Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ для 6–8 классов

Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 6—8 КЛАССОВ

Издание 2-е

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, З. А. Скопец, Р. С. Черкасов

Рекомендовано Главным управлением школ Министерства просвещения СССР

Валерий Александрович Гусев, Галина Герасимовна Маслова, Захар Александрович Скопец, Ростислав Семенович Черкасов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 6—8 классов

Редакторы *Н. И. Никитина, В. И. Ефимов.*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик.*
Технический редактор *Л. Е. Пухова.*
Корректор *Т. Ф. Алексина*

ИБ № 5071

Сдано в набор 25.01.79. Подписано к печати 14.06.79. Формат 60X90$^1/_{16}$. Бум. типограф. № 3. Гарн. Литерат. Печать высокая. Усл. п. л. 14. Уч.-изд. п. л. 12,15. Тираж 253 000 экз. Заказ № 50. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Сборник задач по геометрии для 6—8 классов /В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, З. А. Скопец, Р. С. Черкасов. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1979. —221 с., ил.— (Б-ка учителя математики).

С 23

$С\ \frac{60501 - 631}{103(03)-79}$ подп. издание 4306010400

ББК 74.262.7
513

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач по геометрии для VI—VIII классов является дополнительным материалом к учебнику геометрии восьмилетней школы.

Сборник состоит из двух частей. Первая часть содержит задачи и вопросы, которые могут быть использованы при введении, закреплении, повторении и углублении изучаемого материала.

В пособии представлены задачи на вычисление, построение, доказательство. Большое внимание уделено учебным заданиям, развивающим логическое мышление учащихся, помогающим им овладеть такими понятиями, как истинное (верное) и ложное высказывания, прямая и обратная теоремы, необходимое и достаточное условие, свойство и признак и т. п. Большое число задач, упражнений, вопросов имеет целью развитие пространственных представлений учащихся. Включены также задачи с практическим содержанием.

В пособии помещены задачи различной степени трудности на применение всех видов геометрических преобразований (перемещений и подобия) и их композиций к решению геометрических задач, а также серия задач на применение аппарата векторной алгебры.

Во второй части сборника содержатся задачи повышенной трудности, а также задачи, требующие нестандартного подхода к их решению. Материал этой части предназначен для использования его во внеклассной работе и на факультативных занятиях, для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к изучению математики.

Используемые в пособии обозначения и терминология находятся в полном соответствии с принятыми в восьмилетней школе системой понятий и символикой. Однако в отдельных случаях вместо «конгруэнтные отрезки» и «конгруэнтные углы» употребляется «равные отрезки» и «равные углы». Эта «вольность» речи не может привести к недоразумению, поскольку под словом «равенство» подразумевается равенство длин отрезков или равенство величин углов, а последнее, в свою очередь, влечет за собой их конгруэнтность. Если употребляется термин «сторона треугольника», то из контекста ясно, отрезок это или его длина. Если в задачах заданы две, три и более точек, то предполагается, что эти точки различны, и в большинстве указаний к решению задач этот общий случай и подразумевается. Однако учитель, желая придать задаче исследовательский характер, может потребовать от учащихся исчерпывающего рассмотрения возможных частных случаев.

В конце книги приведены ответы и указания к решению, а в некоторых случаях и полные решения задач.

Сборник задач, в особенности его вторая часть, может быть использован также и в старших классах при повторении курса планиметрии, а также при проведении кружковых и факультативных занятий.

Задачи к главам IV и V, а также ответы и указания к ним подготовлены И. С. Герасимовой.

Авторы выражают благодарность рецензентам Ю. П. Дудницину, Б. М. Ивлеву, Г. Б. Кузнецовой за ряд ценных замечаний и рекомендаций.

Авторы

Глава I НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Расстояния

1. Можно ли построить три такие точки X, Y, Z, для которых выполняются следующие требования:

а) $|XY| + |YZ| = |XZ|$,
$|XZ| - |XY| > |YZ|$;

б) $|XZ| - |XY| = |YZ|$,
$|XY| + |YZ| \geqslant |XZ|$;

в) $|XY| + |YZ| > |XZ|$,
$|XY| - |XZ| = |YZ|$?

Для случаев, когда построение возможно, сделайте рисунок.

2. Расстояние от пункта A до пункта B равно 20 км, а от пункта B до пункта C — 12 км.

а) Каким может быть расстояние от пункта A до пункта C?

б) Для случаев, когда это расстояние принимает наибольшее или наименьшее из возможных значений, сделайте рисунок, приняв расстояние в 1 км за 1 см.

3. Три походные радиостанции поддерживают между собой связь, если расстояние между ними не превышает 10 км. Две из этих радиостанций расположились в пунктах A и B, расстояние между которыми равно 9 км. Приняв расстояние в 1 км за 1 см, отметьте на рисунке точки A и B и найдите на нем те точки, в которых может расположиться третья радиостанция так, чтобы:

а) поддерживать связь с каждой из радиостанций;

б) поддерживать связь хотя бы с одной из этих радиостанций.

4. При горных переходах расстояние иногда измеряется временем, затраченным при переходе из одного пункта в другой. Будут ли для таких «расстояний» выполняться все свойства расстояний?

5. Даны две окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) такие, что $r_1 > r_2$. Каким может быть расстояние $|O_1O_2|$, если известно, что:

а) у этих окружностей есть общая точка;
б) у этих окружностей есть две общие точки;
в) эти окружности не имеют общих точек?

Геометрические фигуры

6. Дан отрезок AB. Какую фигуру образует множество всех таких точек X этого отрезка, для которых:

а) $|AX|<|AB|$; б) $|AX|=|BX|$; в) $|AX|\leqslant\frac{|AB|}{2}$; г) $|AX|\neq|BX|$?

7. Дана окружность (O, r). Какую фигуру образует множество всех таких точек X плоскости, для которых:

а) $|OX|<r$; б) $|OX|>r$; в) $|OX|\geqslant r$; г) $0<|OX|\leqslant r$?

8. Прямая a пересекает окружность (O, r) в точках A и B. Какую фигуру образует множество всех точек X этой прямой, для которых:

а) $|OX|=r$; б) $|OX|\leqslant r$; в) $|OX|<r$;
г) $|OX|\geqslant r$; д) $|OX|>r$; е) $|OX|\neq r$?

9. Окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) пересекаются в точках A и B $(r_1\neq r_2)$. Покажите на рисунке множества точек плоскости:

а) окр. $(O_1, r_2)\cup$ окр. (O_2, r_2);
б) окр. $(O_1, r_1)\cap$ окр. (O_2, r_2);
в) кр. $(O_1, r_1)\cup$ кр. (O_2, r_2);
г) кр. $(O_1, r_1)\cap$ кр. (O_2, r_2);
д) кр. $(O_1, r_1)\cup$ окр. (O_2, r_2).

10. Окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) имеют две общие точки P и T $(r_1\neq r_2)$. Покажите на рисунке множество всех таких точек X плоскости, для которых:

а) $|O_1X|<r_1$, $|O_2X|<r_2$; в) $|O_1X|+|O_2X|>|O_1O_2|$.
б) $|O_1X|\geqslant r_1$, $|O_2X|\geqslant r_2$;

11. Даны две точки A и B[1]. Покажите на рисунке множество всех таких точек X плоскости, для которых:

а) $|BX|-|AX|=|AB|$; в) $|AX|+|BX|\leqslant|AB|$.
б) $|AX|-|BX|=|AB|$;

---

[1] Здесь и далее, говоря «две точки», «три точки» («три прямые» и т. д.), подразумеваем, что все эти точки (прямые и т. д.) различны.

12. Какие n-угольники можно получить как общую часть: а) угла и полуплоскости; б) двух углов; в) двух треугольников; г) треугольника и выпуклого четырехугольника.

13. Даны два круга (O_1, r_1) и (O_2, r_2), причем $|O_1O_2| < r_1 + r_2$. Докажите, что общая часть этих кругов — выпуклая фигура.

14. Даны две выпуклые фигуры F_1 и F_2. Докажите, что фигура $F_1 \cap F_2$ выпуклая.

15. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, могут разбить плоскость: а) прямая и окружность; б) три прямые; в) угол и окружность; г) три окружности?

§ 2. КОНГРУЭНТНОСТЬ ФИГУР И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Отображение фигур

1. Пусть имеется две пары точек $\{A; B\}$ и $\{C; D\}$. Отобразите одну из этих пар на другую. Сколько различных отображений одной пары на другую можно построить? Обратимы ли полученные отображения?

2. Отобразите каким-либо способом: а) отрезок AB на отрезок CD (рис. 1); б) окружность на ей концентрическую; в) хорду на стягиваемую ею дугу окружности (рис. 2); г) луч на параллельный ему луч (рассмотрите различные случаи расположения лучей); д) прямую на параллельную ей прямую; е) катет на гипотенузу прямоугольного треугольника. Обратимы ли полученные отображения?

3. Сколькими способами можно отобразить множество, состоящее из двух точек, на множество, состоящее из одной точки? Обратимо ли полученное отображение? Приведите примеры необратимых отображений фигур.

4. Даны треугольник ABC и ломаная $AKDMB$ (рис. 3), причем $[AK] \perp [AB]$ и $[BM] \perp [AB]$. Можно ли отобразить треугольник ABC на объединение отрезков KD и DM? Обратимо ли полученное отображение? Можно ли тем же способом отобразить треугольник ABC на ломаную $AKDMB$?

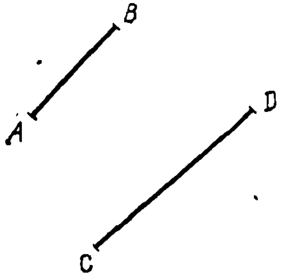


Рис. 1

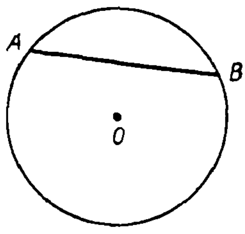


Рис. 2

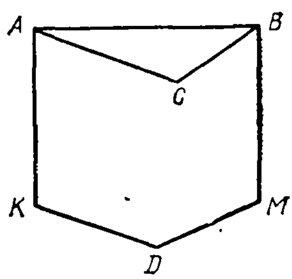


Рис. 3

5. Сколькими различными способами можно отобразить множество, состоящее из трех элементов, на множество, состоящее из 1, 2, 3 элементов? Можно ли отобразить это множество на множество, состоящее из четырех элементов?

Перемещения

6. На какую фигуру перемещение отображает: а) точку; б) пару точек; в) отрезок; г) луч; д) прямую; е) окружность; ж) круг; з) угол?

7. Докажите, что перемещение является обратимым отображением плоскости и обратное ему отображение также является перемещением.

8. Приведите примеры отображений фигур, сохраняющих расстояния между соответствующими точками. Можно ли эти отображения считать перемещениями?

Поворот[1]

9. 1) Какие точки плоскости при повороте отображаются на себя?

2) Назовите фигуры, которые при любом повороте отображаются на себя.

10. Укажите углы поворота, при которых отображается на себя: а) прямая; б) луч; в) отрезок; г) окружность; д) треугольник; е) четырехугольник.

11. Докажите, что если при повороте отрезок AB отобразился на отрезок A_1B_1, то угол этого поворота равен углу между прямыми AB и A_1B_1.

12. Каким поворотом можно отобразить пару пересекающихся прямых на себя?

13. Три прямые пересекаются в одной точке, при которой образованы шесть углов по 60°. Какими поворотами можно отобразить данные прямые на себя?

14. Даны две конгруэнтные окружности. Каким поворотом одну из них можно отобразить на другую?

15. Каким поворотом можно отобразить правильную пятиконечную звезду на себя?

16. Даны две окружности. Поворотом на угол 45° одна окружность отображается на другую. Постройте центр этого поворота.

17. Даны два конгруэнтных отрезка AB и A_1B_1. Постройте центр M поворота, при котором точка A отображается на точку A_1, а точка B — на точку B_1. Всегда ли можно найти центр такого поворота?

---

[1] В учебнике геометрии для VI класса повороты рассматриваются на углы от 0 до 180° и в двух направлениях — по часовой и против часовой стрелки. Для упрощения рассуждений рассмотрите решения приведенных ниже задач только для одного случая поворотов — в направлении по часовой стрелке.

18. На прямой a дана точка A, а на прямой b — точка B. Поворотом отобразите прямую a на прямую b так, чтобы точка A отобразилась на точку B.

19. Даны две конгруэнтные окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и на каждой из них по точке A_1 и A_2. Каким поворотом можно отобразить одну окружность на другую так, чтобы при этом точка A_1 отобразилась на точку A_2?

Центральная симметрия

20. Постройте центр симметрии следующих фигур: а) пары точек; б) двух конгруэнтных углов (в каких случаях решение этой задачи возможно?); в) двух конгруэнтных окружностей (рассмотрите все возможные случаи); г) двух конгруэнтных треугольников (в каких случаях они могут быть центрально симметричны?).

21. На прямой даны два конгруэнтных отрезка AB и A_1B_1. Постройте центр симметрии фигуры Φ, где $\Phi = [AB] \cup [A_1B_1]$.

22. Можно ли считать, что любые два отрезка центрально симметричны?

23. Через точку, лежащую внутри круга, проведите хорду так, чтобы она делилась данной точкой пополам.

24. Постройте центрально симметричный шестиугольник.

25. Дан параллелограмм, вершины которого не поместились на чертеже. Постройте центр симметрии этого параллелограмма.

Осевая симметрия

26. Дайте определение осевой симметрии. Какие точки плоскости при осевой симметрии отображаются на себя?

27. Какие фигуры отображаются на себя при осевой симметрии?

28. В каком случае треугольник имеет ось симметрии? Может ли треугольник иметь более одной оси симметрии?

29. Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось.

30. Сколько осей симметрии может иметь четырехугольник?

31. Какие буквы русского алфавита имеют оси симметрии?

32*. Дан угол, вершина которого не поместилась на чертеже. Постройте угол, величина которого в два раза больше величины данного угла.

33*. Даны угол, вершина D которого не поместилась на чертеже, и произвольная точка M (M в пределах чертежа). Проведите через точку M прямую так, чтобы она проходила через вершину D.

34. Как измерить расстояние между недоступными вершинами двух углов, пользуясь осевой симметрией?

35. Докажите, что углы между прямыми a и b и симметричными им прямыми a_1 и b_1 относительно оси l имеют равные величины.

36. Даны прямая p и точки A и B по разные стороны от нее. На прямой p найдите такую точку M, чтобы разность расстояний ее от точек A и B была наибольшей.

37. Даны два конгруэнтных отрезка AB и CD. Последовательное выполнение каких двух осевых симметрий отображает отрезок AB на отрезок CD?

38. Даны две перпендикулярные прямые m, n и точки $M_1 = S_m(M)$, $M_2 = S_n(M)$. Докажите, что точки M_1 и M_2 центрально симметричны.

39. Сколькими парами соответствующих точек определяется осевая симметрия?

40. Сколькими парами соответствующих прямых задается осевая симметрия?

41. Постройте пятиугольник, имеющий: а) одну ось симметрии; б)* две оси симметрии.

42. Даны две пересекающиеся прямые. При какой осевой симметрии одна из них отобразится на другую? При какой осевой симметрии одна из двух параллельных прямых отображается на другую?

43. Могут ли две осевые симметрии иметь общие пары соответствующих точек?

44. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под углами равной величины.

45. Постройте треугольник по стороне, разности двух других сторон и углу, заключенному между первой стороной и большей из двух других сторон.

46. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

47. Внутри острого угла дана точка M. Постройте треугольник MAB наименьшего периметра, вершины A и B которого лежат на сторонах угла.

48. Постройте фигуру, которая является объединением двух неконгруэнтных отрезков и имеет две оси симметрии.

49. Постройте фигуру, которая является объединением двух конгруэнтных отрезков без общих точек и имеет две оси симметрии.

50. Сколько осей симметрии имеет фигура, которая является: а) объединением двух окружностей, каждая из которых проходит через центр другой; б) объединением круга (O, r) и окружности, центр которой лежит на окружности (O, r).

51. Постройте выпуклый четырехугольник $ABCD$, имеющий только одну ось симметрии — прямую BD.

52. Постройте невыпуклый четырехугольник $ABCD$, симметричный относительно оси BD.

53. Сколько осей симметрии может иметь фигура, которая является объединением окружности и прямой?

54. Даны две точки A и B. Какую фигуру образует множество всех таких точек X, для которых:

1) $|AX| < |BX|$; 3) $|BX| < |AX|$; 5) $|AX| \neq |BX|$?
2) $|AX| \leqslant |BX|$; 4) $|BX| \leqslant |AX|$;

55. Дана ось симметрии l и окружность (O, r) такая, что $O \notin l$. Постройте при помощи одного циркуля окружность (O_1, r) такую, что окр. $(O_1, r) = S_l$ (окр. (O, r)).

56. Даны ось симметрии l, точка A и точка $B = S_l(A)$, $A \neq B$. Отметьте на плоскости точку $C \notin l$ и постройте точку $D = S_l(C)$ при помощи одной линейки.

57. Даны ось симметрии l и точки $A = S_l(A)$, $X \notin l$, $Y = S_l(X)$, $P \in [AY)$, $Z = S_l(P)$. Какие из указанных ниже фигур лежат в одной полуплоскости с границей l: $[PY)$, $[AP]$, $[AZ)$, $[AX]$, $[ZX]$, $[PY]$?

58. Постройте фигуру, которая является объединением:

а) четырех конгруэнтных окружностей и имеет четыре оси симметрии;

б) трех окружностей и имеет бесконечное множество осей симметрии;

в)* трех окружностей и имеет две и только две оси симметрии.

59*. Постройте фигуру, которая является общей частью четырех взаимно пересекающихся кругов и имеет четыре оси симметрии.

60. Постройте фигуру, которая является объединением четырех разносторонних треугольников с общим основанием и имеет две оси симметрии. Каким многоугольником является общая часть этих треугольников и сколько осей симметрии имеет этот многоугольник?

61. Можно ли построить такой выпуклый пятиугольник, диагональ которого лежит на его оси симметрии? Ответ обосновать.

62. Докажите, что в выпуклом многоугольнике с нечетным числом вершин и имеющем оси симметрии ни одна из диагоналей не может лежать на оси симметрии.

§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Параллельность и центральная симметрия

1. Даны прямая AB и точка M вне ее. Постройте образ прямой AB при центральной симметрии относительно точки M. Сколько различных центров симметрии имеют две параллельные прямые?

2. Докажите, что параллельность прямых обладает следующими свойствами: 1) $a \parallel a$; 2) если $a \parallel b$, то $b \parallel a$; 3) если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

3. С помощью циркуля и линейки разделите прямой угол на три конгруэнтных угла.

4. Даны две параллельные прямые на расстоянии d друг от друга. Найдите множество всех точек плоскости:

а) сумма расстояний от которых до этих прямых равна постоянной величине c;

б) разность расстояний от которых до этих прямых равна постоянной величине c.

5. В плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b. Что представляет собой множество точек, разность расстояний от которых до прямых a и b равна данной величине p?

6. Постройте четырехугольник по трем сторонам a, b, c и двум углам, прилежащим к четвертой стороне.

7. Звенья AB, BC, CD ломаной линии $ABCD$ имеют равные длины и $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. Докажите, что прямые BC и AD параллельные.

Направления. Сумма углов треугольника. Признаки параллельности прямых

8. *Сколько различных направлений существует на плоскости?*

9. Сколько различных направлений задают на плоскости: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки? Рассмотрите все возможные случаи расположения этих точек.

10. Луч света отражается от плоского зеркала AB таким образом, что угол падения MNA равен углу отражения BNP (рис. 4). Докажите, что если на плоскости имеются два взаимно перпендикулярных зеркала, то любой луч, направленный внутрь образованного этими зеркалами прямого угла (не проходящий через вершину угла), отразившись по одному разу от каждого зеркала, изменит свое направление на противоположное.

11*. Докажите, что во всяком треугольнике ABC:

а) биссектриса угла A образует с высотой, проведенной из вершины A, угол, величина которого равна $\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$;

б) биссектрисы углов B и C образуют угол, величина которого равна $\frac{\widehat{A}}{2}+90°$;

в) биссектрисы внешних углов B и C образуют угол, величина которого равна $\frac{\widehat{A}}{2}$.

12. α и β — два угла треугольника. Вычислите углы между их биссектрисами.

13. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными?

14. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, а гипотенуза равна 32 см. Высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка. Вычислите длины этих отрезков.

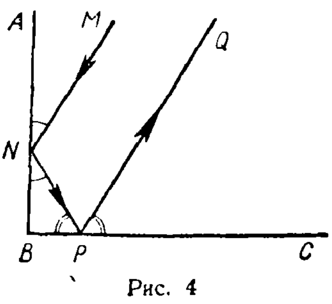


Рис. 4

15. Гипотенуза прямоугольного треугольника вдвое больше одного из его катетов. Каковы величины острых углов этого треугольника?

16. В данном треугольнике ABC (рис. 5) проведены из точки A к стороне BC две прямые AD и AE, из которых первая образует с $[AB]$ угол,

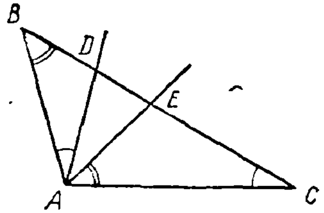


Рис. 5

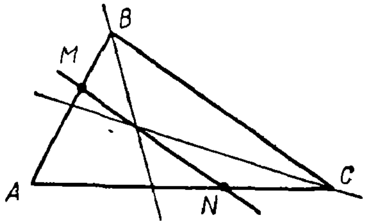


Рис. 6

конгруэнтный углу C, а вторая — с $[AC]$ угол, конгруэнтный углу B. Докажите, что треугольник ADE равнобедренный.

17. Постройте треугольник по периметру p, одному из углов α и высоте h.

18. Докажите, что прямая, проведенная через вершину равнобедренного треугольника параллельно основанию, является биссектрисой внешнего угла при этой вершине.

19. Дан треугольник ABC (рис. 6). Через точку пересечения биссектрис углов B и C проведена прямая MN, параллельная $[BC]$ и пересекающая $[AB]$ и $[AC]$ соответственно в точках M и N. Докажите, что $|MN| = |BM| + |CN|$.

Параллельный перенос. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника.

20. Докажите, что параллельный перенос есть перемещение. На какую фигуру параллельный перенос отображает прямую?

21. Сколько различных параллельных переносов задают: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки?

22. Какой параллельный перенос отображает окружность на конгруэнтную ей окружность? В каком случае отрезок можно отобразить на отрезок с помощью параллельного переноса?

23. Какие фигуры можно отобразить на себя при параллельном переносе?

24. Найдите величину угла с недоступной вершиной.

25. В четырехугольнике $ABCD$ $(BC) \parallel (AD)$ и $|AC| = |BD|$. Докажите, что $|AB| = |CD|$.

26. Две параллельные прямые p и q пересечены третьей прямой s. Постройте равносторонний треугольник с данной стороной так, чтобы его вершины принадлежали прямым p, q и s.

27. Постройте треугольник по двум его сторонам и разности противолежащих им углов.

28. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |AC|$, а угол при вершине равен 30°. Найдите сумму расстояний от какой-нибудь точки на стороне BC до двух других сторон треугольника.

29. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, то эти противоположные стороны параллельны.

30. На чертеже треугольника сохранились три точки, являющиеся серединами его сторон. Как восстановить чертеж треугольника?

31. В треугольнике две стороны равны a и b, через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные данным сторонам. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника.

32. Точка A_1 симметрична точке A относительно точки M, а точка A_2 симметрична точке A_1 относительно точки C. Докажите, что $|AA_2| = 2\,|MC|$ и $[AA_2] \parallel [MC]$.

33. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна расстоянию от одной из вершин до боковой стороны.

34. В каком случае последовательное выполнение двух параллельных переносов является тождественным отображением плоскости?

35*. Точки M_1, M_2, M_3 — образы точки M при центральной симметрии относительно середин сторон AB, BC, CD треугольника ABC соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $M_1M_2M_3$ конгруэнтны.

36*. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно точки O. Докажите, что точки M и M_1 пересечения медиан этих треугольников симметричны относительно точки O.

Глава II МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА

Простая замкнутая ломаная. Многоугольник

1. Принадлежат ли точки D и K и точки E и T одной и той же (внутренней или внешней) области многоугольника (рис. 7)?

2. Постройте замкнутую ломаную $ABCDEF$ (рис. 8) и проведите какую-нибудь ломаную, концы которой находятся в точках M и P, не пересекающую ломаную $ABCDEF$.

3. 1) Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) n-угольника?

2) Сколько диагоналей имеет выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n-угольник?

4. Какие из следующих фигур — выпуклые: а) угол; б) прямая; в) луч; г) отрезок; д) полуплоскость; е) плоскость; ж) треугольник; з) четырехугольник?

5. а) Сколько треугольников изображено на рисунке 9?

б) Назовите несколько многоугольников, изображенных на рисунке 10.

6. 1) Какая фигура является объединением: а) треугольников ABC и ACD; б) треугольников AED и ACD; в) пятиугольника $ABCDE$ и треугольника ABC; г) четырехугольников $ABCD$ и $ACDE$ (рис. 11)?

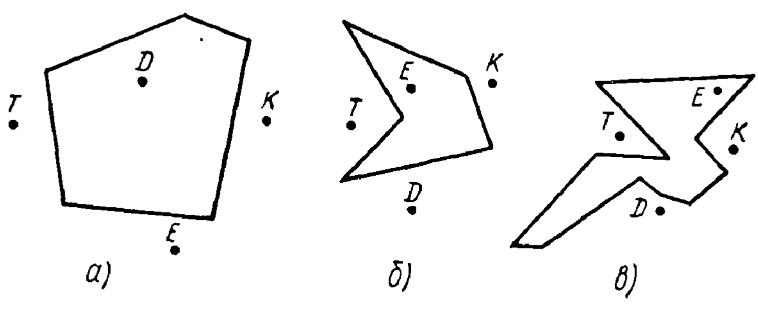


Рис. 7

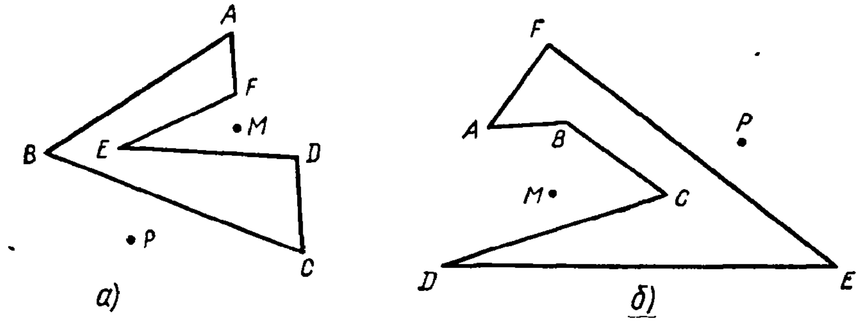


Рис. 8

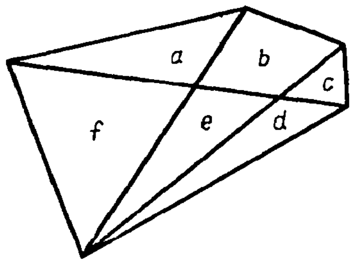


Рис. 9

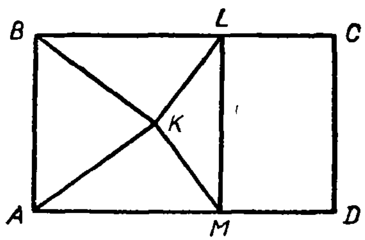


Рис. 10

2) Какая фигура является пересечением: а) треугольников ABC и ADC; б) треугольников ABC и ADE; в) пятиугольника $ABCDE$ и треугольника ACD; г) четырехугольников $ABCD$ и $ACDE$; д) треугольника ABC и отрезка CD (рис. 11)?

7. а) На сколько треугольников разбивается выпуклый пятиугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

б) На сколько треугольников разбивается выпуклый n-угольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

8. Докажите, что внешние углы многоугольника, построенные при одной его вершине, конгруэнтны.

Сумма углов многоугольника

9. Вычислите сумму всех внутренних углов[1] : а) невыпуклого четырехугольника; б) невыпуклого пятиугольника.

10. а) Многоугольник $ABCDE$ (рис. 12) симметричен относительно прямой l, проходящей через вершину C, $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{C} = 140°$. Вычислите величину угла B.

---

[1] Здесь и далее внутренним углом многоугольника называется также величина этого угла, а стороной — ее длина.

б) Многоугольник $KLMNPQ$ симметричен относительно прямой KN. Вычислите величины его внутренних углов M, P и Q, если $\widehat{MNP} = 60°$, $\widehat{LKQ} = \widehat{L} = 120°$ (рис. 13).

11. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма всех его внутренних углов с одним из внешних равна 2250°?

12. Вычислите число сторон выпуклого многоугольника, у которого равны все его внутренние углы, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 468°.

13. 1) Существует ли треугольник, у которого взаимно перпендикулярны: а) биссектрисы двух его внутренних углов; б) высоты, проведенные из двух его вершин?

2) Начертите треугольник, у которого: а) две биссектрисы взаимно перпендикулярны; б) две высоты взаимно перпендикулярны.

14. Каково наибольшее число острых углов может быть у выпуклого многоугольника?

У к а з а н и е. Используйте свойство суммы внешних углов выпуклого многоугольника.

15. В выпуклом четырехугольнике биссектрисы двух углов, прилежащих к одной стороне, образуют угол, равный полусумме двух других углов. Докажите.

16. В выпуклом четырехугольнике биссектрисы двух противоположных углов образуют углы, один из которых составляет с полуразностью двух других углов угол, равный 180°. Докажите.

У к а з а н и е. Используйте свойство суммы внутренних углов четырехугольника.

17. Вычислите величины углов четырехугольника $ABCD$, если $[AB] \parallel [CD]$ и $[BC] \parallel [AD]$, $\widehat{A} = 26°$.

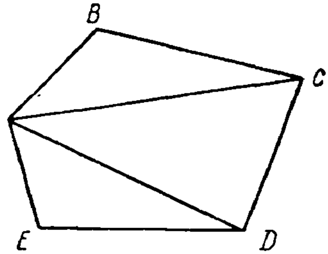


Рис. 11

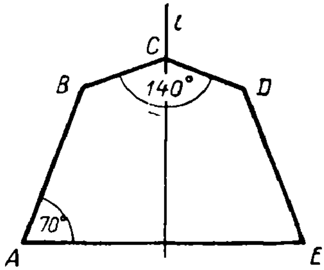


Рис. 12

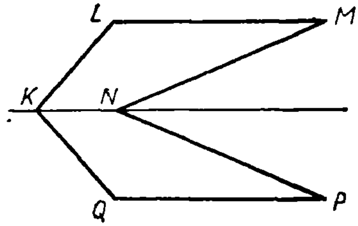


Рис. 13

§ 2. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Построение треугольника

1. Постройте треугольник ABC по следующим данным:

а) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см;
б) $a = 5$ см, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$;
в) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\gamma = 60°$;
г) $a = 5$ см, $\beta = 60°$, $\alpha = 45°$;
д) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$; $\gamma = 75°$.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

2. Укажите наибольший угол треугольника ABC, если:

а) $a = 15$ см, $b = 15$ см, $c = 7$ см;
б) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $c = 8$ см;
в) $a = 15$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см.

3. Укажите наибольшую сторону треугольника ABC, если:

а) $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 67°$;
б) $\widehat{A} = 57°$, $\widehat{B} = 74°$;
в) $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{B} = 68°$.

4. Запишите стороны треугольника ABC в порядке убывания их длин, если: а) $\widehat{A} = 10°$, $\widehat{C} = 78°$; б) $\widehat{C} = 178°$, $\widehat{A} = 1°$.

5. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если $\widehat{B} = 67°$, $\widehat{C} = 78°$.

6. По данным на рисунке 14 величинам углов: а) выясните, какая из сторон, AB или AC, больше; б) запишите углы этого треугольника в порядке возрастания их величины.

7. Дан треугольник ABC (рис. 15). Через середину M стороны AC проведен к ней перпендикуляр MN, $N \in [AB]$, $\widehat{CAN} = 40°$, $\widehat{NCB} = 30°$. а) Вычислите периметр треугольника BCN, если $|AB| = a$, $|BC| = c$; б) определите вид треугольника ABC.

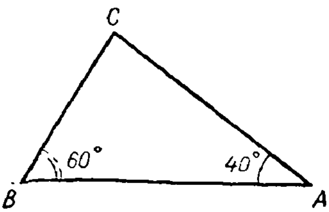


Рис. 14

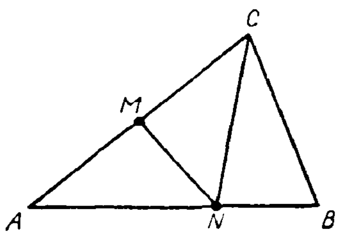


Рис. 15

§ 3. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Определение параллелограмма

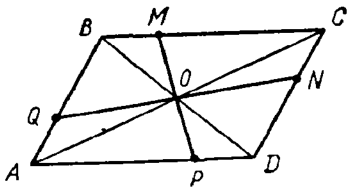


Рис. 16

1. Докажите, что объединение данного треугольника и треугольника, ему симметричного относительно середины какой-либо его стороны, является параллелограммом.

2. Докажите, что каждый четырехугольник, имеющий центр симметрии, — параллелограмм.

3. Докажите, что любой четырехугольник, у которого сумма двух углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°, — параллелограмм.

4. а) Через середины сторон параллелограмма проведены прямые, им перпендикулярные. Укажите вид четырехугольника, определяемого этими прямыми.

б) Дан параллелограмм $ABCD$, $M \in [BC]$, $N \in [CD]$, O — центр симметрии параллелограмма (рис. 16). Проведены прямые MO и NO, пересекающие прямые AD и AB соответственно в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P и Q — вершины параллелограмма.

5. 1) Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько образовалось при этом параллелограммов?

2) Сколько образовалось параллелограммов при пересечении четырех параллельных прямых четырьмя параллельными прямыми?

3) Сколько образовалось параллелограммов при пересечении n параллельных прямых n параллельными прямыми?

Свойства параллелограмма

6. Периметр треугольника, отсекаемого от параллелограмма его диагональю, равен 25 см, периметр параллелограмма равен 30 см. Вычислите длину этой диагонали.

7. Выразите сторону параллелограмма через его периметр p и другую сторону a.

8. Сумма двух смежных сторон параллелограмма равна 40 см. Одна из сторон параллелограмма равна 10 см. Вычислите длину смежной ей стороны параллелограмма и его периметр.

9. Разность двух смежных сторон параллелограмма равна 10 см. Вычислите вторую из этих сторон и периметр параллелограмма, если одна из них равна: а) 6 см; б) 13 см.

10. Сумма двух углов параллелограмма равна 100°. Вычислите углы параллелограмма.

11. Разность двух углов параллелограмма равна 10°. Вычислите углы параллелограмма.

12. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки, длины которых a и b. Выразите через a и b периметр параллелограмма.

13. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Укажите перемещение, при котором треугольник ABO отображается на треугольник COD.

14. а) В четырехугольнике $ABCD$ $|AD| = |BC|$, $|AB| = |DC|$. Отрезок MN ($M \in [DC]$, $N \in [AB]$) делит отрезок AC пополам, $[AC] \cap [NM] = K$. Докажите, что $|MK| = |KN|$.

б) Рассмотрите, могут ли точки A, B, C и D, данные в условии предыдущей задачи, не лежать в одной плоскости.

15. Один из углов параллелограмма равен 45°. Высота параллелограмма, проведенная из вершины его тупого угла, равная 4 см, делит сторону параллелограмма на два конгруэнтных отрезка. Найдите: а) длину этой стороны; б) углы, которые образует диагональ параллелограмма, проведенная из этой же вершины, со сторонами параллелограмма.

16. Параллелограмм разбивается диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника; бóльшая сторона параллелограмма равна a. Выразите через a высоту параллелограмма, проведенную к этой стороне.

17. Вычислите углы параллелограмма, если угол между его высотами, проведенными из одной вершины, равен: а) 25°; б) 125°.

18. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 и 5 см и высоте, равной 2 см. (Два решения.)

19. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 и 5 см и высоте, равной 4 см.

20. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 и 5 см и высоте, равной 6 см.

Признаки параллелограмма

21. Докажите, что четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся пополам, — параллелограмм.

22*. Дан шестиугольник, у которого противоположные стороны конгруэнтны и параллельны. Докажите, что диагонали этого шестиугольника, соединяющие его „противоположные вершины“, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

23. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отложены, как указано на рисунке 17, конгруэнтные отрезки AM, DN, CP, BQ. Дока-

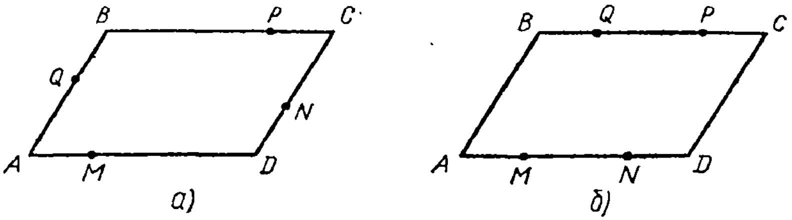


Рис. 17

жите, что точки M, N, P и Q являются вершинами параллелограмма.

24. Докажите, что в любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, делятся точкой их пересечения пополам.

25. Через внутреннюю точку угла[1] ABC, $\widehat{ABC} < 180°$, проведите прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился этой точкой пополам.

Разные задачи

26. Докажите, что сумма расстояний любой точки, лежащей внутри параллелограмма, от прямых, на которых лежат его стороны, — величина постоянная для данного параллелограмма.

27. а) Даны два параллелограмма. На каждой стороне одного из них лежит одна вершина другого. Докажите, что эти параллелограммы имеют общий центр симметрии.

б) Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $DKBL$ (рис. 18) имеют общий центр симметрии.

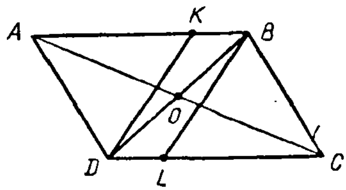


Рис. 18

28. На рисунке 19 $ABCD$ — параллелограмм, (KL) — биссектриса его внешних углов с вершиной A, $K \in (BC)$, $L \in (CD)$. Докажите, что треугольник KCL равнобедренный и сумма его боковых сторон равна периметру параллелограмма $ABCD$.

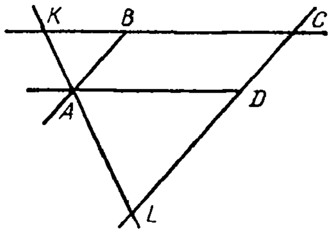


Рис. 19

29. К сторонам параллелограмма проведены серединные перпендикуляры, пересекающие противоположные стороны или их продолжения в точках K, L, M, N (рис. 20). Докажите, что: а) четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм; б) центры симметрии параллелограммов $ABCD$ и $KLMN$ совпадают.

30. Докажите, что медиана треугольника, заключенная между его неравными сторонами, образует с меньшей из этих сторон угол, больший, чем с другой стороной.

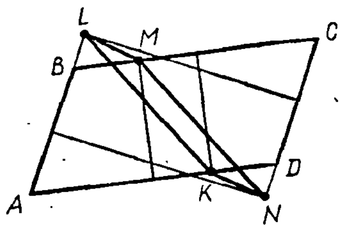


Рис. 20

[1] Внутренней точкой угла называется точка этого угла, не принадлежащая его стороне.

Необходимые и достаточные условия

31. Как известно, в параллелограмме $ABCD$: а) $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$; б) $\widehat{B}+\widehat{C}=180°$; в) $\widehat{C}+\widehat{D}=180°$; г) $\widehat{A}+\widehat{D}=180°$. Какие (укажите наименьшее их число) из этих условий достаточны, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом?

32. Существует ли параллелограмм, у которого: а) диагональ конгруэнтна стороне; б) диагонали конгруэнтны; в) диагонали взаимно перпендикулярны; г) диагональ меньше стороны; д) все стороны конгруэнтны; е) две стороны взаимно перпендикулярны; ж) две стороны конгруэнтны и взаимно перпендикулярны?

33. Назовите условия, достаточные для того, чтобы:
а) два угла были вертикальными;
б) два угла были смежными;
в) две прямые были параллельными;
г) четырехугольник был параллелограммом;
д) число делилось на 4;
е) число делилось на 5 и на 6;
ж) число делилось на 5 и на 15.

34. Назовите условия, необходимые для того, чтобы:
а) два угла были вертикальными;
б) два угла были смежными;
в) две прямые были параллельными;
г) четырехугольник был параллелограммом;
д) число делилось на 4;
е) число делилось на 5 и на 6;
ж) число делилось на 5 и на 15.

35. Назовите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы:
а) два угла были вертикальными;
б) два угла были смежными;
в) две прямые были параллельными;
г) четырехугольник был параллелограммом;
д) число делилось на 4;
е) число делилось на 5 и на 6;
ж) число делилось на 5 и на 15.

Прямоугольник

36. Начертите прямоугольник $ABCD$, точку пересечения его диагоналей обозначьте через O и отметьте точку P, $P \in [AC]$, $|AP| = 3\,|PC|$. Проведите оси симметрии l и m прямоугольника ($m \parallel [AB]$).

1) На какие точки отобразятся точки A, B, C, D, O и P при:
а) осевой симметрии относительно прямой l;
б) осевой симметрии относительно прямой m;
в) центральной симметрии относительно точки O?

2) Найдите образ треугольника BOC при:

а) симметрии относительно прямой l;

б) симметрии относительно прямой m;

в) симметрии относительно точки O.

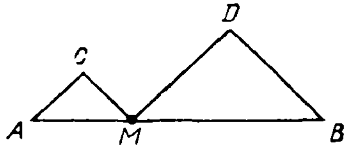


Рис. 21

37. Приведите примеры, опровергающие высказывания:

а) если диагонали четырехугольника конгруэнтны, то этот четырехугольник параллелограмм;

б) если диагонали четырехугольника конгруэнтны и образуют с двумя его параллельными сторонами соответственно конгруэнтные углы, то такой четырехугольник — параллелограмм.

38. Даны прямоугольник $ABCD$ и его оси симметрии m и n ($m \parallel [AB]$, $n \parallel [BC]$, $m \cap n = O$).

На какую фигуру отобразится:

а) отрезок AB при симметрии относительно прямой m;

б) прямоугольник с диагональю OA и вершинами на сторонах прямоугольника $ABCD$ (кроме вершины O) при симметрии относительно прямой m;

в) диагональ BD при симметрии относительно прямой n;

г) прямая m при симметрии относительно прямой n;

д) прямая n при симметрии относительно прямой m;

е) прямая m при центральной симметрии относительно точки O?

39. В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, конгруэнтны.

40. Дан отрезок AB (рис. 21). M — произвольная точка отрезка AB. На отрезках AM и MB как на гипотенузах по одну сторону прямой AB построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и MDB.

а) Укажите множества вершин C и D этих треугольников. б) Пусть $(AC) \cap (BD) = N$; докажите, что прямая MN делит отрезок CD на конгруэнтные части. в) Найдите множество всех центров окружностей, описанных около треугольника AMC.

Ромб

41. Дан ромб $ABCD$. O — точка пересечения его диагоналей.

1) На какие точки отобразятся вершины ромба при:

а) симметрии относительно прямой AC;

б) симметрии относительно прямой BD;

в) симметрии относительно точки O?

2) Найдите образ треугольника ABO при:

а) симметрии относительно прямой AC;

б) симметрии относительно прямой BD;

в) симметрии относительно точки O.

42. Приведите пример, опровергающий высказывания:

а) если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник — ромб;

б) если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и конгруэнтны, то такой четырехугольник — ромб.

43. Какое условие должно быть добавлено к условию а) задачи 42, чтобы четырехугольник был ромбом?

44. Какое условие должно быть добавлено к условию б) задачи 42, чтобы четырехугольник был ромбом?

45. Через три данные точки проведите параллельные прямые так, чтобы две из них были одинаково удалены от третьей. Как должны быть расположены эти точки, чтобы задача имела решение? Сколько различных решений может иметь задача?

46. В параллелограмме $ABCD$ $|AD| > |AB|$, биссектрисы углов A и B пересекают стороны параллелограмма BC и AD соответственно в точках K и L. Докажите, что четырехугольник $ABKL$ ромб.

47. Через точку пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами ромба являются вершинами прямоугольника.

48. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся как 4 : 5. Вычислите углы ромба.

49. Вычислите углы ромба, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону на конгруэнтные отрезки.

50*. Периметр ромба равен 16 см, высота 2 см. Вычислите углы ромба.

51. Докажите, что перпендикуляры, проведенные через середины сторон ромба к этим сторонам, пересекаются в одной точке или образуют ромб. Каково взаимное расположение осей симметрии этих ромбов?

Квадрат

52. Диагональ квадрата со стороной 2 см служит стороной другого квадрата. Вычислите диагонали второго квадрата.

53. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного этими прямыми.

54. Вершины четырехугольника $KLMN$ — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

В каком случае четырехугольник $KLMN$ будет:

а) прямоугольником;

б) ромбом;

в) квадратом?

55. а) Какие перемещения отображают сторону AB квадрата $ABCD$ на сторону BC (рис. 22)?

б) Какие перемещения отображают треугольник 1 на треугольник 2 (рис. 22), если $ABCD$ — квадрат?

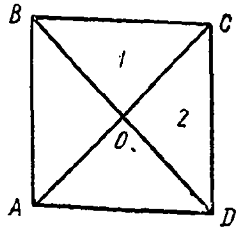


Рис. 22

56. Дан квадрат $ABCD$ (рис. 23). $(AC) \cap (BD) = O$, $a \cap b = O$, $a \perp b$. Укажите образ треугольника ABC при

а) симметрии относительно прямой a;

б) симметрии относительно прямой b;

в) симметрии относительно точки O.

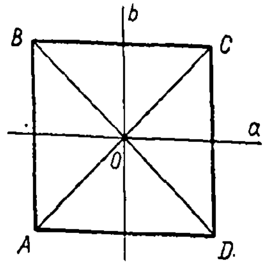


Рис. 23

57. 1) Лист бумаги сложен вчетверо, как это показано на рисунке 24, и разрезан по линии AB. Определите, не разворачивая лист бумаги, какая фигура отрезана от листа. Как должна проходить линия разреза, чтобы от листа бумаги был отрезан квадрат?

2) Лист бумаги сложен так, как это показано на рисунке 25, и разрезан по линии AB. Какая фигура отрезана от листа бумаги? Может ли эта фигура быть: а) равнобедренным треугольником; б) правильным треугольником?

3) Ответьте на вопросы предыдущей задачи для случая, когда лист согнут так, как показано на рисунке 26.

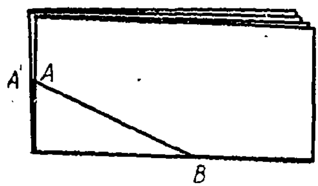


Рис. 24

58. Дан квадрат $ABCD$. $K \in [AB]$, $|AK| = |KB|$. Докажите, что точки D, K и C — вершины равнобедренного треугольника.

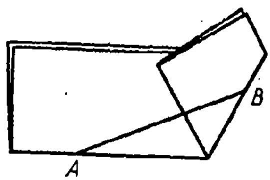


Рис. 25

59. а) Дан квадрат $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD, AD (соответственно). Докажите, что $\widehat{KLM} = \widehat{MNK} = 90°$.

б) Дан квадрат $ABCD$. Точки K и M делят его стороны AB и CD так, что $|AK| : |KB| = |CM| : |MD|$. Докажите, что $\widehat{DKC} = \widehat{BMA}$.

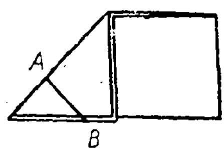


Рис. 26

60. Через центр симметрии квадрата $ABCD$ проведена прямая l, пересе-

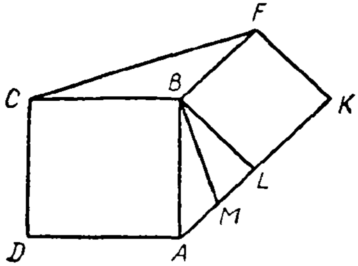


Рис. 27

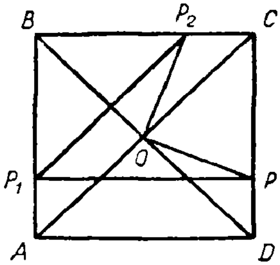


Рис. 28

кающая сторону AB. $A \notin l$, $B \notin l$. Докажите, что сумма расстояний вершин B и C квадрата до прямой равна сумме расстояний вершин A и D до этой прямой.

61. На сторонах квадрата вне его построены квадраты. Докажите, что их центры симметрии являются вершинами квадрата.

62. Около прямоугольника $ABCD$ описан четырехугольник $KLMN$ так, что стороны этого четырехугольника проходят через вершины A, B, C и D прямоугольника, а вершины K, L, M и N лежат на осях симметрии прямоугольника. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — ромб.

В каком случае четырехугольник $KLMN$ квадрат?

63. Квадраты $ABCD$ и $LBFK$ имеют общую вершину B (рис. 27). Докажите, что медиана BM треугольника ABL перпендикулярна отрезку CF.

64. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} = 15°$. Докажите, что треугольник BCM равносторонний.

65. На рисунке 28 $ABCD$ — квадрат, $P \in [CD]$, $[PP_1] \parallel [CB]$, $P_1 \in [AB]$, $[P_1P_2] \in [AC]$, $P_2 \in [BC]$, $O = [AC] \cap [BD]$. Докажите, что $\widehat{P_2OP} = 90°$.

66. Прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см разрежьте на два конгруэнтных многоугольника так, чтобы из них можно было составить квадрат.

Трапеция

67. 1) Могут ли величины углов трапеции, взятые в последовательном порядке, относиться как числа: а) 6, 3, 4, 2; б) 8, 7, 13, 12?

2) Углы при одном основании трапеции равны 68 и 74°. Вычислите остальные углы трапеции.

68. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна стороне AB; $\widehat{BAD} = 40°$. Вычислите остальные углы трапеции, если меньшее основание трапеции конгруэнтно другой боковой стороне.

69. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 4 см. Через вершину B проведена прямая, параллельная стороне CD. Периметр образовавшегося треугольника равен 12 см. Вычислите периметр трапеции.

70. В равнобедренной трапеции один из углов равен 60°, боковая сторона равна 24 см, а сумма оснований равна 44 см. Вычислите длины оснований трапеции.

71. Вычислите периметр равнобедренной трапеции, если известно, что один из ее углов равен 60°, а основания равны 15 и 49 см.

72. Докажите, что трапеция, у которой диагонали конгруэнтны, равнобедренная.

73. В трапеции боковые стороны равны меньшему основанию, диагональ составляет с основанием угол 30°. Вычислите углы трапеции.

74. Концы отрезка, расположенного по одну сторону прямой, удалены от нее на 8 и 15 см. На каком расстоянии от прямой находится середина этого отрезка?

75. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 132 см, а основания относятся как 2 : 5. Вычислите длину средней линии трапеции.

76. В прямоугольной трапеции один из углов равен 135°, средняя линия равна 18 см, а основания относятся как 1 : 8. Вычислите меньшую боковую сторону трапеции.

77. Основания трапеции равны a и b, сумма углов при основании a равна 90°. Вычислите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

78. Дана трапеция $ABCD$ (рис. 29). $[AB] \parallel [CD]$, точка K — точка пересечения биссектрис внешних углов A и D трапеции, точка L — точка пересечения биссектрис внешних углов B и C трапеции. Вычислите периметр трапеции $ABCD$, если $|KL| = 25$ см.

