каждый из вопросов плана задачи в условии недостает только одного числа. Далее анализ применяется при решении таких задач, когда для одного из вопросов задачи в условии нет ни одного числа.

П р и м е р з а д а ч и в т о р о г о в и д а: Колхоз отправил на ссыпной пункт 1200 *кг* зерна, овса и ржи. Ржи доставили 12 мешков по 80 *кг* мешок, овса же в мешке было в 2 раза меньше, чем ржи. Сколько всего мешков зерна отправил колхоз?

При анализе этой задачи могут встретиться затруднения при подборе числовых данных к вопросу: Сколько привезли мешков овса? так как в условии нет ни веса мешка с овсом, ни количества овса.

Следует заметить, что постоянно применять анализ при решении задач, которые дети могут решить самостоятельно, нецелесообразно, так как такого рода работа будет тормозить продвижение вперед. В таких случаях достаточно ограничиться составлением плана в виде числовой формулы и последующим объяснением всего хода решения задачи.

Также и при решении типовых задач после рассмотрения условия и установления взаимосвязи между величинами целесообразно приступить к объяснению решения задачи (задачи на нахождение чисел по сумме и разности, на исключение неизвестных и др.).

В некоторых случаях полезно методом анализа расчленить задачу на две части. Возьмем, например, следующую задачу:

С огорода собрали 3720 *кг* капусты и моркови, капусты в 5 раз больше, чем моркови. Часть моркови и 130 *кг* капусты продали, после чего капусты осталось в 9 раз больше, чем моркови. Сколько продали моркови?

Применяя анализ при расчленении задачи, намечаем в ней два основных вопроса: Сколько собрали овощей каждого вида? Сколько осталось овощей каждого вида? В соответствии с этим запишем условие задачи так:

Собрали:	Продали:
3720 *кг* капусты и моркови. Капусты в 5 раз больше, чем моркови.	130 *кг* капусты и часть моркови. Осталось капусты в 9 раз больше, чем моркови.

Исходя из этой записи, учащиеся легко придут к условному обозначению капусты и моркови частями.

Собрали: моркови — 1 часть;
капусты — 5 частей.

На основе этих рассуждений составляется подробный план решения.

1) Сколько всего равных частей составляют 3720 *кг*?

2) Сколько собрали моркови?

3) Сколько собрали капусты?

4) Сколько осталось капусты?

5) Сколько осталось моркови?

6) Сколько продали моркови?

В некоторых случаях взаимосвязь между величинами вскрывается при помощи наглядной записи рассуждения. Примером таких задач могут служить задачи, решаемые способом отношения.

Задача. На 3 рубашки расходуют 7 *м* полотна. Сколько метров полотна пойдет на 12 таких рубашек?

Схема условия

3 рубашки — 7 *м*
12 рубашек — ? *м*

Схема рассуждения

$$\frac{12 \text{ рубашек}}{\begin{array}{l} 3 \text{ рубашки} — 7 \text{ м} \\ 3 \text{ рубашки} — 7 \text{ м} \\ 3 \text{ рубашки} — 7 \text{ м} \\ 3 \text{ рубашки} — 7 \text{ м} \\ \hline \qquad\qquad 28 \text{ м} \end{array}}$$

По 7 *м* нужно взять 4 раза, так как в 12 содержится 4 тройки.

Запись решения задачи.

1) 12 рубашек : 3 рубашки = 4;

2) 7 *м* · 4 = 28 *м*.

Ответ: 28 *м*.

Завершающим моментом в осмысливании задач каждой группы следует считать упражнения в составлении задач детьми.

Примеры упражнений:

1. Решить задачи: № 1. В мешке 60 *кг* картофеля, а в корзине на 38 *кг* меньше. Сколько килограммов картофеля в корзине? № 2. В мешке 50 *кг* картофеля, он тяжелее корзины на 38 *кг*. Сколько килограммов картофеля в корзине?

Сравнить решения этих задач. Чем отличаются условия задач? Придумать задачу, как первая, к примеру: 62—19. Изменить условие ее так, чтобы задача была похожей на задачу № 2.

2. Решить задачу: С огорода сняли овощи. Капусты сняли 20 кочанов по 3 *кг* каждый, свеклы в 4 раза больше, а мор-

кови в 5 раз меньше, чем капусты. Сколько килограммов овощей сняли с огорода?

При решении после каждого действия записать кратко, что означает полученный результат. Заменить в условии задачи слова „в 4 раза больше“ и „в 5 раз меньше“ соответственно словами: „на 4 *кг* больше“ и „на 5 *кг* меньше“. Записать решение так же, как в первой задаче. Сравнить решение и полученные результаты.

3. Решить задачу: Две бригады посадили деревья. Первая посадила 60 кленов и 70 берез. Вторая — 75 кленов и столько же берез. Которая бригада посадила больше деревьев и на сколько больше?

а) Записать кратко условие задачи; б) решить задачу и записать с вопросами, в) придумать подобную задачу с теми же числами, но с другим содержанием (вместо „деревьев“ взять „метры“), г) решить новую задачу, д) сопоставить записи решения обеих задач, е) записать решение этих задач в виде сложного примера (формулы), ж) придумать новую задачу к этому примеру, з) каким еще способом можно решить эти задачи?

Мышление отражает связи между явлениями в суждении. В процессе решения задач развивается умение рассуждать. Вначале эти рассуждения кратки, немногословны, но по мере овладения понятиями суждения приобретают более содержательный характер.

Смысл каждого арифметического действия уясняется на простых задачах. Вычисления сопровождаются объяснением. Терминология, используемая учащимися при изучении арифметических действий, должна быть правильной, общепринятой, так как отвлеченные понятия в нашем мышлении выступают в значении слова.

Учитывая психологические особенности детей младшего возраста, можно допустить при первоначальном ознакомлении с арифметическими действиями использование глагольных форм: „сложить, отнять, вычесть, умножить (много раз взять), разделить“, которые постепенно заменяются обычными названиями действий: сложение, вычитание, умножение, деление. Используя при выяснении умножения слово „взять“, однако, следует избегать употребления его в значении названия действия, ибо в этом последнем случае засоряется математическая речь учащихся.

Овладение математической терминологией ведет к более углубленному овладению понятием. Так, сравнивая задачи с одинаковой структурой, устанавливая их общность и отмечая ее соответствующим словесным выражением „искомое задачи сумма", „искомое разность", „сумма дана", „дана сумма и разность", учащиеся глубже осознают взаимосвязь между величинами и арифметическими действиями. В процессе работы над постановкой устных и письменных вопросов, вырабатывается точная и краткая математическая речь учащихся.

Учащимся I класса свойственно сначала решить задачу, а потом объяснить ее решение. Выполнив арифметическое действие и найдя результат, ученики поясняют, что означает полученное число.

Учащиеся II класса могут давать такие пояснения в письменной форме, а в устной форме приучаются ставить вопросы, которые предшествуют решению задачи. Обосновывая выбор действия, они высказывают примерно такие суждения: „Чтобы узнать, сколько карандашей во второй коробке, нужно 7 карандашей умножить на 5".

Учащиеся III класса при самостоятельном решении задачи каждому действию предпосылают краткую запись вопроса, а в устной форме приучаются ставить подробный вопрос, например: Сколько километров прошел поезд за 4 часа, если он шел со скоростью 35 *км* в час?

В IV классе используются: краткое письменное пояснение каждого действия, запись кратких и подробных вопросов, чередуя их с решением или предпосылая весь план решению; связное изложение хода решения задачи в устной форме. Запись плана решения задачи в виде числовой формулы, по которой затем дается связное устное изложение всего хода решения задачи. Рассмотрим это последнее на задаче: Мастерская для изготовления косынок получила шерсть, причем белой шерсти было 2 *кг* 500 *г*, что составляло четвертую часть всей полученной шерсти. Сколько косынок связали в мастерской, если на каждую из 40 косынок пошло по 130 *г* шерсти, а на остальные по 160 *г*?

Устный план решения задачи сопровождается составлением числовой формулы в такой последовательности: „Прежде всего узнаем, сколько было шерсти. Для этого 2 *кг* 500 *г* умножим на 4; далее подсчитаем, сколько шерсти пошло на 40 косынок, для чего 130 *г* умножим на 40. Полученное произведение вычтем из общего количества веса шерсти и будем знать, сколько шерсти пошло на остальные косынки. Полученный остаток разделим на 160 *г* и будем знать, сколько связали косынок из остальной шерсти; это число прибавим к 40 и получим ответ на вопрос задачи".

$$40 + (2500 \cdot 4 - 130 \cdot 40) : 160 =$$

В процессе вычисления возможно ограничиться записью результатов с последующим пояснением их.

1) 2500 *г* · 4 = 10 000 *г* = 10 *кг* — вес всей шерсти;

2) 130 *г* · 40 = 5200 *г* — вес шерсти на 40 косынок;

3) 10 *кг* — 5200 *г* = 4800 *г* — вес шерсти на остальные косынки;

4) 4800 *г* : 160 *г* = 30 косынок связали из остальной шерсти;

5) 40 косынок + 30 косынок = 70 косынок связали из всей шерсти.

По сделанной записи учащиеся приучаются к связному изложению хода решения задачи.

Способность устанавливать логические связи развивается на задачах путем уяснения взаимосвязи между величинами, а также и между арифметическими действиями как на простых, так и на сложных задачах. Основными средствами для этой цели служат: схематическая запись условия, план решения задачи, числовая формула. Расчленение сложной задачи на простые происходит в процессе разбора задачи, носящего аналитико-синтетический характер.

Что в этом процессе будет доминировать — анализ или синтез, это определяется структурой задачи, а также и тем, в какой мере учащиеся овладели зависимостью между величинами, входящими в задачу.

Итак, работа над развитием мышления при решении задач определяется следующими положениями:

1) Система решения задач должна раскрыть перед учащимися смысл арифметических действий и зависимость между ними.

2) Группировка задач и последовательность их решения должны обеспечить постепенное нарастание трудностей.

3) Решение задач должно быть использовано для максимального развития мыслительных способностей ученика.

Н. С. Попова

ПРИЕМЫ ЛОГИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НАД АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1. Узловой момент в работе над задачей

Арифметика занимает почетное место среди других предметов начальной школы. Знания, умения и навыки, которые приобретают учащиеся на уроках арифметики, составляют основу их дальнейшего математического и естественно-научного образования. Немаловажную роль играет арифметика и в формировании характера ребенка, его культурного поведения и привычек. Нужна арифметика и в практической жизни. Но, пожалуй, еще важнее роль арифметики как фактора „развития логического мышления учащихся, их уменья устанавливать зависимости между величинами, делать правильные умозаключения“. [1] Эта цель преподавания арифметики осуществляется, главным образом, посредством решения арифметических задач.

Необходимо уточнить последнее утверждение. Не всякое решение задач содействует развитию логического мышления учащихся. Решение задач методом „проб и ошибок“ можно смело считать бесполезной тратой времени. Дело в том, что важен не только результат решения задачи — получение ответа на ее вопрос, — но и те процессы мышления, которые привели к решению, помогли найти правильный ответ. Важны не приемы решения, а приемы рассуждения. Ценность работы над задачей зависит от характера и качества этих приемов.

Итак, узловым моментом в работе над задачей является тот прием рассуждения, который приводит к составлению плана решения задачи и к самому решению.

---

[1] Программа начальной школы. Арифметика. Объяснительная записка, стр. 38, 1948.

Исходными логическими операциями, на которых основано такое рассуждение, являются, как известно, анализ и синтез. Под анализом в данном случае подразумевают акт мышления, восходящий от вопроса задачи к тем числовым данным, которые нужны для его решения. Под синтезом подразумевают акт мышления, идущий от числовых данных задачи к вытекающему из них вопросу.

Диалектический материализм устанавливает неразрывную связь между анализом и синтезом, рассматривает эти противоположные логические операции в их единстве.

Вот, что говорит Ф. Энгельс об анализе и синтезе: „...мышление состоит столько же в разложении объектов сознания на их элементы, сколько в соединении родственных между собою элементов в единстве. Без анализа нет синтеза".[1] Однако, в познавательном процессе одна из этих логических операций может оказаться исходной, ведущей, преобладающей.

Процесс мышления находится в тесной связи с развитием речи. Обе эти функции — речь и мышление — включаются в единый процесс, в котором причина и следствие постоянно меняются местами. При этом мышление в речи не только выражается, но по большей части оно в речи и совершается: формулируя мысль, мы ее формируем.

Речью формулируются готовые, как бы рожденные, осознанные мысли, но в то же время сами мысли формируются речью, отшлифовываются, уточняются.

Из этой бесспорной истины необходимо сделать следующий вывод. Если в работе над задачей решающую роль играет прием рассуждения, то необходимо „вынести это рассуждение наружу", выразить его в слове. Обдумывая задачу, переходя мысленно от данных к вопросу и от вопроса к данным, можно, в конце концов, придти к правильному ее решению. Однако, такое хаотическое блуждание мысли немногим лучше, чем метод „проб и ошибок". Мысль, не нашедшая своего выражения в слове или же сформулированная кое-как, остается неясной, расплывчатой. Такие упражнения не развивают логического мышления у учащихся, во всяком случае, не обеспечивают п л а н о м е р н о г о его развития.

Для выработки правильной речи учащихся решение задач является особо благоприятным материалом.

---

[1] Ф. Э н г е л ь с. Анти-Дюринг, МИЭ, т. XIV, стр. 43, изд. 1931 г.

Как же должна строиться работа над задачей, чтобы учащиеся, во-первых, правильно рассуждали и, во-вторых, умели облечь свои рассуждения в соответствующую словесную форму?

Для решения этого вопроса необходимо остановиться подробнее на видах рассуждений, относящихся к задачам, и на методике усвоения этих рассуждений, взятых порознь или в каких-либо комбинациях друг с другом, в зависимости от данной конкретной задачи.

2. Рассуждения, опирающиеся на анализ или на синтез, как на ведущую логическую операцию

Каковы бы ни были приемы логической работы над задачей, процесс мышления во всех случаях неизменно остается сложным, аналитико-синтетическим. В самом деле, начав рассуждение с анализа, т. е. выделив данные для решения главного вопроса задачи из ее условия, мы затем проверяем целесообразность намеченной комбинации, подбирая к этим данным вопрос, т. е. пользуемся синтезом. Наоборот, начав рассуждение с синтеза, т. е. остановившись на некоторой паре чисел и подобрав к ней вопрос, мы затем проверяем целесообразность намеченной комбинации под углом зрения главного вопроса задачи, т. е. пользуемся анализом.

Несмотря на такую неразрывную связь обеих логических операций, условимся называть коротко рассуждение, исходящее из анализа, просто анализом, а рассуждение, исходящее из синтеза, просто синтезом. Таким образом, выражения „анализ" и „синтез" мы будем употреблять в двух значениях этих слов: в узком смысле — для обозначения отдельного логического акта, идущего от вопроса к числовым данным или от числовых данных к вопросу, и в широком смысле — для обозначения ряда таких актов, с преобладанием в одном случае анализа, в другом случае — синтеза.

Условимся, далее, различать „полный" и „неполный" анализ. В обоих случаях путь мышления один и тот же — от вопроса задачи к тем данным, которые нужны для его решения, причем число логических звеньев, из которых состоит все рассуждение, должно быть равно числу действий, которыми решается задача. Но при полном анализе мы намечаем оба компонента, необходимые для выполнения данного действия, независимо от того, даны они в задаче или не даны; при „неполном" анализе достаточно указать только тот компонент, который нам пока неизвестен, отсутствие которого среди числовых данных не позволяет решить сразу поставленный вопрос. Лишь в отдельных случаях придется и при „неполном" анализе называть оба компонента, а именно, в тех случаях, когда оба они неизвестны, или оба, наоборот, известны.

При „неполном" анализе рассуждение приобретает характер установления причинно-следственных отношений между поставленным вопросом и условиями для его решения. „Почему нельзя сразу решить этот вопрос?" — спрашивает учитель. „Потому что мы не знаем, сколько стоит 1 *м* материи (или сколько было всего метров, или сколько стоила вся материя и т. п.)", — отвечает ученик.

Покажем разницу между „неполным" и „полным" анализом (в дальнейшем будем употреблять эти выражения без кавычек) на конкретной задаче:

Купили 12 *м* ситца по 10 руб. за метр и 15 *м* сатина. За весь этот материал заплатили 360 руб. Сколько стоит 1 *м* сатина?

Неполный анализ

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько стоит 1 *м* сатина?

Ученик. Нет, нельзя, так как мы не знаем, сколько заплатили за весь сатин.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько заплатили за весь сатин?

Ученик. Нет, нельзя, так как мы не знаем, сколько заплатили за весь ситец.

Учитель. А можно ли сразу узнать стоимость ситца?

Ученик. Да, это можно узнать сразу, так как мы знаём, что купили 12 *м* ситца по 10 руб. за метр.

Учитель. Значит, какой будет первый вопрос? И т. д.

В такой форме анализ применим, начиная с I класса. В дальнейшем учащиеся формулируют рассуждение в связной форме, без наводящих вопросов учителя:

„Сразу узнать, сколько стоит 1 *м* сатина, нельзя, так как неизвестно, сколько заплатили за весь сатин. Сколько заплатили за весь сатин тоже нельзя узнать сразу, так как неизвестно, сколько стоил весь ситец. Сколько стоил весь ситец можно узнать сразу, так как известно, что купили 12 *м* сатина и что каждый метр стоит 10 руб."

Как мы видим, на последнем этапе рассуждения указываются оба компонента, поскольку оба они даны. То же приходится делать, когда оба они „закрыты", так как отсутствие обоих мешает в равной мере решить сразу поставленный вопрос.

Полный анализ (по наводящим вопросам)

Учитель. Что спрашивается в задаче?

Ученик. В задаче спрашивается, сколько стоит 1 *м* сатина.

Учитель. Какие два числа надо знать, чтобы решить сразу этот вопрос?

Ученик. Надо знать, сколько стоит весь сатин и сколько метров сатина купили.

Учитель. Известны ли нам эти числа?

Ученик. Нам известно, сколько метров сатина купили — 15 *м*, но неизвестно, сколько стоил весь сатин.

Учитель. Итак, мы должны узнать, сколько стоил весь сатин. Какие два числа надо иметь, чтобы сразу решить этот вопрос?

Ученик. Надо знать, сколько стоил весь материал и сколько стоил ситец.

Учитель. Известны ли нам эти числа?

Ученик. Нам известно, сколько стоил весь материал — 360 руб., но неизвестно, сколько стоил ситец.

Учитель. Итак, надо узнать, сколько стоил весь ситец. Какие два числа надо иметь, чтобы решить сразу этот вопрос?

Ученик. Надо знать, сколько купили метров ситца и сколько стоит 1 *м* ситца.

Учитель. Известны ли нам эти два числа?

Ученик. Да, известны.

Учитель. Итак, с какого вопроса начнем составлять план решения задачи? И т. д.

Полный анализ (без наводящих вопросов)

Ученик. В задаче спрашивается, сколько стоит 1 *м* сатина. Чтобы решить этот вопрос, надо знать, сколько стоил весь сатин и сколько купили метров сатина.

Сколько купили метров сатина, нам известно — 15 *м*. А сколько стоил весь сатин — неизвестно.

Чтобы узнать, сколько стоил весь сатин, надо знать, сколько стоил весь материал и сколько стоил ситец. Первое число нам дано — 360 руб., а сколько стоил весь ситец, нам неизвестно.

Чтобы узнать, сколько стоил весь ситец, надо знать, сколько стоит 1 *м* ситца и сколько метров ситца купили. Оба эти числа нам известны.

Итак, первый вопрос задачи: Сколько стоил весь ситец? И т. д.

Как мы видим, план решения задачи сам собой вытекает из рассуждения, которое мы назвали анализом. Вопросы уже сформулированы — остается повторить их в обратном порядке. Вместе с тем, рассуждение, как таковое, с одной стороны, и составление плана, с другой, четко разграничены, как два самостоятельных этапа в работе над задачей.

Рассмотрим теперь применительно к той же задаче про ситец и сатин рассуждение, которое опирается на синтез. Вот соответствующий диалог между учителем и учеником:

Учитель. Купили 12 *м* ситца по 10 руб. за метр. Что можно узнать?

Ученик. Сколько стоил весь ситец.

Учитель. А сколько стоила вся покупка?

Ученик. 360 руб.

Учитель. Зная, сколько стоил весь ситец и сколько стоила вся покупка, что можно узнать?

Ученик. Сколько стоил весь сатин.

Учитель. А сколько купили метров сатина?

Ученик. 15 *м* сатина.

Учитель. Зная, сколько стоил весь сатин и сколько купили метров сатина, что можно узнать?

Ученик. Сколько стоит 1 *м* сатина.

Учитель. А что спрашивается в задаче?

Ученик. Спрашивается, сколько стоит 1 *м* сатина.

Учитель. Значит, мы правильно наметили путь, приводящий к ответу на вопрос задачи. Повторим план решения. И т. д.

В пределах каждого отдельного наводящего вопроса ученик мыслит. Но составление плана решения происходит независимо от логических усилий самого ученика. Ученик только запоминает тот план, который вытекает из вопросов учителя.

Допустим теперь, что ученик намечает план без помощи учителя. Для начала он выделяет пару чисел и подбирает к ним вопрос. Делая это наугад, он легко может ошибиться, наметить лишний вопрос. Так, в нашей задаче можно по недоразумению узнавать, сколько купили всего материи или на сколько больше купили сатина, чем ситца, хотя это и не нужно знать. Как убедить ребенка, что он напал на ложный след? С другой стороны, если ученик стоит на верном пути, как он докажет, что правильно сформулировал вопрос? Чтобы убедиться в этом, необходимо проследить весь дальнейший путь решения, до главного вопроса включительно, а это равносильно составлению плана наугад.

Ясно, что логическая значимость мыслительных процессов, связанных с синтезом, невысока. Во всяком случае, эти процессы лишены той четкости и целенаправленности, которые свойственны анализу. Кроме того, при синтезе не удается разграничить рассуждение, с одной стороны, и составление плана, с другой. И это тоже приходится расценивать, как слабую сторону синтеза.

Даже в развернутом виде рассуждение, основанное на синтезе, сохраняет те же недостатки:

„Зная, сколько купили метров ситца (12 *м*) и сколько стоит 1 *м* (10 руб.), можно узнать, сколько стоил весь ситец. (А нужно ли это узнавать и как доказать, что это нужно?)

„Зная, сколько стоил весь ситец и сколько стоила вся материя, можно узнать, сколько стоил весь сатин. (Но, опять-таки, нужно ли это узнавать и как доказать, что нужно?)

„Зная, сколько стоил весь сатин и сколько купили метров сатина, можно узнать, сколько стоит 1 *м* сатина, а это как раз и спрашивается в задаче. (Только теперь мы убеждаемся, что рассуждали правильно.)

Итак, рассуждение, основанное на синтезе, строится вне связи с главным вопросом, без необходимой целеустремленности, и тем самым значительно уступает в логическом отношении рассуждению, основанному на анализе.

Но почему в таком случае многие учителя относятся отрицательно к полному анализу? Попытаемся ответить на этот вопрос.

Во-первых, такие учителя неправильно понимают цель работы над задачей. Задачи средней трудности, говорят они, а тем более легкие задачи можно решать и без анализа, к трудным же задачам он неприменим; следовательно, он вообще не нужен. В действительности как раз к задачам средней трудности и особенно к легким задачам и следует применять полный анализ, поскольку такие задачи сами по себе мало развивают мышление ученика.

Во-вторых, многие учителя сами плохо владеют полным анализом, а иногда и совсем не знакомы с этим приемом.

В-третьих, полный анализ многословен и громоздок. Учителя находят, что такое упражнение непосильно учащимся начальной школы.

Это, действительно, серьезное возражение. Дело в том, что цепь умозаключений, которую способен удерживать в своем сознании младший школьник, его „логическая нить" короче логической нити взрослого, легко обрывается и, оборвавшись, с трудом восстанавливается. Каждый учитель знает, как легко „сбить" ученика, „запутать" и как трудно вывести его потом на правильный путь.

Очевидно, вопрос сводится к тому, чтобы создать условия для преодоления трудностей полного анализа, сделать его доступным учащимся II—IV классов. Условия эти, в основном, сводятся к следующему:

1) Правильная постановка работы над задачами в I и во II классах под углом зрения развития мышления учащихся.

2) Проведение в III классе специальных подготовительных упражнений к полному анализу арифметических задач.

3) Применение *наглядности для пояснения хода рассуждения*, предшествующего составлению плана решения. Ясно, что наглядный образ должен быть в данном случае подвижным, возникать постепенно по мере развертывания анализа, отображать каждое звено рассуждения, быть четким, лаконичным, удобообозримым.

4) Применение *наглядности* не только в качестве пассивного средства, но и в порядке самостоятельной работы учащихся: дети должны не только видеть тот образ, который иллюстрирует ход рассуждения, но воспроизводить его, а в дальнейшем самостоятельно строить.

5) Достаточно частое применение полного анализа, при *котором он должен стать привычным*.

Дальнейшее изложение и будет посвящено подробной разработке всех этих условий, делающих применение полного анализа не только желательным, но и возможным.

Что касается синтеза, то этот способ работы над задачей достаточно ясен — нет необходимости заниматься его детализацией. Однако, при решении некоторых типовых задач приходится прибегать к своеобразному сочетанию обеих логических операций — анализа и синтеза. Рассуждение, построенное таким образом, мы будем называть **анализом особого рода**.

3. Решение простых задач на сложение и вычитание в I классе

Уже при решении простых задач на сложение и вычитание в пределах 10 закладывается фундамент всей дальнейшей логической работы над задачами.

Решить простую задачу — значит произвести над ее числовыми данными такое арифметическое действие, которое вытекает из условия задачи и дает ответ на ее вопрос. Действие это надо суметь выбрать. Если нет выбора действия, нет и решения задачи.

Чтобы правильно выбрать действие, надо увидеть связь между условием задачи и ее числовыми данными, с одной стороны, и вопросом задачи — с другой, а также понять характер этой связи.

Связь между условием задачи и ее вопросом — двусторонняя. С одной стороны, из данных задачи вытекает ее вопрос. С другой стороны, для решения вопроса задачи необходимы ее данные. В первом случае увидеть связь — значит произвести логическую операцию, называемую синтезом. Во втором случае увидеть связь — значит произвести логическую операцию, называемую анализом.

На первых порах, при решении простых задач на сложение и вычитание, характер связи выражается словами „прибавить" и „отнять". Установить характер связи — значит понять задачу. Семилетний ученик I класса Славик Б. затруднялся решить задачу про поезд: „Поезд состоит из 18 вагонов; из них 12 жестких, остальные мягкие. Сколько мягких вагонов в этом поезде?" Вот как сформулировал он свое затруднение: „Я понимаю эту задачу, только не знаю, что надо сделать: прибавить или отнять?" Под словом „понимаю" Славик разумел не то, что разумеем мы. Он понимал, что речь идет о знакомых ему вещах — поезде и вагонах. Быть может, он смутно чувствовал, что связь между вопросом задачи и ее данными существует, но характера этой связи установить не мог. А это-то и показывает, что, вопреки собственным словам, он задачи не понял.

Чтобы связать условие задачи с ее вопросом, надо предварительно расчленить задачу на ее условие и вопрос, так как связывать можно только то, что первоначально осознано как раздельное.

Слушая задачу, которую предлагает учитель, ребенок воспринимает ее условие и вопрос слитно, как одно целое. Первая логическая операция в работе над задачей и будет состоять в ее расчленении. Расчленение это осуществляется посредством выделения вопроса задачи. Многие учителя недооценивают этот момент. Необходимо помнить, что без него нет вообще логической работы над задачей. Отделив вопрос от условия задачи, мы вместе с тем отделяем условие задачи от ее вопроса. Это первый и вместе с тем важнейший шаг — ключ к дальнейшим логическим операциям. Для начала необходимо расчленение, для завершения всей работы — осознание ее целевой установки, усвоение вопроса задачи.

Когда вопрос выделен и условие тем самым обособлено, начинается их сопоставление. Внешним выражением результата этой логической работы является выбор действия. Если ребенок сумел выбрать действие, это значит, во-первых, что он увидел двустороннюю связь между условием (с входящими в него числовыми данными) и вопросом, и во-вторых, что он сумел реальную связь, которая составляет сюжет задачи, перевести на условный арифметический язык, т. е. подвести данное конкретное действие над группами предметов под арифметическое понятие „прибавить“ или „отнять“.

Работа над задачей заканчивается формулировкой ответа на ее вопрос. Чтобы выполнить это требование, необходимо осознать все предшествующие этапы работы как единый целенаправленный процесс. Это третий и последний узловой момент в работе над задачей.

Если к этим трем узловым моментам прибавить все остальные детали работы над задачей, будем иметь общеизвестную схему: сообщение задачи, повторение по наводящим вопросам и без вопросов, выделение вопроса задачи, ее решение, устное сообщение ответа, выявление действия, которым задача решена, его запись и формулировку ответа.

Вводя впервые решение простых задач на сложение и вычитание, надо позаботиться о том, чтобы ребенок различал задачу и пример. Это тоже имеет значение с логической точки зрения.

Чтобы подчеркнуть разницу между задачей и примером, которая на данном этапе сводится, в сущности, к отсутствию в задаче слов „прибавить“ или „отнять“, следует несколько расцветить ее сюжет. Делать это надо осторожно и весьма экономно, чтобы лишними словами и подробностями не перегрузить текст задачи. Дело сводится к тому, чтобы вместо ничего не говорящих, абстрактных выражений „один“ и „другой“, „первый“ и „второй“ применять выражения „большой“ и „маленький“, „длинный“ и „короткий“, „верхний“ и „нижний“, „старший“ и „младший“ и т. п. Какими-нибудь одним-двумя словами можно подчеркнуть конкретную ситуацию, создать живой образ. Для начала необходимо иллюстрировать задачу предметами, потом изображениями предметов на плакате или на доске. Изображения предметов из обыкновенной писчей бумаги, слегка подкрашенные цветными карандашами, прекрасно выглядят на классной доске, к которой их можно приклеить вареным картофелем или даже просто водой.

Вот несколько простейших задач для начала:

1) Стенной календарь украсили флажками: 1 флажок слева, 1 справа. Сколько всего флажков? (Иллюстрируется соответствующими предметами.)

2) У завода стояло 2 грузовика: 1 грузовик уехал. Сколько грузовиков осталось? (Иллюстрируется грузовичками из папки; сначала учитель держит их рядом; потом один из них отводит в сторону.)

3) Девочка сорвала 2 василька и 1 ромашку. Сколько всего цветков сорвала девочка? (Иллюстрируется цветами из бумаги, которые приклеиваются к доске; стебельки пририсовываются мелом.)

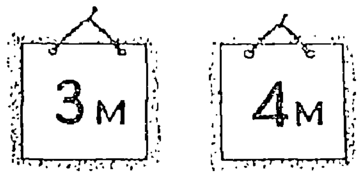
4) На ветке было 4 листика; 3 листика осыпалось. Сколько листиков осталось на ветке? (Иллюстрируется бумажными листьями, окрашенными в желто-зеленый цвет; стебель пририсовывается.)

Иллюстрации этого рода имеют тот недостаток, что позволяют чисто зрительным путем, без применения действий, находить сумму и остаток. Значительно ценнее такие способы, при которых дети видят только данные числа, но не видят искомых. Так, например, иллюстрируя задачу на сложение (о карандашах) следует показать учащимся оба слагаемых, а затем сложить карандаши в пенал, чтобы скрыть сумму. Иллюстрируя задачу на вычитание, можно уменьшаемое (например, 7 бумажных яблок) положить на глазах у детей в корзиночку из папки, а затем вынуть из нее и показать классу вычитаемое (например, 3 яблока). Чтобы найти скрытый в корзиночке остаток, придется волей-неволей произвести вычитание. Таким образом, и при сложении, и при вычитании будет обеспечен главнейший логический момент в работе над задачей — выбор действия.

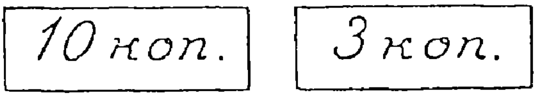
Помимо того значения, которое на первых порах имеет красочная иллюстрация для различения примера и задачи, предметное изображение условия задачи заменяет запись числовых данных, помогает запомнить задачу, повторить и решить. Кроме того, благодаря иллюстрации фактически обособляются условие с числовыми данными и вопрос: на доске все, кроме вопроса; вопрос добавляется на словах.

Разумеется, нет надобности иллюстрировать все простые задачи на сложение и вычитание: на это прежде всего нехватило бы времени. Запись числовых данных тоже по отношению к этим задачам не обязательна, тем более, что дети на первых порах не умеют ни писать, ни читать. Но совершенно необходимо исподволь приучать детей к записи числовых данных на доске, как только они познакомятся с цифрами и некоторыми буквами.

Чтобы облегчить переход от красочной иллюстрации к сухой цифровой записи, можно ввести, в качестве промежуточных этапов, запись числовых данных на отдельных табличках, а затем запись на доске в рамках. Так, например, задачу о покупке материи на платье двум сестрам можно зафиксировать посредством двух табличек с соответствующими числами: 3 *м* и 4 *м*.



Числовые данные к задаче, в которой надо отнять 3 коп. от 10 коп., можно записать прямо на доске, окружив каждое число рамкой.



Роль табличек и рамок состоит в том, что они помогают привлечь внимание учащихся к записи на доске, сосредоточить их внимание на этой записи, что не всегда сразу удается.

Только в конце первой четверти можно перейти к обыкновенной записи числовых данных на доске. Значение этих записей для последующей работы над задачей выяснится в дальнейшем.

Итак, к концу октября дети должны научиться расчленять задачу на ее условие и вопрос, воспринимать условие и вопрос в их аналитико-синтетическом единстве, наконец, вести работу над задачей под углом зрения ее вопроса, т. е. выполнять эту работу как целенаправленный процесс. В это время полезно применять такой прием. После решения задачи учитель вызывает четырех учеников, которые становятся у доски лицом к классу. Первый из них повторяет условие задачи, второй — вопрос, третий — решение и четвертый — ответ. Самостоятельно пользуясь указанными выражениями, связывая с ними соответствующее содержание, дети хорошо усваивают несложную терминологию, относящуюся к арифметическим задачам, и тем самым привыкают уже в этот ранний период обучения связывать мышление с речью, выражать мысли в слове.

4. Неполный анализ составных задач

Существует мнение, что подходить к составным задачам следует синтетически — из двух простых задач составлять задачу в два действия. Конечно, и этим способом можно научить детей решать составные задачи, но, если ставить себе целью развитие их логического мышления, следует предпочесть обратный путь — от готовой задачи в два действия к составляющим ее простым задачам. Специфика составной задачи заключается в том, что ее нельзя решать сразу, одним действием. Если нанизывать простые задачи одну за другой на какую-нибудь сюжетную нить, специфика составной задачи будет неизменно ускользать от учащихся. В самом деле, каждую новую задачу, присоединенную к ранее решенным, можно будет решить сразу. Задачу, составленную таким образом, дети будут воспринимать как механическое соединение простых задач. Арифметическую зависимость второй задачи от первой они так и не почувствуют.

Наоборот, если при первом знакомстве с составной задачей отправляться от готовой задачи в два действия, разница между простой и составной задачей выступает с полной отчетливостью.

Для начала можно взять такую задачу, которую удобно проиллюстрировать на предметах:

В коробку положили 6 красных карандашей и 4 зеленых. Потом взяли из коробки 7 карандашей. Сколько карандашей осталось в коробке?

Учитель показывает детям сначала 6 красных карандашей, потом 4 зеленых. Для большей убедительности карандаши должны быть снаружи соответствующего цвета.

Дети пересчитывают каждую группу карандашей. Учитель записывает эти числовые данные на доске. Затем он складывает карандаши в коробку. Дети не видят, сколько их всего: промежуточное искомое скрыто в коробке. После этого учитель вынимает 7 карандашей и предлагает детям пересчитать их. Это третье данное он записывает на доске, а главное искомое остается скрытым в коробке.

Учащиеся повторяют задачу, выделяют вопрос и решают задачу в уме, как они привыкли делать это по отношению к простым задачам. У всех получился правильный ответ: 3 карандаша.

Учитель. Как мы узнали, что в коробке осталось 3 карандаша?

Ученик. От 10 карандашей мы отняли 7 карандашей и получилось 3 карандаша.

Учитель (указывая на доску, где записаны числовые данные). От 10 карандашей? Но такого числа нет в задаче!

Ученик. К 6 карандашам надо прибавить 4 карандаша и получится 10 карандашей.

Учитель. Что мы узнали, складывая 6 карандашей и 4 карандаша?

Ученик. Мы узнали, сколько было всего карандашей в коробке.

Учитель. Вот, видите, сначала мы узнали, сколько было всего карандашей в коробке — это первый вопрос, а потом узнали, сколько карандашей осталось — это второй вопрос. Итак, сколько же вопросов в этой задаче?

Ученик. В этой задаче два вопроса.

Далее учитель подчеркивает, что задачи иногда решаются одним действием. Но бывают задачи, которые нельзя решить сразу — приходится сделать сначала одно действие, потом другое, например, сначала сложить, потом отнять.

С этого времени перед решением каждой задачи дети прежде всего устанавливают, можно ли решить ее сразу. Если выясняется, что это невозможно, учитель спрашивает: „А что можно узнать сразу?" Так дети начинают впервые применять простейший анализ — первый шаг на пути к полному анализу в III—V классах.