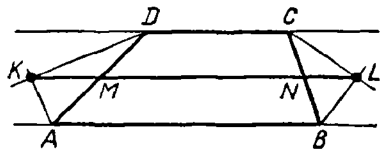


Рис. 29

79. Если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором ее основании, то длина второго основания равна сумме длин боковых сторон трапеции. Докажите.

80. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности длин ее оснований.

81. По одну сторону отрезка AB длины a построены два квадрата $AMNP$ и $MBKL, M \in [AB]$ (рис.30). Какой фигурой является множество середин (точка D) всех отрезков, соединяющих центры квадратов $AMNP$ и $MBKL$?

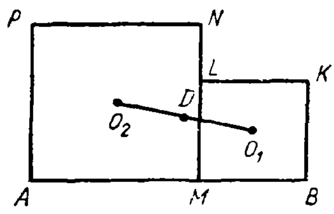


Рис. 30

Разные задачи

82. Истинно или ложно высказывание:

а) прямоугольник является трапецией;

б) квадрат является параллелограммом;

в) ромб является квадратом;

г) прямоугольник является квадратом;

д) квадрат является прямоугольником;

е) квадрат является ромбом;

ж) диагонали ромба делятся в точке пересечения пополам;

з) диагонали прямоугольника взаимно перпендикулярны;

и) в треугольнике ABC $|AC| = |BC|$, K, L, M — середины сторон AB, BC, CA соответственно, следовательно, четырехугольник $KLCM$ — ромб.

83. Пусть $П$ — множество прямоугольников, P — множество ромбов, T — множество трапеций, K — множество квадратов, E — множество четырехугольников.

Какие из следующих высказываний истинны:

а) $T \subset П$; б) $K = П \cap P$; в) $П \subset P \cap T$; г) $K \subset P$; д) $T \subset E$?

84. Каких данных достаточно для того, чтобы по ним можно было построить единственный: а) параллелограмм; б) ромб; в) прямоугольник; г) квадрат?

Для каждого задания приведите 2 примера.

85. Какому условию удовлетворяет n — число сторон выпуклого многоугольника, если:

а) многоугольник имеет центр симметрии;

б) многоугольник имеет ось симметрии;

в) все его углы прямые;

г) все его углы тупые;

д) все его углы острые;

е) сумма всех его внутренних углов в два раза меньше суммы внешних?

86. Даны три точки A, B и C. Постройте четвертую точку D такую, чтобы фигура, образованная этими четырьмя точками, имела: а) центр симметрии; б) ось симметрии.

87. Произвольный треугольник разбейте на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник.

88. Внутри данного четырехугольника найдите точку, сумма расстояний которой от всех вершин четырехугольника была бы наименьшей.

§ 4. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Площадь прямоугольника

1. Вычислите площадь прямоугольника, если две его стороны равны: а) 30 и 2,9 см; б) 34 см и 0,6 дм; в) 4 м и 1 м 4 дм.

2. Вычислите неизвестную сторону прямоугольника, если его

площадь и одна из сторон соответственно равны: а) 270 см^2 и 15 см; б) 142 м^2 и 35 м 50 см; в) 16 км^2 и 4000 м; г) 0,096 км^2 и 300 м.

3. 1) Площадь земельного участка равна 250 *а*. Чему равна площадь этого участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах; в) в гектарах?

2) Площадь земельного участка равна 24 га. Чему равна площадь этого участка: а) в квадратных километрах; б) в квадратных метрах; в) в арах?

3) Площадь земельного участка равна 350 000 м^2. Выразите эту площадь: а) в квадратных километрах; б) в арах; в) в гектарах.

4. Участок прямоугольной формы имеет площадь 400 га. Вычислите периметр этого участка, если:

а) длина участка равна 10 км;

б) участок имеет форму квадрата.

5. Как изменится площадь прямоугольника, если:

а) не изменяя его высоты, увеличить в три раза его основание;

б) не изменяя его основания, уменьшить в два раза его высоту;

в) его высоту и основание увеличить в четыре раза;

г) его основание увеличить в четыре раза, а высоту уменьшить в три раза;

д) его основание увеличить в три раза, а высоту увеличить в два раза?

6. а) Вычислите стороны прямоугольника, если они относятся как 4 : 9, а площадь его равна 36 м^2.

б) Вычислите периметр прямоугольника, если его площадь равна 144 см^2, а отношение смежных сторон равно 1 : 2.

7. а) На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если каждую его сторону увеличить на 10%?

б) На сколько процентов уменьшится площадь прямоугольника, если каждую сторону уменьшить на 10%?

8. Площадь прямоугольника равна 48 см^2, одна из его сторон равна 8 см. Прямая, параллельная одной из сторон прямоугольника, разбивает его на два конгруэнтных прямоугольника. Вычислите периметры образовавшихся прямоугольников.

9. Основание и высота одного из двух прямоугольников соответственно равны 20 и 60 см, площадь второго прямоугольника равна половине площади первого, и одна из его сторон равна 50 см. Вычислите периметр второго прямоугольника.

10. Вычислите площади фигур, данных на рисунке 31, разбив их на прямоугольники и проведя все необходимые измерения. (Все углы фигур или 90° или 270°.)

11. Запишите формулы, по кото-

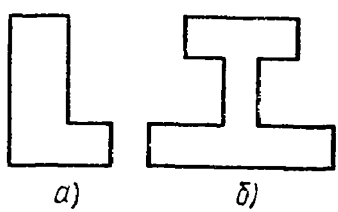


Рис. 31

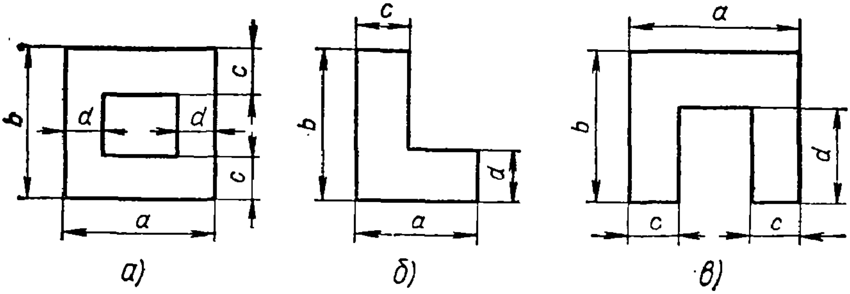


Рис. 32

рым, зная a, b, c и d, можно вычислить площади фигур, данных на рисунке 32. (Все углы фигур или 90° или 270°.)

12. Площади фигур на рисунке 33 (размеры даны в миллиметрах) равны: а) 550 мм^2, б) 1300 мм^2. Вычислите x, если все углы фигур или 90° или 270°.

Площадь квадрата

13. Вычислите площади квадратов, данных на рисунке 34, предварительно измерив длины их сторон.

14. 1) Вычислите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 2,5 см; б) 0,21 м.

2) Вычислите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 256 см^2; б) 76,8 м^2; в) 14,6 мм^2.

3) Вычислите периметр квадрата, площадь которого равна 2,5 м^2.

15. а) Два квадрата со стороной в 1 м расположены так, что вершина каждого квадрата находится в центре другого. Вычислите площадь фигуры, являющейся пересечением этих квадратов.

б) Два квадрата со стороной в 1 м расположены так, что вершина одного из квадратов находится в центре другого. Вычислите площадь фигуры, являющейся пересечением этих квадратов.

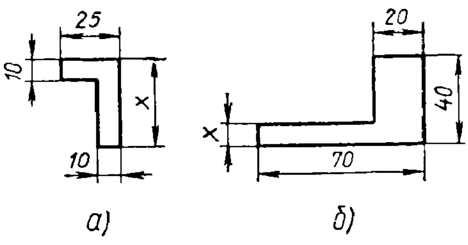


Рис. 33

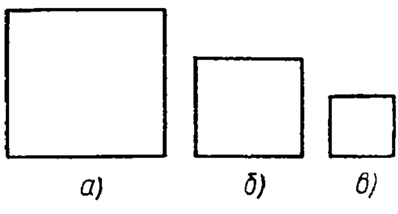


Рис. 34

Площадь параллелограмма

16. На рисунке 35 укажите равновеликие параллелограммы.

17. а) Вычислите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 и 6 см, а угол между ними равен 30°.

б) Вычислите площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а один из углов равен 150°.

18. а) Параллелограмм (не прямоугольник) и прямоугольник имеют соответственно конгруэнтные стороны. Вычислите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

б) Начертите прямоугольник и параллелограмм (не прямоугольник) с соответственно конгруэнтными сторонами. Какая из фигур имеет большую площадь?

19. Постройте прямоугольник $ABCD$ со сторонами $|AB| = 5$ см и $|BC| = 3$ см и равновеликий ему параллелограмм $ABEF$ со стороной $|BE| = 5$ см.

20. а) Площадь параллелограмма равна 24 см². Вычислите расстояние между его сторонами, равными 6 см.

б) В параллелограмме, площадь которого равна 41 см², стороны равны 5 и 10 см. Вычислите высоты параллелограмма.

в) Две полосы шириной 4 и 1 см, пересекаясь, образуют параллелограмм, площадь которого равна 6 см². Вычислите стороны этого параллелограмма.

21. а) Стороны параллелограмма 6 и 4 см. Одна из высот 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет задача?

б) Стороны параллелограмма 6 и 8 см. Одна из высот 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет задача?

22. Постройте параллелограмм, площадь которого 10 см², а стороны 5 и 3 см.

23. Дан параллелограмм $ABCD$. $|AB| = 12$ см, $|AC| = 16$ см. Вершина D удалена от диагонали AC на 4 см. Вычислите расстояние от точки D до прямой AB.

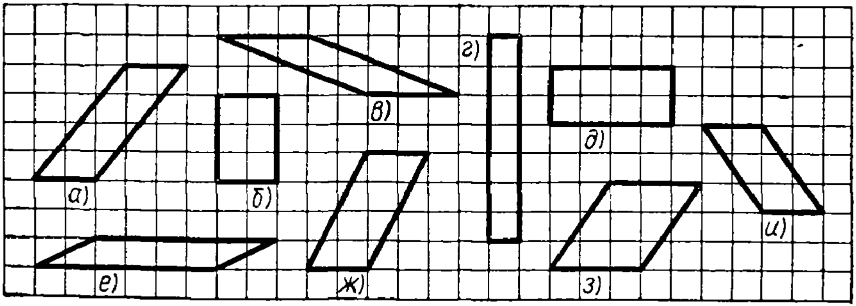


Рис. 35

Площадь треугольника

24. На рисунке 36 укажите равновеликие треугольники.

25. Две стороны треугольника равны 5 и 6 см. Может ли его площадь быть равна: а) 10 $см^2$; б) 15 $см^2$; в) 20 $см^2$?

26. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 и 7 см; б) 1,2 и 35 дм.

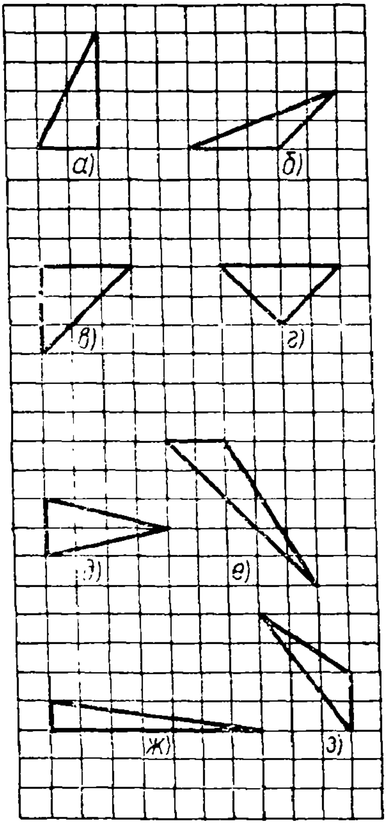


Рис. 36

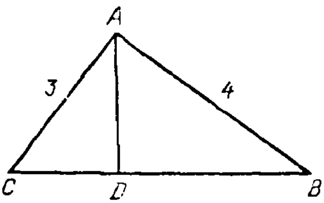


Рис. 37

27. Дан треугольник ABC (рис. 37). $\widehat{A} = 90°$, $[AD] \perp [CD]$. Найдите:

а) площадь треугольника ABC;

б) отношение площадей треугольников ABD и ACD;

в) длину отрезка AD.

28. Площадь треугольника 48 $см^2$. Вычислите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 32 см.

29. Дан треугольник ABC. $|AB| = 3|AC|$. Чему равно отношение высот, проведенных из вершин B и C?

30. а) Катеты прямоугольного треугольника 6 и 8 см, гипотенуза 10 см. Вычислите высоту, проведенную к гипотенузе.

б) Основание одного треугольника 10 см, его высота 4 см. Основание другого треугольника 20 см. Какова должна быть его высота, проведенная к этой стороне, чтобы треугольники были равновелики?

в) Стороны прямоугольника 5 и 6 см. Постройте равновеликий ему треугольник с основанием 7,5 см. Сколько решений имеет задача?

31. В треугольнике высоты, проведенные к сторонам a и b, равны h_a и h_b.

а) Докажите, что $a : b = h_b : h_a$.

б) Докажите, что если в треугольнике $a < b$, то $h_b < h_a$.

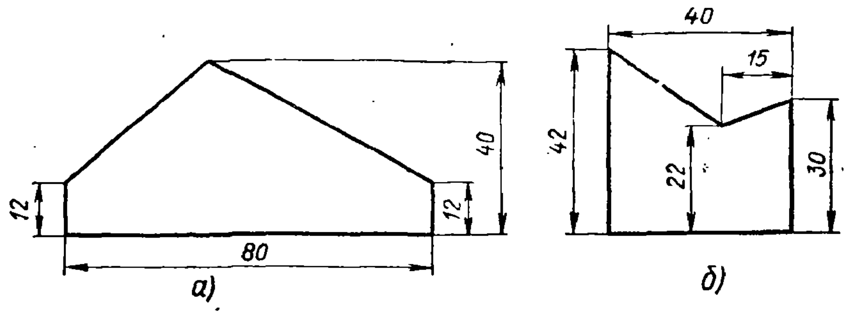


Рис. 38

32. 1) Докажите, что во всяком треугольнике высоты обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

2) Существует ли треугольник, высоты которого равны: а) 5 см, 4 см, 3 см; б) 1 см, 1 см, 3 см; в) 5, 10, 12?

33. 1) Вычислите площади фигур, изображенных на рисунке 38.

2) Напишите формулы для вычисления площадей фигур, изображенных на рисунке 39.

3) Площадь фигуры, изображенной на рисунке 40, равна 805 мм². Вычислите неизвестный размер x.

34*. Вычислите диагональ и площадь прямоугольника, периметр которого равен 14 см, если его вершина удалена от диагонали, не проходящей через эту вершину, на 2,4 см.

35. Дана трапеция $ABCD$. $[AB] \parallel [CD]$. O — точка пересечения диагоналей. Укажите все пары равновеликих треугольников.

36. В параллелограмме $ABCD$ вершина A соединена отрезками с серединами сторон BC и CD и вершиной C (рис. 41). Докажите, что треугольники 1, 2, 3, 4 равновелики.

37. В параллелограмме $ABCD$ $K \in [BC]$, $L \in [BC]$, $|BK| = |KL| = |LC|$. Найдите отношение площадей:

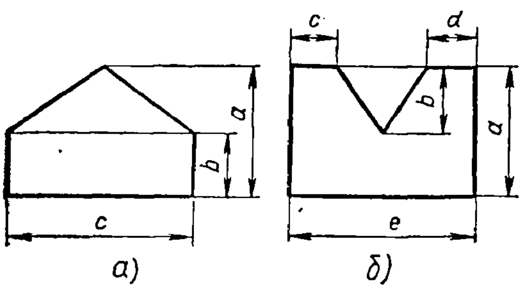


Рис. 39

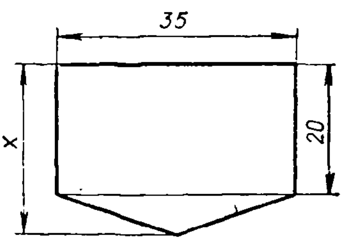


Рис. 40

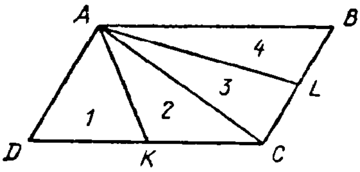


Рис 41

а) треугольников DLK и DLC;
б) треугольников DAC и DCK;
в) треугольника DAC и четырехугольника $ADLB$;
г) треугольника DCL и четырехугольника $ADKB$;
д) четырехугольников $ABKD$ и $ABLD$.

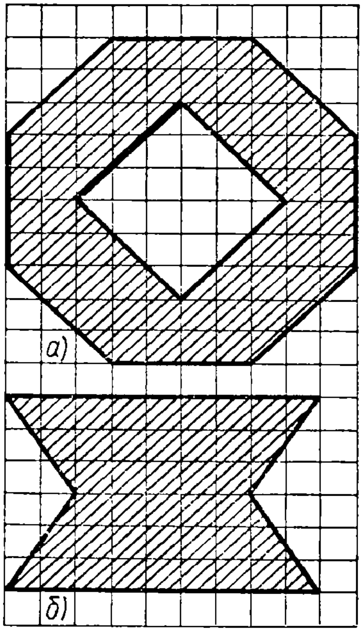


Рис. 42

38. Через вершину треугольника проведите прямую, разбивающую его: а) на два равновеликих треугольника; б) на два треугольника, площади которых относятся как $2:3$.

39. Через вершину треугольника проведите две прямые, разбивающие его на три равновеликих треугольника.

40. Некоторая точка O плоскости соединена с вершинами параллелограмма $ABCD$. а) Докажите, что если точка O находится внутри параллелограмма, то сумма площадей треугольников ABO и CDO равна сумме площадей треугольников BCO и DAO. б) Сохранится ли это равенство, если точка O находится на стороне параллелограмма? в) Сохранится ли это равенство, если точка O находится в вершине параллелограмма?

41. Даны точки A, B, C и D такие, что $|AD| = |BC|$, $|BD| = |AC|$, $ABCD$ — выпуклый многоугольник. Докажите, что: а) $\angle BAD \cong \angle ABC$; б) $S_{ACD} = S_{BDC}$.

42. Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника было равно одной из сторон данного треугольника.

43. Постройте треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника совпадало с одной из сторон данного треугольника, а один из углов при основании был равен 45°.

44. Укажите наиболее рациональный способ вычисления площадей фигур, изображенных на рисунке 42.

45. Через центр симметрии квадрата $ABCD$ со стороной a проведена прямая l, пересекающая сторону AB. $A \notin l$, $B \notin l$.

Выразите сумму расстояний вершин квадрата до прямой l через a и длину b отрезка прямой l, заключенного внутри квадрата.

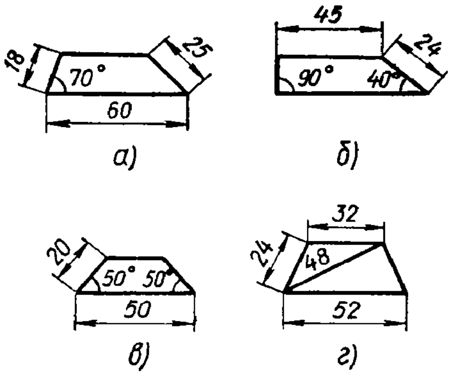


Рис. 43

Площадь трапеции

46. По данным на рисунке 43 размерам постройте трапеции и найдите их площади, проведя необходимые измерения.

47. По размерам, проставленным на рисунке 44, вычислите площади трапеций.

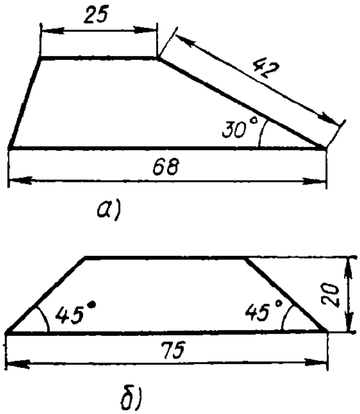


Рис. 44

48. Площади многоугольников (рис. 45) равны: а) 12 110 мм^2; б) 3375 мм^2. Вычислите размер x.

49. Середины оснований трапеции соединены отрезком. Докажите, что полученные две трапеции равновелики.

50. Дана трапеция $ABCD$. $[AB] \parallel [CD]$, $M \in [AB]$, $|AM| = |MB|$, $P \in [MD]$, $[DP] = [PM]$, $Q \in [MC]$, $[CQ] = [MQ]$. Докажите, что треугольники APD и BQC равновелики.

51. Дан треугольник ABC. $|AB| = |AC| = |BC|\sqrt{5} = a$. Выразите через a площадь треугольника ABC.

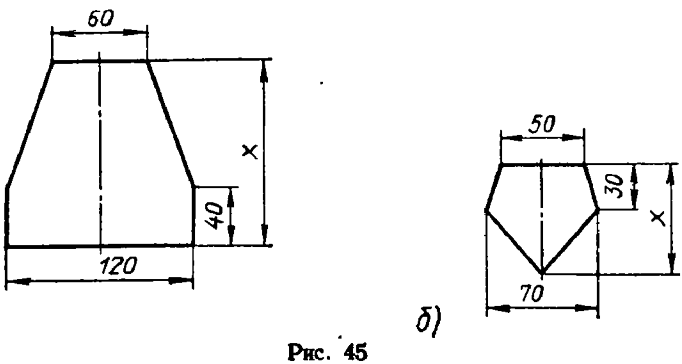


Рис. 45

52. Вычислите площадь треугольника, две медианы которого взаимно перпендикулярны и равны m_a и m_b.

53. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$) дана точка M. Найдите множество точек M, для которых площади треугольников AMB и BMC равны.

54. Диагонали ромба относятся как 4 : 3. Вычислите высоту ромба, если площадь его равна 600 см^2.

55. Начертите треугольник и вычислите его площадь, зная координаты его вершин:

а) A (—1; 2), B (2; —3), C (6; —3);
б) D (8; 2), E (3; 4), F (3; 6);
в) K (2; 4), L (6; 4), M (3; 10);
г) N (—3; —2), P (—3; —6), Q (—5; —10).

56. Вычислите площадь трапеции $CDEF$, если $[CD] \parallel [EF]$, $\hat{F} = 45°$, $|FE| = 2\,|CD| = 5\,|CF| = 5$ см.

57. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую длину может иметь большая диагональ этой трапеции?

58. Вычислите площадь трапеции с основанием 1 см, боковой стороной 3 см, составляющей с большим основанием угол 30°, если другой угол при большем основании равен 45°.

59. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне BC, $|AC| = 4\,a$, $|AD| = 3\,a$. Выразите площадь трапеции через a.

Разные задачи

60. Середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника последовательно соединены. Докажите, что площадь полученного четырехугольника равна половине площади данного четырехугольника.

61. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны 3 и 4 см, одна из его диагоналей — 5 см. Вычислите площадь этого четырехугольника.

62. Через каждую вершину произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям, не проходящим через эту вершину. Покажите, что площадь полученного таким образом параллелограмма в два раза больше площади данного четырехугольника.

63. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если его диагонали взаимно перпендикулярны и равны 4,5 и 6,5 см.

64. В четырехугольнике $KLMN$ диагональ KM делит диагональ NL на два конгруэнтных отрезка. Докажите, что $S_{KLM} = S_{KNM}$.

65. 1) Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника с общей вершиной в точке пересечения диагоналей. Пло-

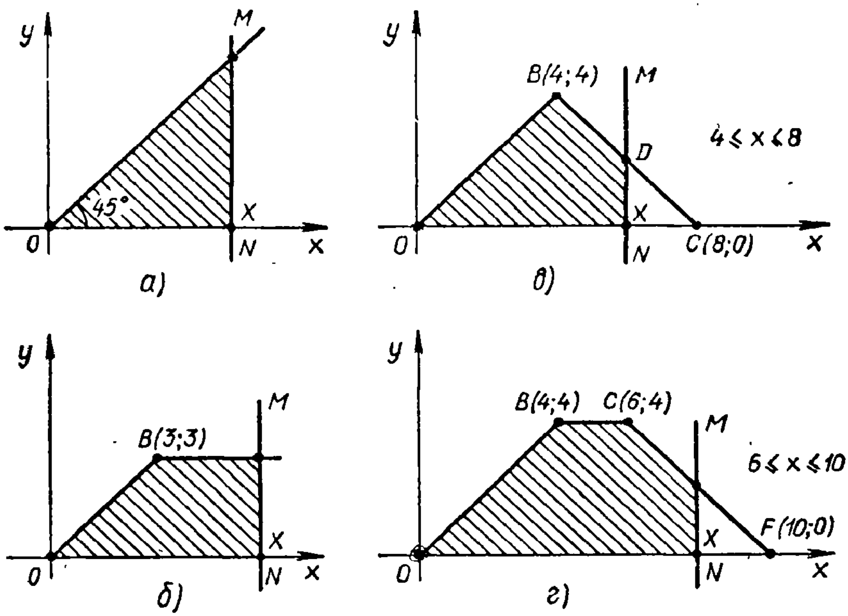


Рис. 46

щади трех из этих треугольников равны 1 см², 2 см² и 3 см². Какова площадь четвертого треугольника?

2) Диагонали четырехугольника площадью 45 ед² делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 3 и 4 : 5. Вычислите площадь каждого из четырех треугольников, на которые эти диагонали разбивают данный четырехугольник.

66. Выразите площадь заштрихованного многоугольника через длину x отрезка OX, если прямая MN перпендикулярна оси Ox (рис. 46).

67*. Все внутренние углы шестиугольника $ABCDEF$ конгруэнтны. $|AB| = |CD| = |EF| = 4a, |BC| = |DE| = |FA| = 3a$. Вычислите его площадь.

68*. Вычислите площадь многоугольника $ABCDEFG$, в котором $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = 1$ и $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE} = \widehat{AEF} = \widehat{AFG} = 90°$. Какую закономерность вы заметили при вычислении длин диагоналей AC, AD, AE, AF и стороны AG этого многоугольника?

69*. Отрезок AB точками C и D разбит на три конгруэнтных отрезка, $|AC| = |CD| = |DB|$. На этих отрезках как на сторонах по одну сторону отрезка AB построены равносторонний треугольник ACE, квадрат $CDGF$ и прямоугольный треугольник DBH ($\widehat{B} = 90°$), в котором $|BH| = 0,5\,|DB|$. Точки E и F и точки G и H

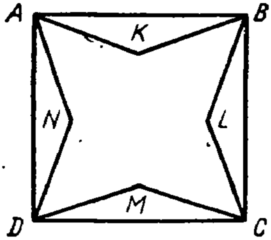


Рис. 47

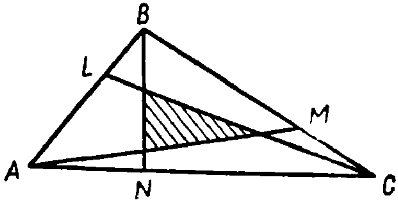


Рис. 48

соединены отрезками. Вычислите площадь многоугольника $AEFGHB$, если $|AB| = 3b$.

70. Дана трапеция $ABCD$. $[AD] \parallel [CB]$. Через точку K — середину стороны DC — проведен отрезок KL ($[KL] \parallel [AB]$, $L \in [AD]$). Докажите, что $S_{BLDC} = S_{ABL} = 0{,}5\ S_{ABCD}$.

71. $ABCD$ — квадрат со стороной a. Вычислите площадь звезды $AKBLCMDN$, если все ее стороны конгруэнтны, а точки K, L, M, N удалены от сторон AB, BC, CD и AD соответственно на расстояние b (рис. 47).

72*. Каждая сторона треугольника разделена на три конгруэнтных отрезка, и точки деления соединены так, как указано на рисунке 48. Найдите отношение площадей данного треугольника и заштрихованного.

73. Середины сторон BC и AD (точки M и N) четырехугольника $ABCD$ соединены с его вершинами, как указано на рисунке 49. Докажите, что $S_{AMD} = S_{ABN} + S_{NCD}$.

74. Через точку, взятую на стороне треугольника, проведите прямую, делящую треугольник на две равновеликие фигуры.

75. Внутри выпуклого четырехугольника, площадь которого равна S, дана точка A. Определите вид и вычислите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки, симметричные точке A относительно середин сторон данного четырехугольника.

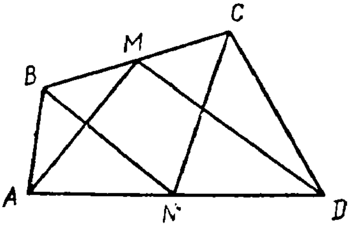


Рис. 49

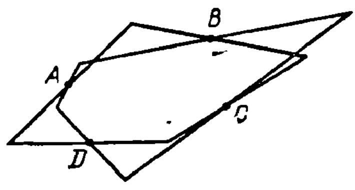


Рис. 50

76. Несколько выпуклых четырехугольников имеют общие середины сторон (рис. 50). Докажите, что эти четырехугольники равновелики.

77. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равен средней линии трапеции.

78. Вычислите площади следующих многоугольников, зная координаты их вершин:

а) треугольника KLM, если K (0; 0), L (4; 4), M (6; 0);

б) квадрата $ABCD$, если A (0; 0), B (3; 4);

в) квадрата $PQRT$, если Q (0; 0), R (4; 3);

г) четырехугольника $ABCD$, если A (0; 4), B (4; 4), C (6; 0), D (0; 0);

д) пятиугольника $ABCDE$, если A (0; 5), B (3; 6), C (5; 5), D (5; 2), E (3; 0).

Указание. Сначала постройте каждую из фигур.

Глава III ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Окружность, хорда, касательная

1. Проведите окружность через точки: а) A (0; 0), B (2; 4), C (—3; 6); б) M (5; 5), N (—2; 2), P (1; 2).

2. Проведите окружность радиусом 4 см через точки: а) A (0; 0) и B (5; 5); б) M (2; 5) и N (—3; 2).

3. Проведите прямую через точки A (2; 3) и B (6; —2) и постройте окружность с центром в точке O (0; 0), касающуюся этой прямой.

4. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей радиуса a, проходящих через данную точку M?

5. Дан квадрат. Постройте окружность так, чтобы стороны этого квадрата были хордами данной окружности.

6. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?

7. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей данного радиуса a, касающихся данной прямой?

8. К окружности проведена касательная. Докажите, что сумма расстояний от концов любого диаметра до этой касательной равна диаметру этой окружности.

9. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

10. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них — в данной точке.

11. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и проходящую через данную точку, не лежащую на этой прямой.

12. Докажите, что диаметр круга, вписанного в прямоугольный треугольник, равен разности суммы катетов и гипотенузы.

13. К окружности радиуса 4 см с центром в точке O проведена из точки A касательная. Вычислите площадь треугольника ABO, где B — точка касания, если $|AB| = 8$ см.

14. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах вне его построены полуокружности, к этим полуокружностям проведены касательные, параллельные катетам прямоугольного тре-

угольника и не пересекающие фигуру. Докажите, что четырехугольник, стороны которого лежат на этих касательных, — квадрат.

15. Какую фигуру образует множество всех середин отрезка данной длины, концы которого скользят по сторонам данного прямого угла?

16. Из точки A окружности проведены две взаимно перпендикулярные и конгруэнтные хорды, удаленные от центра на расстояние 4 см. Вычислите длину каждой хорды.

17. На данной прямой найдите такую точку, чтобы отрезки касательных, проведенных из нее к данной окружности, имели бы данную длину.

Центральные углы и дуги

18. Сколько дуг заданной окружности определяют: а) два луча с началом в ее центре; б) две прямые, проходящие через центр этой окружности?

19. Постройте окружность с центром в данной точке, которая делила бы данную окружность на две полуокружности.

20. Докажите, что касательная, параллельная хорде, делит в точке касания дугу, стягиваемую этой хордой, на две конгруэнтные дуги.

21. Докажите, что параллельные хорды, проведенные через концы диаметра окружности, конгруэнтны.

22. Из точки, данной на стороне угла, как из центра опишите окружность, которая от другой стороны угла отсечет хорду данной длины.

23. В окружности проведены две конгруэнтные хорды AB и CD. Докажите, что либо $\smile{BC} = \smile{AD}$, либо $\smile{BD} = \smile{AC}$.

24. Хорда AB окружности с центром O разделена точками C и D на три конгруэнтных отрезка, и точки A, B, C и D соединены с точкой O. Докажите, что лучи OC и OD не разделят угол AOB на конгруэнтные углы.

25. Дана окружность (O, r). Через точку A, $|OA| < r$ проведите хорду так, чтобы разность отрезков, на которые эта хорда делится точкой A, была бы равна данному отрезку d.

26. Даны две концентрические окружности c и c_1 радиусов a и $2a$ соответственно, центр их — точка O. Точка P лежит между этими окружностями. Из точки P как из центра радиусом OP проведена окружность, пересекающая окружность c_1 в точке M. Докажите, что перпендикуляр, проведенный через точку P к прямой OM, касается окружности c.

27. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций конгруэнтны.

28. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей, каждая из которых отсекает на сторонах данного угла конгруэнтные отрезки?

Расстояние от центра до хорды

29. Хорда, равна 8 см, отсекает от окружности дугу в 90°. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

30. В окружности проведены две параллельные хорды, отсекающие от нее дуги в 90°. Вычислите расстояние между хордами, если длина одной из хорд равна 12 см.

31. Хорда окружности, перпендикулярная другой хорде той же окружности и проходящая через ее середину, является диаметром окружности. Докажите.

32. Дана окружность. Через середину ее радиуса проведена перпендикулярная ему хорда. Докажите, что эта хорда видна из центра окружности под углом 120°.

Глава IV ВЕКТОРЫ

Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и A_1BC_1D. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}$.

2. Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right),$$

где O — любая точка плоскости.

3. Даны два треугольника ABC и AB_1C_1, имеющие общую медиану AA_1. Докажите, что $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1B}$.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — его центр симметрии. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

5. Даны треугольник ABC и точка M. Докажите, что если M — точка пересечения медиан, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

7. Дан треугольник ABC. От произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ такие, что $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{AB}$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой O.

8. Дан треугольник ABC. G — точка пересечения его медиан. Докажите, что для любой точки M имеет место соотношение

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).$$

9. Даны три точки A, B и C такие, что $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$. Докажите, что для любой точки O имеет место равенство:

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Выразите вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, а вектор $\overrightarrow{OC}$ — через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

10. Симметрия с центром S отображает точку A на точку B. Докажите, что $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$, где O — произвольная точка плоскости.

11. M и M_1 — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$.

12. Даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины пар отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, имеют общую середину.

13. Дана окружность с центром O. Проведены две перпендикулярные хорды AB и CD. Хорды или их продолжения пересекаются в точке M. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

14. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка O — его центр. Докажите, что $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$, где P — любая точка плоскости.

15. Даны три точки A, B и C такие, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Докажите, что для любой точки O имеет место равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

16. На прямой даны три различные точки A, B и C. Докажите, что существует значение k, для которого

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB},$$

где O — произвольная точка плоскости.

Докажите обратное утверждение: если выполняется для трех различных точек указанное выше равенство, то точки A, B и C принадлежат одной прямой.

17. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что

$$\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}.$$

Вычислите сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

18. Через середину M медианы CC_1 треугольника ABC проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке P. Докажите, что $|\overrightarrow{CP}| : |\overrightarrow{PB}| = 1 : 2$.

19. На прямой p_1 даны три точки A_1, B_1 и C_1, а на прямой p_2 — три точки A_2, B_2 и C_2, причем $\overrightarrow{A_1B_1} = m\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = m\overrightarrow{B_2C_2}$. Отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 разделены точками A_0, B_0 и C_0 в равных отношениях. Докажите, что эти точки принадлежат одной прямой или совпадают.

Коллинеарность векторов

20. Дана окружность с центром O. Проведены две конгруэнтные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ коллинеарна вектору $\overrightarrow{OM}$.

21. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажите, что векторное равенство $k\vec{a} + l\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b}$ влечет за собой два равенства: $k = p$, $l = q$.

22. От точки O отложены три попарно неколлинеарных вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Докажите, что если вектор $\overrightarrow{OC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и вектор $\overrightarrow{OB}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$, то вектор $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

23. От точки O отложены четыре попарно неколлинеарных вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$. Докажите, что если вектор $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ и вектор $\overrightarrow{OC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, то вектор $\overrightarrow{OD}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

24. Дана трапеция $ABCD$. Прямая, параллельная ее основаниям AB и CD, пересекает боковые стороны AD и BC соответственно в точках M и N. Докажите, что если $(AN) \parallel (CM)$, то $(DN) \parallel (BM)$.

25. Дана трапеция $ABCD$, у которой AB и CD — основания, а точки M и N — середины ее боковых сторон AD и BC. Докажите, что $(AN) \nparallel (CM)$.

Длина вектора. Угол между направлениями двух векторов

26. Даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равной длины. Докажите, что направления векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

27. Дана окружность с центром O. Проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что середины хорд AC и BD, точка M и центр O данной окружности являются вершинами параллелограмма.

28. Проведены четыре радиуса OA, OB; OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то $ABCD$ — прямоугольник.

29. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Докажите, что $|CC_1| < \frac{1}{2}(|CA| + |CB|)$.

30. Дан треугольник ABC. Докажите, что

$$|OM| < \frac{1}{3}\left(|OA| + |OB| + |OC|\right),$$

где M — точка пересечения медиан треугольника, O — произвольная точка плоскости.

31. Даны два перпендикулярных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажите, что $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Сформулируйте и докажите обратную теорему.

32. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажите, что если $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

33. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следует ли из равенства $|\vec{a} + k\vec{b}| = |\vec{b} + k\vec{a}|$, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?

34*. Два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A. Докажите, что $|CC_1| \leqslant |BB_1| + |DD_1|$.

35*. Через точку пересечения O диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($[AB] \parallel [CD]$) проведена прямая, параллельная основаниям, пересекающая боковые стороны AD и BC в точках M и N. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{DC}}{a + b},$$

где $a = |AB|$, $b = |CD|$.

36*. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1. Докажите, что

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a + b}, \text{ где } a = |CB|,\ b = |CA|.$$

37*. Даны два перпендикулярных вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Из точки O к отрезку AB проведен перпендикуляр OC. Докажите, что

$$\overrightarrow{OC} = \frac{a^2\overrightarrow{OB} + b^2\overrightarrow{OA}}{a^2 + b^2},$$

где $a = |\overrightarrow{OA}|$, $b = |\overrightarrow{OB}|$.

38*. В окружность с центром O вписан треугольник ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где H — точка пересечения высот треугольника.

39. На окружности с центром O даны точки A и B. Касательные к окружности в этих точках пересекаются в точке C. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если:

$$1)\ \widehat{AOB} = 60^\circ;\quad 2)\ \widehat{AOB} = 90^\circ;\quad 3)\ \widehat{AOB} = 120^\circ.$$

40. Дана окружность с центром O. A и B — точки этой окружности. Биссектриса угла AOB пересекает окружность в точке C. Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если:

$$1)\ \widehat{AOB} = 60^\circ;\quad 2)\ \widehat{AOB} = 90^\circ;\quad 3)\ \widehat{AOB} = 120^\circ.$$

Разные задачи

41. Даны отрезок AB и точка O, не принадлежащая прямой AB. Найдите множество точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB},\quad \alpha + \beta = 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

42. Найдите множество точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{a},$$

где O и A — данные точки, $\vec{a}$ — данный ненулевой вектор, причем:

1) $k \geqslant 0$; 2) $k > 0$; 3) $-1 \leqslant k \leqslant 1$; 4) $-\infty < k < +\infty$.

43. Даны две пересекающиеся в точке O прямые OA и OB. Найдите множество точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB},\quad \alpha\beta > 0.$$

44. Найдите множество точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB},$$

где $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — данные неколлинеарные векторы, O — данная точка, причем:

1) $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant 1, \\ 0 \leqslant l \leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} k \geqslant 0, \\ l \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $l \geqslant 0$; 4) $-\infty < k < +\infty$.

45. Найдите множество точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\vec{a},$$

где O и A — данные точки, a — данный вектор, причем $-1 \leqslant k \leqslant 1$, $-\infty < 1 < +\infty$.

(Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{OA}$ неколлинеарны.)

46. Даны треугольник ABC и некоторая точка O. Найдите множество всех точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

47. Даны отрезок AB и точка O, не принадлежащая прямой AB. Найдите множество точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = l\,[k\overrightarrow{OA} + (1-k)\,\overrightarrow{OB}],$$

причем $0 \leqslant k \leqslant 1$, $1 \leqslant l \leqslant 2$.

48. Даны точка A и отрезок BC, причем $A \notin (BC)$. Найдите множество всех точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD},$$

где O — данная точка, а D — любая точка отрезка BC.

49. Даны два отрезка AB и CD и точка O. Найдите множество всех точек M, для которых

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ},$$

где $P \in [AB]$, $Q \in [CD]$.

50*. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что в общем случае середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 являются вершинами параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$. Постройте два таких параллелограмма, чтобы точки A_0, B_0, C_0, D_0 совпали или принадлежали одной прямой.

51*. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки P, Q, R и S делят стороны AB, BC, CD и DA в равных отношениях. Докажите, что $PQRS$ — параллелограмм.

52*. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если медианы первого треугольника параллельны сторонам второго, то медианы второго треугольника параллельны сторонам первого.

53. Через середину M стороны AB параллелограмма $ABCD$ проведена прямая DM, пересекающая диагональ AC в точке N. Вычислите отношение $|\overrightarrow{AN}| : |\overrightarrow{NC}|$.

54*. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ заданы соответственно середины P и Q. Прямые DP и AQ пересекаются в точке S. Вычислите отношения $|\overrightarrow{DS}| : |\overrightarrow{SP}|$ и $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SQ}|$.

55*. Дана окружность с центром O. Точки A, B, C, D, E делят окружность на пять конгруэнтных частей. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$

56. Даны треугольник ABC и точка M на стороне AB. Прямая, проведенная через M параллельно медиане CC_1, пересекает (CA) в точке P, а (CB) — в точке Q. Докажите, что

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QM} = 2\overrightarrow{CC_1}.$$

57. На сторонах AB и BC треугольника ABC даны соответственно точки M и N такие, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB}$. Прямая MN пересекает прямую AC в точке D. Докажите, что

$$\overrightarrow{AD} = n\overrightarrow{AC}.$$

58. Докажите, что последовательное выполнение центральной симметрии и переноса есть центральная симметрия.

59. Докажите, что последовательное выполнение трех центральных симметрий с центрами A, B и C есть снова центральная симметрия. Постройте центр этой симметрии.

60. Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен треугольнику ABC относительно центра S. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC_1 и A_1B_1C также симметричны относительно S.

Глава V ПОДОБИЕ

§ 1. ГОМОТЕТИЯ

Основные свойства гомотетии

1. Даны два параллельных отрезка AB и A_1B_1, не лежащие на одной прямой. При каком условии существует гомотетия, отображающая точку A на точку A_1 и B — на B_1?

2. Даны два параллельных, но неконгруэнтных отрезка AB и A_1B_1. Постройте центры гомотетии, при которых первый отрезок отображается на второй при условии, что $(AB) \neq (A_1B_1)$.

3. В каких случаях гомотетия представляет собой перемещение?

4. Постройте фигуру, гомотетичную квадрату, приняв за центр гомотетии центр квадрата. Может ли при различных центрах гомотетии получиться один и тот же квадрат?

5. Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC. Докажите, что медианы, биссектрисы и высоты треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетичны соответствующим медианам, биссектрисам и высотам треугольника ABC.

6. Через точку G пересечения медиан треугольника ABC проведите прямую, параллельную одной из его сторон. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь образовавшегося треугольника?

Две и более гомотетии

7. Даны две гомотетии с коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ и различными центрами. Какое отображение представляет собой последовательное выполнение этих гомотетий?

8. Какое отображение представляет собой последовательное выполнение двух гомотетий, если их коэффициенты k и $-\frac{1}{k}$?

9. Докажите, что последовательное выполнение переноса и гомотетии есть гомотетия с тем же коэффициентом. Постройте центр этой гомотетии.

10. Даны две гомотетии с различными центрами. Какие прямые отображаются на себя при последовательном выполнении этих гомотетий?

11. Даны две гомотетии. Постройте общую пару точек этих двух гомотетий.

12. Даны две параллельные прямые a и b. Найдите множество центров гомотетий с коэффициентом $k = 3$, отображающих прямую a на прямую b.

13. Даны два угла, стороны которых — соответственно сонаправленные лучи. Найдите множество центров гомотетий, отображающих один угол на другой (углы отличны от развернутых).

14. Через точку M, принадлежащую стороне AB треугольника ABC, проведены прямые, параллельные (AC) и (BC). Образовавшиеся треугольники гомотетичны данному. Вычислите сумму коэффициентов гомотетий.

15. Через внутреннюю точку M треугольника проведены секущие, параллельные его сторонам. Каждые две секущие и сторона определяют треугольник, гомотетичный данному. Вычислите сумму коэффициентов полученных трех гомотетий.

Гомотетия окружностей

16. Сколько центров гомотетии имеют две окружности? Могут ли две окружности не иметь центра гомотетии? Постройте центр гомотетии двух окружностей, одна из которых расположена внутри другой.

17. Постройте фигуру, гомотетичную данной окружности, приняв за центр гомотетии центр окружности, а коэффициент гомотетии: 1) $k = \frac{1}{3}$; 2) $k = -\frac{1}{3}$; 3) $k = -1$; 4) $k = 2$.

18. Постройте фигуру F_1, гомотетичную окружности F, приняв за центр гомотетии точку, принадлежащую окружности.

Докажите, что F_1 есть окружность, касающаяся окружности F в центре гомотетии. Рассмотрите два случая: коэффициент гомотетии положителен и отрицателен.

19. Дана трапеция $ABCD$, основания которой AB и CD, M — точка пересечения ее диагоналей AC и BD. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABM и CDM, касаются в точке M.

20. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN (M — середина $[AC]$, N — середина $[BC]$). Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и MNC, касаются в точке C. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

21. Дана окружность. Проведены все хорды, имеющие общий конец. Найдите множество точек, делящих эти хорды в равных отношениях, считая от их общего конца.

22. Через точку, принадлежащую кругу, проведены все хорды, отрезки которых разделены в равных отношениях, считая от общей точки. Найдите множество точек деления.

23. Средние линии данного треугольника определяют другой треугольник, около которого описана окружность. Докажите, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса окружности, описанной около данного треугольника.

Приложение гомотетии к решению геометрических задач

24. Используя гомотетию, докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции принадлежат одной прямой.

25. Через точку M, принадлежащую диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены две прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что при этом образовались два параллелограмма, гомотетичные данному, причем $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$, где S_1, S_2 и S — площади образовавшихся и данного параллелограммов.

26. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке M ($[AB]$ и $[CD]$ — основания трапеции). Докажите, что площади треугольников ABM и CDM, равные соответственно S_1 и S_2, и площадь S трапеции связаны соотношением $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

27. Через внутреннюю точку M треугольника ABC проведены прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что площади треугольников S_1, S_2, S_3, отсекаемых от данного треугольника этими прямыми, и площадь данного треугольника S связаны соотношением $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = 2\sqrt{S}$.

28. Через точку G пересечения медиан треугольника ABC проведены два луча, параллельные сторонам AC и BC и пересекающие сторону AB в точках A_1 и B_1. Докажите, что площадь треугольника A_1B_1G составляет $\frac{1}{9}$ площади данного треугольника.

29. Вершины треугольников, имеющих общее основание, принадлежат некоторой прямой. Найдите множество M точек пересечения медиан этих треугольников.

30. На сторонах угла C указаны точки A и B, через которые проведены перпендикуляры к сторонам, пересекающиеся в точке P. Найдите множество M точек P, если перпендикуляры к сторонам угла проведены через точки этих сторон, являющиеся концами отрезков, параллельных $[AB]$.

31. На стороне AB треугольника ABC от его вершин отложены конгруэнтные отрезки, через концы которых проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC. Докажите, что построенные прямые пересекаются на прямой, которой принадлежит медиана CM треугольника.

Пропорциональные отрезки

32. Докажите, что медиана треугольника есть множество середин отрезков с концами на двух сторонах треугольника и параллельных третьей стороне, к которой проведена медиана.

33. Две пересекающиеся прямые a и b пересечены тремя параллельными прямыми соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3. Докажите, что середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 принадлежат одной прямой.

34. Прямая, проведенная через точку пересечения S диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ параллельно основаниям, пересекает ее боковые стороны BC и AD соответственно в точках M и N. Докажите, что $|NS| = |SM|$.

35. Докажите, что если середины M и N двух противоположных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ и точка S пересечения прямых BC и AD принадлежат одной прямой, то четырехугольник — трапеция.

36. Прямая, параллельная основаниям AB и CD трапеции $ABCD$, рассекает ее на две гомотетичные трапеции $ABMN$ и $MNDC$. Вычислите $|MN|$, если $|AB| = a$, $|CD| = b$.

37. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая l, параллельная (AB), пересекает стороны BC и DA соответственно в точках M и N.

1) Дано отношение $|AN| : |ND| = k$. Вычислите длину d отрезка NM.

2) Дана длина d отрезка MN. Вычислите отношение $|AN| : |ND|$.

38. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Прямая l, параллельная основанию AB, пересекает $[AD]$ и $[AC]$ в точках M и N, а $[BC]$ и $[BD]$ —в точках P и Q. Докажите, что $|MN| = |PQ|$.

39. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AD, AC, BC и BD соответственно в точках P, Q, R и S. Докажите, что

$$|PQ| = |RS|.$$

40. Докажите, что если прямая, проходящая через середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

41. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная одной из его сторон. Докажите, что если пересечение этой прямой и четырехугольника есть отрезок, который делится точкой O пополам, то $ABCD$ — трапеция.

42. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Докажите, что если прямая l такая, что $l \cap [AC] = P$, $l \cap [CC_1] = Q$, $l \cap [BC] = R$, $|PQ| = |QR|$, то $l \parallel (AB)$.

43. Через точку M, принадлежащую стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пере-

секающие $[AC]$ и $[AB]$ соответственно в точках P и Q. Докажите, что

$$\frac{|AP|}{|AC|} + \frac{|AQ|}{|AB|} = 1.$$

44. Дан параллелограмм $ABCD$. M — середина $[AD]$, N — середина $[CD]$. Отрезок AN пересекает отрезок CM в точке P; отрезок BM пересекает отрезок AC в точке Q. Докажите:

$$1)\ [PQ] \parallel [AD], \quad 2)\ |PQ| = \frac{1}{3}|AD|.$$

45. В данный четырехугольник $ABCD$ впишите параллелограмм $PQRS$ так, чтобы $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$, $R \in [CD]$, $S \in [DA]$ и чтобы стороны параллелограмма были параллельны диагоналям данного четырехугольника.

46. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Постройте прямую, параллельную основаниям трапеции, чтобы ее отрезок, принадлежащий трапеции, делился диагоналями на три конгруэнтные части.

47. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Постройте прямую, параллельную стороне AB параллелограмма, чтобы ее отрезок, принадлежащий параллелограмму, делился диагоналями на части, длины которых пропорциональны числам 1, 2, 1.

48. Прямые AA_1, BB_1, CC_1, проходящие через соответствующие вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, параллельны. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан данных треугольников, параллельна прямой AA_1.

49. Через точку пересечения медиан G треугольника ABC проведена прямая p так, что вершины A и B расположены по одну сторону от p, а вершина C — по другую сторону. Докажите, что сумма расстояний от вершин A и B до прямой p равна расстоянию от вершины C до прямой p.

50. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD. На стороне AD дана точка P, через которую проведена прямая l, параллельная (AB), пересекающая отрезок BD в точке R, а отрезок BC — в точке Q. Вычислите $|\overrightarrow{PR}| : |\overrightarrow{RQ}|$, если $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PD}| = k$.

51. На прямой a даны три точки P, Q и R, а на прямой a_1 — три точки P_1, Q_1 и R_1, причем $|PQ| : |QR| = |P_1Q_1| : |Q_1R_1|$. Через точки P, Q и R проведены три параллельные прямые p, q и r, а через точки P_1, Q_1 и R_1 — три параллельные прямые p_1, q_1 и r_1 ($p_1 \nparallel p$). Докажите, что точки

$$P_0 = p \cap p_1, \quad Q_0 = q \cap q_1, \quad R_0 = r \cap r_1$$

принадлежат одной прямой.

52. Дан треугольник ABC и точки $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [CA]$, $C_1 \in \in [AB]$, причем

$$\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{A_1C}, \quad \overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{B_1A}, \quad \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1B}.$$

Докажите, что медианы треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точку пересечения медиан данного треугольника.

§ 2. ПОДОБИЕ

Подобные треугольники

1. Пользуясь признаками подобия треугольников, докажите, что две медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении $2:1$.

2. Дан треугольник ABC. При каком условии можно провести через вершину C прямую p, пересекающую отрезок AB в точке C_1, так, чтобы треугольники ACC_1 и BCC_1 были подобны?

3. Определите углы равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании этого треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному.

4. Даны два неконгруэнтных подобных треугольника. Две стороны одного из них параллельны двум сторонам другого. Выясните, будут ли треугольники гомотетичными.

5. Можно ли две стороны треугольника пересечь прямой, не параллельной третьей стороне, чтобы отсеченный треугольник был подобен данному?

6. Может ли медиана треугольника рассечь его на два неконгруэнтных подобных треугольника?

7. Дан равнобедренный треугольник ABC $|AB| = |BC|$. Проведены неравные высоты AM и BN. Докажите, что треугольники AMC и ABN подобны.

8. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику BAC.

9. Дана окружность. Хорды AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$.

10. Докажите, что если стороны одного треугольника соответственно перпендикулярны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

11. Дан остроугольный треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1. Подсчитайте, сколько образовалось при этом подобных друг другу треугольников.

12. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что

$$|A_1H| \cdot |A_1A| = |BA_1| \cdot |CA_1|,$$
$$|B_1H| \cdot |B_1B| = |CB_1| \cdot |AB_1|.$$

Подобные многоугольники

13. Докажите, что трапеции подобны, если соответствующие стороны этих трапеций пропорциональны.

14. Дан прямоугольник, длины сторон которого a и b. Постройте прямую, пересекающую прямоугольник так, чтобы один из образовавшихся прямоугольников был подобен данному.

15. Дан прямоугольник, длины сторон которого равны a и b. Постройте прямую, пересекающую прямоугольник, так, чтобы образовавшиеся два прямоугольника были подобны.

16. Дан прямоугольник, стороны которого равны a и b. Какова зависимость между a и b, если средняя линия прямоугольника отсекает от него прямоугольник, подобный данному?

17. Диагональ трапеции делит ее на два подобных треугольника. Найдите зависимость между длиной d этой диагонали и длинами a и b оснований трапеции.

18. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует со сторонами AB и AD такие же углы, как диагональ A_1C_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами A_1B_1 и A_1D_1. Докажите, что эти параллелограммы подобны.

19. Через точку пересечения двух окружностей проведены четыре прямые, пересекающие первую окружность в точках A_1, B_1, C_1, D_1, а вторую — в точках A_2, B_2, C_2, D_2. Докажите, что точки $A_1B_1C_1D_1$ и точки $A_2B_2C_2D_2$—вершины подобных четырехугольников.

20*. Даны два подобных ромба $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($\hat{A} = \hat{A}_1$). Докажите, что

$$|AC| \cdot |A_1C_1| + |BD| \cdot |B_1D_1| = 4\,|AB| \cdot |A_1B_1|.$$

Метод подобия при решении задач на построение

21. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

22. Даны три различные параллельные прямые a, b, c и еще две параллельные прямые a_1 и b_1. Постройте прямую c_1, параллельную a_1, чтобы фигура, состоящая из прямых a, b, c, была подобна фигуре, состоящей из прямых a_1, b_1, c_1.

23. Даны три различные параллельные прямые a, b, c и треугольник $A_0B_0C_0$. Постройте треугольник ABC, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$, чтобы $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

24. На прямой даны две пары точек M, N и P, Q. Проведите через M и N две параллельные прямые, а через P и Q — также две параллельные прямые, чтобы обе пары параллельных прямых своим пересечением определили квадрат.

25. Постройте треугольник по трем его высотам.

26. Постройте треугольник по данной высоте, углу при вершине и отношению длин отрезков, на которые высота делит основание.

27. Постройте четырехугольник по четырем его сторонам, если известно, что сумма двух противоположных углов равна 180°.

28. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к окружности, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AC и BC соответственно в точках M и N. Выразите длину отрезка MN через длины a, b и c сторон данного треугольника.

29. Через точку K пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная (AB) и пересекающая (AC) и (BC) соответственно в точках D и E. Докажите, что

$$|DE| = \frac{c(a+b)}{a+b+c},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

30*. Биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает биссектрису CC_1 в точке K. Докажите, что точка K делит биссектрису CC_1 в отношении $|CK|:|KC_1|$, равном отношению $(a+b):c$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

31. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC в точке их пересечения делятся в равных отношениях, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

32. Через основание C_1 биссектрисы CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная (AC) и пересекающая (BC) в точке D. Выразите длину отрезка CD через длины a, b и c сторон треугольника.

33. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$, где $P \in [AB]$, $Q \in [AB]$, $R \in [BC]$, $S \in [CA]$. Зная, что $|AB| = c$ и $|CC_1| = h_c$, где $[CC_1]$ — высота треугольника, вычислите длину стороны квадрата.

34. Дан треугольник ABC, у которого $\widehat{B} = 90° + \widehat{A}$. Найдите зависимость между длинами a, b и c сторон этого треугольника.

35. Дан треугольник ABC, у которого $\widehat{B} = 2\widehat{A}$. Найдите зависимость между длинами сторон a, b и c этого треугольника.

36. Угол C равнобедренного треугольника ABC, $|CA| = |CB|$, равен 36°. Найдите зависимость между длиной боковой стороны a и длиной основания c в этом треугольнике.

37. Докажите, что расстояние d от точки A окружности радиуса R до ее хорды BC вычисляется по формуле

$$d = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2R}.$$

38. Касательные в точках A и B к окружности пересекаются в точке S. Докажите, что расстояние любой точки окружности до прямой AB есть среднее пропорциональное ее расстояний до прямых AS и BS.

39. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что произведения расстояний от любой точки M окружности до пар прямых AC и BD, BC и AD, CD и AB равны.

40. Две окружности радиусов R_1 и R_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, пересекает окружности вторично в точках M и N соответственно. Докажите, что

$$|BM| : |BN| = R_1 : R_2.$$

41. К окружности проведены две параллельные касательные a и b. Третья касательная пересекает a и b соответственно в точках A и B и касается окружности в точке C. Вычислите расстояние между a и b, если $|AC| = m$, $|BC| = n$.

42. Даны два подобных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ ($\widehat{C} = \widehat{C}_1 = 90^\circ$). Докажите, что $aa_1 + bb_1 = cc_1$, где a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза первого треугольника, а a_1, b_1, c_1 — второго.

43. Около треугольника ABC описана окружность, к которой в точке A проведена касательная. Через вершину B проведена прямая, параллельная касательной и пересекающая отрезок AC в точке D. Докажите, что треугольники ABD и ABC подобны и $|AB|^2 = |AD| \cdot |AC|$.

Глава VI ПОВОРОТЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Повороты

1. Постройте образ точки X при повороте вокруг точки O на углы: а) —342°; б) 650°; в) —780°; г) 1200°; д) —2000°.

Запишите ответы в обозначениях $X_1 = R_0^{\alpha}(X)$, где $-180° < \alpha \leqslant 180°$.

2. Какие значения могут принимать координаты точек единичной окружности?

3. Какие значения могут принимать координаты точки P_α, где:

а) $\alpha \in [0°; 90°]$; в) $\alpha \in [90°; 180°]$;
б) $\alpha \in [-90°; 0°]$; г) $\alpha \in [-90°; 180°]$?

Синус и косинус

4. Постройте центральные углы α единичной окружности, для которых:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Отметьте на единичной окружности точки: а) $P_{20°}$; б) $P_{-75°}$; в) $P_{100°}$; г) $P_{-165°}$. Проведя необходимые измерения, укажите значения синуса и косинуса для указанных углов. (Для получения большей точности возьмите крупный масштаб.)

6. На каких множествах определены тригонометрические функции:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$?

7. Какие знаки имеют значения синуса, косинуса и тангенса углов α, если:

а) $0° < \alpha < 90°$; б) $-90° < \alpha \leqslant 0°$; в) $360° < \alpha < 450°$; г) $1000° \leqslant \alpha \leqslant 1050°$?

8. Каковы знаки значений следующих выражений:

а) $\sin 100°$; б) $\cos 200°$; в) $\sin 1090°$; г) $\cos 10° \cdot \sin 210°$; д) $\cos(-3000°)$; е) $\sin 20° \cdot \sin 173°$; ж) $\operatorname{tg} 100°$; з) $\operatorname{tg} 200°$; и) $\operatorname{tg} 3000°$?

9. Выпишите все значения углов поворотов, для которых выполняются следующие равенства:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = 1$; в) $\cos\alpha = -1$; г) $\cos\alpha = 0$; д) $\sin\alpha = -1$; е) $\cos\alpha = 1$.

10. Докажите, что для любых углов поворота справедливо следующее неравенство:

$$|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1.$$

11. Дан прямоугольный треугольник ABC, $|AB| = 1$. Через вершину C проведен перпендикуляр CD к гипотенузе AB (D — основание перпендикуляра). а) Выразите длины отрезков CA, CB, DA, DB, CD через значения тригонометрических функций синуса и косинуса угла CAB, равного α. б) Докажите, что $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$, $|CB|^2 = |BD| \cdot |AB|$, $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$.

12. Через точки A и B окружности (O, R) проведены касательные, пересекающиеся в точке C. Вычислите $|AB|$, если $\widehat{ACB} = 60°$.

13. Упростите:

а) $\cos 45° \cdot \operatorname{tg} 45°$;

б) $\sin 85° \cdot \operatorname{tg} 5°$;

в) $1 - \sin 18° \cdot \cos 72°$;

г) $\dfrac{2\cos 2°}{\sin 92° - \cos 182°}$.

14. Вычислите произведение

$$\operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{tg} 25° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 65° \cdot \operatorname{tg} 85°.$$

Глава VII МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Теорема косинусов

1. Вычислите длину стороны AB треугольника ABC, если: а) $|AC| = 3$ см, $|BC| = 4$ см, $\widehat{C} = 60°$; б) $|AC| = 2$ см, $|BC| = 4$ см, $\widehat{C} = 150°$.

2. В треугольнике один из его углов равен α, а стороны, заключающие его, равны a и b. Выразите третью сторону треугольника через a и b, если: а) $\alpha = 45°$; б) $\alpha = 60°$; в) $\alpha = 90°$.

3. Стороны параллелограмма, заключающие угол 45°, равны 2 и 3 см. Вычислите длину диагонали, лежащей против этого угла.

4. В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Выразите через a, b и c косинусы его углов.

5. В треугольнике ABC $|AB| = 3$ см, $|BC| = 4$ см, $|AC| = 6$ см. Вычислите: а) величину угла A; б) величину угла C.

6. В параллелограмме $ABCD$ $|AB| = a$, $|BC| = b$, $\widehat{A} = 30°$. Выразите через a и b длины диагоналей этого параллелограмма.

7. Вычислите величину наибольшего из углов треугольника, длины сторон которого равны 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.

8. Три конгруэнтных квадрата расположены так, как показано на рисунке 51. Вычислите величину угла BCA.

9. Дан параллелограмм $ABCD$: $\widehat{BAD} = 45°$, $|AB| = a$, $|BC| = b$. Докажите, что

$$|AC|^2 \cdot |BD|^2 = a^4 + b^4.$$

10*. Дана окружность с центром O, ее диаметр CD и параллельная диаметру CD хорда AB. На диаметре или на его продолжении взята произвольная точка M. Докажите, что сумма $|AM|^2 + |BM|^2$ не зависит от положения хорды при заданном положении точки M.

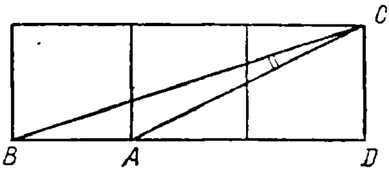


Рис. 51

11*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, $|AM| = 2\,|MD|$, а перпендикуляр, проведенный из вершины A к стороне BC, пересекает ее в точке N, $|BN| = |NC|$. Вычислите стороны четырехугольника $ABCD$, если его периметр p равен $5 + \sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{ABC} = 60°$.

12. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Формулы для вычисления площадей треугольника

13. Вычислите площадь треугольника ABC, если:

а) $|AB| = 2$ см, $|BC| = 4$ см, $\widehat{B} = 30°$;

б) $|AB| = 2$ см, $|BC| = 4$ см, $\widehat{B} = 150°$.

14. Вычислите площадь параллелограмма, если его диагонали 6 и 8 см, а угол между ними равен 45°.

15. Вычислите площадь прямоугольника, диагональ которого 4 см, а угол между диагоналями 30°.

16. В четырехугольнике диагонали равны 8 и 12 см и в точке их пересечения делятся пополам. Вычислите площадь этого четырехугольника, если угол между диагоналями равен 30°.

17. В четырехугольнике $ABCD$ $|AC| = 12$ см, $|BD| = 9$ см, $[AC] \cap [BD] = O$, $\widehat{AOB} = 45°$. Вычислите площадь этого четырехугольника, если $|AO| : |OC| = 1 : 2$, $|BO| : |OD| = 1 : 2$.

18. Даны два треугольника, α — угол одного из треугольников, β — угол другого треугольника, $\alpha + \beta = 180°$. Докажите, что площади этих треугольников относятся как произведения сторон, прилежащих к этим углам.

19. Один из углов прямоугольного треугольника 15°. Выразите площадь этого треугольника через его гипотенузу c.

20. В треугольнике ABC $|AC| = 5$ см, $|BC| = 8$ см, $\widehat{C} = 60°$. Вычислите длину биссектрисы CC_1 угла C.

21. Докажите, что биссектриса AD треугольника ABC равна

$$\frac{bc \sin \widehat{A}}{(b + c) \sin \frac{\widehat{A}}{2}},$$

где b и c — стороны треугольника, заключающие угол $\widehat{A}$.

22. Дан шестиугольник $ABCDEF$. Диагонали AD, BE, CF пересекаются в точке O. Докажите, что произведения площадей треугольников AOB, COD, EOF и треугольников BOC, DOE, FOA равны.

23*. В треугольнике ABC через вершину A проведена прямая AD, $D \in [BC]$, причем $\frac{|BD|}{|BC|} = a$ $(a < 1)$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке E. Вычислите отношение площадей треугольников ABD и ECD.

Теорема синусов

24. Вычислите длину стороны BC треугольника ABC, если:

а) $|AC| = 10$ см, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{A} = 45°$;

б) $|AB| = 20$ см, $\widehat{C} = 135°$, $\widehat{A} = 30°$.

25. Вычислите длины сторон AB и BC треугольника ABC, если:

а) $|AC| = 5$ см, $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 30°$;

б) $|AC| = 1$ см, $\widehat{A} = 100°$, $\widehat{C} = 50°$.

26. Вычислите величины углов B и C треугольника ABC, если:

а) $|AB| = 20$ см, $|BC| = 40$ см, $\widehat{A} = 30°$;

б) $|AB| = 30$ см, $|BC| = 40$ см, $\widehat{A} = 45°$.

27. Диагональ d параллелограмма разбивает угол параллелограмма на два угла α и β. Выразите стороны параллелограмма через d, α и β.

28. В треугольнике ABC $|BC| = a$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. Выразите через a, β и γ длину биссектрисы AD ($D \in [BC]$).

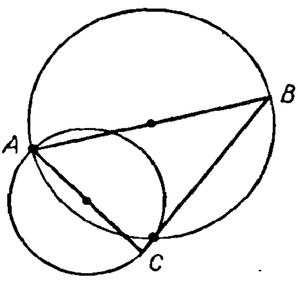
29. В треугольнике даны сторона a и прилежащие к ней углы β и γ. Выразите через a, β и γ остальные стороны и площадь треугольника.

30. Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к ней углов.

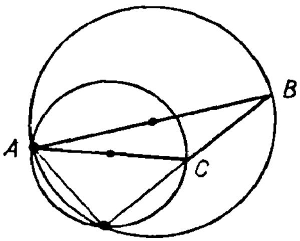
31*. Вычислите площадь трапеции, если ее основания равны a и c, а прилежащие к основанию a углы равны α и β.

32. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали образуют со сторонами восемь углов α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8. Найдите отношение произведения синусов углов с четными индексами к произведению синусов углов с нечетными индексами.

33*. Дан треугольник ABC. Точка L — середина стороны BC, точка K — середина отрезка BL. На лучах AK и AL отложены вне треугольника ABC отрезки LD и KF ($|LD| = |AL|$, $|KF| = \frac{1}{3}|AK|$). Вычислите отношение площадей треугольника ABC и четырехугольника $KLDF$.



а)



б)

Рис. 58

а) наибольшая при $\alpha < 90°$;

б) наименьшая при $\alpha > 90°$.

16. Докажите, что окружности, построенные на двух сторонах треугольника как на диаметрах, пересекаются на третьей стороне или на ее продолжении (рис. 58).

17. $[AC]$ и $[BD]$ взаимно перпендикулярные и пересекающиеся хорды окружности. Из точек A и B проведены к прямой DC перпендикуляры AM и BK, $M \in (BD)$ и $K \in (AC)$. Докажите, что четырехугольник $AMKB$ ромб.

Вписанные и описанные треугольники

18. а) Постройте треугольник со сторонами 5 см, 6 см и 7 см и опишите около него окружность. Измерьте радиус этой окружности.

б) Постройте треугольник ABC, если $|AB| = 8$ см, $|BC| = 6$ см, $\widehat{ABC} = 40°$. Опишите около него окружность и измерьте ее радиус.

в) Постройте треугольник ABC, если $|AB| = 6$ см, $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 60°$. Опишите около него окружность и измерьте ее радиус.

19. Вычислите радиусы окружностей, описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в него, если его катеты равны: а) 20 и 21 см; б) 40 и 30 см.

20. В прямоугольнике, вписанном в окружность, стороны равны 15 и 20 см. Вычислите радиус окружности.

21. Дан остроугольный треугольник ABC; O — центр описанной около него окружности; $[AD] \perp [BC]$. Докажите, что $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

22. Вычислите углы треугольника, в котором высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины его угла, делят этот угол на четыре конгруэнтных угла.

23. В прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол в 10°. Вычислите углы данного треугольника.

24. Из вершины прямого угла треугольника проведены лучи через центры вписанной и описанной окружностей. Угол между этими лучами равен 7°. Вычислите острые углы треугольника.

§ 2. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Вписанные четырехугольники

1. Три угла вписанного четырехугольника относятся как числа 2, 3 и 4. Вычислите его углы.

2. 1) Докажите, что внутренний угол A вписанного четырехугольника $ABCD$ равен его внешнему углу с вершиной C.

2) Докажите, что во вписанном четырехугольнике $ABCD$ биссектриса внутреннего угла A пересекается с биссектрисой внешнего угла с вершиной C в точке, лежащей на окружности, в которую вписан четырехугольник.

3. В каком случае можно описать окружность около выпуклого четырехугольника $ABCD$, если:

а) $\widehat{A} = 78°$, $\widehat{C} = 102°$;

б) $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 102°$?

4. Постройте трапецию, три стороны которой конгруэнтны, и опишите около нее окружность.

5. Докажите, что биссектрисы углов четырехугольника в общем случае образуют четырехугольник, около которого можно описать окружность.

6. Через середину дуги AB окружности проходят две произвольные прямые, пересекающие окружность в точках F и C и хорду AB в точках D и E соответственно. Докажите, что точки F, C, D и E лежат на одной окружности[1].

7. Во всяком треугольнике точки, симметричные точке пересечения высот относительно трех сторон треугольника, лежат на окружности, описанной около этого треугольника. Докажите.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке K (рис. 59). Докажите, что точки A, B_1, K и C_1 лежат на одной окружности.

9. Если четырехугольник имеет оси симметрии, совпадающие с серединными перпендикулярами, проведенными к его сторонам, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Докажите.

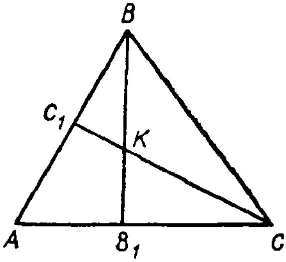


Рис. 59

---

[1] Рекомендуется решать эту задачу после изучения теоремы об измерении угла с вершиной внутри круга.

Описанные четырехугольники

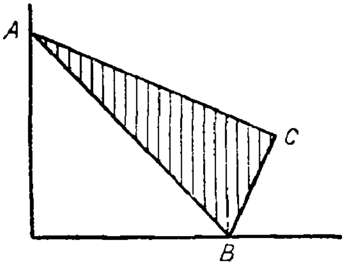


Рис. 60

10. Углы описанного около окружности четырехугольника, взятые по порядку, относятся как числа 1, 2, 3 и 2. Вычислите углы, под которыми видна каждая его сторона из центра вписанной в него окружности.

11. Радиус вписанной в трапецию окружности равен r. Точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной a и b. Докажите, что $r^2 = ab$.

12. Докажите, что боковая сторона трапеции, описанной около окружности с центром O, видна из точки O под углом 90°.

13. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

14. Вычислите площадь четырехугольника, описанного около окружности диаметра r, если три его стороны, взятые по порядку, равны a, b, c.

Разные задачи

15. Пятиугольник $ABCDE$, имеющий ось симметрии, проходящую через вершину B, вписан в окружность с центром O. Стороны AB и DE видны из центра окружности под углом 50°. Под каким углом видна из центра окружности сторона AE?

16. Докажите, что в равнобедренной трапеции, описанной около круга, квадрат высоты равен произведению ее оснований.

17. По сторонам прямого угла скользят вершины острых углов прямоугольного треугольника (рис. 60). Постройте линию, которую описывает вершина прямого угла этого треугольника.

§ 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Правильные многоугольники

1. Около круга описан многоугольник, все стороны которого конгруэнтны. Будет ли многоугольник правильным?

2. Около круга описан многоугольник, все углы которого конгруэнтны. Будет ли многоугольник правильным?

3. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Укажите, на какие фигуры отобразятся при повороте на 72° по часовой стрелке относительно его центра O:

а) вершина C; б) вершина A; в) диагональ AC; г) треугольник ACO; д) треугольник ABC.

4. Докажите, что радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен диаметру вписанной в него окружности.

5. Вычислите диагонали правильного пятиугольника со стороной a.

6. Докажите, что в правильном шестиугольнике имеется:

а) три пары параллельных диагоналей и три диагонали, им перпендикулярные; б) две тройки диагоналей, являющихся сторонами правильного треугольника.

7. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника при их взаимном пересечении образуют правильный пятиугольник.

8. Из точки B окружности с центром O проведены хорды BA и BC. $[AB]$ — сторона правильного вписанного треугольника, $[BC]$—сторона вписанного квадрата. Вычислите величину угла ABC.

9. Из точки A окружности проведены две хорды AB и AC. $[AB]$— сторона правильного вписанного шестиугольника, $[AC]$ — сторона вписанного квадрата. Вычислите величину угла BAC.

10. а) Стороны правильного треугольника продолжены, как указано на рисунке 61, $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 — вершины правильного треугольника.

б) Стороны правильного шестиугольника продолжены, как показано на рисунке 62, на одно и то же расстояние. Докажите, что A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 — вершины правильного шестиугольника.

11. Найдите отношения сторон правильных многоугольников, которыми можно покрыть без просветов и перекрытий всю плоскость, если этими многоугольниками являются:

а) квадрат и шестиугольник;

б) шестиугольник, квадрат и треугольник;

в) шестиугольник и треугольник;

г) восьмиугольник и квадрат;

д) двенадцатиугольник и треугольник.

Для каждого задания рассмотрите какой-либо один вариант и сделайте соответствующий чертеж.

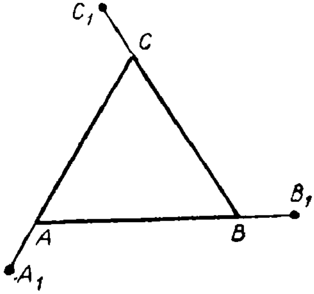


Рис. 61

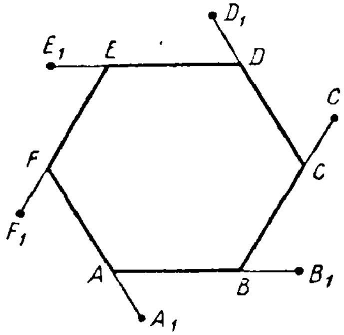


Рис. 62

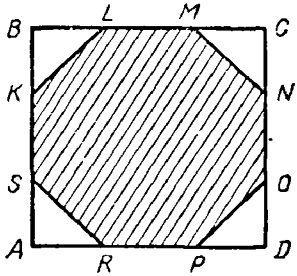


Рис. 63

12. От каждой вершины квадрата со стороной a на его сторонах отложены отрезки, равные половине его диагонали. Полученные восемь точек последовательно соединены (рис. 63). Определите вид заштрихованного восьмиугольника и вычислите его площадь.

13. Вычислите отношения площадей правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, если периметры этих фигур равны.

Площадь правильного многоугольника

14. а) Сумма стороны a и высоты h равностороннего треугольника равна k. Выразите через k площадь этого треугольника.

б) Разность стороны равностороннего треугольника и его высоты равна m. Выразите через m площадь этого треугольника.

15. Окружность с центром в точке O (0; 0) проходит через точку с координатами (12; —5). Вычислите площадь вписанного в нее: а) правильного треугольника; б) квадрата; в) правильного пятиугольника.

Разные задачи

16. а) Правильный шестиугольник можно получить из двух бумажных лент одинаковой ширины, как это показано на рисунке 64. Докажите, что этот шестиугольник правильный.

б) Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом, как показано на рисунке 65. Покажите, что этот узел имеет форму правильного пятиугольника.

17. На рисунке 66 изображен правильный звездчатый пятиугольник с острым углом 60°. а) Как нужно сложить лист бумаги и как должна быть расположена линия разреза, чтобы получить такую фигуру? б) Как должна проходить линия разреза, чтобы вырезанный пятиугольник оказался бы правильным пятиугольником?

18. Через середину B радиуса OA некоторой окружности проведен к нему перпендикуляр, пересекающий окружность в точке K. Отрезок BK может быть приближенно принят равным стороне правильного семиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите допускаемую при этом погрешность.

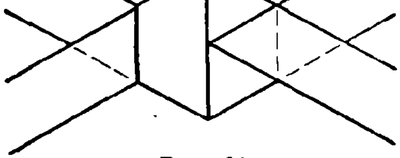


Рис. 64

Рис. 65

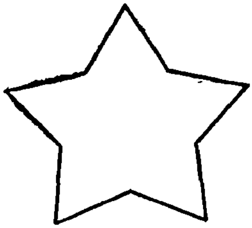


Рис. 66

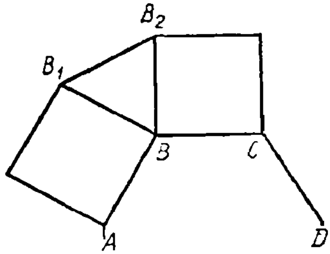


Рис. 67

19. Две противоположные стороны правильного восьмиугольника и перпендикулярные к ним диагонали образуют прямоугольник. Выразите площадь прямоугольника через сторону a восьмиугольника.

20. Докажите, что пятиугольник правильный, если конгруэнтны все его стороны и три последовательных угла.

21. а) На сторонах правильного шестиугольника $ABCDEF$ вне его построены квадраты(рис.67). Докажите, что треугольник BB_1B_2 правильный.

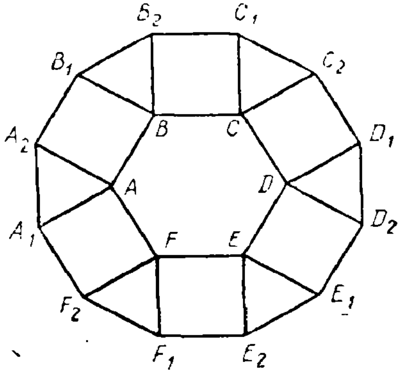


Рис. 68

б) На каждой стороне правильного шестиугольника, вне его, построены квадраты и их вершины соединены отрезками, как показано на рисунке 68. Докажите, что двенадцатиугольник $A_1A_2B_1B_2 \ldots F_1F_2$ правильный.

22. AB — сторона вписанного в круг квадрата, $|AB| = |BK|$, O — центр круга. Докажите, что отрезок KM равен удвоенной стороне вписанного в этот круг правильного десятиугольника (рис. 69).

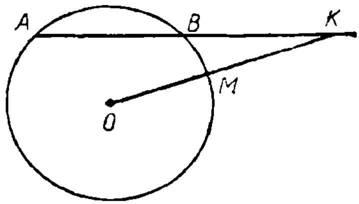


Рис. 69

23. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник, одна из вершин которого лежит на стороне квадрата.

24. Продолжения сторон EF и CD правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной a пересекаются в точке N (рис. 70). Центр

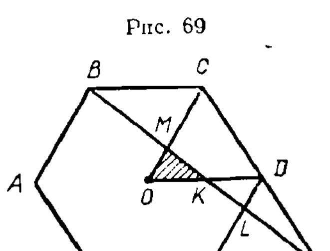


Рис. 70

окружности, описанной около этого шестиугольника — O. Прямая BN пересекает отрезки ED, OD и OC в точках L, K и M соответственно; выразите через a длины отрезков EL, OM, OK и площадь заштрихованного треугольника.

§ 4. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

Длина окружности

1. Вычислите длину окружности, если:
а) дуга окружности в 30° имеет длину 5 см;
б) дуга окружности в 60° имеет длину 10 см;
в) дуга окружности в 300° имеет длину 50 см.

2. Окружность с центром в точке O $(0; 0)$ проходит через точку $(3; -4)$. Вычислите длину этой окружности.

3. Вычислите отношение длины дуги, угловая величина которой равна α, к хорде, стягивающей эту дугу, если: а) $\alpha = 60^\circ$; б) $\alpha = 90^\circ$; в) $\alpha = 120^\circ$; г) $\alpha = 240^\circ$; д) $\alpha = 300^\circ$.

4. *Длина окружности радиуса R может быть приближенно за*менена длиной отрезка, равного сумме утроенного диаметра окружности и 0,2 стороны квадрата, вписанного в эту окружность. Найдите погрешность и относительную погрешность такой замены.

5. В прямой угол вписана окружность радиуса 5 см. Вычислите периметр фигуры, заключенной между сторонами этого угла и дугой окружности, ограниченной точками касания окружности сторон угла.

6*. В круг радиуса R вписано три круга одного и того же диаметра так, что каждый из них касается двух других кругов. Вычислите периметр заштрихованной фигуры (рис. 71).

7. Через конец A диаметра AA_1 окружности радиуса R с центром O проведена касательная к этой окружности (рис. 72), AB — сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, OC — луч, проходящий через середину хорды AB. Точка C лежит на касательной. Длина отрезка CD равна трем радиусам окружности. Покажите, что длина отрезка A_1D приближенно равна длине полуокружности радиуса R.

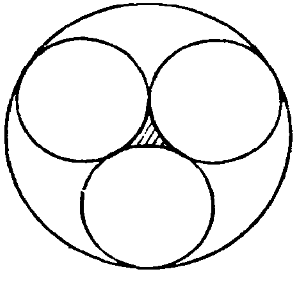


Рис. 71

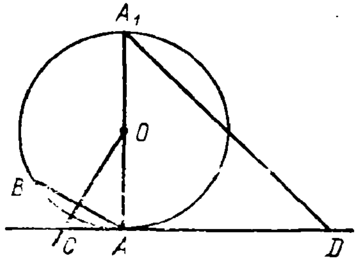


Рис. 72

Площадь круга

8. Окружность с центром в точке O (0; 0) проходит через точку с координатами (3; —4). Вычислите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

9. Вычислите площадь круга:

а) описанного около равностороннего треугольника со стороной 10 см;

б) описанного около правильного шестиугольника со стороной 10 см;

в) описанного около правильного восьмиугольника со стороной 10 см.

10. Вычислите площадь круга:

а) вписанного в правильный шестиугольник со стороной 10 см;

б) вписанного в правильный восьмиугольник со стороной 10 см.

11. Площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна площади круга, диаметр которого равен хорде большей окружности, касающейся меньшей окружности. Докажите.

12. В прямой угол вписана окружность радиуса 5 см. Вычислите площадь фигуры, заключенной между сторонами этого угла и дугой окружности, ограниченной точками касания окружности сторон угла.

13. На катете AB, $|AB| = 2a$, равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{B} = 90°$) как на диаметре построена полуокружность так, как это указано на рисунке 73, и из точки A как из центра проведена дуга окружности радиуса $2a$, пересекающая гипотенузу AC в точке E. Вычислите площади фигур S_1, S_2, S_3 и S_4.

14. а) Диаметр AB окружности разделен на 4 конгруэнтных отрезка, на которых построены полуокружности, как показано на рисунке 74. Вычислите площадь каждой из заштрихованных фигур, если $|AB| = d$.

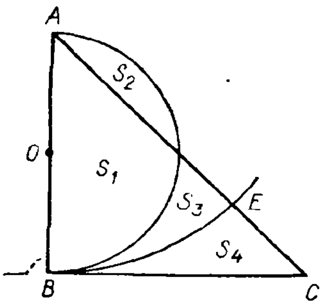


Рис. 73

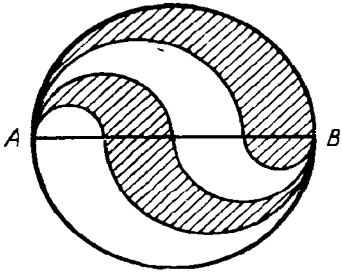


Рис. 74

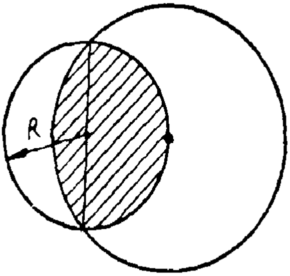


Рис. 75

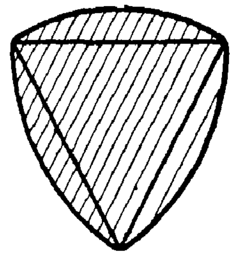


Рис. 76

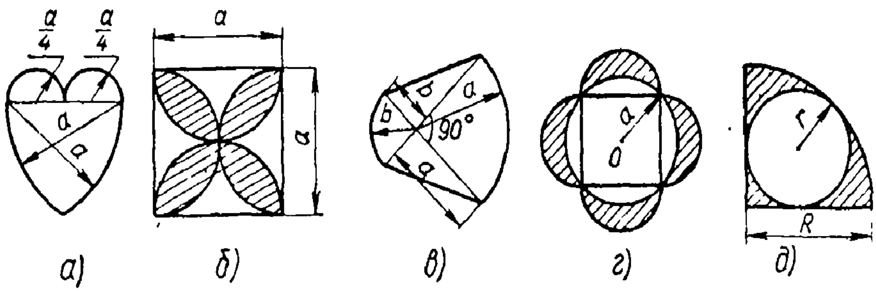


Рис. 77

б) Решите эту же задачу для случая, когда отрезок AB разделен на n конгруэнтных отрезков.

15. Окружность радиуса R проходит через центр другой окружности. Точки пересечения этих окружностей лежат на диаметре первой окружности. Выразите через R площадь заштрихованной части (рис. 75).

16. Из каждой вершины равностороннего треугольника радиусом, равным его стороне, проведена дуга, концами которой служат две другие вершины треугольника. Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 76).

17. Три конгруэнтных круга радиуса r попарно касаются. Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 71).

18. Найдите периметр и площадь фигуры (рис. 77, *а*, *в*) или ее заштрихованной части (рис. 77, *б*, *г*, *д*).

Сколько осей симметрии имеет каждая фигура?

Какие из фигур имеют центр симметрии?

Назовите перемещения, с помощью которых каждая фигура может быть отображена на себя.

Глава IX НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные свойства прямых и плоскостей

1. Сколько различных прямых определяются всеми парами вершин куба?

2. Сколько различных плоскостей определяются всеми тройками вершин куба?

3. Сколько различных прямых могут определяться всеми парами точек, взятых из шести данных точек?

4. Сколько различных плоскостей могут определяться всеми тройками точек, взятых из пяти данных точек?

5. Докажите, что две различные плоскости не могут иметь две и только две общие точки.

6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 78). Сколько прямых, проходящих через две вершины параллелепипеда:

а) пересекается с ребром AB; б) параллельны ребру AB?

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 78). Какие ребра этого параллелепипеда лежат на прямых, которые скрещиваются:

а) с прямой AD;

б) с прямыми AD и DD_1?

8. В кубе $KLMNK_1L_1M_1N_1$ проведена диагональ KM_1 (рис. 79). Сколько прямых, которые скрещиваются с прямой KM_1, проходит через вершины куба, взятые попарно?

9. Сколько различных пар параллельных плоскостей определяется вершинами куба, взятыми по три?

10. Сколько различных взаимно пересекающихся плоскостей проходит через одну из вершин куба, если каждая из этих плоскостей содержит не менее трех вершин куба?

11. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Докажите, что существует не более одной прямой, проходящей через точку A и пересекающей обе данные прямые.

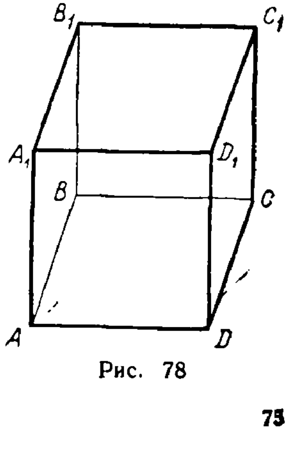


Рис. 78

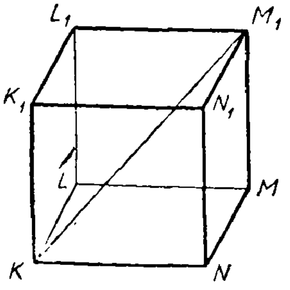


Рис. 79

12. Даны плоскость α и прямая a, пересекающая эту плоскость. Докажите, что прямая b, лежащая в плоскости α, не параллельна прямой a.

13. Докажите, что через точку M, не лежащую в данной плоскости α, проходит бесконечное множество прямых, параллельных плоскости α.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 80). Сколько различных прямых, проходящих через две из вершин этого куба: а) параллельны грани ABB_1A_1; б) пересекают грань ABB_1A_1?

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр к плоскости

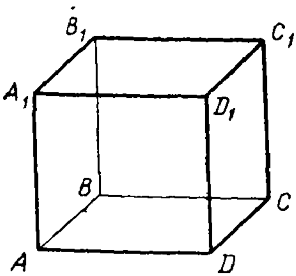


Рис. 80

15. Из точки M, которая находится на расстоянии a от плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр.

1) Как расположены относительно этого перпендикуляра прямые, лежащие в плоскости α, если расстояние от точки M до этих прямых: а) равно a; б) больше a?

2) Существует ли в плоскости α прямая, расстояние которой от точки M меньше a?

16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 81), точки T и K — середины ребер CD и AD. Укажите расстояние от точки D:

а) до плоскости грани ABB_1A_1;
б) до отрезка CT;
в) до отрезка KT;
г) до ребра AB;
д) до ребра BC;
е)* до прямой AC_1;
ж)* до прямой A_1C_1.

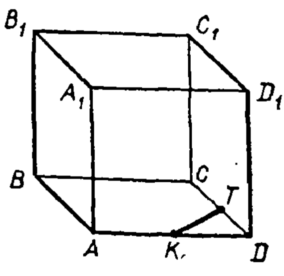


Рис. 81

17. Даны две пересекающиеся плоскости: $\alpha \cap \beta = (BC)$ и две прямые a и b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$).

Возможны ли такие случаи, что:
а) прямые a и b параллельны;
б) прямые a и b пересекаются;
в) прямые a и b скрещиваются?
К ответам дайте рисунок.

Параллельные плоскости

18. Даны две параллельные плоскости $\alpha \parallel \beta$ и две прямые a и b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$).

Возможны ли такие случаи, что

а) прямые a и b параллельны;

б) прямые a и b скрещиваются;

в) прямые a и b пересекаются?

19. Докажите, что две плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.

20. Докажите, что две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, не пересекаются.

21. Расстояние между двумя данными параллельными плоскостями α и β равно m. В плоскости α дана точка M.

а) Сколько прямых, расстояние которых от точки M равно m, лежит в плоскости β?

б) Сколько прямых, расстояние которых от точки M равно n ($n > m$), лежит в плоскости β?

К ответам сделайте рисунки.

22. Даны плоскость α и прямая a, параллельная этой плоскости. Расстояние от прямой a до плоскости α равно m.

а) Сколько прямых, расстояние которых от прямой a равно m, лежит в плоскости α?

б) Сколько прямых, расстояние которых от прямой a равно n ($n > m$), лежит в плоскости α?

Ортогональное проектирование

23. Через основание AC равнобедренного треугольника ABC проведена плоскость α. Может ли проекция треугольника ABC на эту плоскость быть:

а) отрезком;

б) равнобедренным треугольником;

в) разносторонним треугольником?

24. В каком случае прямая a и ее проекция на данную плоскость α параллельны?

25. Может ли проекцией трапеции на плоскость быть:

а) отрезок; б) трапеция; в) треугольник?

26. Докажите, что проекцией параллелограмма на плоскость, проходящую через одну из его сторон, может быть:

а) отрезок; б) параллелограмм.

27. Точки A и B проектируются на плоскость α соответственно в точки A_1 и B_1. Возможны ли при этом такие случаи:

а) $|AB| > |A_1B_1|$;

б) $|AB| < |A_1B_1|$;

в) $|AB| = |A_1B_1|$?

28. В каком случае проекцией окружности на данную плоскость будет окружность?

§ 2. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

Прямая призма

1. Вычислите объем, площадь боковой поверхности и площадь поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой a и высота h при: а) $a = 5$ см, $h = 8$ см; б) $a = 0{,}25$ см, $h = 0{,}9$ м.

2. Дан прямой параллелепипед, в основании которого параллелограмм. a и b — стороны этого параллелограмма, α — угол между ними, h — высота параллелепипеда. Выразите объем и площадь поверхности этого параллелепипеда через a, b, h и α и вычислите значения его объема и площади поверхности, если $a = 4$ м, $b = 6$ м, $h = 8$ м, $\alpha = 40^\circ$.

3. Периметры оснований правильной треугольной, четырехугольной и шестиугольной призм равны. Какая из этих призм имеет больший объем и какая меньший, если высоты этих призм равны?

4. Дана прямая призма, в основании которой лежит четырехугольник, описанный около окружности радиуса r. P — периметр основания призмы, h — ее высота. Выразите площадь поверхности и объем этой призмы через r, h и P и вычислите значения площади поверхности и объема, если $r = 5$ дм, $h = 8$ дм, $P = 40$ дм.

5. Дана правильная n-угольная призма, основание которой вписано в окружность радиуса r. Высота призмы равна $2r$. Выразите через r площадь поверхности и объем призмы, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$. Вычислите площадь поверхности и объем каждой призмы, если: 1) $r = 6$ м; 2) $r = 2$ м.

6. Поперечное сечение траншеи — равнобедренная трапеция с основаниями a и b и высотой h. l — длина траншеи. Выразите объем траншеи через a, b, h и l и вычислите его, если $a = 4$ м, $b = 3$ м, $h = 2$ м и $m = 20$ м.

Общие свойства объемов

7. 1) Перечислите основные свойства многогранников, приняв которые можно каждому многограннику поставить в соответствие одно определенное число — объем многогранника.

2) Укажите аналогичные свойства, принятые ранее: а) при измерении длин отрезков; б) при измерении площадей.

8. а) Может ли объем прямоугольного параллелепипеда, не все измерения которого равны целому числу единиц длины l, выражаться целым числом в единицах измерения l^3? (Ответ подтвердите примером.)

б) Может ли объем куба и площадь поверхности этого куба иметь одно и то же числовое значение при единице измерения длин l и единице измерения объемов l^3?

Пирамиды

9. На какое наименьшее число треугольных пирамид можно разрезать прямую треугольную призму?

10. На какое наименьшее число четырехугольных пирамид можно разрезать: а) куб; б) прямую четырехугольную призму?

11. При каких значениях n сторона основания правильной n-угольной пирамиды может равняться:

а) боковому ребру этой пирамиды;

б) апофеме боковой грани пирамиды?

12. Дана правильная n-угольная пирамида, основание которой вписано в окружность радиуса r, а высота равна h. Выразите ее объем и площадь ее боковой поверхности через r, n и h.

Цилиндр

13. Дан цилиндр, основание которого — круг, вписанный в правильный n-угольник со стороной a, высота цилиндра равна диаметру круга. Выразите объем и площадь поверхности этого цилиндра через a и n.

14. Дан прямоугольник, a и b — его стороны. Прямая l лежит в плоскости прямоугольника, параллельна одной из его сторон и отстоит от этой стороны на расстоянии t (рис. 82). Выразите объем фигуры, полученной при вращении этого прямоугольника вокруг оси l, через a, b и t. Вычислите этот объем, если $a = 1{,}5$ дм, $b = 20$ дм, $t = 4$ дм.

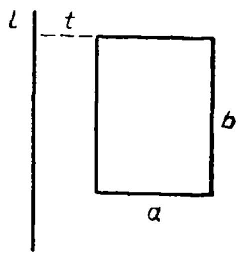


Рис. 82

15. От цилиндра отсечена плоскостью часть, называемая цилиндрическим копытом (рис. 83). Вычислите объем такого копыта по размерам, указанным на рисунке.

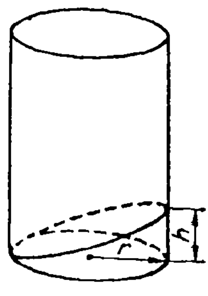


Рис. 83

Конус

16. Основание конуса — круг, вписанный в правильный n-угольник со стороной a. а) Какие значения может принимать образующая такого конуса? б) В каком случае образующая конуса равна a?

17. Дан конус, в сечении которого плоскостью, проходящей через вершину конуса и диаметр основания, получается равносторонний треугольник со стороной a. Выразите объем и площадь поверхности этого конуса через a.

18. Прямоугольная трапеция со сторонами основания a и b и высотой h вращается около оси, перпендикулярной основаниям, как показано на рисунке 84. Найдите объем фигуры, полученной при этом вращении.

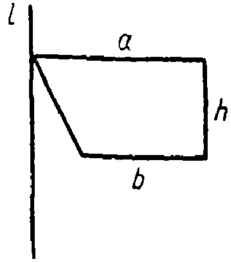


Рис. 84

Шар

19. n шаров радиуса r расположены на плоскости так, что каждый из них касается двух других. Найдите радиус наибольшего шара, который можно положить на эту же плоскость так, чтобы он прошел через образовавшееся отверстие.

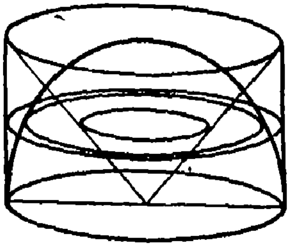


Рис. 85

20. 1) Дан цилиндр с радиусом основания a и той же высотой, конус, построенный на том же основании и с той же высотой, и полушар, большой круг которого совпадает с основанием цилиндра. Фигуры расположены так, как показано на рисунке 85. На этом же рисунке показано сечение данных фигур плоскостью, параллельной основаниям цилиндра. Докажите, что площадь круга, полученного в сечении полушара, равна площади кольца, ограниченного окружностями, полученными в сечении цилиндра и конуса.

2) Архимед (III век нашей эры) доказал, что объем полушара, построенного, как указано в предыдущей задаче, равен разности объемов цилиндра и конуса (рис. 85). Проверьте вычислениями справедливость такой теоремы.

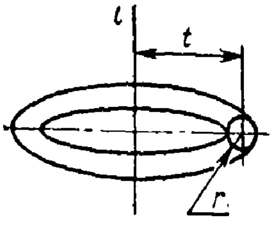


Рис. 86

21. Гюльден (XVIII век) доказал теорему о том, что объем тела, полученного при вращении плоской фигуры около оси, ее не пересекающей и находящейся с ней в одной плоскости, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры. Воспользовавшись этой теоремой, найдите объем тора, полученного при вращении круга радиуса r около оси, находящейся в одной плоскости с кругом на расстоянии t от центра круга (рис. 86).

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНЫХ И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

§ 1. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ. КОМПОЗИЦИЯ ОСЕВЫХ СИММЕТРИЙ

1. Постройте[1] оси симметрии двух данных пересекающихся прямых.

2. Даны прямая p и две пересекающиеся прямые a и b. Постройте на прямых a и b соответственно точки A и B, симметричные относительно p.

3. Даны прямая p и две точки A и B, не принадлежащие этой прямой. Постройте две прямые a и b, симметричные относительно p, чтобы $A \in a$, $B \in b$.

4. Постройте треугольник по углу, прилежащей стороне и разности двух других сторон.

5. Постройте треугольник по заданной разности двух его углов и длинам сторон, противолежащих этим углам.

6. Даны две концентрические окружности. Постройте ромб, отличный от квадрата, чтобы: 1) две вершины принадлежали одной окружности, а две другие вершины — другой; 2) три вершины принадлежали одной окружности, а одна — другой.

7. Докажите, что если выпуклый пятиугольник имеет две оси симметрии, то он имеет пять осей симметрии.

8. Шестиугольник имеет три оси симметрии. Следует ли из этого, что шестиугольник правильный?

Рассмотрите два случая. 1) оси симметрии проходят через середины противоположных сторон; 2) оси симметрии проходят через противоположные вершины.

9. Докажите, что композиция трех симметрий, оси которых имеют общую точку (параллельны), есть симметрия, ось которой проходит через эту точку (параллельна данным осям).

10. Докажите, что композиция трех симметрий, оси которых определяют треугольник, не есть осевая симметрия.

11. В треугольнике ABC проведены три его биссектрисы, принадлежащие трем прямым l_A, l_B и l_C. Докажите, что композиция

[1] Все задачи на построение предполагают применение циркуля и линейки, если условие задачи не требует применения других инструментов.

$S_{IC} \circ S_{IB} \circ S_{IA}$ есть симметрия, ось которой проходит через центр вписанной в треугольник окружности перпендикулярно к стороне AC.

12. В треугольнике ABC проведены серединные перпендикуляры m, n, p его сторон BC, CA и AB. Докажите, что композиция $S_p \circ S_n \circ S_m$ трех осевых симметрий есть симметрия с осью OB, где O — центр описанной около данного треугольника окружности.

13. Дан равносторонний треугольник ABC. Пусть $(BC) = p$, $(CA) = q$, $(AB) = r$. Докажите, что композиция $S_r \circ S_q \circ S_p$ отображает прямую, содержащую среднюю линию треугольника ABC, параллельную (AC), на себя.

14. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — основания его высот. Докажите, что прямая A_1C_1 отображается на себя при композиции симметрий с осями (BC), (CA) и (AB).

15. Постройте треугольник ABC по трем данным серединным перпендикулярам p, q, r к его сторонам.

16. В данную окружность впишите треугольник, стороны которого параллельны трем данным прямым.

17. Докажите, что прямая, проведенная через точку пересечения высот треугольника ABC, отображается при симметриях с осями (BC), (CA), (AB) на три прямые, пересекающиеся в одной точке.

18. На диаметре AB полукруга дана точка P, а на его полуокружности — точки M, M_1 и N, N_1 такие, что $\widehat{MPA} = \widehat{M_1PB}$, $\widehat{NPA} = \widehat{N_1PB}$. Докажите, что точка Q пересечения хорд MN_1 и M_1N принадлежит перпендикуляру, проведенному к диаметру AB через точку P.

19. Около треугольника ABC описана окружность, пересекающая биссектрису e_C угла C в точке M. Из ортоцентра H треугольника проведен перпендикуляр HD к биссектрисе так, что $D \in e_C$. Докажите, что

$$|CD| : |CM| = |\cos \widehat{C}|.$$

20. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если $\widehat{A} = \widehat{B}$ и $\widehat{C} = \widehat{D}$, то четырехугольник имеет ось симметрии.

21. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$. Построены лучи OM, ON, OP и OQ, где M, N, P, Q — середины хорд AB, BC, CD, DA. Докажите, что

$$\widehat{MON} + \widehat{POQ} = 180^\circ,$$

или же

$$\widehat{MON} = \widehat{POQ}.$$

22. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^\circ.$$

23*. В плоскости треугольника ABC дана точка P, не принадлежащая (AB), (BC), (CA). Прямые PA, PB, PC отображаются в симметриях относительно осей, содержащих биссектрисы соответствующих углов треугольника. Докажите, что полученные прямые либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

24*. Дан треугольник ABC. Докажите, что композиция шести осевых симметрий S_a, S_b, S_c, S_a, S_b, S_c, где $a = (BC)$, $b = (CA)$, $c = (AB)$, есть параллельный перенос, отличный от тождественного преобразования.

25. В данную окружность впишите пятиугольник, стороны которого параллельны пяти данным прямым.

26. На биллиардном столе прямоугольной формы лежит шар. В каком направлении необходимо по шару произвести удар, чтобы, отразившись от всех бортов, шар прошел через свое первоначальное положение?

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ. ПОВОРОТ

1. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Постройте прямую c, параллельную третьей данной прямой d, чтобы отрезок AB, где $A = a \cap c$, $B = b \cap c$, имел данную длину.

2. Даны четыре различные точки A, B, C и D. Проведите через них соответственно четыре параллельные прямые a, b, c и d, чтобы ширина полосы с границей (a, b) была равна ширине полосы с границей (c, d).

3. Постройте трапецию по ее диагоналям, углу между ними и одной из сторон.

4. Докажите, что если прямая, проходящая через середины оснований трапеции, образует конгруэнтные углы с прямыми, содержащими ее боковые стороны, то трапеция равнобочная.

5. Две конгруэнтные окружности касаются внешним образом в точке K. Секущая, параллельная линии центров, пересекает окружности последовательно в точках A, B, C, D. Докажите, что величина угла AKC не зависит от выбора секущей.

6. Определите площадь трапеции, все стороны которой известны.

7. На окружности с центром O даны такие три точки A, B и C, что $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^\circ$. Докажите, что расстояние от точки B до произвольного диаметра окружности равно или сумме, или абсолютному значению разности расстояний от точек A и C до этого диаметра.

8. Через точку M, лежащую вне окружности ω[1], проведите прямую m, пересекающую ω в двух точках A и B так, чтобы $|AB| = |BM|$.

9. Постройте пятиугольник (семиугольник) по заданным серединам его сторон.

10. Четыре конгруэнтные окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 проходят через точку M и вторично пересекаются в шести точках:

$$A_{12} = \omega_1 \cap \omega_2,\ A_{23} = \omega_2 \cap \omega_3,\ \ldots,\ A_{43} = \omega_4 \cap \omega_3.$$

Докажите, что отрезки $A_{12}A_{43}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{13}A_{24}$ имеют общую середину.

11. Постройте квадрат $ABCD$ по его центру O и точкам M и N, если известно, что $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $|OM| \neq |ON|$.

12. Постройте такой равносторонний треугольник, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой O, а две другие принадлежали двум данным окружностям.

13. Через данную внутри круга точку проведите хорду данной длины.

14. На сторонах BC, CA и AB равностороннего треугольника ABC даны соответственно точки M, N и P. Известно, что

$$|BM| : |MC| = |CN| : |NA| = |AP| : |PB| = k.$$

1) Докажите, что MNP — равносторонний треугольник.

2) Вычислите $|MN|$, если $|BC| = a$, $k = 2$.

15. На сторонах BC, CD, DA и AB квадрата $ABCD$ даны соответственно точки P, Q, R и S. Известно, что

$$|BP| : |PC| = |CQ| : |QD| = |DR| : |RA| = |AS| : |SB| = k.$$

1) Докажите, что $PQRS$ — квадрат.

2) Вычислите $|PQ|$, если $|AB| = a$, $k = 3$.

16. Даны равносторонний треугольник ABC и его центр O. При повороте около центра O на угол α треугольник ABC отобразился на треугольник $A_1B_1C_1$.

1) Докажите, что точки $(AB) \cap (A_1B_1) = C_2$, $(BC) \cap (B_1C_1) = A_2$ и $(CA) \cap (C_1A_1) = B_2$ являются вершинами равностороннего треугольника.

2) Вычислите $|A_2B_2|$, если $|AB| = m$.

17. На двух пересекающихся в точке M прямых даны два отрезка AB и A_1B_1 одинаковой длины. Докажите, что окружности AA_1M и BB_1M пересекаются в точке, являющейся центром поворота, отображающего A на A_1 и B на B_1.

18. Докажите, что каждой прямой при данном повороте принадлежит только одна пара соответствующих при повороте точек при условии, что поворот отличен от центральной симметрии.

Выясните, как обстоит дело в случае центральной симметрии.

---

[1] Иногда окружность будем обозначать буквой ω.

19. Найдите множество M всех точек X, которые при данном повороте отображаются на такие точки X', что прямые XX': 1) проходят через данную точку S, 2) параллельны данной прямой l.

20. Даны два конгруэнтных равносторонних одинаково ориентированных[1] треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что центры трех поворотов, отображающих соответственно A, B, C на A_1, B_1, C_1; A, B, C — на B_1, C_1, A_1; A, B, C — на C_1, A_1, B_1, принадлежат одной прямой.

21. Докажите, что композиция двух поворотов R_A^α и R_B^β, где $A \neq B$, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, $0° \leqslant \beta \leqslant 360°$, есть поворот $R_{\hat{C}}^{\alpha+\beta}$ (или $R_{\hat{C}}^{(\alpha+\beta-360)°}$, если $\alpha + \beta \neq 360°$, или же перенос, если $\alpha + \beta = 360°$).

22. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на основаниях построены одинаково ориентированные квадраты $ABMN$ и $BCQP$. Обозначим их центры O_1 и O_2, середину стороны AC — через K, середину отрезка MP — через L. Докажите, что четырехугольник O_1LO_2K — квадрат.

23. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACB_1 и BCA_1. Найдите углы треугольника MA_1O, где M — середина стороны AB, O — центр треугольника ACB_1.

24. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого диагонали перпендикулярны и конгруэнтны. Пусть точка M — центр поворота, отображающего A на B и C на D, а точка N — центр поворота, отображающего A на D и C на B.

Докажите, что середина отрезка MN есть точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$.

25*. Боковые стороны BC и AD трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на угол $+90°$, после чего они заняли положения B_1C_1 и A_1D_1.

1) Докажите, что $|D_1C_1| = |A_1B_1|$.

2) Выразите длину отрезка C_1D_1 через длины оснований трапеции.

§ 3. ВЕКТОРЫ

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку пересечения медиан. Докажите, что $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1A}$.

2. Даны четырехугольник $ABCD$ и точки M, N ($M \in [AB]$, $N \in [CD]$). Докажите, что вектор $\overrightarrow{Y_1Y_2}$, где Y_1 и Y_2 — точки пересечения средних линий четырехугольников $AMND$ и $CBMN$, не зависит от выбора точек M и N.

[1] Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ называются одинаково ориентированными, если поворот, отображающий луч AB на луч AC, и поворот, отображающий луч A_1B_1 на луч A_1C_1, одинаково направлены: оба по часовой стрелке либо оба против часовой стрелки. В противном случае треугольники ориентированы противоположно.

Аналогично вводится понятие одинаковой и противоположной ориентации двух любых многоугольников.

3. Даны четырехугольник $ABCD$ и точка M. Построены точки M_1, M_2, M_3, M_4, симметричные M относительно середин сторон четырехугольника. Докажите, что $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_4}$.

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Построен второй четырехугольник с вершинами в точках пересечения медиан треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что средние линии обоих четырехугольников пересекаются в одной точке.

5. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, причем $|BA_1| = |A_2C|$, $|CB_1| = |B_2A|$, $|AC_1| = |C_2B|$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки пересечения медиан данного треугольника.

6. Через вершины A, B и C треугольника ABC параллельно направлению вектора $\vec{s}$ проведены прямые, пересекающие (BC), (CA) и (AB) соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

если $\vec{s} = \alpha\,\overrightarrow{CC_1} = \beta\,\overrightarrow{BB_1} = \gamma\,\overrightarrow{AA_1}$.

7. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что $\overrightarrow{AC_1} = k\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{CA}$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

8. На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ даны соответственно точки M и N такие, что $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\,\overrightarrow{DC}$. Докажите, что середины отрезков BC, MN и AD принадлежат одной прямой.

9. На прямых BC, CA и AB, определяющих треугольник ABC, даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что

$$\overrightarrow{AC_1} = \alpha\,\overrightarrow{C_1B}, \quad \overrightarrow{BA_1} = \beta\,\overrightarrow{A_1C}, \quad \overrightarrow{CB_1} = \gamma\,\overrightarrow{B_1A}.$$

Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой, то $\alpha\beta\gamma = -1$. Проверьте истинность обратного предложения.

10. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямой AB взята такая точка M, что $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Прямая DM пересекает (AC) в точке N, для которой $\overrightarrow{AN} = l\overrightarrow{AC}$. Вычислите l.

11. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая l, пересекающая прямые AB и AD соответственно в точках M и N. Докажите, что если $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = l\overrightarrow{AN}$, то $k + l = 1$.

12. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Прямая g, параллельная прямой CC_1, пересекает прямые (AB), (BC) и (CA) соответственно в точках C_0, A_0, B_0. Докажите, что сумма $\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{A_0C_0}$ не зависит от выбора прямой g.

13. На плоскости даны четыре прямые, из которых никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что если одна из четырех прямых параллельна медиане треугольника, определяемого тремя другими, то аналогичными свойствами обладает каждая из трех остальных данных прямых.

14. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены соответственно прямые l, m и n, пересекающиеся в точке S. Докажите, что прямые l_1, m_1 и n_1, проходящие соответственно через середины A_0, B_0 и C_0 сторон BC, CA и AB параллельно l, m и n, также пересекаются в одной точке.

15. Даны треугольник ABC и точка M; точки A_1, B_1 и C_1 — середины его сторон BC, CA и AB. Через вершины A, B и C проведены прямые, параллельные прямым MA_1, MB_1 и MC_1 соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

16. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Прямая p пересекает отрезки AC, BC и CC_1 соответственно в точках P, Q и M. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PC}|}+\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{QC}|}\right)=\frac{|\overrightarrow{C_1M}|}{|\overrightarrow{MC}|}.$$

17. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

18. Дан правильный n-угольник $A_1A_2 \dots A_n$ с центром O. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}.$$

19. Даны правильный n-угольник $A_1A_2 \dots A_n$ с центром O и точка M. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}=n\cdot\overrightarrow{MO}.$$

20. Даны два произвольно расположенных правильных n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ с центрами O_1 и O_2. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iB_i}=n\,\overrightarrow{O_1O_2}.$$

21*. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центром O. Выразите векторы $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ и $\overrightarrow{OA_5}$ через $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$.

22. Докажите, что если длина средней линии MN четырехугольника $ABCD$ равна полусумме длин его сторон AB и CD ($M \in [BC]$, $N \in [DA]$), то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

23. Даны два параллелограмма $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что каждый из трех отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не больше суммы двух других отрезков.

24*. На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

25*. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты, имеющие центры соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

26*. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

27*. На продолжениях высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC за его вершины A и B отложены отрезки AA_2 и BB_2, причем $|AA_2| = |BC|$ и $|BB_2| = |AC|$. Докажите, что $|CA_2| = |CB_2|$, $[CA_2] \perp [CB_2]$.

28*. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты CAA_1C_1 и CBB_1C_1'. Докажите, что медиана треугольника CC_1C_1', проведенная через вершину C, перпендикулярна стороне AB и равна ее половине.

29*. На сторонах четырехугольника $ABCD$ вне его построены квадраты ABB_1A_1, BCC_1B_1', CDD_1C_1' и $DAA_1'D_1'$ с центрами P, Q, R, S соответственно. Докажите, что отрезки PR и QS равны и перпендикулярны.

30*. Даны треугольник ABC и центр O вписанной в него окружности. Докажите равенство:

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.

§ 4. ГОМОТЕТИЯ

1. Даны две неконгруэнтные полосы (a, b) и (a_1, b_1) с параллельными краями. Найдите множество всех гомотетий, отображающих первую полосу на вторую.

2. Докажите, что композиция двух гомотетий есть либо гомотетия, либо перенос, либо тождественное преобразование.

3. При каком условии две различные гомотетии имеют общую пару соответственных точек? Постройте такую пару точек, если она существует.

4. Докажите, что гомотетия с любым центром и любым коэффициентом отображает окружность на окружность.

5. Докажите, что если общая точка двух окружностей служит центром гомотетии, отображающей одну окружность на другую, то окружности в этой точке касаются.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Проведите через точку A прямую p так, чтобы отношение длин хорд M_1A и M_2A, высекаемых окружностями на прямой p, было равно данному числу k: $|M_1A| : |M_2A| = k$.

7. Через точку M, принадлежащую открытому кругу, проведите хорду AB, чтобы она точкой M делилась в данном отношении.

8. Докажите, что одну из двух неконгруэнтных окружностей можно отобразить на другую посредством двух гомотетий.

9. На прямой l даны две пары точек A, B и A_1, B_1, причем $|AB| \neq |A_1B_1|$. Постройте центр гомотетии, отображающей A на A_1 и B на B_1.

10. Даны угол и принадлежащая ему точка. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся сторон угла.

11. Даны угол и его внутренняя точка M. Проведите через M прямую так, чтобы отрезок ее с концами A и B на сторонах угла делился точкой M в данном отношении.

12*. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся прямой AB в точке M. Пусть M_1 диаметрально противоположна точке M на вписанной окружности. Докажите, что прямая CM_1 пересекает прямую AB в такой точке C_1, что

$$|AC| + |AC_1| = |BC| + |BC_1|.$$

13. Две окружности ω_1 и ω_2 различных радиусов касаются в точке M. Построены произвольные перпендикулярные хорды MA_1, $A_1 \in \omega_1$ и MA_2, $A_2 \in \omega_2$. Докажите, что множество прямых A_1A_2 содержится в центральном пучке прямых.

14. Даны три окружности, которые попарно касаются внешним образом. Постройте посредством одной линейки центры этих окружностей (точки касания окружностей заданы).

15. В данный сегмент впишите квадрат так, чтобы две вершины принадлежали дуге, а две другие — основанию сегмента.

16. Дан треугольник ABC. Постройте квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали прямой AB, а две другие — соответственно прямым AC и BC.

17. В данный сектор впишите квадрат так, чтобы две вершины принадлежали дуге, а две другие — радиусам.

18. В данный сектор впишите квадрат, чтобы одна вершина принадлежала дуге, вторая — радиусу, две другие — второму радиусу.

19. В окружности проведены два радиуса. Постройте хорду этой окружности, чтобы она этими радиусами делилась на три конгруэнтных отрезка.

20*. Стороны BC, CA, AB равностороннего треугольника разделены точками A_1, B_1, C_1 в равных отношениях k:

$$\frac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{|\overrightarrow{CA_1}|}{|\overrightarrow{A_1B}|} = \frac{|\overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{C_1A}|} = k.$$

Стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ разделены точками A_2, B_2, C_2 в равных отношениях $\frac{1}{k}$:

$$\frac{|\overrightarrow{A_1B_2}|}{|\overrightarrow{B_2C_1}|} = \frac{|\overrightarrow{C_1A_2}|}{|\overrightarrow{A_2B_1}|} = \frac{|\overrightarrow{B_1C_2}|}{|\overrightarrow{C_2A_1}|} = \frac{1}{k}.$$

Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен треугольнику ABC. Вычислите коэффициент гомотетии.

§ 5. ПОДОБИЕ

1. Даны две различные точки A и B и две различные точки A_1 и B_1. Докажите, что существует два и только два подобия, отображающие A на A_1 и B на B_1.

2. Даны две пары точек (A, A_1) и (B, B_1), причем $|AB| \neq |A_1B_1|$. Постройте неподвижные[1] точки двух подобий, в которых A отображается на A_1, B — на B_1.

3. Даны три одинаковой ширины d полосы (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1). Прямые a, b, c задают треугольник ABC, а прямые a_1, b_1, c_1 — треугольник $A_1B_1C_1$, содержащийся в первом.

Зная площадь S и периметр $2p$ первого треугольника, вычислите площадь S_1 и периметр $2p_1$ второго.

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте второй четырехугольник $PQRS$, чтобы его стороны и диагонали были параллельны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$.

5. Найдите зависимость между длинами сторон a, b, c треугольника ABC, если треугольник ABG (G — точка пересечения медиан треугольника ABC) подобен треугольнику, длины сторон которого равны длинам медиан данного треугольника.

6. Через точку P к двум пересекающимся в точке Q прямым проведены перпендикуляры PA и PB. Пусть H — ортоцентр треугольника QAB. Докажите, что отображение P на H есть подобие и найдите коэффициент подобия (угол φ между прямыми отличен от прямого).

7. Дан четырехугольник $ABCD$. A_1 и C_1 — ортогональные проекции вершин A и C на диагональ BD, B_1 и D_1 — ортогональные проекции B и D на диагональ AC. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен данному и вычислите коэффициент подобия. (Диагонали AC и BD не перпендикулярны.)

8. В окружность с центром O вписан треугольник ABC. Поворот около O на угол α, отличный от $180°$, отображает треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. Соответствующие в повороте прямые BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1 пересекаются в точках A_0, B_0, C_0. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC. Найдите коэффициент подобия.

9. Квадрат $ABCD$ со стороной a повернут около своего центра на угол α, причем $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1 являются вершинами квадрата. Выразите его сторону через a и α.

10. При повороте около своего центра квадрат $ABCD$ отображается на квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 пересекаются в точках, являющихся вершинами квадра-

---

[1] Точка, которая при подобии отображается на себя, называется неподвижной точкой подобия. Эту точку называют также центром подобия.

та. Вычислите сторону a_1 этого квадрата, если угол поворота равен α, а сторона данного квадрата равна a.

11. Докажите, что серединные перпендикуляры сторон неравнобочной трапеции определяют трапецию, подобную данной. Вычислите коэффициент подобия.

12. Дан треугольник ABC. На прямых BC, CA и AB найдите соответственно точки A_1, B_1 и C_1, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был подобен треугольнику ABC и одинаково с ним ориентирован.

13. Даны два подобных и одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если O — произвольная точка и четырехугольники AA_1OA_0, BB_1OB_0, CC_1OC_0 — параллелограммы, то треугольник $A_0B_0C_0$ подобен данным и с ними одинаково ориентирован.

14. Постройте треугольник, подобный и одинаково ориентированный данному, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой, а две другие принадлежали: 1) данным двум окружностям, 2) данным двум прямым.

15. Даны две концентрические окружности. Постройте квадрат $ABCD$, чтобы вершины A и B принадлежали одной окружности, а вершины C и D — другой.

§ 6. КООРДИНАТЫ

1. Запишите с помощью прямоугольных координат формулы параллельного переноса, отображающего точку $A\ (a,\ b)$ на точку $A_1\ (a_1,\ b_1)$.

2. Две прямоугольные системы координат имеют общее начало O, причем $(\widehat{Ox, Ox'}) = \varphi$. В системе координат Oxy точка M имеет координаты $(x,\ y)$, а в системе $Ox'y'$ — координаты $(x',\ y')$. Составьте формулы, позволяющие по x и y вычислить x' и y'.

3. Запишите посредством прямоугольных координат формулы поворота плоскости около начала координат на угол φ.

4. Запишите посредством прямоугольных координат формулы осевой симметрии плоскости относительно оси $y = kx + b$.

5. Даны два отрезка AB и A_1B_1 равной длины. Прямоугольные координаты концов этих отрезков таковы:

$$A\ (0;\ 0),\ B\ (5;\ 0),\ B_1\ (3;\ 4),\ A_1\ (0;\ 0).$$

Составьте уравнения поворота плоскости, отображающего A на A_1, B на B_1.

6. Центр гомотетии S имеет координаты x_0, y_0, коэффициент гомотетии равен k. Составьте формулы, позволяющие по координатам x, y точки M вычислить координаты x', y' точки M', являющейся образом точки M в данной гомотетии.

7. Даны две системы координат с сонаправленными осями: $Ox \uparrow\uparrow O'x'$, $Oy \uparrow\uparrow O'y'$. В первой системе координат точка M имеет координаты x, y, а в другой — x', y'. Найдите формулы, позволяющие по координатам x и y вычислить координаты x' и y', если точка O' имеет в системе Oxy координаты a, b.

8. Методом координат докажите, что композиция двух гомотетий есть гомотетия, или, в частности, параллельный перенос, или тождественное отображение.

9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A (3; —1) параллельно прямой $y = 2x - 5$.

10. Дана прямая $y = kx + b$. Докажите, что для любых двух точек этой прямой $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, выполняется равенство:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

11. Даны точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Составьте уравнение множества точек $M(x, y)$, для которых

$$|MA|^2 + |MB|^2 = k^2.$$

Дайте геометрическое истолкование полученному уравнению.

12. Даны точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Составьте уравнение множества точек $M(x, y)$, для которых

$$|MA|^2 - |MB|^2 = k^2.$$

Дайте геометрическое истолкование полученному уравнению.

13. Запишите условие того, что точки

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$$

принадлежат одной прямой.

14. Докажите посредством координат, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

15. Найдите условие перпендикулярности двух прямых:

$$y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2.$$

16. Даны два отрезка AB и CD координатами своих концов:

$$A(a_1, a_2),\ B(b_1, b_2),\ C(c_1, c_2),\ D(d_1, d_2).$$

Запишите условие перпендикулярности этих отрезков.

17. Вычислите расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $y = kx + b$.

18. Докажите, что сумма квадратов расстояний всех вершин квадрата до прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.

19. Вычислите площадь треугольника ABC по заданным прямоугольным координатам его вершин:

$$A(1; 2),\ B(2; 4),\ C(-2; 5).$$

20. Определите вид треугольника по координатам его вершин (без чертежа):

$$A(-1; -2),\ B(5; -2),\ C(2; 3).$$

21. В квадрат вписана окружность радиуса R. Докажите, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до сторон квадрата постоянна и равна $6R^2$.

22. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M. Докажите, что величина выражения $|MA|^2 - |MB|^2 + |MC|^2 - |MD|^2$ не зависит от положения точки M.

23. Дан прямоугольник. Найдите множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до концов одной диагонали прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до концов его другой диагонали.

24. Даны две окружности: $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - x = 0$. Найдите координаты центров подобия этих окружностей.

25. Составьте уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $M(x_0, y_0)$.

26. Докажите, что $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

27. Докажите, что параболу $y = x^2$ можно центральной симметрией отобразить на параболу $y = -x^2 + mx + n$.

28. Докажите, что параболы $y = x^2$, $y = px^2 + qx + r$, $p \neq 1$, гомотетичны.

29. Даны две параболы: $y = x^2$, $y = 2x^2 + x - 1$. Найдите координаты центра гомотетии этих парабол.

30. На параболе $y = x^2$ даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что если прямые AB и CD наклонены к оси Ox под равными углами, то под равными углами к оси Ox наклонены также прямые AC и BD, AD и BC (имеется в виду, что среди хорд, определяемых данными точками, нет параллельных).

31. Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M(x_0, x_0^2)$.

32. Две касательные к параболе $y = x^2$ пересекаются в точке $M(a, b)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки касания.

33. Шесть точек A, B, C, D, E, F принадлежат параболе. Докажите, что если хорды AB и DE параллельны, а также BC и EF параллельны, то и хорды CD и FA также параллельны.

Проверьте истинность этого результата для гиперболы $xy = p$.

34. На гиперболе $xy = 1$ даны три точки: $A\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right)$, $B\left(x_2, \frac{1}{x_2}\right)$, $C\left(x_3, \frac{1}{x_3}\right)$. Докажите, что точка H пересечения высот треугольника ABC принадлежит гиперболе.

35. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены три пары прямых: a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2, причем $a_1 \parallel b_1 \parallel c_1$, $a_2 \parallel b_2 \parallel c_2$. Докажите, что прямые, содержащие вторые диагонали образовавшихся параллелограммов с диагоналями BC, CA и AB, имеют только одну общую точку или параллельны.

§ 7. КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД

1. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (5; —4). Вычислите координаты векторов: 1) $2\vec{a}$; 2) $-\vec{a}$; 3) $-4\vec{a}$; 4) $\frac{1}{5}\vec{a}$.

2. Даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Чему равны координаты вектора $\overrightarrow{AB}$?

3. Найдите координаты середины M отрезка AB, если: 1) A (1; 3), B (2; 5); 2) A (2; —1), B (0; 4); 3) A (1; —1), B (—1; 1).

4. Найдите координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении 1 : 2, если: 1) A (—1; 3), B (2; 1); 2) A (2; —3), B (0; 2).

5. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы своими координатами:

$$\overrightarrow{AB}(2;\ -1),\quad \overrightarrow{CD}(3;\ 1).$$

Вычислите координаты векторов: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$.

6. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы своими координатами:

$$\overrightarrow{AB}(3;\ 4),\quad \overrightarrow{CD}(-2;\ 1).$$

Вычислите координаты векторов: 1) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$; 3) $-\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{DC}$; 4) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}$.

7. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ своими координатами:

$$\vec{a}(2,\ 3),\quad \vec{b}(-1;\ -1),\quad \vec{c}(0;\ 2).$$

Вычислите координаты векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$; 4) $3\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$.

8. Даны три точки A (2; 1), B (3; —2), C (0; k). При каком значении k данные точки принадлежат одной прямой?

9. Дан треугольник ABC: A (1; 2), B (—2; 3), C (2; 4). Точки M, N, P — середины сторон BC, CA и AB. Вычислите координаты векторов $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$.

10. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(2;\ 3),\quad B(-1;\ 4),\quad C(1;\ 1).$$

Вычислите координаты вершины D параллелограммов: 1) $ABCD$; 2) $ACBD$; 3) $CABD$.

11. Дан треугольник ABC:

$$A(0;\ -1),\quad B(3;\ 1),\quad C(1;\ -2);$$

$[AA_1]$, $[BB_1]$ и $[CC_1]$ — его медианы. Вычислите координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

12. Докажите, что отрезки AB и CD параллельны:

$$A(1;\ 3),\quad B(2;\ -1),\quad C(0;\ 4),\quad D(2;\ -4).$$

13. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены: A (1; —2), B (5; 4), C (2; —1), D (0; —4).

14. Убедитесь в том, что точки A, B, C и D являются вершинами параллелограмма: A (1; 0), B (3; 4), C (2; —1), D (2; 5). Назовите этот параллелограмм.

15. Даны четыре точки:

$$A\ (1;\ 1),\quad B\ (2;\ -1),\quad C\ (4;\ 0),\quad D\ (8;\ -3).$$

Убедитесь в том, что эти точки являются вершинами трапеции. Назовите эту трапецию.

16. Даны два ненулевых вектора своими координатами:

$$\vec{a}\,(m,\ n),\quad \vec{b}\,(p,\ q).$$

Запишите необходимое и достаточное условие коллинеарности этих векторов.

17. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно вектору $\vec{p}$:

1) $A\,(2;\ -1)$, $\vec{p}\,(4;\ 1)$;

2) $A\,(1;\ 1)$, $\vec{p}\,(-1;\ 3)$;

3) $A\,(3;\ 2)$, $\vec{p}\,(2;\ 0)$.

18. Дана прямая своим общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0.$$

Докажите, что прямая параллельна вектору $\vec{p}\,(-B,\ A)$.

19. При каком значении m прямые

$$2x + my - 1 = 0,$$
$$mx + 8y + 2 = 0$$

параллельны?

20. Даны два ненулевых вектора своими координатами:

$$\vec{a}\,(m,\ n),\ \vec{b}\,(p,\ q).$$

Докажите, что необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство:

$$mp + nq = 0.$$

21. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})} = +90^\circ$. Координаты вектора $\vec{a}$ равны $(x_0;\ y_0)$. Чему равны координаты вектора $\vec{b}$?

22. Дан треугольник ABC координатами своих вершин:

$$A\ (1;\ 1),\ B\ (2;\ -1),\ C\ (-1;\ 4).$$

При повороте около начала координат на $+90^\circ$ данный треугольник отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Вычислите координаты вершин A_1, B_1, C_1.

23. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (2; —3) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (—4; 1).

24. Известны координаты вершин A и B квадрата $ABCD$:

$$A\ (1;\ -2),\ B\ (4;\ -1).$$

Вычислите координаты вершин C и D.

25. Дан квадрат $ABCD$. Известны координаты его вершин A и C:

$$A\ (2;\ -4),\ C\ (-1;\ 3).$$

Вычислите координаты вершин B и D и центра M данного квадрата.

26. Убедитесь в том, что прямые

$$3x - y + 4 = 0,$$
$$x + 3y - 1 = 0$$

перпендикулярны.

27. Дана прямая своим уравнением:

$$5x + 3y - 1 = 0.$$

Найдите координаты единичного вектора, параллельного этой прямой.

28. При каком значении k треугольник ABC равнобедренный ($|CA| = |CB|$):

$$A\ (1;\ 3),\quad B\ (2;\ -1),\quad C\ (4;\ k)?$$

§ 8. ПЛОЩАДИ

1. Докажите, что если точки P, Q, R и S — середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, то

$$\text{пл.}\ (ABCD) = 2\ \text{пл.}\ (PQRS).$$

2. Докажите, что если средняя линия четырехугольника делит его на две равновеликие части, то четырехугольник есть трапеция.

3. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей двух неприлежащих четырехугольников составляет половину площади четырехугольника.

4. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены произвольные параллелограммы $ACMN$ и $BCPQ$, стороны MN и PQ которых пересекаются в точке S. Докажите, что площадь параллелограмма $ABUN$, где $[BU] \parallel [SC]$ и $|BU| = |SC|$, равна сумме площадей параллелограммов $ACMN$ и $BCPQ$.

5. Через точку, принадлежащую открытому углу, проведите прямую так, чтобы она со сторонами угла ограничила треугольник наименьшей площади.

6. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ даны точки M и N такие, что $|AM| : |MB| = |CN| : |ND|$. Пусть отрезки AN и DM пересекаются в точке P, а отрезки CM и BN — в точке Q. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна сумме площадей треугольников APD и BCQ.

7. Прямой, проходящей через данную точку, взятую на стороне треугольника, разделите этот треугольник на две равновеликие части.

8. Через точку пересечения медиан треугольника проведена прямая. Докажите, что отношение площади образовавшегося треугольника к площади оставшейся части не меньше $\frac{4}{5}$.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, обладающий следующими свойствами: прямая, проходящая через C параллельно (AD), и прямая, проходящая через D параллельно (BC), пересекаются на стороне AB в точке M. Докажите, что

$$S_{CMD} = \sqrt{S_{AMD} \cdot S_{BMC}}.$$

10. Через точку M, принадлежащую треугольнику ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Каждые две из этих прямых и сторона данного треугольника определяют новый треугольник. Докажите, что если эти треугольники имеют площади S_1, S_2, S_3, а площадь данного треугольника равна S, то

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

11. Точка M принадлежит четырехугольнику $ABCD$. Будет ли этот четырехугольник параллелограммом, если треугольники AMB, BMC, CMD, DMA равновелики?

12. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки M и N делят сторону AB на три конгруэнтных отрезка, точки M_1 и N_1 делят противоположную сторону DC также на три конгруэнтных отрезка.

Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника MNN_1M_1 составляет $\frac{1}{3}$ площади данного четырехугольника.

13*. Дан четырехугольник $ABCD$. Каждая его сторона разделена на три конгруэнтных отрезка и точки деления, расположенные на противоположных сторонах, соединены отрезками, разделяющими данный четырехугольник на 9 выпуклых четырехугольников.

Докажите, что тот из них, который не имеет общих точек со сторонами данного, составляет $\frac{1}{9}$ площади данного четырехугольника.

14. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1, причем $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = 2$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 попарно пересекаются в точках M, N, P:

$$M = (BB_1) \cap (CC_1), \quad N = (CC_1) \cap (AA_1), \quad P = (AA_1) \cap (BB_1).$$

Докажите, что площадь треугольника MNP составляет $\frac{1}{7}$ площади данного треугольника.

15. Дан параллелограмм $ABCD$, точки M, N, P, Q — середины его сторон AB, BC, CD, DA. Прямые AP, CM, DN и BQ своим пере-

сечением определяют четырехугольник. Докажите, что этот четырехугольник есть также параллелограмм и его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного параллелограмма.

16. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Прямые DM и BN пересекаются в точке P. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

17. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и AD даны соответственно точки M и N, причем $|AM|:|MB|=k$, $|AN|:|NK|=l$. Прямые BN и DM пересекаются в точке P. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

18. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с вершинами, принадлежащими противолежащей стороне. Докажите, что площадь образовавшегося восьмиугольника составляет $\frac{1}{6}$ площади параллелограмма.

19*. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ и около него же описан треугольник $A_2B_2C_2$, причем соответствующие стороны построенных треугольников параллельны. Докажите, что

$$S_{ABC}^2 = S_{A_1B_1C_1} \cdot S_{A_2B_2C_2}.$$

20*. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что треугольники ACE и BDF равновелики.

21*. Дан пятиугольник, в котором проведены пять отрезков, соединяющих вершины пятиугольника с серединами противолежащих им сторон. Докажите, что если четыре из этих отрезков имеют общую точку, то она принадлежит и пятому отрезку.

22. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны CD равна a, а расстояние от середины $[AB]$ до (CD) равно b. Найдите площадь трапеции.

23. Докажите, что если длины диагоналей выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин средних линий четырехугольника.

24. Длины диагоналей четырехугольника равны a, а сумма длин его средних линий равна b. Вычислите площадь четырехугольника.

25. В квадрат, длина стороны которого a, вписан прямоугольник так, что каждой стороне квадрата принадлежит вершина прямоугольника. Вычислите длину диагонали прямоугольника, если он отличен от квадрата и его площадь равна S.

26. Из основания высоты треугольника проведены к двум другим его сторонам перпендикуляры. Докажите, что если основания этих перпендикуляров расположены на одной прямой с центром описанной около треугольника окружности, то эта прямая делит треугольник на равновеликие части.

§ 9. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

1. Найдите величину угла C треугольника ABC, если $2h_c = |AB|$, $\widehat{A} = 75^\circ$.

2. Через вершины A и B равнобедренного треугольника ABC, в котором $|AC| = |BC|$, $\widehat{C} = 80^\circ$, проведены прямые, пересекающиеся в точке O внутри треугольника. Найдите угол ACO, если $\widehat{OAB} = 10^\circ$, $\widehat{ABO} = 20^\circ$.

3. Дан пятиугольник $ABCDE$, у которого $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{E}$, $\widehat{D} = 60^\circ$, $|EA| = |AB| = |BC| = a$. Вычислите $|CD|$, $|DE|$ и площадь этого пятиугольника.

4. Дан пятиугольник $ABCDE$, у которого $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = \widehat{E}$, $|BC| = m$, $|CD| = n$, $|DE| = p$. Вычислите $|AB|$, $|AE|$.

5. Докажите, что если прямая, проходящая через ортоцентр и центроид треугольника ABC, параллельна стороне AB этого треугольника, то $\operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = 3$.

6. Каким соотношением связаны между собой длины сторон треугольника ABC, если разность углов A и B равна 90°?

7. Вершины B, C, D квадрата $ABCD$ с длиной стороны a расположены по одну сторону от прямой l, а вершина A — по другую. Найдите расстояние от центра квадрата до прямой l, если произведения расстояний противоположных вершин квадрата до прямой l равны между собой.

8. Найдите зависимость между длинами сторон a, b и c треугольника ABC, если окружность, проведенная через вершину C и середины сторон AC и BC, проходит через точку пересечения медиан треугольника.

9. Найдите зависимость между длинами сторон треугольника ABC, в котором

$$\cos \widehat{B} = \frac{R - r}{R}.$$

10. Найдите зависимость между длинами сторон треугольника ABC, если его медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1 пересекаются в одной точке.

11. На стороне AB треугольника ABC дана точка M такая, что $\widehat{ACM} = \varphi$, $\widehat{BCM} = \psi$. Построена точка $N \in (AB)$, причем $\widehat{NCM} = 90^\circ$. Вычислите отношение $|AN| : |NB|$.

12. Выясните вид треугольника ABC, если его стороны a, b и высоты h_a и h_b связаны соотношением

$$a + h_a = b + h_b.$$

13. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($[AB] \parallel [CD]$) диагонали пересекаются в точке O под углом 60° ($\widehat{AOB} = 60^\circ$). Докажите, что

середины отрезков AO, OD и BC являются вершинами равностороннего треугольника.

14. Докажите, что если H_1 и H_2 — основания высот треугольника ABC, проведенных из вершин A и B, то

$$|H_1H_2| = |AB| \cdot |\cos \widehat{C}|.$$

15. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M, а продолжения сторон BC и DA пересекаются в точке N. Докажите, что если биссектрисы углов M и N перпендикулярны, то около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

16. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

17. В окружность вписан треугольник ABC. Касательные к окружности в точках A и B пересекаются в точке D. Пусть прямая CD пересекает (AB) в точке M. Докажите, что

$$|AM| : |MB| = |AC|^2 : |BC|^2.$$

18. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята произвольная точка D. Докажите, что

$$|CD|^2 = |AC|^2 - |AD| \cdot |DB|.$$

19. Докажите, что если около треугольника описана окружность радиуса R и в него вписана окружность радиуса r, а d — расстояние между центрами этих окружностей, то $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

20. Докажите, что если CC_1 — биссектриса угла C треугольника ABC, то

$$|CC_1|^2 = |CA| \cdot |CB| - |AC_1| \cdot |BC_1|.$$

21. В треугольник ABC вписаны две конгруэнтные окружности так, что они касаются друг друга, причем одна из окружностей касается сторон AB и AC, а другая — сторон AB и BC.

Докажите, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{c} + \frac{1}{r},$$

где $c = |AB|$, r — радиус окружности, вписанной в треугольник, ρ — радиус каждой из двух конгруэнтных окружностей.

22. Дан параллелограмм $ABCD$. Около треугольников ABC и ABD описаны окружности (O_1, R_1), (O_2, R_2). Докажите истинность следующего соотношения:

$$|O_1D|^2 + |O_2C|^2 = R_1^2 + R_2^2.$$

23. Длины сторон параллелограмма равны a и b, а длины диагоналей — e и f. Докажите, что необходимым и достаточным условием

того, что угол параллелограмма равен 45°, является выполнение соотношения:

$$e^2f^2 = a^4 + b^4.$$

24. Докажите, что расстояние d от вершины C треугольника ABC до точки C_1, принадлежащей стороне AB, выражается формулой:

$$d^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2,$$

где $p = |AC_1| : |AB|$, $q = |BC_1| : |AB|$, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ (формула Стюарта).

25. Докажите, что длина l биссектрисы угла A треугольника ABC выражается через длины его сторон следующей формулой:

$$l_A = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

где p — полупериметр треугольника.

26. Докажите, что расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника, до точки H пересечения его высот выражается через стороны треугольника и радиус описанной окружности формулой:

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

27. Проверьте истинность следующих формул для углов треугольника:

$$\sin^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1-\cos\widehat{A}}{2}, \quad \cos^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1+\cos\widehat{A}}{2}.$$

28. Докажите, что для треугольника ABC имеют место следующие соотношения между величинами его элементов:

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1}{bc}\sqrt{(p-b)(p-c)},$$

$$\cos\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{p(p-a)} : \sqrt{bc}$$

(p — полупериметр треугольника).

29. Докажите истинность следующих соотношений для треугольника:

$$a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A} = c,$$

$$b\cos\widehat{C} + c\cos\widehat{B} = a,$$

$$c\cos\widehat{A} + a\cos\widehat{C} = b.$$

Выведите из этих соотношений теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

30. Докажите, что косинусы углов треугольника связаны соотношением:

$$\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C} + 2\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} \cdot \cos \widehat{C} = 1.$$

31. Докажите, что для углов треугольника ABC имеет место равенство:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = 1.$$

32. Докажите, что для углов треугольника имеет место равенство:

$$\operatorname{ctg} \widehat{A} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{B} + \operatorname{ctg} \widehat{B} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{C} + \operatorname{ctg} \widehat{C} \cdot \operatorname{ctg} \widehat{A} = 1.$$

33. Докажите, что углы треугольника ABC связаны соотношениями:

1) $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cdot \cos \widehat{A}$;

2) $\cos \frac{\widehat{C}}{2} = \sin \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{B}}{2} + \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{B}}{2}$;

3) $\sin 2\widehat{C} = -\sin 2\widehat{A} \cdot \cos 2\widehat{B} - \sin 2\widehat{B} \cdot \cos 2\widehat{A}$.

34. Докажите, что углы треугольника ABC связаны следующими соотношениями:

1) $\sin^2 \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^2 \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^2 \frac{\widehat{C}}{2} + 2\sin \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{C}}{2} = 1$;

2) $\cos^2 2\widehat{A} + \cos^2 2\widehat{B} + \cos^2 2\widehat{C} - 2\cos 2\widehat{A} \cdot \cos 2\widehat{B} \cdot \cos 2\widehat{C} = 1$.

35. Точка M принадлежит прямоугольнику $ABCD$. Докажите, что

$$\frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{\operatorname{tg} \widehat{AMC}}{\operatorname{tg} \widehat{BMD}}.$$

36. Углы треугольника ABC связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \widehat{A} \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = 2.$$

Докажите, что точка пересечения высот треугольника делит высоту, проведенную к стороне AB, пополам.

§ 10. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

1. Найдите множество M точек пересечения медиан всех треугольников, вписанных в данную окружность и имеющих общую сторону AB.

2. Найдите множество M всех точек P треугольника ABC, для которых сумма площадей треугольников APB и BPC равна площади треугольника CPA.

3. Найдите множество M всех точек P треугольника ABC, для которых сумма площадей любых двух треугольников APB, BPC, CPA больше площади третьего.

4. Даны два непараллельных отрезка AB и CD. Найдите множество M всех точек P, для которых площади треугольников PAB и PCD равны.

5. Охарактеризуйте множество M всех точек, из которых данный отрезок AB виден под острым (тупым) углом.

6. Дан квадрат $ABCD$. Найдите множество M всех точек P, для которых сумма квадратов расстояний до прямых AB и CD равна сумме квадратов расстояний до прямых BC и AD.

7. $|PA|$ и $|PB|$ — расстояния точки P до двух данных взаимно перпендикулярных прямых. Назовите множество M точек P, для которых $|PA| + |PB| = c$, где $c > 0$ — постоянная.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC, $|CA| = |CB|$. На сторонах AC и BC взяты соответственно произвольные точки P и Q такие, что $|AP| = |CQ|$. Найдите множество M середин всех отрезков PQ.

9. Найдите множество M точек пересечения высот всех треугольников, вписанных в данную окружность.

10. Дан угол AOB. Для точки $C \in AOB$ построены проекции P и Q на прямых OA и OB. Найдите множество M всех точек C, для которых $|PQ| = d$, где $d > 0$ — постоянная.

11. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая a, пересекающая ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Пусть точка P делит отрезок CD в отношении $\overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PD} = k$. Найдите множество M точек P, когда прямая a описывает весь пучок прямых с центром A.

12. Докажите, что множество M всех точек P плоскости, для которых

$$|PA| : |PB| = k,$$

где A и B — данные различные точки, а k — данное положительное число, отличное от 1, есть окружность.

13. На окружности даны точки A и B. Назовите множество M всех точек пересечения пар конгруэнтных хорд AN и BP данной окружности.

14. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите множество M всех точек P, для которых $|PA| + |PB| = |PC|$.

15. Найдите множество M всех точек, принадлежащих квадрату, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до сторон квадрата постоянна.

16. Найдите множество M центров всех окружностей, вписанных в треугольники, имеющие общую сторону и вписанные в данную окружность.

17. Отрезок постоянной длины a скользит своими концами по сторонам угла. Докажите, что множество M точек пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам угла в концах отрезка, есть дуга окружности.

18. Дан треугольник ABC. На прямой AB дана точка K, через которую проведена прямая, пересекающая (AC) и (BC) соответственно в точках N и P. Окружности, описанные около треугольников AKN и BKP, пересекаются в точке Q. Докажите, что множество M точек Q есть окружность, описанная около треугольника ABC.

19. Прямая пересекает окружность радиуса R в точках A и B. Через произвольную точку P этой прямой проведены две окружности, касающиеся данной окружности в точках A и B. Найдите: 1) зависимость между радиусами этих окружностей и 2) множество M вторых точек их пересечения.

20. Три прямые a, b, c пересекаются в одной точке O. Точки A, B и C являются проекциями точки P на данные прямые. Найдите множество M всех точек P, для которых площадь треугольника ABC постоянна и равна S.

21. Даны два отрезка AC и BC. Найдите множество M точек P, для которых окружности ACP и BCP пересекаются под заданным углом.

22*. Найдите множество M середин хорд окружности, которые пересекают данную хорду этой окружности.

23. Найдите множество M всех точек P треугольника ABC, для которых сумма расстояний до прямых AB и BC равна расстоянию до прямой CA.

24. На окружности даны две точки A и B. Найдите множество M точек P, для каждой из которых произведение $|PA| \cdot |PB|$ равно квадрату длины отрезка PT касательной, проведенной из точки P к данной окружности (T — точка касания).

§ 11. НЕРАВЕНСТВА

1. Докажите, что во всяком треугольнике медиана делит угол на части, большая из которых прилежит к меньшей стороне.

2. Докажите, что во всяком треугольнике ABC длина медианы CM не меньше длины биссектрисы CL.

3. Докажите, что сумма квадратов длин пересекающихся (непересекающихся) перпендикулярных хорд окружности больше (меньше) квадрата ее диаметра.

4. На биссектрисе l угла AOB дана точка P, через которую проведены два отрезка CD и MN с концами, принадлежащими сторонам угла. Докажите, что $|CD| < |MN|$, если отрезок CD перпендикулярен биссектрисе угла.

5. Докажите, что если $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, то $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$.

6. Через данную точку M, принадлежащую углу AOB, проведите

прямую p, пересекающую стороны угла в точках S и Q так, чтобы площадь треугольника OSQ была наименьшей.

7. Докажите, что если m_a и m_b — длины медиан прямоугольного треугольника, проведенные к его катетам, то

$$\frac{1}{2} < \frac{m_a}{m_b} < 2.$$

8. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место неравенство

$$l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \leqslant p^2,$$

где l_A — длина биссектрисы угла A треугольника, p — полупериметр.

9. Докажите, что для всякого треугольника имеют место неравенства

$$p^2 \geqslant 27r^2, \quad S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника.

10. Докажите, что для всякого треугольника ABC

$$h_A \leqslant \sqrt{p(p-a)},$$

h_A — длина высоты, проведенной из вершины A, p — полупериметр.

11. Докажите, что длина l_A биссектрисы угла A треугольника ABC связана с длинами его сторон неравенством

$$l_A \leqslant \sqrt{p(p-a)}.$$

12. Докажите, что если в треугольнике ABC $a > b$, то $a + h_a \geqslant b + h_b$, где h_a и h_b — высоты, проведенные к сторонам BC и AC.

13. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место неравенство

$$S \leqslant \frac{b^2 + c^2}{4},$$

где S — площадь, b и c — длины сторон треугольника.

14. Докажите, что если для углов треугольника ABC выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}\widehat{A} \cdot \operatorname{tg}\widehat{B} > 1,$$

то треугольник остроугольный, а если

$$0 < \operatorname{tg}\widehat{A} \cdot \operatorname{tg}\widehat{B} < 1,$$

то треугольник тупоугольный.

15. Докажите, что для треугольника имеет место неравенство

$$a \geqslant 2h \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}.$$

16. Докажите, что для прямоугольного треугольника имеет место неравенство $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, а S — площадь треугольника.

17. Докажите, что для любого треугольника ABC имеют место следующие неравенства

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}, \quad \sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

18. Докажите для углов треугольника ABC истинность следующих неравенств:

1) $\sin^2\frac{\widehat{A}}{2} + \sin^2\frac{\widehat{B}}{2} + \sin^2\frac{\widehat{C}}{2} \geqslant \frac{3}{4}$;

2) $\cos\frac{\widehat{A}}{2} + \cos\frac{\widehat{B}}{2} + \cos\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19. Докажите, что для углов произвольного треугольника ABC имеет место неравенство

$$\sin\left(45^\circ - \frac{\widehat{A}}{4}\right) \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\widehat{B}}{4}\right) \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\widehat{C}}{4}\right) \leqslant \frac{1}{8}.$$

20. Докажите, что для углов произвольного треугольника ABC имеют место следующие неравенства:

1) $\cos\widehat{A} \cdot \cos\widehat{B} \cdot \cos\widehat{C} \leqslant \frac{1}{8}$;

2) $\cos^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{C} \geqslant \frac{3}{4}$.

21. Докажите истинность неравенства

$$\sin^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C} \geqslant \frac{9}{4},$$

где A, B, C — углы треугольника.

22. Докажите, что величины углов треугольника удовлетворяют неравенству

$$\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} \geqslant -\frac{3}{2}.$$

23. В окружности радиуса R проведена хорда AB, стягивающая дугу в 90°. Через A и B проведены параллельные хорды AC и BD. Докажите, что $|AC| \cdot |BD| \leqslant |AB|^2$.

24. Докажите, что для всякого треугольника выполняется неравенство

$$S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}},$$

где S — площадь треугольника, a, b, c — длины сторон.

25. На плоскости даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что

$$|AB| \cdot |CD| + |AC| \cdot |BD| \geqslant |AD| \cdot |BC|.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. а) Такие точки построить нельзя, так как второе условие находится в противоречии с первым.

б) Построение возможно. Точки X, Y и Z лежат на одной прямой, причем точка Y лежит между точками X и Z.

в) Построение возможно. Точки X, Y и Z лежат на одной прямой, причем точка Z лежит между точками X и Y.