Подобно полному анализу, этот простейший неполный анализ опирается на сложный аналитико-синтетический процесс мышления. Вопрос: „Можно ли решить задачу сразу?" побуждает детей подбирать данные к вопросу — это момент аналитический в познавательном смысле слова. Вопрос: „А что можно узнать сразу?" побуждает детей подбирать вопрос к данным — это момент синтетический. Однако ведущим является все же не синтез, а анализ.

От полной предметной наглядности можно перейти к плакату или рисунку на доске. Вместе с тем можно несколько углубить тот простейший неполный анализ, которым мы пользовались в самом начале:

В большом мешке было 10 *кг* луку, а в маленьком 7 *кг*. Продали 15 *кг*. Сколько килограммов луку осталось?

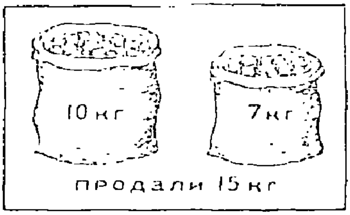


Рисунок на доске поясняет текст задачи, но не иллюстрирует самих чисел.

Вот как можно „углубить" анализ этой задачи:

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько луку осталось?

Ученик. Нет, нельзя.

Учитель. Почему нельзя узнать этого сразу?

Ученик. Потому что мы не знаем, сколько было всего луку.

Учитель. А сколько было всего луку, можно узнать сразу?

Ученик. Да, это можно узнать сразу.

Вопрос „почему" заполняет тот логический пробел, который при простейшем неполном анализе получается между вопросом: „Можно ли узнать сразу?" и вопросом: „А что можно узнать сразу?"

Привыкнув к вопросу „почему", дети начинают анализировать задачу, не ожидая этого вопроса. Они говорят: „Сразу нельзя узнать, сколько луку осталось, потому что мы не знаем, сколько было всего луку".

Большое значение имеет такой анализ при решении задач с выражениями „больше" или „меньше" на столько-то. Задачи простые этого рода дети зачастую пробуют решать двумя действиями, а составные — одним действием. Это объясняется тем, что учитель не приучил их вдумываться в вопрос задачи, не спрашивает, можно ли сразу решить этот вопрос.

Во втором полугодии дети решают задачи в два действия на сложение, вычитание, умножение и деление. И к этим задачам вполне приложим неполный анализ с вопросом „почему". В это время следует познакомить их с терминами „простая задача" и „составная задача". Простая задача решается сразу, одним действием. Составную задачу нельзя решить сразу; она решается двумя действиями. Такие объяснения дети должны усвоить.

Решив составную задачу, дети строят простые задачи, на которые им пришлось расчленить данную составную. Пусть, например, дана задача:

За барабан и 3 одинаковых мяча заплатили 17 руб. Мяч стоит 4 руб. Сколько стоит барабан?

Решение задачи записывается так:

Задача

1) 4 руб. · 3 = 12 руб.
2) 17 руб. — 12 руб. = 5 руб.

Ответ: 5 руб.

Теперь учитель предлагает детям составить задачи к каждой строчке.

Первая задача. Купили 3 одинаковых мяча. Каждый мяч стоит 4 руб. Сколько израсходовали денег?

Вторая задача. За барабан и мячи заплатили 17 руб. Все мячи стоят 12 руб. Сколько стоит барабан?

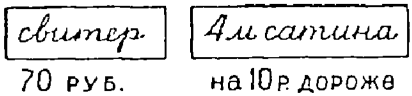
Надо следить за тем, чтобы в формулировку задач дети не вносили лишних данных, например, во второй задаче говорили не о трех мячах, а о всех мячах.

Так уже в I классе можно научить детей расчленять составную задачу на ряд простых.

Задачу о барабане и мячах можно иллюстрировать рисунком. Но делать это каждый раз невозможно, а записи числовых данных не всегда удается придать удобообозримый вид. В этом случае помогают рамки.

Дана задача: Купили свитер за 70 руб. и 4 *м* сатина. За весь сатин заплатили на 10 руб. *больше*, чем за свитер. Сколько стоит 1 *м* сатина?

Записать условие этой задачи можно следующим образом:



Благодаря удобной записи легче повторить и проанализировать задачу.

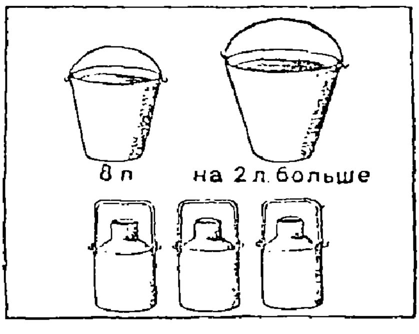
Во II классе вводятся задачи в три действия. Простейшими задачами этого рода являются задачи на два умножения и сложение, на два умножения и вычитание. Например:

На мельницу отправили 3 подводы и 2 грузовика с зерном. На каждой подводе было по 6 мешков зерна, на каждом грузовике по 20 мешков. Сколько всего мешков зерна отправили на мельницу?

Эта задача на сумму двух произведений. А вот аналогичная задача на разность:

У садовника было 3 ящика с цветочной рассадой, по 30 кустиков в каждом ящике. Эту рассаду он высадил на 4 клумбы, по 20 кустиков на каждую клумбу. Сколько еще кустиков осталось?

На вопрос, почему нельзя решить такую задачу сразу, дети иногда указывают только одно из неизвестных. Тогда учитель спрашивает дополнительно: „А еще почему?“ Такое добавление не нарушает стройности анализа: оба числа в равной мере нужны нам для того, чтобы решить задачу сразу.



Иначе обстоит дело с более трудными задачами в три действия. Например:

В одном ведре было 8 *л* молока, в другом на 2 *л* больше. Все это молоко разлили поровну в 3 бидона. Сколько молока вошло в каждый бидон?

Ведра и бидоны нарисованы на доске.

Анализ обычно протекает следующим образом:

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько молока вошло в каждый бидон?

Ученик. Нельзя, так как мы не знаем, сколько литров молока было во втором ведре.

Это одна из самых распространенных ошибок: пропуск промежуточного логического звена. Чтобы вернуть ученика на правильный путь, учитель задает вопрос: „А разве в бидоны влили молоко только из второго ведра?" Обычно этого вопроса бывает достаточно, чтобы получить от ученика правильное объяснение.

Ученик. Мы не можем сразу узнать, сколько молока вошло в каждый бидон, так как не знаем, сколько молока было в двух ведрах вместе.

Учитель. Можно ли сразу узнать, сколько молока было в двух ведрах вместе?

Ученик. Нет, так как мы не знаем, сколько молока было во втором ведре.

Решение записываем без вопросов, как и в I классе:

Задача.

1) 8 *л* + 2 *л* = 10 *л*;
2) 10 *л* + 8 *л* = 18 *л*;
3) 18 *л* : 3 = 6 *л*.

Ответ: 6 *л*.

Полезно и в этом случае, опираясь на запись действий, составить те простые задачи, на которые мы расчленили данную задачу:

1) В одном ведре было 8 *л* молока, в другом на 2 *л* больше. Сколько молока было во втором ведре?

2) В одном ведре было 8 *л* молока, в другом 10 *л*. Сколько всего молока было в обоих ведрах?

Труднее всего составить задачу к третьей строчке. Детям никак не удается отрешиться от сюжета задачи в целом. В текст третьей задачи они вводят лишние данные, например: „В двух ведрах было 18 *л* молока". Задача должна быть сформулирована так: 18 *л* молока разлили поровну в 3 бидона. Сколько молока вошло в каждый бидон?

В течение всего второго года обучения дети решают обыкновенные, нетиповые задачи в 2—3 действия. Это как раз самый благоприятный период для применения неполного анализа, пользуясь вопросом „почему". Надо только следить за тем, чтобы дети, рассуждая, не пропускали промежуточного логического звена. Если учитель допускает такие ошибки учащихся, он не только не развивает логического мышления ученика, но, наоборот, притупляет мышление, вносит путаницу, неясность в мысли ученика, приучает его быть неточным. Такой „анализ" может принести ученику не пользу, а вред.

5. Полный анализ в III и IV классах

Все первое полугодие учащиеся III класса продолжают практиковать неполный анализ. Однако теперь они уже в состоянии делать его без наводящих вопросов учителя.

Выделив вопрос задачи, они сами устанавливают, почему нельзя сразу на него ответить. Далее, они объясняют, почему нельзя сразу найти то искомое, которого нехватает для ответа на главный вопрос задачи, и т. д., пока не доберутся до вопроса, который можно решить сразу. Образец такого неполного анализа без наводящих вопросов учителя приведен в этой статье на стр. 89.

В конце первого полугодия можно начать подготовку к полному анализу. Переход от неполного анализа к полному значительно сложнее, чем переход от одного этапа неполного анализа к другому его этапу.

Прежде всего необходимо выяснить, понимает ли ученик, что для решения задачи надо выполнить одно или несколько арифметических действий и что арифметические действия выполняются над числами, причем в каждом случае для выполнения действия необходимо и достаточно иметь два числа. Вместе с тем надо проверить, знают ли учащиеся терминологию действий, отдают ли себе отчет в том, что для нахождения суммы надо знать слагаемые, для нахождения остатка — уменьшаемое и вычитаемое и т. д.

Подготовительные упражнения следует провести на простых задачах, причем необходимо учесть все три возможных случая, которые встречаются при анализе составных задач: 1) оба числа, необходимые для решения поставленного вопроса, неизвестны; 2) одно число известно, другое неизвестно; 3) оба числа известны.

Первый шаг лучше связать с задачами, в которых одно число известно. Ухватившись за эту ниточку, дети легче догадаются, чего нехватает для решения поставленного вопроса, и построят соответствующее рассуждение. Вот образцы *задач этого рода:*

1) В коробку положили 8 красных карандашей и несколько зеленых. Сколько всего карандашей положили в коробку?

2) Учительница принесла в класс 30 перьев. Несколько перьев она раздала детям. Сколько перьев у нее осталось?

3) Купили несколько метров материи по 35 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?

4) На мельницу привезли несколько одинаковых мешков с зерном, всего 240 *кг*. Сколько килограммов зерна в каждом мешке? Или: Сколько привезли мешков?

Остановимся подробнее на первой из этих задач.

Учитель. Можно ли решить эту задачу?

Ученик. Нет, нельзя.

Учитель. Почему нельзя ее решить?

Ученик. Потому что мы не знаем, сколько было зеленых карандашей.

Учитель. Сколько же надо иметь чисел, чтобы решить эту задачу?

Ученик. Надо иметь два числа.

Учитель. И каким действием она решается?

Ученик. Сложением.

Вывод. Чтобы узнать, сколько всего карандашей в коробке, надо знать; сколько положили красных карандашей и сколько положили зеленых карандашей.

Вывод этот делают учащиеся под руководством учителя. После этого учитель сообщает, что зеленых карандашей положили 12, и дети решают задачу.

Второй этап подготовительных упражнений — работа над простой задачей без числовых данных. Вот образцы задач этого рода:

1) На тарелку положили несколько ломтей белого хлеба и несколько ломтей черного. Сколько всего ломтей хлеба положили на тарелку?

2) На полке стояли книги. Несколько книг сняли с полки. Сколько книг осталось?

3) Продали несколько одинаковых мешков картофеля. Сколько выручили денег?

4) Колхозница продала пуд муки и на эти деньги купила несколько метров материи. Сколько стоит 1 *м* материи? Или: Сколько метров материи купила колхозница?

И на этих задачах дети учатся формулировать соответствующее рассуждение.

Чтобы узнать, сколько было всего ломтей хлеба на тарелке, надо знать: сколько было ломтей хлеба белого и сколько — черного.

Чтобы узнать, сколько книг осталось на полке, надо знать: сколько книг стояло сначала и сколько книг сняли. И т. д.

Следует заметить, что задачи с неполными данными или совсем без данных, а также задачи без вопроса предлагаются детям и раньше — во II и даже в I классе. Но в то время эти задачи играли другую роль. На них учащиеся убеждались, что правильно составленная задача должна состоять из условия, числовых данных и вопроса, учились подбирать вопрос к числовым данным и данные к вопросу. Теперь цель работы над задачей без числовых данных или с неполными данными иная: научить детей формулировать то рассуждение, которое войдет затем в полный анализ, как его составная часть.

Прежде чем переходить к составным задачам, надо проделать полный анализ нескольких простых задач с данными и вопросом. Например:

1) Купили 5 *м* материи по 18 руб. за метр. Сколько израсходовали денег?

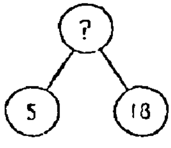
2) Поезд прошел 180 *км*, делая по 45 *км* в час. Сколько часов шел поезд?

В это время мы начинаем применять прием, который в дальнейшем будет широко использован при анализе составных задач. Состоит он в следующем.

Вопрос задачи мы обозначаем кружком с вопросительным знаком. Затем, установив, что для решения этого вопроса надо иметь два числа, мы отводим от кружка две стрелки и против каждой из них рисуем по кружку. После этого остается установить, для каких чисел предназначаются эти кружки и записать числа в кружках.

Чертежи к обеим задачам и запись решения их на доске будет иметь следующий вид:

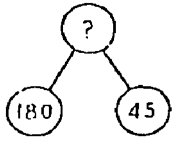
Задача № 1.



18 руб. · 5 = 90 руб.

Ответ: 90 руб.

Задача № 2.



180 *км* : 45 *км* = 4.

Ответ: 4 часа.

Беседа по поводу первой задачи ведется следующим образом: Что спрашивается в задаче? Что надо знать, чтобы решить этот вопрос? Знаем ли мы, сколько купили метров материи и сколько стоит 1 *м*? Каким действием решается эта задача?

После этого учащиеся должны повторить рассуждение в связной форме: чтобы решить вопрос задачи, надо знать, сколько купили метров материи и сколько стоит 1 *м*; оба эти числа нам известны. Чтобы решить задачу, надо 18 руб. умножить на 5, получится 90 руб. Ответ: 90 руб.

Таким же способом анализируется задача про поезд и любая простая задача.

Если числа в кружках расположены так, как их принято располагать при записи действия (задача про поезд), может явиться соблазн поставить между кружками с числами знак действия. Однако числа могут оказаться и в ином положении, как мы это видим в задаче о покупке материи. Поэтому следует вообще отказаться от применения в схеме знаков действий.

Не следует также ставить у чисел в кружках наименований, чтобы чертеж занимал как можно меньше места. Компактная схема нагляднее, чем громоздкий чертеж. В этом и заключается преимущество схемы с кружками по сравнению с теми многословными записями, которые обычно рекомендуются в методических руководствах.

Поупражнявшись в анализе простых задач на все четыре действия, можно перейти к анализу задач в два действия. Для начала удобнее взять задачи, которые заканчиваются сложением, как это рекомендовал в свое время Н. Цветков. [1] Например:

Купили меховой воротник за 360 руб. и 3 *м* материи по 150 руб. Сколько израсходовали денег?

Первое звено анализа этой задачи подготовлено работой над простыми задачами, в которых недостает одного из компонентов. Его место займет кружок с вопросительным знаком. Второе звено — анализ простой задачи на сложение. Запись на доске должна иметь следующий вид:

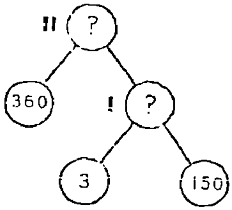
[1] Н. Цветков. Методические заметки о решении арифметических задач. Изд. 2-е, исправленное, 1905.

Задача.

Воротник — 360 руб.

Материи — 3 *м* по 150 руб.

Анализ.



План и решение.

1) Сколько стоила вся материя?

150 руб. $\times$ 3 = 450 руб.

2) Сколько израсходовали денег?

360 руб. + 450 руб = 810 руб.

Ответ: 810 руб.

После сообщения задачи, записи числовых данных и повторения надо предупредить учащихся, что теперь мы проанализируем эту задачу, разберем ее, подобно тому, как мы анализировали простые задачи.

Затем выделяется вопрос задачи.

Учитель. Обозначим этот вопрос кружком с вопросительным знаком. Что надо знать, чтобы решить вопрос задачи?

Ученик. Надо знать, сколько заплатили за воротник и сколько заплатили за материю.

Учитель чертит на доске 2 стрелки и к каждой стрелке по кружку.

Учитель. Знаем ли мы, сколько заплатили за воротник?

Ученик. Знаем: 360 руб.

Учитель. Запишем это число в левом кружке. А кто догадается, что надо поставить в правом кружке?

Ученик. В правом кружке надо поставить вопросительный знак, потому что мы не знаем, сколько заплатили за материю.

Учитель ставит в правом кружке знак вопроса.

Учитель. Что надо знать, чтобы вычислить расход на материю?

Ученик. Надо знать, сколько купили метров материи и сколько заплатили за 1 *м*.

Учитель чертит 2 стрелки и 2 кружка.

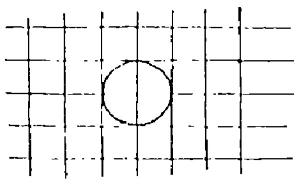
Учитель. Знаем ли мы, сколько купили метров материи и сколько платили за 1 *м*?

Ученик. Знаем. В левом кружке надо записать число 3, а в правом — 150, так как купили 3 *м* материи по 150 руб.

Анализ закончен. Теперь надо перейти к составлению плана. Дети повторяют первый вопрос, учитель ставит римскую цифру I около соответствующего кружка. Потом учащиеся повторяют вопрос задачи, а учитель ставит цифру II около верхнего кружка с вопросительным знаком. Далее следует запись решения в тетрадях.

Первое время не следует вводить черчение схемы анализа самими учащимися. Черчение им нравится, но отвлекает их внимание от процесса рассуждения. Достаточно, если они будут следить за работой учителя на доске и отвечать на его вопросы, а затем, уже после решения задачи, повторят весь анализ в связной форме. В нашем опыте дети быстро овладевали этим уменьем, повторяя анализ не только по готовой схеме, но и без схемы, которую к этому времени стирали с доски.

Позднее следует объяснить детям, как чертить схемы, научить их располагать кружки симметрично, вписывая каждый кружок в четыре клеточки арифметической тетради, как показано на нашем рисунке. Достаточно посвятить этому один урок. В дальнейшем не стоит заниматься черчением схем в классе — это отнимает много времени. Такую работу дети могут выполнять и охотно выполняют дома.



В классе же можно ограничиваться рисунками учителя на доске.

Анализ задач в три действия удобнее опять-таки начать с задач, последнее действие которых сложение и вся схема имеет симметричный вид. До сих пор схема разветвлялась в одном направлении (надо решить 5—6 таких задач), теперь она будет иметь две ветки. Например:

Колхоз отправил на мельницу две подводы с зерном. На одной подводе было 7 мешков зерна по 60 *кг* в каждом мешке, на другой — 5 мешков по 80 *кг* в каждом. Сколько всего килограммов зерна привезли на мельницу?

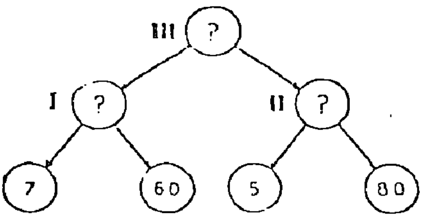
Анализ задачи в 3 действия представляет собой довольно длинное рассуждение. В таких случаях и подавно учащиеся III класса легко теряют логическую нить, если не разбить все рассуждение на отдельные звенья и не создать опоры для различения этих звеньев в наглядном образе. Вместо того, чтобы рисовать кружки на доске, можно заготовить их заранее из плотной бумаги, например, из обложек от старых тетрадей, причем устроить так, чтобы парные кружки были одного и того же цвета. Вопрос задачи можно обозначить, положим, белым кружком, искомое количество зерна на каждой подводе — серыми кружками, числовые данные, относящиеся к первой подводе, — розовыми кружками, а ко второй подводе — голубыми.

Запись и схема на доске будут иметь следующий вид:

З а д а ч а.

7 *м* по 60 *кг* }
5 *м* по 80 *кг* } Ск. привезли килограммов зерна?

Анализ. *Решение.*



1) 60 *кг* · 7 = 420 *кг*;
2) 80 *кг* · 5 = 400 *кг*;
3) 420 *кг* + 400 *кг* = 820 *кг*.

О т в е т: 820 *кг*.

В дальнейшем те из детей, у которых найдутся дома карандаши или краски, начинают по собственной инициативе раскрашивать кружки. Схемы оживают, и трудности полного анализа становятся преодолимыми.

Заметим, что было бы неправильно задерживаться на задачах одного и того же рода. Привыкнув располагать кружки определенным образом, учащиеся попадают во власть формы, оказавшейся как бы вне зависимости от того логического содержания, с которым она первоначально связывалась. Схема перестает помогать мышлению, а, наоборот, мешает ему. Поэтому наряду с „симметричными" задачами в три действия надо предлагать учащимся „несимметричные" задачи в два действия, как приведенная выше задача о покупке мехового воротника и материи.

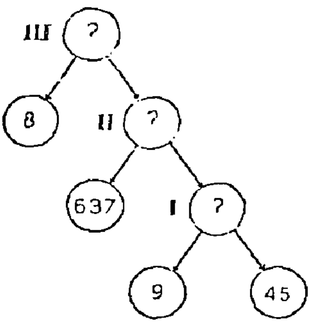
После задач, которые оканчиваются сложением, можно давать задачи, в которых последнее действие вычитание. Вот, например, „симметричная" задача этого рода:

Один насос работал 4 часа, давая по 138 ведер воды в час, а другой 3 часа, давая по 168 ведер в час. Который из них накачал больше воды и на сколько больше?

Следующая задача тоже оканчивается вычитанием, но она в два действия, и схема анализа имеет только одну ветку:

Купили 3 *м* материи по 28 руб. за метр. Сколько сдачи получили со 100 руб.?

Как мы видим, все это легкие задачи и по числу действий, и по условию, и по числам. Таких задач много в первой части задачника для III класса. Аналогичные задачи можно брать и из сборника для II класса. Весь этот материал был пройден в свое время, для учащихся III класса в конце первого полугодия он окажется повторительным. Но как раз на таких легких уже ранее решенных задачах и следует практиковать вначале обыкновенный полный анализ. Полезно также решить повторно, пользуясь этим методом, задачи на сложение и вычитание многозначных чисел.



Следующим этапом работы будет решение „несимметричных“ задач в три действия. Например:

На 637 руб. купили 9 *м* шерстяной материи по 45 руб. за метр и 8 *м* шелка. Сколько стоит 1 *м* шелка?

Эта задача оканчивается делением на равные части. Схема анализа, как показано на рисунке, будет иметь одну ветку. Если эту задачу видоизменить так, чтобы она оканчивалась делением по содержанию, анализ становится более трудным. Однако, к концу третьей четверти учащиеся III класса справляются и с этой разновидностью обратных задач на сумму двух произведений.

Вот еще первый вариант задач такого рода: [1]

№ 282. Колхоз купил 3 молотилки по 875 руб. и 4 веялки. Сколько стоит каждая веялка, если за все машины колхоз уплатил 3605 руб.?

№ 292. На 5 печей и 2 плиты пошло 7825 штук кирпича. На каждую печь пошло 1375 кирпичей. Сколько кирпичей пошло на каждую плиту?

[1] Н. Н. Никитин, Г. Б. Поляк, Л. Н. Володина. Сборник арифметических задач и упражнений для III класса начальной школы. 1946.

А вот второй вариант:

№ 694. В совхозе продавали вишню по 135 руб., а клубнику по 170 руб. за центнер, и за все выручили 9110 руб. Сколько продали вишни, если клубники продали 25 *ц*?

Аналогичной задачи рядом с приведенной нет, но задачу № 695 легко переделать так, чтобы она оканчивалась делением по содержанию:

Для школы купили 15 классных досок и несколько парт. За все уплатили 20 895 руб. Классная доска стоит 28 руб., парта — 65 руб. Сколько купили парт?

Поскольку эта задача изменена, ее можно проанализировать и решить в классе со слов учителя, а задачу № 694 задать для аналогичной работы на дом.

Деление по содержанию в качестве последнего действия нисколько не затрудняет учащихся, если речь идет о нахождении кратного отношения двух чисел. Например:

На одном участке леса росло 785 деревьев, на другом 420. На первом участке срубили 225 деревьев, на втором — 280 деревьев. На котором участке и во сколько раз больше осталось деревьев?

Эта задача имеет симметричную схему анализа, в отличие от предыдущих, несимметричных.

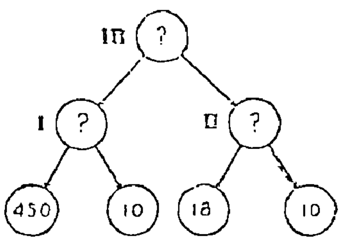
Несколько труднее тоже симметричная задача, которая оканчивается не кратным сравнением, а умножением:

№ 103. От куска материи длиной в 18 *м* продали 10 *м* за 450 руб. Сколько стоит оставшаяся часть материи?

Анализируя эту задачу, можно рассуждать по-разному; это тоже увеличивает логические трудности разбора. Вот один из возможных вариантов:

Чтобы решить главный вопрос задачи, надо знать: сколько стоит 1 *м* материи (?) и сколько метров осталось (?).

Чтобы узнать, сколько стоит 1 *м* материи, надо знать: сколько метров продали (10 *м*) и сколько за них получили (150 руб.).



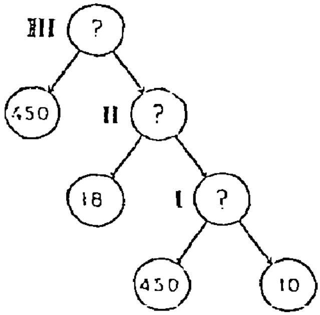
Чтобы узнать, сколько метров осталось, надо знать: сколько было всего метров (18 *м*) и сколько метров продали (10 *м*).

Составим план решения.

И т. д.

Второй вариант дает несимметричную схему.

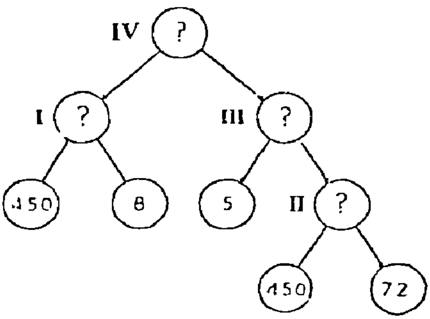
В этом случае рассуждение придется начать так:



Чтобы решить главный вопрос задачи, надо знать: сколько получили за 10 м (450 руб.) и сколько стоит весь кусок (?). И т. д.

В IV классе необходимо продолжать применение анализа задач, постепенно усложняя эту работу в двух направлениях: с одной стороны, берутся более трудные задачи, с другой стороны, учащимся предоставляется большая самостоятельность. Ученик связно анализирует задачу, поясняя анализ чертежом на доске, или, если анализ был задан на дом, ученик рассуждает вслух, глядя на чертеж в тетради. Во втором полугодии учащиеся постепенно привыкают обходиться при анализе без чертежа. На экзамене можно требовать от них самостоятельного устного разбора задач.

В начале года учащиеся IV класса практикуют анализ примерно той же степени трудности, что и в III классе. Вот, например, задача в четыре действия, которая в логическом отношении является вполне посильной ученикам IV класса, если в III классе они уже упражнялись в полном анализе арифметических задач:



Один насос работал 8 час., накачивая по 450 ведер воды в час. Другой насос работал 5 час., накачивая в час на 72 ведра больше, чем первый насос. Сколько всего ведер воды накачали оба насоса?

Появление четвертого действия и возможность начать по-разному решение этой задачи осложняет работу ученика. Хорошо, если учитель располагает цветными мелками.

Тогда можно резче разграничивать анализ и составление плана. При проведении анализа кружки рисуются обыкновенным мелом. Переходя к составлению плана, учитель спрашивает:

Учитель. С каких вопросов можно начать составление плана? Пойди, покажи на схеме, где обозначены эти вопросы? Повтори каждый из них. С какого же вопроса начнем мы решать задачу?

Ученик. Сначала узнаем, сколько ведер воды накачал первый насос.

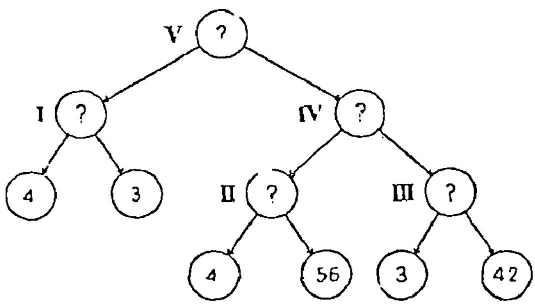
Учитель. Покажи на схеме числа, которые потребуются для решения этого вопроса.

Ученик называет числа „8 часов" и „450 ведер", учитель ставит римскую цифру I у кружка с вопросом, а кружки с числовыми данными затушевывает цветным мелом. Затем выясняются следующие вопросы — второй, третий, четвертый. Каждый раз учитель нумерует соответствующий кружок с вопросительным знаком, а два относящиеся к нему кружка с числовыми данными закрашивает каким-нибудь новым цветом. Тем самым он как бы вынимает из схемы пару за парой все числовые данные, подчеркивая каждое логическое звено при составлении плана.

Некоторые типовые задачи, например, на смешение I рода (нахождение среднего арифметического) легко поддаются полному анализу. Например:

Машина шла 4 часа со скоростью 56 *км* в час, а затем еще 3 часа со скоростью 42 *км* в час. Сколько километров проходила она в среднем за 1 час?

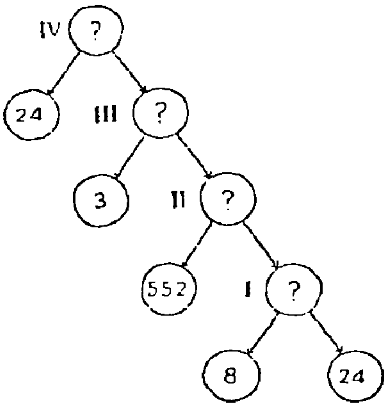
Схема анализа этой задачи является как бы дальнейшим развитием схемы задачи о насосах. Логических трудностей она не представляет, хотя и решается в 5 действий.



Интересно, что в нашем опыте удавалось получать вполне сознательный ответ на вопрос: почему разветвляется схема?

Ученик. Потому что мы не знаем обоих чисел, необходимых для решения пятого вопроса, и еще мы не знаем обоих чисел, нужных для решения четвертого вопроса.

Хорошо удается анализ усложненных задач (обратных) на сумму двух произведений:

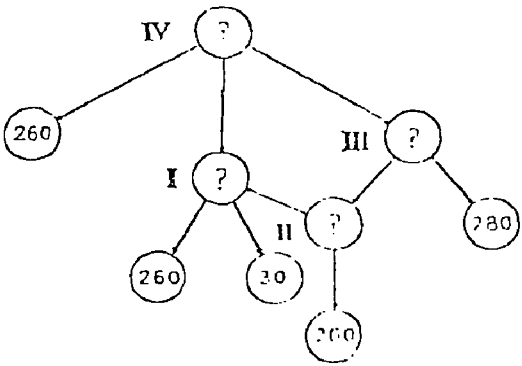


За 3 *м* сукна и 5 *м* сатина заплатили 552 руб. Метр сатина стоил 24 руб. Во сколько раз 1 *м* сукна дороже, чем 1 *м* сатина?

Задачи, в которых последнее действие — разностное или кратное сравнение, анализировались еще в III классе. Это один из легких случаев. В IV классе такую задачу дети могут разобрать совершенно самостоятельно, начертив к ней схему на доске и в тетради.

С некоторой осторожностью надо подходить к задачам с выражениями „больше" или „меньше на столько-то" или „во столько-то раз". Много таких задач дети решали и III и даже во II классе, не применяя к ним, однако, полного анализа. Теперь они будут интересовать нас именно с этой стороны. Возьмем, например, такую задачу:

Самолет пролетел в первый час 260 *км*, во второй — на 30 *км* больше. В третий час он пролетел на 280 *км* меньше, чем в первые два часа вместе. Сколько всего километров пролетел самолет?

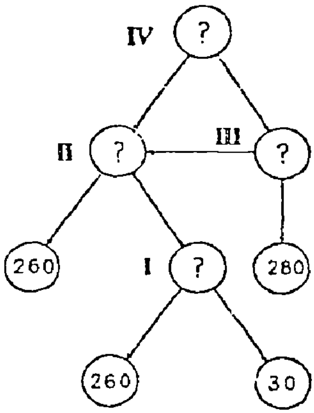


Это легкая задача, но анализ ее отличается некоторыми специфическими трудностями.

Чтобы решить главный вопрос задачи, необходимо знать, сколько километров пролетал самолет в каждый час. Выясняя вопрос о расстоянии, которое самолет пролетел в третий час, мы вынуждены поставить вопрос о расстоянии, которое он пролетел в первый и второй час вместе. Но вопрос о втором часе уже обозначен на схеме — к нему и ведем стрелку. Получается своеобразное переплетение стрелок, которое показывает, что решение нельзя начинать по-разному: возможен только один определенный порядок действий.

Перечень вопросов по схеме должен точно соответствовать числу вопросов при составлении плана. Вот почему стрелку от кружка, обозначающую искомую сумму первого и второго слагаемого, мы направили не к новому кружку, а к тому, который еще раньше был обозначен на схеме.

Но если один и тот же вопрос не должен появляться ни в схеме анализа, ни в плане решения задачи больше одного раза, то одно и то же число может повторяться в схеме и несколько раз выступать в роли компонента действий при решении задачи. Так, например, в нашей последней схеме число 260 записано три раза.



Помимо той непосредственной помощи, которую схема оказывает ученику в его логической работе, она позволяет уже после решения задачи углубить эту работу, продолжить ее.

Всматриваясь внимательно в схему к задаче о самолете, мы замечаем, что дело может быть сведено к сложению не трех, а только двух слагаемых. В самом деле, для нахождения третьего слагаемого необходимо предварительно найти сумму первого и второго слагаемых.

Следовательно, для решения вопроса задачи достаточно к этой сумме прибавить третье слагаемое. Число действий не изменится, но анализ и план решения станут проще, яснее.

Облекая анализ задачи в определенную словесную форму, добиваясь от учащихся точных формулировок сначала в виде ответов на наводящие вопросы, позднее в виде связного рассуждения, мы создаем условия, при которых мышление совершается, формируется в речи.

Требование точности формулировок заставляет нас прежде всего обращать внимание еще при неполном анализе на правильную постановку наводящих вопросов. Учитель спрашивает: „Можно ли решить вопрос задачи?" Конечно же можно! Ведь условие задачи так и построено, чтобы можно было решить ее вопрос. Следует спросить: „Можно ли сразу, одним действием решить вопрос задачи“, или, когда анализ подходит к концу: „Можно ли теперь решить главный вопрос задачи?“

Далее, при полном анализе, необходимо различать глаголы „знать“ и „узнать“: „Чтобы узнать, сколько всего израсходовали денег, надо знать, сколько заплатили за картофель и сколько заплатили за муку“. Решая вопрос, мы находим неизвестное число, узнаем это число. Но чтобы выполнить соответствующее действие, надо иметь два числа, надо знать эти числа. Иногда они прямо даны в задаче, мы знаем эти числа. Иногда мы знаем только одно из них, иногда не знаем ни одного. Тогда мы продолжаем анализ и опять говорим: „Чтобы узнать неизвестное число, надо знать то-то и то-то“. Слова „чтобы узнать“ можно заменить равнозначащими выражениями: „чтобы найти неизвестное число“, „чтобы решить поставленный вопрос“ и т. п.

Очень большое значение для логической выразительности речи имеет *правильная интонация: повышение и понижение голоса,* ударение на отдельных словах, паузы. Тягучая монотонная речь учителя и такая же бесцветная речь ученика лишают анализ необходимой живости и остроты.

Немаловажное значение имеет рисование схемы одновременно с развертыванием анализа, постепенное появление каждого ее звена на глазах у детей, а также выразительный жест — указание на кружки в схеме, выделение их попарно, движение руки от звена к звену.

Поясним роль пауз и ударений на конкретном примере: — Чтобы узнать, сколько всего израсходовали денег, надо знать (ударение, понижение голоса, пауза): сколько заплатили за стол (повышение голоса, пауза) и сколько заплатили за стулья.

Сколько заплатили за стол, нам известно: 160 руб. А сколько заплатили за все стулья (ударение, пауза) — мы не знаем.

Чтобы узнать, сколько заплатили за все стулья, надо знать (ударение, повышение голоса, пауза): сколько купили стульев (повышение голоса, пауза) и сколько платили за каждый стул. И т. д.

Подбирая компоненты для решения того или другого вопроса, надо называть число, если оно дано, а в противном случае устанавливать, что оно неизвестно. В нашем изложении эти примечания стоят в скобках, но их надо читать.

6. Анализ особого рода

Некоторые категории типовых задач, как уже было указано, вполне поддаются полному анализу. Таковы задачи на смешение 1-го рода и на встречное движение. Сюда же относятся задачи на простое тройное правило, решаемые способом прямого и обратного приведения к единице. Например:

За 3 *м* сатина заплатили 72 руб. Сколько стоят 5 *м* такого сатина?

Рассуждаем так: чтобы ответить на вопрос задачи, надо знать: сколько метров сатина было во втором куске (5 *м*) и сколько стоил 1 *м*.

Чтобы узнать, сколько стоил 1 *м*, надо знать: сколько метров было в первом куске (3 *м*) и сколько заплатили за этот кусок (72 руб.).

Зная числа 3 *м* и 72 руб., можно начать решение задачи. И т. д.

Задача эта, как мы видим, решается способом прямого приведения к единице.

Изменим ее так, чтобы она решалась способом обратного приведения:

За 3 *м* сатина заплатили 72 руб. Сколько метров такого сатина можно купить на 120 руб?

И к этой задаче легко применить полный анализ.

Однако есть и такие виды типовых задач, которые на первый взгляд не поддаются полному анализу. Отчасти это объясняется тем, что многие из них требуют двух ответов.

Типовые задачи, требующие двух ответов, можно разбить на две категории: 1) задачи, для решения которых не приходится вводить условной „части" условной единицы и 2) задачи, которые связаны с введением условной единицы.

К первой группе относятся: пропорциональное деление, нахождение неизвестного по разности двух чисел, исключение одной из величин посредством вычитания.

Из задач второй группы в начальной школе решаются только задачи на нахождение слагаемых по их сумме и разности, по их сумме и кратному отношению.

Остановимся подробнее на задачах первой группы.

Возьмем задачу на п р о п о р ц и о н а л ь н о е   д е л е н и е:

Купили по одинаковой цене 7 *м* красного сатина и 5 *м* черного. За весь этот сатин заплатили 288 руб. Сколько стоит отдельно красный и черный сатин?

Эта задача решается сложением (7 *м* + 5 *м* = 12 *м*), делением на равные части (288 руб. : 12 = 24 руб.) и двумя умножениями (24 руб. $\times$ 7 = 168 руб.; 24 руб. $\times$ 5 = 120 руб.). Нетрудно видеть, что она сводится к задаче на простое тройное правило, решаемой способом прямого приведения к единице.

Анализ этой задачи начинаем, как полагается, с выделения ее вопроса. Но одного выделения недостаточно. Необходимо произвести анализ самого вопроса.

Учитель. Сколько ответов будет в этой задаче?

Ученик. Два ответа.

Учитель. Почему?

Ученик. Потому что красного и черного сатина было не поровну.

Учитель. Итак, войдет ли главный вопрос в план решения?

Ученик. Нет, не войдет. Вместо него у нас будет два отдельных вопроса: сколько стоит весь красный сатин и сколько стоит весь черный сатин?

Учитель обращается к доске, где перед тем были записаны числовые данные, и под ними делает запись вопроса с раздвоением:

Сколько стоит весь ↗ красный сатин?
↘ черный сатин?

Учитель. Можно ли одновременно решать два вопроса?

Ученик. Нельзя.

Учитель. Узнаем сначала, сколько стоит весь красный сатин.

За этим следует неполный или полный анализ. Поскольку дети начинают решать задачи на пропорциональное деление в 1-м полугодии III класса, приходится в это время пользоваться неполным анализом. В IV классе применяется полный анализ:

Узнаем, сколько стоит весь красный сатин. Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать: сколько купили метров красного сатина (7 *м*) и сколько стоит 1 *м* (?).

Чтобы узнать, сколько стоит 1 *м* сатина, надо знать: сколько купили всего сатина (?) и сколько всего уплатили (288 руб.).

Чтобы узнать, сколько всего сатина купили, надо знать: сколько купили красного сатина (7 *м*) и сколько купили черного сатина (5 *м*).

Составим план решения. Первый вопрос: сколько купили всего красного и черного сатина? Второй вопрос: сколько стоит 1 *м* сатина? Третий вопрос: сколько стоит весь красный сатин?

После этого можно поставить и четвертый вопрос: сколько стоит весь черный сатин?

Изменим задачу про красный и черный сатин так, чтобы она решалась способом обратного приведения к единице.

Купили по одинаковой цене 12 *м* красного и черного сатина. За весь красный сатин заплатили 168 руб., за весь черный — 120 руб. Сколько купили отдельно красного и черного сатина?

Опять анализируется вопрос задачи и записывается с раздвоением:

$$\text{Сколько купили метров} \begin{cases} \nearrow \text{красного сатина?} \\ \searrow \text{черного сатина?} \end{cases}$$

Анализ вопроса, как и анализ задачи, учащиеся привыкают делать в связной форме:

В этой задаче будет два ответа, так как красного и черного сатина купили не поровну. Поэтому главный вопрос не войдет в план решения задачи. Вместо него у нас будет два вопроса: сколько купили метров красного сатина и сколько купили метров черного сатина? Решать одновременно два вопроса нельзя. Узнаем сначала, сколько купили метров красного сатина.

Далее следует полный анализ, составление плана и решение задачи.

Задачи на н а х о ж д е н и е н е и з в е с т н о г о п о р а з н о с т и д в у х ч и с е л требуют также двух ответов, но анализ осложняется в этом случае еще одним обстоятельством. Подготовить детей к соответствующему рассуждению удобнее на простейших задачах данного типа. Например:

Купили по одинаковой цене 8 *м* красного сатина и 5 *м* черного, причем за весь красный сатин заплатили на 72 руб. больше, чем за весь черный. Сколько стоит 1 *м* такого сатина?

Эта задача на нахождение неизвестного по разности двух чисел не требует двух ответов.

Прежде, чем ее решать, обратим внимание учащихся на разницу в стоимости красного и черного сатина.

У ч и т е л ь. Почему за красный сатин заплатили больше, чем за черный?

У ч е н и к. Потому что красного сатина купили больше, чем черного.

Учитель. На сколько больше?

Ученик. На 3 *м* больше.

Учитель. А на сколько больше заплатили?

Ученик. На 72 руб.

Учитель. Зная, на сколько больше купили красного сатина и на сколько больше за него заплатили, что можно узнать?

Ученик. Можно узнать, сколько стоит 1 *м* сатина.

В этом случае мы прибегаем к синтезу как наиболее простому способу вскрыть зависимость между числами 3 *м* и 72 руб. В дальнейшем необходимость такого подсказывающего вопроса отпадет, и можно тотчас после усвоения содержания задачи приступить к ее анализу.

Чтобы узнать, сколько стоит 1 *м* сатина, надо знать: на сколько больше купили красного сатина, чем черного (?) и на сколько больше за него заплатили (на 72 руб.).

Чтобы узнать, на сколько больше купили красного сатина, чем черного, надо знать: сколько купили красного сатина (8 *м*) и сколько черного (5 *м*).

Составим план решения. И т. д.

После таких легких задач в два действия можно перейти к решению задач на нахождение неизвестного по разности двух чисел в четыре действия.

Берем ту же задачу про красный и черный сатин, изменив только ее вопрос: сколько стоит отдельно красный и черный сатин?

Начинаем, как и в задачах на пропорциональное деление, с расчленения главного вопроса:

$$\text{Сколько стоит весь} \begin{cases} \text{красный сатин?} \\ \text{черный сатин?} \end{cases}$$

Анализируем задачу применительно к первому из этих двух вопросов.

Узнаем, сколько стоит весь красный сатин. Чтобы решить этот вопрос, надо знать: сколько купили метров красного сатина (8 *м*) и сколько стоит 1 *м* (?).

Дальнейший ход рассуждения совпадает с анализом приведенной ранее задачи в два действия.

Предыдущая задача сводилась к прямому приведению к единице. Изменим ее так, чтобы она решалась обратным приведением:

За красный сатин уплатили 192 руб., а за черный, по той же цене, 120 руб. При этом красного сатина купили на 3 *м* больше, чем черного. Сколько купили отдельно красного и черного сатина?

По отношению к задачам этого рода тоже приходится сначала устанавливать причинно-следственную зависимость между разницей в количестве метров и разницей в стоимости, а затем применить те же приемы рассуждения, которые были изложены раньше.

Переходим к третьей категории типовых задач — на исключение одной из величин посредством вычитания.

Возьмем задачу этого типа:

В первый раз купили 5 *м* сатина и 12 *м* полотна и за всю покупку заплатили 288 руб. Во второй раз за 5 *м* сатина и 7 *м* полотна заплатили по тем же ценам 218 руб. Сколько стоит 1 *м* полотна и 1 *м* сатина?

В этой задаче, как во всех предыдущих, два ответа; кроме того, здесь нам снова придется вычислять неизвестное по разности двух чисел. Таким образом, учащиеся подготовлены к тем рассуждениям, которые связаны с типовыми задачами этого рода.

Под числовыми данными записываем вопрос задачи с расчленением его на два:

5 *м* сатина — 12 *м* полотна — 288 руб.
5 *м* сатина — 7 *м* полотна — 218 руб.

Сколько стоит 1 *м* полотна? 1 *м* сатина?

Учитель. Почему во второй раз материал стоил дешевле, чем в первый? Могло ли это зависеть от сатина?

Ученик. Нет, так как сатина купили столько же.

Учитель. А от полотна?

Ученик. Полотна купили меньше, потому и заплатили меньше.

Учитель. Посмотрите на вопросы, записанные под чертой. На который из них легче ответить?

Ученик. Легче узнать, сколько стоит 1 *м* полотна.

Учитель. Как это узнать?

Ученик. Надо узнать, на сколько меньше во второй раз заплатили, на сколько меньше купили полотна, а затем первое число разделить на второе.

Рассуждение это, как мы видим, носит синтетический характер, хотя опирается на причинно-следственную зависимость, которая была перед этим установлена. Применение синтеза в данном случае вполне целесообразно.

В нашем опыте мы составляли план решения этой первой части задачи и записывали план и решение в тетрадях, находя более удобным разгрузить внимание учащихся, прежде чем приступать к работе над второй частью задачи.

После записи переходим к анализу второй части задачи.

Учитель. Что еще осталось узнать?

Ученик. Осталось узнать, сколько стоит 1 *м* сатина.

Учитель. Нужны ли нам все эти данные (показывает на доску), чтобы решить второй вопрос задачи?

Ученик. Нет, не нужны. Достаточно взять одну строчку, например, вторую.

Учитель. Составим задачу, по которой можно было бы узнать, сколько стоит 1 *м* сатина.

Ученик. За 5 *м* сатина и 7 *м* полотна заплатили 218 руб. Метр полотна стоит 14 руб. Сколько стоит метр сатина?

Это одна из обратных задач на сумму двух произведений. Ее можно подвергнуть полному анализу.

Чтобы решить вопрос задачи, надо знать: сколько купили метров сатина (5 *м*) и сколько заплатили за этот сатин (?).

Чтобы узнать, сколько заплатили за весь сатин, надо знать: сколько всего израсходовали денег (218 руб.) и сколько заплатили за полотно.

Чтобы узнать, сколько заплатили за полотно, надо знать: сколько купили метров полотна (7 *м*) и сколько стоит 1 *м* (14 руб.).

Составим план решения этой задачи. И т. д.

Теперь нам осталось рассмотреть задачи, которые связаны с некоторым предположением, с введением условной единицы, т. е. задачи на нахождение слагаемых по их сумме и разности, по их сумме и кратному отношению.

Издавна существует традиция пользоваться при решении этих задач графическим методом, который состоит в том, что после сообщения задачи соотношения между ее числовыми данными изображаются посредством соотношения отрезков, как это рекомендовал в свое время Шохор-Троцкий.

Необходимо сразу же сделать оговорку: для задач на расстояние, на движение, особенно для типовых задач на встречу графический метод вполне пригоден. В этих задачах нет элемента условности: отрезок на чертеже изображает, правда, в уменьшенном виде, действительные расстояния и отрезки.

В двух задачах, которые интересуют нас в данный момент, роль чертежа иная. Отрезок может изображать все, что угодно: вес, вместимость, площадь, объем и т. д. Речь идет не об отрезке, как таковом, а только о соотношении отрезков.

Непригодность графического метода в отношении задач последней группы для учащихся III и IV классов выступила с полной убедительностью при проведении соответствующего эксперимента.

В каждом из этих классов дети обучались длительно (с 20 ноября до конца декабря) решать задачи на нахождение слагаемых сначала по их сумме и кратному отношению, затем по их сумме и разности. Все объяснения были основаны на графической интерпретации арифметического содержания задачи.

Нахождение слагаемых по их сумме и кратному отношению поставлено первым, так как предшествующий опыт неоднократно убеждал нас, что этот вид задач дается детям сравнительно легче, чем нахождение слагаемых по их сумме и разности. Кроме того, отправной точкой в работе послужили задачи на пропорциональное деление, которые иллюстрировались чертежом, и от них удобно перейти к изображению кратного соотношения чисел.

До начала эксперимента на основании контрольных работ было установлено, что подавляющее большинство учащихся как III, так и IV класса не умели решать ни того, ни другого вида задач. Что касается III класса, то это в порядке вещей. Но и несколько IV классов оказались, примерно, на том же уровне, вероятно потому, что эксперимент проводился тотчас после окончания войны — в 1945/46 учебном году.

Работа проводилась над каждым видом задач фронтально, причем каждый раз по чертежу на доске дети делали чертежи у себя в тетрадях. Задачи были построены на небольших числах, без всяких осложняющих данных. После ряда уроков на каждый вид задач была предложена аналогичная самостоятельная работа на решение (с чертежом) задач такого же рода.

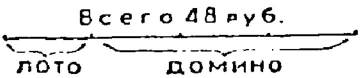
Результаты получились весьма хорошие: все учащиеся, за исключением одного-двух, пропустивших занятия по болезни, справились как с первой, так и со второй задачей и с соответствующими чертежами.

Через месяц была дана самостоятельная работа на обе разновидности задач сразу. Получился неожиданный результат: задачи были решены подавляющим большинством учащихся правильно; что же касается чертежей, то только третья часть их соответствовала своему назначению. Таким образом в обоих классах, как оказалось, 60% задач решено правильно вопреки неправильным чертежам.

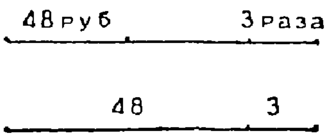
Тот факт, что чертежи выполнялись вначале успешно, а под конец так неудачно, объясняется просто. В первом случае дети действовали по инерции, автоматически воспроизводя запомнившийся им графический образ; получилась видимость благополучия, так как именно этот образ и требовался. Во втором случае они успели забыть оба чертежа. Вот тут-то и обнаружилось, что чертеж не играет той роли в работе над задачей, которую ему приписывали. *Детские рисунки свидетельствуют о том, что ученик рассматривает* чертеж только как место для записи числовых данных. Он и не пытается выразить посредством чертежа соотношение числовых данных задачи. Приводим ниже образцы задач с такими неудачными чертежами.

За лото и домино заплатили 48 руб. Домино в 3 раза дороже, чем лото. Сколько стоит отдельно лото и домино?

Правильный чертеж

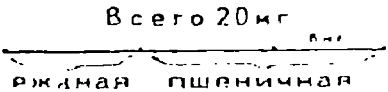


Неправильный чертеж

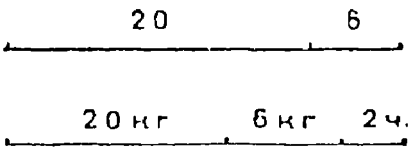


Купили 20 *кг* муки, пшеничной на 6 *кг* больше, чем ржаной. Сколько купили отдельно муки каждого сорта?

Правильный чертеж



Неправильные чертежи



Как мы видим, чертеж не достигает своей цели. Вводя чертеж, мы требуем, чтобы условные „части" ученик условно замения отрезками. Этим требованием мы ставим его перед двойной трудностью, предполагающей более высокий уровень абстрактного мышления, чем это может быть у ребенка 9—10 лет..

Пришлось обратиться к другим, более сообразным с возрастом учащихся средствам. Прежде всего было уделено внимание таким понятиям, как часть и целое. Оказалось, что во II классе дети не видели долей круга, квадрата, полоски, слово „часть" отожествляют со словом „четверть", а треть не считают „частью" и т. п. Пришлось заняться ликвидацией этого пробела, а затем сделать упор на задачи, в которых соотношение между числами дано в „частях".

Задачи на „части" удобно связать с задачами на пропорциональное деление. Связь эта нами специально подчеркивалась. Покажем соответствующий прием на конкретной задаче.

Берем задачу на пропорциональное деление:

Из 240 *кг* зерна получился 1 мешок отрубей и 4 таких же по весу мешка муки. Сколько вышло килограммов отрубей и сколько килограммов муки?

Задачу анализируем и решаем, как всякую задачу на пропорциональное деление.

Далее проводится беседа:

Учитель. Столько ли весит мука, сколько весило зерно?

Ученик. Мука весит меньше.

Учитель. Почему?

Ученик. Потому что получились отруби.

Учитель. Правильно! Часть общего веса зерна приходится на отруби. А сколько таких же частей приходится на муку?

Ученик. 4 части.

Под руководством учителя дети изменяют формулировку исходной задачи:

Из 240 *кг* зерна получилась мука и отруби, причем отруби составляют 1 часть общего веса, а мука 4 таких же части. Сколько вышло килограммов отрубей и сколько килограммов муки?

Задачу повторяют и решают, изменив первый вопрос. Теперь он формулируется так: „Сколько было всего равных частей" вместо прежнего: „Сколько было всего мешков".

Необходимо следить за тем, чтобы учащиеся не пропускали слова „равных", поскольку неравных частей только две (отруби и мука), и дети поэтому склонны, решая подобные задачи, делить общую сумму на 2.

Следует предложить учащимся ряд задач на деление пропорционально данному числу частей, прежде чем переходить к дальнейшему изменению формулировки этих задач. Покажем это новое изменение на той же задаче про муку и отруби.

Учитель. Чего получилось больше: муки или отрубей?

Ученик. Муки получилось в 4 раза больше, чем отрубей.

Под руководством учителя задача формулируется следующим образом:

Из 240 *кг* зерна получилось муки в 4 раза больше, чем отрубей. Сколько вышло килограммов отрубей и сколько килограммов муки?

Выясняется, что для решения задачи надо вернуться к прежней формулировке, что это тоже задача на „части", с такими же вопросами и действиями.

В дальнейшем работа над подобными задачами должна состоять в следующем.

Учитель сообщает задачу:

За шашки и шахматы заплатили 84 руб. Шахматы в 6 раз дороже шашек. Сколько стоят отдельно шашки и шахматы?

Условие задачи он записывает на доске:

$$84 \text{ руб.} \begin{cases} \text{шашки} \\ \text{шахматы — в 6 раз дороже} \end{cases}$$

Когда дети усвоят содержание задачи, учитель предлагает им „обдумать" условие. Нельзя ли выразить его проще, другими словами?

Ученик. На шашки израсходовали одну часть всех денег, а на шахматы шесть таких частей.

Учитель дополняет запись на доске:

$$84 \text{ руб.} \begin{cases} \text{шашки} \\ \text{шахматы — в 6 раз дороже} \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 1 \text{ ч.} \\ 6 \text{ ч.} \end{matrix}$$

Рассуждение, как всегда в таких случаях, начинаем с расчленения главного вопроса. Он не войдет в план решения. Вместо него будет два вопроса: „сколько стоят шашки?" и „сколько стоят шахматы?"

Учитель записывает эти вопросы на доске:

$$\text{Сколько стоят} \begin{matrix} \nearrow \text{шашки?} \\ \searrow \text{шахматы?} \end{matrix}$$

Далее следует неполный или (позднее) полный анализ:

Ученик. Узнаем сначала, сколько стоят шашки.

Чтобы решить этот вопрос, надо знать: сколько было всего равных частей (?) и сколько стоит вся покупка (84 руб.).

Чтобы узнать, сколько было всего равных частей, надо сложить 1 часть и 6 частей. С этого и начнем решение задачи.

Учитель. Составим план решения. И т. д.

Решая более сложные задачи на сумму и кратное отношение, когда слагаемых больше двух (материал IV класса), дети до начала рассуждения составляют табличку, из которой видно, сколько равных частей приходится на каждое слагаемое. После этого работа над задачей ведется так же, как это было показано на задаче про шашки и шахматы.

Переходим к задачам на **нахождение слагаемых по их сумме и разности**.

К этому времени учащиеся успевают достаточно освоиться с понятием условной части, научиться переводить на этот условный язык соотношение между конкретными данными задачи. Остается только напомнить им смысл выражения „больше на столько-то" и показать возможность применения условных „частей" в новой ситуации.

Решим задачу: В первый раз учитель купил 12 цветных карандашей, во второй раз — **на 6 карандашей больше**. Сколько всего карандашей купил учитель?

Дети решают эту задачу двумя действиями:

1) 12 кар. + 6 кар. = 18 кар.;

2) 12 кар. + 18 кар. = 30 кар.

После этого учитель открывает изображение карандашей на доске: наверху коробка, в которой помещается 12 карандашей, внизу такая же коробка и еще 6 карандашей.

Учитель объясняет: наверху 12 карандашей, купленных в первый раз, а внизу — карандаши, купленные во второй раз. Их было на 6 больше. Вот эти 6 карандашей в маленькой коробке направо! А в таком случае, сколько карандашей должно быть в большой коробке налево: больше, чем наверху, или столько же?

Ученик. Налево должно быть столько же, сколько наверху.

Учитель. Итак, на 6 больше это значит — столько же и еще 6, такая же часть и еще 6 карандашей. Подумайте, нельзя ли решить эту задачу способом частей? Где у нас будет одна часть? Иди, покажи!

Ученик показывает верхнюю коробку, а учитель пишет против нее: 1 ч.

Учитель. Теперь посмотрим, что у нас внизу.

Ученик. Такая же часть и еще 6 карандашей.

Учитель. Запишем это!

Против нижней части рисунка появляется запись: 1 ч. и 6 кар.

Под руководством учителя дети формулируют вопросы и решают задачу:

1) Сколько было всего равных частей? 1 ч. + 1 ч. = 2 ч.

2) Сколько карандашей приходится на эти равные части? 12 кар. · 2 = 24 кар.

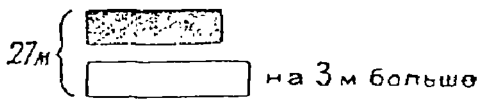
3) Сколько было всего карандашей? 24 кар. + 6 кар = 30 кар.

Дети относятся с интересом к этому новому способу решения такой обыкновенной задачи. Впрочем, предпочесть следует, конечно, старый способ, как более короткий. Это они тоже понимают.

Переходим к решению типовой задачи на сумму и разность.

Купили 27 *м* синего и красного сатина, причем красного сатина было на 3 *м* больше, чем синего. Сколько купили синего и красного сатина в отдельности?

Учитель открывает запись на доске:



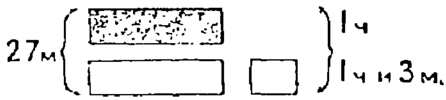
Полоски можно закрасить цветным мелом или сделать из цветной бумаги, чтобы удобнее было различать синий и красный сатин.

Когда дети усвоят содержание задачи, учитель спрашивает, нельзя ли применить к ней способ частей?

Чтобы облегчить ответ на этот вопрос, он стирает на рисунке „излишек“ в 3 *м* и рисует его отдельно немного правее.

Обычно после этого дети сами предлагают записать против синего сатина — 1 ч., а против красного — 1 ч. и 3 *м.*

Теперь можно перейти к расчленению главного вопроса и анализу задачи. Рисунок и запись на доске будут иметь при этом следующий вид:



Сколько было метров
- синего сатина?
- красного сатина?

Анализ задачи сводится к следующему:

Два вопроса нельзя решать одновременно. Узнаем сначала, сколько купили синего сатина.

Чтобы решить этот вопрос, надо знать: сколько было всего равных частей (?) и сколько метров сатина приходится на эти части (?).

Сколько было всего равных частей, можно узнать сразу: 1 ч. + 1 ч. = 2 ч.

Сколько метров приходится на эти части, тоже можно узнать сразу: 27 *м* — 3 *м* = 24 *м.*

Составим план решения:

1) Сколько было всего равных частей?

2) Сколько метров приходится на эти равные части?

3) Сколько купили метров синего сатина?

4) Сколько купили метров красного сатина?

На первый взгляд может показаться, что первый вопрос (сколько было всего равных частей) не нужен. До сих пор он обычно не ставился. Однако вопрос этот играет существенную роль.

Во-первых, он объясняет происхождение числа 2, которое выступает в дальнейшем в роли делителя и которое все же прямо в задаче не дается. Действие, которым оно находится, опускалось только потому, что очень уж просто прибавить единицу к единице. Но с логической точки зрения такой пропуск — дефект, игнорирование одного из звеньев всего рассуждения.

Во-вторых, узнав, сколько было всего равных частей, мы можем очень просто сформулировать второй вопрос, который до сих пор вызывал много споров.

В-третьих, полезно сблизить задачи на сумму и разность с задачами на сумму и кратное отношение, обратив внимание детей как на сходство, так и на разницу между ними. В обоих случаях приходится узнавать, сколько было всего равных частей, но во втором случае приходится, кроме того, освободиться от „излишка“. Отсюда и название этих задач, понятное учащимся начальной школы: задачи на „части“ с излишком.

В-четвертых, без вопроса, сколько было всего равных частей, совершенно невозможно обойтись при решении усложненных задач на сумму и разность. Поясним это на конкретной задаче:

За 4 дня самолет пролетел 3890 *км*: во второй день на 85 *км* больше, чем в первый, в третий день на 35 *км* больше, чем во второй, а в четвертый день столько, сколько в первые два дня вместе. Сколько километров пролетел самолет в каждый из этих дней?

Работа над задачей начинается с составления таблички:

I день — 1 ч.
II день — 1 ч. и 85 *км*
III день — 1 ч. и (85 *км* + 35 *км*)
IV день — 2 ч. и 85 *км*

Далее устанавливается, что в задаче будет 4 ответа, что поэтому вместо главного вопроса в план решения войдет 4 отдельных вопроса. Решать их одновременно нельзя. Остановимся прежде всего на первом из них: сколько километров пролетел самолет в *первый день* или, что то же, сколько километров приходится на 1 часть.

Чтобы узнать, сколько километров приходится на 1 часть, надо знать: сколько было всего равных частей (?) и сколько километров приходится на эти равные части (?).

Сколько было всего равных частей, можно узнать сразу:

$$1 \text{ ч.} + 1 \text{ ч.} + 1 \text{ ч.} + 2 \text{ ч.} = 5 \text{ ч.}$$

Чтобы узнать, сколько километров приходится на все эти части, надо знать: сколько всего километров пролетел самолёт (3890 *км*) и сколько километров приходится на все излишки (?).

Сколько километров приходится на все излишки, можно узнать сразу — 290 *км*.

На основании этой записи составляется план решения:

1) Сколько было всего равных частей?

2) Сколько километров приходится на все излишки?

3) Сколько километров приходится на все равные части?

4) Сколько километров пролетел самолет в первый день? И т. д.

В заключение остается сказать, что, отказавшись от графического метода решения задач на сумму и кратное или разностное отношение, мы отнюдь не отказываемся, особенно на первых порах, от приема иллюстрации „частей" кружками, квадратами, полосками, выбирая эти формы с учетом конкретного содержания задачи.

Так, при нахождении слагаемых по их сумме и кратному отношению, в задаче о книгах мы изображаем одну часть в виде прямоугольника или даже шкафа, а несколько таких же частей — в виде нескольких шкафов. В задаче об участках леса мы поясняем одну часть — кружком, а несколько частей — столькими же кружками, не мешая детям заполнить эти кружки точками, изображающими деревья и т. д.

При нахождении слагаемых по их сумме и разности в задаче о дороге, часть которой замощена булыжником, а другая, большая часть — асфальтом, мы изображаем то и другое в виде полосок. Если надо узнать, сколько километров проехал путешественник по реке и по железной дороге, мы также пользуемся полосками разной длины и, если возможно, разного цвета и т. д.

Изучение тех логических приемов, которые связаны с работой над типовыми задачами, дает возможность наметить целесообразный порядок расположения этих задач в начальной школе.

Естественно первый цикл начать с приведения к единице, прямого и обратного, затем перейти к решению задач на пропорциональное деление и, наконец, к вычислению неизвестного по разности двух чисел. В III классе достаточно ограничиться теми случаями пропорционального деления и вычисления неизвестного по разности, которые связаны с прямым приведением к единице при двух искомых. Задачи, связанные с обратным приведением к единице, а также задачи, требующие более двух ответов, лучше отложить до IV класса.

Второй цикл типовых задач начинается с пропорционального деления, которое уже знакомо учащимся. Далее следует деление пропорционально данному числу частей), затем задачи на сумму и кратное отношение и, наконец, задачи на сумму и разность. В III классе, как правило, дети решают задачи на нахождение двух слагаемых по их сумме и кратному отношению, сумме и разности. Три слагаемых допустимы только в том случае, если дано разностное или кратное отношение двух слагаемых к одному и тому же третьему.

В IV классе в задачах на „части" и на „части" с излишком число слагаемых может быть больше двух; допустимы также комбинированные задачи на сумму и кратное отношение, сумму и разность.

Третий цикл задач относится, главным образом, к IV классу. В качестве отправного пункта используются задачи на вычисление неизвестного по разности двух чисел. В то же время решаются задачи на смешение I рода (вычисление среднего арифметического). Задачи эти уходят корнями в работу II класса (неполные задачи на смешение I рода — прямые и обратные задачи на сумму двух произведений). На основе перечисленных задач можно решать в IV классе задачи на исключение одной из величин посредством вычитания.

Четвертый цикл состоит из задач на простое тройное правило — прямое приведение к единице, обратное приведение к единице и способ отношений — в III классе и сложное тройное правило в IV классе.

Для полноты картины приходится еще упомянуть о задачах на встречное движение — в III классе и движение в одном направлении — в IV классе. Об анализе этих задач следует говорить особо.

А. Д. Бронникова

ОБЪЯСНЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ.

Обучение арифметике на протяжении всех лет сопровождается решением задач, начиная с задачи-картинки до сложной задачи, решаемой особыми приемами.

Вся система решения задач, развернутая в определенное время, последовательно, должна обеспечить определенный круг знаний и умений. Путем решения задач формируются различные математические понятия, осмысливается каждое арифметическое действие, изучаются вопросы теории. На решении задач развивается и обогащается речь учащихся, вырабатывается правильная арифметическая терминология. Путем решения задач развивается логическое мышление учащихся, уменье рассуждать и, рассуждая, убеждаться в правильности или ошибочности тех или иных утверждений; последнее способствует развитию у учащихся наклонности проверять наблюдаемые факты и доискиваться причинной связи.

Решение задач развивает в учащихся привычку к самостоятельному труду. Удачное и вполне самостоятельное выполнение работы возбуждает в учащихся интерес к ней, а возбужденный интерес побуждает к дальнейшей самодеятельности.

В настоящее время, когда школа идет по пути углубления и совершенствования знаний учащихся в области всех предметов школьного курса, при решении задач уже недостаточно научить учащихся правильно ставить вопрос задачи, к нему правильно подбирать арифметическое действие и получать верный результат. Сейчас уже необходимо требовать от учащегося решения задач с объяснением. Объяснения нужны потому, что они проверяют ход мыслей ребенка; объяснения нужны для проверки, умеет ли ребенок сознательно применять арифметические действия; объяснения необходимы и для того, чтобы научить учащегося правильно излагать свои мысли.

Логически правильная мысль отражается в правильной речи. Прежде всего необходимо научить учащихся строить полный ответ на вопрос учителя.

Отсюда следует, что начинать объяснение решения арифметических задач нужно с первого класса, с объяснения решения простой задачи, задачи в одно действие.

Когда дети научатся свободно отвечать на поставленный вопрос, им самим захочется говорить. При решении простых задач учащиеся должны: 1) найти ответ на вопрос, поставленный в задаче; 2) указать действие, которым задача решена; 3) изложить прием вычисления, т. е. они должны ответить на следующие вопросы учителя:

1) Какой ответ получили?

2) Какое действие произвели для решения задачи?

3) Как произвели это действие?

Например, одна ученица прочитала 9 слов, а другая на 4 слова больше. Сколько слов прочитала вторая ученица?

Если правильно рассказать задачу, делая ударения на данных задачи в той взаимосвязи между числами, которая дается в задаче: 9 слов, на 4 слова больше, всего слов, учащиеся быстро находят искомое число — 13 слов. Второй вопрос учителя: Как нашли число 13? — заставляет учащихся думать, каким действием нашли число 13, т. е. дать объяснение действия; третий вопрос учителя: Как прибавили к 9 число 4? — требует объяснения приема вычисления.

Таким образом, в I классе арифметическая задача учит учащегося сознательно применять арифметические действия и сознательно производить вычисления.

При решении простых задач, в I же классе необходимо научить учащегося связно рассказать решение задачи; в практике работы с детьми младшего возраста значительно чаще встречаются однословные ответы учащихся. В начале обучения ребенок не имеет достаточного запаса слов, чтобы ответ на вопрос задачи выразить длинной фразой, а потому правильное выражение полного ответа на поставленный вопрос есть результат большой и терпеливой работы учителя по переходу от кратких разъяснений к полному ответу.

При переходе от простой задачи к составной появляется новая трудность — уметь расчленить составную задачу на простые задачи, т. е. уменье составить план решения задачи.

При составлении плана решения задачи учащийся должен уметь анализировать задачу, находить те взаимосвязи, которые раскрывают необходимость применения того или иного арифметического действия; иначе говоря, анализируя задачу, учащийся строит объяснение (рассуждает), а затем составляет план ее решения. Анализ задачи, предшествующий составлению плана ее решения, может быть отображен схематической записью условия задач. После того как задача решена и получен ответ на вопрос задачи, составляется связный рассказ, в котором излагается:

1) анализ условия задачи;
2) план решения задачи;
3) выбор действия для решения каждой простой задачи;
4) объяснение приемов вычислений.

В старших классах начальной школы следует научить учащихся проверять решение задачи. Необходимость проверки решения задачи следует указать учащимся для задач, которые решаются методом допущений, предположений и т.д. Затем следует проверку применять к задачам и других видов.

Чтобы научить учащихся верно и быстро решать задачи, нужно научить их: а) правильно выбирать арифметические *действия для решения данной задачи и б)* правильно производить вычисления.

Сущность арифметических действий постигается исключительно путем решения простых задач.

Именно простые задачи являются средством для выяснения самого понятия действия, для определения, насколько полно выяснено это понятие, насколько прочно оно усвоено.

С этой целью решаются простые задачи сначала с полным разбором условия, по вопросам учителя, а затем задача только рассказывается, и учащиеся дают полный ответ на поставленный в задаче вопрос.

После решения целого ряда простых задач на сложение, учащиеся будут в состоянии собрать все признаки, характеризующие действие сложения и условия его применения.

Зависимость между данными величинами и искомой выражается в задаче на сложение различными терминами: прибавлено, всего, больше, сколько будет вместе и т. д.; но как бы различны эти слова ни были, они выражают всегда одно и то же требование — к одному числу прибавить другое число.

Таким же образом, путем решения целого ряда задач могут быть выяснены и понятия о других арифметических действиях.

Приведем конкретные задачи на все четыре действия и покажем, как выясняется смысл каждого действия и как обучаются дети правильному построению ответа на поставленный вопрос.

Сложение

З а д а ч а № 1. Маня собрала 5 дубовых листьев и 4 березовых листа. Сколько всего листьев собрала Маня?

Если учащиеся только начинают работу по решению задач, то полезно вначале повторить условие задачи по вопросам:

1) Сколько дубовых листьев собрала Маня?

2) Сколько березовых листьев она собрала?

3) Что спрашивается в задаче?

Когда учащиеся приобретут навык в решении таких задач, условие повторяется без вопросов, целиком, и учащиеся приучаются давать связное объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько всех листьев собрала Маня, надо к 5 листьям прибавить 4 листа и получим 9 листьев.

З а д а ч а № 2. Коля поставил на верхнюю полку 7 книг, а на нижнюю на 5 книг *больше*. Сколько книг поставил Коля на нижнюю полку?

Повторение и анализ условия задачи:

1) Сколько книг поставил Коля на верхнюю полку?

2) Что сказано про книги, которые он поставил на нижнюю полку?

3) Что значит — Коля поставил на нижнюю полку на 5 книг больше, чем на верхнюю?

4) Что спрашивается в задаче?

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько книг поставил Коля на нижнюю полку, нужно к 7 книгам прибавить 3 книги, получится 10 книг.

У ч и т е л ь: Почему нужно к 7 книгам прибавить 3 книги?

У ч е н и к (объяснение действия): К 7 книгам нужно прибавить 3 книги потому, что на нижней полке будет 7 книг да еще 3 книги.

Задача может быть решена учащимися самостоятельно, без предварительного анализа условия. Например:

У Тани две ленты: одна лента длиной 5 *м*, а другая на 2 *м* длиннее. Какой длины другая лента?

Решив задачу, учащиеся сразу дают ответ на поставленный вопрос: Вторая лента Тани имеет длину 7 *м*.

После этого повторяется условие задачи и дается объяснение решения: чтобы узнать длину второй ленты, нужно к 5 *м* прибавить 2 *м*, потому что вторая лента имеет длину 5 *м* (как и длина первой ленты), да еще 2 *м*; 5 *м* + 2 *м* = 7 *м*.

Вычитание

Задача № 1. *На дереве сидело 6 птичек, 4 птички улетели. Сколько птичек осталось на дереве?*

Повторение задачи по вопросам:

1) Сколько птичек сидело на дереве?

2) Сколько птичек улетело?

3) Что спрашивается в задаче?

Устное объяснение задачи: чтобы узнать, сколько птичек осталось на дереве, нужно от 6 птичек отнять 4 и останется 2 птички.

Задача № 2. Охотник подстрелил 12 птичек; из них было 5 рябчиков, а остальные были утки. Сколько уток подстрелил охотник?

Учащиеся самостоятельно могут решить задачу и, после того, как учащиеся сказали учителю, какие у них получились ответы, объясняется решение задачи: чтобы узнать, сколько уток подстрелил охотник, нужно от 12 птиц отнять 5 (рябчиков) и останется 7 птиц. Охотник подстрелил 7 уток.