2. а) По свойствам расстояний имеем:

$$|AB| + |BC| \geqslant |AC|; \quad |AB| - |BC| \leqslant |AC|.$$

Следовательно, $|AC| \leqslant 20$ км $+ 12$ км; $|AC| \leqslant 32$ км;
$|AC| \geqslant 20$ км $- 12$ км; $|AC| \geqslant 8$ км.

б) Наибольшее из возможных значений для $|AC|$ — 32 км (пункт B лежит между пунктами A и C). Наименьшее из возможных значений для $|AC|$ — 8 км (пункт C лежит между пунктами A и B).

3. Указание. Постройте окружности, радиусы которых 10 см, с центрами в точках A и B, находящимися на расстоянии 9 см. Общая часть полученных кругов отвечает первому требованию. Второму требованию отвечают все точки, принадлежащие хотя бы одному из построенных кругов.

4. Для таких «расстояний» могут не выполняться такие свойства, как $|AB| = |BA|$, $|AB| + |BC| \geqslant |AC|$.

5. а) $r_1 - r_2 \leqslant |O_1O_2| \leqslant r_1 + r_2$.
б) $r_1 - r_2 < |O_1O_2| < r_1 + r_2$.
в) $|O_1O_2| < r_1 - r_2$; $|O_1O_2| > r_1 + r_2$.

6. а) Множество всех точек отрезка AB, кроме точки B.
б) Точка, которая является серединой отрезка AB.
в) Отрезок AC, где C — середина отрезка AB.
г) Все точки отрезка AB, кроме его середины.

7. а) Открытый круг, т. е. круг (O, r) без точек окружности (O, r).

б) Все точки плоскости без точек, принадлежащих кругу (O, r).

в) Все точки плоскости без точек, принадлежащих открытому кругу (O, r).

г) Круг (O, r) без своего центра.

8. а) Две точки A и B.

б) Отрезок AB.

в) Множество внутренних точек отрезка AB.

г) Лучи с началом в точках A и B, лежащие на прямой AB и находящиеся во внешней области относительно окружности (O, r).

д) Те же лучи, что и в предыдущем случае, но без точек A и B (открытые лучи).

е) Прямая AB без двух точек A и B.

10. а) Объединение двух открытых кругов (O_1, r_1) и (O_2, r_2).

б) Все точки плоскости, кроме точек, принадлежащих объединению кругов (O_1, r_1) и (O_2, r_2).

в) Все точки плоскости, кроме точек отрезка O_1O_2.

11. а) Все точки луча BA, кроме внутренних точек отрезка AB и точки B.

б) Все точки луча AB, кроме внутренних точек отрезка AB и точки A.

в) Множество точек отрезка AB.

12. а) Треугольник.

б) Треугольник, четырехугольник.

в) Треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник.

г) Треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник.

13. Пусть точки X и Y принадлежат общей части данных кругов — фигуре F. Все точки отрезка XY принадлежат как первому, так и второму кругу. Следовательно, $[XY] \subset F$. Из этого следует, что фигура F выпуклая.

14. Решение дадим в краткой записи. Пусть $F_1 \cap F_2 = F$ и $X \in F$, $Y \in F$.

Тогда:

$$\frac{\left.\begin{matrix} X \in F \\ Y \in F \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} X \in F_1,\ Y \in F_1 \\ X \in F_2,\ Y \in F_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} [XY] \subset F_1 \\ [XY] \subset F_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow [XY] \subset F}{F_1 \cap F_2 = F \text{ — выпуклая фигура.}}$$

15. а) Четыре различные части.

б) Семь различных частей.

в) Шесть различных частей.

г) Восемь различных частей.

§ 2. КОНГРУЭНТНОСТЬ ФИГУР И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

1. Точки A и B могут быть отображены на точки C и D следующими способами: $A \to C$; $B \to D$ или $A \to D$; $B \to C$. Таким образом, возможны два различных отображения. Каждое из этих отображений обратимо, так как двум точкам первой пары соответствуют две различные точки второй пары.

2. Ответы к этим задачам показаны на рисунках 87—92.

3. Пару точек A, B можно отобразить на множество, состоящее из одной точки C одним способом: $A \to C$, $B \to C$.

Полученное отображение необратимо, так как двум различным точкам первого множества соответствует одна точка второго множества. Примеры других необратимых отображений фигур показаны на рисунке 93.

4. Отображение треугольника ABC на отрезки KD и DM, показанное на рисунке 94, необратимо. Отобразить точки треугольника ABC на точки ломаной $AKDMB$ нельзя, так как неизвестно, какую точку можно взять в качестве образа точек A и B.

5. Множество, состоящее из трех элементов, можно отобразить на множество, состоящее из одного элемента, одним способом (рис. 95, *а*), на множество, состоящее из двух элементов, — шестью способами (рис. 95, *б*), на множество, состоящее из трех элементов, — шестью способами (рис. 95, *в*).

Множество, состоящее из трех элементов, нельзя отобразить на множество, состоящее из четырех элементов, так как в каждом случае будут оставаться элементы, которые не являются образами элементов первого множества.

6. а) Точка отображается на точку.

б) Пара точек отображается на пару точек, расстояние между которыми то же, что и у исходной пары.

в) Концы отрезка отобразятся на пару точек, расстояние между которыми равно длине данного отрезка. Любая точка, принадлежащая данному отрезку, отображается на точку, лежащую между образами концов данного отрезка (по определению перемещения). Это и значит, что образом отрезка является отрезок.

г) Начало луча — точка O отобразится на некоторую точку O_1. Любая точка X луча отобразится на точку X_1 так, что $|OX| = |O_1X_1|$. Образом всех остальных точек данного луча являются точки луча O_1X_1.

д) Прямая при перемещении отображается на прямую. Произвольные точки прямой X, Y, T отображаются так, что $|X_1Y_1| + |Y_1T_1| = |X_1T_1|$, а это значит, что точка Y_1 лежит между точками X_1 и T_1. А мы знаем, что если точка лежит между двумя точками, то все они принадлежат одной прямой.

е) Образами множества точек первой окружности с центром в точке O является множество точек, лежащих на расстоянии первого радиуса от образа центра первой окружности, а это по определению и есть окружность.

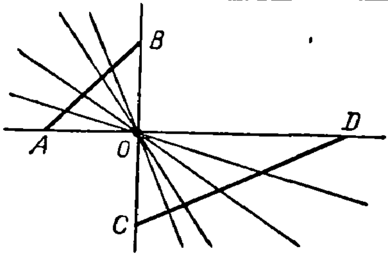


Рис. 87

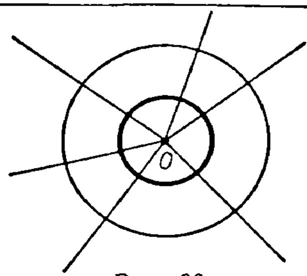


Рис. 88

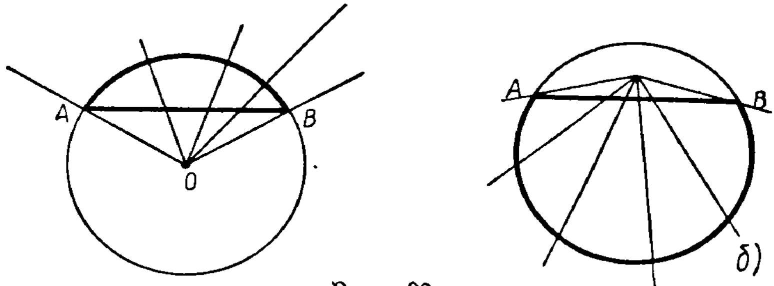


Рис. 89

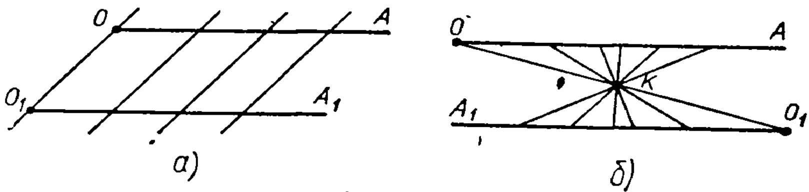


Рис. 90

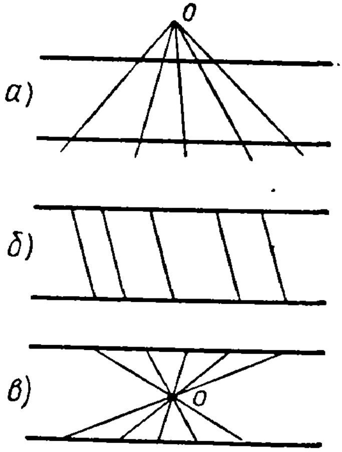


Рис. 91

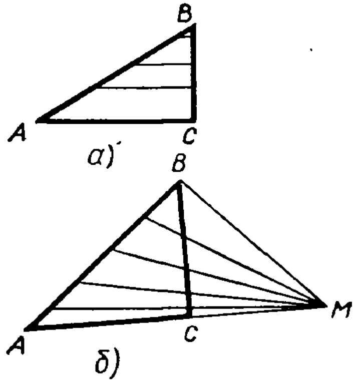


Рис. 92

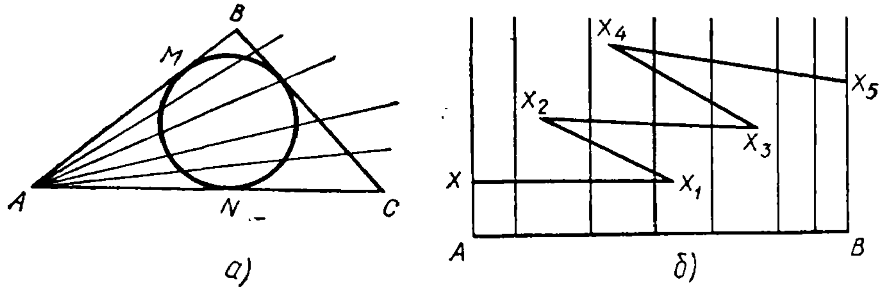


Рис. 93

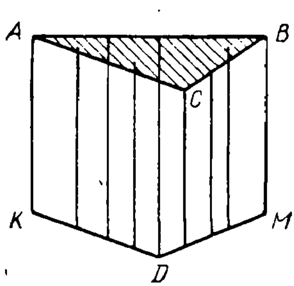


Рис. 94

ж) Круг отображается на круг.

з) Для решения этой задачи полезно представлять угол как пересечение двух полуплоскостей. В этом случае доказательство сводится к доказательству следующих утверждений: перемещение отображает полуплоскость на полуплоскость и перемещение отображает пересечение двух множеств на пересечение их образов.

9. 2) При любом повороте на себя отображается плоскость.

10. При решении этих задач следует рассмотреть различные случаи расположения центра поворота. При этом, если рассматривать угол поворота 0°, то расположение центра поворота произ-

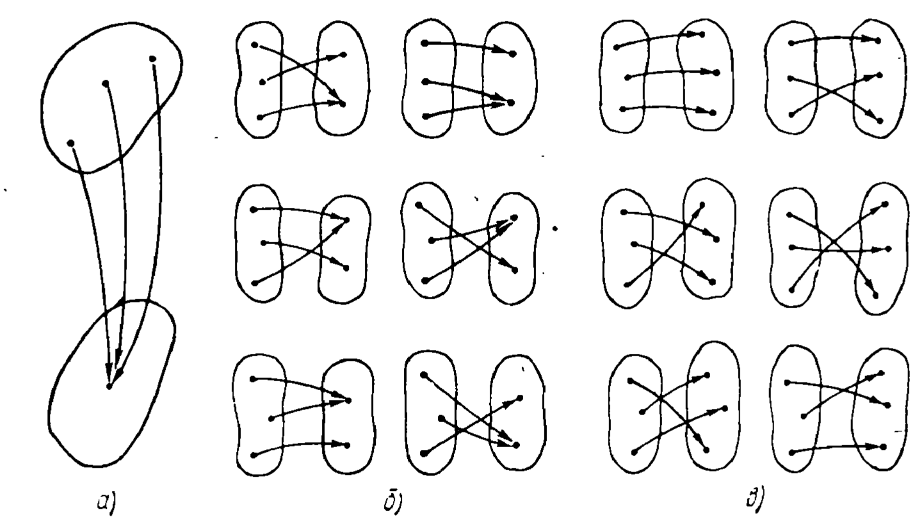


Рис. 95

вольно, так как имеем дело с тождественным отображением плоскости.

В случае, когда речь идет об углах поворота, отличных от нулевого, нас прежде всего интересует расположение центра поворота, а затем величина возможных углов поворота.

а) 180°.

б) 0°.

в) Отрезок — при повороте вокруг его середины на угол 180°.

г) Окружность — при повороте вокруг центра на любой угол.

д) Треугольник — только в случае, если он равносторонний, вокруг точки пересечения медиан на угол 120°.

е) Четырехугольник — в случае, если он квадрат, вокруг точки пересечения диагоналей на углы $\pm 90°$ и 180°; если он параллелограмм — вокруг точки пересечения диагоналей на 180°.

12. Поворотом на угол 180° или 90°, если прямые перпендикулярны, относительно точки пересечения этих прямых.

13. Поворотом на 0°, 60°, 120° и 180°.

14. Центром поворота может быть любая точка серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему центры данных окружностей.

15. Поворотом на углы 0°, 72°, 144°.

16. На серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему центры данных окружностей, постройте точки, из которых данный отрезок виден под углом 45°.

17. Точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1. Если $[AA_1] \parallel [BB_1]$ и $(AA_1) \neq (BB_1)$, то центра поворота не существует. Если $(AA_1) = (BB_1)$, а середины отрезков AA_1 и BB_1 не совпадают, то поворота также не существует.

18. Центры поворотов — точки пересечения биссектрис углов, образованных прямыми a и b с серединным перпендикуляром к отрезку AB. Если серединный перпендикуляр к отрезку AB совпадает с одной из биссектрис, то один из центров найдется как точка пересечения перпендикуляров к прямым a и b, проведенных через точки A и B.

19. См. задачу 17.

20. б) Два конгруэнтных угла центрально симметричны, если их стороны — противоположно направленные лучи (рис. 96).

в) Во всех случаях центром симметрии будет середина отрезка, соединяющего центры этих окружностей (рис. 97).

г) Два конгруэнтных треугольника могут быть центрально симметричны, если соответственные стороны этих треугольников параллельны (рис. 98) и нет параллельного переноса, переводящего один на другой.

21. См. рис. 99.

22. Центрально симметричные отрезки должны иметь равные длины и быть параллельными.

23. Искомой является общая хорда данной окружности и окружности, ей симметричной относительно данной точки.

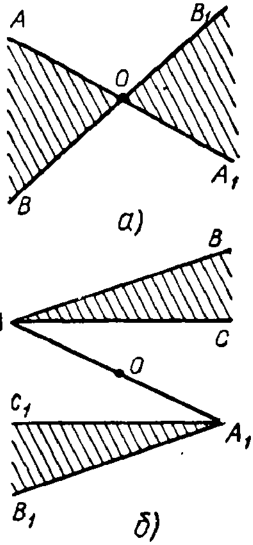


Рис. 96

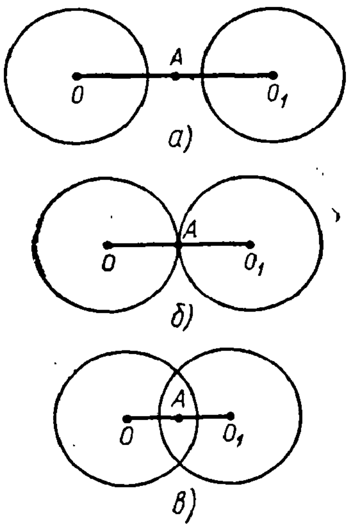


Рис. 97

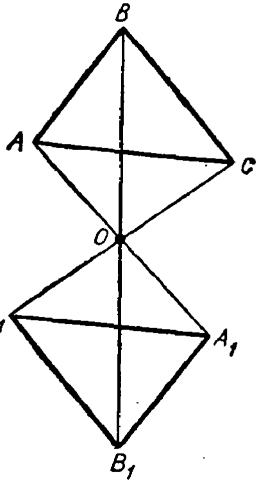


Рис. 98

25. Центр симметрии параллелограмма есть точка пересечения его диагоналей. Для построения этой точки можно воспользоваться тем свойством, что через нее проходят прямые, параллельные сторонам и делящие высоты параллелограмма на конгруэнтные отрезки.

27. Прежде всего, это ось симметрии, а также прямые, перпендикулярные оси симметрии.

29. Пользуясь определением осевой симметрии, установите конгруэнтность сторон треугольника.

30. Дельтоид, равнобочная трапеция — одну; прямоугольник, ромб — две; квадрат — четыре.

32. Возьмем на одной из сторон данного угла две точки A и B и построим образы этих точек при осевой симметрии относительно другой стороны, это будут точки A_1 и B_1. Угол B_1SB искомый (рис. 100).

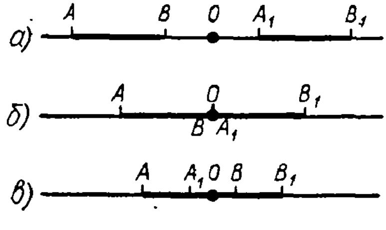


Рис. 99

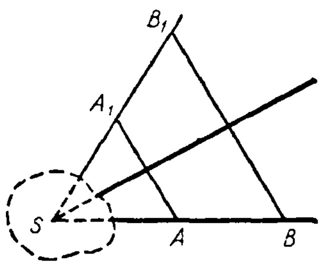


Рис. 100

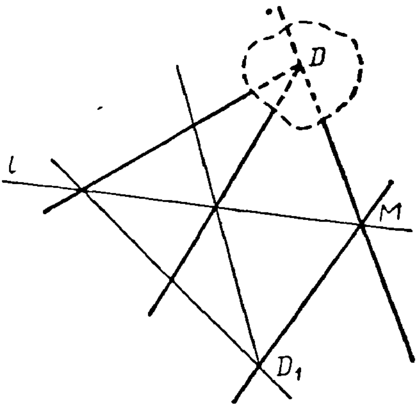


Рис 101

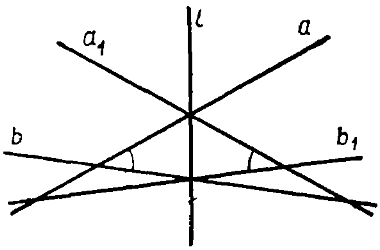


Рис. 102

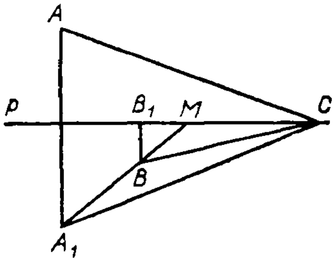


Рис. 103

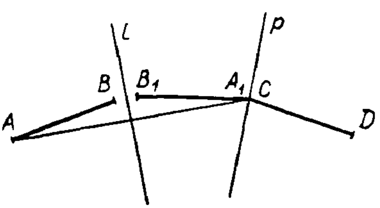


Рис. 104

33. Через точку M проведем прямую l, пересекающую стороны угла. Пусть $D_1 = S_2(D)$. Тогда (MD_1) — образ искомой прямой при осевой симметрии относительно прямой l (рис. 101).

34. Строим образы данных углов относительно любой прямой и находим расстояние между образами вершин этих углов.

35. Выполняем построение, как показано на рисунке 102. Углы конгруэнтны, так как осевая симметрия есть перемещение.

36. Построим образ A_1 точки A при осевой симметрии относительно прямой p (рис. 103). Через точки A_1 и B проводим прямую, которая пересечет p в точке M. Взяв на прямой другую точку C, соединив ее с точками A_1 и B, получим треугольник BA_1C. $|AC|-|BC|=|A_1C|-|BC| \leqslant |A_1B|$. Искомая разность будет максимальной, если точки A_1, B и C будут лежать на одной прямой, т. е. на (A_1C). Эта разность будет наибольшей и существует при условии, если $|BB_1| \neq |A_1C_1|$, и не существует, если $|BB_1| = |A_1C_1|$.

37. Построим срединный перпендикуляр к отрезку AC. Это и будет первая ось симметрии. Вторая ось симметрии — биссектриса угла B_1CD (рис. 104).

38. $|OM_1|=|OM_2|$. $|M_1M_2|$ — отрезок (рис. 105).

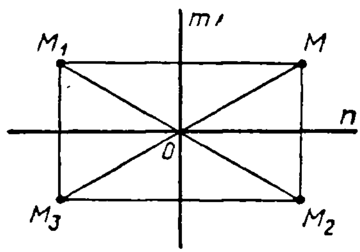


Рис. 105

39. Одной парой.

41. а) Взять одну вершину на оси симметрии, две другие не на оси и построить им симметричные. б) Пятиугольник, у которого две оси симметрии, правильный.

42. В симметрии относительно биссектрисы угла между двумя пересекающимися прямыми. В симметрии относительно прямой, равноудаленной от двух параллельных прямых.

43. Только точка пересечения двух осей симметрии является сдвоенной парой в двух симметриях.

44. Воспользуйтесь осевой симметрией, отображающей одну прямую на другую.

45. Отобразите меньшую сторону относительно биссектрисы угла, противолежащего данной стороне.

46. После применения симметрии относительно серединного перпендикуляра, проведенного к третьей стороне, задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

47. Постройте точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно сторон угла. Прямая M_1M_2 пересекает стороны угла в точках A и B.

48. Указание. Рассматриваемые отрезки лежат на одной прямой и имеют общую точку или перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

49. Указание. Возможные случаи показаны на рисунке 106.

50. а) Две оси симметрии.
б) Одна ось симметрии.

51. См. рис. 107.

52. См. рис. 108.

53. Две оси симметрии, если прямая проходит через центр окружности. Одну ось симметрии — в остальных случаях.

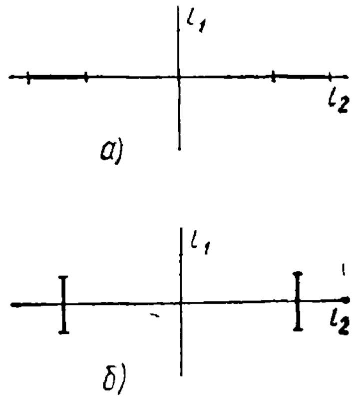


Рис. 106

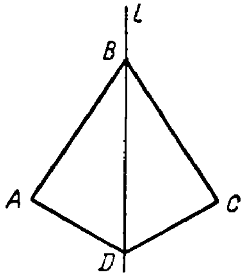


Рис. 107

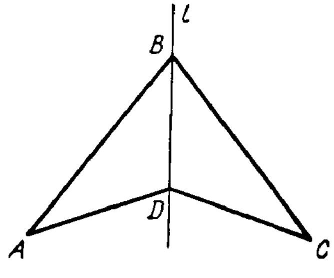


Рис. 108

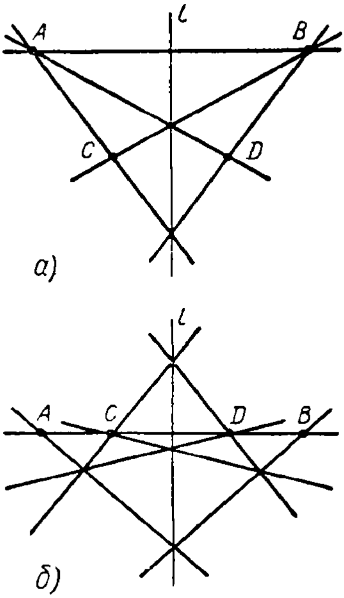


Рис. 109

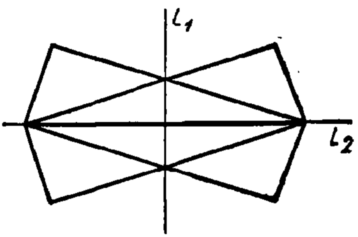


Рис. 110

55. Указание. Построение сводится к нахождению точки $O_1 = S_l(O)$.

56. См. рис. 109.

57. В полуплоскости $[lX)$ лежат фигуры: $[AZ)$, $[AX]$, $[ZX]$.

58. Указания. а) Центры искомых окружностей лежат на биссектрисах прямых углов, образованных двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на равном расстоянии от точки пересечения прямых.

б) Фигура является объединением трех концентрических окружностей.

в) Три окружности имеют центры на одной прямой. По крайней мере две из этих окружностей конгруэнтны и центры их находятся на равных расстояниях от центра средней окружности.

59. Решение то же, что и в предыдущей задаче, но расстояние центров окружностей от точки пересечения прямых следует взять меньшим, чем радиус окружности.

60. Общей частью построенных треугольников является четырехугольник с двумя осями симметрии (рис. 110) или четырьмя, если получится квадрат.

61. Доказательство можно провести от противного. Если прямая l, на которой лежит диагональ пятиугольника, является его осью симметрии, то на этой оси лежат две и только две вершины многоугольника (так как пятиугольник выпуклый). Оставшиеся три вершины должны распределиться по равному числу на каждой из полуплоскостей с границей l. Но для трех вершин это невозможно. Следовательно, такого пятиугольника не существует.

§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

4. а) Пустое множество, если $c < d$; вся полоса между данными прямыми, если $c = d$; пара параллельных прямых, если $c > d$.

6. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник. Проведите через точку B прямую, параллельную (CD) до пересечения с (AD) в точ-

ке M. От вершины B на отрезке BM отложите $|BK| = c$. Теперь легко получить третью вершину четырехугольника.

7. Серединный перпендикуляр к $[BC]$ — ось симметрии ломаной.

8. На плоскости существует бесчисленное множество направлений.

9. а) Две точки на плоскости задают два направления. б) Три точки в общем случае задают шесть направлений, однако если эти точки лежат на одной прямой, то они определяют только два направления. в) Для четырех точек в общем случае получается 12 направлений. Но возможны следующие случаи: 1) точки — вершины трапеции — 10 направлений; 2) точки — вершины параллелограмма — 8 направлений; 3) три точки на одной прямой и одна вне ее — 8 направлений; 4) все точки расположены на одной прямой — только два направления.

10. На рисунке 4 видно, что $\widehat{MNP} + \widehat{NPQ} = (180° - 2\widehat{BNP}) + (180° - 2\widehat{BPN}) = 360° - 2(\widehat{BNP} + \widehat{BPN}) = 180°$; значит, $[NM] \parallel [PQ]$.

11*. При рассмотрении всех случаев пользуемся теоремой о сумме углов треугольника и свойством внешнего угла треугольника. Например, в случае а) искомый угол $\alpha = 90° - \left(\widehat{C} + \frac{\widehat{A}}{2}\right)$, но $\frac{\widehat{A}}{2} = \alpha + (90° - \widehat{B})$. $\alpha = 90° - \widehat{C} - \alpha - 90° + \widehat{B}$, т. е. $\alpha = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$.

12. а) $90° + \frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\beta}{2}$ и $180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

13. Нет.

14. 8 и 24 см.

15. 30°, 60°.

17. Если $[DB] \cong [AB]$ и $[CE] \cong [AC]$, то треугольники ABD и ACE равнобедренные (рис. 111).

Построение. На прямой откладываем $|DE| = p$. На расстоянии h от прямой проведем прямую l, параллельную данной. С вершиной в точке D строим угол $\widehat{ADE} = \frac{\alpha}{2}$, его сторона пересечет прямую l в точке A, вершине искомого треугольника. Точки B и C есть точки пересечения перпендикуляров к серединам отрезков AD и AE с прямой DE. Треугольник ABC искомый.

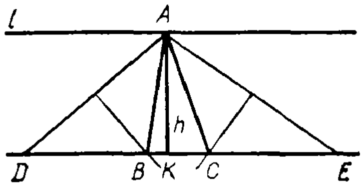


Рис. 111

18. $\angle DAE \cong \angle B$, как углы между направлениями, а $\angle DAC \cong \angle C$,

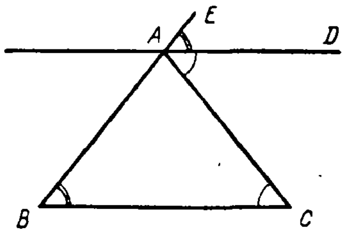


Рис. 112

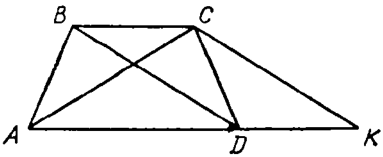


Рис. 113

как углы при параллельных прямых, пересеченных третьей прямой. Так как углы B и C конгруэнтны, как углы при основании в равнобедренном треугольнике, то $\widehat{DAE} = \widehat{DAC}$ (рис. 112).

21. а) 2. б) 6 или 4. в) Возможны следующие случаи: 1) 12; 2) 8; 3) 10; 4) 6.

22. Окружность отображается на конгруэнтную ей окружность с помощью параллельного переноса, задаваемого центрами этих окружностей. Отрезок можно отобразить на отрезок с помощью параллельного переноса в том случае, если эти отрезки параллельны и имеют одинаковую длину.

23. Здесь надо различать два случая: 1) при любом параллельном переносе; 2) при каком-нибудь конкретном параллельном переносе. В случае 1) только плоскость. В случае 2) можно привести больше примеров: прямая, если направление переноса параллельно данной прямой; полуплоскость, если направление переноса параллельно ее границе; полоса при том же условии.

24. Через любую точку, взятую внутри угла, проводим прямые, параллельные сторонам данного угла. Угол между этими прямыми конгруэнтен данному.

25. Докажите, что $\angle BDA \cong \angle CAD$, а тогда из конгруэнтности треугольников ABD и ACD (рис. 113) следует равенство $|AB| = |CD|$.

26. Из произвольной точки A_1 прямой q радиусом, равным длине данного отрезка, делаем засечку C_1 на прямой p; строим равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 114). Через точку B_1 проводим прямую, параллельную прямым p и q, встречающую прямую s в точке B. Треугольник $A_1B_1C_1$ переносим в направлении луча B_1B на расстояние $|BB_1|$.

28. Пусть M — любая точка на стороне BC (рис. 115). Проведем $[MN] \perp [AC]$ и $[BE] \parallel [MN]$, $[MP] \perp [EB]$. Имеем $|MN| = |EP|$, $\widehat{PMB} = \widehat{ACB}$, $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$.

Треугольник PMB конгруэнтен треугольнику MFB по гипотенузе и острому углу, а значит, $|PB| = |MF|$.

Итак, $|MN| + |MF| = |BE| = h_b$, но $h_b = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a$.

29. См. рис. 116.

31. $a + b$.

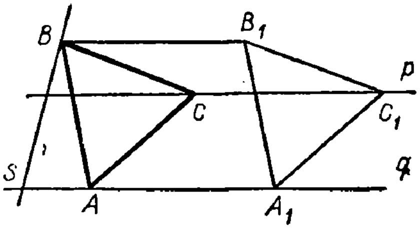


Рис. 114

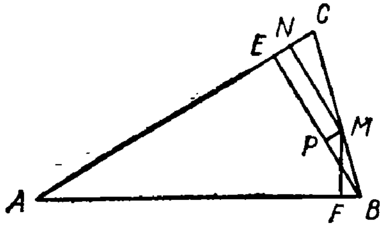


Рис. 115

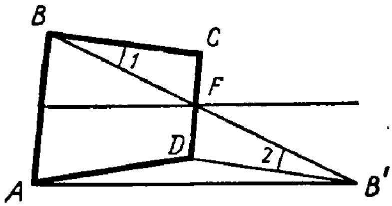


Рис. 116

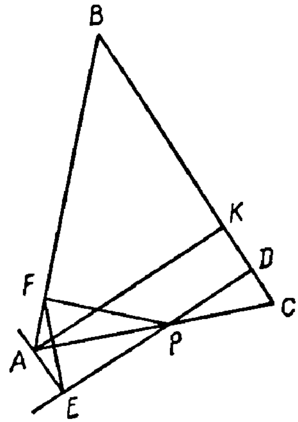


Рис. 117

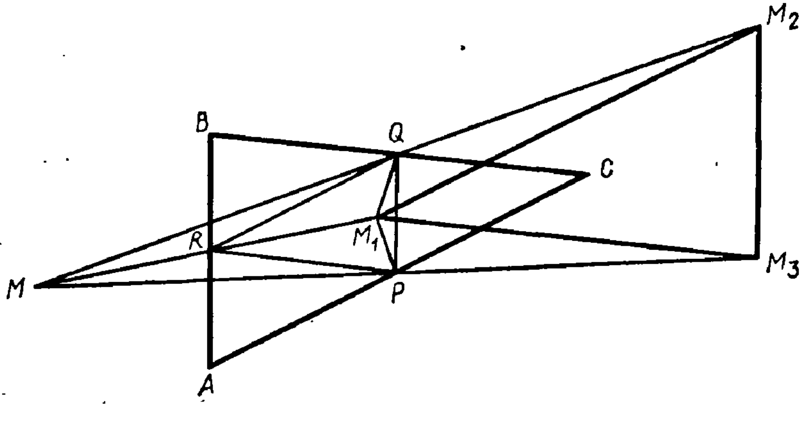


Рис. 118

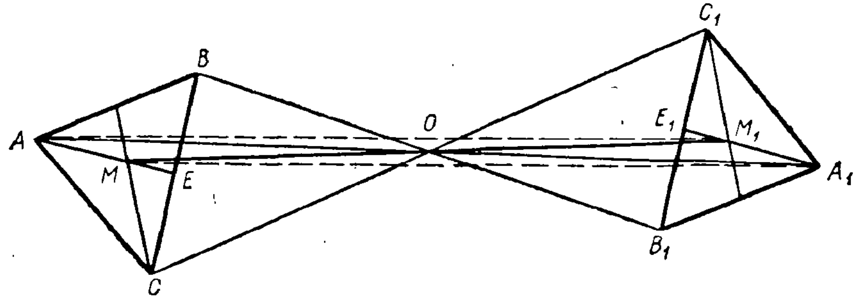


Рис. 119

32. Необходимо воспользоваться свойством средней линии треугольника.

33. Отобразите отрезок PF относительно прямой AC (рис. 117). $|PE| = |FP|$ и $[EP]$ лежит на одной прямой с $[PD]$. Кроме этого, $\widehat{AFP} = \widehat{AEP} = 90^\circ$ в силу симметрии. Отсюда следует дальнейшее решение задачи.

34. Когда переносы имеют противоположные направления и одинаковые расстояния между соответствующими точками.

35*. Пусть точки P, Q, R — середины сторон треугольника ABC (рис. 118). $[PQ]$ — средняя линия треугольников ABC и MM_2M_3. $[RQ]$ — средняя линия треугольников ABC и MM_1M_2. $[PR]$ — средняя линия треугольников ABC и MM_1M_3.

Отсюда легко доказать конгруэнтность сторон треугольников ABC и $M_1M_2M_3$.

36*. В силу симметрии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ эти треугольники конгруэнтны (рис. 119). Симметричны и конгруэнтны их соответствующие медианы AE и A_1E_1, тогда четырехугольник AM_1A_1M — параллелограмм, в котором $[AA_1]$ и $[M_1M]$ — диагонали, а значит, точка O делит их пополам. Отсюда точки M_1 и M центрально симметричны относительно центра O.

Глава II. МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Точки D и K принадлежат одной области в случаях б) и в); точки E и T принадлежат одной области в случае а).

3. 1) а) 1; б) 2; в) 3; г) $n-3$.

2) а) 2; б) 5; в) 9; г) $\frac{(n-3)n}{2}$.

4. Угол и четырехугольник могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми фигурами (рис. 120); луч, отрезок, полуплоскость, плоскость, треугольник — всегда выпуклые фигуры.

5. а) 11 треугольников: a, c, d, e, f, af, fe, ed, dc, be, fed.

б) Равнобедренные треугольники ABK и KLM, квадрат $ABLM$, прямоугольники $ABCD$ и $LCDM$, пятиугольники $BCDMK$ и $ADCLK$, шестиугольники $ABCDMK$, $BADCLK$ и др.

6. 1) а) Четырехугольник $ABCD$; б) четырехугольник $ACDE$; в, г) пятиугольник $ABCDE$. 2) а) Отрезок AC; б) точка A; в, г) треугольник ACD; д) точка C.

7. а) 3; б) $n - 2$.

9. Указание. Разбейте заданный многоугольник на треугольники (рис. 121): а) $4d$ или 360°; б) $6d$ или 540°.

10. а) 130°; б) $\widehat{M} = \widehat{P} = 30°$, $\widehat{Q} = 120°$.

11. Указание. Сначала докажите, что этот внешний угол равен 90°.

Решение. Составляем уравнение: $180° (n - 2) = 2250° - x$, где x — величина заданного внешнего угла. Откуда $18n = 261° - 0{,}1x$, $x = 90°$ и $n = 14$.

12. 5.

13. 1) а) Нет, в противном случае сумма двух внутренних углов этого треугольника была бы равна 180°, что невозможно;

б) да, в прямоугольном треугольнике две его высоты взаимно перпендикулярны. 2) См. ответ к задаче 1).

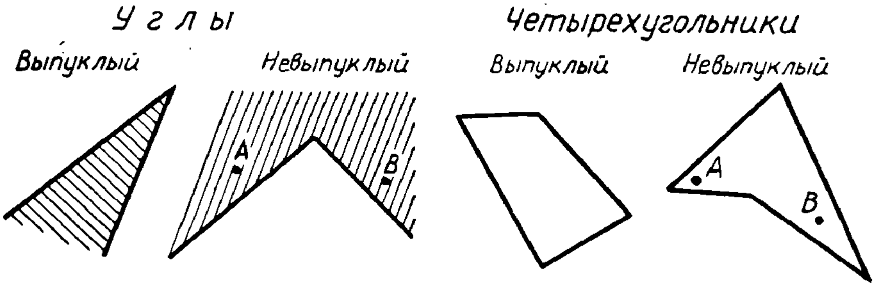


Рис. 120

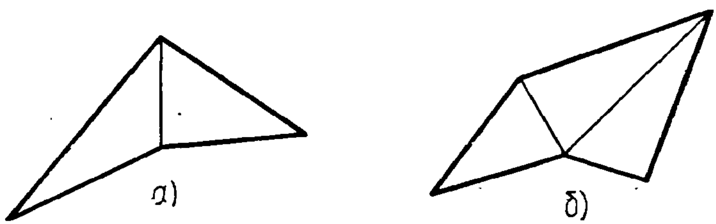


Рис. 121

§ 2. ТРЕУГОЛЬНИКИ

2. а) $\angle A$ и $\angle B$; б) $\angle A$; в) такой треугольник не существует.

3. а) c; б) b; в) a.

4. а) b, c, a; б) наибольшая сторона c, $a = b$.

5. a, b, c.

6. а) $|AB| > |AC|$; б) $\angle A, \angle, B, \angle C$.

7. а) $a + c$; б) $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 70°$, следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

§ 3. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

1 и 2. Указание. Используйте свойство центрально симметричных отрезков.

3. Указание. Докажите, что противоположные стороны этого четырехугольника попарно параллельны.

4. а) Параллелограммы, углы которого конгруэнтны углам заданного параллелограмма (в частном случае, когда заданный параллелограмм — прямоугольник, построенный параллелограмм вырождается в точку).

б) Указание. Используйте свойство центрально симметричных отрезков или результат задачи 2.

6. 10 см.

7. $\frac{P - 2a}{2}$.

8. 30 см; 80 см.

9. а) 16 см; 44 см; б) два решения: 3 см; 32 см или 23 см, 72 см.

10. 50° и 130°.

11. 85° и 95°.

12. $2(2a + b)$ или $2(2b + a)$.

13. Центральная симметрия относительно точки O (поворот на 180° относительно точки O).

14. а) Указание. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм и точка K — центр его симметрии.

15. а) 8 см;
    б) 45° и 90°.

16. $0{,}5\ a$.

17. а) 25°, 155°; б) 55°, 125°.

что две пары противоположных вершин являются вершинами параллелограмма.

23. Используйте один из признаков параллелограмма.

24. Сначала докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

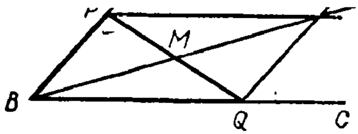


Рис. 122

25. Через вершину B заданного угла ABC и данную точку M проводим луч и на нем от точки M откладываем отрезок MK. $|MK| = |BM|$. Через точку K проводим прямые, параллельные сторонам угла. $P \in [BA)$, $Q \in [BC)$. Отрезок PQ искомый (рис. 122).

26. Сумма указанных расстояний равна сумме высот параллелограмма.

28. Указание. Докажите, что $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{3} = \widehat{4}$ (рис. 123).

31. а) и б); б) и в); в) и г); а) и г).

32. а) Да; б), е) да, так как прямоугольник — частный вид параллелограмма; в), д) да, так как ромб — частный вид параллелограмма; г) да; ж) да, так как квадрат — частный вид параллелограмма.

38. а) На отрезок DC; б) на прямоугольник с диагональю OD и вершинами на сторонах данного прямоугольника (кроме вершины O); в) на диагональ AC; г), д), е) на себя.

39. Указание. Покажите, что середины сторон четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, — вершины прямоугольника.

40. а) Множество вершин C — отрезок AQ без точек A и Q, $QAB = 45°$, $|AQ| = \frac{|AB|\sqrt{2}}{2}$; множество вершин D — отрезок BN без точек B и N, $\widehat{DBA} = 45°$; $|BN| = \frac{|AB|\sqrt{2}}{2}$ (рис. 124).

б) Точки Q и N отрезков AQ и BN совпадают. Обозначим эту общую точку через P.

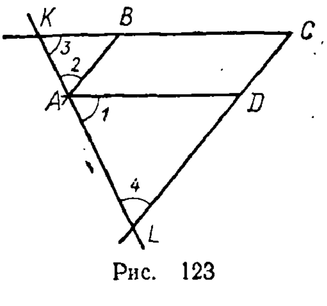


Рис. 123

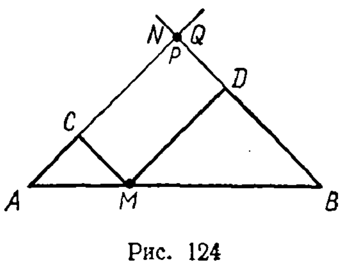


Рис. 124

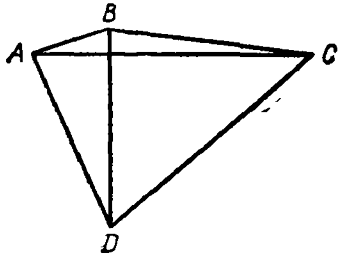


Рис. 125

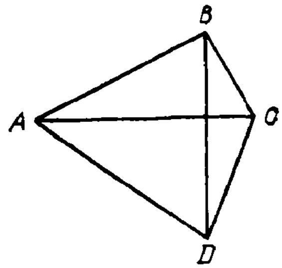


Рис. 126

Точки C, P, D и M — вершины прямоугольника, а так как диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, то отрезок MP делит отрезок CD пополам.

в) Отрезок AL, где L — середина отрезка AB. (Если считать точку A окружностью нулевого радиуса.)

42. а) См рис. 125; б) см. рис. 126.

45. Если заданные точки не лежат на одной прямой, то задача имеет три решения (рис. 127).

Если заданные точки A, B и C лежат на одной прямой, то задача имеет решение в том случае, когда одна из этих точек, например $B \in [AC]$, и делит его пополам. В остальных случаях задача не имеет решения.

48. 80° и 100°.

49. 60° и 120°.

50. 30° и 150°.

51. Оси симметрии этих ромбов совпадают.

52. 4 см.

53. Квадрат.

54. Диагонали заданного четырехугольника должны быть: а) взаимно перпендикулярны; б) конгруэнтны; в) взаимно перпендикулярны и конгруэнтны.

55. а) Симметрия относительно прямой BD или поворот по часовой стрелке относительно центра симметрии квадрата на 90°.

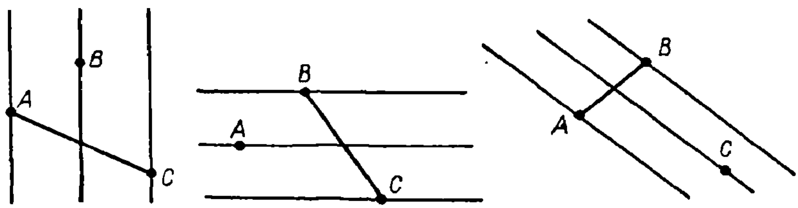


Рис. 127

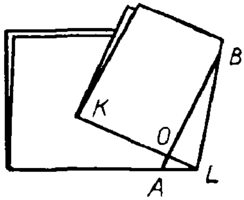


Рис. 128

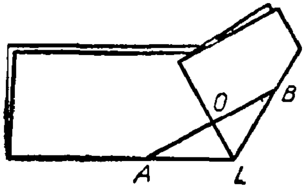


Рис. 129

б) Симметрия относительно прямой AC, поворот по часовой стрелке относительно центра симметрии квадрата на 90°.

56. Треугольник: а) BAD; б) DCB; в) CDA.

57. 1) Ромб; отрезок AB должен образовывать с линиями сгиба углы в 45°. 2) а) $[AB] \perp [KL]$ (рис. 128); б) должно выполняться условие: $|OB| = |OA|$, $[AB] \perp [OL]$ (рис. 129).

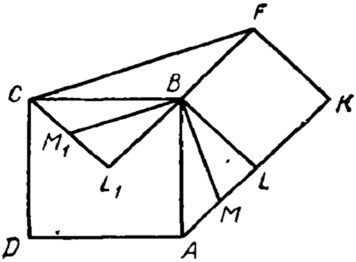


Рис. 130

63. Повернем треугольник ABL на 90° по часовой стрелке относительно точки B. Так как $\widehat{ABC} = \widehat{LBL_1} = 90°$, то L_1F — отрезок прямой (рис. 130). В треугольнике CFL_1 $|CM_1| = |M_1L_1|$ и $|L_1B| = |BF|$; следовательно, $[M_1B]$ — его средняя линия и $|M_1B] \parallel [CF]$, откуда $[BM] \perp [CF]$.

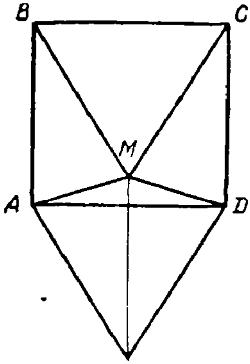


Рис. 131

64. Построим на стороне AD равносторонний треугольник ADK (рис. 131), проведем отрезок MK и рассмотрим треугольник AMK —он равнобедренный, так как $\widehat{KAM} = \widehat{KMA} = 75°$ (заметим, что точки M и K принадлежат оси симметрии построенной фигуры). Отсюда четырехугольник $ABMK$ — параллелограмм, у которого $|AB| = |AK|$. Следовательно, $|BM| = |AB| = |BC| = |CM|$, что и требовалось доказать.

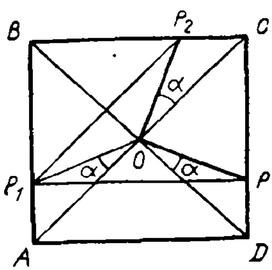


Рис. 132

65. У к а з а н и е. Обозначим величину угла POD через α, тогда $\widehat{P_1OA} = \widehat{P_2OC} = \alpha$ (рис. 132).

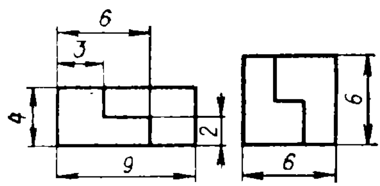


Рис. 133

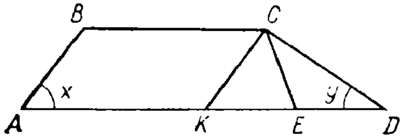


Рис. 134

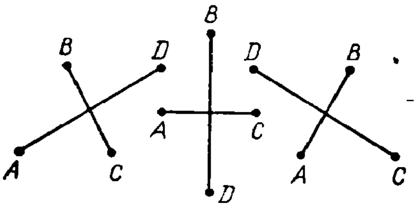


Рис. 135

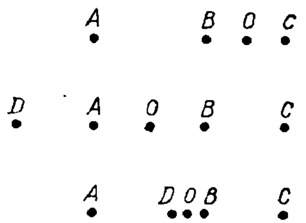


Рис. 136

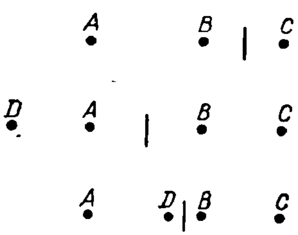


Рис. 137

Данная задача — частный случай более общей задачи: «Пусть на плоскости дана декартова система координат с началом координат в точке O и P — некоторая точка плоскости. Пусть $P_1=S_y(P)$, $P_2=S_{y=x}(P)$. Докажите, что $\widehat{P_2OP} = 90°$».

66. См. рис. 133.

67. 1) а) Нет; б) да. 2) 112° и 106°.

68. 40°, 140°, 80°, 100°.

69. 20 см.

70. 10 и 34 см.

71. 132 см.

73. 60°, 120°.

74. 11,5 см.

75. 42 см.

76. 28 см.

77. $\frac{a-b}{2}$. Длина искомого отрезка равна длине медианы прямоугольного треугольника KCD, $\widehat{KCD} = 90°$ (рис. 134).

78. 50 см.

82. Истинные высказывания: б) д), е), ж), и); ложные высказывания: а), в), г), з).

83. Истинные высказывания: б), г), д).

85. а) $n = 2k$, где $k \in N$ и $k > 1$; в) $n = 4$; г) $n > 4$; д), е) $n = 3$.

86. 1) Заданные точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда, чтобы построить фигуру, имеющую центр симметрии, четвертая точка должна быть четвертой вершиной параллелограмма. Задача имеет три решения (рис. 135). Фигуру, имеющую ось симметрии, по заданным трем точкам построить можно (дельтоид).

2) Заданные точки A, B и C лежат на одной прямой (рис. 136 и 137).

§ 4. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. а) 87 $см^2$; б) 204 $см^2$; в) 5,6 $м^2$.
2. а) 18 см; б) 4 м; в) 4 км; г) 320 м.
3. 1) а) 25 000 $м^2$; б) 0,025 $км^2$; в) 2,5 га.
   2) а) 0,24 $км^2$; б) 240 000 $м^2$; в) 2400 а.
   3) а) 0,35 $км^2$; б) 3500 а; в) 35 га.
4. а) 20,8 км; б) 8 км.
6. а) 4 м и 9 м; б) $\approx$ 50,9 см.
7. а) 21%; б) 19%.
8. 20 см, 22 см.
9. 124 см.
11. а) $ab - (a - 2d)(b - 2c)$;
    б) $ab - (a - c)(b - d)$;
    в) $ab - (a - 2c)d$.
12. а) 40 мм; б) 10 мм.
14. 1) а) 6,25 $см^2$; б) 0,0441 $м^2$.
    2) б) $\approx$ 8,76 м; в) $\approx$3,82 мм.
    3) $\approx$ 6,32 м.
15. а) 0,25 a^2 (рис. 138). б) Легко показать, что прямые ON и OP разбивают квадрат $ABCD$ (рис. 139) на 4 конгруэнтных четырехугольника (используйте тот факт, что точка O — центр симметрии квадрата). Следовательно, $S_{ONDP} = 0,25\ a^2$.
16. 1) а), д), ж). 2) б), в), е), и).
17. а) 12 $см^2$; б) 50 $см^2$.
18. а) 30°. б) Прямоугольник, так как высота его больше, чем высота параллелограмма (при одном и том же основании).
20. а) 4 см. б) 8,2 см и 4,1 см.
21. а) $\approx$3,33 см или 7,5 см. б) 3,75 см или $\approx$ 6,67 см.
23. Решение: $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ADC} = |AC| \cdot |DM| = 64$ $см^2$ (рис. 140), а так как $S_{ABCD} = |AB| \cdot |DK|$, то $|DK| = \frac{64}{12} \approx 5,33$ см.