На вопрос учителя, как получено число 7, учащиеся отвечают, что сначала от 12 надо отнять 2, останется 10, а затем от 10 отнять 3 и останется 7.

Задача № 3. Володя поймал 15 бабочек, а Миша на 7 бабочек меньше. Сколько бабочек поймал Миша?

Анализ условия задачи:

1) Сколько бабочек поймал Володя?

2) Что сказано про бабочек, которых поймал Миша?

3) Что спрашивается в задаче?

Решение задачи с объяснением: чтобы узнать, сколько бабочек поймал Миша, нужно от 15 бабочек отнять 7, получим 8 бабочек.

Задача № 4. В одной коробке 50 перьев, а в другой 40 перьев. На сколько перьев в первой коробке больше, чем во второй?

Анализ условия задачи:

1) Сколько перьев в первой коробке?

2) Сколько перьев во второй коробке?

3) Что спрашивается в задаче?

4) Можно ли сразу ответить на вопрос задачи?

5) Каким действием решить задачу?

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, на сколько перьев в первой коробке больше, чем во второй, нужно от 50 перьев отнять 40 перьев, получим 10 перьев. В первой коробке на 10 перьев больше, чем во второй.

При сложении и вычитании ошибки в выборе действий встречаются редко, так как условие задачи подсказывает учащимся выбор действия. Наибольшее количество ошибок встречается при решении задач на умножение и деление. Разберем несколько задач на умножение и деление.

Умножение

Задача № 1. Из куска ткани сшили 4 детских платья. Сколько метров ткани было в куске, если на каждое платье пошло 3 *м* ткани?

Повторение задачи по вопросам: 1) Сколько было сшито платьев? 2) Сколько метров ткани расходовали на каждое платье? 3) Что спрашивается в задаче?

Объяснение решения задачи (выбор действия): чтобы узнать, сколько метров ткани было в куске, нужно по 3 *м* взять 4 раза, получится 12 *м* (3 *м* $\times$ 4 = 12 *м*).

Во II классе решаются задачи на применение второго случая умножения — увеличения числа в несколько раз.

Задача № 2. Миша нашел 7 грибов, а его папа в 5 раз больше. Сколько грибов нашел папа?

Анализ условия задачи:

1) Сколько грибов нашел Миша?

2) Что сказано про грибы папы?

3) Что значит — папа нашел в 5 раз больше, чем Миша?

4) Что спрашивается в задаче?

Объяснение решения задачи (выбор действия): чтобы узнать, сколько грибов нашел папа, нужно 7 грибов умножить на 5, или 7 грибов повторить 5 раз, так как папа нашел 5 раз по 7 грибов. Получится 35 грибов.

Задача № 3. 1 *м* тесемки стоит 3 руб. Сколько стоят 9 *м* такой тесемки?

Объяснение решения задачи: если 1 *м* тесемки стоит 3 руб., то 9 *м* будут стоить в 9 раз больше (дороже), поэтому, чтобы узнать стоимость 9 *м*, нужно 3 руб. $\times$ 9 = 27 руб.

Задача № 4. Пароход проходит в 1 час 18 *км*. Сколько километров пройдет пароход за 4 часа?

Объяснение решения задачи: если пароход в 1 час проходит 18 *км*, то за 4 часа он пройдет в 4 раза больше; нужно 18 *км* $\times$ 4 = 72 *км*.

Деление

Задача № 1. В группе детского сада было 20 детей. За каждый стол посадили по 4 ребенка. Сколько столов заняли дети?

Повторяется условие задачи связным рассказом или по вопросам учителя; учащиеся дают ответы на вопрос задачи и затем объясняют решение (выбор действия): если за каждый стол посадят по 4 ребенка, то столов будет занято столько, сколько раз 4 содержится в 20, или

20 чел. : 4 чел. = 5.

На вопрос учителя, как нашли число 5, учащийся отвечает (объяснение получения результата): если 4 повторить 5 раз, получим 20.

Задача № 2. За 3 *м* ткани заплатили 18 руб. Сколько стоит 1 *м* ткани?

Учащиеся могут сразу ответить на вопрос задачи: 1 *м* ткани стоит 6 руб., необходимо проверить выбор действия и получение результата.

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько стоит 1 *м* ткани, нужно 18 руб. разделить на 3 равные части, в каждой части получится 6 руб., потому что 3 раза по 6 руб. будет 18 руб.

Задача № 3. Мальчик решил 20 примеров, из них четвертую часть решил неправильно. Сколько примеров он решил неправильно?

В этой задаче, после ответов учащихся, следует получить от учащихся объяснение выбора действия.

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько примеров мальчик решил неправильно, нужно 20 примеров разделить на 4 равные части, так как четвертая часть находится действием деления.

Во II классе учащиеся применяют действие деления при уменьшении числа в несколько раз и при кратном сравнении двух чисел.

Задача № 4. С одной грядки сняли 80 огурцов, а с другой в 5 раз меньше. Сколько огурцов сняли со второй грядки?

Повторение задачи по вопросам: 1) Сколько огурцов сняли с первой грядки? 2) Что сказано в задаче про огурцы, которые сняли со второй грядки? 3) Что спрашивается в задаче?

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько огурцов сняли со второй грядки, нужно 80 огурцов уменьшить в 5 раз, а для этого нужно 80 огурцов разделить на 5 равных частей, и получим в каждой части 16 огурцов. 16 огурцов сняли со второй грядки.

Задача № 5. Один мальчик во время каникул прочитал 28 книг, а другой только 7 книг. Во сколько раз больше книг прочитал первый мальчик, чем второй?

Повторение задачи по вопросам: 1) Сколько книг прочитал первый мальчик? 2) Сколько книг прочитал второй мальчик? 3) Кто из них прочитал книг больше? 4) Что спрашивается в задаче?

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, во сколько раз больше книг прочитал первый мальчик, чем второй, нужно узнать, сколько раз по 7 книг содержится в 28 книгах, т. е. 28 книг : 7 книг = 4.

Число 4 учащийся находит при помощи таблицы умножения.

Список задач, которые разобраны выше, не исчерпывает всех простых задач, которые решаются одним из 4 действий.

Они разнообразны по содержанию, с различной терминологией и, в зависимости от формулировки условия и связи между данными в задаче величинами и искомой, следует ставить *объяснение выбора действия и приема вычисления*.

Переход к решению составных задач представляет для детей существенный шаг вперед. При решении простых задач они упражняются только в выборе действия и в производстве вычисления; с решением составных задач связано разложение их на простые задачи и составление плана решения.

Задача школы — научить детей решать составные задачи самостоятельно. Самостоятельное решение приучает детей разбираться в условии задачи, чего трудно достигнуть, если задачи постоянно решаются при помощи учителя. Самостоятельное решение задач дает детям возможность проявить, а следовательно и развить необходимую при решении задач находчивость в выборе приемов решения.

Самостоятельное решение задач должно заканчиваться получением от детей ответов, а затем следует работа над объяснением решения задачи. При объяснении решения учащиеся должны: а) рассказать все простые задачи, на которые расчленена составная задача; б) показать решение этих задач; в) объяснить, каким действием получено решение и г) рассказать, как это действие выполнено. В этой работе порядок вопросов может быть такой:

1) Что вы сначала узнали в задаче?
2) По каким данным?
3) Сколько получили?
4) Каким действием и почему?
5) Как произвели вычисление?

Примерные задачи для I класса:

Задача № 1. В одном пучке было 8 морковок, а в другом 6 морковок. 10 морковок отдали кроликам. Сколько морковок осталось?

Объяснение решения задачи: сначала мы узнаем, сколько было морковок в двух пучках; для этого нужно сложить 8 морковок и 6 морковок, получится 14 морковок.

Потом узнаем, сколько морковок осталось, когда 10 морковок отдали кроликам; нужно от 14 морковок отнять 10 морковок, получится 4 морковки.

В этой задаче связь между данными величинами и искомой ясно подсказана условием задачи, а потому дети без особых затруднений выбирают действия сложения и вычитания.

С развитием навыков в решении составных задач вырабатывается умение прежде всего выделить вопрос задачи, подобрать для решения этого вопроса соответствующие числа, для нахождения этих чисел (если их нет в условии задачи) снова ставить вопрос; таким образом вырабатывается метод анализа.

Задача: За 3 *кг* крупы и булки хозяйка заплатила 11 руб. Сколько стоил 1 *кг* крупы, если булка стоила 5 руб.?

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько стоил 1 *кг* крупы, нужно знать, сколько заплатили за 3 *кг* крупы; сколько стоят 3 *кг* крупы, можно узнать, так как вся покупка стоит 11 руб. и за булку заплатили 5 руб., отнимем от 11 руб. 5 руб., получим 6 руб.; 6 руб. стоили 3 *кг* крупы, а 1 *кг* дешевле в 3 раза, разделим 6 руб. на 3 равные части и получим 2 руб.; 2 руб. стоил 1 *кг* крупы.

Приведу пример решения задач с объяснением в I классе одной из школ во втором полугодии, сохранив стиль детского изложения.

Задача: *У Тони было 20 коп. Она купила 2 карандаша, и у нее еще осталось 4 коп. Сколько копеек стоит 1 карандаш?*

После того, как учительница рассказала условие задачи, две ученицы, одна за другой, повторили это условие, а третья ученица рассказала решение задачи. Девочка повторила вопрос задачи и сказала: „Сразу на него ответить нельзя, так как нам неизвестно, сколько стоят все карандаши, а сколько стоят все карандаши, узнать можно, потому что от 20 коп. после покупки карандашей осталось 4 коп. Значит, в этой задаче — две задачи: 1) сколько стоят все карандаши; 2) сколько стоит один карандаш.

Решим первую задачу: чтобы узнать, сколько стоили все карандаши, нужно от 20 коп. отнять 4 коп., останется 16 коп. А теперь, как я отнимала 4 от 20: 20 — это 2 десятка; я взяла 1 десяток, это 10 единиц и от 10 единиц отняла 4 единицы, осталось 6 единиц, да еще 1 десяток, всего 16 единиц.

Вторая задача: за 16 коп. купили 2 карандаша; сколько стоит 1 карандаш? Чтобы узнать, сколько стоит 1 карандаш, нужно 16 коп. разделить на 2 равные части и получится 8".

Учительница спрашивает, как она нашла число 8.

Ответ: „Я вспомнила, что 8 × 2 = 16; вот я и ответила на вопрос задачи — карандаш стоит 8 коп.".

На практике затруднения чаще всего встречаются в анализе и составлении плана решения задачи, т. е. расчленении составной задачи на простые задачи. При самостоятельном решении задач учащийся все свои силы направляет на получение окончательного ответа, и последовательный ход мысли ускользает от его внимания, он не может дать ясного отчета, не может рассказать план решения задачи. Вследствие этого учитель должен решать достаточное число задач совместно с детьми, обращая внимание детей на то, что для решения задачи необходимо прежде отыскать числа, которых в задаче нет, но которые необходимы для определения искомого числа.

Остановимся далее на задачах II класса из задачника Никитина, Поляка и Володиной (изд. 1948 г).

Задача № 813. Из полученных денег я расходовал первые четыре дня недели по 14 руб. в день, после этого у меня осталось на 8 руб. меньше, чем я израсходовал. По скольку рублей я могу теперь расходовать, чтобы все деньги израсходовать до конца недели?

Условие задачи повторяется учащимися в форме связного рассказа.

Далее полезно составить план решения задачи:

1) Сколько рублей я израсходовал за 4 дня?

2) Сколько денег после 4 дней осталось у меня?

3) Во сколько дней я израсходовал я оставшиеся деньги?

4) По скольку рублей в день я расходовал оставшиеся деньги?

Решение задачи с устным объяснением: каждый день я расходовал по 14 руб., а за 4 дня израсходовал больше в 4 раза, поэтому 14 руб $\cdot$ 4 = 56 руб.

Чтобы узнать, сколько денег еще осталось, нужно от 56 руб. отнять 8 руб., так как осталось на 8 руб. меньше, чем я израсходовал. Останется 48 руб.

В неделе 7 дней, сначала я расходовал деньги 4 дня; нужно узнать, во сколько дней я израсходовал оставшиеся деньги; от 7 дней отнять 4 дня, получится 3 дня.

За 3 дня я израсходовал 48 руб.; чтобы узнать, сколько рублей расходовал я ежедневно, нужно 48 руб. : 3 = 16 руб.

Оставшиеся деньги я расходовал по 16 руб. в день.

Задача. Купили 3 куска тесемки. В одном куске было 42 *м*, в другом куске в 3 раза меньше, чем в первом, а в третьем куске на 24 *м* больше, чем во втором. Какой длины были все три куска тесемки?

Анализ задачи: чтобы узнать длину всех трех кусков, нужно знать длину каждого куска тесемки. В задаче дана длина первого куска 42 *м*, про длину второго куска сказано, что он в 3 раза короче, чем первый, следовательно, сразу можно найти длину второго куска. Про третий кусок сказано, что он длиннее второго на 24 *м*, поэтому к длине второго куска прибавим 24 *м* и получим длину третьего куска. Когда найдем длину второго и третьего кусков тесемки, можно найти длину всех трех кусков вместе, сложив длину первого, второго и третьего кусков.

Формулируем план решения задачи:

1) Какой длины был второй кусок тесемки?

2) Какой длины был третий кусок?

3) Какой длины все три куска тесемки?

Учащиеся самостоятельно находят ответ задачи, а затем может быть повторено решение задачи с объяснением.

Объяснение решения задачи: сначала мы узнали длину второго куска тесемки, для этого 42 *м* разделили на 3 равные части, так как в задаче сказано, что второй кусок меньше первого в 3 раза, получили 14 *м*. Затем узнали длину третьего куска действием сложения чисел 14 *м* и 24 *м*, так как в задаче сказано, что третий кусок длиннее второго на 24 *м*, получилось 38 *м*.

Нам дана длина первого куска 42 *м*, нашли длину второго куска — 14 *м* и длину третьего куска 38 *м*, сложили эти три числа и получили длину трех кусков — 94 *м*.[1]

Запись решения производится после того, как задача предварительно решена устно или предварительно составлен план решения задачи; нетрудные задачи могут быть предлагаемы детям и для самостоятельного решения с записью.

Во втором полугодии учебного года во II классе запись решения может содержать в себе запись вопроса каждой простой задачи, запись действия, которым эта задача решается, и обозначение ответа. Например:

1) Какой длины был второй кусок тесемки?

$$42 \text{ м} : 3 = 14 \text{ м}.$$

2) Какой длины был третий кусок тесемки?

$$14 \text{ м} + 24 \text{ м} = 38 \text{ м}.$$

3) Какой длины все три куска тесемки?

$$42 \text{ м} + 14 \text{ м} + 38 \text{ м} = 94 \text{ м}.$$

Ответ: 94 *м*.

В III и IV классах при решении задач письменно необходимо, прежде всего, выработать план решения задачи устно. После установления плана решения всем классом проводится решение задачи: 1) задача может решаться на доске отдельными учащимися, остальные должны решать ее в тетрадях; полученные результаты сверяются; 2) полезно дать

[1] Решение задачи записано на уроке арифметики во II классе у учительницы М. М. Хорьковой, 17-я школа Приморского района г. Ленинграда.

решать задачу самостоятельно и после ее решения спросить у 1—2 учащихся объяснение решения в виде связного рассказа.

Задача № 575 (№ 668 изд. 1948 г.). В колхозе собрали 4872 *ц* картофеля, свеклы в 12 раз меньше, чем картофеля, а моркови на 278 *ц* меньше, чем свеклы. Сколько всего овощей собрали?

Составляется план решения задачи:

1) Сколько центнеров свеклы собрал колхоз?

2) Сколько центнеров моркови собрал колхоз?

3) Сколько всего овощей собрал колхоз?

Учащиеся самостоятельно записывают вопросы задачи, подбирают действие для решения поставленного вопроса, выбирают числа из условия задачи, связывают полученные результаты с данными числами и находят число, которое является ответом на поставленный вопрос.

Самостоятельная запись плана решения не может вызвать затруднений. Слово „центнер" учитель может выписать на доске. В тетради учащихся получается запись:

1) Сколько центнеров свеклы собрал колхоз?

$$\begin{array}{r|l} 4872\ ц & 12 \\ \underline{48} & \overline{406\ ц} \\ 72 & \\ \underline{72} & \\ 0 & \end{array}$$

2) Сколько центнеров моркови собрал колхоз?

$$406\ ц - 278\ ц = 128\ ц$$

3) Сколько всего овощей собрал колхоз?

$$\begin{array}{r} 4872\ ц \\ +\ 406\ ц \\ 128\ ц \\ \hline 5406\ ц \end{array}$$

О т в е т: Всего собрано овощей 5406 *ц*.

Объяснение решения задачи: сначала мы узнали, сколько центнеров свеклы собрал колхоз, для этого 4872 *ц* разделили на 12 равных частей, так как в задаче сказано, что картофеля собрали 4872 *ц*, а свеклы в 12 раз меньше. Свеклы собрали 406 *ц*. Потом узнаем, сколько было собрапо моркови; для решения этого вопроса от 406 *ц* отнимаем 278 *ц*, так как в задаче сказано, что моркови собрали на 278 *ц* меньше, чем свеклы. Моркови собрали 128 *ц*. Чтобы узнать, сколько всего собрали овощей, нужно сложить: 4872 *ц* картофеля, 406 *ц* свеклы и 128 *ц* моркови; получим 5406 *ц*. Сколько собрано всего овощей?

Теперь остановимся на объяснении решения некоторых типовых задач.

Задачи на тройное правило, решаемые способом приведения к единице и способом отношений

Задача № 1. 6 пуговиц стоят 30 руб. Сколько стоят 13 таких пуговиц?

Запись условия: 6 пуг. — 30 руб.
13 пуг. — ? „

Объяснение решения задачи: чтобы узнать, сколько стоят 13 пуговиц, нужно знать цену одной пуговицы. Цену одной пуговицы можно найти, так как в задаче известно, что 6 пуговиц стоят 30 руб. Одна пуговица стоит дешевле (меньше) 30 руб. в 6 раз, поэтому разделим 30 руб : 6 = = 5 руб. Одна пуговица стоит 5 руб.

Если одна пуговица стоит 5 руб., то 13 пуговиц дороже (больше) 5 руб. в 13 раз.

5 руб. · 13 = 65 руб.

Ответ: *13 пуговиц стоят 65 руб.*

Задача № 2. 3 стола стоят 90 руб. Сколько столов можно купить на 60 руб.?

Запись условия: 3 стола — 90 руб.
? столов — 60 руб.

Объяснение решения задачи: 1) если 3 стола стоят 90 руб., то за один стол заплатят меньше 90 руб. в 3 раза; 90 руб. : 3 = 30 руб.; 2) если один стол стоит 30 руб., то на 60 руб. столов купят столько, сколько раз в 60 руб. содержатся 30 руб. Нужно 60 руб. разделить на 30 руб.; 60 руб. : 30 руб. = 2.

Ответ: На 60 руб. купят 2 стола.

Задача № 3. Из 10 *кг* муки выпекают 13 *кг* хлеба. Сколько хлеба выпекается из 40 *кг* муки?

Объяснение решения задачи: если из 10 *кг* муки выпекают 13 *кг* хлеба, то из 40 *кг* муки выпекут хлеба больше во столько раз, во сколько раз 40 *кг* больше 10 *кг*; 40 *кг* больше 10 *кг* в 4 раза (40 *кг* : 10 *кг* = 4), следовательно, хлеба получится в 4 раза больше, чем 13 *кг*, 13 *кг* нужно умножить на 4, получим 52 *кг* хлеба; 52 *кг* хлеба выпекут из 40 *кг* муки.

Задача № 1. 8 машинисток, работая по 6 час., переписали 288 страниц. Во сколько часов 5 машинисток смогут переписать 210 страниц?

Объяснение решения задачи: 8 машинисток переписали 288 страниц, работая по 6 час., а одна машинистка за 6 час. перепишет не 288 стр., а в 8 раз меньше, т. е. 288 стр. : 8 = = 36 стр.

Если одна машинистка за 6 час. перепишет 36 стр. рукописи, то за один час она перепишет не 36 стр., а в 6 раз меньше, т. е. 36 стр. : 6 = 6 стр. Одна машинистка в 1 час перепишет 6 стр., а 5 машинисток в 1 час перепишут больше в 5 раз; 6 стр. · 5 = 30 стр. Рукопись в 210 стр. они перепишут не в 1 час, а во столько часов, сколько раз 30 стр. содержится в 210 стр.; 210 стр. : 30 стр. = 7.

5 машинисток 210 страниц перепишут за 7 час.

Решение задач на пропорциональное деление тесно связано с решением задач на тройное правило. Например: две одинаковых трубы наполнили одна за другой пустой бассейн вместимостью в 11 556 ведер. Первая труба действовала 56 мин., вторая 52 мин. Сколько ведер воды дала каждая труба?

Анализ задачи. Чтобы узнать, сколько ведер воды дала каждая труба, нужно знать, сколько минут действовала каждая труба и сколько ведер воды давала труба в одну минуту. Сколько минут действовала каждая труба — известно, а сколько ведер воды давала труба в минуту — неизвестно. Чтобы узнать это, нужно знать, сколько всего минут работали обе трубы и сколько ведер воды влилось за это время. Последнее известно (11 556 ведер), а время можно узнать: первая труба действовала 56 мин., а вторая — 52 мин. Бассейн вмещает 11 556 ведер. Отсюда можно узнать, сколько ведер вливается в бассейн в 1 мин., а затем — сколько ведер воды дает каждая труба.

Таким образом, получается такой план решения задачи:

1) Во сколько минут наполнился бассейн?

2) Сколько ведер воды вливается в 1 мин.?

3) Сколько ведер воды дала первая труба?

4) Сколько ведер воды дала вторая труба?

Учащиеся самостоятельно решают задачу по составленному плану и в форме связного рассказа объясняют решение задачи.

Сначала узнали, во сколько минут наполнился бассейн, для этого сложили 56 мин. и 52 мин., получили 108 мин.

Потом узнали, сколько ведер воды вливается в 1 мин.; если 11 556 ведер вливается в 108 мин., то в 1 мин. вольется меньше в 108 раз, разделили 11 556 вед. на 108 и получили 107 ведер.

Первая труба действовала 56 мин., а в 1 мин. вливалось 108 ведер. Чтобы узнать, сколько ведер воды дала первая труба, нужно 107 ведер · 56 = 5992 ведра. Чтобы узнать, сколько ведер дала вторая труба, нужно 107 ведер $\times$ $\times$ 52 = 5564 ведра.

Запись решения задачи с пояснением получаемых результатов:

1) 56 мин. + 52 мин. = 108 мин. действовали две трубы.

2) $$\begin{array}{r|l} 11556 & 108 \\ \underline{108} & \overline{107} \\ 756 & \\ \underline{756} & \\ 0 & \end{array}$$ ведер; 107 ведер дала каждая труба в 1 мин.

3) $$\begin{array}{r} \times\ 107 \\ \underline{56} \\ 642 \\ \underline{535} \\ 5992 \end{array}$$ 107 ведер; 5992 ведер дала первая труба

4) $$\begin{array}{r} \times\ 107 \\ \underline{52} \\ 214 \\ \underline{535} \\ 5564 \end{array}$$ 107 ведер; 5564 ведер дала вторая труба.

Ответ: I труба дала 5992 ведра. II труба дала 5564 ведра.

Проверка решения задачи: $$\begin{array}{r} +\ 5\,992 \text{ вед.} \\ \underline{5\,564 \text{ вед.}} \\ 11\,556 \text{ вед.} \end{array}$$

Решение и объяснение задач на нахождение чисел по их сумме и разности

Задача № 1. Утюг и сковородка стоят 65 руб. Утюг дороже сковородки на 15 руб. Сколько стоит сковородка?

Анализ условия задачи:

1) Сколько стоят вместе утюг и сковородка?

2) Что спрашивается в задаче?

3) Что сказано про стоимость сковородки?

4) Что значит — утюг дороже сковородки на 15 руб.?

Ответ на последний вопрос: это значит, если вместо утюга купить сковородку, то останется 15 руб.

Отсюда следует, что если в задаче заменить утюг сковородкой, тогда за две сковородки заплатят не 65 руб., а на 15 руб. меньше.

План и решение задачи:

1) Сколько стоят две сковородки?

65 руб. — 15 руб. = 50 руб.

2) Сколько стоит одна сковородка?

50 руб. : 2 = 25 руб.

Ответ: 25 руб. стоит сковородка.

В решении этой задачи показано, как анализ условия задачи связывается с составлением плана решения ее.

Задача № 2. Красный и синий карандаши стоят 1 руб. 50 коп. Красный карандаш дороже синего на 30 коп. Сколько стоит красный карандаш?

Внимание учащихся фиксируется на том, что в задаче требуется найти стоимость того карандаша, который ценится дороже.

Анализ задачи и ее решение. В задаче спрашивается, сколько стоит красный карандаш. Он дороже синего на 30 коп. Это значит, что вместо синего можно купить красный, добавив 30 коп. Можно узнать стоимость двух красных карандашей, а затем стоимость одного красного карандаша.

1) 1 руб. 50 коп. + 30 коп. = 1 руб. 80 коп. стоят два красных карандаша.

2) 1 руб. 80 коп. : 2 = 90 коп. стоит один красный карандаш.

Ответ: 90 коп. стоит красный карандаш.

Задача № 3. За клей и кисточку заплатили 80 коп. Клей на 54 коп. дороже кисточки. Сколько стоят отдельно клей и кисточка?

Условие задачи повторяется учащимися связным рассказом и уточняется вопрос задачи.

Далее идет разъяснение условия задачи для составления плана решения задачи.

В задаче спрашивается, сколько стоят отдельно клей и кисточка.

Сказано, что клей дороже кисточки на 54 коп., это значит, если к 80 коп. прибавить еще 54 коп., то вместо кисточки можно купить клей и наоборот, если от 80 коп. отнять 54 коп., то можно будет на оставшиеся деньги купить две кисточки.

План решения задачи:

1) Сколько стоят две кисточки?
2) Сколько стоит одна кисточка?
3) Сколько стоит клей?

Решение задачи:

1) 80 коп. — 54 коп. = 26 коп. стоят две кисточки.
2) 26 коп. : 2 = 13 коп. стоит одна кисточка.
3) 13 коп. + 54 коп. = 67 коп. стоит клей.

Ответ: Клей стоит 65 копеек. Кисточка стоит 13 коп.

Задача № 4. Тесемку, длиной в 42 *м*, разрезали на две части так, что одна из них была длиннее другой на 12 *м*. Найти длину каждой части.

Анализ задачи и ее решение. 42 *м* содержат две неравных части, из которых одна больше другой на 12 *м*. Если заменить *больший* кусок меньшим, то и два меньших куска будут короче всей тесемки на 12 *м*; если же меньший кусок заменить большим, то два больших куска будут длиннее 42 *м* на 12 *м*.

Условие задачи может быть иллюстрировано чертежом.

Предполагаемая длина меньшей части.

12 м Длина большей части.

12 м Длина всей тесемки 42 *м*.

Длина всей тесемки состоит из длины двух меньших кусков да еще 12 *м*. Если отрезать от всей тесемки 12 *м*, то получим длину двух меньших кусков

Зная длину двух меньших кусков, можно найти длину одного куска, а затем длину большего куска тесемки.

Решение задачи:

1) 42 *м* — 12 *м* = 30 *м* длина двух меньших частей.
2) 30 *м* : 2 = 15 *м* длина меньшей части.
3) 15 *м* + 12 *м* = 27 *м* длина большей части.
Ответ: 27 *м* — большая часть; 15 *м* — меньшая часть.

Задача № 5. Для Москвы и Ленинграда изготовили на фабрике 72 840 цветных карандашей. Все эти карандаши разложили в коробки, по 6 карандашей в каждую коробку. Москва получила на 540 коробок больше, чем Ленинград. Сколько коробок получила Москва?

Анализ задачи и план ее решения: чтобы узнать, сколько коробок получила Москва, нужно знать, сколько коробок карандашей всего изготовила фабрика. Затем полученное число коробок надо разделить так, чтобы Москва получила на 540 коробок больше, т. е. чтобы Москва получила коробок столько, сколько получил Ленинград и сверх этого еще 540 коробок.

Таким образом, если из общего количества коробок изъять эти 540 коробок, то остальное количество коробок придется поделить между Москвой и Ленинградом поровну.

Этот анализ подсказывает план решения:

1) Сколько всего коробок изготовлено фабрикой для Москвы и Ленинграда?

2) Сколько коробок получили Москва и Ленинград без дополнительных 540 коробок для Москвы?

3) Сколько коробок получил Ленинград?

4) Сколько коробок получила Москва?

Запись решения задачи:

1) 72 840 кар. : 6 кар. = 12 140 (коробок).

2) 12 140 кор. — 540 кор. = 11 600 кор. карандашей нужно поделить между Москвой и Ленинградом поровну.

3) 11 600 кор. : 2 = 5800 коробок карандашей получил Ленинград.

4) 5800 кор. + 540 кор. = 6340 коробок карандашей получила Москва.

Задача № 6 (IV класс). В двух шкафах 340 книг, в одном из них на 40 книг больше, чем в другом. Сколько книг в каждом шкафу?

Анализ задачи: 340 книг нужно разложить в два шкафа так, чтобы в одном из них было больше, чем в другом, на 40 книг. Положить на 40 книг больше в другой шкаф, чем в первый, это значит положить сначала столько же, сколько и в первый да еще 40 книг. Следовательно, 340 книг состоят из удвоенного количества книг первого шкафа да еще 40 книг.

План и решение задачи:

1) Найти удвоенное количество книг первого шкафа.

340 кн. — 40 кн. = 300 кн.

2) Найти число книг первого шкафа.

300 кн. : 2 = 150 кн.

3) Найти число книг второго шкафа:

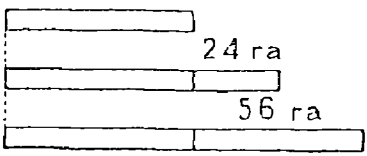
150 кн. + 40 кн. = 190 кн.

Ответ: В одном шкафу 150 книг, в другом 190 книг.

Задача № 7 (IV класс). В колхозе засеяли свеклой три участка земли, всего 848 *га*. Второй участок на 24 *га* меньше первого и на 56 *га* меньше третьего. Сколько гектаров в каждом участке?

Анализ задачи: 848 *га* нужно распределить между тремя неравными участками. Из условия задачи видно, что меньший участок это второй участок. Первый участок на 24 *га* больше второго. Третий участок на 56 *га* больше второго.

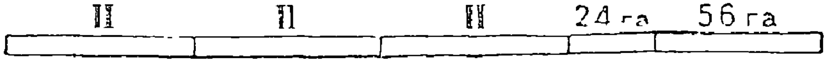
Чертеж, разъясняющий условие:



Площадь второго участка.

Площадь первого участка.

Площадь третьего участка.



Площадь трех участков колхоза — 848 *га*.

Площадь трех участков колхоза 848 *га* состоит из утроенной площади второго участка (из трех меньших участков) да еще 24 *га* и 56 *га*.

Решение задачи:

1) 24 *га* + 56 *га* = 80 *га* сверх утроенной площади второго участка:

2) 848 *га* — 80 *га* = 768 *га* утроенная площадь второго участка;

3) 768 *га* : 3 = 256 *га* площадь второго участка;

4) 256 *га* + 24 *га* = 280 *га* площадь первого участка;

5) 256 *га* + 56 *га* = 312 *га* площадь третьего участка.

Разъяснение условия задачи может быть представлено такой схемой:

Площадь второго участка принимаем за 1 часть всего поля.
„ первого „ составляет 1 часть + 24 *га*.
„ третьего „ „ 1 часть + 56 *га*.
848 *га* состоят из 3 частей + 24 *га* + 56 *га*.

План и решение задачи:

1) Сколько гектаров нужно отнять, чтобы получить три равных участка?

24 *га* + 56 *га* = 80 *га*

2) Сколько гектаров нужно разделить на три равные части?

848 *га* — 80 *га* = 768 *га*

3) Сколько гектаров во втором участке?

768 *га* : 3 = 256 *га*

4) Сколько гектаров в первом участке?

256 *га* + 24 *га* = 280 *га*

5) Сколько гектаров в третьем участке?

256 *га* + 56 *га* = 312 *га*

Ответ: Площадь I участка 280 *га*; площадь II участка 256 *га*; площадь III участка 312 *га*.

Если задача учащимися решается вполне самостоятельно, то объяснение ее решения следует после того, как план и решение записаны в тетради. В этом случае учителя интересует весь ход рассуждения, последовательность мыслей учащегося, которые привели его к тому, чтобы довести до конца решение задачи.

Объяснение решения приведенной выше задачи примет такую форму: для решения данной задачи предположим, что площадь второго участка (меньшего) составляет 1 часть, тогда площадь первого участка будет иметь 1 такую же часть да еще 24 *га*, так как первый участок на 24 *га* больше второго; площадь третьего участка на 56 *га* больше площади второго участка, следовательно, третий участок состоит из 1 ч. и 56 *га*. Площадь всех трех участков 848 *га* состоит из 3 ч., 24 *га* и 56 *га*, или 3 ч. и 80 *га*. Если от 848 *га* отнять 80 *га*, получится площадь трех равных меньших участков или утроенная площадь второго участка, 768 *га*. Если три равные части содержат 768 *га*, то один второй участок равен 768 *га* : 3 = 256 *га*.

Зная площадь второго участка, найдем площадь первого участка, увеличив 256 га на 24 га; затем, увеличив площадь второго участка на 56 га, получим площадь третьего участка.

Ответ: Площадь I участка 280 *га*; площадь II участка 256 *га*; площадь III участка 312 *га*.

Задача № 8. Проволоку, длиной в 707 *м*, разрезали на 3 куска так, что первый кусок был длиннее второго на 42 *м*, а второй короче третьего на 14 *м*. Из меньшего куска проволоки сделали клетки для птиц. Сколько клеток было сделано, если на каждую клетку употребили 7 *м* проволоки?

Эта задача в одном из IV классов решена так.

Учащиеся связным рассказом повторили условие задачи *и дали неполный анализ для составления схемы условия и* плана решения задачи.

Чтобы узнать, сколько сделали клеток, нужно знать, сколько проволоки израсходовали на все клетки и сколько проволоки пошло на каждую клетку. На каждую клетку пошло 7 *м* проволоки, это известно из условия задачи. Сколько всего израсходовали проволоки, неизвестно; сказано только, что израсходовали меньший кусок, который отрезали от всего куска длиной 707 *м*.

Длину меньшего куска найдем тогда, когда 707 сумеем разделить на три неравные части так, что первая на 42 *м* длиннее второй, а вторая короче третьей на 14 *м*.

Выбираем меньший кусок, т. е. второй, и принимаем его длину за 1 часть.

Третий кусок составляет 1 часть + 14 *м*.

Первый кусок составляет 1 часть + 42 *м*.

Вся проволока 707 *м* состоит из трех меньших кусков, 14 *м* и еще 42 *м*.

Теперь решаем задачу:

1) На сколько метров вся проволока длиннее трех меньших кусков?

$$14\ м + 42\ м = 56\ м.$$

2) Какой длины три меньших куска?

$$707\ м - 56\ м = 651\ м.$$

3) Какой длины меньший кусок проволоки?

$$651\ м : 3 = 217\ м.$$

4) Сколько сделали клеток?

$$217\ м : 7\ м = 31.$$

Ответ: Сделали 31 клетку для птиц.

Задачи на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению

Нахождение двух или нескольких чисел по их сумме и кратному отношению по своему смыслу примыкает к делению числа пропорционально двум или нескольким числам. Учащиеся школы без особых затруднений воспринимают прием решения этих задач. Здесь следует остановить их внимание на том, что задачи подобного вида требуют предположения, введения условной единицы — части, а потому после того, как задача будет решена, следует проверить найденные результаты, соответствуют ли они тем зависимостям, которые выражены в условии задачи.

Задача. На трех возах перевезли 7 *ц* 35 *кг* муки. На первом возу было перевезено в 2 раза больше, чем на втором, а на втором в 2 раза больше, чем на третьем. Сколько муки перевезено на каждом возу?

Условие задачи повторяется учащимися связным рассказом, при этом обращается особое внимание учеников на вопрос задачи: сколько муки перевезено на каждом возу. Устанавливаем, что меньше всего муки было на третьем возу. Примем эту меру за 1 часть.

На третьем возу перевезли 1 часть всей муки.
На втором возу перевезли 2 части всей муки.
На первом возу перевезли 4 части.

План и решение задачи:

1) Сколько всего равных частей составляют 7 *ц* 35 *кг*?

$$1\ ч. + 2\ ч. + 4\ ч. = 7\ ч.$$

2) Сколько муки перевезли на третьем возу?

$$7\ ц\ 35\ кг : 7 = 1\ ц\ 5\ кг.$$

3) Сколько муки перевезли на втором возу?

$$1\ ц\ 5\ кг \cdot 2 = 2\ ц\ 10\ кг.$$

4) Сколько муки перевезли на первом возу?

$$1\ ц\ 5\ кг \cdot 4 = 4\ ц\ 20\ кг.$$

Проверка решения.

Если сложить полученные результаты ($1\ ц\ 5\ кг + 2\ ц\ 10\ кг + 4\ ц\ 20\ кг = 7\ ц\ 35\ кг$), то получим общее количество муки.

После того как задача будет решена, следует повторить ее решение с объяснением действий:

1) Почему нужно 7 *ц* 35 *кг* разделить на 7 равных частей?

2) Почему нужно 1 *ц* 5 *кг* умножить на 2?

3) Почему нужно 1 *ц* 5 *кг* умножить на 4?

Задачи на нахождение чисел по их разности и кратному отношению

З а д а ч а. Зерно хранится в 3 амбарах. Во втором амбаре в 3 раза, а в третьем в 5 раз больше зерна, чем в первом. Сколько зерна в каждом амбаре, если в третьем амбаре на 576 *ц* больше, чем во втором?

Объяснение, предшествующее составлению плана: зерно хранится в 3 амбарах, во втором — в 3 раза, а в третьем в 5 раз больше, чем в первом. Следовательно, меньше всего зерна в первом амбаре.

Предположим, что в первом амбаре хранится 1 часть всего зерна. Тогда во втором амбаре будет 3 таких же части, а в третьем 5 таких же частей.

Получим в первом амбаре 1 часть;
во втором амбаре 3 части;
в третьем амбаре 5 частей.

В задаче сказано, что в третьем амбаре на 576 *ц* больше, чем во втором. Сравнивая количество зерна в частях, видим, что в третьем амбаре 5 частей, а во втором 3 части; отсюда можно узнать, скольким частям равны 576 *ц*; затем узнаем, сколько зерна приходится на 1 часть или сколько его было в первом амбаре, а затем узнаем, сколько зерна было во втором и третьем амбарах отдельно.

План и решение задачи:

1) Сколько равных частей составляют 576 *ц*?

5 ч. — 3 ч. = 2 ч.

2) Сколько зерна приходится на 1 часть или сколько зерна хранится в первом амбаре?

576 *ц* : 2 = 288 *ц*.

3) Сколько зерна хранится во втором амбаре?

288 *ц* · 3 = 864 *ц*.

4) Сколько зерна хранится в третьем амбаре?

864 *ц* + 576 *ц* = 1440 *ц*.

Ответ: Зерна хранится в первом амбаре 288 *ц*; во втором амбаре 864 *ц*; в третьем амбаре 1440 *ц*.

Проверка результатов решения: во сколько раз больше зерна в третьем амбаре, чем в первом:

1440 *ц* : 288 *ц* = 5.

Если задача решалась учащимися самостоятельно, то объяснение ее решения следует за оформлением плана и решения в таком виде: для решения данной задачи предположим, что в первом амбаре хранится 1 часть зерна, тогда во втором амбаре будет 3 таких же части, а в третьем амбаре будет 5 таких же частей.

576 *ц* нужно разделить на две равные части, так как в третьем амбаре больше, чем во втором, на две части.

Если мы знаем, что 2 части равны 576 *ц*, то 1 часть меньше в 2 раза, 576 *ц* : 2 = 288 *ц*; 288 *ц* и хранится в первом амбаре.

Если во втором амбаре 3 части, то, умножив 288 *ц* на 3, найдем, что во втором амбаре 864 *ц*. В третьем амбаре на 576 *ц* больше, чем во втором, сложим числа 864 *ц* + + 576 *ц* = 1440 *ц*.

Чтобы проверить полученные результаты, нужно узнать, во сколько раз больше зерна в третьем амбаре, чем во втором:

1440 *ц* : 288 *ц* = 5.

Зерна в третьем амбаре в 5 раз больше, чем во втором, как и сказано в условии задачи.

Задачи, решаемые способом замены одного данного другим

Задача № 1140 (из задачника для IV класса). Для квартиры купили шкаф, стол, и кресло и за всю покупку уплатили 1440 руб. Сколько стоят в отдельности шкаф, стол и кресло, если стол стоит в 2 раза дороже кресла, а шкаф в 3 раза дороже стола?

Устное объяснение, предшествующее составлению плана решения задачи: в задаче сказано, что стол дороже кресла в 2 раза, это значит, вместо одного стола на те же деньги можно купить два кресла. Шкаф дороже стола в 3 раза, это значит, вместо шкафа можно купить на те же деньги три стола, но так как вместо стола можно купить два кресла, то вместо шкафа можно купить 6 кресел. Таким образом можно узнать, сколько всего кресел купят на 1440 руб. Потом узнаем стоимость одного кресла, затем стоимость стола и, наконец, стоимость шкафа.

Решение задачи:

1) 1 кресло $\cdot 2 = 2$ кресла купят вместо 1 стола;
2) 2 кресла $\cdot 3 = 6$ кресел купят вместо 1 шкафа;
3) 1 кресло $+$ 2 кресла $+$ 6 кресел $= 9$ кресел купят на 1440 руб.;
4) 1440 руб. $: 9 = 160$ руб. стоит одно кресло;
5) 160 руб. $\cdot 2 = 320$ руб. стоит стол;
6) 320 руб. $\cdot 3 = 960$ руб. стоит шкаф.

Задача № 1032 (из того же задачника). 47 *м* полотна и 36 *м* шелковой материи стоят 1841 руб. Сколько стоят 1 *м* шелковой ткани и 1 *м* полотна в отдельности, если полотно в 6 раз дешевле шелковой ткани?

Устное объяснение решения задачи после того, как задача решена самостоятельно учащимися: для решения данной задачи заменим 36 *м* шелковой материи полотном, тогда у нас получится, что на все деньги 1841 руб. купили только одно полотно. Зная, сколько метров полотна купили на 1841 руб., можно будет узнать цену 1 *м* полотна, а затем цену 1 *м* шелковой материи. Если 1 *м* шелковой материи в 6 раз дороже 1 *м* полотна, то это значит, что вместо 1 *м* шелковой материи можно купить 6 *м* полотна; можно узнать, сколько метров полотна купят вместо 36 *м* шелковой материи; для этого 6 *м* · 36 = 216 *м*. На 1841 руб. купят полотна 47 *м* + 216 *м* = 263 *м*.

Если 263 *м* полотна стоят 1841 руб., то 1 *м* стоит в 263 раза дешевле, 1841 руб. : 263 = 7 руб. Зная стоимость 1 *м* полотна, можно найти стоимость 1 *м* шелка, умножив 7 руб. на 6.

Задачи, решаемые способом исключения одного из неизвестных

Задача. За 42 *куб. м* березовых дров и 18 *куб. м* сосновых уплатили 1128 руб. За 37 *куб. м* березовых дров и 18 *куб. м* сосновых уплатили 1028 руб. Сколько стоит кубометр тех и других дров?

Запись условия задачи в форме двух строк и сопоставление однородных величин намечает путь решения задачи:

42 *куб. м* берез. и 18 *куб. м* сосн. — 1128 руб.;
37 *куб. м* „ и 18 *куб. м* „ — 1028 руб.

Рассуждение, предшествующее составлению плана: в первый раз заплатили за все дрова больше, чем во второй раз, потому что в первый раз купили больше березовых дров. Следовательно, план решения задачи может быть таков:

1) На сколько рублей больше заплатили в первый раз?

2) Сколько кубометров березовых дров купят на эти деньги?

3) Сколько стоит кубометр березовых дров?

4) Сколько стоят 37 *куб. м* березовых дров?

5) Сколько стоят 18 *куб. м* сосновых дров?

6) Сколько стоит 1 *куб. м* сосновых дров?

По составленному плану, устно или письменно, учащиеся вполне самостоятельно решают задачу, а после ее решения объясняют последовательность плана и применение арифметических действий для решения каждой простой задачи.

Задачи, решаемые способом предположения[1]

Задача № 1197 (из задачника для IV класса). В двух кусках было 25 *м* материи на сумму 149 руб. Метр материи в первом куске стоит 7 руб., а во втором 5 руб. Сколько метров материи было в том и другом кусках в отдельности?

---

[1] Задачи этого типа из программ 1919 года изъяты.

Объяснение, предшествующее составлению плана решения задачи: предположим, что вся материя (25 *м*) была по 7 руб. (т. е. заменим дешевую материю дорогой), тогда узнаем, сколько будут стоить 25 *м* по 7 руб.

25 *м* по 7 руб. будут стоить больше 149 руб., так как за каждый метр дорогой материи переплачивают 2 руб.

Зная, сколько переплатили за всю дешевую материю, заменив ее материей по 7 руб. за метр и зная, что заменяя 1 *м* дешевой материи 1 *м* дорогой, переплачивают 2 руб., можно узнать, сколько было куплено материи по 5 руб. за метр. Затем узнаем, сколько было куплено материи по 7 руб. за метр.

План и решение задачи:

1) Сколько стоила бы вся материя, если бы каждый метр стоил 7 руб.?

$$7 \text{ руб.} \cdot 25 = 175 \text{ руб.}$$

2) На сколько рублей увеличилась бы стоимость материи?

$$175 \text{ руб.} - 149 \text{ руб.} = 26 \text{ руб.}$$

3) На сколько рублей 1 *м* материи первого куска дороже метра второго куска?

$$7 \text{ руб.} - 5 \text{ руб.} = 2 \text{ руб.}$$

4) Сколько метров материи было во втором куске?

$$26 \text{ руб.} : 2 \text{ руб.} = 13 \text{ м.}$$

5) Сколько метров было в первом куске?

$$25 \text{ м} - 13 \text{ м} = 12 \text{ м.}$$

Проверка решения: $7 \text{ руб.} \cdot 12 + 5 \text{ руб.} \cdot 13 = 149 \text{ руб.}$

Ответ: длина первого куска 12 *м*; длина второго куска 13 *м*.

Объяснение, которое следует после самостоятельного решения задачи учащимися, включает объяснение решения каждой простой задачи, которые все вместе составляют план решения задачи.

Задачи на движение по приемам решения примыкают к задачам, разобранным выше. При решении задачи на движение следует приучить учащихся иллюстрировать условие задачи чертежом.

Переход к **письменным объяснениям** решения задач происходит после того, как учащиеся овладевают устным объяснением.

Письменное объяснение решения задачи должно быть кратким, точным и грамотным. Во избежание грамматических ошибок следует научить учащихся пользоваться текстом задачи при записи плана ее решения. Запись плана в форме вопросов можно заменить иногда краткими пояснениями получаемых результатов. Пусть, например, требуется решить задачу:

Колхозники собрали с двух полей 771 *ц* пшеницы. В первом поле было 19 *га*, а во втором поле 23 *га*. Какой урожай пшеницы с гектара был в каждом поле, если с гектара второго поля сняли урожай на 3 *ц* меньше, чем с каждого гектара первого поля?

Решение задачи:

1) 3 *ц* · 23 = 69 *ц*; на 69 *ц* меньше собрали с 23 *га* второго поля;

2) 771 + 69 *ц* = 840 *ц* собрали бы с двух полей при одинаковом урожае;

3) 19 *га* + 23 *га* = 42 *га* — площадь двух полей;

4) 840 *ц* : 42 = 20 *ц* собрали с 1 *га* первого поля;

5) 20 *ц* — 3 *ц* = 17 *ц* собрали с 1 *га* второго поля.

Проверка решения задачи:

1) 17 *ц* · 23 = 391 *ц* собрали со второго поля;

2) 20 *ц* · 19 = 380 *ц* собрали с первого поля;

3) 320 *ц* + 391 *ц* = 771 *ц* пшеницы собрали с двух полей.

Ответ: урожай пшеницы был 20 *ц* с гектара первого поля и 17 *ц* с гектара второго поля.

Краткое объяснение решения задачи может быть дано и в иной форме; рассмотрим **задачу** № 243 (задачник Н. С. Поповой, IV класс). Колхоз купил 5 жаток и несколько сеялок. За всю покупку уплачено 5225 руб. Жатка стоила 825 руб., а сеялка в 3 раза дешевле жатки. Сколько сеялок купил колхоз?

Решение задачи с письменным пояснением:

1) Одна жатка стоит 825 руб., а 5 жаток стоят в 5 раз больше:

825 руб. · 5 = 4125 руб.

2) Если за всю покупку уплачено 5225 руб., а жатки стоят 4125 руб., то за сеялки заплатили:

$$5225 \text{ руб.} - 4125 \text{ руб.} = 1100 \text{ руб.}$$

3) Жатка стоила 825 руб., а сеялка в 3 раза меньше:

$$825 \text{ руб.} : 3 = 275 \text{ руб.}$$

4) Одна сеялка стоит 275 руб., а все сеялки — 1100 руб.; сеялок купили столько, сколько раз 275 руб. содержится в 1100 руб.:

$$1100 \text{ руб.} : 275 \text{ руб.} = 4.$$

Сеялок купили 4 шт.

Решение задач с кратким письменным объяснением учащиеся могут выполнять самостоятельно. Эта работа может применяться в IV классе и притом в ограниченных размерах, по преимуществу как самостоятельная домашняя работа. Начальная школа должна научить учащихся давать главным образом устное объяснение решения задачи. Разбор задачи и составление плана ее решения, объяснение выбора действия для решения поставленного вопроса, объяснение получаемых результатов — все это является хорошим средством для развития речи и мышления учащихся.

Ф. П. Новоселов

МЕТОДЫ И ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ И СОСТАВНЫХ ЗАДАЧ В МЛАДШИХ КЛАССАХ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Простые задачи

Задачи, решаемые в школе, распадаются на простые и составные. Методика решения тех и других задач неодинакова, поэтому целесообразно рассмотреть их отдельно. Простые задачи ценны прежде всего тем, что они раскрывают смысл каждого действия и показывают, какие вопросы решаются каждым из них. Кроме того, решение их подготовляет к решению составных задач. В самом деле, каждая составная задача при решении распадается на простые задачи, последовательное решение которых и составляет решение составной задачи. Поэтому умение решать простые задачи является одним из основных условий для правильного решения составных задач.

Однако при решении составной задачи необходимо уметь не только решать простые задачи, на которые она распадается, но и уметь разложить ее на эти простые задачи. Умение разлагать составную задачу на простые тесно связано со знанием простых задач. Решение простых задач — это только этап к овладению умением решать задачи.

Решая простые задачи, ученики на более простом материале начинают приобретать ряд навыков, необходимых для решения всякой задачи, например: умение отчетливо воспринимать и запоминать содержание задачи, пересказывать ее и т. п.

Восприятие и усвоение содержания задачи

Сознательно воспринять задачу — это значит:

а) Представить себе ту картину или ситуацию, которая рисуется в условии задачи.

б) Понять, какое изменение происходит с величинами, о которых говорится в задаче.

в) Понять вопрос задачи.

Возьмем, например, задачу: В кувшине было 8 стаканов молока; 3 стакана молока выпили. Сколько молока осталось?

Воспринимая эту задачу, ученик представляет кувшин с молоком. Из него берут 3 стакана молока. Опираясь на знание того факта, что если берут сколько-нибудь молока из кувшина, то количество молока должно уменьшаться, ученик дорисовывает картину, данную в задаче важной подробностью: количество молока уменьшается. Мы можем сказать, что ученик сознательно воспринял и понял содержание задачи. Теперь ему становится ясен и вопрос задачи — узнать, сколько стаканов молока осталось в кувшине.

Это содержание задачи ученик должен помнить. Запоминание содержания задачи имеет особое значение в первой половине учебного года в I классе, когда ученик не может еще пользоваться задачником и воспринимает задачу со слов учителя. Без знания содержания задачи он не сможет разобраться в ее содержании, найти путь решения.

Для облегчения запоминания числовых данных пользуются краткой записью условия.

Характер восприятия задачи неодинаков при восприятии разных задач, он постепенно изменяется в процессе работы над задачами одного и того же вида. В начале работы над решением задач он не таков, как в конце учебного года, а тем более, в старших классах. Посмотрим, как развивается этот процесс. Первое время ученик воспринимает задачу вполне конкретно со всеми ее подробностями, из которых многие не имеют существенного значения для решения задачи. Возьмем задачу: В комнате стояло 8 стульев. Внесли еще 2 стула. Сколько в комнате стульев? При восприятии этой задачи ученик представляет комнату (может быть и количество окон в ней и т. п.), представляет 8 стульев, расставленных определенным образом, представляет, как вносят еще 2 стула. Все эти подробности рисуемой картины имеют для него одинаковое значение. Вопрос первое время мало связывается с содержанием задачи. Только по аналогии с такими вопросами, которые он встречал при решении примеров и смысл которых раскрывали ему при первом знакомстве с действием сложения, он начинает понимать данный вопрос и под влиянием требования вопроса, ученик обращает внимание на изменение количества стульев.

Встречаясь с такого рода задачей, но с другим содержанием, ученик подходит к ней как к совершенно новой задаче. Так, если дать ему задачу: На стене висело 3 картины, повесили еще 2. Сколько теперь картин висит на стене? — он воспринимает ее как новую задачу, не похожую на первую: ему рисуется совершенно иная картина. Это еще раз подтверждает, что в начале все внимание ученика сосредоточивается на фабуле рассказа. По мере того, как ученик решит несколько таких задач, он начинает замечать в них сходное: во всех этих задачах требуется к одному количеству прибавить другое количество. Эти общие черты образуют общее представление о данном виде задач. Встречаясь с новой задачей такого же вида, ученик обращает внимание прежде всего на сходное с общим представлением, ярче выделяет его. Остальные подробности остаются в тени или даже не воспринимаются. Общее в задаче подчеркивается и одинаковым решением. Восприятие становится более точным, отчетливым. Уточняется и общее представление о данном виде простых задач. Одновременно образуется связь между вопросом задачи и действием, посредством которого она решается.

Развитие общего представления о данном виде простых задач, как мы увидим дальше, очень важно для решения сложных задач: оно помогает выделять, разлагать сложную задачу на простые.

Из всего сказанного можно сделать следующий вывод.

На каждый вид простых задач нужно давать учащимся для решения разнообразные по сюжету, но однородные по математическому содержанию задачи и притом в таком количестве, чтобы у учеников образовалось общее представление о задаче данного вида.

Недопустима пестрота математического содержания задач, быстрая их смена, одновременное сообщение задач разных видов до образования общего представления о каждом виде.

После образования у ребенка общего представления о данном виде задач, нужно совершенствовать это общее представление путем сопоставления с другими видами знакомых простых задач.

Затруднения учеников при восприятии и усвоении содержания задачи

При изучении вопроса, как нужно помогать ученикам при усвоении содержания задачи, необходимо обратиться к анализу тех затруднений, которые приходится ученику преодолевать при усвоении задачи, и их причин. Наблюдение показывает, что типичными причинами затруднений являются следующие:

а) недостаток знаний и жизненного опыта у ребенка;

б) необычность для ученика рассуждений и представлений, необходимых для понимания содержания данной задачи;

в) недостаточное развитие речи ученика: незнакомство с некоторыми терминами, оборотами речи, которые встречаются в задачах;

г) трудность понимания смысла вопроса, когда вопрос в скрытой форме выражает зависимость между искомыми и данными.

Давая задачу ученикам, мы часто не учитываем, какие знания должен иметь ученик, насколько сложны те умозаключения, которые должен сделать ученик, чтобы понять задачу.

Возьмем, например, задачу из „Сборника арифметических задач и упражнений для I класса" Эменова и Чекмарева: Мальчику сейчас 10 лет. Сколько лет тому назад ему было 8 лет?

Для понимания этой задачи ученик должен знать непрерывность течения времени и понять, что разница между 10 протекшими годами и первыми из них 8 годами и есть показатель того, сколько лет тому назад мальчику исполнилось 8 лет, знать, как вычислить эту разницу. Так как этих знаний в это время у него нет, то он не может понять такого рода задачи. Необходимо специальное предварительное объяснение, сообщение этих знаний, чтобы ученик мог разобраться в задаче.

Из того же задачника Эменова и Чекмарева возьмем такую задачу: Колодец был глубиной в 7 *м*, а веревка для ведра длиною 8 *м*. *Как был велик лишний конец веревки?*

Для понимания этой задачи ученику нужно знать, как можно измерять глубину колодца при помощи веревки, понять, что одна часть веревки по длине соответствует глубине колодца — 7 *м*, а другая составляет излишек. Ребенок должен знать, что глубину колодца можно рассматривать как расстояние от его поверхности до дна; это тоже длина. Поэтому ее можно сравнить с длиной веревки.

Глубина колодца равна 7 *м*, значит, нужным концом веревки следует считать только ту часть ее, которая соответствует 7 *м*, которая уходит в колодец, а та часть веревки, которая не уходит в глубину колодца — „излишек", лишний конец.

Далее, ребенок должен представить веревку, составленную из двух частей — той, которая соответствует глубине колодца (7 *м*) и „излишка", а вся веревка равна 8 *м*. Поняв все это, ученик может догадаться о характере зависимости между данными и искомой величиной (по одному слагаемому и сумме найти второе слагаемое) и найти решение задачи. Мы видим, насколько сложное, трудное умозаключение должен сделать ученик, какими необычными для него знаниями он должен обладать, чтобы разобраться в задаче.

Вот почему, когда эта задача была дана в классе без предварительного объяснения, с нею никто из учеников не справился.

В том же задачнике дана такая задача: „От края колодца до воды 10 *м* да от поверхности воды до дна — 8 *м*. Сколько метров от края колодца до дна? Какой глубины колодец?

Дети не привыкли рассматривать глубину колодца состоящей из двух частей: из той, которая соответствует расстоянию от края колодца до поверхности воды, и той части, которая соответствует высоте слоя воды.

Часто необычным для учеников оказывается сравнение целого предмета с какой-либо частью его; особенно, когда эту часть они не особенно отчетливо представляют. Так, в ряде школ ученики с большим трудом разбирались и понимали содержание следующей задачи: „Длина всего тела кита 20 *м*, а голова на 13 *м* короче. Какой длины голова кита? Даже после того, как на картине было показано изображение кита, указано все тело и его голова, ученики не отделяли мысленно голову от туловища, а если отделяли, то считали телом кита только туловище.

Очень часто затруднения возникают из-за непонимания терминов, оборотов речи, особенностей формулировок некоторых задач. Иногда такие термины не связаны тесно с основным математическим содержанием задачи и поэтому не имеют существенного значения в понимании задачи, например: В гавани стоят 5 пароходов, 2 парохода ушли в море. Сколько пароходов осталось в гавани? Здесь незнакомый для учеников термин „гавань" мало связан с основным математическим содержанием (все равно, где стояли пароходы), а поэтому ученики понимают задачу и решают ее. Иногда же незнакомый термин тесно связан с математическим содержанием задачи, поэтому непонимание его ведет к непониманию всей задачи. Характерен такой случай: учитель дал задачу (в сельской школе): Мальчик поймал 7 жуков и 3 бабочки. Сколько всего насекомых поймал мальчик? Здесь термин „насекомых" связан с основным содержанием задачи: им обозначена та величина, которую нужно отыскать, он обозначает число и жуков и бабочек и без понимания его трудно понять самый вопрос задачи. И действительно, когда учитель бегло объяснил ученикам этот термин: „Жуки и бабочки — это и есть насекомые" и затем еще раз прочитал задачу, то только немногие из учеников решили задачу. Когда спросили одного из лучших учеников (тоже не решившего задачу): „Итак, сколько же насекомых поймал мальчик?" — он ничего не ответил. Повторили еще раз задачу. После этого он, очевидно, уловив смысл слова „Всего", ответил: „10 жуков и бабочек" — „А сколько поймали насекомых?" — на этот вопрос ответа не получили.

В одной школе ученики не поняли в задаче вопрос: „Сколько принялось деревьев?" и потому не могли решить задачи.

Кроме того, необходимо учитывать, что ученики не всегда так понимают некоторые термины, как их понимают взрослые. Так, в одной школе значительная часть учеников не поняли задачу: В саду росло 6 яблонь и 7 груш. Посадили еще 7 яблонь. Сколько деревьев растет в саду? В понимании учеников „растут" те деревья, которые уже принялись, а не те, которые только что посажены. Поэтому на вопрос задачи — следовал ответ: „6 яблонь", так, как сказано в задаче.

В задачнике Эменова и Чекмарева говорится „о трамвайном парке"; очевидно ученики не только сельских школ, но и большинства городских школ будут понимать парк как насаждение деревьев.

Или вот еще задача: За огурцы девочка сначала заплатила 5 коп., а потом доплатила еще 2 копейки. Сколько копеек заплатила девочка за огурцы? В одном классе сейчас же последовал ответ: „5 копеек", так как в задаче определенно сказано: „заплатила" 5 копеек. Доплату дети воспринимают, очевидно, как что-то другое.

Особенно трудны для учеников I и II класса чисто книжные выражения, редко встречающиеся в разговорном языке детей, например, задача: „На огороде 7 гряд, 5 из них заняты капустой, а остальные огурцами. Сколько гряд занято огурцами?“ Выражение „заняты“ в понимании детей имеет только одно значение — „взяты в долг“.

То же бывает и с оборотами речи. Возьмем задачу. Колхозник на одном лугу накосил 3 стога сена, а на другом 5 стогов. Сколько всего стогов накосил колхозник? Для учеников сельских школ „стог“ — это определенной формы куча сена; ими никогда не измеряют количество накошенной травы.

Большое затруднение для правильного понимания представляет косвенная формулировка задач. Например: Во время игры в саду дети разделились на 2 группы. В одной группе было 9 человек, в другой — 11. Сколько всех детей играло в саду?

В задаче говорится о делении детей на две группы, а в вопросе требуется найти сумму (сколько всего играет детей). Отсюда часто недоразумение; ученики дают ответ: „9 человек“, „11 человек“. Приходится эти термины и обороты речи объяснять ученикам, чтобы ученики не только поняли их, но и усвоили. Нужно сделать оговорку. Здесь больше чем где-либо сказываются особенности в развитии и подготовке отдельных учеников: то, что непонятно для одних учеников, может оказаться знакомым для других. Детей с более развитой литературной речью меньше затрудняет словесная формулировка задачи; они быстрее привыкают к особенностям формулировок задачи.

В процессе обучения, под влиянием требований жизни речь учеников постепенно выравнивается, обогащается, развивается. Было бы неправильно всю работу по развитию речи соединять с решением задач. Однако обогащение некоторыми терминами и оборотами нужно систематически проводить на уроках арифметики, не ограничиваться только объяснениями таких слов и оборотов, но добиваться их постепенного усвоения.

Запись условия задачи

Основные моменты в решении задач часто настолько тесно сливаются между собой, что их целесообразно разделить только при изучении вопроса. Так, усвоение содержания задачи иногда тесно переплетается с нахождением решения, с установлением зависимости между данными и искомым. Запись условия простой задачи не только выявляет ее содержание, но и служит средством ее усвоения. Поэтому нельзя категорически утверждать, как это делают некоторые методисты, что при решении простых задач можно условие задачи не записывать, так как это отнимает много времени.

Да и практика школы опровергает такое решение: мы знаем, что запись содержания простых задач (особенно в форме рисунков) широко практикуется в школе. Поэтому нужно решать вопрос, в каких случаях нужно допускать запись и какие формы ее наиболее целесообразны.

Полезно картинное изображение содержания задачи. Вначале, когда ученики еще не умеют читать, изображение содержания задачи рисунком особенно целесообразно.

В начале работы дети плохо умеют слушать устное изложение задачи, недостаточно понимают книжный язык задачи. Передача содержания задачи на картине облегчает усвоение этого содержания, дает возможность живее представить, о чем говорится в задаче.

Рисунки могут почти целиком заменять текст задачи. По таким рисункам ученик может работать самостоятельно.

Рисунки полезно сопровождать устным заданием: „Что можно узнать по этой картинке?“

Для I класса очень полезно иллюстрировать рисунками такие задачи, которые являются как бы представителем изучаемого вида и с которыми можно сравнивать другие задачи.

Не нужны часто встречающиеся в практике школ и в задачниках рисунки знакомых детям предметов.

Большое распространение в практике школ получили так называемые иллюстрированные справочники, плакаты.

Работа по плакатам облегчает усвоение содержания задач, поднимает интерес к ним.

Иллюстрирование содержания задачи рисунком полезно соединять с выявлением связи и зависимости между данными и искомым.

Возьмем задачу: В сахарнице было 15 кусков сахара. Когда в каждый стакан положили по 2 куска сахара, в сахарнице осталось 3 куска. Сколько было стаканов?

Ученикам трудно понять, что стаканов было столько, сколько пар в 12 кусках. Поэтому, даже решив первый вопрос „Сколько израсходовали сахара?“ (15 кусков — 3 куска = 12 кусков) ученики не знают, что делать дальше. Но они начинают легко понимать эту задачу, когда задача постепенно иллюстрируется: рисуем стакан и против него

2 куска. Спрашиваем: „Весь ли сахар израсходовали?" — „Нет." Положим в другой стакан 2 куска, рисуем второй стакан и 2 куска сахара и т. д. Недоканчивая „расход" всех 12 кусков, учитель может спросить: „По скольку кусков берем для стакана каждый раз? Давайте это покажем на рисунке. Сколько же раз придется брать сахар? А сколько будет стаканов? Значит, сколько было пар кусков сахара в 12 кусках, столько было и стаканов".

С помощью рисунка ученикам отчетливо показано, какие величины связаны и какой характер связи между ними. Без понимания же связи нельзя было сознательно найти решение. Конечно, такое изображение не передает целиком содержание задачи, но основное свое назначение — помочь понять связь и зависимость между данными и искомым — оно хорошо выполняет.

Усвоение задачи связано с запоминанием ее содержания. Чтобы помочь ученику запомнить содержание простой задачи, в методиках, да и в практике обычно применяется повторение задачи, сначала по вопросам, а потом и целиком. Повторение задачи в начале работы часто очень трудно для учеников потому, что язык задачи необычен для ученика. Умение повторять задачу нужно развивать постепенно. Уже указанное выше упражнение в иллюстрировании содержания задачи приучает учеников не только живо представлять содержание, но и запоминать его. Затем постепенное усложнение задач создает естественное упражнение в запоминании задач. Дети этого возраста свободно усваивают содержание простых задач, если только задача будет умело прочитана, а потому нет необходимости в повторении задачи.[1] К повторению простых задач в I классе нужно перейти после упражнений в составлении учениками задач по картинкам, сходным с решенными. Умение составлять задачу покажет, что ученик уже овладел языком задачи и, повторяя задачу, он будет повторять ее сознательно.

Объяснение задачи

При объяснении задачи учитель должен помочь ученикам понять содержание задачи, понять математическое значение вопроса, а в нужных случаях помочь найти решение.

---

[1] Автор явно недооценивает момента повторения условия за-

Объяснение может быть общеклассным для всех учеников и индивидуальным, когда учитель в процессе работы дает объяснения отдельным ученикам, которые нуждаются в помощи учителя. Объяснение должно быть по возможности кратким. Полнота его должна зависеть от степени важности и сложности того, что подлежит объяснению. Так, в приведенной выше задаче о судах в гавани термин „гавань" может быть объяснен кратко перед тем как давать задачу: „гавань — это место, где у берега стоят суда" — и, если можно, показать рисунок какой-либо гавани. Объяснения, особенно слов и оборотов речи, дает сам учитель, не тратя времени на то, чтобы добиться объяснения от учеников, как это нередко делается в школе.

Объяснение должно быть направлено на самое существенное, необходимое для понимания данной задачи.

Характер объяснения зависит и от целевой установки данного урока. Так, когда ставится цель познакомить с новым видом задачи и способом решения, нужно подробнее остановиться на выявлении характера связи и зависимости величин, чтобы у ученика создалось правильное представление о характере данного вида задач; нужно подробно раскрыть схему рассуждения, лежащую в основе хода решения. Если же цель урока — тренировка в решении знакомого вида задач, то объяснения должны быть более краткими и направлены, главным образом, на сравнение решаемой задачи с другими видами задач.

Как же следует объяснять задачу? При объяснении нужно прежде всего помочь ученикам понять содержание задачи. Анализируя затруднения учеников при усвоении содержания задачи, мы указали, что одной из причин непонимания задачи является отсутствие у учеников сведений, необходимых для понимания задачи. Выше была приведена задача о возрасте мальчика (мальчику сейчас 10 лет...) и указано, какие знания должны быть у ученика, чтобы он мог понять эту задачу. Трудность объяснения этой задачи увеличивается от того, что здесь невозможно применить наглядность. Объяснение придется дать, опираясь на небольшой опыт детей. Прежде всего нужно будет объяснить вопрос: „Сколько лет тому назад мальчику было 8 лет?", затем показать непрерывность течения времени и как путем отсчитывания уменьшается количество лет. („Сейчас мальчику 10 лет, а в прошлом году, год тому назад, ему было 9 лет. Как узнали?" и т. д.) Затем можно показать, что вместо постепенного отсчитывания можно воспользоваться соответствующим действием — вычитанием. Таким образом ученики будут наведены на выбор действия для решения, что в данной задаче является наиболее трудным.

Другой характер будет иметь объяснение задачи об измерении глубины колодца. Здесь нужно широко применить наглядность. В одной школе объяснение было дано так: после того как задача была прочитана, учитель обозначил при помощи стульев в углу класса „колодец", затем взял веревку и сказал: „Вот сейчас мы измерим глубину колодца этой веревкой". Он опустил веревку в „колодец", показал конец веревки, равный глубине колодца, и сказал: „Вот какая глубина; измерим эту часть веревки метром". Ученики измерили и установили глубину колодца. Затем он снова опустил веревку в колодец и показал, какой остался излишек. После этого он указал ученикам, какую длину имела веревка и спросил, как узнать длину излишка (пришлось напомнить о глубине колодца). После такого объяснения снова была прочитана задача, и ученики легко ее решили.

Иногда приходится пользоваться при объяснении картинами, рисунками. Так, к задаче об измерении глубины колодца в задачнике дан рисунок.

Понимание задачи, как указано выше, часто затрудняют незнакомые слова, термины и обороты речи. Они иногда даются в большом количестве. Не все термины, слова и обороты нужны для ученика I класса и не все термины можно объяснять в I классе. Так, встречающийся очень рано в задачнике термин „насекомые" не может быть объяснен в это время. Для математического развития ученика I класса не нужны многие термины, например, он может не знать, что такое куропатки; задача совсем не пострадала бы, если бы в них непонятный термин „растение" был заменен более конкретным и понятным, например „цветок", неуместен в задачнике термин „отрез" сукна. В таких случаях целесообразно незнакомые термины заменять знакомыми и благодаря этому избавлять урок арифметики от ненужных словесных объяснений. Но нельзя впадать и в другую крайность, когда все незнакомые термины устраняются из задач. Ряд терминов и оборотов, которые неизбежны в задачах, постепенно должны быть усвоены. Необходимо сделать отбор таких терминов, выражений и, систематически вводя их в задачи, познакомить с ними учеников. Математический язык должен постепенно расширяться и улучшаться. Объяснение непонятных для учеников терминов и оборотов речи должно даваться, по возможности, до начала решения задачи.

Объяснение терминов, оборотов может иметь характер наглядного показа или самого предмета или его изображения. Пусть учитель хочет объяснить термин „подрубили шесть носовых платков". Ввиду того, что словесное объяснение едва ли помогло бы понять значение данного слова, самое простое и лучшее показать на носовом платке, что значит „подрубить". А когда в задаче дан термин „автобус", то желательно показать его на картинке. Иногда приходится не только показывать предметы и явления, но образовать и уточнить сначала самое понятие, а в связи с этим дать и соответствующий термин. Так в задачах часто встречается термин „расстояние": „Каково расстояние от деревни до города?" Простой показ конкретного расстояния обычно мало даст. Нужно более сложное объяснение. В нескольких школах была дана такая задача: „Крестьянин ехал от деревни до города 3 часа, а в час проезжал по 6 *км*. Каково расстояние от города до деревни? Ученикам нужно было объяснить значение термина „расстояние", показать, что расстояние измеряется, что иногда это измерение делается не прямо, а косвенно, как в данной задаче. Вот как провели это объяснение в одной из сельских школ Московской области. Учитель сказал: „Смотрите, ребята, я пройду расстояние от этой стены до той (проходит). Посмотрите в окно на двор. Расстояние от нас до двора больше или меньше расстояния вон до той березы? А расстояние от местного, знакомого ученикам леса до школы меньше или больше расстояния от нас до деревни Жабкино? Как вы думаете, сколько нужно сделать шагов, чтобы пройти расстояние от школы до реки?

Теперь слушайте такую задачу: От крыльца школы до березы 6 шагов, а от березы до двора 4 шага. Скольким шагам равняется расстояние от крыльца до двора?

Слушайте еще задачу: Мальчик прошел от школы до цветника 10 шагов, да от цветника до огорода еще 10 шагов. Какое расстояние прошел мальчик?"

После этого была дана приведенная выше задача, объяснено ее содержание, и ученики свободно справились с нею. Чтобы закрепить знакомство с термином „расстояние", через некоторое время было решено еще несколько таких задач.

В данной задаче объяснения потребовал только вопрос задачи, так как содержание задачи вполне понятно ученикам.

Иногда бывает наоборот: необходимо объяснить содержание задачи, чтобы стал понятным вопрос задачи. Такова задача, в которой спрашивается, сколько лет тому назад мальчику было 8 лет.

Объясняя содержание задачи, иногда можно ограничиться чисто словесным объяснением, если у детей есть представления, опираясь на которые, они основательно поймут объяснение.

Возьмем, например, задачу: Надя сорвала 3 василька и 4 ромашки. Сколько цветов сорвала она? При объяснении названия цветов можно ограничиться только указанием, что и василек и ромашка — цветы. Можно добавить, где растут обычно васильки, где ромашка, чтобы оживить представление об этих цветах, но совершенно лишним является показ этих цветов на картине: это отвлекает учеников от задачи. Часто приходится словесно объяснять незнакомые детям обороты речи. Например: „В прогулке на лыжах принимали участие 20 человек". Учитель при объяснении указывает, что эту фразу можно заменить таким выражением: „В прогулке на лыжах шли 20 человек или на прогулке было 20 человек".

Объясняя выражения и термины, учитель должен помнить, что те из них, которые намечены к усвоению учениками, нужно повторять, вводя в задачи, в разговор с учениками. Только неоднократное повторение поможет ученикам усвоить эти термины и выражения.