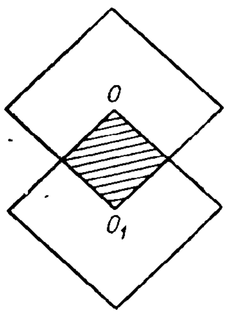


Рис. 138

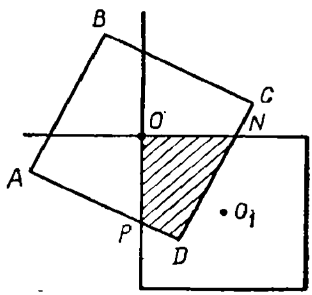


Рис. 139

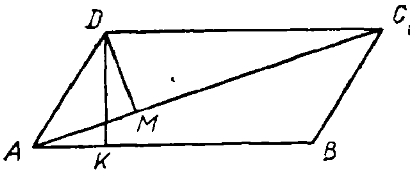


Рис. 140

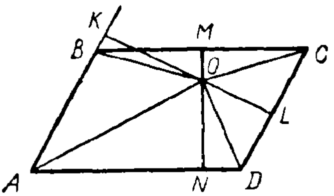


Рис. 141

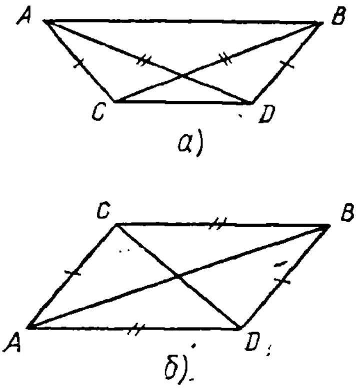


Рис. 142

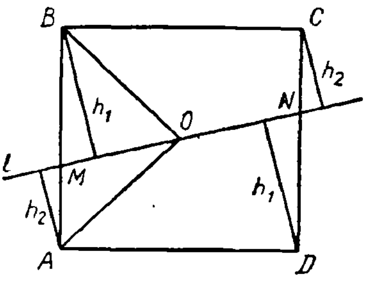


Рис. 143

24. 1) а), г), д).
2) б), з).

25. а), б), в), да.

26. а) 14 см^2; б) 210 дм^2.

27. а) 6 ед^2; б) $\approx 1{,}78$; в) 2,4 ед.

28. 3 см.

29. 3 : 1.

30. а) 4,8 см. б) 2 см. в) Задача имеет бесконечное множество решений, так как по данному основанию и высоте можно построить сколько угодно треугольников.

32. 2) а), б) да; в) нет.

33. 1) а) 2080 мм^2; б) 1190 мм^2. 3) 26 мм.

34. 5 см, 12 см^2. Обозначив через a и b стороны прямоугольника, а через d его диагональ, получим систему трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a^2 + b^2 = d^2, \\ ab = 2{,}4d. \end{cases}$$

35. ADC и BDC; ABD и ABC; ADO и OCB — в любой трапеции.

36. Треугольники 1 и 2 и треугольники 3 и 4 равновелики, а так как $S_{1+2} = S_{3+4}$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

37. а) 1 : 1; б) 3 : 2; в) 3 : 5; г) 1 : 4; д) 4 : 5.

Указание. Используйте тот факт, что $S_{DLC} = S_{DLK} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$.

40. а) $S_{ABO} + S_{CDO} = 0{,}5|AB| \times |OK| + 0{,}5|CD| \cdot |OL| = 0{,}5|AB| \times |KL| = 0{,}5S_{ABCD}$ (рис. 141).

Следовательно, $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$.

41. а) Треугольники ABC и BAD (рис. 142) конгруэнтны, так как имеют по три соответственно конгруэнтных стороны, а так как в конгруэнтных треугольниках против соответственно конгруэнтных сторон лежат конгруэнтные углы, то $\angle BAD \cong \angle ABC$.

б) Указание. Сначала докажите конгруэнтность треугольников ACD и BDC.

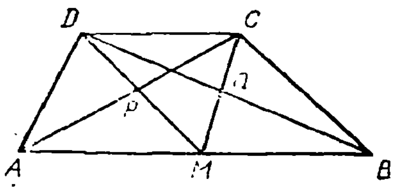


Рис. 144

45. Обозначим искомую сумму через s, тогда в силу центральной симметрии фигуры (рис. 143) $s = 2(h_1 + h_2)$; $S_{AOB} = 0,25a^2$.

$$S_{AOB} = 0,5|MO|\cdot(h_1 + h_2) = 0,25b\,(h_1 + h_2).$$

Откуда $0,25a^2 = 0,25b\,(h_1 + h_2)$ и $s = \frac{2a^2}{b}$.

47. а) 976,5 мм^2; б) 1100 мм^2.

48. а) 126 мм; б) 75 мм.

50. Сначала докажите равновеликость треугольников ADM и MCB (рис. 144), затем равновеликость треугольников APM и MQB и равновеликость треугольников ADP и BCQ.

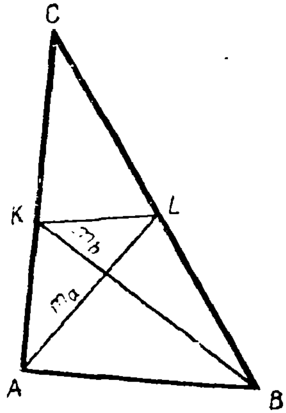


Рис. 145

51. $\frac{a^2\sqrt{19}}{20} \approx 0,22\,a^2$.

52. Пусть $[AL]$ и $[BK]$ — медианы треугольника ABC (рис. 145). $[AL] \perp [BK]$. Проведем отрезок KL. Легко показать, что

$S_{KLC} = 0,25\,S_{ABC}$, т. е. $S_{KLBA} = 0,75\,S_{ABC}$ и $S_{KLBA} = \frac{m_a \cdot m_b}{2}$,

откуда

$$S_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{m_a \cdot m_b}{2} = \frac{2}{3} m_a \cdot m_b.$$

53. Так как $|AB| = |BC|$, то точка M одинаково удалена от сторон AB и BC. Геометрическим местом таких точек является биссектриса BD треугольника ABC, исключая точку B.

55. а) 10 ед^2; б) 5 ед^2; в) 12 ед^2; г) 4 ед^2.

56. $1,875\sqrt{2} \approx 2,64$ см^2.

58. $\approx 4,6$ см.

59. $7,68\ a^2$.

61. 12 см^2. Сначала докажите, что середины сторон данного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого вдвое меньше площади данного четырехугольника.

63. $\approx 14,6$ см^2.

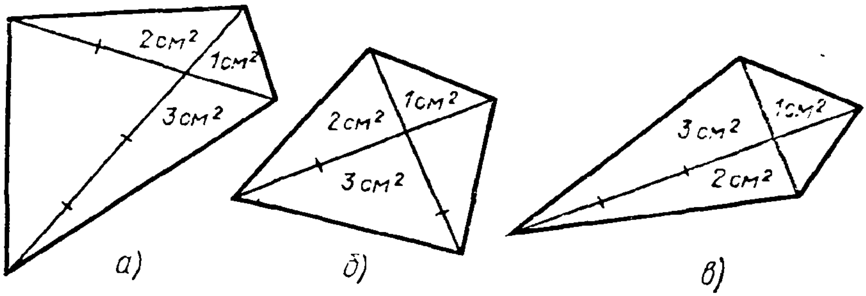


Рис. 146

64. Указание. Докажите, что треугольники KOL и KON и треугольники LOM и NOM попарно равновелики,

$$O = [KM] \cap [LN].$$

65. 1) а) 6 см² (рис. 146); б) 1,5 см²; в) $\frac{2}{3}$ см².

2) 10 ед², 15 ед², 12 ед², 8 ед².

66. а) $\frac{x^2}{2}$; б) $4{,}5 + 3(x - 3) = 3x - 4{,}5$;

в) $16 - 0{,}5(8 - x)^2$; г) $24 - 0{,}5(10 - x)^2$.

67. $18{,}25a^2\sqrt{3} \approx 31{,}6a^2$.

68. $0{,}5(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})$ ед².

69. $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)b^2$.

70. Пятиугольник $ABCKL$ дополните до параллелограмма $ABML$ (рис. 147) и докажите конгруэнтность треугольников KCM и KDL.

71. $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$, $b < 0{,}5a$.

75. $2S$. Новый четырехугольник — параллелограмм, площадь которого в два раза больше площади данного четырехугольника.

76. Площадь каждого из четырехугольников равна удвоенной площади параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон этих четырехугольников (рис. 148).

77. Указание. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон данной трапеции, есть прямоугольник.

78. а) 12 ед²; б) 25 ед²; в) 25 ед²; г) 20 ед², четырехугольник $ABCD$ — трапеция; д) 18 ед².

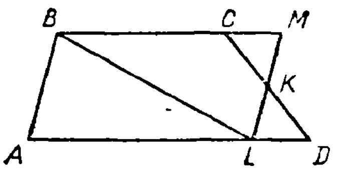


Рис. 147

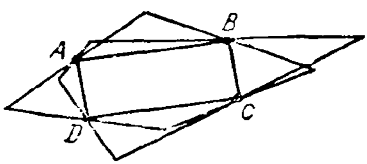


Рис. 148

4. Расстояние от центра такой окружности до точки M равно a. Значит, по определению окружности множество всех центров окружностей радиуса a, проходящих через данную точку M, есть окружность радиуса a с центром M.

5. Точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от его вершин. Поэтому центр искомой окружности лежит в точке пересечения диагоналей квадрата.

6. Множество центров всех окружностей, касающихся данной прямой MN в данной точке A, есть перпендикуляр к прямой MN, проведенный через точку A, за исключением точки A (мы здесь не рассматриваем точку как «вырожденную окружность», окружность нулевого радиуса).

7. Две прямые, параллельные данной прямой и находящиеся от нее на расстоянии a.

8. Пусть прямая a касается в точке M окружности (O, r), $[AB]$ — диаметр, $[AC]$ и $[BD]$ — отрезки перпендикуляров, проведенных через концы диаметра к касательной. Тогда $[OM]$ — средняя линия трапеции $ABDC$.

9. Центр окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящей через данную точку, и находится от данной точки на расстоянии, равном данному радиусу. Задача имеет два решения — две окружности, симметричные друг другу относительно данной прямой.

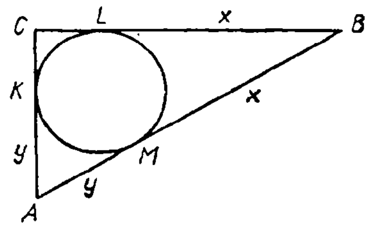


Рис. 149

10. Центр искомой окружности является точкой пересечения биссектрисы данного угла и перпендикуляра, проведенного через данную точку к той стороне угла, на которой лежит эта точка.

11. Пусть даны прямая a и точка M ($M \notin a$). Центр искомой окружности является точкой пересечения окружности (M, r) и прямой b, параллельной прямой a, лежащей в той же полуплоскости с границей a, что и точка M, на расстоянии r от прямой a. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

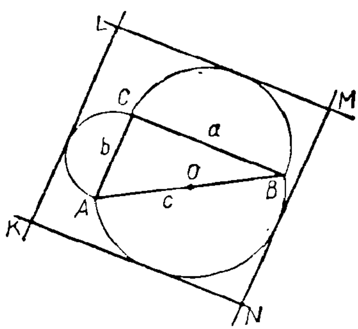


Рис. 150

12. Пусть $|LB| = |MB| = x$, $|CL| = |CK| = r$, $|AK| = |AM| = y$ (рис. 149). Вычислим разность суммы катетов и гипотенузы:

$$x + r + r + y - x - y = 2r,$$

что и требовалось доказать.

13. 16 см^2.

14. Четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник (почему?). Для решения нужно, таким образом, доказать, что $|KL| = |KN|$ (рис. 150). Обозначим катеты и гипотенузу данного прямоугольного треугольника через a, b и c соответственно. Тогда

$$|KL| = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = 0{,}5\,(a + b + c),$$

$$|KN| = |MN| = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0{,}5\,(a + b + c),$$

т. е. $|KL| = |KN|$ и четырехугольник $KLMN$ — квадрат.

15. Пусть AOB — прямой угол, a — длина данного отрезка. Тогда искомой фигурой будет дуга окружности $\left(O;\ \frac{a}{2}\right)$, принадлежащая данному углу, т. е. четверть окружности.

16. 8 см. Указание. Обозначим данные хорды через AB и AC. Тогда отрезок BC будет диаметром данной окружности по теореме 41. Отрезок перпендикуляра, проведенного через центр окружности к хорде AB, будет средней линией треугольника ABC.

17. Обозначьте данную длину отрезка касательной через a, радиус данной окружности — через r. Постройте прямоугольный треугольник по катетам a и r. Пусть его гипотенуза будет c. Искомая точка X находится на расстоянии c от центра данной окружности и лежит на данной прямой. Задача может иметь два, одно или не иметь ни одного решения.

18. а) Две; б) двенадцать.

19. Пусть даны окружность (O, r) и точка A, $A \neq O$. Постройте прямую OA и диаметр MN, перпендикулярный прямой OA. Окружность $(A, |AM|)$ искомая.

20. Пусть даны окружность (O, r), хорда AB и касательная MK, параллельная хорде AB. Обозначьте точку касания через C. Рассмотрите осевую симметрию относительно прямой OC.

21. Указание. Воспользуйтесь осевой симметрией.

22. Указание. Через данную точку проведите перпендикуляр к другой стороне угла и от основания перпендикуляра отложи-

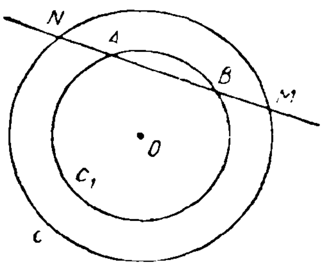


Рис. 151

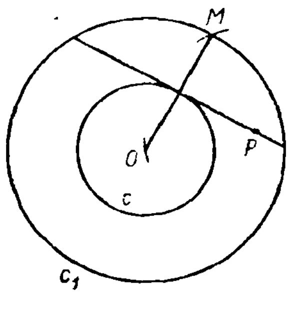


Рис. 152

те отрезки на этой стороне угла, длина каждого из которых равна половине заданной длины.

Если данный угол острый, то задача либо имеет одно решение, либо не имеет решения; если угол прямой или тупой, задача не имеет решения.

24. Указание. Медиана треугольника в общем случае не является его биссектрисой.

25. Пусть c — окружность (O, r), а c_1 — окружность $(O, |OA|)$. Проведем прямую AB так, чтобы $|AB| = d$ (рис. 151). Точки пересечения прямой AB с окружностью c, точки M и N, определят искомую хорду.

26. См. рис. 152.

27. Указание. Покажите, что эти диагонали являются хордами окружности, стягивающими конгруэнтные дуги.

28. Биссектриса данного угла без ее начала.

29. 4 см.

30. 12 см.

Глава IV. ВЕКТОРЫ

1. $[BD]$ — общая диагональ параллелограммов, значит, они имеют общий центр. Следовательно,

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA_1} = -\overrightarrow{MC_1} \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC_1} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C} \text{ (рис. 153).}$$

2. Из условий задачи следует, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Но $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$. Тогда $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, отсюда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

3. Так как $[AA_1]$ — медиана треугольника ABC, то $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Аналогично, $[AA_1]$ — медиана треугольника AB_1C_1, значит, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1})$ (рис. 154).

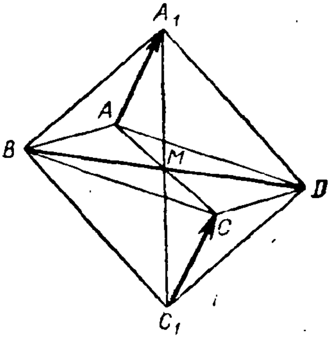


Рис. 153

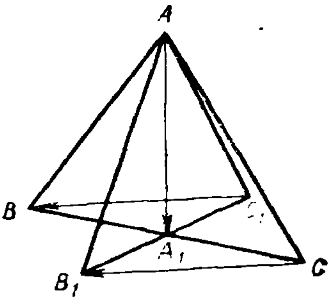


Рис. 154

Отсюда $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB_1} + \vec{AC_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{AB} - \vec{AC_1} = \vec{AB_1} - \vec{AC} \Rightarrow \vec{C_1B} = \vec{CB_1}.$$

4. $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{0}$, $\vec{MB} + \vec{MD} = \vec{0} \Rightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.

6. $\vec{AA_1} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$,

$\vec{BB_1} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$,

$\vec{CC_1} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Отсюда $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{0}$.

7. Так как $\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{0}$, а $\vec{BC} = \vec{OA_1}$, $\vec{CA} = \vec{OB_1}$, $\vec{AB} = \vec{OC_1}$, то $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{0}$ (рис. 155). Из равенства $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{0}$ следует, что $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} = -\vec{OC_1}$. Но $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} = 2\vec{OC_2}$, где C_2 — середина $[A_1B_1]$. Тогда $2\vec{OC_2} = -\vec{OC_1}$, значит, точка O принадлежит медиане C_1C_2. Аналогично можно показать, что точка O принадлежит медианам A_1A_2 и B_1B_2 треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, O совпадает с точкой пересечения медиан.

8. $\begin{cases} \vec{MG} = \vec{MA} + \vec{AG}, \\ \vec{MG} = \vec{MB} + \vec{BG}, \\ \vec{MG} = \vec{MC} + \vec{CG} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\vec{MG} = (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) + (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$

9. Для данных точек A, B, C выполняется равенство $\vec{AB} = 2\vec{BC}$. Тогда для любой точки O плоскости запишем

$$\vec{OB} - \vec{OA} = 2(\vec{OC} - \vec{OB}),\ \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OC}.$$

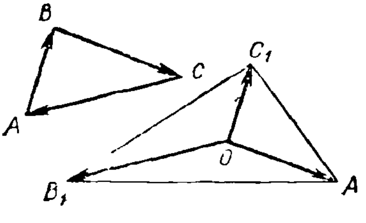


Рис. 155

Аналогично, $\vec{OA} = 3\vec{OB} - 2\vec{OC}$, $\vec{OC} = \frac{3}{2}\vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OA}$.

10. По свойству симметрии с центром S запишем $\vec{SB} = -\vec{SA}$. Тогда для произвольной точки O плоскости $\vec{OB} - \vec{OS} = \vec{OS} - \vec{OA}$, отсюда $\vec{OB} = 2\vec{OS} - \vec{OA}$.

11. Пусть O — произвольная точка плоскости. Согласно результату задачи 8

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}),$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Вычтем из первого векторного равенства второе:

$$\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}),$$
$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}).$$

12. Пусть точки M, N, P, Q, R и S — середины отрезков AB, CD, AC, BD, AD и BC соответственно (рис. 156). Если O — произвольная точка плоскости, то

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}),$$
$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Отсюда вектор $\overrightarrow{OG_1}$, где G_1 — середина отрезка MN, равен $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Аналогично векторы $\overrightarrow{OG_2}$ и $\overrightarrow{OG_3}$, где G_2 и G_3 — середины отрезков PQ и RS, также равны $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Следовательно, отрезки PQ, MN и RS имеют общую середину $G = G_1 = G_2 = G_3$.

13. Проведите два диаметра окружности d_1 и d_2, соответственно перпендикулярные хордам AB и CD (рис. 157).

$$d_1 \cap [AB] = K,\ d_2 \cap [CD] = N.$$

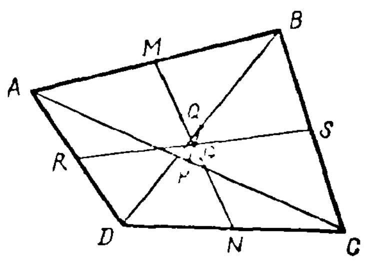


Рис. 156

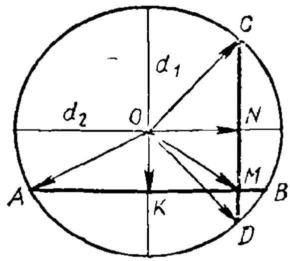


Рис. 157

Четырехугольник $OKMN$ — прямоугольник и $[OM]$ — диагональ этого прямоугольника, отсюда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{ON}$.

Но $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, а $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, поэтому

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

14. По условию точка O есть центр параллелограмма $ABCD$, поэтому $2\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}$ и $2\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$, следовательно,

$$4\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}.$$

15. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Longrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$.

16. Пусть точки A, B и C принадлежат одной прямой, тогда векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны и $\overrightarrow{BC} = k\,\overrightarrow{BA}$.

Но $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Отсюда

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Longrightarrow \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}.$$

Обратно. Пусть выполняется равенство $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$, значит, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$ или $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$, т. е. векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны, а точки A, B, C принадлежат одной прямой.

17.
$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{AB},$$

тогда $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (1 + k)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$.

Учитывая, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, получим $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

18. Точка P принадлежит отрезку BC, значит, $\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CB}$. С другой стороны, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AM}$, поэтому $\alpha\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AM}$. Но $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CA} =$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}.$$

Отсюда

$$\alpha\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \beta\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right),$$
$$\left(\alpha - \frac{\beta}{4}\right)\overrightarrow{CB} = \left(1 - \frac{3}{4}\beta\right)\overrightarrow{CA}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ неколлинеарны, то равенство выполняется, если

$$\begin{cases} \alpha - \frac{\beta}{4} = 0, \\ 1 - \frac{3}{4}\beta = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha = \frac{\beta}{4}, \\ \beta = \frac{4}{3}, \end{matrix} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Longrightarrow |\overrightarrow{CP}| : |\overrightarrow{PB}| = 1 : 2.$

19. Для произвольной точки O плоскости запишем

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \alpha\overrightarrow{OA_2}}{1+\alpha}, \quad \overrightarrow{OB_0} = \frac{\overrightarrow{OB_1} + \alpha\overrightarrow{OB_2}}{1+\alpha}, \quad \overrightarrow{OC_0} = \frac{\overrightarrow{OC_1} + \alpha\overrightarrow{OC_2}}{1+\alpha}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \frac{\overrightarrow{A_1B_1} + \alpha\overrightarrow{A_2B_2}}{1+\alpha}, \quad \overrightarrow{B_0C_0} = \frac{\overrightarrow{B_1C_1} + \alpha\overrightarrow{B_2C_2}}{1+\alpha}.$$

По условию $\overrightarrow{A_1B_1} = m\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = m\overrightarrow{B_2C_2}$, поэтому $\overrightarrow{A_0B_0} = m\overrightarrow{B_0C_0}$; следовательно, точки A_0, B_0, C_0 принадлежат одной прямой (рис. 158).

20. Докажите, что $[OM)$ — биссектриса угла AOD и угла COB. Тогда векторы $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ коллинеарны вектору $\overrightarrow{OM}$ (рис. 159).

21. Из равенства $k\vec{a} + l\vec{b} = p\vec{a} + q\vec{b}$ следует $(k-p)\vec{a} = (l-q)\vec{b}$. По условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, значит, векторное равенство возможно, если $k - p = 0$ и $l - q = 0$.

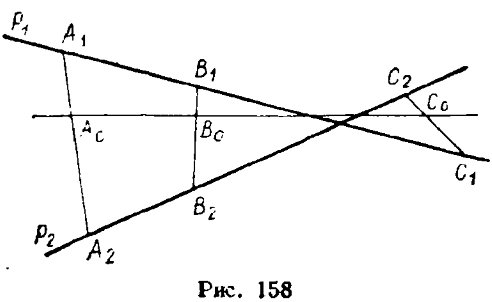


Рис. 158

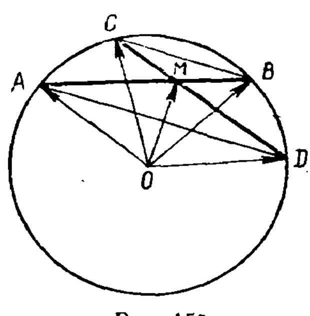


Рис. 159

22. По условию $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \mu\overrightarrow{OB}$.

Вычтем из первого векторного равенства второе:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OC} - \mu\overrightarrow{OB}.$$

Согласно результату задачи 21 $\lambda = -1$, $\mu = -1$.

Тогда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \Longrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$;

следовательно, вектор $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

23. По условию задачи

$$\lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}, \quad \nu\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

$$\mu\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}.$$

Выберем любую пару векторных равенств и вычтем, например, из первого векторного равенства третье. Тогда

$$\lambda\overrightarrow{OA} - \nu\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \Longrightarrow \lambda = \nu = -1,$$

значит, $-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \Longrightarrow -\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Следовательно, вектор $\overrightarrow{OD}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

24. Пусть $(DA) \cap (CB) = O$ (рис. 160). Тогда $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OB}$.

По условию $(AN) \parallel (CM)$, отсюда $\overrightarrow{OM} = \beta\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} = \beta\overrightarrow{ON}$.

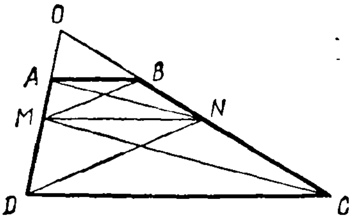


Рис. 160

Следовательно,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{OB},$$

значит, $(DN) \parallel (MB)$.

26. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от точки O. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на его сторонах, и выходящая из точки O. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$ есть другая диагональ того же параллелограмма.

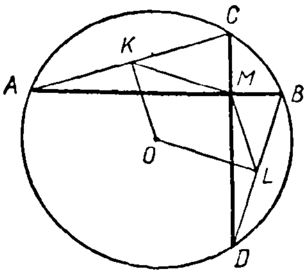


Рис. 161

По условию $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, значит, параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, является ромбом. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, отсюда $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны, то один из векторов $\vec{a} + \vec{b}$ или $\vec{a} - \vec{b}$ — нуль-вектор. А нуль-вектор перпендикулярен любому вектору.

27. Точка K — середина хорды AC, поэтому $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ (рис. 161). L — середина хорды $BD \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ (см. задачу 13). Отсюда $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$. Таким образом, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LM}$, значит, четырехугольник $OKML$ — параллелограмм.

28. Можно записать $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Вектор $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$ противоположен вектору $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF}$, поэтому $|OE| = |OF|$. Кроме того, каждый из этих векторов является диагональю ромба, построенного на векторах равной длины, $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$. Следовательно, построенные ромбы $OAFB$ и $OCED$ конгруэнтны. Известно, что диагональ ромба является его осью симметрии, значит, (EF) — ось симметрии, проходящая через общую вершину O двух конгруэнтных ромбов. Отсюда $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 180°$ и AC и BD — два диаметра. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

29. Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC, тогда

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB});\ |\overrightarrow{CC_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|.$$

Так как $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ неколлинеарны, то

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| < |\overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CB}|.$$

Отсюда $|CC_1| < \frac{1}{2}(|CA| + |CB|)$.

30. Известно, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, отсюда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, O — произвольная точка плоскости. Так как векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ неколлинеарны, то

$$|\overrightarrow{OM}| < \frac{1}{3}(|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{OC}|) \Rightarrow |OM| < \frac{1}{3}(|OA| + |OB| + |OC|).$$

31. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложим от одной точки O. Тогда параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, — прямоугольник. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ — диагонали этого прямоугольника. Но диагонали прямоугольника равны, поэтому

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Обратная теорема. Если для двух векторов $\vec{a}$ и выполняется равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Отложим их от одной точки O. По условию $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$, значит, в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, диагонали имеют равную длину. Такой параллелограмм является прямоугольником, поэтому $\vec{a} \perp \vec{b}$.

34. По условию $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — параллелограммы, поэтому $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (рис. 162).

Вычтем из первого векторного равенства второе:

$$\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AD} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1} \Longrightarrow |CC_1| \leqslant |BB_1| + |DD_1|.$$

35. $\triangle ABO \sim \triangle CDO \Longrightarrow \dfrac{|DO|}{|OB|} = \dfrac{|CO|}{|OA|} = \dfrac{b}{a}$;

$$\triangle ADB \sim \triangle MDO \Longrightarrow \frac{|MO|}{|AB|} = \frac{|DO|}{|DB|} = \frac{b}{a+b} \Longrightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Аналогично,

$$\triangle DBC \sim \triangle OBN \Longrightarrow \frac{|ON|}{|DC|} = \frac{|OB|}{|DB|} = \frac{a}{a+b} \Longrightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}.$$

Так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{NO}$, то

$$\overrightarrow{MN} = \frac{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{DC}}{a+b}.$$

36. По свойству биссектрисы угла треугольника

$$\frac{|BC_1|}{|C_1A|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{3a}{b}.$$

Отсюда

$$\frac{|BC_1|}{|BA|} = \frac{a}{a+b}.$$

Но $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, поэтому

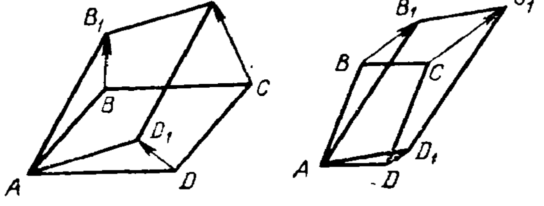


Рис. 162

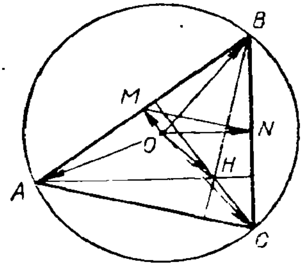


Рис. 163

$$\left(\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CB}\right)=\frac{a}{a+b}\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right).$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}.$$

37. Пусть $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ и $[OC]\perp[AB]$. Из подобия прямоугольных треугольников OAC и BAO имеем $a^2=|AC|\cdot|AB|$.

Аналогично, $\triangle OCB\sim\triangle AOB\Longrightarrow b^2=|BC|\cdot|BA|$.

Отсюда $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{a^2}{b^2}$, значит, точка C делит отрезок в отношении $\frac{a^2}{b^2}$. Тогда $\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AB}$.

Но $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, поэтому

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\Longrightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{a^2\overrightarrow{OB}+b^2\overrightarrow{OA}}{a^2+b^2}.$$

38. Проведите (OM) и (ON), соответственно перпендикулярные $[AB]$ и $[BC]$ (рис. 163).

Треугольники AHC и NOM подобны, $\frac{|AC|}{|MN|}=2$, значит, $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{OM}\Longrightarrow\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\Longrightarrow\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

39. 1) Постройте $(CM)\parallel(OB)$ и $(CN)\parallel(OA)$, четырехугольник $OMCN$ — ромб (рис. 164). В треугольнике MCA $|MA|=\frac{1}{2}|MC|\Longrightarrow$ $\Longrightarrow|MA|=\frac{1}{2}|MO|$, т. е. $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

Очевидно, $\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Но

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\Longrightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

2) $\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

40. 1) $\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

2) $\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

3) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

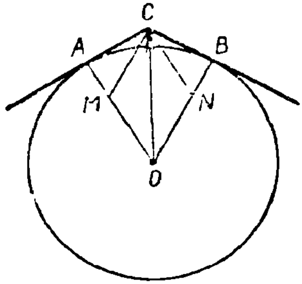


Рис. 164

42. Луч, параллельный $\vec{a}$ с началом в точке A при $k\geqslant 0$; открытый луч при $k>0$; отрезок длиной $2|\vec{a}|$ при $-1\leqslant k\leqslant 1$; наконец, прямая, параллельная вектору $\vec{a}$ и проходящая через точку A при $-\infty<k<+\infty$.

43. Множеством точек M являются угол AOB и вертикальный с ним угол, причем прямые OA и OB не принадлежат этому множеству.

44. Множеством точек M является параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ при $0 \leqslant k \leqslant 1, 0 \leqslant l \leqslant 1$; угол AOB при $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$; луч OB при $l \geqslant 0$; прямая OA при $-\infty < k < \infty$.

45. Множеством точек M является полоса, границей которой являются две симметричные относительно точки O прямые, параллельные направлению данного вектора $\vec{a}$.

47. Множеством точек M является трапеция AA_1B_1B, в которой $[AB] \parallel [A_1B_1]$ и $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{A_1B_1}| = 1 : 2$.

48. Множеством точек M является отрезок B_1C_1, полученный в результате параллельного переноса отрезка BC на вектор $\overrightarrow{OA}$.

49. Множеством точек M является множество точек параллелограмма, вершинами которого являются образы точек A и B при переносах $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

50. Пусть A_0, B_0, C_0, D_0 — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 соответственно (рис. 165). Тогда для произвольной точки O плоскости

$$\overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_1}\right),\ \overrightarrow{OB_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1}\right),$$

$$\overrightarrow{OC_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC_1}\right),\ \overrightarrow{OD_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD_1}\right).$$

Отсюда

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{OB_0} - \overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}\right),$$

$$\overrightarrow{D_0C_0} = \overrightarrow{OC_0} - \overrightarrow{OD_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OD_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1C_1}\right).$$

По условию $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$; следовательно, $\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{D_0C_0}$ и четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм.

51. Пусть

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|CR|}{|RD|} = \frac{|DS|}{|SA|} = k.$$

O — произвольная точка плоскости.

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = k \Longrightarrow \frac{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}} = k \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k}.$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1 + k},$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OD}}{1+k},$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OA}}{1+k}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}.$$

Действительно,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}\right) + \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{DC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AD}.$$

Но $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, поэтому $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow PQRS$ — параллелограмм.

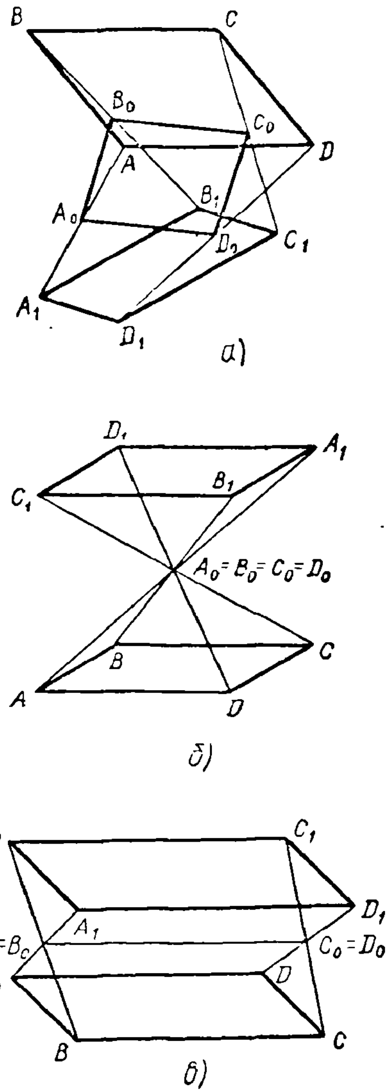


Рис. 165

52. Обозначим точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ через G и G соответственно. Пусть $(AG) \parallel (B_1C_1)$, $(BG) \parallel (A_1C_1)$ и $(CG) \parallel (A_1B_1)$. Тогда согласно условию $\overrightarrow{GA} = \lambda\,(\overrightarrow{G_1B_1} - \overrightarrow{G_1C_1})$, $\overrightarrow{GB} = \mu\,(\overrightarrow{G_1C_1} - \overrightarrow{G_1A_1})$, $\overrightarrow{GC} = \nu\,(\overrightarrow{G_1A_1} - \overrightarrow{G_1B_1})$.

Складывая почленно эти равенства, получим: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{G_1A_1}\,(\nu - \mu) + \overrightarrow{G_1B_1}\,(\lambda - \nu) + \overrightarrow{G_1C_1}\,(\mu - \lambda)$.

Но $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

поэтому $\overrightarrow{G_1A_1}\,(\nu - \mu) + \overrightarrow{G_1B_1}\,(\lambda - \nu) + \overrightarrow{G_1C_1}\,(\mu - \lambda) = \vec{0}$.

С другой стороны, $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} = 0$.

Отсюда находим, что $\lambda = \nu = \mu$.

Итак, $\frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} - 2\overrightarrow{G_1C_1} = 3(\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1}) - 3\overrightarrow{G_1C_1}$, т. е. $\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{G_1C_1} \Rightarrow (BA) \parallel (G_1C_1)$.

53. Так как AC — диагональ параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, а тогда $\overrightarrow{AN} = \alpha\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

С другой стороны, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$.

Отсюда

$$\alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AD} = \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AD}, \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AB} = (1-\beta-\alpha)\overrightarrow{AD}.$$

Векторы неколлинеарны, поэтому равенство возможно только в случае

$$\alpha - \frac{\beta}{2} = 0,\ 1 - \alpha - \beta = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{2}{3},\ \alpha = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AN}| : |\overrightarrow{NC}| = 1 : 2$.

54. $\overrightarrow{AS} = \alpha\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \alpha\overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB}$.

С другой стороны, $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{DP}$. Но $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, поэтому $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AD}$.

Отсюда $\alpha\overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AD}$.

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ неколлинеарны, поэтому равенство возможно, если

$$\frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \text{ и } 1 - \frac{\beta}{2} - \alpha = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = \beta, \\ \alpha = 1 - \frac{\beta}{2}, \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{4}{5},\ \beta = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SQ}| = 4 : 1$, $|\overrightarrow{DS}| : |\overrightarrow{SP}| = 2 : 3$.

55. Пусть точки M, N, P, Q, R — середины сторон AB, BC, CD, DE, EA соответственно, тогда

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\,\overrightarrow{OM},$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\,\overrightarrow{ON},$$
$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\,\overrightarrow{OP},$$
$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=2\,\overrightarrow{OQ},$$
$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}=2\,\overrightarrow{OR}.$$

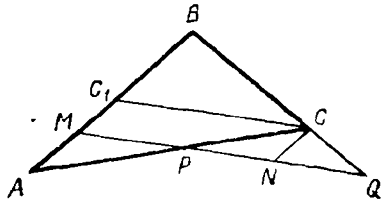


Рис. 166

Отсюда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+$ $+\overrightarrow{OE}=2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+$ $+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$.

С другой стороны, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=k\,\overrightarrow{OB},$

$$\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=k\,\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=k\,\overrightarrow{OD},$$
$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=k\,\overrightarrow{OE},$$
$$\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OM}=k\,\overrightarrow{OA},$$

значит,

$$2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}).$$

Следовательно,

$$(1-k)(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})=\vec{0}.$$

Но $1-k\neq 0$, поэтому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

56. Через вершину C треугольника ABC проведем (CN) параллельно (AB), $(CN)\cap(PQ)=N$ (рис. 166).

Нетрудно видеть, что $\triangle ACC_1 \sim \triangle CPN$ и $\triangle BCC_1 \sim \triangle CQN$. Отсюда

$$\frac{|CC_1|}{|QN|}=\frac{|CC_1|}{|NP|},$$

поэтому $|QN|=|NP| \Rightarrow 2\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QM}$.

57. Пусть $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB}$, тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-$ $-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{n+1}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}=$

$$=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{n(n+1)}\overrightarrow{AB}.$$

С одной стороны, $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AC}$, с другой $-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\beta\,\overrightarrow{MN}=$ $=\frac{n+1-\beta}{n(n+1)}\overrightarrow{AB}+\frac{\beta n}{n+1}\overrightarrow{AC}.$

Таким образом, $\alpha\overrightarrow{AC}=\frac{n+1-\beta}{(n+1)n}\overrightarrow{AB}+\frac{\beta n}{n+1}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{cases}\alpha=\frac{\beta n}{n+1}\\ n+1-\beta=0\end{cases}\Longrightarrow\alpha=n\Longrightarrow\overrightarrow{AD}=n\overrightarrow{AC}.$$

58. Пусть симметрия с центром A отображает точку X на Y, тогда $\overrightarrow{OY}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}$, где O — любая точка. Далее, перенос $\overrightarrow{OB}$ отображает точку Y на точку Z, тогда

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OB}.$$

Отсюда $\overrightarrow{OZ}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

$$\overrightarrow{OZ}=-\overrightarrow{OX}+2\left(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right).$$

Таким образом, последовательное выполнение центральной симметрии и параллельного переноса есть центральная симметрия.

59. Воспользуемся векторным уравнением центральной симметрии. Пусть при симметрии с центром A произвольная точка X пространства отображается на точкуY, тогда $\overrightarrow{OY}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}$. Симметрия с центром B отображает точку Y на Z, определяемую уравнением $\overrightarrow{OZ}=-\overrightarrow{OY}+2\overrightarrow{OB}$. Третья симметрия отображает точку Z на точку W, тогда $OW=-\overrightarrow{OZ}+2\overrightarrow{OC}$. Три симметрии с центрами A, B, C отображают точку X на точку W.

$$\overrightarrow{OW}=\overrightarrow{OY}-2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OX}+2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}.$$

Итак, в результате последовательного выполнения трех центральных симметрий получим преобразование, заданное уравнением

$$\overrightarrow{OW}=-\overrightarrow{OX}+2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Это есть центральная симметрия с центром в точке, определяемой вектором $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (т. е. эта точка является четвертой вершиной параллелограмма $ABCD$).

60. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC_1 и $A_1B_1C_1$ соответственно. Тогда

$$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC_1})\text{ и }\overrightarrow{SN}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SC}).$$

По условию $\overrightarrow{SA}=-\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB}=-\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SC_1}=-\overrightarrow{SC}$. Отсюда $\overrightarrow{SM}=-\overrightarrow{SN}$. Следовательно, точки пересечения медиан треугольников ABC_1 и A_1C_1C симметричны относительно S.

Глава V. ПОДОБИЕ

§ 1. ГОМОТЕТИЯ

1. $\overrightarrow{AA_1} \neq \overrightarrow{BB_1}$.

2. Постройте точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 и AB_1 и A_1B.

3. $k = 1$, $k = -1$.

4. Может, если коэффициенты гомотетий — противоположные числа.

5. Воспользуйтесь свойствами гомотетии: отношение длин отрезков параллельных прямых при гомотетии равно отношению длин образов этих отрезков; угол при гомотетии отображается на конгруэнтный ему угол.

6. $\frac{4}{9}$.

7. Если произведение коэффициентов двух гомотетий отлично от единицы, то получаем гомотетию. В противном случае — либо перенос, либо тождественное отображение. Поскольку центры данных гомотетий различны, имеем перенос.

8. Центральная симметрия.

9. Перенос и гомотетия отображают каждую прямую на параллельную ей прямую. Длина отрезка умножается на $|k|$, где k — коэффициент данной гомотетии. А это и значит, что в результате получаем гомотетию.

Для построения центра искомой гомотетии выберите произвольно точки A и B, постройте их образы A_1 и B_1 в переносе, затем A_2 и B_2 — в гомотетии. Прямые AA_2 и BB_2 пересекаются в искомой точке.

10. Если гомотетия, то любая прямая, проходящая через центр этой гомотетии; если — параллельный перенос, то любая прямая, параллельная направлению переноса.

11. Пусть $H_{O_1}^{k_1}(X) = Y$ и $H_{O_2}^{k_2}(X) = Y$. Очевидно, $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}}(Y) = X$, поэтому $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}} H_{O_1}^{k_1}(X) = X$. Но $H_{O_2}^{\frac{1}{k_2}} H_{O_1}^{k_1}$ есть гомотетия, если $k_1 \neq k_2$, причем точка X—центр этой гомотетии. Таким образом, при $k_1 \neq k_2$ существует единственная общая пара точек обеих гомотетий X, Y. Если $k_1 = k_2$, общих пар точек нет.

12. Прямая, параллельная прямым a и b и удаленная от a на расстояние, равное половине расстояния между a и b.

13. Если O_1 и O_2 — вершины углов, то искомое множество точек — все точки прямой O_1O_2, кроме точек отрезка O_1O_2.

14. $k_1 = \frac{|AM|}{|AB|}$, $k_1 = \frac{|MB|}{|AB|}$, $k_1 + k_2 = 1$.

15. $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

16. Если окружности конгруэнтны, то существует одна гомотетия ($k = -1$), отображающая одну из окружностей на другую.

Если окружности концентрические, то все гомотетии имеют общий центр — центр окружностей.

Во всех остальных случаях два центра гомотетии.

Любые две окружности имеют центр гомотетии. Если (O_1, R_1) и (O_2, R_2) — данные окружности и $[O_2A_2]$, $[O_2A_2']$ — радиусы второй окружности, параллельные радиусу O_1A_1 первой, то центры гомотетии есть точки пересечения прямых A_1A_2 и A_1A_2' с линией центров (O_1O_2).

18. Окружность F имеет центр O. O_1 — образ точки O при заданной гомотетии. F_1 — множество точек, удаленных от точки O_1 на расстояние kR (k — коэффициент гомотетии), т. е. окружность с центром в точке O_1 и радиусом kR.

Так как центр гомотетии отображается на себя, то он принадлежит и окружности F_1. Если предположить, что окружности F и F_1 имеют еще общую точку, то эта вторая точка также гомотетична себе при той же гомотетии, т. е. является центром, что невозможно.

19. Треугольники гомотетичны с центром M, следовательно, и окружности, описанные около этих треугольников, гомотетичны и центр гомотетии принадлежит окружностям, т. е. является их точкой касания.

20. См. задачу 19.

21. Пусть точки делят хорды в отношении $m : n$. Искомое множество точек есть образ данной окружности при гомотетии с центром в общей для хорд точке и с коэффициентом $k = \frac{m}{m+n}$, т. е. окружность, касающаяся внутренним образом данной окружности в точке, общей для хорд, и имеющая радиус $r = \frac{n}{m+n}R$, где R — радиус данной окружности.

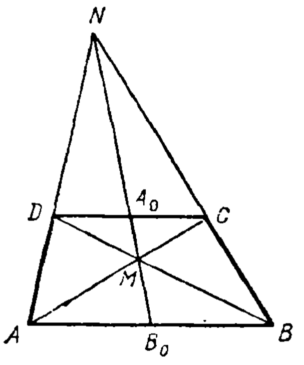


Рис. 167

22. См. задачу 21.

23. Окружность, описанная около треугольника, образованного средними линиями данного, гомотетична окружности, описанной около данного треугольника, с коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, радиус ее равен половине радиуса окружности, описанной около данного треугольника.

24. $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD, M — точка пересечения диагоналей AC и BD, N — точка пересечения прямых AD и BC (рис. 167).

Гомотетия с центром M отображает отрезок CD на отрезок AB, следовательно, середину A_0 отрезка CD на середину B_0 отрезка AB; следовательно, центр гомотетии M принадлежит прямой A_0B_0. Аналогично доказывается, что и точка N принадлежит прямой A_0B_0.

25. $k_1 + k_2 = 1$; $k_1^2 = \frac{S_1}{S}$; $k_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$;

$k_2^2 = \frac{S_2}{S}$; $k_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$; $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

26. N — точка пересечения прямой AB и прямой, проходящей через точку C параллельно DB (рис. 168). Площадь треугольника ACN равна площади S данной трапеции. $(BF) \parallel (AC)$. Площадь треугольника BFN равна площади S_1 треугольника DMC.

Треугольники AMB и BFN гомотетичны треугольнику ACN с коэффициентами k_1 и k_2, причем $k_1 + k_2 = 1$ (см. задачу 25).

Но $k_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, $k_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$; следовательно, $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

27. Отсекаемые треугольники гомотетичны данному с коэффициентами

$$k_1 = \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}};\ k_2 = \frac{|AS|}{|AB|} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}};\ k_3 = \frac{|FB|}{|AB|} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

Но $k_1 + k_2 + k_3 = \frac{|AF| + |SB| + |AF| + |FS| + |FS| + |SB|}{|AB|} = 2$,

значит,

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = 2\sqrt{S}.$$

$(F \in (AB),\ S \in (AB),\ P \in (AC),\ Q \in (CB))$.

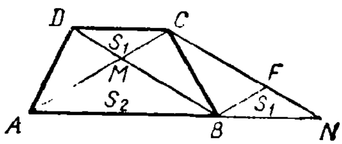


Рис. 168

28. Треугольник A_1B_1G гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Но $k = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, значит, $S_1 = k^2S$, $S_1 = \frac{1}{9}S$, где S_1 — площадь треугольника A_1B_1G.

29. а) Пусть Y — точка пересечения медиан треугольника AC_1B с вершиной C_1 на прямой a (рис. 169). $\overrightarrow{CY} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Y — образ точки C_1 при гомотетии с центром C и коэффициентом $\frac{1}{3}$, b — образ прямой a при этой гомотетии.

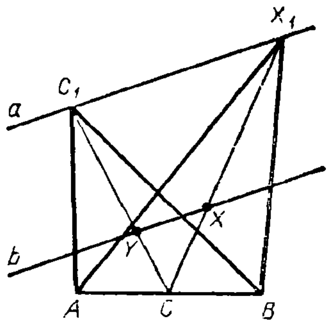


Рис. 169

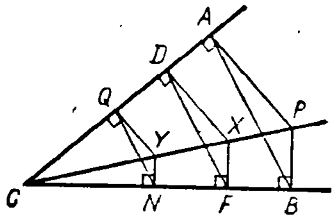


Рис. 170

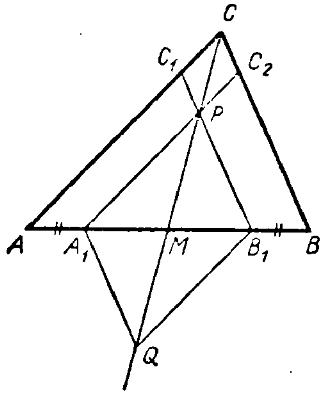


Рис. 171

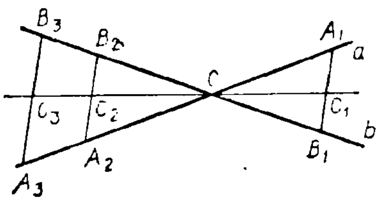


Рис. 172

б) Если точка X принадлежит прямой b, то при гомотетии с центром C и коэффициентом 3 X отображается на X_1, принадлежащую прямой a. В треугольнике AX_1B X — точка пересечения медиан.

Искомое множество состоит из точек прямой b, гомотетичных точкам прямой a при гомотетии с центром в середине отрезка AB и коэффициентом $k = \frac{1}{3}$.

30. а) Пусть точка X обладает данным свойством. X — образ точки P при гомотетии с центром C, отображающей отрезок AB на параллельный ему отрезок DF. Тогда X принадлежит лучу CP (рис. 170).

б) Y — произвольная точка луча CP. $(YQ) \perp (AC)$, а значит, $(YQ) \| (AP)$ и по теореме Фалеса $|AC| : |QC| = |PC| : |YC|$.

Аналогично $|BC| : |NC| = |PC| : |YC|$, т. е. $|AC| : |QC| = |BC| : |NC|$, следовательно, $(QN) \| (AB)$.

Искомое множество точек — открытый луч CP.

31. Докажите, что при гомотетии, отображающей отрезок CC_1 на параллельный ему отрезок PA_1, параллелограмм CC_1PC_2 отображается на параллелограмм PA_1QB_1 (рис. 171). Тогда точки C, P и P, Q, как соответственные при гомотетии, должны принадлежать одной прямой. Так как $[PQ]$ — диагональ параллелограмма, то $|A_1M| = |MB_1|$. В силу равенства расстояний $|AA_1|$ и $|BB_1|$ равны и расстояния $|AM|$ и $|MB|$.

32. Через точку R медианы CC_1 треугольника ABC проведите прямую, параллельную (AB) и пересекающую (AC) и (BC) соответственно в точках P и Q. Запишите равные отношения:

$$\frac{|AC_1|}{|PR|} = \frac{|CC_1|}{|CR|} = \frac{|C_1B|}{|RQ|}.$$

Согласно условию задачи $|AC_1| = |C_1B|$, следовательно, $|RP| = |RQ|$.