Учителю необходимо учесть своеобразие в понимании учениками некоторых терминов и выражений, изучить речь своих учеников и затем проверять каждый раз, как ученики понимают то или другое выражение, и исправлять неправильное понимание.

Объяснение задачи должно помогать выработке у ученика навыков, умений, необходимых при решении задач.

Вначале, при работе с простыми задачами, мы должны помочь ученикам понять разные непонятные выражения, зависимости между данными, подвести данную задачу под общее понятие, полученное учениками при изучении данного действия.

Пусть дана такая задача: В саду было 4 яблони, посадили еще 5. Сколько теперь яблонь в саду? Чтобы найти, каким действием решается задача, нужно, чтобы выражение „посадили еще" ученики подвели под общее понятие „прибавили", чтобы ученики увидели в задаче сложение. Поэтому объяснение этой задачи может быть сведено к постановке вопросов: „Сколько было яблонь в саду? Сколько посадили еще яблонь? Сколько же прибавилось яблонь? Как же узнать, сколько теперь яблонь в саду?"

Обычно на практике пояснение к задаче дается после сообщения задачи. В таком случае при первоначальном ознакомлении с задачей ученик многого в ней не понимает или понимает превратно. Поэтому целесообразнее возможно большую часть пояснений, например, пояснение непонятных для ученика слов, оборотов речи, давать до сообщения задачи. Тогда ученик при первоначальном чтении воспринимает задачу сознательнее, и дальнейшее объяснение, которое приходится давать после чтения задачи, легче усваивается учеником.

Кроме того, необходимо приучать ученика живо представлять себе содержание задачи.

Возьмем задачу: Девочка нашла 3 больших гриба и 3 маленьких. Сколько грибов нашла девочка? — Если ученики отчетливо представляют девочку, которая нашла и кладет 3 больших гриба в корзинку, а затем находит еще 3 маленьких гриба, которые добавляет к лежащим трем, они легко находят решение и пересказывают задачу.

В одной городской школе при решении задачи: Девочка нашла 3 рыжика и 6 боровиков. Сколько грибов нашла девочка? — многие ученики не могли повторить и решить ее потому, что они не соединяли никаких представлений с незнакомыми для них терминами „рыжики", „боровики". А из-за этого и все содержание задачи представляли смутно. Навык живого и правильного восприятия содержания задачи необходимо развивать.

В опыте работы школ были проверены такие приемы по развитию этого навыка:

После прочтения задачи ученику предлагали воспроизвести то действие, о котором говорится в задаче. Так, после ознакомления с задачей: На полке было 8 книг. Поставили еще 1 книгу. Сколько книг стало на полке? — ученик поставил на стол, заменяющий полку, 8 книг, а затем к ним поставил еще одну. Понятно, что выполняя эту работу, он должен был представить себе конкретное содержание задачи.

В дальнейшем такое предметное иллюстрирование заменялось условным обозначением — кубиками, палочками.

Иногда ученикам предлагали зарисовать содержание задачи. Например, после ознакомления с задачей: Мальчик нарисовал 6 домиков; 3 из них он раскрасил. Сколько домиков не раскрашено? Дети нарисовали 6 домиков, 3 из них раскрасили. В некоторых случаях ученики только рассказывали, что они нарисовали бы в задаче, т. е. „рисовали" словами. В таких случаях даже ученики с неразвитым воображением иногда давали живое „изображение". Например, один ученик, рассказывая решение задачи: На складе было 16 досок. 4 из них мастер употребил на табуретки. Сколько досок осталось? — „рисовал" такие картины: „Лежит 16 досок — вот так (одна рядом с другой). Пришел мастер и берет 4 доски" и т. д. При таком „рисовании" ученик живо представляет себе в своем воображении содержание задачи.

Иногда учителя идут по другому пути. Например, в одной из школ в первой половине года учительница вместо сжатой и неизбежно сухой задачи давала живой рассказ: „Вышла курочка с цыплятами гулять. Кругом нее бегали 8 маленьких цыплят. Вдруг налетел ястреб и 2 цыплят унес. Сколько цыплят у курочки осталось?"

Ученики с интересом слушали задачу и легко ее решили.

Такая образная формулировка задач может иметь место в первые месяцы занятий с детьми.

Решение простых задач

Решение простой задачи складывается из следующих моментов:

а) раскрытие арифметического смысла вопроса;

б) выяснение характера связи и зависимости между данными числами и между данными и искомым;

в) выбор действия, при помощи которого решается задача;

г) вычисление;

д) осознание, что полученный числовой результат и есть ответ задачи.

Возьмем, например, задачу: Ваня нашел 10 грибов; из них 6 грибов зажарили, а остальные высушили. Сколько грибов высушили?

Вопрос задачи „Сколько грибов высушили?" ученик должен понять как требование найти, сколько осталось грибов после того, как израсходовали 6 грибов на еду. Выражение „6 грибов зажарили" ученик должен понять как „отняли 6 грибов".

Таким образом, решая задачу, ученик должен найти то выражение зависимости между величинами, которое характерно для действия вычитания, и установить эту зависимость между числами. Установив характер связи между данными, ученик легко приходит к выводу, что в данной задаче нужно от первого числа отнять второе.

Возьмем еще задачу: Купили 4 *м* материи по 5 руб. за метр. Сколько заплатили за покупку? Ученик должен понять, что 5 руб. повторяется 4 раза (столько раз, сколько куплено метров материи), и то число, которое получится от этого повторения, есть искомое число.

Таким образом, чтобы правильно выбрать действие для решения вопроса задачи, ученик должен правильно установить связь между данными числами: 4 метрами и 5 рублями.

Характер связи между данными иногда можно установить по тем указаниям, которые даются в условии задачи. Так, в первой задаче указывается: „Из них, т. е. из 10, 6 грибов зажарили", значит, 6 отнимается от 10. Во второй задаче указание „По 5 руб. за метр" говорит о том, что число 5 руб. повторяется столько раз, сколько было метров. Но иногда прямые указания на характер связи не даются, и тогда о связи данных можно догадываться по вопросу задачи или по ситуации, рисуемой в задаче.

Возьмем такое условие задачи: На одной полке стояло 8 книг, а на другой 16. Тут никаких указаний на зависимость между данными не имеется. Но вот поставлен вопрос задачи: „Сколько книг стоит на обеих полках?" или „На сколько больше стояло книг на второй полке, чем на первой?" Эти вопросы показывают, в какой связи нужно рассматривать числовые данные в задаче; так второй вопрос показывает, что числа нужно сравнить. Первый вопрос показывает, что количества „8 книг" и „16 книг" — части одной совокупности, которую требуется узнать.

Найдя действие, ученик должен произвести нужное вычисление и понять, что в задаче о покупке материи 20 руб. — стоимость всей покупки; в задаче о грибах 4 гриба — количество высушенных грибов.

Анализ условия и вопроса задачи

Посмотрим, как протекает процесс решения простой задачи, например: На полке лежали 5 книг. Туда положили еще 3 книги. Сколько книг стало на полке?

Воспринимая содержание задачи, ученик представляет себе картину прибавления к 5 книгам 3 книг. Может быть, представит и то, что величина первой кучки книг изменяется, становится больше. Вопрос вначале воспринимается чисто предметно, но в дальнейшем путем сопоставления этого вопроса с тем, который он решал, когда имел дело с примером на сложение, он начинает понимать, что от него требуется найти число, которое получится от сложения данных чисел. После 2—3 таких задач ученик начинает не только представлять себе предметное содержание задачи, но и понимать арифметическое значение вопроса. Представляя рисуемую картину, он с помощью вопроса представляет присоединение, прибавление 3 книг к 5 книгам, а вопрос указывает, что нужно найти количество книг, которое получится после сложения. Таким образом, содержание задачи и вопрос задачи соединяются в одно целое, остается выбрать действие, необходимое для решения вопроса. Восприятие это, богатое подробностями (ученики представляют во всех подробностях стол, книги и т. п.), пока очень несовершенно, громоздко, не имеет определенной целевой установки, но под влиянием упражнений оно делается более четким, дифференцированным, целенаправленным.

При решении примеров на сложение ученик ознакомился с основным смыслом этого действия: сложить — это значит соединить два или несколько чисел в одно. Одновременно он знакомился и с вычислительным приемом нахождения суммы. Теперь, при решении задачи, ученик видит тоже картину прибавления, сложения, а в вопросе требуется найти, сколько будет всего, или сколько всего получится.

Поэтому, решая задачу, он легко догадывается, что для получения ответа нужно данные числа сложить. А сложив числа и получив в сумме 8, он поймет, что 8 книг и есть ответ на вопрос задачи. Таким образом, совпадение смысла данной в задаче ситуации со смыслом действия помогает ученикам найти действие и решить задачу. Здесь ученик идет от понимания содержания к установлению характера связи между данными и к выбору действия, при помощи которого решается задача.

Обращаясь к следующей задаче этого вида, ученик подходит к ней как к совершенно новой и повторяет то, что он делал при решении предыдущей задачи. Главное на этой стадии решения простых задач — научиться подводить конкретное выражение зависимости данных и искомого под общее понятие зависимости, характерное для данного действия.

Решая ряд однотипных задач, ученик начинает замечать сходство между ними; во всех этих задачах дается картина прибавления, требуется найти, сколько получится от соединения нескольких предметов в одну совокупность, и каждый раз искомое число находится путем действия сложения. Образуется общее представление о данном виде задач, о типе зависимости и связи величин, о приеме решения. Поэтому, встречаясь с новой однородной задачей, ученик не только узнает вид, к которому относится задача, но и вспоминает по ассоциации способ ее решения.

Переходя к новому виду задач — задач на вычитание, в которых требуется найти остаток, ученик проходит, примерно, ту же стадию в развитии уменья решать задачи. Правда, этот процесс протекает быстрее: сказывается выработка привычки подмечать сходное, обобщать. А в дальнейшем, когда ученик будет знакомиться с задачами на умножение и деление, выработка уменья решать эти задачи пойдет еще быстрее.

Успех в работе в значительной степени зависит от работы учителя, его умения, от понимания тех целей, которые он должен достичь на этой ступени, а также от качества учебника. Так, если учитель умело подбирает и постепенно дает ученикам задачи данного вида в возможно более разнообразных формулировках, помогает ученикам подметить то общее, что есть в конкретных задачах, общее представление о данном виде задачи образуется скорее и будет более правильным. Если затем он поможет ученикам умело пользоваться этим общим представлением при решении новых задач того же вида, то тем лучше и скорее ученики научатся решать простые задачи.

В нахождении способа решения простой задачи решающую роль играет понимание учеником характера связи и зависимости между данными и искомым. Что значит понять зависимость между данными и искомым? — Это значит понять, как искомая величина (число) получается из данных, как данные связаны между собой. Возьмем задачу: В двух комнатах стоят 8 стульев, из них 3 стула в одной комнате. Сколько стульев в другой комнате? Ученик должен понять, что число 3 входит в состав числа 8, что 8 состоит из двух частей: 3 стула и искомое количество, что, следовательно, если от 8 стульев отнять 3 стула, то останутся стулья, находящиеся в другой комнате. Только поняв это, ученик может сознательно найти решение.

Обычно правильное понимание зависимости между искомым и данными в задаче выражается в том, что ученик правильно называет вопрос задачи (если в условии задачи вопрос опущен, как это бывает в простых задачах, входящих в состав сложной) или правильно понимает вопрос, как это бывает в простой задаче. Зная зависимости между данными и искомым, ученик находит нужное действие. Дело в том, что при знакомстве с соответствующим действием, например вычитанием, ученики знакомились с данным видом зависимости величин и с тем, как при данной зависимости можно найти искомую величину. Вот почему существует такая тесная связь между пониманием характера зависимости величин и нахождением решения, т. е. действия.

Как же ученик находит зависимость между величинами?

В некоторых случаях характер связи и зависимости указан в самой задаче, например: Купили 5 *м* материи по 10 руб. за метр. Сколько денег заплатили за покупку? Здесь прямо указывается, что нужно 10 руб. повторять 5 раз.

По характеру зависимости нетрудно установить и действие; при рассмотрении действия умножения ученик ознакомился с тем, что когда число нужно повторить несколько раз, это число умножается.

В других случаях характер зависимости и связи данных и искомого подсказывает содержание задачи.

Возьмем задачу: На ветке висело 5 яблок, 2 яблока сорвали. Сколько яблок осталось на дереве? Здесь данная в задаче ситуация подсказывает характер зависимости между данными и искомой величинами.

Возьмем далее очень распространенные простые задачи на нахождение суммы, например: В саду посажено 7 кустов красной смородины и 5 кустов черной. Сколько всего кустов смородины посажено в саду? В условии этой задачи нет указаний на характер связи данных, зато в вопросе задачи ясно говорится о том, что нужно найти сумму двух чисел.

Таким образом, характер связи данных подсказывается вопросом задачи.

Особенно трудно ребенку устанавливать зависимость величин в „косвенных" задачах.

Пусть даны задачи:

а) Когда ученик решил 2 задачи, ему еще осталось решить 3 задачи. Сколько задач было задано ученику?

б) В тетради 20 страниц. Осталось неисписанных 8 страниц, остальные страницы ученик исписал. Сколько страниц ученик исписал?

В первой задаче ученик должен понять, что 3 нерешенные и 2 решенные задачи, как части, вместе входят в число заданных задач, что, следовательно, искомое число составляется из этих двух чисел. Теперь становится ясным, какое действие нужно употребить для решения вопроса.

То же и во второй задаче. Ученик должен понять, что в 20 страницах находится 8 неисписанных страниц и те страницы, которые исписаны. Таким образом становится понятной связь чисел 20 и 8 как целого и части, и понятно, как получается искомое число. Понимание связи данных чисел и искомого числа в этих задачах основывается на понимании отношения между компонентами действия.

Решая эти задачи, ученик постигает характер этой зависимости и на основе этого понимания находит решение задачи.

Итак, одна из основных задач учителя — научить учеников понимать характер связи между данными в задаче величинами по тем указаниям, которые иногда имеются в условии задачи, а в других случаях подсказываются вопросом задачи.

Одним из важнейших моментов в решении задачи является понимание ее вопроса. Вопросы задачи могут быть для ученика различной трудности. Так в задаче: На столе лежало 5 тетрадей. Положили еще одну. Сколько теперь всего тетрадей на столе? — все содержание задачи подсказывает ученику, что нужно узнать, сколько получилось от прибавления единицы (одной тетради) к 5. Жизненный опыт ученика тоже помогает понять смысл вопроса: когда происходит прибавление одного количества предметов к другому, то узнают, сколько получилось всего предметов. Ученику в таких задачах легко понять арифметическое значение вопроса. А это дает ему возможность сознательно выбрать действие для решения.

Возьмем далее такую задачу: На 3 руб. купили яблок и на 5 руб. — груш. Сколько израсходовали денег на покупку? Здесь понять вопрос труднее. Даже если ребенок понимает выражение „израсходовали" как „сколько отдали денег", то и в таком случае ему может быть неясно, что вопрос обозначает требование найти, сколько всего вместе составит 3 руб. и 5 руб. Ведь ни о каком сложении в условии задачи не говорится; в жизни тоже в таких случаях не приходится складывать.

Школа должна научить понимать такие вопросы как задание найти сумму данных чисел („сколько всего вместе").

Еще более труден для понимания учеников такой вопрос задачи, который по своей формулировке является неожиданным для ученика, не соответствует содержанию задачи (при полном внутреннем соответствии вопроса и содержания задачи).

Возьмем, например, такую задачу: Крестьянин ехал из деревни до города 3 часа, в час проезжал по 6 *км*. Сколько километров от деревни до города?

Для ученика обычной была бы такая формулировка вопроса: „Сколько километров проехал крестьянин?" Чтобы понять вопрос этой задачи, ученик должен знать, что такое „расстояние" и что расстояние измеряется.

Спорные вопросы в методике решения простых задач

По вопросу о том, чем руководствуется ученик, когда выбирает арифметическое действие для решения простой задачи, существуют различные мнения. Так, известный психолог Н. А. Менчинская в своей статье „Психологический анализ решения арифметических задач различной структуры" (см. в журн. „Советская педагогика", № 7—8 за 1941 г.) говорит, что правильный выбор действия „определяется правильным пониманием тех изменений, которые происходят в ситуации, описанной в задаче": („были", „еще поставили", „сколько стало" и т. п.).

Перед учеником стоит такая психологическая задача: „перевести конкретную ситуацию на язык арифметических операций". Далее автор правильно указывает, что ошибочно устанавливать ассоциации только между отдельными словами и выбором арифметической операции без осознания всей задачи. Для того, чтобы добиться этого осознавания, она рекомендует раньше вводить задачи в так называемой косвенной форме. Это заставит учеников более глубоко вдумываться в содержание всей задачи.

Далее тов. Менчинская утверждает, что на ранних этапах выбор арифметического действия неразрывно связан с числами. Поэтому, когда ученику даются большие числа, с которыми он не умеет оперировать, ученик не может указать, каким действием решается задача, не может ответить на этот вопрос в течение первого полугодия: „Невозможность произвести практические вычисления делали для него неосуществимым выбор операции".

Эти выводы, с нашей точки зрения, являются спорными. Приведенный нами выше анализ процесса решения показывает, что только вначале и в очень ограниченном круге задач ученик руководствуется осознанием „изменения ситуации“. Даже в том небольшом круге задач, в которых ситуация задачи соответствует характеру действия, постепенно, на основе практики решения задач получается обобщение, формируется общее представление о данном виде задач, и этим общим представлением ученик начинает руководствоваться при выборе действия, контролируя этот выбор пониманием связи и зависимости искомого от данных. В большинстве же задач данная в задаче ситуация или нисколько не напоминает действия (второй вид задач, разобранных нами выше), или даже противоречит характеру действия, и ученику приходится руководствоваться при выборе действия вопросом задачи, вопреки данной ситуации (задачи в косвенной форме).

Во многих задачах ученикам приходится руководствоваться установившейся ассоциацией между данным видом задач и соответствующей схемой рассуждения (задачи, связанные с пониманием зависимости между членами действия и т. д.). Н. А. Менчинская, как нам кажется, рисует упрощенную, единую картину процесса решения, рассматривая при этом процесс решения статически, а между тем он меняется, усложняется со временем даже для задач одного и того же вида.

Нельзя согласиться и с предложением автора форсировать введение задач в косвенной форме. Задачи в косвенной форме можно вводить только тогда, когда ученики начинают при решении задач руководствоваться вопросом задачи.

Тов. Менчинская подметила интересное явление (оно ярче проявляется при решении сложных задач): ученики легче решают задачу, когда легко могут произвести нужное для решения действие; в сложных задачах это выражается в том, что ученики легко решают задачи с маленькими числами, над которыми они легко могут произвести нужное действие. Тов. Менчинская объясняет это тем, что на ранних этапах выбор арифметического действия неразрывно связан с числами. Такое объяснение вряд ли правильно. Если бы это было так, то ученики могли бы решать задачи только с определенными числами, а между тем они решают задачи с какими угодно изученными числами. Те числа, которые даны автором в ее задаче („150 книг“, „200 книг“), были совершенно незнакомы ученикам в тот период, когда была предложена задача. Дети не понимали этих чисел, а отсюда —

не поняли и задачу. Значение чисел другое. Если мы возьмем учеников I класса, то они при отыскивании решения, находя зависимость между величинами, чтобы узнать, какое действие употребить, еще не умеют назвать величину; величина поэтому у них обозначается числом. Поэтому ученик оперирует числами; но, оперируя числами, он должен хорошо знать их.

Наконец, учеников мог затруднить и вопрос автора. Ученики понимают вопрос: „Что нужно сделать?", но когда ставится вопрос „какое действие нужно решить?" — такая формулировка пока им незнакома. Назвать действие они еще не умеют. Невозможность произвести действие над данными числами снижает степень уверенности ученика при решении задачи. Ученик бывает уверен, что правильно решил задачу, если удалось произвести вычисления и получить число, которое является ответом. Ведь в практике ученика всегда можно было выполнить соответствующее действие.

В методике Кавуна и Поповой утверждается: „На первых порах при решении задач с небольшими числами выбор действия затрудняет ученика, главным образом потому, что сам он не видит в этом надобности. Дело в том, что, решая задачу, он не вычисляет, а просто пользуется знанием состава числа. Так, отвечая на вопрос: „Сколько стоит тетрадь, если резинка стоит 3 копейки, а за резинку и тетрадь вместе заплатили 8 копеек", ученик говорит „5 копеек", так как 3 да 5 будет 8. И это утверждение вызывает сомнение. Конечно, решив приведенную задачу, ученик понимает, что он получил новое число путем вычитания чисел. Но он еще пока не знает, или еще не привык такую операцию называть вычитанием.

Вторая причина затруднений состоит в том, что первое время ученик, решая такие наглядные задачи, оперирует в уме не с числами, а с предметами: он видит 8 копеечных монет, выделяет из них 3 монеты, а в задаче даются числа, с ними приходится оперировать. Поэтому чрезвычайно важно, чтобы ученики возможно раньше научились называть то действие, какое они применили для решения задачи и к записи решения.

Составные задачи

Процесс решения составной задачи является дальнейшим развитием процесса решения простой задачи.

Основными моментами решения составной задачи являются:

а) Восприятие и усвоение содержания задачи.

б) Разложение составных задач на простые.

в) Установление последовательности их решения.

г) Решение каждой из выделенных простых задач.

д) Осознание, что результат решения последней простой задачи — ответ на главный вопрос задачи.

Эти моменты при решении составной задачи тесно переплетаются между собой. Так, выделяя простую задачу, мы одновременно осознаем, какие величины связаны между собой, какой характер связи, а следовательно, и какое действие нужно употребить для нахождения искомого числа на основании данных и т. д. Но здесь мы эти моменты и процессы рассмотрим отдельно, не забывая о их связи между собой.

Восприятие и усвоение содержания задачи

Сознательно воспринять и усвоить содержание составной задачи — значит живо представить в своем воображении ту картину, которая рисуется в условии задачи, понять отдельные указания в условии, уточняющие эту картину, понять вопрос задачи, запомнить на время решения содержание задачи.

Возьмем, например, задачу: Хлебозавод получил 3150 *кг* муки. При выпечке хлеба получен припек, равный третьей части веса муки. Хлеб доставлен поровну в 2 столовые. Сколько хлеба доставлено в каждую столовую?

В этой задаче ученик должен увидеть 3 момента: а) хлебозавод получает муку, б) из этой муки выпекают хлеб, в) хлеб этот развозят в столовые. Далее он должен принять во внимание следующие условия: хлеб доставлен поровну, раньше доставки хлеб был разделен на две равные части, при выпечке получили припек, равный третьей части веса муки; значит, хлеба по весу было больше, чем муки. При восприятии задачи ученик должен понимать, что такое *хлебозавод*, *припек*. Далее ученик должен понять вопрос как требование указать, сколько досталось хлеба каждой столовой, т. е. чему равна каждая половина от всего количества хлеба. Понятое и воспринятое содержание задачи ученик должен помнить во время решения этой задачи: без этого невозможно сознательно найти ход ее решения.

Чем сложнее содержание задачи, тем сложнее будет и процесс усвоения ее содержания.

Затруднения учеников при восприятии и усвоении содержания составной задачи

При восприятии содержания составной задачи встречается еще больше затруднений, чем при усвоении простой задачи. На усвоение содержания задачи отрицательно влияют: а) недостаточное уменье читать молча, про себя, и вообще слабая техника чтения, б) недостаточное общее умственное развитие ученика, необходимое для понимания более сложного содержания читаемого, в) ограниченный жизненный опыт детей, недостаток знаний. Часто эти затруднения усиливаются из-за неудачного подбора задач, неудачной их формулировки. Так в некоторых задачниках для учеников II класса дается такая задача: от палки длиной 3 *м* падала тень в 8 *м*. Какой высоты было дерево, от которого падала тень длиной 24 *м*? Чтобы решить эту задачу, ученики должны понимать, что тень, падающая от предмета в каждый данный момент, в одинаковое число раз больше или меньше тех предметов, от которых она падает. Такое знание и понимание мы не можем предполагать у значительной части детей II класса.

Иногда плохо учитывается, что опыт деревенских и городских школьников разный. Так при решении задачи: в живой пирамиде 13 учеников образовали три группы. В двух группах по четыре ученика, а в третьей все остальные. Сколько учеников в третьей группе? — в ряде сельских школ ученики, не видевшие таких пирамид, не понимали содержания задачи, плохо представляли, о чем говорится в ней даже после объяснения учителя. Наоборот, в городских школах, где ученики видели живые пирамиды, содержание этой задачи усваивалось легко.

Но большинство затруднений в понимании составной задачи является следствием того, что ученикам дают слишком сложные задачи без достаточной предварительной подготовки их к таким задачам. Нет постепенности в переходе от простых задач к сложным, от менее сложных к более сложным.

В простых задачах обычно дается 1—2 картины (ситуации), одно-два ее изменения. В составной задаче этих картин и изменений значительно больше. Числовых данных в составной задаче тоже больше и притом по меньшей мере одно из чисел в задачах в 2 действия отсутствует, его нужно еще найти. Для понимания же задачи это отсутствующее число часто имеет существенное значение.

Кроме того, в составных задачах чаще, чем в простых задачах, требуется большая логическая работа, нужна еще и сообразительность, чтобы понять задачу. Возьмем, например, задачу: *За лыжный костюм для мальчика и две пары носков заплатили 18 руб. Пара носков стоит 3 руб. Сколько стоит лыжный костюм?* В задачнике она дается чуть ли не в начале перехода к составным задачам.

Наблюдения над учениками I класса показывают, что для многих из них она непонятна: они не понимают, зачем дана цена одной пары носков, когда спрашивается о цене лыжного костюма, не понимают характера зависимости между числами. В дополнение к этому она требует большой логической работы мысли: ученик должен понять, что стоимость костюма он может найти тогда, когда он от общей стоимости покупки отбросит стоимость двух пар носков.

Часто трудности в решении задачи зависят от непонимания отдельных частностей, указанных в условии задачи. Так при проверке решения задачи: Банка наполовину наполнена вареньем и весит 8 *кг*, а пустая весила 1 *кг*. Сколько килограммов еще можно положить такого же варенья в банку? — оказалось, что для учеников было непонятно, зачем тут упоминается о весе пустой банки, и они не обращали внимания на это данное. Охват не всего содержания задачи происходит иногда и от недостаточного внимания учеников к отдельным указаниям. Особенно часты такие недочеты в восприятии задачи, когда некоторые данные опускаются в условии задачи на том основании, что о них и так можно догадаться. Так, в задаче: В колхозной кузнице было 13 подков. Сделали еще 7 подков. Сколько лошадей можно подковать на все ноги этими подковами? пропущено данное — 4 ноги. Конечно, ученики I класса знают, что у лошади 4 ноги. Но этого данного нет в условии, внимание на нем не было остановлено, указание „на все ноги" остается незамеченным.

Часто ученики упускают из вида такие указания, понимание которых требует догадки. Так при проверке в I классе задачи: У хозяйки было 20 *кг* муки; половину муки она израсходовала на хлеб, а 2 *кг* на пироги. Сколько муки осталось у хозяйки? (Из задачника Эменова и Чекмарева для I класса, № 23) после обычного разбора содержания задачи, сводящегося к вопросам учителя: „Сколько у хозяйки было муки? Сколько она израсходовала на хлеб? Сколько израсходовала на пироги?" — у многих учеников получилось такое решение: 1) 20 *кг* : 2 = 10 *кг*, 2) 10 *кг* + 2 *кг* = 12 *кг*, т. е. ученики поняли, что в половину муки входило и 2 *кг*.

Было бы ошибочно требовать от авторов задачников и учителей, чтобы они давали ученикам только такие задачи, которые не вызывали бы у них никаких затруднений. Тогда работа с задачами потеряла бы значительную часть своего образовательного и воспитательного значения. Речь идет о том, чтобы не давать детям непосильных задач.

Нужно учить учеников преодолевать возрастающие трудности, воспитывать у них внимание, настойчивость в достижении цели, развивать волю. В практике опытных учителей с этой целью применяются такие приемы:

а) медленное выразительное чтение задачи учителем, приучение и самих учеников к выразительному чтению задач;

б) подбор таких задач, в которых условия внешне сходны, но отличаются по существу;

в) при объяснении содержания задачи обращают внимание учеников на те условия, которые могут быть упущены из виду учениками или поняты неправильно.

Чтобы активизировать учеников при чтении задачи, некоторые учителя предлагают самим ученикам после прочтения задачи ставить вопросы — что для них непонятно.

Язык задач

Большие затруднения для понимания содержания задачи представляет язык некоторых задач, содержащих в себе незнакомые термины и выражения. Если в простых задачах главное затруднение доставляют незнакомые термины, то при решении сложных задач — обороты речи. Особенно трудны для понимания книжные выражения, редко встречающиеся в речи ученика. Так в задаче: Впереди летело 6 самолетов, а позади 12 самолетов. Совершило посадку 15 самолетов. Сколько самолетов еще в воздухе? некоторые ученики не понимают книжное выражение „совершило посадку". Особенно затрудняет учеников такая формулировка, когда речь употребляется в переносном смысле. Возьмем, например, задачу: За 20 копеек ученик купил карандаш ценою 12 коп. и 2 одинаковых пера. Сколько стоит одно перо? В классе, где эта задача была дана без объяснения, многие ученики не решили второй вопрос и при решении ограничились только первым действием: ученики не поняли, что здесь выражение „два одинаковых пера" означает одновременно и то, что стоимость перьев одинаковая.

В той же школе, в параллельном классе, это выражение предварительно было объяснено, и большинство учеников справилось с задачей. В нескольких школах была дана для проверки задача: На рамку идет 4 бруска. Из 18 брусков сделали несколько рамок, и еще осталось 2 бруска. Сколько сделали рамок? Выражение: „из 18 брусков сделали несколько рамок" многие ученики поняли буквально, а потому решали задачу: 1) 18 брусков : 4 бруска = 4 (рамки), совершенно отбрасывая фразу „осталось 2 бруска", как противоречащую первой фразе. Во многих классах ученики не поняли условие задачи: На самолете помещается экипаж из 5 человек и несколько пассажиров, всего 13 человек. Сколько на самолете пассажиров? Несмотря на объяснения учителя, ученики плохо усваивали содержание задачи, путали „экипаж" с термином „пассажиры" или думали, что это второе название самолета. Большую трудность для учеников представили и задачи, в которых встретились выражения „юннаты", „коллекция".

Какое значение в решении задач имеют непонятные для большинства учеников I класса термины и выражения, показывает следующая, проведенная нами проверка в школе.

Были взяты описанные выше задачи: задача о самолетах, о приготовлении рамок, об одинаковых перьях. Проверка первой задачи была поставлена так. Выбрано было 3 класса с приблизительно одинаковой успеваемостью по решению задач. В одном классе задача была дана в редакции задачника, без всяких объяснений, в другом классе учитель объяснил выражение „совершило посадку 15 самолетов" как равнозначащее выражение „село, спустилось на землю", наконец, в третьем классе задача была дана в редакции, где этих выражений не было: „Летели 6 самолетов, а за ними летели еще 12 самолетов. Опустилось на землю 15 самолетов. Сколько самолетов еще летает в воздухе?" Так же была поставлена и проверка задачи о приготовлении рамок и покупке одинаковых перьев. Результат проверки даем в следующей табличке.

Задачи	Решаемость в проц.		
	Условие дано без объяснительных выражений	С предварительным объяснением	С заменой формулировки
1. О самолетах	21	52	84
2. О покупке перьев	18	62	90
3. О приготовлении рамок .	14	49	81

Эти результаты показывают не только большое значение для результатов решаемости знакомства с трудными терминами и выражениями, но по ним видно, что объяснение не может дать такого результата, как полное устранение незнакомых терминов.

Обилие непонятных для учеников терминов и выражений составляет одну из главных трудностей при решении задач. Учитель тратит много времени на объяснение их. Во время этих объяснений внимание учеников часто отвлекается от самой задачи. А приведенные выше наблюдения над объяснением выражений, употребляемых в переносном смысле, показывают, что эти объяснения мало эффективны.

В своей работе мы провели и проверили такие приемы ознакомления учеников с терминами и выражениями.

С группой учителей мы отобрали из задачников только те термины и выражения, с которыми считали необходимым обязательно ознакомить учеников I класса. Отобранные для ознакомления термины и выражения мы проанализировали со стороны их трудности для учеников, последовательности их усвоения и придумали как целесообразнее достичь их усвоения учениками. Пока мы стремились только к тому, чтобы ученики понимали эти выражения и термины, когда будут встречать их в задаче. Мы не только объясняли их, когда они встречались в задачах, но составляли несколько задач с той же формулировкой, и в продолжение некоторого времени давали их ученикам, пока они не усваивали незнакомые термины. Кроме того, в тех случаях, когда это было возможно, мы старались эти термины и выражения употреблять и на других уроках, чтобы постепенно приучить к ним учеников. Наконец, некоторые задачи, с отобранными для усвоения терминами и выражениями, мы давали ученикам иллюстрированными при помощи рисунков.

Все это помогало ученикам усвоить необходимые термины и выражения.

Усвоение условия задачи. Запись условия

Усвоить содержание составной задачи для ученика I класса — это значит ярко представить ее содержание, охватить содержание задачи целиком. Для достижения этой цели в школах, с которыми мы вели работу, были применены, в основном, те же приемы, что и при решении простых задач, т. е.:

а) Ученик, прочитав задачу, рассказывал ее целиком и благодаря этому приучался обращать внимание и запоминать содержание задачи в целом.

б) Учитель схематически рисовал на классной доске то, что ученику трудно представить без применения наглядности.

в) Ученики сами изображали содержание задачи на рисунке или словесно, т. е. рассказывали, что бы они нарисовали в первой картинке, что нарисовали бы во второй картинке и т. д.

Все эти приемы приучают учеников отчетливо представлять содержание задачи. А поэтому в дальнейшем, когда учитель и не будет применять эти вспомогательные приемы, ученик будет подходить к содержанию каждой задачи, мысленно представляя его.

Форма записи условия задачи не может быть единой для всех видов задач. Она зависит от назначения записи, характера задачи, уровня развития учащихся. Запись условия задачи имеет следующие цели:

а) освободить ребенка от необходимости держать в памяти числовые данные;

б) помочь детям ярче и отчетливее представить содержание задачи;

в) облегчить анализ задачи: сопоставление однородных величин, определение связей и зависимости между ними.

Когда задача не сложна по содержанию, зависимость и связь величин проста и очевидна, запись нужна только для того, чтобы не забыть числовые данные. Возьмем, например, задачу: Купили 7 *м* материи по 10 руб. за метр и 2 *кг* ваты по 4 руб. за килограмм. Сколько заплатили за покупку? Запись условия этой задачи можно сделать так:

7 *м* по 10 руб., 2 *кг* по 4 руб.

Такая запись вполне достаточна, чтобы на время решения пользоваться числовыми данными, не запоминая их. Чаще же всего рекомендуют запись условия „столбиком“:

7 *м* — по 10 руб.
2 *кг* — по 4 руб. Сколько заплатили за покупку?

Такую запись делает или учитель, или ученик на классной доске. Н. Н. Никитин рекомендует в I и II классе делать запись на доске самому учителю, а в III и в IV классах — поручать выполнение записи учащимся.

Такая запись не только содержит в себе одни числовые данные: она неизбежно выявляет основное арифметическое содержание задачи, показывает связь данных величин, расчленяет задачу на части, на простые задачи. Такая запись подсказывает ученикам ход решения задачи. И если такую запись делает учитель, то решение задачи учениками в значительной степени обесценивается, они не учатся самостоятельно разбираться в условии задачи, находить ход решения. Ученики не готовятся к самостоятельному решению задач. Но когда такая запись является результатом разбора содержания задачи и попыток найти решение задачи, она очень полезна: она способствует более отчетливому пониманию задачи.

Иногда запись условия задачи методисты чрезмерно усложняют, дополняя запись числовых данных знаками, показывающими отношение между данными и даже ход решения. Так Д. Н. Воронов в статье о записи условия задачи дает такие правила для этой записи:

1. Каждому предмету, о котором говорится в задаче, отводить в записи особую строчку или столбик с заголовком в виде римской цифры или начальных букв.

2. Характеризующие эти предметы величины (цена, количество, размер и пр.) располагать по принципу однородности по одной горизонтали или вертикали.

3. Данные, обнимающие все предметы, помещаются особо внизу или сбоку столбиком за скобкой.

4. Вопрос задачи обозначается знаком „?" (Сколько?) с постановкой в соответствующем месте столбиков.

5. В целях сокращения текста, вместо слов „$\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$ на ... единиц или в .... раз" ставить знаки $\pm$ или $\times$.

6. Избегать повторения наименований, обозначая их начальными буквами в виде заголовка.

Вот образец записи условия задачи для I класса: Во время учебной стрельбы один стрелок выбил 38 очков, другой на 11 очков больше первого, а третий на 15 очков меньше второго. Сколько очков выбил третий?

I	II	III
Очк 38	I + 11	II — 15

А вот какая запись дается для более сложной задачи: Колхоз продал кооперации 666 *ц* ржи. На вырученные деньги он приобрел автомашину за 2 145 руб., выстроил зернохранилище, которое обошлось вдвое дороже автомашины, сделал конюшню, которая стоила на 1 635 руб. дешевле зернохранилища. После этих расходов у колхоза осталось 2 340 руб. По какой цене был продан центнер ржи?

$$\left.\begin{array}{lr} & \text{руб.} \\ \text{Автом.} \ldots\ldots & \overline{2\,145} \\ \text{Зернохр.} \ldots \text{автом.} \times 2 & \\ \text{Кон.} \ldots \text{зернохр.} - 1\,635 & \\ \text{Ост.} \ldots\ldots\ldots & 2\,340 \end{array}\right\} ? \times 666$$

Как отнестись к таким записям?

Прежде всего, такие записи являются не просто записью условия задачи, над которой нужно произвести работу для нахождения решения, а результатом разбора задачи, нахождения хода решения (особенно второй образец записи, который является своеобразным изображением формулы решения). Но ведь для того, чтобы проделать ту работу над задачей, которую отражает эта запись, нужно ею овладеть, запомнить условие задачи. Значит, нужна какая-то предварительная, более доступная для учеников запись, над которой эту работу и можно произвести.

Далее, совершенно очевидно, что такая запись непосильна для самостоятельного выполнения учениками.

Если же ее делает учитель, то это не что иное, как подсказ ученикам, как решать задачу, это устранение из задачи тех трудностей, которые ученики должны научиться преодолевать, без чего они никогда не научатся самостоятельно решать задачи. В самом деле, запись столбиком, хотя бы в первом примере, разве не показывает, на какие простые задачи распадается сложная задача? Значит, момент разложения сложной задачи на простые, т. е. нахождение хода решения задачи сделан учителем, а не учениками. А в записи второй задачи указаны даже действия.

Возникает вопрос, нужна ли запись условия задачи по определенной схеме? Некоторые виды задач полезно записывать по определенной форме: таковы задачи на простое и сложное тройное правило, задачи на исключение неизвестного и др. Но ряд задач совсем не поддаются такой записи. Во многих случаях могут быть задачи столь простого содержания, что в них достаточно записать только числовые данные. Приведенная выше первая задача именно такая.

В задачах же, где дается много разных сравнений числовых данных (как последняя из задач т. Воронова), столбчатая запись не выявляет отчетливо соотношение данных. Здесь несомненно лучше использовать графическое изображение этих соотношений. Конечно, графическая запись условия выражает результат работы над восприятием задачи, следовательно, есть уже подготовка самого решения. Поэтому она может быть дана в дополнение к обычной записи в строчку или к тексту задачника.

Разложение составной задачи на простые

Начнем разложение составной задачи на простые с того вида задач, с которого у нас обычно начинают работу с составными задачами, т. е. задач, в которых сначала нужно найти сумму, а потом из найденной суммы вычесть данное число. Возьмем задачу: С одной гряды сняли 6 огурцов, а с другой — 14 огурцов. Из них 8 огурцов съели за обедом. Сколько огурцов осталось?

При ознакомлении с содержанием этой задачи ученики улавливают в ней два момента: а) огурцы собирают с двух гряд; б) 8 огурцов съедают. Первая часть задачи напоминает однородные простые задачи, которые ученик уже решал, поэтому эту часть ученик легко обособляет и выделяет в простую задачу: С одной гряды сняли 6 огурцов, а с другой 14 огурцов. Сколько всего собрали огурцов?

Что помогло ученику правильно поставить вопрос: „Сколько всего собрали огурцов?"

При рассмотрении простых задач мы показали, что у ученика постепенно, практическим путем образуется общее представление о каждом виде задач и что образовавшееся общее представление дает возможность ученику в конкретной задаче или даже части ее, „узнавать" знакомую задачу и тем выделять ее. При решении простых задач у учащихся образуется понятие о типе связи между данными величинами и искомой величиной. Требование найти эту зависимую величину и выражается в вопросе. Вот почему ученики, восприняв данную зависимость величин в задаче или части ее, сейчас же припоминают и вопрос задачи. Если же для ученика не ясна связь величин, ученик должен предварительно установить характер связи и только после этого он может найти и вопрос. В некоторых простых задачах указаний на характер связи не дается, тогда он выводится или из вопроса (если он дан) или из общего хода решения составной задачи. В данной задаче нет указания на характер связи чисел 6 огурцов и 14 огурцов; нет и вопроса к ней, по которому можно было бы судить о характере связи этих величин. Но во второй части задачи есть слово „из них“, которое говорит, что из общей совокупности обоих количеств было взято 8 огурцов. Значит, *числа нужно сложить, найти общее количество*. Это и показывает, какой вопрос следует поставить. Итак, для уменья выделять простую задачу (первую для решения) нужно, чтобы ученик хорошо ознакомился с этим видом простых задач, чтобы у него образовалось общее представление о данном виде задач, позволяющее ему отличать данный вид задач от других видов простых задач. Этого мы достигаем частью при решении простых задач, а частью и составных, из которых будем выделять данный вид простых.

В процессе решения задачи эти моменты тесно переплетаются между собой. Так, выделив простую задачу, ученик обычно догадывается, как ее нужно решить, а иногда и решает ее. Выделяя первую простую задачу, ученик чаще всего тут же осознает, что решение этой задачи нужно, чтобы решить следующую, т. е. начинает осознавать решение как необходимое звено в цепи простых задач, решение которых приводит к нахождению ответа на главный вопрос задачи. Это помогает ему в конце решения легче и отчетливее понять логическую связь и последовательность всей цепи решенных задач. Иногда же выделенная простая задача еще не осознается, как необходимое звено в решении сложной, это осознание является только в конце, когда решена вся сложная задача, когда ученик уже получил ответ или близок к получению ответа. Таким образом, решение задачи представляет сложный процесс.

Он осложняется еще тем, что иногда из составной задачи можно выделить несколько простых. Ученику приходится делать выбор из числа тех задач, которые можно выделить или составить, брать для решения только те, которые необходимы для решения составной задачи. Решив последнюю из выделенных задач, ученик должен осознать, что ответ на эту простую задачу является ответом на составную задачу, т. е. что она решена. Далее, он должен осознать логическую связь между решенными задачами, т. е. осознать, что первая задача нужна была, чтобы решить вторую, а решение обеих первых задач было необходимо для решения третьей задачи. Правда, иногда понимание задачи является только после решения ее. Такое уменье развивается у ученика постепенно, в результате продуманного обучения в школе.

Возьмем задачу: Чтобы сделать рамы для окон в новом доме, взяли двух столяров; один из них в неделю изготовлял 3 рамы, другой на одну раму меньше. Вся работа была окончена в 2 недели. Сколько окон в доме? (Ф. И. Егоров. Собрание арифметических задач. Изд. 13-е, 1912, № 300).

При решении этой задачи ученик должен постепенно выделить те простые задачи, из которых составлена данная составная задача. Это выделение представляет сложный процесс. Если первую простую задачу он легко выделяет, так как части ее (кроме вопроса) даны в самой задаче и притом вместе, то выделение следующих простых задач идет путем составления простой задачи из той части, которая получается от решения первой выделенной задачи и той части, которую можно найти в составной задаче.

Какие упражнения помогают ученику овладеть необходимыми для этого уменьями? Прежде всего — решение двух отдельных простых задач, связанных между собой. Например, учитель дает задачу: Мальчик нашел 7 белых и 5 черных грибов... („Поставьте вопрос и решите задачу", — говорит учитель.) 3 гриба оказались плохими и он выбросил их. Сколько хороших грибов нашел мальчик?

Далее полезно упражнять учеников в отыскании недостающих чисел в табличках или на картинках. Например, учитель дает задачу: Мальчик купил ручку и перо. Сколько он уплатил за эту покупку? Недостающие данные ученик берет с плаката, где изображены разные предметы с указанием цен.

Далее, можно практиковать и такое упражнение. Дается составная задача: На одном участке собрали 7 мешков картофеля, на другом 3 мешка. Из этого картофеля 4 мешка отложили на семена, а остальные — на еду. Сколько мешков картофеля отложили на еду? Учитель спрашивает: „Можно ли узнать, сколько мешков картофеля собрали с двух участков? К каким числам можно подставить этот вопрос? Как вы узнаете, сколько собрали?" После решения первой задачи ставятся вопросы: „А теперь можно ли узнать, сколько мешков картофеля пошло на еду? Как узнаете?"

Это упражнение, подготовляя учащихся к решению второй части задачи в два действия, поможет им овладеть уменьем руководствоваться при решении задачи со вопросом, поможет им осознать связь между первой и второй частью.

На этот последний момент нужно обратить особое внимание. Первое время для этой цели можно практиковать простое повторение решения: „Какую же мы решили сначала задачу? Какая после этого получилась задача?“ Отвечая на этот вопрос, ученик начинает осознавать, что решение первой простой задачи нужно было, чтобы составить вторую задачу. В дальнейшем эта логическая связь между первой и второй задачей будет осознаваться и другими путями.

Очень облегчают работу предварительные упражнения в составлении задач по картинке, упражнение в подборе вопроса к простой задаче.

Но процесс выделения первой простой задачи может происходить и иначе. Возьмем задачу: У почтальона 6 простых писем и 3 заказных. Он раздал уже 7 писем. Сколько писем осталось у почтальона?

Первая часть напоминает ученику простые задачи на сложение, которые ученик уже решал. В этой части он узнает простую задачу и благодаря этому выделяет ее из составной. Аналогия со знакомыми простыми задачами подскажет и вопрос, которым нужно дополнить выделенную часть.

Поэтому нужно организовать специальные упражнения, чтобы ученик овладел приемом вычленения простой задачи на основе узнавания ее. Кроме обычно практикуемого приема — давать перед решением составной задачи простую, нужно проводить упражнения в отыскивании простых задач в составных. Например, учитель дает простые задачи: а) На стол поставили сначала 5 тарелок, а потом еще 2. Сколько тарелок на столе? б) Куплен карандаш с наконечником за 18 коп. Наконечник стоит 8 коп. Сколько стоит карандаш? и т. д.

После решения простых задач учитель дает составную задачу: Посадили 5 кустов черной смородины и 10 кустов красной, 2 куста не принялись. Сколько кустов принялось? — и предлагает ученикам найти в ней часть, похожую на первую, на вторую простую задачу (нет такой части). Желательно на этой стадии работы требовать от учеников, чтобы они указывали после решения первой задачи, что они узнали: как увидим дальше, это будет помогать ученикам находить вторую простую задачу.

Теперь перейдем к выделению второй простой задачи из взятой нами составной задачи. Она дана в задаче в таком виде: „Из них 8 огурцов съели. Сколько огурцов осталось?“ В такой формулировке ученикам не так легко, как в первой части, узнать задачу. Только вопросы учителя: „Сколько огурцов собрали? Что сделали с этими огурцами?“ напоминают ученику недостающую часть второй простой задачи. После этого ученик выделяет вторую простую задачу. Значит, для успеха в этом деле ученику нужно помнить ответ первой задачи.

В задачах в два действия желательно применять такое упражнение: когда решена первая простая задача (например: 7 мешков + 3 мешка = 10 мешков), учитель спрашивает учеников, показывая на ответ, что узнали. Ученики дают полный ответ: „Собрали 10 мешков картофеля“. Такой полный ответ является частью второй простой задачи. Теперь учитель добивается, чтобы ученики сказали, какая теперь получается задача с новой частью и тем самым заставляет учеников искать, с какой еще частью можно соединить полученную часть, т. е. найти вторую простую задачу. В первое время на такое соединение можно навести так: — Что узнали? — Собрали 10 мешков картофеля. — Что еще сказано про этот картофель? — Из собранного картофеля отложили 4 мешка на семена. — А что спрашивается? Какая же получается задача? На таких упражнениях ученики учатся соединять полученную часть с той, с которой она составляет вторую простую задачу. Здесь же им становится ясным связь между первой и второй задачей.

Беллюстин в своей методике (Методика арифметики, ч. III, изд. 5-е, 1910, 60—61 стр.) рекомендует этот прием применять к более сложным задачам. Так, он берет задачу: „Рельс длиной в 2 сажени весит 8 пудов. Пуд рельсового железа стоит 90 коп. Что стоят рельсы, уложенные на версту (в 2 ряда)?“ После решения первого вопроса задачи: Сколько пудов весит рельс длиной в 1 саж.? ученикам предлагается сказать: Какая же теперь задача получилась? Желательно, чтобы дети могли представить себе и выразить эту оставшуюся составную задачу: Рельс в 1 саж. весит 4 пуда, пуд стоит 90 коп., сколько стоит верста рельсов, уложенных в 2 ряда?

Сам Беллюстин указывает, что „детям не всегда удается сформулировать оставшуюся сложную задачу, так как не сразу они к подобному делу привыкают“. Практика в школе показывает, что ученики научаются так упрощать только не очень сложные задачи. Если же после решения первого вопроса произвести запись условия новой, полученной задачи, то ученики, пользуясь такой записью, легко формулируют новую задачу. Но в таком случае вся работа приобретает очень громоздкий характер. Да и нужда в этом приеме отпадает, когда ученики перейдут к решению задач во много действий.

Продолжая работу с задачами определенного вида, ученики все легче и быстрее в первой части будут узнавать задачу, несмотря на то, что эта часть и не имеет вопроса: общее представление о таких простых задачах, какие содержатся в первой части условия, уже образовались, характер связи между данными и искомыми тоже становится привычным, а поэтому и вопрос и решение этой части легко находится. Так же легко (по содержанию и формулировке) ученик узнает задачу и во второй части условия. Характер формулировки этой части условия и вопроса подсказывает, чего в этой части нехватает для полной задачи. Сейчас же припоминается недостающее данное — ответ от первой задачи — и вся вторая задача готова. Если же ученик не помнит ответа первой задачи, не связывает его со второй задачей, то, поняв, какого данного нехватает, он отыскивает такую часть, которая может дать нужное данное. Так происходит при решении задачи взаимодействие синтетического и аналитического моментов.

Дальнейшее развитие уменья решать этот вид задач пойдет уже по пути образования представления о данном виде составных задач. Ученик все легче и скорее начинает разбираться в содержании задачи, начинает воспринимать задачу в целом, отличать ее от других видов составных задач, усваивает определенную схему рассуждения при нахождении решения. При таком восприятии ученик начинает выделять математическую сущность задачи, исходя из вопроса задачи. Он видит, что во всех этих задачах ищется остаток от числа, которое в свою очередь является суммой от решения первой задачи.

Переходя к задачам близкой структуры (например: Купили 4 кружки молока по 8 руб за кружку. В уплату дали 20 руб. Сколько получили сдачи?), ученик будет уже опираться на приобретенные навыки и уменье при решении предыдущего вида задач: скорее перейдет к выделению первой простой задачи путем „узнавания", всю задачу будет воспринимать в целом. Поэтому весь процесс овладения задачами этих видов пойдет быстрее.

Прежде чем переходить к решению так называемых неприведенных задач, нужно показать ученикам, как решаются задачи, в которых содержатся „скрытые“ вопросы.

Когда ученики ознакомятся с умножением, следует перейти к задачам в 3 действия, в которых первые две простые задачи на умножение легко выделяются, например: Мальчик связал 8 пучков моркови по 5 штук в каждом пучке и 4 пучка по 10 морковок. Сколько всего морковок связал в пучки мальчик?

Что нового в процессе разложения таких задач по сравнению с предыдущими задачами в два действия? Только — выделение третьей простой задачи: от нее в сложной задаче остался только вопрос. Чтобы, имея только вопрос, составить третью задачу, нужно: а) чтобы между вопросом и числами, относящимися к этому вопросу, образовалась тесная связь, б) чтобы ученик не забывал те части третьей задачи, которые он получил, решая первые две простые задачи. Уже решение задач в два действия служит подготовкой к этой работе. Но целесообразно воспользоваться и подготовительными упражнениями: а) составление задачи по картинке на данный учителем вопрос, б) после воспроизведения обоих полученных частей от решения первых простых задач составление из них задачи. („Какую задачу можно составить и решить? А нужно ли ее решать? Зачем?“ Или поставить вопрос „А какой вопрос теперь можно решить?“)

Возьмем такую задачу: В школьную столовую пришли 18 мальчиков, а девочек на 4 меньше. Они сели за столики по 4 ученика за каждым. Сколько столиков заняли ученики? Особенностью этой задачи является то, что от второй простой задачи, входящей в сложную задачу, явно ничего не осталось. Ученики легко выделят и решат первую задачу; выделят и третью: „Сели по четыре за столик. Сколько столиков заняли дети?“ Постановка вопроса „Сколько же всего детей село за столик?“ заставит решающего догадаться, какого данного нехватает, и выделить второй вопрос задачи: „Сколько всего детей село за столики?“, подыскать данные для решения этого вопроса и решить его. Далее уже нетрудно будет решить и последний вопрос.

Теперь возьмем задачу более сложную, но того же вида и структуры: Купили 4 *м* материи по 8 руб. и 3 *м* подкладки по 4 руб. В уплату дали 50 руб. Сколько получили сдачи? В этой сложной задаче, как и в предыдущей, легко выделяются первые две задачи и находится их решение. От третьей простой задачи в составной ничего не осталось. Об ней можно догадаться только после обращения к главному вопросу задачи. После выделения и решения первых двух простых задач, ученик выделит сначала четвертую задачу: „Сколько получили сдачи?“ Под влиянием этого вопроса он может догадаться, что фраза: „В уплату дали 50 руб.“ относится к этому вопросу. Теперь уже вопрос и данное „В уплату дали 50 руб.“ говорит о том, что нужно еще данное: „Сколько нужно заплатить за всю покупку?“. По вопросу ученик должен составить задачу.

Нужно иметь в виду, что определение, какого данного нехватает для решения вопроса, во многих случаях только тогда возможно, когда ученик выделяет всю неполную задачу с этим вопросом, а не один вопрос, как это обычно предлагается в методических руководствах. В самом деле, возьмем задачу: Колхозник собрал с одной грядки 156 кочанов капусты, а с другой на 44 кочана больше. Четвертую часть собранной капусты колхозник оставил себе, а остальную продал. Сколько кочанов капусты колхозник продал? Как и в предыдущей задаче, ученик легко выделяет и решает первый вопрос: Сколько кочанов собрал колхозник с другой грядки? Далее естественно выделяется третья задача: Четвертую часть собранной капусты колхозник оставил себе. Сколько кочанов колхозник оставил себе? Большая практика в решении таких задач создала тесную ассоциацию — когда дается одна доля, то нужно найти, сколько на эту долю приходится. Таким образом данное ведет к вопросу: Сколько всего собрали кочанов? Ученик начинает искать это данное в задаче, но его нет в условии. Тогда начинаются поиски, как добыть это данное; ученик начинает обдумывать, к каким данным подойдет этот вопрос; ищет данные для решения этого вопроса. Такими данными оказываются: 156 кочанов первой грядки и 200 кочанов второй грядки. По опыту решения таких задач ученик понимает: а) что по этим данным можно решить, б) какой вопрос можно поставить к этим данным. Отсюда большая уверенность, что задача составлена и что ее нужно решать. Тут уже полное проникновение аналитического момента (поиски данных для решения вопроса) в синтетический и обратно (осознание, что по этим данным можно решить вопрос, к этим данным подходит этот вопрос). После выделения и решения второй задачи, ученик снова возвращается к выделенной третьей, легко ее формулирует и решает. Далее предстоит выделить и решить последнюю задачу. Ученики, конечно, выделят только вопрос: Сколько кочанов колхозник продал? Сам по себе этот вопрос ни о каких данных не напоминает. Но так как ученики уже знают число всех кочанов капусты, знают, сколько их оставил колхозник для себя, то они поймут, что к этим данным „подходит" этот вопрос.

Опираясь на приобретенные навыки в решении задач со „скрытыми" простыми задачами, ученики могут быть переведены на решение наиболее легких „неприведенных" задач. Возьмем, например, задачу: У меня было 20 руб. Я купил 3 стакана земляники по 2 руб. за стакан. Сколько у меня осталось денег после покупки? Особенность этой задачи по сравнению с предыдущими та, что числа, необходимые для решения первого вопроса, находятся не в начале, а в середине задачи; впереди находится число, относящееся ко второму вопросу задачи. Воспринимая эту задачу, ученик так же, как и в предыдущих задачах, по ассоциации с простыми задачами выделит первую задачу: Я купил 3 стакана земляники по 2 руб. за стакан... и решит ее. А затем обратится к вопросу задачи. Руководствуясь вопросом, он вспоминает, сколько израсходовали и сколько было денег. Таким образом, он уже начинает оперировать не с числами задачи, а с величинами.

Примерно так же будет протекать процесс решения и более сложных задач того же вида, например: От куска материи в 40 *м* отрезали на 3 платья по 4 *м* на каждое и на 5 рубашек по 3 *м* на каждую. Сколько метров осталось в куске? Так как при решении задач этих видов наибольшую трудность представляет выделение „скрытой" простой задачи и выделение последней задачи, то наряду с решением таких задач нужно практиковать добавочные специальные упражнения, помогающие ученику овладеть необходимыми уменьями: а) подбор данного, если оно опущено в простой задаче, б) составление задач на данный вопрос, в) подбор вопроса к числовым данным.

Таким образом, уменье решать задачи будет заключаться в развитии: а) уменья по данным составлять простую задачу, выделять ее из составной на основе знакомства с соответствующим видом простых, б) уменья по данному вопросу отыскивать в задаче те элементы, которые составляют с этим вопросом простую задачу и решение которой дает искомое данное, в) уменья по одному только вопросу находить, какие числовые данные нужны для решения вопроса, г) уменья оперировать с величинами.

Возьмем задачу: Перо стоит 3 коп. Сколько можно купить таких перьев, имея гривенник и пятачок? Здесь на первом месте стоит данное, относящееся ко второй простой задаче. Ученику нужно прежде всего выделить вопрос. Так как ни первая фраза в составной задаче, ни вторая (без вопроса) не составляют задачи, то и вычленение вопроса и выделение первой простой задачи трудно для ученика. Только образовавшаяся уже при решении соответствующих простых задач ассоциация помогает ученикам выделить сначала числа гривенников и пятачков, и на основе их решить первую простую задачу. При решении задачи ученик рассуждает примерно так: В задаче сказано, что перо стоит 3 коп. Значит, покупали перья. В задаче спрашивается, сколько можно купить таких перьев. Выделилась вторая задача: Перо стоит 3 коп. Сколько можно купить таких перьев? Для решения ее нехватает данного, начинаются поиски данного: Сколько затрачено на покупку? Имея вопрос и одно из данных, ученик уже в силу создавшейся у него привычки вспоминает о втором данном. Дана цена; спрашивается, сколько купили, значит, должно быть еще одно числовое данное. Таким образом процесс решения шел так: вопрос задачи дает вторую простую задачу, но только с одним данным. Получается ощущение неполноты задачи.

Происходит осознание, какого данного нехватает, выделяется первая задача. Это не только логический процесс, но и работа памяти. При выделении простых задач ученик должен видеть, что выделенную задачу можно решить, можно произвести с данными числами соответствующее действие.

Разбор процесса решения задачи показывает, что он не представляет того стройного логического процесса, каким его рисуют методисты, говоря об аналитическом и синтетическом методах решения задач. Этот разбор показывает, какое большое значение имеет память, знание простых задач, точнее — знакомство с данным видом зависимости величин. Он показывает, что о недостающем данном напоминают как вопрос, так и другие данные задачи.

Необходимо выделить группу задач, в которых решение задачи опирается на применение определенной схемы рассуждения. Среди этих задач, в первую очередь, нужно отметить задачи, в которых требуется по данной сумме трех слагаемых и двум из них найти третье слагаемое. Эти задачи встречаются уже в I классе.

Возьмем задачу: В саду 3 березы, 11 лип и несколько кленов, всего 18 деревьев. Сколько в саду кленов? Чтобы решить эту задачу, ученик должен прежде всего отчетливо понять, что все число деревьев в саду (18) состоит из трех частей (слагаемых): 3 берез, 11 лип и скольких-то кленов. Далее он должен знать, как найти третье слагаемое, когда даны два слагаемых и сумма всех трех. Тогда ему легко найти ход решения задачи, выделить первую задачу, решить ее и найти вторую задачу. Рассуждать он будет примерно так: „Всего 18 деревьев. Тут 3 березы, 11 лип и сколько-то кленов. Если отбросим березы и липы, то и останутся клены. Значит, от 18 нужно отнять 3, затем 11 и получится 4 — это клены". (Конечно, ученик может первой выделить и задачу с вопросом: „Сколько берез и лип?") Таким образом, здесь ученик делает как бы обратное тому, что делалось до сих пор: не расчленяет задачу на простые, чтобы найти ход решения, а наоборот, знание хода решения указывает, помогает выделить простые задачи. Это сказывается, между прочим, и в том, что ученики легко решают эту задачу, но с трудом формулируют те простые задачи, которые они решили.

Поэтому ознакомление с этими задачами распадается на следующие этапы: а) знакомство с нахождением третьего слагаемого на пособиях, на решении примеров, б) первоначальное ознакомление с задачами и их решением на нахождение третьего слагаемого, в) усвоение схемы рассуждения при нахождении хода решения задачи, г) самостоятельное решение задач данного вида.

Особую трудность для учеников представляют так называемые неприведенные задачи. Возьмем задачу: За лыжный костюм для мальчика и две пары носков заплатили 18 руб. Пара носков стоит 3 руб. Сколько стоит лыжный костюм? Трудность решения этой задачи состоит в том, что числовые данные, которые нужны для решения простых задач, разъединены и наоборот, поставлены рядом такие данные, которые между собой не связаны. При нахождении решения ученику нужно разрушить те внешние связи, которые имеются в задаче, объединить те числа, которые разъединены. На первый взгляд кажется, что для решения этой задачи наиболее пригоден аналитический разбор. В самом деле: „Сколько стоит лыжный костюм? Для этого нужно знать, сколько стоят 2 пары носков и костюм вместе и сколько стоят 2 пары носков. Сколько стоит вся покупка, известно — 18 руб. А сколько стоят 2 пары носков, неизвестно. Чтобы узнать, сколько стоят 2 пары носков, нужно знать, сколько стоит одна пара" и т. д. Все идет очень просто и гладко. Но так пойдет гладко только у человека, который уже знает, как нужно решить задачу, а не у того, кто ищет решения этой задачи. Поставив вопрос, сколько стоит лыжный костюм, ученик прежде всего наталкивается на первое затруднение — какие же данные нужны? Вопрос совершенно не намекает на эти данные. Нужно уже знать, что в 18 руб. заключены и стоимость костюма и стоимость пары носков и что, отняв от 18 руб. стоимость носков, найдем стоимость костюма, т. е. знать уже решение задачи. Конечно, поиски решения пойдут иначе. Ученик начинает искать простую задачу, которая дана хотя бы и частями, но которую можно решить. Перебирая части задачи, он наталкивается на фразу „пара носков стоит 3 руб.". Но если пара стоит 3 руб., то по аналогии с простыми задачами и по жизненному опыту ученик знает, что рядом должно стоять количество — сколько куплено. В жизни, да и в задачах всегда так бывает, что о цене говорят, когда указывают, сколько куплено. Ищется число, которое показывает, сколько носков куплено. Куплено 2 пары носков. Вот уже и составилась задача: Пара носков стоит 3 руб. Куплено 2 пары носков. Теперь легко поставить и вопрос. Таким образом, второе данное найдено не под влиянием вопроса, а под влиянием другого данного. Подтверждением того, что задача выделена правильно, является то, что она решается, что можно получить ответ. Решив первую простую задачу и получив 6 руб., ученику легче понять, что в 18 руб. находятся 6 руб. и еще какая-то часть. И если ученик достаточно решал задач на нахождение одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому, то он сообразит, что от 18 руб. нужно отнять 6, чтобы найти стоимость костюма. Наблюдения показывают, что найдя стоимость 2 пар носков и даже отняв от 18 руб. 6 руб., ученики не всегда отчетливо понимают, что оставшаяся часть и есть стоимость костюма.

Для решения такой задачи нужно, чтобы ученики могли преодолевать те внешние связи, которые встречаются в задаче, уметь из разрозненных данных составлять простые задачи.

Это еще раз подтверждает, что при решении многих составных задач идти обычным аналитическим или синтетическим методом нельзя, Изучение процесса решения сложных задач показывает, что нет „общих“ методов решения разных задач, что разные виды задач различны по степени трудности их решения и требуют применения различных приемов. Процесс решения их тоже чрезвычайно разнообразный. В целом ряде задач, особенно тех, где зависимые числа сближены, ученик в основном идет от числовых данных, т. е. синтетическим путем. Но и здесь ему приходится думать над тем, нужно ли решать данную часть задачи, на что пригодится полученное от решения первой части данное, т. е., отправляясь от вопроса составной задачи, ученик намечает, что ему для решения главного вопроса нужно то данное, которое он получит от решения первого вопроса. Значит, здесь уже проявляется аналитический момент. Без него выбор первой пары числовых данных и в значительной степени весь процесс решения сложной задачи приобретает характер случайного, бессознательного оперирования с числами.

Разбор решения задач показал, что при решении одних задач преобладает анализ, при решении других — синтез, но они не исключают друг друга, а выступают во взаимодействии. Поэтому совершенно необосновано противопоставление этих методов. Необходимо развивать у учеников умение при разборе задачи пользоваться и анализом и синтезом. Пользование аналитическим методом начинается даже при решении простых задач.

Опыт показывает, что, ввиду сложности процесса решения составной задачи, необходимы специальные упражнения, которые подготовляли бы учеников к успешному решению составной задачи.

При разложении составной задачи, особенно при выделении первой части, большое значение имеет знакомство с простыми задачами, т. е. знакомство с теми зависимостями величин, которые даются в этих задачах. Это помогает ученику выделить сходную зависимость в составной задаче. Знакомство с видами зависимостей, на основе решения простых задач, должно быть более всесторонним, т. е. из трех зависимых величин ученик должен уметь найти каждую. Между тем, в школе такого всестороннего знакомства с видом зависимости не дается; отсюда многие затруднения у учеников при решении составной задачи.

Проверка в школах показала, что знакомство с простыми задачами имеет тем большее значение, чем более оно связано и приближено к решению составных задач. Так, в тех школах, где после ознакомления с первыми видами простых задач (на нахождение суммы двух чисел и на нахождение остатка) проводились подготовительные упражнения к решению составных задач, а затем, не переходя к новым видам простых задач, давались составные, составленные из такого же рода простых задач, ученики легче справлялись с составными задачами. В задачниках, как известно, принят такой порядок: сначала дается большое количество видов простых задач, а затем уже даются составные задачи.

Когда мы говорим о хорошем знакомстве с простыми задачами, мы имеем в виду знакомство ученика с теми видами зависимостей величин, которые составляют основу каждой простой задачи, знакомство с теми схемами рассуждения, которые приходится ученику применять при отыскивании числа, зависимого от других чисел. Несомненно ученик по-разному рассуждает, когда решает простую задачу на нахождение суммы по данным слагаемым и когда решает задачу на нахождение уменьшаемого по вычитаемому и остатку, хотя и пользуется одним и тем же действием. Такое знакомство и выделение типов зависимостей, схемы рассуждения неизбежно происходит при решении простых задач. Ученики сами делают соответствующие обобщения в процессе решения большого количества простых задач. Но этот процесс был бы значительно ускорен и облегчен, если бы при обучении решению задач на него было обращено достаточное внимание. Выше мы показали, как этого можно достичь без всякого натаскивания учеников.

Решение составных задач является одновременно дальнейшим углублением знакомства с простыми задачами. Выделяя из составной задачи простые и решая их, ученик не только повторяет знакомые ему виды простых задач, повторяет знакомые схемы рассуждений, но ему часто приходится находить простую задачу в разных частях составной, из разрозненных частей составлять простую задачу, что углубляет понимание зависимости между величинами. Работа над простыми задачами, в связи с решением составных задач, начинает носить иной характер.

Раньше, когда решались только отдельные простые задачи, ученикам для каждой задачи давались все необходимые для решения данные. Эти данные являлись с определенным конкретным содержанием, благодаря чему ученику оставалось только определить характер зависимости для того, чтобы выбрать правильно действие для решения вопроса.

В составной задаче простые задачи даются не в законченном виде (отсутствуют или вопрос или некоторые данные). Раньше зависимые величины давались рядом. В составной же задаче они часто разъединены, перемешаны с другими величинами, ученику приходится иметь дело не только с теми величинами, которые даны, но и с теми, которые нужно отыскивать.

В более трудных случаях обычные приемы решения и совсем окажутся непригодны. Возьмем, например, такую задачу: Медник из бывшей у него меди хотел сделать 20 кастрюль. Но, получив заказ на кофейники, сделал из нее 25 кофейников, причем каждый кофейник вышел легче кастрюли на 1 фунт. Сколько меди было у медника? (Егоров Ф. И. Собрание арифметических задач, вычислений и других упражнений. Изд. 11-е, 1906, № 445). Если ученик пойдет чисто аналитическим путем, каким его рисуют авторы методик, он совершенно запутается и задачу не решит. Не окажет ему помощи и так называемый синтетический метод. Выручит догадка, что от замены 20 кастрюль 20 кофейниками медник сберег 20 фунтов меди, что и позволило ему сделать лишних 5 кофейников.

Особую группу составляют задачи, в которых решение находится, главным образом, на основе догадки, сообразительности.

Возьмем задачу: Если я куплю десяток яблок, то истрачу все свои деньги; а если я куплю 8 яблок, то у меня останется 4 руб. Сколько у меня денег? Обычные способы нахождения решения такой задачи окажутся мало действительны. Ученик должен „смекнуть“, что 4 руб. останутся у покупателя потому, что он купит на 2 яблока меньше. Значит, 2 яблока стоят 4 руб. А теперь и весь ход решения становится ясен. Сообразительность иногда приходится ученикам проявлять и при выборе хода решения, когда задача решается не одним способом.

Иногда для того, чтобы „сообразить“, как решить задачу, нужно ярко представить рисуемую в задаче картину, например: Перевозчик перевез 10 человек. В лодку каждый раз он сажал по 2 человека. Сколько концов пришлось сделать перевозчику? (сколько раз пришлось перевозчику переезжать через реку). Ученик должен сообразить, что для перевозки каждой пары потребуется проехать в 2 конца (даже, если пристань находится на том же берегу, где содержится лодка). Для этого ему нужно мысленно представить все рейсы лодки с пассажирами и без пассажиров.

Большое значение имеет иногда способность понять, сообразить, что значит некоторая деталь, указанная в условии. Возьмем, например, задачу: Банка наполовину наполнена вареньем и весит 6 *кг*, а пустая — 1 *кг*. Сколько килограммов варенья входит в банку, если заполнить банку? Для того, чтобы найти решение задачи, ученику нужно сообразить, что в половине банки варенья не 6 *кг*, а только 5 *кг*, так как из 6 *кг* нужно исключить вес банки. Значит, во вторую половину банки войдет тоже 5 *кг*. Следовательно, эта задача решается так: 1) 6 *кг* — 1 *кг* = 5 *кг*; 2) 5 *кг* + 5 *кг* = 10 *кг*, а не одним действием, как многие ученики решают: 6 *кг* + 6 *кг* = 12 *кг*.

Итак, для того, чтобы ученик мог самостоятельно справляться с составной задачей, он должен уметь разложить составную задачу на простые:

а) выделить первую простую задачу путем постановки вопроса к паре числовых данных и решить ее;

б) уметь своевременно использовать новое данное для составления и выделения второй задачи;

в) уметь, руководствуясь вопросом, находить, какие данные нужны для решения вопроса (оперирование с величинами;

г) запомнить содержание и данные, как имеющиеся в задаче, так и получаемые в процессе решения.

Эти уменья ученик приобретает и развивает в процессе решения составных задач. Но как введение к решению составных задач, облегчающее усвоение этих навыков, необходим ряд специальных упражнений, на которых ученики овладевают этими уменьями в отдельности и постепенно.

М. М. Циммерман

ОБ ИЗУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1. Задачи изучения геометрии в начальной школе

Изучение элементов геометрии в начальной школе преследует три задачи: 1) научить детей видеть и различать формы тел и фигур; 2) добиться от детей понимания сущности трех геометрических величин — длины, площади, объема и 3) научить детей простейшим измерениям и вычислениям этих величин, а также развить у детей умение определять на-глаз размеры величин. Попутно дети приобретают начальные геометрические понятия и знакомятся с рядом геометрических свойств, выраженных в элементарной форме.

Кроме того, геометрические образы служат конкретным дидактическим материалом при изучении арифметического материала: счета и действий в пределах первого и второго десятков и понятия о долях. В полном соответствии с этими задачами перед учителями начальной школы стоит практическая задача — научить детей простейшим измерениям на земле и выполнять практические расчеты, связанные с сельскохозяйственными работами: подсчет потребного для посева количества семян, урожайности, количества удобрений, планировка земельных участков.

2. Объем геометрического материала в начальной школе

В начальной школе изучается следующий геометрический материал: линии — прямая и ее отрезок; измерение отрезков и метрические меры длины; углы — прямой, тупой, острый; прямоугольник, квадрат; измерение площадей прямоугольника и квадрата; геометрические тела — куб и прямоугольный параллелепипед; измерение их объемов. Попутно с изучением этого основного материала полезно дать детям наглядное представление об окружности и круге.

В I классе дети знакомятся с прямой линией и измеряют длину в целых метрах и сантиметрах; знакомятся с мерой объемов — литром.

Во II классе повторяется материал I класса и добавляется изучение меры длины — километра (желательно также познакомить детей с дециметром).

В старших классах начальной школы дети знакомятся с углами — прямым, тупым, острым; рассматривают прямоугольник, квадрат и их элементы; учатся измерять площади прямоугольника и квадрата и получают представление о мерах земельных площадей — аре, гектаре и квадратном километре. Кроме того, дети знакомятся с кубом и прямоугольным параллелепипедом и учатся измерять их объемы.