33. Пусть C_1, C_2, C_3 соответственно середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (рис. 172). Гомотетия с центром $O = a \cap b$ и коэффициентом $k_1 = \frac{|OA_2|}{|OA|}$ (или $-k_1$) отображает точку C_2 на точку C_1, а гомотетия с тем же центром, но с коэффициентом $k_2 = \frac{|OA_3|}{|OA_1|}$ (или $-k_2$) отображает точку C_3 на точку C_1. Это значит, что как точки O, C_1, C_2, так и точки O, C_1, C_3 принадлежат одной прямой. Очевидно, эти прямые совпадают, следовательно, точки C_1, C_2, C_3 принадлежат прямой, проходящей через O.

34. Запишите равные отношения:

$$\frac{|AB|}{|NS|} = \frac{|BD|}{|SD|} = \frac{|AC|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|SM|},$$

отсюда $|NS| = |SM|$.

35. Пусть четырехугольник не является трапецией. $(AB) \nparallel (DC)$. Гомотетия с центром S и коэффициентом $k = \frac{|SD|}{|SA|}$ отображает точку B на точку B_1, а точку M — на точку M_1. Средняя линия NM_1 треугольника CDB_1 не параллельна основанию, что невозможно.

36. Из подобия трапеций следует, что

$$\frac{a}{|MN|} = \frac{|MN|}{b},$$

откуда $|MN| = \sqrt{ab}$.

37. Проведите через точку N прямую, параллельную (CB), пересекающую (AB) в точке Q, а через D — прямую, параллельную (BC) и пересекающую (MN) и (AB) соответственно в точках P и R (рис. 173). Запишите равные отношения:

$$k = \frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AQ|}{|QR|} = \frac{|AQ|}{|NP|} = \frac{a-d}{d-b}.$$

Ответ. $d = \frac{a+kb}{1+k}$.

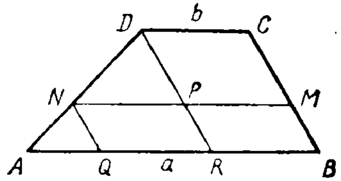


Рис. 173

38. Соедините середины K и Z оснований AB и CD отрезком, который пройдет через точку S пересечения диагоналей и пересечет $[MP]$ в точке R (рис. 174). Заметьте, что R — середина $[MP]$ и R также середина $[NQ]$, следовательно, $|MN| = |QP|$ (см. задачу 33).

39. См. задачу 38.

40. При доказательстве воспользуйтесь методом от противного.

Пусть сторона DC не параллельна $[AB]$, причем середины сторон AB и CD и точка S пересечения диагоналей четырехугольника

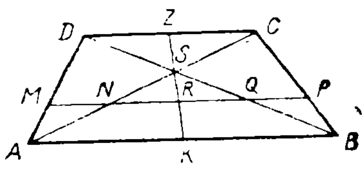


Рис. 174

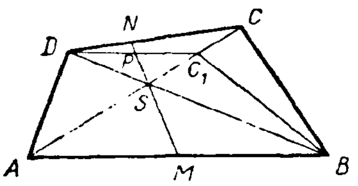


Рис. 175

принадлежат одной прямой (рис. 175). Проводим $(DC_1) \parallel (AB)$, $C_1 \in (AC)$. Прямая MN пересекает $[DC_1]$ в его середине P (задача 35). Но тогда $[NP]$ — средняя линия треугольника DCC_1 и $[NP] \parallel [CC_1]$, что противоречит принадлежности точки S прямой NP.

41. Пусть прямая, проходящая через O, пересекает $[BC]$ в точке M, $[AD]$ в точке N.

Запишите пропорции: $\frac{|AB|}{|NO|} = \frac{|BD|}{|OD|}$, $\frac{|AC|}{|OC|} = \frac{|AB|}{|OM|}$.

Отсюда $\frac{|BD|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|OC|} \Longrightarrow (AB) \parallel (CD)$.

42. При доказательстве воспользуйтесь методом от противного. (См. задачу 40.)

43. Заметьте, что $\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|BC|}$, $\frac{|AQ|}{|AB|} = \frac{|CM|}{|CB|}$.

44. Убедитесь, что $|MP| : |PC| = 1 : 2$, используя свойства медиан треугольника ADC, и что $|AQ| : |QC| = 1 : 2$, рассматривая трапецию $ABCM$.

45. Проведите через P прямую, параллельную (AC) и пересекающую (BC) в точке Q, через Q — прямую, параллельную (BD) и пересекающую (CD) в точке R, через R прямую, параллельную (AC) и пересекающую (AD) в точке S. Докажите, что $(PS) \parallel (QR)$. Задача имеет бесчисленное множество решений.

46. Задача имеет два решения. Например, середину M основания AB соедините с вершиной D. Если $[AC] \cap [DM] = P$, то прямая, проходящая через P параллельно $[AB]$, — искомая.

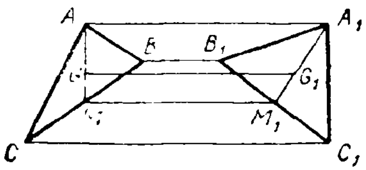


Рис. 176

47. Разделите сторону AB точкой P в отношении $2:1$. Через точку $(BD) \cap (PC)$ проведите прямую, параллельную AB. Задача имеет два решения.

48. Пусть M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1 (рис. 176). Прямая MM_1 параллельна (AA_1). Точки пересечения медиан G и G_1 делят отрезки AM и A_1M_1 в равных отношениях $2:1$, следовательно, $(GG_1) \parallel (AA_1)$.

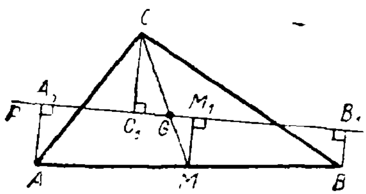


Рис. 177

49. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции вершин треугольника на прямую p (рис. 177). Обозначьте проекцию середины M стороны AB на p через M_1. Заметьте, что $|MM_1| = \frac{1}{2}|CC_1|$.

$|MM_1| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|)$. Следовательно, $|CC_1| = |AA_1| + |BB_1|$.

50. $|\overrightarrow{PR}| : |\overrightarrow{RQ}| = 1 : k$ $(k \neq 0)$.

51. Постройте прямую P_0Q_0. Пусть $(P_0Q_0) \cap r = R_0^1$, (P_0Q_0) $r_1 = R_0^n$. Убедитесь, что $\frac{|P_0Q_0|}{|Q_0R_0^1|} = \frac{|P_0Q_0|}{|Q_0R_0^n|}$,
отсюда $R_0^1 = R_0^n = R = r \cap r_1$.

52. Проведите медианы CM и B_1N (рис. 178). Докажите, что точка пересечения этих медиан делит каждую из них в отношении 2 : 1. Для этого проведите через A_1 прямую, параллельную (AC) и пересекающую (AB) в точке P. Заметьте, что $|AC_1| = |BP|$, поэтому точка M — середина отрезка C_1P, значит, $(MN) \parallel (A_1P)$ и $|MN| = \frac{1}{2}|B_1C|$. Но $|A_1P| = |B_1C| \Rightarrow [MN] \parallel [B_1C]$, $|MN| = \frac{1}{2}|B_1C|$. Это значит, что $|CS| : |SM| = |B_1S| : |SN| = 2 : 1$. Итак, S — общая точка пересечения медиан обоих треугольников.

§ 2. ПОДОБИЕ

1. Рассмотрите подобные треугольники AMC и A_0MC_0 (рис. 179).

2. 1) Треугольник ABC равнобедренный с основанием AB.

2) ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C.

3. 36°, 72°, 72°.

4. Треугольники гомотетичны, если параллельны соответственные стороны.

5. Можно, если треугольник не равносторонний.

6. Не может.

7. По двум углам.

8. Из подобия прямоугольных треугольников AA_1C и BB_1C следует пропорция $\frac{|A_1C|}{|AC|} = \frac{|B_1C|}{|BC|}$. Кроме того, в треугольниках A_1B_1C и ABC общий угол C.

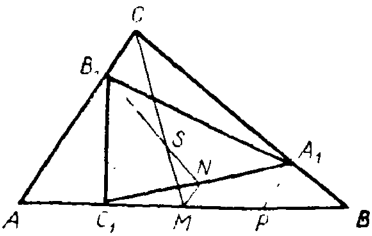


Рис. 178

9. Треугольники AMD и BMC подобны, следовательно,
$|AM| : |MC| = |DM| : |MB|$, значит,
$|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$.

10. Выполните поворот одного треугольника на 90°. Углы одного треугольника конгруэнтны углам другого.

11. 4.

12. Рассмотрите подобные треугольники BHA_1 и CAA_1, HAB_1 и BCB_1.

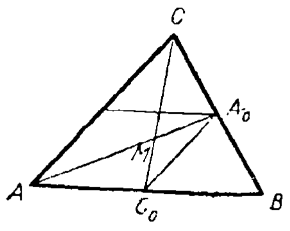


Рис. 179

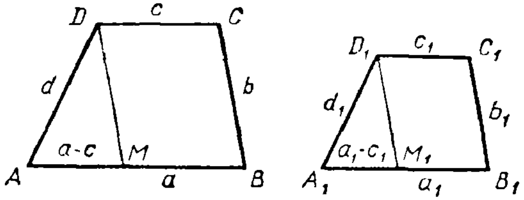


Рис. 180

13. Достаточно доказать конгруэнтность одной пары углов, например A и A_1 (рис. 180): $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1}$.

Постройте прямые DM и D_1M_1, параллельные соответственно (CB) и (C_1B_1). В треугольниках ADM и $A_1D_1M_1$ $\frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a-c}{a_1-c_1}$ (так как $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$, то $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$ и $\frac{a-c}{c} = \frac{a_1-c_1}{c_1}$; $\frac{a-c}{a_1-c_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{d}{d_1}$), следовательно, они подобны $\widehat{A} = \widehat{A_1}$.

14. Секущая параллельна меньшей стороне прямоугольника и отстоит от нее на расстоянии $\frac{a^2}{b}$, если a — длина меньшей из сторон.

15. 1) Каждая из осей симметрии делит прямоугольник на два конгруэнтных и, следовательно, подобных прямоугольника.

2) Если a — сторона меньшей длины, то прямая, параллельная a и удаленная от нее на расстояние $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$, делит прямоугольник на два подобных.

Если $b < 2a$, то прямая не существует,
если $b = 2a$, то прямая единственная,
если $b > 2a$, то существуют две прямые.

16. $b^2 = 2a^2$, где a — длина меньшей стороны.

17. $d = \sqrt{ab}$.

18. Докажите конгруэнтность соответствующих углов этих параллелограммов и пропорциональность сторон.

19. Воспользуйтесь свойствами вписанных в окружность углов и определением подобных многоугольников.

20. Воспользуйтесь пропорциональностью сходственных сторон прямоугольных треугольников, которые также подобны.

21. Постройте прямоугольный треугольник по известному отношению катета к гипотенузе, затем ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

22. Постройте любую прямую, пересекающую прямые a, b, c, и воспользуйтесь отношением отрезков, полученных при этом построении.

23. Через вершины треугольника $A_0B_0C_0$ проведите три параллельные прямые a_0, b_0, c_0, которые образуют фигуру, подобную фигуре, состоящей из прямых a, b, c (см. задачу 22). Затем постройте фигуру, образованную тройкой прямых a_1, b_1, c_1, конгруэнтную фигуре a, b, c, причем $a \parallel a_0$. Остается построить $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_0B_0C_0$, вершины которого по одной принадлежат прямым a_1, b_1, c_1, наконец, $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

24. Прямые, проходящие через точки M и N, наклонены к прямой MN под углом α, где $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|MN|}{|PQ|}$, через P и Q — перпендикулярные к ним (рис. 181).

25. $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$. Сначала постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому, по сторонам a_1, b_1, c_1, где a_1 — произвольный отрезок,

$$b_1 = \frac{a_1h_a}{h_b}; \quad c_1 = \frac{a_1h_a}{h_c}.$$

26. Даны h_c, угол $\widehat{C}$ и отношение $|AD| : |DB| = m : n$, где D — основание высоты h_c.

Построение. 1) Постройте прямую l и на ней точки D, A_1 и B_1 так, что $|A_1D| = m$, $|DB_1| = n$ и D лежит между A_1 и B_1.

2) Постройте сегмент, вмещающий данный угол C и стягиваемый хордой A_1B_1.

3) Через точку D постройте перпендикуляр к (A_1B_1). Пересечение его с дугой сегмента есть точка C_1.

4) Треугольник, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом $k = h_c : |C_1D_1|$, — искомый.

27. Рассмотрите подобные треугольники ABE и CDE (рис. 182), значит,

$$a : c = (d + y) : x = (b + x) : y,$$

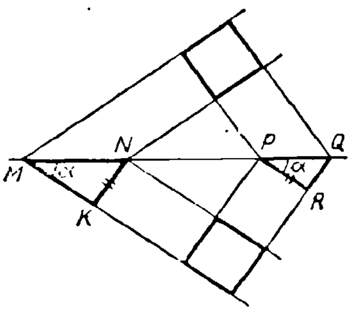


Рис. 181

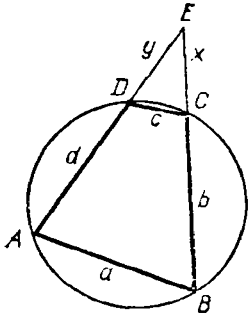


Рис. 182

откуда $x = \frac{c(bc+ad)}{a^2-c^2}$, $x+b=\frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2}$. Аналогично находим y. Отрезки EC и ED можно построить циркулем и линейкой.

28. $|MN| = \frac{(a+b-c)c}{a+b+c}$.

Решение. Из подобия треугольников MCN и ACB следует: $\frac{|MN|}{c} = \frac{h_c - 2r}{h_c}$, или $|MN| = \left(1 - \frac{2r}{h_c}\right)c$, где r — радиус вписанной окружности.

Но $pr = \frac{1}{2}c \cdot h_c$, тогда $\frac{2r}{h_c} = \frac{c}{p}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

29. Обозначим $|DK| = |DA| = x$, $|EK| = |EB| = y$.

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{y} = \frac{a+b}{x+y}; \quad \frac{c}{x+y} = \frac{b}{b-x} \Longrightarrow \frac{b}{x} = \frac{(a+b)b}{c(b-x)},$$

$x(a+b+c) = bc$. Аналогично, $y(a+b+c) = ac$.

30. Дважды воспользуйтесь следующим фактом: биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

31. Если Y — точка пересечения биссектрис, то

$$\frac{|AY|}{|YA_1|} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{|BY|}{|YB_1|} = \frac{a+c}{b},$$

a, b, c — стороны треугольника, тогда (см. задачу 29) $\frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a}$, $(a-b)(a+b+c) = 0$, следовательно, $a = b$.

32. $\frac{ab}{a+b}$.

33. $\frac{ch_c}{c+h_c}$.

34. $(b^2-a^2)^2 = c^2(a^2+b^2)$.

Из подобия треугольников ABC и BDC (рис. 183):

$\frac{a}{|CD|} = \frac{b}{a} = \frac{c}{|BD|} \cdot |CD| = \frac{a^2}{b}$, $|BD| = \frac{ac}{b}$, $|AD| = \frac{b^2-a^2}{b}$.

Но $|AD|^2 = |BD|^2 + |AB|^2$ или $(b^2-a^2)^2 = c^2(a^2+b^2)$.

35. $[BD]$ — биссектриса угла ABC (рис. 184). Из подобия треугольников CBD и ABC:

$$\frac{a}{|CD|} = \frac{c}{|BD|} = \frac{b}{a}, \quad |CD| = \frac{a^2}{b}, \quad |BD| = \frac{ac}{b}.$$

В треугольнике ABD углы при основании конгруэнтны, следовательно, $|BD| = |AD| = b - |CD|$, тогда $b^2 - a^2 = ac$.

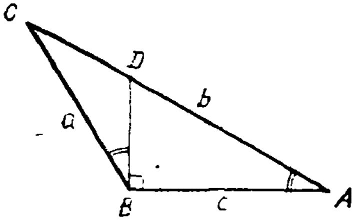


Рис. 183

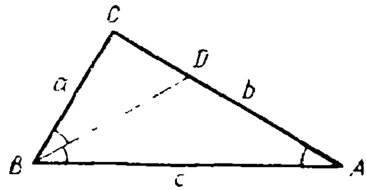


Рис. 184

36. $a^2 - c^2 = ac$ (см. задачу 35).

38. $|MN|$, $|MD|$ и $|MC|$ — расстояния от точки M до прямых AB, SA и BS соответственно (рис. 185).

Треугольники MAD и MBN, MNA и MCB подобны, следовательно,

$$\frac{|MD|}{|MN|}=\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{|AD|}{|BN|} \text{ и } \frac{|MA|}{|BM|}=\frac{|MN|}{|MC|}=\frac{|NA|}{|CB|},$$

откуда

$$\frac{|MD|}{|MN|}=\frac{|MN|}{|MC|}.$$

39. Проведите к окружности касательные в точках A, B, C и D и используйте результат задачи 38.

40. B — центр подобия, отображающего одну из окружностей на другую, M и N — пара соответственных в подобии точек.

41. $2\sqrt{mn}$.

42. Треугольники подобны, значит, $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, $a^2 + b^2 = c^2$, или $aa + bb = cc$.
Подставив вместо a, b, c их выражения через a_1, b_1, c_1, получим $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

43. В треугольниках ABC и ABD (рис. 186) угол $B\hat{A}C$ общий, угол ABD конгруэнтен углу ACB, так как их величины равны угловой величине дуги AB. Из подобия треугольников следует, что $|AB|^2 = |AD| \cdot |AC|$.

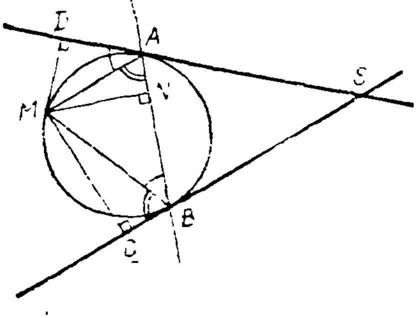


Рис. 185

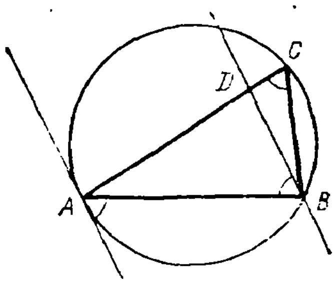


Рис. 186

Глава VI. ПОВОРОТЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. а) $X_1 = R_0^{18°}(X)$; б) $X_1 = R_0^{-70°}(X)$; в) $X_1 = R_0^{-60°}(X)$; г) $X_1 = R_0^{120°}(X)$; д) $X_1 = R_0^{160°}(X)$.

2. $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

3. а) $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$; $-1 \leqslant y \leqslant 0$; в) $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

5. а) $\sin 20° \approx 0{,}34$, $\cos 20° \approx 0{,}94$;

б) $\sin(-75°) = -\sin 75° \approx -0{,}97$, $\cos(-75°) = \cos 75° \approx 0{,}26$;

в) $\sin 100° = \cos 10° \approx 0{,}98$, $\cos 100° = -\sin 10° \approx -0{,}17$;

г) $\sin(-165°) = -\sin 165° = -\sin 15° \approx -0{,}26$, $\cos(-165°) = \cos 165° = -\cos 15° \approx -0{,}97$.

6. а), б) $-\infty < \alpha < +\infty$; в) Функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена для всех тех углов α, для которых $\cos\alpha \neq 0$.

7. а), в) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

б) $\sin\alpha \leqslant 0$, $\cos\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$;

г) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

8. а), в), е), з) положителен, б), г), д), ж), и) отрицателен.

9. а) $360° \cdot n$ и $180° + 360° \cdot n$, $n \in Z$ (возможная запись: $180° \cdot n$);

б) $90° + 360° \cdot n$, $n \in Z$; в) $180° + 360° \cdot n$, $n \in Z$;

г) $90° + 360° \cdot n$ и $-90° + 360° \cdot n$, $n \in Z$ (возможная запись: $90° + 180° \cdot n$);

д) $-90° + 360° \cdot n$, $n \in Z$; е) $360° \cdot n$, $n \in Z$.

11. $|CA| = \cos\alpha$, $|CB| = \sin\alpha$, $|DA| = \cos^2\alpha$, $|DB| = \sin^2\alpha$, $|CD| = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

12. $R\sqrt{3}$.

13. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 5°$; в) $\cos^2 18°$; г) 1.

14. $\frac{\sin 5°}{\cos 5°} \cdot \frac{\sin 25°}{\cos 25°} \cdot 1 \cdot \frac{\cos 25°}{\sin 25°} \cdot \frac{\cos 5°}{\sin 5°} = 1$.

Глава VII. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. а) $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2 - 12 \cdot 4 \cdot \cos 60°}$ см $= \sqrt{9 + 16 - 12}$ см $= \sqrt{13}$ см $\approx 3{,}61$ см.

б) $|AB| = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 8 \cdot \cos 150°}$ см $= \sqrt{20 + 8}$ см $= \sqrt{28}$ см $\approx 5{,}86$ см.

2. $\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}$; $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$; $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. $d = \sqrt{4 + 9 - 2\cdot 6\cdot \cos 45^\circ}$ см $= \sqrt{4 + 9 - \frac{12\cdot\sqrt{2}}{2}}$ см $=$
$= \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ см $\approx \sqrt{13 - 6\cdot 1{,}414}$ см $\approx \sqrt{13 - 8{,}484}$ см $=$
$= \sqrt{4{,}516}$ см $\approx 2{,}12$ см.

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\widehat{A}$; $\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos\widehat{B} =$
$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos\widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

5. а) $\widehat{A} \approx 36^\circ 21'$; б) $\widehat{C} \approx 26^\circ 23'$.

6. $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 150^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 30^\circ} =$
$= \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$.
$|BD| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 30^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}$.

7. По теореме косинусов:

$$5 = 1 + 2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha;\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \alpha = 135^\circ.$$

8. $\cos x = 0{,}9899$, $x \approx 8^\circ 9'$.

9. Пусть стороны параллелограмма равны a и b, а его диагонали c и d $(c > d)$.

По теореме косинусов имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 45^\circ = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2},$$
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 45^\circ = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2},$$

откуда,

$$(cd)^2 = (a^2 + b^2) - (ab\sqrt{2})^2 = a^4 + b^4.$$

10*. $|AM|^2 + |BM|^2 = 2(R^2 + |OM|^2)$ (рис. 187).

а), б) по теореме косинусов из треугольника BOM и из треугольника AOM имеем, что

$$|BM|^2 = R^2 + |OM|^2 - 2R\,|OM|\cos\widehat{BOM},$$
$$|AM|^2 = R^2 + |OM|^2 + 2R\,|OM|\cos\widehat{BOM}.$$

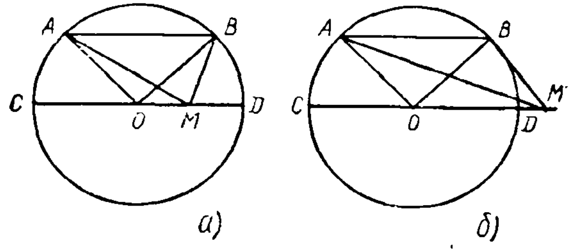


Рис. 187

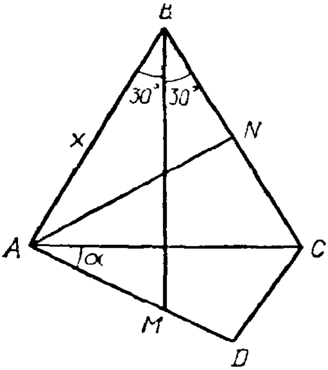


Рис. 188

Сложив почленно эти равенства, получим

$$|BM|^2 + |AM|^2 = 2(R^2 + |OM|^2).$$

11*. Обозначим $|AB| = x$ (рис. 188) и докажем, что треугольник ABC равносторонний.

Из треугольника ABM находим: $|AM| = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, а следовательно, $\alpha = 30°$.

Из треугольника ACD по теореме косинусов находим $|CD|$: $|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2|AC| \cdot |AD| \cdot \cos\alpha$. Откуда $|CD| = \frac{x}{2}$.

По условию $P = 5 + \sqrt{3}$, т. е. $x = 2$.

Итак, $|AB| = |BC| = 2$, $|AD| = \sqrt{3}$, $|CD| = 1$.

12. Указание. Выразите квадраты диагоналей через стороны параллелограмма, использовав теорему косинусов.

13. а), б) 2 см^2.

14. $12\sqrt{2}$ см^2 $\approx 17{,}0$ см^2.

15. 4 см^2.

16. 24 см^2.

17. $27\sqrt{2}$ см^2 $\approx 38{,}2$ см^2.

18. Пусть S_1 и S_2 — площади данных треугольников. Пользуясь формулой для вычисления площади треугольника, получим:

$$S_1 = \frac{1}{2} ab \sin\alpha,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin\beta = \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin\alpha,$$

откуда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \cdot b}{a_1 \cdot b_1}$.

19. $\frac{1}{2} c^2 \sin 15° \cdot \cos 15°$.

20. $|CC_1| = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ см $\approx 5{,}3$ см. Указание. Используйте равенство $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACC_1} + S_{\triangle BCC_1}$.

21. Обозначим $|AD| = x$ (рис. 189). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и ACD, т. е. равна $\frac{1}{2} x (b + c) \sin\frac{\widehat{A}}{2}$.

$$2S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} + 2S_{\triangle ACD};$$

$$2S_{\triangle ABC} = bc \cdot \sin\widehat{A};$$

$$2S_{\Delta ABD} = cx \cdot \sin\frac{\widehat{A}}{2};$$

$$2S_{\Delta ACD} = bx \cdot \sin\frac{\widehat{A}}{2},$$

откуда $x = \dfrac{bc\sin\widehat{A}}{(b+c)\sin\dfrac{\widehat{A}}{2}}$.

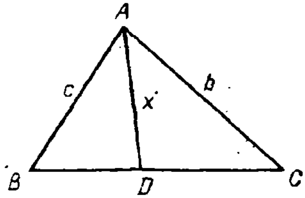


Рис. 189

22. Указание. Запишите площади указанных треугольников, пользуясь формулой $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\widehat{C}$ и сравните заданные в условии суммы площадей этих треугольников.

23*. $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ECD}} = \dfrac{|AB|}{|DE|} \cdot \dfrac{|BD|}{|DC|}$.

Из подобия треугольников ABC и EDC получим, что

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|EC|},$$

$\dfrac{|BC|}{|DC|} = \dfrac{|BD|+|DC|}{|DC|} = 1 + \dfrac{|BD|}{|DC|}$, но $\dfrac{|BD|}{|BC|} = a$, $\dfrac{|BD|}{|BD|+|DC|} = a$,

откуда $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{a}{1-a}$. $\dfrac{|BC|}{|DC|} = \dfrac{1}{1-a}$.

Таким образом, $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ECD}} = \dfrac{a}{(1-a)^2}$.

24. а), б) $10\sqrt{2}$ см $\approx 14{,}1$ см.

25. а) $|AB| = 10 \cdot \sin 105^\circ$ см $\approx 9{,}66$ см, $|BC| = 5\sqrt{2}$ см $\approx$ $\approx 7{,}07$ см.

б) $|AB| = 2 \cdot \sin 50^\circ$ см $\approx 1{,}53$ см; $|BC| = 2\sin 100^\circ$ см $\approx$ $\approx 1{,}53$ см.

26. а) $\widehat{C} \approx 14^\circ 29'$, $\widehat{B} \approx 135^\circ 31'$; б) $\widehat{C} \approx 32^\circ 2'$; $\widehat{B} \approx 102^\circ 58'$.

27. $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

28. Выразим сторону AC через a, β и γ:

$$\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{|AC|}{\sin\beta}; \quad |AC| = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Из $\Delta\, ADC$ имеем $\left(\text{полагая } \gamma = \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right)$:

$$\frac{|AD|}{\sin\gamma} = \frac{|AC|}{\sin\varphi}, \text{ откуда } |AD| = \frac{|AC|\sin\gamma}{\sin\varphi},$$

подставляем вместо $|AC|$ ее выражение через a, β и γ, получим:

$$|AD| = \frac{a \sin\gamma \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

29. $\frac{a \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$; $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$; $\frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$.

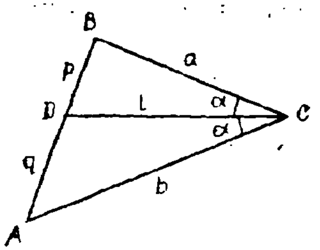


Рис. 190

30. Из треугольника BCD (рис. 190) по теореме синусов имеем $\frac{p}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin\widehat{\beta}}$, а из треугольника ACD имеем $\frac{q}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\widehat{A}}$.

Откуда $\frac{p}{q} = \frac{\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{B}}$.

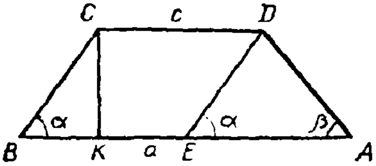


Рис. 191

31*. $\frac{(a^2-c^2)\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Из треугольника ADE ($[DE] \parallel [BC]$) по теореме синусов находим (рис. 191):

$$\frac{|DE|}{\sin\beta} = \frac{|EA|}{\sin(\alpha+\beta)}; \; |DE| = \frac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из треугольника BCK ($[CK] \perp [AB]$):

$$\sin\alpha = \frac{|CK|}{|CB|},$$

откуда $|CK| = \frac{(a-c)\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

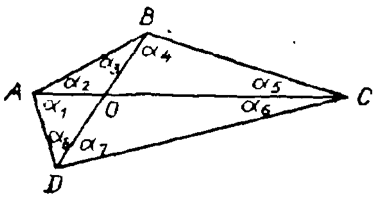


Рис. 192

$$S = \frac{a+c}{2}\cdot\frac{(a-c)\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{(a^2-c^2)\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

32. Рассмотрим треугольники OAD, OAB, OBC, OCD (рис. 192). По теореме синусов:

$$\frac{|OA|}{|OD|} = \frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_1}; \quad \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}; \quad \frac{|CO|}{|OB|} = \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5};$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_7}; \quad \frac{|OB|}{|OA|}\cdot\frac{|OC|}{|OB|}\cdot\frac{|DO|}{|OC|}\cdot\frac{|OA|}{|OD|} = $$

$$= \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_5}\cdot\frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_7} = 1.$$

33*. Введем обозначения: $|AK| = a$, тогда $|KF| = \frac{a}{3}$,

$$|AL| = |LD| = b, \; |CL| = c, \; \widehat{KLA} = \alpha, \; \widehat{KAL} = x.$$

По теореме синусов из треугольника AKL находим:

$$\sin x = \frac{c \cdot \sin\alpha}{2a}.$$

Площадь четырехугольника $KLDF$ равна разности площадей треугольников AFD и AKL. Учитывая, что $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ALB}$, находим искомое отношение площадей

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KLDF}} = \frac{12bc \cdot \sin\alpha}{5bc \sin\alpha} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Глава VIII. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. 80° или 100°.
2. 40°, 60°, 80°.
3. 12°25′30″, 12°25′30″, 155°9′.
4. 82°30′, 277°30′.
5. 1) а) 102°; б) 70°; в) 34°; г) 59°; д) 51°.

7. На основании теоремы 43 $\smile AB = \smile DC = \smile CB = \smile AD$, следовательно, конгруэнтны и углы 1, 2 и 3 (рис. 193), как вписанные, опирающиеся на дуги, угловые величины которых равны.

8. а) 36°. б) 180°.

9. Так как $[AB] \cong [BC]$, то $\smile AB = \smile BC$ (на основании теоремы 43). Обозначим угловую величину дуги AB через α, тогда $\widehat{1} = \alpha$ (рис. 194), так как $\angle 1$ — центральный, опирающийся на дугу, угловая величина которой равна α; $\widehat{2} = \alpha$, так как $\angle 2$ — вписанный угол, опирающийся на дугу, угловая величина которой равна 2α и $[OB] \parallel [CD]$.

10*. Через точку A проводим перпендикуляр к заданной прямой. Пусть он пересечет окружность в точке K (рис. 195). Искомый отрезок диаметра лежит на луче KO.

12. 36°, 36°, 108°.

13. Указание. Каждый из углов треугольника KLM равен полусумме двух из углов треугольника ABC.

14. Рассмотрите окружность, описанную около данного треугольника.

17. Пусть $[AC] \cap [BD] = P$. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, но $\angle ACD \cong \angle KBD$, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами, т. е. $\widehat{ABD} = \widehat{KBD}$.

$\triangle BPK \cong \triangle BPA$, как прямоугольные, имеющие общий катет PB, конгруэнтные острые углы ABD и KBD и $|AB| = |KB|$ (рис. 196). $\angle AMP \cong \angle ACD$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, $\overset{\frown}{AMP} = \overset{\frown}{KBP}$, т. е. $[AM] \parallel [BK]$.

Из конгруэнтности треугольников APB и APM следует, что $[AM] \cong [AB]$, но $|AB| = |BK|$, поэтому $|AM| = |BK|$. Следовательно, четырехугольник $AMBK$ — параллелограмм, но $|AB| = |BK|$, поэтому четырехугольник $ABKM$ — ромб.

19. а) 14,5 и 6 см; б) 25 и 10 см.

20. 12,5 см.

22. У к а з а н и е. Опишите около этого треугольника окружность и продолжите биссектрису до пересечения с окружностью.

24. 38°, 52°.

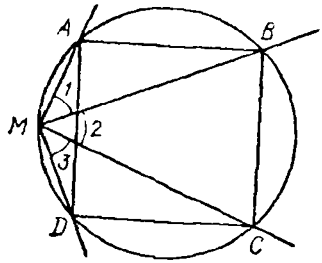


Рис. 193

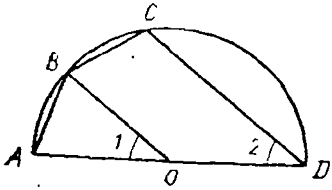


Рис. 194

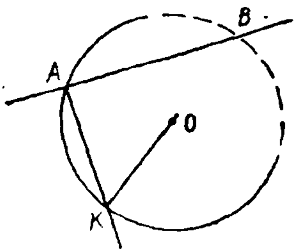


Рис. 195

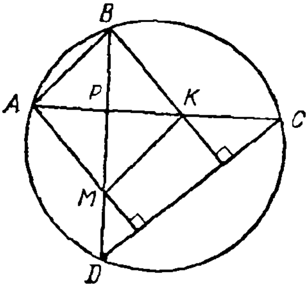


Рис. 196

§ 2. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

2. 1) У к а з а н и е. $\widehat{1} + \widehat{3} = 180°$ и $\widehat{3} + \widehat{2} = 180°$ (рис. 197).

3. а) Всегда; б) если $\widehat{C} = 110°$, $\widehat{D} = 78°$.

5. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$. В четырехугольнике $KNML$ (рис. 198) $L = 180° - 0{,}5(\widehat{B} + \widehat{C})$, $\widehat{N} = 180° - 0{,}5(\widehat{A} + \widehat{D})$, $\widehat{L} + \widehat{N} = 180°$, следовательно (теорема 65), около четырехугольника $KNML$ можно описать окружность.

8. В четырехугольнике AB_1KC_1 $\widehat{C_1} = \widehat{B_1} = 90°$, так как $[BB_1]$ и $[CC_1]$ по условию высоты треугольника и, следовательно, $[BB_1] \perp [AC]$ и $[CC_1] \perp [AB]$. Таким образом, $\widehat{A} + \widehat{K} =$

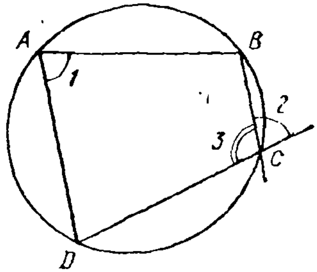


Рис. 197

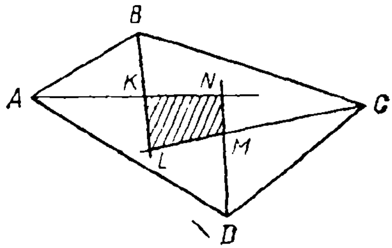


Рис. 198

$= 180°$. Следовательно (теорема 65), около четырехугольника AC_1KB_1 можно описать окружность.

10. Пусть задаче удовлетворяет четырехугольник $ABCD$, у которого $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{C} = 135°$. В задаче требуется вычислить углы AOB, BOC, COD, DOA, где O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Так как центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов, то $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = 112°30'$, $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = 67°30'$.

12. Точка O лежит на пересечении биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне, сумма этих углов равна $180°$, следовательно, из точки O боковая сторона видна под углом $90°$.

15. $105°$.

16. Пусть равнобедренная трапеция с основаниями a и b ($a > b$) описана около окружности радиуса R. Из прямоугольного треугольника ABK, в котором $|AB| = \frac{a+b}{2}$, $|BK| = h$, $|AK| = \frac{a-b}{2}$, имеем $|BK|^2 = |AB|^2 - |AK|^2$,

$$h^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}, \text{ откуда } h^2 = ab.$$

§ 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Да. **8.** $15°$ или $75°$. **9.** $15°$ или $105°$.

12. Возникает гипотеза, что полученный многоугольник правильный. Все его углы конгруэнтны и величина каждого равна $135°$. Проверим, конгруэнтны ли стороны. Для этого достаточно проверить равенство длин двух смежных сторон:

$$|BL| = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$|LM| = a - 2a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

$$|KL| = |BL|\cdot\sqrt{2} = a(\sqrt{2}-1).$$

Таким образом, полученный многоугольник правильный.

15. Указание. Вычислите сначала радиус окружности.

18. $a_7 = 2R\sin\frac{360^\circ}{14} \approx 2R\sin 25^\circ 43' \approx 2R\cdot 0{,}4340 = 0{,}868R.$

$$|BK| = \frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866R.$$

Погрешность приближенно равна $0{,}002R$, относительная погрешность составляет $\approx 0{,}23\%$.

19. $a^2(1+\sqrt{2}) \approx 2{,}41a^2$.

§ 4. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

6. $r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$, где $r = R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

8. 25π ед^2.

9. а) ≈ 105 см^2; б) ≈ 314 см^2.

12. $25(1-0{,}25\pi)$ см^2 $\approx 5{,}4$ см^2 или $25(1+0{,}75\pi)$ см^2 $\approx$ $\approx 41{,}1$ см^2.

13. $S_1 \approx 1{,}28a^2$, $S_2 = S_3 \approx 0{,}28a^2$, $S_4 \approx 0{,}43a^2$.

S_2 — разность площади полукруга радиуса a и половины площади квадрата с диагональю AB.

14. а) $\frac{\pi d^2}{16}$. б) $\frac{\pi d^2}{4n}$. 15. $\approx 2{,}14R^2$.

18. а) $\frac{7\pi}{6}a$, $\frac{a^2}{48}(19-12\sqrt{3})$; б) $2\pi a$, $0{,}5a^2(\pi-2)$; в) $0{,}5(\pi a + \pi b + 4\sqrt{a^2+b^2})$; $0{,}25(\pi a^2+\pi b^2+4ab)$; г) $2\pi a(1+\sqrt{2})$; $2a^2$.

Глава IX. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. 28. Указание. Из восьми вершин куба можно составить $\frac{8\cdot 7}{2}$ различных пар точек.

2. 20 плоскостей. Указание. Из восьми вершин куба можно составить 56 различных троек. Но из этого числа следует взять только те тройки, которые определяют различные плоскости.

3. Одна, шесть, восемь, девять, десять, одиннадцать, тринадцать, пятнадцать прямых.

4. Одну, пять, семь, десять плоскостей.

5. Указание. Прямая, проходящая через две точки, принадлежащие каждой из рассматриваемых плоскостей, будет целиком лежать в каждой из этих плоскостей (по аксиоме прямой к плоскости). Следовательно, если две различные плоскости имеют две общие точки, то они имеют и общую прямую, проходящую через эти точки.

6. а) 12 прямых. б) 4 прямые (включая прямую AB).

7. а) Ребра A_1B_1, D_1C_1, BB_1, CC_1. б) Ребро A_1B_1.

8. 12 прямых: LM, K_1N_1, MN, K_1L_1, L_1N_1, LN, LK_1, L_1M, MN_1, NK_1, NN_1, LL_1.

9. 9 пар различных параллельных плоскостей (из них 3 пары дают плоскости, в которых лежат боковые грани куба).

10. 9 плоскостей.

11. Предположим, что через точку A проходят две прямые, пересекающие прямые a и b. Тогда эти две пересекающиеся в точке A прямые определяют единственную плоскость α. Данные прямые a и b имеют, по предположению, общие точки с каждой из проведенных прямых, и эти точки различны. Из этого следует, что как прямая a, так и прямая b лежат в плоскости α. Но эти прямые по условию скрещиваются. Пришли к противоречию. Следовательно, через точку A не может проходить двух прямых, пересекающих данные прямые a и b.

12. Указание. 1) Если прямая b проходит через точку M пересечения прямой a с плоскостью α, то $a \neq b$.

2) Пусть $b \cap a = \varnothing$. Предположим, что $a \parallel b$. Тогда прямые a и b лежат в одной плоскости β, которая имеет с плоскостью α общую точку M. Но прямая b и точка M определяют единственную плоскость α. Следовательно, плоскости α и β совпадают. Однако прямая a не может лежать в плоскости α, так как по условию она имеет с этой плоскостью только одну общую точку. Пришли к противоречию. Следовательно, $a \nparallel b$.

13. 1) Проведем в плоскости α некоторую прямую a. Прямая a и точка M определяют единственную плоскость β.

2) В плоскости β через точку M проводим прямую $b \parallel a$.

3) $a \subset \alpha$; $b \parallel a$. Следовательно, $b \parallel \alpha$.

4) Из построения следует, что любая прямая, проходящая через точку M и параллельная какой-либо прямой, лежащей в плоскости α, будет параллельна и плоскости α.

14. а) 10 прямых. б) 16 прямых.

15. 1) а) проходят через основание перпендикуляра — точку T; б) не проходят через точку T.

2) Такой прямой в плоскости α не существует.

16. а) $|DA|$. б) $|DT|$. в) $|DM|$ $(M = [BD] \cap [KT])$. г) $|DA|$. д) $|DC|$. е) $|DO|$ $([DO] \perp [AC_1]$, $O \in AC_1)$. ж) $|DO_1|$ $(O_1 = [B_1D_1] \cap [A_1C_1])$.

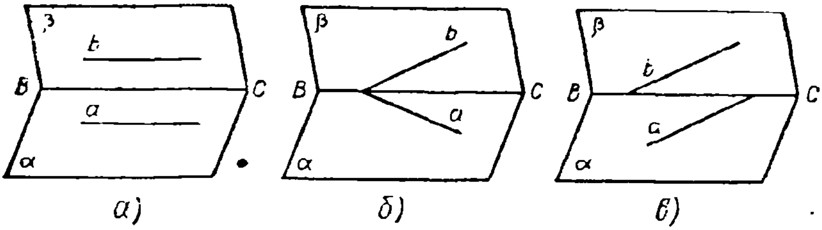


Рис. 199

17. Все три случая возможны (рис. 199).

18. Случаи а), б) возможны. Случай в) невозможен.

19. Указание. Если две плоскости α и β, перпендикулярные к одной и той же прямой l, имеют общую точку T, то из этой точки к прямой l можно провести два перпендикуляра, что невозможно.

20. Указание. Если данные прямые пересекаются в некоторой точке M, то из этой точки к плоскости будут проведены два перпендикуляра, что невозможно.

21. а) Бесконечное множество прямых, каждая из которых проходит через основание перпендикуляра, проведенного через точку M к плоскости β.

б) Бесконечное множество прямых, каждая из которых касается одной и той же окружности, центр которой — основание перпендикуляра, проведенного через точку M к плоскости β.

22. а) Бесконечное множество прямых, из которых только одна параллельна прямой a. (Эта прямая проходит через основания перпендикуляров, проведенных через точки прямой a к плоскости α.) б) Две прямые, параллельные прямой a.

23. Случаи а) и б) возможны. Случай в) невозможен.

24. Если $a \parallel \alpha$.

25. Случаи а) и б) возможны. Случай в) невозможен.

26. Указание. а) Проекция будет отрезком, если одна из сторон параллелограмма проектируется на прямую, на которой лежит противоположная сторона. б) Доказательство состоит из двух частей.

1. Четырехугольник BCC_1B_1 — прямоугольник. Следовательно, $[BC] \parallel [B_1C_1]$, $[BC] \cong [B_1C_1]$ (рис. 200).

2. Четырехугольник AB_1C_1D — параллелограмм, так как $[AD] \parallel [B_1C_1]$ и $[AD] \cong [B_1C_1]$.

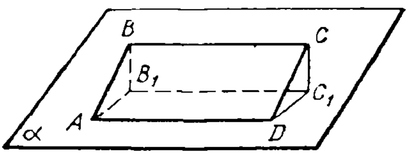


Рис. 200

27. Случаи а) и в) возможны, случай б) невозможен.

28. В случае, если плоскость, в которой лежит окружность, будет параллельна плоскости проекций.

§ 2. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

1. 1. $V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$. а) ≈ 87 см^3; б) $\approx 0{,}024$ м^3.

2. $S_б = 3ah$. 1) 120 см^2; 2) $\approx 0{,}68$ м^2.

3. $S = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 1) ≈ 143 см^2; 2) $\approx 0{,}73$ м^2.

2. $V = abh \sin \alpha$; ≈ 123 м^3.
$S = 2h(a + b) + 2ab \sin \alpha$; ≈ 191 м^2.

3. Указание. При поставленном условии больший объем будет иметь та правильная призма, площадь основания которой больше. Обозначим через P данный периметр. Тогда

$$a_3 = \frac{P}{3}; \quad a_4 = \frac{P}{4}; \quad a_6 = \frac{P}{6}.$$

Соответственно площади оснований будут равны:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{3}\right)^2 \sin 60^\circ; \quad \left(\frac{P}{4}\right)^2; \quad 6 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{P}{6}\right)^2 \sin 60^\circ.$$

Теперь сравнение площадей сводится к сравнению чисел:

$$\frac{\sqrt{3}}{36}; \ \frac{1}{16}; \ \frac{\sqrt{3}}{24}; \quad S_3 < S_4 < S_6; \text{ откуда } V_3 < V_4 < V_6.$$

4. Указание. Следует иметь в виду, что в основании призмы лежит описанный четырехугольник. Площадь основания призмы равна $\frac{1}{2}Pr$.

1) $V = \frac{1}{2}Prh$; 400 дм^3.

2) $S = P(h + r)$; 520 дм^2.

5. а) $V = \frac{3r^3\sqrt{3}}{2}$; ≈ 561 м^3, ≈ 21 м^3; $S = \frac{9r^2\sqrt{3}}{2}$; ≈ 280 м^2, ≈ 31 м^2.

б) $V = 4r^3$; ≈ 864 м^3, ≈ 32 м^3; $S = 4r^2(1 + 2\sqrt{2})$; ≈ 550 м^2, ≈ 61 м^2.

в) $V = 3r^3\sqrt{3}$; ≈ 1121 м^3, ≈ 42 м^3; $S = 3r^2(4 + \sqrt{3})$; ≈ 619 м^2, ≈ 69 м^2.

6. $V = \frac{(a + b)hl}{2}$; 140 м^3.

8. а) Да, может.

б) Указание. Длина ребра такого куба находится из уравнения $x^3 = 6x^2$.

9. На три треугольные пирамиды.

10. На три четырехугольные пирамиды.

11. Указание. Пусть SAB — боковая грань n-угольной

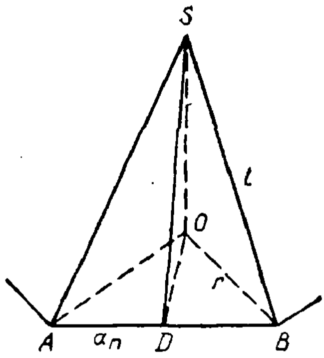


Рис. 201

пирамиды (рис. 201) с высотой SO и стороной основания AB, $|AB| = a_n$.

а) Из треугольника BOD имеем:

$$|OB| = r = \frac{a_n}{2} : \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Из треугольника SOB имеем:

$l = a_n > r$, т. е. $\dfrac{a_n}{\frac{a_n}{2}} \sin\dfrac{180^\circ}{n} > 1$,

откуда $\sin\dfrac{180^\circ}{n} > \dfrac{1}{2}$.

Неравенство выполняется при n, равном 3, 4, 5.

б) Из треугольника BOD имеем:

$$|OD| = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}.$$

Из треугольника SOD видно, что $|SD| > |OD|$.

Если $|SD| = a_n$, то $\dfrac{a_n}{\frac{a_n}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{a}} > 1$, или $\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n} > \dfrac{1}{2}$.

Неравенство выполняется при n, равном 3, 4, 5, 6.

12. $V = \dfrac{nr^2h}{6}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$; $S = nr\sin\dfrac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2 + r^2\cos^2\dfrac{180^\circ}{n}}$.

13. $V = \dfrac{\pi a^3}{4\,\mathrm{tg}^3\frac{180^\circ}{n}}$; $S = \dfrac{3\pi a^2}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}$.

14. $V = \pi ab\,(a + 2l)$. Указание. Решение задачи сводится к нахождению разности объемов двух цилиндров.

15. $\dfrac{\pi r^2 h}{2}$. Указание. Два таких копыта можно приложить друг к другу так, что получится цилиндр с тем же основанием и высотой.

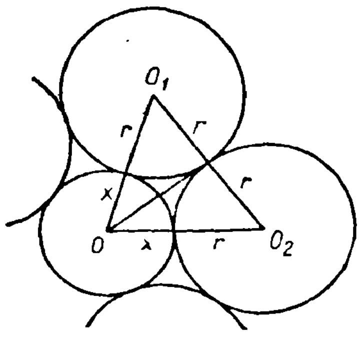


Рис. 202

16. Указание. Проекция образующей l на плоскость основания больше r.

а) $l > \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

б) Такие значения l возможны при n, равном 3, 4, 5, 6.

17. $V = \dfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$; $S = \dfrac{3}{4}\pi a^2$.

18. Указание. Объем находится как разность полученных при вращении объема цилиндра и объема конуса:

$$V = \pi a^2 h - \frac{\pi (a-b)^2}{3} h.$$

19. Указание. Решение сводится к решению аналогичной задачи для кругов. Значение радиуса x такого шара находится из уравнения $(r + x) \sin \frac{180^\circ}{n} = r$ (рис. 202).

21. $V = 2\pi^2 r^2 t$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНЫХ И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

§ 1. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ. КОМПОЗИЦИЯ ОСЕВЫХ СИММЕТРИЙ

1. Пусть данные прямые a и b пересекаются в точке O. Постройте две концентрические окружности с центром O. На сторонах одного из углов, определяемых данными прямыми, получаем четыре точки пересечения с окружностями: A_1 и A_2, B_1 и B_2. Отрезки A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в некоторой точке M. Прямая OM — ось симметрии. Посредством тех же окружностей строится вторая ось.

2. Постройте прямую a', симметричную a относительно p, $a' \cap b = B$.

3. Постройте $A' = S_p(A)$; $(A'B) = b$.

4. Постройте вспомогательный треугольник по двум известным сторонам и углу между ними, затем используйте симметрию относительно серединного перпендикуляра к третьей стороне. Угол берется либо данный, либо ему смежный.

5. См. указание к задаче 4.

6. 1) Постройте любой диаметр одной окружности и перпендикулярный ему диаметр другой окружности.