Геометрический материал в I, II и III классах изучается в тесной связи с арифметическим. Измерительные работы, рисунки, практические работы, указанные ниже, выполняются при изучении соответствующих арифметических вопросов и служат, с одной стороны, средством наглядного изображения величины и состава чисел, наглядным пособием при изучении действий с числами, с другой стороны, материалом для практического применения изученного. В этих классах геометрический материал не составляет особого раздела программы и не выделяется в особые уроки.

В IV классе повторение изученных ранее вопросов также не составляет содержания отдельных уроков, но в программе этого класса содержится и специальный раздел геометрического материала. Этот материал не следует, однако, давать компактно в конце учебного года: его следует изучать постепенно в связи с изучаемым арифметическим материалом, не нарушая цельности последнего. Так, знакомство с прямоугольником и квадратом можно провести в начале учебного года, измерение площадей — параллельно изучению умножения; работы же по измерению площадей и задачи на вычисление площадей предлагаются на протяжении всей дальнейшей части учебного года. Примерно так же строится изучение геометрических тел и измерение их объемов.

3. Общие методические указания

Почти весь геометрический материал в начальной школе изучается н а г л я д н о, к о н к р е т н о, п р а к т и ч е с к и.

Это значит, что учитель должен учить детей не словесным формулировкам (в начальной школе определения геометрических понятий почти не даются) и не решению только словесно выраженных задач геометрического содержания, а учить на предметах окружающей детей обстановки и с помощью наглядных пособий, учить на практических, жизненных задачах; учить не только рассказом и не только показом, а путем практических работ самих учащихся.

Основное внимание учителя направляется на то, чтобы дети научились видеть геометрические образы на различных предметах, чтобы научились отличать геометрические свойства от других свойств и признаков предметов: находить и показывать различные виды линий, углов, находить фигуры одного названия на различных предметах, видеть сходство и различие форм предметов и узнавать в них знакомые геометрические тела. Дети учатся воспроизводить свои геометрические представления в виде моделей, на рисунках, чертежах, а также восстанавливать геометрические образы в сознании по рисункам и чертежам.

В начальной школе дети учатся не только видеть и различать геометрические образы, но и определять на-глаз их величину. Учитель, начиная с I класса, упражняет детей в определении на-глаз длины, ширины, высоты предметов, видимых расстояний, площадей комнат, земельных участков. Дети учатся пользоваться для простейших, грубых измерений длиной своего шага, длиной руки, пальцев, четвертью. С этой целью, а также для измерений на земле проводятся специальные практические упражнения вне класса.

Измерения дети должны выполнять сами. Учитель не может ограничиваться только показом приемов измерений (а, тем более, только рассказом о них). Дети учатся правильно держать и рационально применять инструменты. Учитель добивается от детей получения в результате измерения наибольшей точности, достижимой с помощью данного инструмента. При этом не следует, однако, добиваться такой точности, которая не имеет практического смысла в данном случае: неразумно, например, требовать измерения размеров комнаты с точностью до 1 *см*, а размеров стола с точностью до 1 *мм*; наоборот, размеры оконного стекла (небольшого) измеряются с точностью до 1 *мм*.

Дети должны получить ясное представление о различии между длиной, площадью, объемом — так, чтобы сама постановка вопроса о сравнении линейных мер с мерами площадей и с мерами объемов воспринималась детьми как нелепость.

Дети должны научиться не только измерять с помощью готовых инструментов, но и изготовлять самодельные инструменты — масштабные линейки, метровки, рейки, мерные ленты, эккеры, образцы квадратных и кубических мер. Среди практических работ в младших классах большое место занимают работы с бумагой, картоном, фанерой, палочками, линеечками, с глиной.

Научить применять полученные знания на практике — составляет одну из ответственнейших задач учителя начальной школы. Поэтому учитель не может ограничиться только задачами, имеющимися в сборнике задач. Учитель, привлекая к этому учащихся, подбирает и составляет задачи из быта и деятельности детей, из колхозной практики, из газет, из школьного хозяйства.

4. *Линии и их измерение*

С линиями и их измерением дети знакомятся впервые в I классе. Уже в добукварный период дети в первых рисунках проводят прямые, ломаные, кривые линии. При этом учитель пользуется терминами „прямо", „прямая линия", „криво", „скривил". Дети наглядно воспринимают образы отрезков прямой линии, проведенной в различных направлениях. Подчеркиваю, что дети должны видеть отрезки прямых линий в различных направлениях, а не только в горизонтальном и вертикальном. При письме элементов букв дети учатся отличать прямые палочки от палочек с изломом, с закруглением. Получая наглядные представления о различных видах линий, дети запоминают только один термин: „прямая линия". Одновременно дети учатся находить отрезки прямых линий на предметах (термин „отрезок" не сообщается детям). Учитель обращает внимание детей, что косые линии (наклонные) также могут быть прямыми, чтобы дети не противопоставляли косые линии прямым. Уже в начале букварного периода дети учатся проводить прямые линии по линейке.

На рисунках и предметах дети знакомятся с окружностью (называя ее кругом): они рисуют кружки, находят круги на предметах, обводят окружности с помощью круглых предметов (чернильницы, стакана, банки).

Изучение измерения линий начинается с задачи. Первой задачей может служить сравнение длины двух комнат (какой из двух классов длиннее — без решения вопроса, насколько больше). Первое измерение (при изучении чисел первого десятка) выполняется шагами нескольких учащихся. Так как при этом получатся различные числа, учитель сообщает, что для измерения длины применяется мера, одинаковая для всех. Этой мерой служит 1 *м*. Учитель показывает длину метра (метровую линейку). Длину эту отмеривают на доске, на стене от пола вверх. Затем с помощью метровой линейки измеряют в целых метрах длину двух классов. Приближенная величина метра показывается как расстояние от плеча до конца большого пальца взрослого человека. По метке на стене дети сравнивают свой рост с метром (узнают, больше они или меньше метра). Каждый учащийся делает для себя метр из полосы бумаги, из тесьмы, шнура; можно отрезать кусок тесьмы или шнура длиной в несколько метров и отметить чертой или узелком конец каждого метра.

С метром дети учатся выполнять два вида работ: измерять длину в целых метрах и отмерять заданные расстояния. При выполнении этих работ учитель добивается того, чтобы измерение и отмеривание производилось по прямой линии (можно показать детям получение прямой линии натягиванием шнура) и чтобы метры укладывались вплотную один к другому. Отмеривание и измерения выполняются и в классе, и на открытом месте — на пришкольном участке, на спортивной площадке. Отдельные работы связываются с практическими заданиями: измерить длину грядки, забора, отмерить расстояние для бега, для игры.

Уже на этом этапе учитель учит детей оценивать и отмерять на-глаз небольшие расстояния (примерно, до 10 *м*) и показывать приближенно величину метра. Учитель обращает также внимание детей на остаток, получающийся при измерении целыми метрами: дети должны научиться прикидывать на-глаз величину остатка и прибавлять к ответу 1 *м*, если остаток близок к целому метру.

При изучении счета и записи чисел до 100 учитель знакомит детей с сантиметром. Он показывает детям метр, разделенный на сантиметры (такой показ лучше провести на линейках, на которых чередуются сантиметры, раскрашенные различной краской). Дети рассматривают сантиметры на масштабных линейках (каждый учащийся должен иметь такую линейку). Дети[1] по указанию учителя, изготовляют полоски бумаги длиной в 20 *см* и делят их по масштабной линейке на сантиметры. При выполнении этой работы учитель требует от детей чистоты, аккуратности (чтобы сантиметры были равной длины, черточки проводились тонко очиненным карандашом, чтобы числа под делениями начинались от нуля, а не от единицы и подписывались над делениями, а не в промежутках между ними).

Дети опять выполняют измерения и построения, но уже в сантиметрах. Они измеряют и записывают свой рост так: „Мой рост 12 апреля 1 метр 8 сантиметров". Измеряют длину и ширину книги, тетради, коробки, измеряют и чертят отрезки различной длины. При этом они учатся более точно измерять линейные размеры предметов, измеряя в сантиметрах остатки от целых метров в размерах небольших предметов (длина стола, парты, классной доски). При выполнении измерений учитель требует, чтобы дети прикладывали к началу измеряемой величины не конец линейки, а нулевое деление, и чтобы счет велся от нуля, а не от единицы. Можно уже здесь показать детям измерение длины кривых линий (например, длины пояса, окружности колеса, дерева) путем обтягивания круглых тел шнуром и переноса измеряемой величины на линейку или с помощью портновского „сантиметра", „мерной ленты".

При изучении сантиметров дети также учатся прикидывать и отмеривать на-глаз (с последующей проверкой) небольшие расстояния (примерно, до 20 *см*). Дети измеряют и записывают длину своей руки от локтя до конца среднего пальца, от плеча, длину большого пальца, ширину ладони в самом широком месте. Знание этих размеров поможет детям оценивать приближенно, пользуясь органами собственного тела, размеры предметов и расстояния.

Повторив материал, изученный в I классе, дети во II классе знакомятся с дециметром и километром. Знакомство с дециметром позволяет более точно измерить размеры комнаты, двери, окна. Приближенная величина дециметра показывается как ширина ладони человека в самом широком месте.

Чтобы познакомить детей с километром, учитель предварительно отмеряет километр на дороге. Если поблизости проходит железная дорога или шоссе с километровыми столбами, важно воспользоваться расстоянием между двумя соседними столбами. Дети с учителем проходят километр, замечая время, затраченное на это. На обратном пути дети считают (каждый считает отдельно), сколько пар шагов правой и левой ногой сделают они на протяжении километра. В результате этих работ выясняется, что на прохождение километра затрачивается 12—15 мин. и что в километре укладывается около 1000 пар детских шагов. В дальнейшем путем подсчета шагов дети будут определять расстояние от дома до школы, между двумя селами, от колхоза до сельсовета.

В III классе дети учатся провешиванию прямой линии. Для провешивания прямой линии от одной точки до другой в конечных пунктах втыкают в землю заостренные на концах шесты длиной в 1,5—2 *м* (шесты втыкают так, чтобы они стояли отвесно), а затем через каждые 10—20 *м* втыкают промежуточные шесты так, чтобы при наблюдении одним глазом за каждыми двумя шестами скрывался третий. Также провешивают прямую линию в данном направлении, только первые 2 шеста ставятся так, чтобы они указывали на данное направление (на заранее намеченный предмет: дерево, столб, угол дома).

В связи с этой работой учитель дает детям наглядное представление об отвесной линии, как о направлении, которое принимает нить с подвешанным к ней грузом. Дети отыскивают отвесные линии в комнате и в постройках.

Работы по измерению и отмериванию линий на земле связываются с планировкой пришкольного участка, площадки для игр и спорта, с проведением и чисткой оросительных канавок, устройством гряд и с другими практическими работами. В III классе можно продолжить работу по измерению длины кривых линий, например, окружности клумбы, для решения задачи: сколько требуется колышков для ограждения клумбы, если ставить по одному колышку через каждые 2 *дм*?

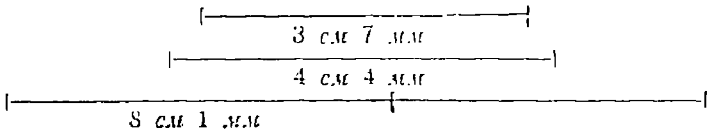
При решении примеров и задач с метрическими мерами следует требовать от детей стандартных обозначений: „1 *км*, 1 *м*, 1 *дм*, 1 *см*“, после которых не ставится точки, если на них не кончается предложение. Эти сокращенные обозначения ставятся только после чисел, а в словесном тексте без чисел пишутся полные названия мер.

преобразований не записываются, а выполняются „в уме". Запись ведется так:

$$5 \text{ км } 200 \text{ м} = 5200 \text{ м}; \; 425 \text{ см} = 4 \text{ м } 2 \text{ дм } 5 \text{ см}.$$

Представления о линиях, накопленные детьми в первых двух классах, обобщаются в III классе в понятия, хотя и без определения их. Дети наблюдают и проводят различные виды линий и запоминают их названия. Повторяются способы построения прямых линий: по линейке, натягиванием шнура, провешиванием. Измеряя длину отрезков прямых и ломаных линий, проведенных между двумя точками, устанавливают, что отрезок прямой, проведенной между двумя точками, короче всякой другой линии, проведенной между этими же точками. Учитель сообщает детям новые термины: отрезок прямой, ломаная линия и объясняет их. Измеряя и строя отрезки заданной величины, дети учатся применять циркуль для переноса размеров с чертежа на масштабную линейку и обратно.

Отдельные примеры и задачи на сложение и вычитание составных именованных чисел сопровождаются сложением и вычитанием отрезков, что помогает в дальнейшем иллюстрировать чертежами решение задач на движение, на сравнение расстояний по карте и плану. Чертежи и записи действий с отрезками выполняются так:



Данные отрезки переносятся для получения суммы с помощью циркуля, причем слагаемые отрезки откладываются слева направо, вычитаемые — справа налево.

Геометрические образы особенно ценны для образования понятий о долях единицы. Основными наглядными пособиями являются при этом геометрические фигуры (круг, квадрат), теряющие при дроблении основные геометрические признаки. Но и деление целых линейных единиц на равные части, хотя и менее наглядно, но более просто и доступно для практического выполнения детьми, помогает усвоению понятия о дроби. Дети делят 1 *дм* на 2, 4, 5 равных частей и подписывают величину получаемых долей. При этом полезно под целым дециметром вычерчивать отдельно полученную долю.

Это способствует закреплению в сознании ребенка образов долей единицы.

В III классе дети выполняют вычисления и построения по заданному линейному масштабу. Учитель рассказывает детям о том, что на бумаге можно показать большие расстояния (например, от села до областного города, от районного центра до Москвы, длину и ширину участка, дома, комнаты). Для этого большую меру, которую на бумаге нельзя уместить, заменяют маленькой. Чтобы изобразить на доске длину класса, равную 6 *м*, заменяют каждый метр дециметром. Начертим на доске отрезок в 6 *дм*, он и покажет нам длину класса. Чтобы было понятно, что каждый метр обозначается на чертеже дециметром, чертим на доске линейку, делим ее на дециметры и над каждым делением надписываем, что он обозначает (0,1 *м*; 2 *м*). Такая линейка называется „масштабом". Дети чертят в тетрадях масштаб 1 *м* в 1 *см* и в этом масштабе изображают длину и ширину класса, своей комнаты. Учитель показывает детям масштаб на планах, чертежах, на географической карте и предлагает по карте и масштабу, по плану и масштабу определить заданные расстояния.

5. Геометрические фигуры

Знакомство детей с геометрическими фигурами начинается с I класса. Знакомство это должно быть не только наглядным, но и активным: дети должны не только видеть фигуры, но и осязать их, вырезать, рисовать.

В I классе дети знакомятся с прямоугольником, квадратом, кругом. Представление о прямоугольнике у детей возникает так: учитель приносит в класс несколько прямоугольников разной величины, окраски и сделанные из различного материала (бумага, картон, фанера, жесть, стекло) и предметы, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда (коробки, бруски); показывая несколько прямоугольников, учитель предлагает детям решить вопрос, похожи ли эти предметы друг на друга. Ответы на этот вопрос будут различные. Тогда учитель выставляет на планку доски различные плоские фигуры — прямоугольники, круги, треугольники и предлагает детям подобрать фигуры, похожие на показанные ранее. Учитель показывает, что подбирать надо не по цвету и не по материалу, а по другому признаку — по „форме". Далее учитель сообщает, что фигуры, показанные детям, называются прямоугольниками. Дети отыскивают прямоугольники на коробках, брусках, на предметах классной обстановки, чертят прямоугольник в тетрадях и считают, сколько у него сторон. Учитель сообщает, что длинные стороны называются длиной, короткие — шириной. Дома дети вырезают прямоугольники из бумаги и находят их на различных предметах. Не сообщая детям термина „прямой угол", учитель показывает, что при рисовании и вырезании прямоугольников углы у них рисуются, вырезаются по углам линейки, чертежного треугольника „прямо", а не „косо".

Чтобы дать детям представление о квадрате, учитель показывает детям несколько прямоугольников и квадратов и предлагает выбрать из них фигуры, у которых длина и ширина равные. Такие фигуры, сообщает учитель, называются квадратами. Дети отыскивают квадраты в тетрадях, разлинованных в клетку и на различных предметах, рисуют и вырезают квадраты различной величины. Так же конкретно и наглядно дети получают представление о круге. Для получения изображения круга дети пользуются круглыми предметами, обводя их контуры. Примерами кругов для детей служат монеты, днища ведер, баков, стаканов, колеса и части других круглых предметов.

Во II классе повторяются те же фигуры, которые изучались в I классе.

В IV классе дети знакомятся с углами. Двигая стрелку часов, учитель показывает детям полный оборот, полоборота, четверть оборота. В физкультурных упражнениях дети выполняют повороты. Кругом — полоборота, направо, налево — четверть оборота. Учитель сообщает, что четверть оборота — поворот на прямой угол. Затем он показывает несколько прямых углов на поверхностях различных предметов и предлагает детям отыскать прямые углы. Далее учитель показывает получение прямого угла перегибанием листа бумаги (так, чтобы совпали края): линия перегиба образует с совпавшими краями равные смежные углы, т. е. прямые углы. Таким способом дети изготовляют для себя прямые углы и учатся строить прямые углы с помощью чертежного треугольника. Учитель сообщает детям название элементов угла — стороны, вершина.

В связи с изучением прямого угла повторяется понятие об отвесном направлении и вводится понятие о горизонтальном направлении. Учитель показывает детям отвес и уровень и объясняет, как ими пользоваться. Отмечают, что отвесная и горизонтальная линии образуют между собой прямой угол (дети должны, однако, получить ясное представление о том, что прямые углы образуются не только отвесными и горизонтальными, но и другими прямыми).

6. Измерение площадей

Из всего геометрического материала, изучаемого в начальной школе, наиболее трудным и ответственным является материал по измерению площадей. Трудность этого материала заключается в том, что измерение площадей выполняется не прямо, как измерение длины, веса, объема жидкостей, а косвенно: площади измеряются не непосредственно мерами площадей, а мерами длины с последующим вычислением.

Часто учителя не учитывают этой особенности измерения площадей и быстро сообщают детям несложные правила вычисления таковых („длину умножить на ширину"). В результате этого на всю жизнь остается непонимание сущности измерения площадей: часто взрослые образованные люди задумываются над вопросом, сколько содержится метров в квадратном метре, тогда как эти две величины разнородные и не могут сравниваться.

Из-за непонимания сущности измерения площадей учащиеся даже в старших классах часто смешивают понятия о периметре с понятием о площади. Причины этого кроются в поспешном, непродуманном изучении этого вопроса в начальной школе.

Исходя из вышеизложенного, основное внимание при изучении данной темы направляется на доведение до сознания учащихся сущности измеряемой величины, ее особенностей. С этой целью я советую проделать с детьми ряд трудных, кропотливых работ по непосредственному измерению различных фигур, а затем уже объяснить правило вычисления площадей прямоугольника (да и само правило не столько объясняется учителем, сколько выводится самими учащимися).

Изучение темы начинается с разрешения вопроса — для чего измеряют площади? Учитель дает каждому учащемуся по два прямоугольных листа бумаги различных размеров, но таких, чтобы на-глаз трудно было установить — какой из двух листов имеет бóльшую площадь (например: 8 *см* $\times$ 7 *см* и 9 *см* $\times$ 6 *см*). Детям предлагается решить, какой из двух листков больше. Выясняют, что больше — это не значит длиннее или шире: больше — это значит, какой листок занимает больше места. Если листки не разграфлены в клетку (а именно такие и даются для постановки вопроса), дети попытаются ответить наугад. Предложив детям спрятать на время листочки, учитель раздает детям еще по два листка, разграфленных в клетку. Если такой бумаги нет, учитель сам графит листы на квадратные сантиметры. Детям предлагается такая же задача — решить, какой из двух листков больше. Обычно отдельные учащиеся догадываются, что для ответа на вопрос достаточно сосчитать число квадратиков на каждом листке.

Подтвердив правильность догадки учащихся, учитель предлагает достать первые два листка и ответить на тот же вопрос. Дети решают, что и эти листки можно разбить на одинаковые квадратики.

Учитель показывает, как это можно сделать: провести вдоль и поперек листа параллельные прямые через каждый сантиметр, а для этого предварительно разделить на сантиметры стороны прямоугольника. Эту работу дети выполняют в классе или дома.

По выполнении этой работы учитель сообщает, что, сравнивая величину листков бумаги, дети узнавали площадь каждого из них. По площади сравнивают величину комнат (говорят: „площадь комнаты или жилая площадь"), величину земельных участков, засеянных полей („посевная площадь"), величину государств, областей, районов, городов. Учитель сообщает также, что площади сравнивают по числу квадратов одинаковой величины, которые на них умещаются, что для измерения площадей пользуются квадратным дециметром, квадратным сантиметром. Эти меры учитель показывает детям. Дети рисуют квадратный дециметр и квадратный сантиметр. Дома дети вырезают эти меры. Если имеется миллиметровая бумага или клетка (прозрачная миллиметровая бумага), учитель показывает детям квадратные миллиметры.

После выполнения указанной работы можно приступить к выводу правила вычисления площади прямоугольника. Предварительно дети измеряют площадь классного стола, площадь начерченного на доске прямоугольника путем наложения квадратных дециметров на измеряемую площадь. Дети убеждаются в громоздкости и неудобстве такого измерения. Как же измерить большие площади? Нельзя же накладывать на них квадратные меры! Чтобы ответить на этот вопрос, учитель раздает детям нелинованные в клетку прямоугольные листки бумаги, размеры которых содержат целое число сантиметров, и предлагает разделить их параллельными прямыми на полосы шириной по 1 *см.* (Как это сделать, учитель показывает на доске в увеличенном виде.)

Одна полоса делится на квадратные сантиметры. Учитель спрашивает: Сколько полос уместилось на листке? Сколько квадратных сантиметров содержится в одной полосе? Какова площадь всего листка? (Сколько содержится в ней квадратных сантиметров?). Учитель предлагает детям подумать — нельзя ли узнать площадь прямоугольника с помощью масштабной линейки, не деля прямоугольники на полосы и квадраты. Так дети приходят к формулировке вывода: чтобы узнать площадь прямоугольника, достаточно измерить его длину и ширину в одинаковых мерах и полученные числа перемножить. Дети должны запомнить полную формулировку, а не ограничиваться сокращением ее до слов „Длину умножить на ширину".

После установления правила дети выполняют практические работы по измерению площадей прямоугольных фигур в квадратных дециметрах и квадратных сантиметрах и решают аналогичные задачи с данными численными размерами. Затем учитель показывает детям квадратный метр и предлагает детям работы по измерению площадей комнат. Для класса изготовляется из бумаги квадратный метр, разделенный на квадратные дециметры, один из которых делится на квадратные сантиметры. Квадраты затушевываются в шахматном порядке. По образцу этого пособия дети изготовляют для себя квадратные дециметры, разбитые на квадратные сантиметры.

В качестве задач на измерение и вычисление площадей дети выполняют практические расчеты стоимости побелки стен, окраски пола, покраски крыши. На задачах дети усваивают различие между периметром и площадью. В качестве задач на вычисление периметров берутся вычисления длины изгороди, дорожки вокруг спортплощадки, рамы окна, рамки картины и т. п.

Меры земельных площадей дети отмеряют на участках: ара — как площади квадрата со сторонами по 10 *м*, гектара — как площади квадрата со сторонами по 100 *м* (ар — можно отмерить и в школьном зале, если он достаточно велик). Полезно научить детей отмеривать ары и гектары шагами на-глаз и показывать прямоугольные участки площадью в 1 *га*, но имеющие различные размеры: 200 *м* $\times$ 50 *м*; 250 *м* $\times$ 40 *м*; 125 *м* $\times$ 80 *м* и т. п.

После изучения земельных мер дети проделывают работы по измерению площадей земельных участков прямоугольной формы. Измерения длины и ширины участков выполняются с помощью мерительного циркуля (двух заостренных шестов, скрепленных под углом на одном конце и поперечной планкой так, чтобы расстояние между остриями было в 1 *м* или 2 *м*), рулетки, веревки с делениями на метры. Такие работы связываются с планировкой пришкольного участка, расчетом количества семян, потребного для посева, урожайности, количества удобрений. Полезно сопровождать измерительные работы вычерчиванием планов в заданном линейном масштабе. Если границы измеряемых участков недостаточно прямы, вдоль них провешивают прямые линии.

Наряду с измерением площадей участков проделывают работы по отмериванию прямолинейных участков заданной площади. В этих случаях учитель задает один из размеров участка или дети сами подбирают размеры соответственно условиям местности. Полезно при этом сравнивать длину границ (периметры) намечаемых участков и установить, что при данной площади наименьшую длину границ имеет участок квадратной формы (следовательно, обнесение такого участка изгородью потребует наименьшей затраты труда и средств).

Отмеривание участков выполняется с помощью вех, эккера, мерного циркуля, или рулетки, или мерной веревки. В одной из вершин участка ставят длинный шест и от него в направлении одной стороны участка провешивают прямую, равную заданной длине участка. В начале и в конце полученной стороны строят с помощью эккера прямые углы и на сторонах его откладывают ширину участка. Так намечаются три стороны участка, четвертую сторону провешивают между двумя конечными шестами. Проверяют, получились ли прямые углы в тех вершинах, в которых они не строились с помощью эккера, и равна ли четвертая сторона длине участка. Отмеренные участки зарисовываются на план, причем на плане отмечается стрелкой направление на север по компасу.

В заключение повторяются и углубляются вопросы измерения площади. Учитель проверяет, понимают ли дети сущность измерения площади, предлагая детям такие вопросы: „Как узнать, какая из двух комнат больше? Какими мерами измеряют площади? Какую форму имеет квадратный дециметр? Какова длина каждой его стороны?" Если дети помнят правило вычисления площадей прямоугольника, но не понимают смысла измерения площадей, им предлагаются работы, указанные выше для усвоения сущности этого вопроса. Работы по измерению и отмериванию земельных участков продолжаются, причем учитель добивается большей точности работ. Можно предложить детям и такие работы: каждому учащемуся отмерить квадратный метр (в различных частях поля) и подсчитать количество растений на нем. Подсчитав на основании этих работ среднюю густоту растений на 1 *кв. м*, можно решить задачи на составление плана урожайности для данного поля.

Наконец, выполняются работы на вычисление площадей по планам и чертежам. При выполнении этих вычислений линейные размеры берутся натуральные, а не начерченные на плане.

7. Геометрические тела

Обычно дети, поступающие в I класс, имеют некоторые представления о кубиках и шарах, так как эти вещи были в числе их игрушек. Однако эти представления в сознании детей еще не объединены общим признаком этих предметов — их формой. Скорее в сознании детей до поступления в школу возникают представления о каждом отдельном предмете. Первая задача учителя в развитии пространственных представлений — научить детей, отвлекаясь от других признаков, находить общность форм у различных предметов. С этой целью учитель приучает детей наблюдать не только предметы целиком, но и их элементы, причем представления детей о формах предмета складываются не только посредством зрительных ощущений, но и, в значительной степени, моторных.

Для развития у детей представления о кубе учитель приносит в класс различные предметы, имеющие форму куба. Показывая детям кубик, учитель спрашивает — знают ли дети, какой это предмет. Дети называют его кубиком. Учитель подтверждает правильность ответа и говорит, что большой кубик называется кубом. Учитель показывает детям куб, грани которого окрашены в разный цвет (или на них нарисованы различные знакомые детям предметы: животные, плоды, предметы домашнего обихода). Дети называют цвета граней и считают, сколько граней у куба. Рассматривая одну грань, дети убеждаются в том, что она имеет форму квадрата. Рассматривают другие грани и устанавливают, что все они имеют форму квадратов.

В результате наблюдений дети должны научиться находить предметы, имеющие форму куба, среди других предметов и знать, что куб имеет 6 граней, и что каждая грань имеет форму квадрата. Затем дети лепят кубики из глины. Учитель показывает детям, как нарисовать на бумаге 6 граней куба (развертку), как вырезать рисунок и сложить из него куб (склеивая стороны или связывая нитками). Такие работы проделываются для изготовления елочных игрушек.

Показывая прямолинейные брусы, учитель предлагает детям указать — чем отличаются показанные предметы от кубиков. Дети говорят, что кубики — ровные, а эти предметы — длинные. Рассматривая брусы, устанавливают, что они также имеют 6 граней. Но грани бруса имеют форму прямоугольников, а не квадратов (две стороны могут быть квадратами). Учитель сообщает детям название показанных предметов („брусы") и предлагает детям назвать предметы, имеющие форму брусов.

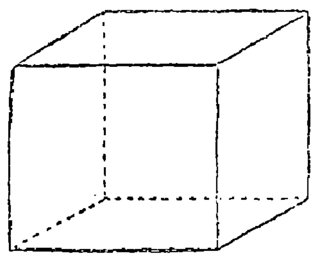
Кубики — удобные пособия для счета. Присчитывая к группе кубиков по одному кубику, дети выполняют прибавление к данному числу по единице. С помощью кубиков дети наглядно изучают действия сложения и вычитания. Особенно ценно применение кубиков и брусков из арифметического ящика для иллюстрации образования десятка и наглядного воспроизведения действий над числами второго десятка: сочтя 10 кубиков, заменяют их бруском, изображающим десяток. Числа второго десятка при счете и выполнении действий изображаются бруском (десяток) и кубиками (единицы).

Во II классе дети более подробно знакомятся с кубом и бруском: считают не только стороны — грани, но и ребра. Измеряя ребра куба, убеждаются в том, что длина их одинакова. Брус же имеет 3 различных ребра. Названия этих ребер — длина, ширина и высота. На различных брусках дети измеряют длину, ширину и высоту.

В III классе дети более подробно знакомятся с элементами куба и бруса: считают количество вершин, рассматривают углы граней и устанавливают, что углы граней куба и бруса прямые. В связи с этим вводится более точное поиятие „прямоугольный брус". Учитель сообщает названия граней: основания и боковых граней или более точно: нижнее основание, верхнее основание, передняя грань, задняя, правая, левая грань.

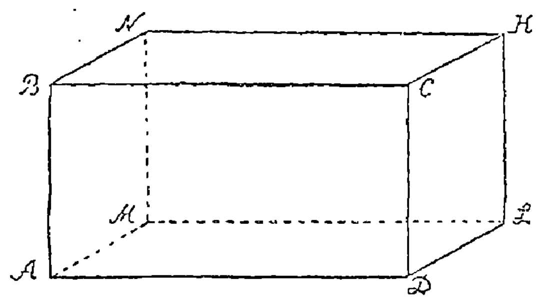
Дети учатся находить форму прямоугольного бруса на крупных предметах: ящик, шкаф, сундук, чемодан, комната; измеряют ребра и площади отдельных граней, убеждаясь в том, что площади противоположных граней равны. В связи с этим решаются задачи на вычисление стоимости побелки и окраски стен, количества досок, потребных для настила полов, листов фанеры для покрытия потолка, материала для чехла на чемодан.

Попутно повторяются понятия об отвесном и горизонтальном направлениях, с помощью отвеса проверяется отвесность стен, с помощью ватерпаса или уровня — горизонтальность пола. Дети наблюдают также параллельность противоположных ребер.



В этом же классе дети учатся рисовать куб и брус. Учитель показывает рисование куба так: чертит два равной величины квадрата так, чтобы вершина одного находилась в центре другого; вершины квадратов соединяет наклонными линиями.

Прямоугольный брус рисуется так: чертят два равных прямоугольника $ABCD$ и $MNKL$ так, чтобы вершина одного находилась внутри другого, затем вершины их соединяют наклонными линиями.



В IV классе повторяется и углубляется изученное в предыдущем классе. Здесь вводится термин „прямоугольный параллелепипед".

разрезании. (Для слабых учащихся допустима замена сплошных полос и слоев кубиками.)

Работу по составлению прямоугольных параллелепипедов удобно выполнять из материалов арифметического ящика: дети выполняют работу с маленькими арифметическими ящиками (в 1 $дм^3$). Учитель демонстрирует большой арифметический ящик (неудобство его в том, что его размеры не соответствуют единицам метрических мер, но зато он доступнее для демонстрации по своим размерам).

Дети решают задачи на вычисление объемов, связанные с предварительным измерением линейных размеров, а затем и по заданным размерам.

Содержанием задач на вычисление объемов служат расчеты кубатуры класса, жилого, производственного помещения с вычислением объема воздуха, приходящегося на одного человека, вычисление объема и веса тюка хлопка, прессованного сена, плиты, кирпича, вычисление объема и стоимости земляных работ, потребности в транспорте и т. д.

Прикидывая на-глаз линейные размеры измеряемых предметов, дети вычисляют устно приближенное значение объема до выполнения измерений. Такая предварительная прикидка приближенных результатов работы предохраняет от грубых ошибок — от получения неправдоподобных ответов.

9. Измерения на земле

Измерения на местности помогают детям глубже усвоить и лучше запомнить геометрический материал. Кроме того, они усиливают связь изучаемых вопросов с практикой, следовательно, они помогают подготовиться к практическим занятиям и участвовать в них. Дети в селах с раннего возраста принимают участие в труде взрослых в колхозах, на приусадебных участках. Школа может и должна помочь детям внести в этот труд элементы сознательности и рационализации.

Измерения на земле нужно организовать в любом колхозном звене, на приусадебном и пришкольном участке, причем дети должны получать с помощью инструментов достаточно надежные результаты.

Выше были указаны примеры измерений на земле, проводимые по разделам геометрического материала. Вот краткий обзор рекомендуемых измерительных работ по классам.

В I классе дети измеряют небольшие расстояния в 5—20 *м*. Они натягивают прямые линии шнуром, бечевкой, тесемкой между колышками и измеряют расстояние в целых метрах. Для этой цели пользуются бечевкой, шнурком, тесьмой, разделенными узлами или другими заметными знаками на метры и имеющими на концах петли для надевания на колышки. С помощью таких же инструментов дети отмеривают прямые линии. Вдоль натянутого шнура по земле проводится лопатой или прокапывается узкий ровик.

Во II классе дети учатся измерять и отмеривать шагами заданные расстояния в 100 *м*, 200 *м*, 500 *м*, 1 *км*. Каждый учащийся должен знать количество пар своих шагов на расстояниях в 100 *м*, в 1 *км*. Шаги считаются парами (правой и левой ногой) при спокойной, ровной ходьбе.

В III классе дети учатся провешивать прямые линии. Для провешивания применяются вехи — заостренные прямые шесты высотой в 1,5—2 *м*, светлые (белые, желтые) или красные (чтобы издали их было видно) и колышки для втыкания в землю на место вынутых шестов. Расстояния измеряются и отмериваются или с помощью мерительного циркуля, или рулеткой, мерным шнуром. Выполняются измерения группами по 4—5 человек.

В этом же классе дети учатся измерять длину прямых и ломаных линий с помощью мерительного циркуля. Такой циркуль (устройство его описано выше) легко может быть изготовлен в каждой школе. Он прост в употреблении и дает достаточно точные результаты при небольшой затрате времени; поэтому он имеет широкое применение в колхозной практике.

В IV классе дети строят на земле прямые углы с помощью фабричного или самодельного эккера, строят прямоугольники и обмеривают прямоугольные участки. Линейные размеры измеряют с помощью рулетки или шнура с делениями.

В IV классе дети принимают участие и в планировке пришкольного участка, спортплощадки, в разбивке клумб, цветников, в планировке древесных посадок и в других практических работах, связанных с измерениями на земле.[1]

---

[1] Согласно действующей программе весь геометрический материал сосредоточен только в 4 классе, поэтому все упражнения и работы геометрического порядка, указанные здесь для 1, 2 и 3 класса, должны быть проведены в ускоренном порядке в 4 классе. — *А. П.*

10. Наглядные пособия

Как сказано выше, все обучение детей элементам геометрии строится в начальной школе наглядно, конкретно. Поэтому в начальной школе особо важное значение имеют наглядные пособия.

Наглядные геометрические пособия служат не только для развития пространственных представлений, но и как дидактический материал для изучения чисел и состава их, для иллюстраций действий с числами, понятия о долях, о десятичных дробях.

Наглядные пособия не только показываются детям на уроках, но и изготовляются ими. Основными материалами для изготовления наглядных пособий служат: палочки, бумага, картон, фанера, жесть, глина, клей; основные инструменты: линейка, циркуль, чертежный треугольник, ножи, ножницы, иглы, шила.

Образцы метра дети делают из бумаги или тесьмы. Полезно иметь в каждой школе несколько реек.

Дети, по указанию учителя, изготовляют модели и развертки геометрических тел; лепят из глины, из пластелина шары, кубики, бруски, вырезают их из различных материалов, вырезают из бумаги развертки и склеивают или сшивают из них тела, причем на отдельных развертках надписывают названия граней: нижняя, верхняя, передняя, задняя, правая, левая.

Особенно необходимо иметь в школе образцы квадратных и кубических мер: квадратный метр, квадратный дециметр, каркас кубического метра, кубический дециметр, литровую и полулитровую кружку.

Универсальным пособием и для изучения элементов геометрии и для изучения арифметического материала служит арифметический ящик. С помощью арифметического ящика изучаются нумерация и счет чисел первой сотни, действия над числами в этом пределе, образование новых разрядов до 1000; образование вторых, десятых, сотых долей, свойства куба и прямоугольного бруса, измерение объемов.

Из общешкольных инструментов школа должна иметь: классные линейки, циркули, треугольники, эккеры, рейки, вехи, колышки, мерительные циркули, рулетки или тесьму с делениями.