2) Диаметр AB меньшей окружности продолжите до пересечения в точке C с большей окружностью. Постройте оси симметрии отрезков AC и BC.

7. Ось симметрии пятиугольника проходит через вершину и середину противоположной стороны.

Если ось симметрии пятиугольника $ABCDE$ содержит вершину A, то $|AB| = |AE|$, $|BC| = |DE|$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{D}$. Возьмите еще одну ось и запишите соответствующие равенства. Докажите, что пятиугольник правильный.

8. Нет. 1) Равноугольный (рис. 203); 2) равносторонний.

9. Пусть заданы симметрии с осями a_1, a_2, a_3 ($a_1 \cap a_2 \cap a_3 = O$). Для любой точки A : $S_{a_1}(A) = A_1$, $S_{a_2}(A_1) = A_2$, $S_{a_3}(A_2) = A_3$, причем $|OA| = |OA_1| = |OA_2| = |OA_3|$, так как $S_{a_3} \circ S_{a_2} \circ S_{a_1}(O) = O$.

Композиция трех осевых симметрий есть перемещение второго

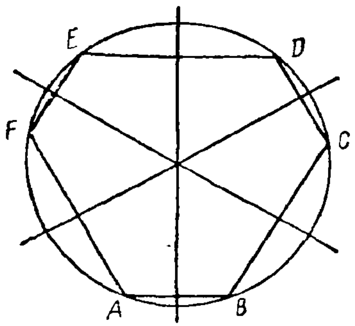


Рис. 203

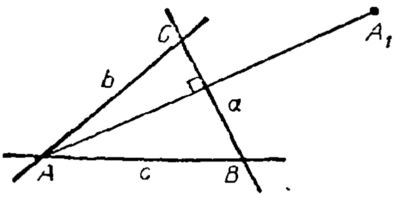


Рис. 204

рода[1], в котором $O \to O, A \to A_3$. По аксиоме о перемещениях двумя парами соответственных точек однозначно определяется перемещение второго рода. Так как точка O неподвижная, это осевая симметрия относительно серединного перпендикуляра отрезка AA_3, проходящего через точку O.

10. Пусть a, b, c — оси заданных симметрий (рис. 204). Строим точку $A_1 = S_a(A)$. Композиция симметрий $\delta = S_c \circ S_b \circ S_a$ точку A_1 отображает на точку A. Если δ есть осевая симметрия, то ее ось совпадает с прямой a, значит, точки прямой a — неподвижные точки δ, в частности $\delta(B) = B$. Но $S_c \circ S_b \circ S_a(B) = S_c \circ S_b(B) \neq B$, так как поворот $S_c \circ S_b$ отображает на себя лишь точку A, которая не совпадает с B. Итак, δ не есть осевая симметрия.

11. Рассмотрите $S_{l_C} \circ S_{l_B} \circ S_{l_A}(A) = S_{l_C} \circ S_{l_B}(A) = S_{l_C}(A') = A''$, причем $A' \in (BC)$, $A'' \in (AC)$. Далее см. задачу 9.

12. $S_p \circ S_n \circ S_m(B) = S_p \circ S_n(C) = S_p(A) = B$, см. задачу 9.

13. Обозначим прямые, содержащие средние линии треугольника ABC, параллельные (BC), (CA), (AB), соответственно p_1, q_1, r_1, тогда $S_r \circ S_q \circ S_p(q_1) = S_r \circ S_q(r_1) = S_r(p_1) = q_1$.

14. Докажите, что $\widehat{C_1A_1A} = \widehat{AA_1B_1}$, $\widehat{A_1B_1B} = \widehat{BB_1C_1}$, $\widehat{B_1C_1C} = \widehat{CC_1A_1}$.

15. Композиция осевых симметрий $S_r \circ S_q \circ S_p$ есть симметрия с осью t и $S_r \circ S_q \circ S_p(A) = A \Rightarrow S_t(A) = A$, т. е. $A \in t$. Постройте прямую t, учитывая, что $(\widehat{p, q}) = (\widehat{t, r})$. Вершиной A может служить любая точка прямой t.

16. Через центр окружности проведите три прямые, перпендикулярные данным. Воспользуйтесь результатом задачи 15.

17. Проведем прямую p через точку H пересечения высот треугольника ABC (рис. 205). Пусть $p \cap (AB) = C_0$, $p \cap (BC) = A_0$, $p \cap (CA) = B_0$. Докажите, что точки C_1, B_1, A_1, симметричные точке H относительно сторон треугольника ABC, принадлежат окружности, описанной около треугольника. Следовательно, симметрия S_a отображает p на (A_1A_0), симметрия S_b отобража-

---

[1] Перемещение, не меняющее ориентацию, называется перемещением первого рода; если оно меняет ориентацию — второго рода.

ет p на (B_1B_0) и симметрия S_c — на (C_1C_0). Пусть

$$(C_0C_1) \cap (B_0B_1) = N.$$

Замечаем, что $\widehat{NC_1B} = \widehat{BHA_0} = \widehat{B_0HB_1} = \widehat{B_0B_1H} \Longrightarrow \widehat{NC_1B} = \widehat{B_0B_1B}$. Возможно также, что углы $\widehat{NC_1B}$ и $\widehat{B_0B_1B}$ имеют сумму, равную $180°$. Значит, около четырехугольника BB_1C_1N можно описать окружность, т. е. прямые C_1C_0 и B_1B_0 пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

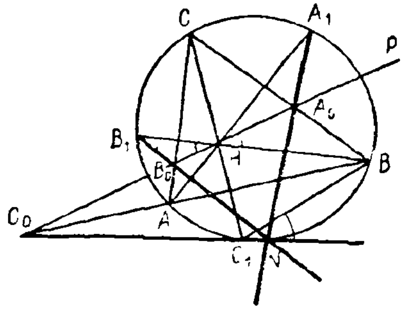


Рис. 205

Аналогично можно доказать, что прямые A_1A_0 и B_1B_0 пересекаются на окружности, значит, прямые A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 пересекаются в одной точке.

18. Постройте точки K и L, симметричные соответственно M и N относительно (AB) (рис. 206). Точки K, P, M_1, а также и L, P, N_1 принадлежат двум прямым. Около четырехугольника PON_1M_1 можно описать окружность, следовательно, $\widehat{QPN_1} = \widehat{N_1M_1Q}$ либо их сумма равна $180°$. Далее рассмотрите четырехугольник $PQNM$, обладающий тем же свойством: $\widehat{NPQ} = \widehat{NMQ}$. Из конгруэнтности углов NMQ и N_1M_1Q следует, что $\widehat{NPQ} = \widehat{N_1PQ}$ и $[PQ] \perp [AB]$.

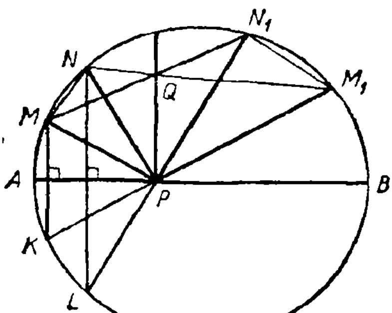


Рис. 206

19. Пусть $(DH) \cap (CO) = H'$ (рис. 207), а C' — диаметрально противоположна C. Лучи CH и CO симметричны относительно (CM), значит, $|CD| : |CM| = |CH'| : |CC'| = |CH| : |CC'| = 2R|\cos \widehat{C}| : 2R = |\cos \widehat{C}|$.

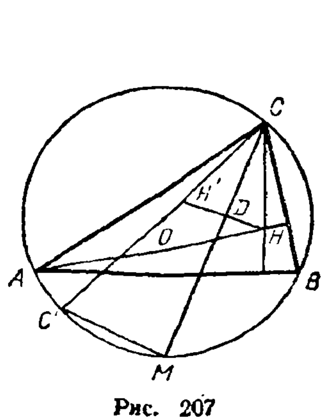


Рис. 207

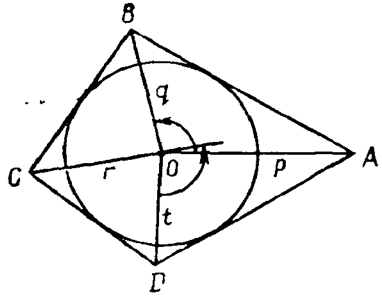


Рис. 208

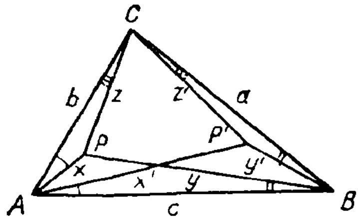


Рис. 209

20. Четырехугольник — равнобочная трапеция. Осью симметрии является прямая, проходящая через середины оснований AB и CD.

21. Если $(OM) = p$, $(ON) = q$, $(OP) = r$, $(OQ) = t$, то $\sigma = S_t \circ S_r \circ S_q \circ S_p$ есть тождественное перемещение, так как $\sigma(O) = O$, $\sigma(A) = A$. Следовательно, $S_q \circ S = S_p \circ S_p$ или $\widehat{(p, q)} = \widehat{(t, r)}$.

22. Рассмотрите композицию $\delta = S_t \circ S_r \circ S_q \circ S_p$, где p, q, r, t — прямые, содержащие биссектрисы углов четырехугольника. Так как $\delta(AD) = (AD)$, $\delta(O) = O$, то δ — тождественное преобразование и $S_q \circ S_p = S_r \circ S_t$; значит, $\widehat{(p, q)} = \widehat{(t, r)}$. Следовательно, $\widehat{COD} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ (рис. 208).

23. Прямые x, y, z принадлежат одному пучку, значит, $S_y \circ S_z \circ S_x = S_t$ (рис. 209). Учитывая равенство пар углов, запишем:

$$S_b \circ S_x = S_{x_1} \circ S_c,\ S_c \circ S_y = S_{y_1} \circ S_a,\ S_a \circ S_{z_1} = S_z \circ S_b \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow S_x = S_b \circ S_{x_1} \circ S_c,\ S_y = S_c \circ S_{y_1} \circ S_a,\ S_z = S_a \circ S_{z_1} \circ S_b.$$
$$S_y \circ S_z \circ S_x = S_c \circ S_{y_1} \circ S_a \circ S_a \circ S_{z_1} \circ S_b \circ S_b \circ S_{x_1} \circ S_a =$$
$$= S_t \circ S_c \circ S_{y_1} \circ S_{z_1} \circ S_{x_1} \circ S_c = S_t \Longrightarrow S_{y_1} \circ S_{z_1} \circ S_{x_1} = S_c \circ S_t \circ S_c = S_p.$$

24. Убедимся, что если перемещение не имеет неподвижных точек, то его квадрат также не имеет неподвижных точек.

Пусть перемещение f не имеет неподвижных точек. Однако $f \circ f(M) = M$. Но в таком случае имеем: $f^{-1}(M) = f(M) = N$. Итак, $f(M) = N$; $f(N) = M$, значит, середина отрезка MN — неподвижная точка, чего быть не должно.

Обозначим прямые BC, CA и AB соответственно a, b и c. Рассмотрим композицию $\delta = S_c \circ S_b \circ S_a \circ S_c \circ S_b \circ S_a$. Композиция $S_c \circ S_b \circ S_a$ трех осевых симметрий, оси которых задают треугольник, не имеет неподвижных точек. Перемещение δ первого рода не имеет неподвижных точек, следовательно, δ — перенос.

25. Используйте результат задачи 9.

26. Параллельно любой из диагоналей прямоугольника.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ. ПОВОРОТ

1. Рассмотрите образ прямой a (или b) в переносе на данное расстояние в направлении, параллельном прямой d.

2. Пусть $T_{\overrightarrow{CD}}(B) = B'$, E — середина отрезка AB'. Через точки A, B, C, D проведите прямые, параллельные (BE).

1. Пусть $(BC) \parallel (AD)$. Рассмотрите образ диагонали AC при переносе $\overrightarrow{AD}$.

4. Пусть $(BC) \parallel (AD)$. Рассмотрите образы отрезков AB и CD в переносах $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{CM}$. Докажите, что биссектриса угла полученного треугольника является одновременно медианой (рис. 210).

5. Рассмотрите перенос $\overrightarrow{AC}$. Построив для точки K соответствующую L, получаем $[AK] \parallel [CL]$. Угол $\widehat{KCL} = 90°$, следовательно, $\widehat{AKC} = 90°$.

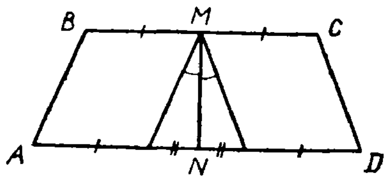


Рис. 210

6. Переносом боковой стороны в направлении и на расстояние, определяемые основанием трапеции, получите треугольник. Вычислите высоту треугольника.

7. Заметьте, что суммы или разности расстояний противоположных вершин параллелограмма $OABC$ до любой прямой равны, так как они равны удвоенному расстоянию точки пересечения диагоналей до прямой.

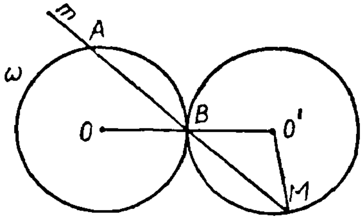


Рис. 211

8. Постройте вспомогательную окружность, которая конгруэнтна данной, касается ее и проходит через точку M (рис. 211). Заметьте, что $|OO'| = 2R$, $|MO'| = R$. B — точка касания.

9. Рассмотрите композицию центральных симметрий: $Z_R \circ Z_Q \circ Z_P \circ Z_M \circ Z_M = \delta$, $\delta(A) = A$, $\delta = Z_A$ (рис. 212). Пусть $Z_P \circ Z_N \circ Z_M = Z_S$, то $Z_R \circ Z_Q \circ Z_S = Z_A$. Постройте параллелограммы $MNPS$ и $SQRA$.

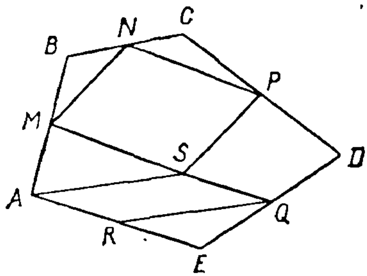


Рис. 212

10. Убедитесь, что отрезок, соединяющий центры двух окруж-

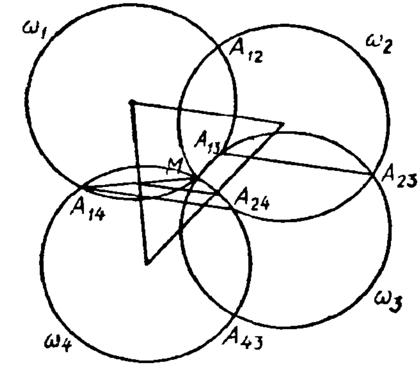


Рис. 213

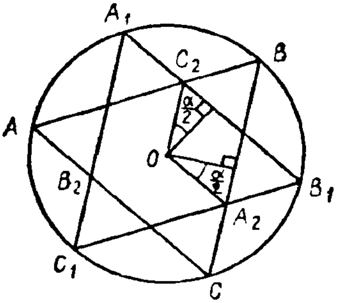


Рис. 214

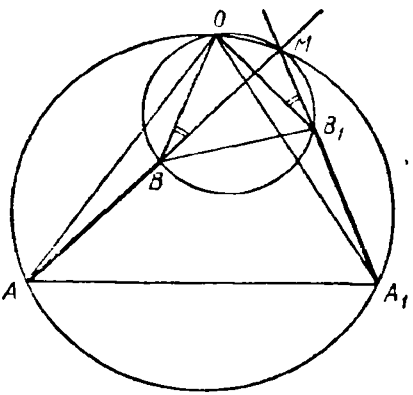


Рис. 215

ностей, равен и параллелен отрезку, соединяющему точки пересечения третьей окружности с двумя первыми (рис. 213).

11. Постройте точку M', соответствующую M при повороте вокруг O на угол 90°. Сторона квадрата принадлежит прямой $M'N$. Расстояние от точки O до $(M'N)$ равно половине длины стороны квадрата.

12. Постройте образ одной из окружностей при повороте на угол 60°, центр которого — точка O. Точка пересечения второй из данных окружностей и построенной является второй вершиной треугольника.

13. Постройте хорду окружности данной длины и окружность, концентрическую данной, проходящую через данную точку . Рассмотрите поворот вокруг центра окружностей, при котором данной точке соответствует точка пересечения построенных хорды и окружности.

14. Поворот вокруг центра треугольника на угол 120° отображает M на N, N на P, P на M; $|MN| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

15. Поворот вокруг центра квадрата на угол 90° отображает P на Q, Q на R, R на S, S на P; $|PQ| = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

16. Рассмотрите поворот с центром O на угол 120° (рис. 214): $R_O^{120°}((AB)) = (BC)$, $R_O^{120°}((A_1B_1)) = (B_1C_1) \Rightarrow C_2 \to A_2$.

Аналогично $R_O^{120°}(A_2) = B_2$, значит, $A_2B_2C_2$ — равносторонний треугольник.

$$|A_2B_2| = \frac{m}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

17. Заметьте, что угол между лучами AB и A_1B_1 (рис. 215) равен углу поворота φ. Также $\widehat{AOA_1} = \varphi$, где O — центр поворота. Отсюда центр поворота принадлежит окружности MAA_1. Аналогично $\widehat{BOB_1} = \varphi$ и точка O принадлежит окружности MBB_1.

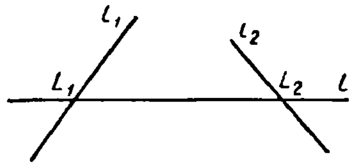


Рис. 216

18. Возьмем любую прямую l (рис. 216). Пусть в заданном повороте $l_2 \to l$ и $l \to l_1$ ($l \cap l_1 = L_1$, $l \cap l_2 = L_2$). Так как $L_2 \in l_2$, то соответствующая ей точка L'_2 принадлежит l; аналогично $L_2 \in l \Rightarrow L'_2 \in l_1$, т. е. $L'_2 = L_1$.

Если бы прямой l принадлежала еще одна пара соответствующих в этом повороте точек, то прямая l отображалась бы на себя.

В случае центральной симметрии ответ иной. Если прямая проходит через центр симметрии, то каждая точка этой прямой отображается на точку этой прямой. На прямой, не проходящей через центр, нет ни одной пары.

19. Каждой прямой принадлежит пара соответствующих точек (задача 18): $X \to X'$.

а) Пусть $P \to P' = S \Rightarrow [PX] \to [P'X']$ и $\widehat{PXP'} = \varphi$, т. е. отрезок PP' виден из точки X под постоянным углом φ (рис. 217, *а*). Следовательно, множество M есть окружность, которая проходит через центр поворота O, точку S и точку P, которая отображается на точку S.

б) Прямая $m : O \in m$, $(\widehat{m, l}) = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$ (рис. 217, *б*).

20. При каждом из поворотов центр O треугольника ABC отображается на центр O_1 треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, центр

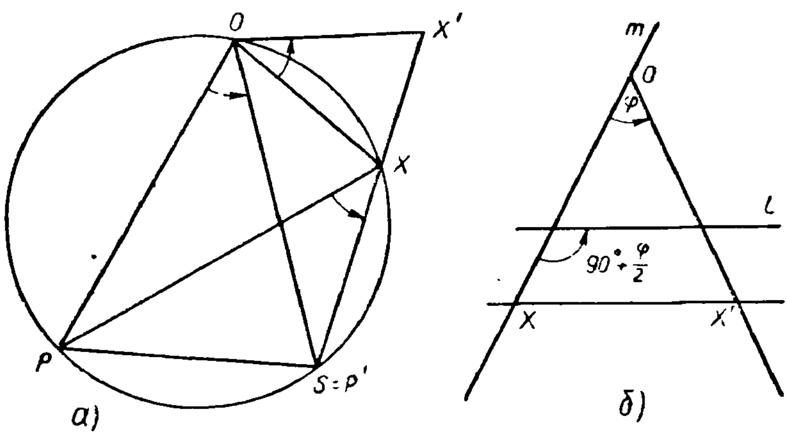


Рис. 217

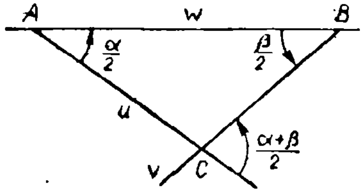


Рис. 218

каждого поворота принадлежит серединному перпендикуляру отрезка OO_1. Если $O = O_1$ — центры поворота совпадают с O.

21. Рассматриваем поворот как композицию двух осевых симметрий, оси которых проходят через центр поворота и образуют угол, равный половине угла поворота (рис. 218).

Запишем $R_A^\alpha = w \circ u$, $R_B^\beta = v \circ w$, тогда $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = uwwu = vu$.

Убедитесь в том, что при $\alpha + \beta < 360°$ углы треугольника ABC таковы: $\widehat{CAB} = \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBA} = \frac{\beta}{2}$ и треугольник ориентирован отрицательно, если $\alpha + \beta > 360°$, то $\widehat{CAB} = 189° - \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{CBA} = 180° - \frac{\beta}{2}$ и треугольник ABC ориентирован положительно.

22. Рассмотрите случай, когда данные квадраты расположены во внешней по отношению к треугольнику области. Заметьте, что композиция $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°}$ отображает A на C, поэтому $R_{O_2}^{270°} \circ R_{O_1}^{270°} = R_K^{180°}$. Отсюда треугольник O_1O_2K — прямоугольный равнобедренный $(\widehat{K} = 90°)$.

Аналогично, $R_{O_2}^{90°} \circ R_{O_1}^{90°} = R_L^{180°}$, поэтому треугольник O_1O_2L также прямоугольный равнобедренный $(\widehat{L} = 90°)$. Следовательно, O_1LO_2K — квадрат (рис. 219, *а*).

Для случая, когда квадраты построены по другую сторону от (AB) и (BC), задача решается аналогично (рис. 219, *б*).

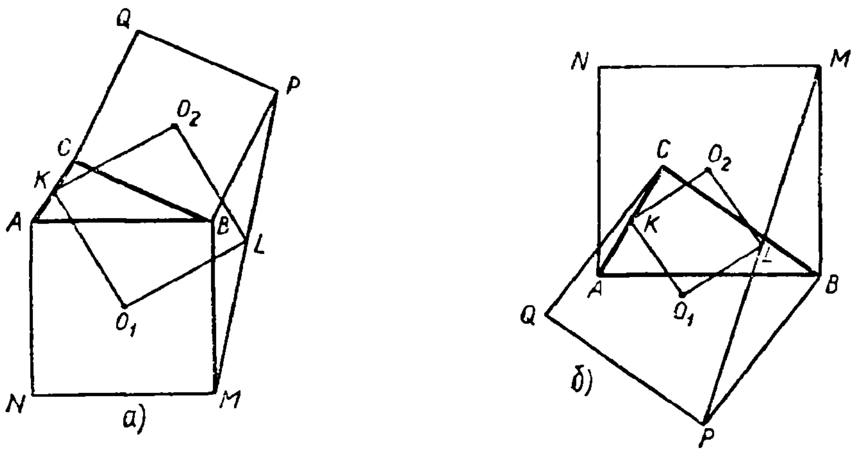


Рис. 219

23. Очевидно, что $R_O^{120°}(A)=C$, $R_{A_1}^{60°}(C)=B$. Но $R_M^{180°}(A)=B$. Значит, $R_{A_1}^{60°}\circ R_O^{120°}=R_M^{180°}$, отсюда $\widehat{MOA_1}=60°$, $\widehat{MA_1O}=30°$ (см. задачу 21 и рис. 220).

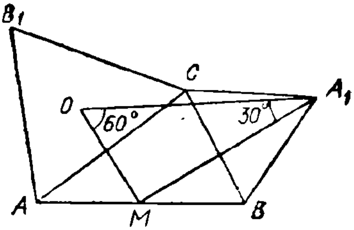


Рис. 220

24. Докажите, что центры поворотов и середины диагоналей четырехугольника $ABCD$ являются вершинами квадрата (рис. 221).

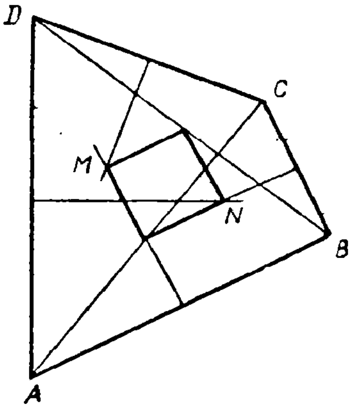


Рис. 221

§ 3. ВЕКТОРЫ

1. По условию $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$, где O — произвольная точка. Это равенство можно записать так:

$$\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA_1})+$$
$+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB_1})$, откуда $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{B_1A}$.

2. Пусть точки K, L, P, Q, R, S, T — соответственно середины отрезков AM, MB, BC, CN, ND, DA, MN. Докажем сначала, что точка G_1 является общей серединой средних линий четырехугольника $AMND$. Выберем произвольную точку O.

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}),\quad \overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ON}),$$

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}),\quad \overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}).$$

Если G_1' и G_1'' — середины отрезков KR и ST, то $\overrightarrow{OG_1'}=\overrightarrow{OG_1''}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ON})$; это доказывает, что $G_1'=G_1''=G_1$.

Следовательно, $\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD})$.

Аналогично $\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON})$.

$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$, т. е. вектор $\overrightarrow{G_1G_2}$ не зависит от выбора точек M и N. Очевидно, $\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

3. Примем точку M за начало всех векторов:

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MM_3}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD},$$
$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{MM_4}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}.$$

Очевидно, $\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_3}=\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_4}$.

4. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно точки пересечения медиан треугольников BCD, CDA, DAB, ABC:

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}),$$
$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{OD_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \qquad (1)$$

Если M и M_1 соответственно точки пересечения средних линий четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1})$$

(см. решение задачи 2). Учитывая равенство (1), получим $\overrightarrow{OM_1}=$ $=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, что доказывает, что $M_1=M$.

5. Примем за полюс[1] точку G пересечения медиан треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{GA_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA_1},\ \overrightarrow{GA_2}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA_2},$$
$$\overrightarrow{GB_1}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB_1},\ \overrightarrow{GB_2}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB_2},$$
$$\overrightarrow{GC_1}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC_1},\ \overrightarrow{GC_2}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC_2}.$$

Если G_1 и G_2 соответственно точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, то

$$\overrightarrow{GG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}),\ \overrightarrow{GG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GB_2}+\overrightarrow{GC_2}).$$

Учитывая, что $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{BA_1}=-\overrightarrow{CA_2}$, $\overrightarrow{CB_1}=-\overrightarrow{AB_2}$, $\overrightarrow{AC_1}=-\overrightarrow{BC_2}$, получим $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}=\vec{0}$, откуда следует, что точки G_1 и G_2 симметричны относительно G.

6. Пусть точка C — полюс (рис. 222). В силу коллинеарности вектора $\vec{s}$ и вектор $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ имеем: $\vec{s}=\alpha\overrightarrow{CC_1}$, $\vec{s}=\beta(\overrightarrow{CB_1}-$ $-\overrightarrow{CB})$, $\vec{s}=\gamma(\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA})$. Кроме того, $\overrightarrow{CA_1}=l\,\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CB_1}=n\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CC_1}=$ $=m\,\overrightarrow{CA}+(1-m)\,\overrightarrow{CB}$. Учитывая все эти равенства, можно записать:

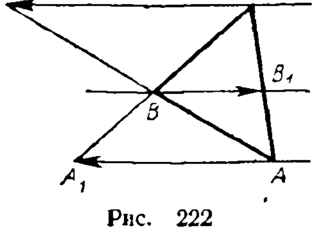


Рис. 222

$$\alpha(m\,\overrightarrow{CA}+(1-m)\overrightarrow{CB})=\beta(n\,\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}),$$
$$\beta(n\,\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\gamma(l\,\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}),$$

[1] Точку, от которой откладываются рассматриваемые в задаче векторы, называют иногда полюсом.

откуда $\alpha m = \beta n$, $\alpha(1-m) = -\beta$, $\beta n = -\gamma$, $\gamma l = -\beta$. Выразим γ через α и β: $m - 1 = \frac{\beta}{\alpha}$, $m = \frac{\beta}{\alpha} + 1$; $n = \frac{\alpha m}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\beta}$; $\gamma = -\beta n = -\beta - \alpha$. Следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

7. Примем точку G пересечения медиан треугольника ABC за полюс. Тогда $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{GB} + k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GB_1} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB_1} =$

$$= \overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}, \text{ так как } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Следовательно, G — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

8. Пусть O — полюс, K, E, F — середины отрезков AD, BC, MN.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$

$$= k\overrightarrow{OB} + (1-k)\overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OC} + (1-k)\overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),\ \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (1-k)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})\right),$$

$$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OK} =$$

$$= \frac{1}{2}k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}).$$

Так как $\overrightarrow{KE} \parallel \overrightarrow{EF}$, то точки K, E, F принадлежат одной прямой.

9. $\overrightarrow{OA_1} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC}}{1+\beta}$, $\overrightarrow{OB_1} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + \gamma\overrightarrow{OA}}{1+\gamma}$, $\overrightarrow{OC_1} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}}{1+\alpha}$. Примем C_1 за полюс ($C_1 = O$), тогда $\overrightarrow{C_1A} = -\alpha\overrightarrow{C_1B}$. Так как $C_1 \in (A_1B_1)$, то $\overrightarrow{C_1A_1} = \mu\overrightarrow{C_1B_1}$. Подставим в это равенство значения $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$:

$$\frac{\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC}}{1+\beta} = \mu\frac{\overrightarrow{OC} + \gamma\overrightarrow{OA}}{1+\gamma},\ \frac{\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC}}{1+\beta} = \mu\frac{\overrightarrow{OC} + \gamma(-\alpha\overrightarrow{OB})}{1+\gamma},\ \overrightarrow{OB} \nparallel \overrightarrow{OC}.$$

В силу единственности разложения имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+\beta} = \dfrac{-\alpha\gamma\mu}{1+\gamma}, \\ \dfrac{\beta}{1+\beta} = \dfrac{\mu}{1+\gamma}, \end{cases} \quad \text{откуда } \mu = \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta},\ \alpha\beta\gamma = -1.$$

Обратно, $\vec{A_1} = \dfrac{\vec{B} + \beta\vec{C}}{1+\beta}$, $\vec{B_1} = \dfrac{\vec{C} + \gamma\vec{A}}{1+\gamma}$, $\vec{C} = \dfrac{\vec{A} + \alpha\vec{B}}{1+\alpha}$.

$$\alpha\beta\gamma = -1,\ \gamma = -\frac{1}{\alpha\beta},\ C_1 \text{ — полюс.}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{C} - \alpha\gamma\vec{B}}{1+\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha\beta - 1}(\vec{B} + \beta\vec{C}) = \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha\beta - 1}\vec{A}_1.$$

Следовательно, $\overrightarrow{C_1B_1} \parallel \overrightarrow{C_1A_1}$, т. е. $C_1 \in (A_1B_1)$.

10. Обозначим $\dfrac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{ND}} = m$. Тогда $\overrightarrow{AN} = \dfrac{\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{AD}}{1+m}$, или $\overrightarrow{AN} = \dfrac{k\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AD}}{1+m}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AN} = l(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. В силу единственности разложения $\overrightarrow{AN}$ по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеем: $\dfrac{k}{1+m} = l$, $\dfrac{m}{1+m} = l$, откуда $l = \dfrac{k}{1+k}$.

11. Пусть $\dfrac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}} = m$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \dfrac{\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{AN}}{1+m}$.

С другой стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, т. е. $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + l\overrightarrow{AN}$. Следовательно, $\dfrac{1}{1+m} = k$, $\dfrac{m}{1+m} = l$, в силу чего $k + l = 1$.

12. Пусть C_1 — полюс. Тогда $\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{C_1C_0} = \alpha\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{A_0C_0} = k\overrightarrow{C_1C}$, так как $g \parallel (CC_1)$. С другой стороны, $\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{C_1C_0} - \overrightarrow{C_1A_0} = \alpha\overrightarrow{C_1B} - (m\overrightarrow{C_1B} + (1-m)\overrightarrow{C_1C})$, учитывая, что точки A_0, B, C принадлежат одной прямой. Так как $k\overrightarrow{C_1C} = (\alpha - m)\overrightarrow{C_1B} - (1-m)\overrightarrow{C_1C}$, то $k = m - 1$, $\alpha - m = 0$, т. е. $m = \alpha$, $k = \alpha - 1$. Итак, $\overrightarrow{A_0C_0} = (\alpha - 1)\overrightarrow{C_1C}$.

Аналогично выразим вектор $\overrightarrow{B_0C_0}$ через $\overrightarrow{C_1C}$.

$$\overrightarrow{B_0C_0} = l\overrightarrow{C_1C};\ \overrightarrow{B_0C_0} = \overrightarrow{C_1C_0} - \overrightarrow{C_1B_0} =$$
$$= \alpha\overrightarrow{C_1B} - (n\overrightarrow{C_1A} + (1-n)\overrightarrow{C_1C}) = (\alpha + n)\overrightarrow{C_1B} - (1-n)\overrightarrow{C_1C},$$

откуда $n - 1 = l$, $\alpha + n = 0$, т. е. $n = -\alpha$, $l = -\alpha - 1$. $\overrightarrow{B_0C_0} = -(\alpha + 1)\overrightarrow{C_1C_0}$.

Таким образом, $\overrightarrow{A_0C_0} + \overrightarrow{B_0C_0} = (\alpha - 1)\overrightarrow{C_1C} - (\alpha + 1)\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1C}$, т. е. сумма векторов $\overrightarrow{A_0C_0} + \overrightarrow{B_0C_0}$ не зависит от α, т. е. от выбора прямой g, параллельной (CC_1).

13. Пусть R — середина $[ML]$ и дано, что $d \parallel (OR)$ (рис. 223). Докажем, например, что в этом случае $c \parallel (OE)$, где E — середина $[NP]$. Имеем: $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{OR}$, т. е. $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL})$. Подставим в последнее равенство значения $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{ON}$:

$$m\overrightarrow{OL} - n\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{OL},\ \text{т. е. } (m-k)\overrightarrow{OL} = (k+n)\overrightarrow{OM}.$$

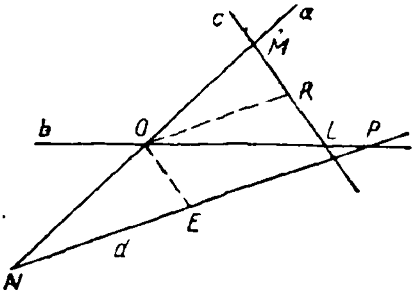


Рис. 223

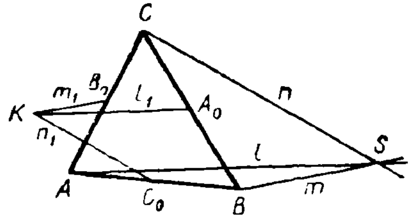


Рис. 224

Так как векторы $\overrightarrow{OL}$ и $\overrightarrow{OM}$ неколлинеарны, то $m-k=0$, $k+n=$ $=0$, т. е. $m=k$, $n=-k$. Тогда $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{ON}=-k\overrightarrow{OM}$. Рассмотрим вектор $(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP})$, коллинеарный $\overrightarrow{OE}$.

$$\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=-k\overrightarrow{OM}+k\overrightarrow{OL}=k(\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM})=k\overrightarrow{ML}.$$

Следовательно, $(\overrightarrow{OE})\parallel(ML)$. Аналогично можно доказать указанное свойство и для других прямых.

14. Пусть $m_1\cap l_1=K$ (рис. 224). Докажем, что $(KC_0)\parallel n$.

$$\overrightarrow{KC_0}=\overrightarrow{SC_0}-\overrightarrow{SK};\ \overrightarrow{SC_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB};$$

$$\overrightarrow{SK}=\overrightarrow{SA_0}+\overrightarrow{A_0B_0}+\overrightarrow{B_0K}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+$$
$$+m\overrightarrow{SB}=m\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{SK}=\overrightarrow{SB_0}+\overrightarrow{B_0A_0}+\overrightarrow{A_0K}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+$$
$$+n\overrightarrow{SA}=n\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}.$$

Тогда

$$m\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=n\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC},\text{ или}$$

$$m\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}=n\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB},\text{ откуда}$$

$m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$. Поэтому $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$.

Тогда $\overrightarrow{KC_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$, вследствие чего $(KC_0)\parallel(SC)$, т. е. прямая n_1 проходит через точку пересечения прямых l_1 и m_1.

15. См. решение задачи 14.

16. Пусть $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{BQ} = \beta\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{C_1M} = \gamma\overrightarrow{MC}$. Требуется доказать, что $\alpha + \beta = 2\gamma$. Примем точку C за полюс. Тогда $\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA} = -\alpha\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CB} = -\beta\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CC_1} = -\gamma\overrightarrow{CM}$, причем $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Вследствие этого $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{1+\beta}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2(1+\gamma)}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Учитывая что точки M, P и Q принадлежат одной прямой, запишем: $\overrightarrow{CM} = m\overrightarrow{CP} + (1-m)\overrightarrow{CQ}$ или $\frac{1}{2(1+\gamma)}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{m}{1+\alpha}\overrightarrow{CA} + \frac{1-m}{1+\beta}\overrightarrow{CB}$, откуда $\frac{1}{2(1+\gamma)} = \frac{m}{1+\alpha}$, $\frac{1}{2(1+\gamma)} = \frac{1-m}{1+\beta}$. Исключив из полученных уравнений m, установим, что $\alpha + \beta = 2\gamma$.

17. Обозначим через E и F соответственно середины диагоналей AC и BD. Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

18. Вектор $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$ при повороте на $\frac{360°}{n}$ $(n \geqslant 3)$ переходит сам в себя, так как при этом повороте вектор $\overrightarrow{OA_1}$ переходит в $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_2}$ в $\overrightarrow{OA_3}$, ... , $\overrightarrow{OA_n}$ в $\overrightarrow{OA_1}$. Таким свойством может обладать только нуль-вектор.

19. Учесть, что $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$, а $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.

20. Учесть, что $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_iO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B_i}$ и $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iO_1} = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{O_2B_i} = \vec{0}$.

21. $\overrightarrow{OA_3} = -\overrightarrow{OA_1} + 2\sin 72°\overrightarrow{OA_2}$.

22. Докажем сначала, что в любом четырехугольнике $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA})$, где M и N соответственно середины $[CB]$ и $[DA]$. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$. Сложив эти равенства и учтя, что $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$, получим $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA})$. Если бы векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BA}$ не были коллинеарны, то $|MN| < \frac{1}{2}(|CD| + |BA|)$, что нетрудно доказать, используя свойство сторон треугольника. Следовательно, $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{BA}$,

т. е. данный четырехугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

23. Примем точку O за полюс. Тогда $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}$. Можно заметить, что $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. Это доказывает, что из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 можно построить треугольник. Поэтому каждый из этих отрезков не больше суммы двух других.

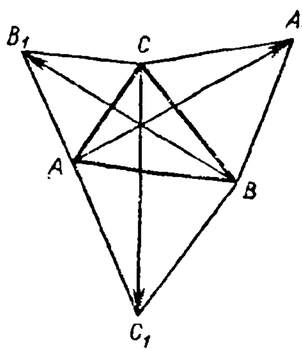


Рис. 225

24. $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{BC}$ (рис. 225). $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1})-(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Векторы $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ могут быть получены соответственно поворотом на 60° векторов $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA}$. При этом повороте сумма векторов $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$ перейдет в сумму векторов $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}$.

Но $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$, поэтому и $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}=\vec{0}$.

25. $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1})-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})$.

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Векторы $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ могут быть получены соответственно из векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ поворотом на 45° и умножением на $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому сумма векторов $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}$ может быть получена поворотом на 45° вектора $\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$. По $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, поэтому и $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}=\vec{0}$.

Таким образом, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

26. $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ (см. задачу 24). Поэтому $\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Если O — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, следовательно, и $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\vec{0}$. Отсюда следует, что O — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

27. $\overrightarrow{CA_2}=\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AC}$. При повороте на 90° $\overrightarrow{A_2A}\to\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}\to$

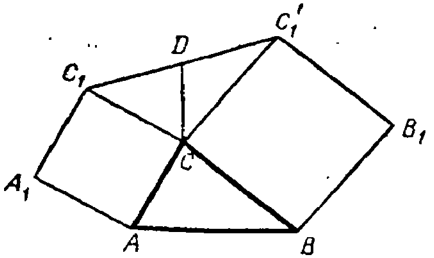


Рис. 226

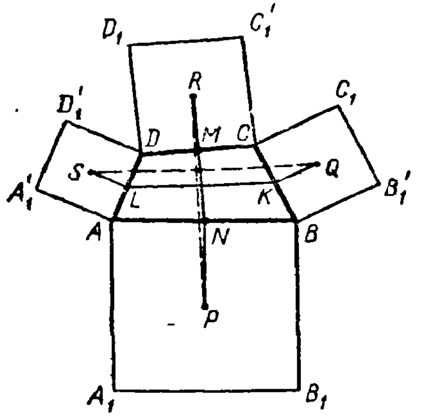


Рис. 227

$\to \overrightarrow{BB_2}$, т. е. $\overrightarrow{CA_2} \to \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_2} = \overrightarrow{CB_2}$, откуда следует, что $\overrightarrow{CA_2} \perp \overrightarrow{CB_2}$ и $|\overrightarrow{CA_2}| = |\overrightarrow{CB_2}|$.

28. Пусть D — середина $[C_1C_1']$ (рис. 226). $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1'})$. При повороте на $90°$ векторы $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{CC_1'}$ перейдут соответственно в векторы $\overrightarrow{CA}$ и $-\overrightarrow{CB}$. Следовательно, при этом повороте сумма векторов $(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CC_1'})$ перейдет в вектор $(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$, т. е. в вектор $\overrightarrow{BA}$. Поэтому $(\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC_1'}) \perp \overrightarrow{BA}$, $|\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC_1'}| = |\overrightarrow{BA}|$, откуда следует утверждение задачи.

29. Докажем, что вектор $\overrightarrow{PR}$ получается из вектора $\overrightarrow{SQ}$ поворотом на $90°$ (рис. 227).

$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KQ}$, или $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SL} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{KQ}$.

Повернем каждый вектор правой части последнего равенства на $90°$. Тогда $\overrightarrow{SL} \to \overrightarrow{LD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \to \overrightarrow{MR}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{KQ} \to \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Тогда

$$\overrightarrow{SQ} \to \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{PN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{PN} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{MR} =$$

$= \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PR}$. Значит, $\overrightarrow{PR}$ получается из $\overrightarrow{SQ}$ поворотом на $90°$. Следовательно, $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{SQ}$, $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{SQ}|$.

30. Основание C_1 биссектрисы угла C треугольника ABC делит сторону AB в отношении $\lambda_1 = \frac{b}{a}$; $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_1\overrightarrow{C_1B}$, а центр O вписанной окружности делит биссектрису CC_1 в отношении $\lambda_2 = \frac{a+b}{c}$, $\overrightarrow{CD} = \lambda_2\overrightarrow{OC_1}$. Поэтому $\overrightarrow{OC_1} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$; с другой стороны, $\overrightarrow{OC_1} = -\frac{c}{a+b}\overrightarrow{OC}$. Приравняв правые части полученных равенств, докажем утверждение задачи.

§ 4. ГОМОТЕТИЯ

1. Центры гомотетий принадлежат двум прямым, параллельным краям данных полос. Коэффициент гомотетии равен $\pm\frac{d_1}{d}$, где d — ширина полосы (a, b), d_1 — ширина полосы (a_1, b_1).

2. Рассмотрите две гомотетии $H_1^{k_1}$ и $H_2^{k_2}$ с центрами O_1 и O_2. Пусть $H_1^{k_1}(A_1) = A_2$, $H_2^{k_2}(A_2) = A_3$, $H_1^{k_1}(B_1) = B_2$, $H_2^{k_2}(B_2) = B_3$, где A_1 и B_1 — произвольные различные точки. Убедитесь в том, что композиция $H_2^{k_2}$ и $H_1^{k_1}$ отображает A_1 на A_3, B_1 на B_3, причем $[A_1B_1] \parallel [A_3B_3]$, $|A_3B_3| = k_1k_2\,|A_1B_1|$. Если $k_1k_2 \neq 1$, то композиция есть гомотетия с коэффициентом k_1k_2; если $k_1k_2 = 1$, но $O_1 \neq O_2$, то композиция есть перенос $\overrightarrow{A_1A_3}$; если $k_1k_2 = 1$, $O_1 = O_2$, то получаем тождественное преобразование.

3. Пусть $H_1^{k_1}$ и $H_2^{k_2}$ — данные гомотетии с центрами O_1 и O_2. Если $k_1 \neq k_2$, то обе гомотетии имеют общую пару соответствующих точек. В самом деле, если точка A_1 — центр гомотетии, являющейся композицией $(H_2^{k_2})^{-1} \circ H_1^{k_1}$, то

$$(H_2^{k_2})^{-1} \circ H_1^{k_1}(A_1) = A_1.$$

Отсюда получаем:

$$H_1^{k_1}(A_1) = A_2,\ (H_2^{k_2})^{-1}(A_2) = A_1,\ H_2^{k_2}(A_1) = A_2.$$

Пара точек (A_1, A_2) является общей парой соответствующих точек. Если $k_1 = k_2$, то общих пар данные гомотетии не имеют.

4. Обратите внимание, что при гомотетии центр данной окружности отображается на точку, которая должна быть центром окружности, гомотетичной данной.

5. В общей точке обеих окружностей постройте к одной из них касательную. При гомотетии она отображается на себя и, кроме того, остается касательной к другой окружности.

6. Отобразите окружность ω_2 на ω_2' в гомотетии с центром A и коэффициентом $-k$. Окружность ω_2' пересекает ω_1 в искомой точке M_1.

7. Постройте окружность, гомотетичную данной, приняв за центр гомотетии точку M, а за коэффициент гомотетии — данное отношение (с противоположным знаком). Эта окружность пересекает данную в двух точках, которые являются концами двух искомых хорд. Если окружности не пересекаются, задача решений не имеет, если они касаются — одно решение.

8. Если окружности не концентрические, то центры гомотетий делят отрезок, соединяющий центры окружностей, внутренним и внешним образом в отношении $R_2 : R_1$. Если окружности концентрические, то оба центра гомотетии совпадают с общим центром окружностей.

9. Постройте треугольник ABC и треугольник $A_1B_1C_1$, чтобы $(AC) \parallel (A_1C_1)$ и $(BC) \parallel (B_1C_1)$. Прямая CC_1 пересекает AB в искомой точке.

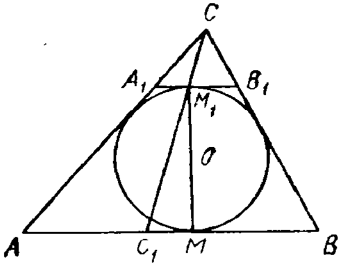


Рис. 228

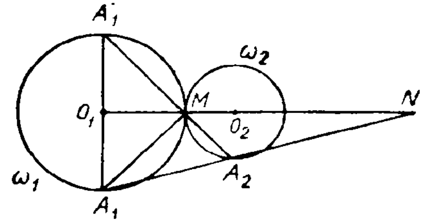


Рис. 229

10. Постройте произвольную окружность, касающуюся сторон угла. Луч, проведенный через вершину угла и данную точку, пересекает окружность в двух точках. Рассмотрите две гомотетии с центром в вершине угла, отображающие каждую из этих точек на данную точку.

11. Для одной из сторон угла постройте гомотетичный ей луч с центром гомотетии M и коэффициентом, равным данному отношению. Точку пересечения построенного луча со второй стороной угла соедините прямой с точкой M.

12*. Постройте касательную к окружности в точке M_1, пересекающую $[AC]$ в точке B_1 и $[BC]$ в точке A_1 (рис. 228). Убедитесь, что $|CA_1|+|A_1M_1| = |CB_1| + |B_1M_1|$, и воспользуйтесь гомотетичностью треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

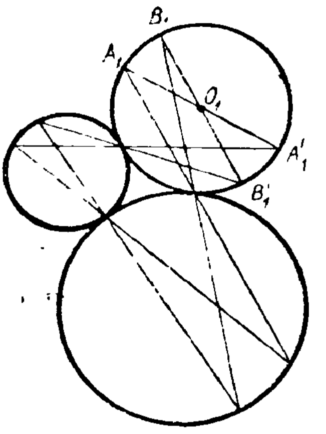


Рис. 230

13. Если O_1 — центр окружности ω_1, то симметрия S_{O_1} отображает точку A_1 на точку A_1', а гомотетия с центром M и коэффициентом $-\frac{R_2}{R_1}$ отображает A_1' на точку A_2 (рис. 229). Но композиция центральной симметрии и гомотетии есть гомотетия. Следовательно, отображение $A_1 \to A_2$ есть гомотетия, центр которой совпадает со вторым центром гомотетии данных окружностей.

14. Рассмотрите композицию трех гомотетий с центрами в точках касания и коэффициентами: $-\frac{R_2}{R_1}$, $-\frac{R_3}{R_2}$, $-\frac{R_1}{R_3}$ (рис. 230). Эта композиция есть гомотетия с коэффициентом k, равным произведению указанных коэф-

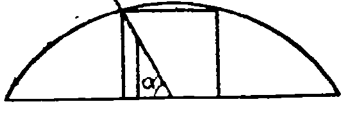


Рис. 231

фициентов, т. е. $k = -1$. Полученная центральная симметрия отображает первую окружность на себя и каждую ее точку — на диаметрально противоположную. Для точки A_1 строим A_1', а для точки B_1 — точку B_1'. Диаметры A_1A_1' и B_1B_1' пересекаются в центре первой окружности.

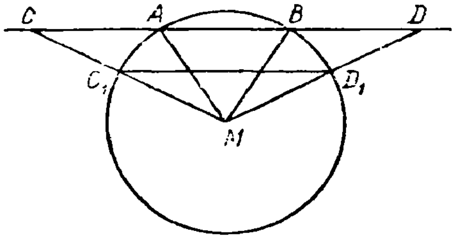


Рис. 232

15. Через середину основания сегмента проведите луч, образующий с основанием угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = 2$ (рис. 231). Этот луч пересекает дугу сегмента в одной из вершин искомого квадрата.

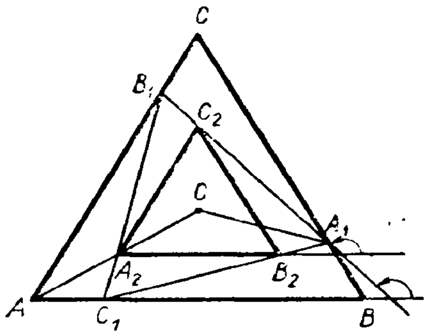


Рис. 233

19. Через концы A и B радиусов проведите прямую, постройте на ней два отрезка AC и BD, конгруэнтные $[AB]$. Гомотетия с центром в центре окружности отображает отрезок CD на искомую хорду C_1D_1 (рис. 232).

20*. Композиция поворота и гомотетии отображает треугольник ABC на $A_1B_1C_1$, а композиция другой гомотетии и другого поворота отображает $A_1B_1C_1$ на $A_2B_2C_2$ (рис. 233). При этом центры гомотетий и центры поворотов совпадают с центром O данного треугольника. Коэффициенты гомотетий равны, а углы поворотов отличаются знаком. Произведение коэффициентов гомотетий равно $\frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}$, а сумма углов поворота равна 0°. Таким образом, треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}$.

§ 5. ПОДОБИЕ[1]

1. Убедитесь, что существует подобие, в котором $A \to A_1$, $B \to B_1$. Это подобие есть композиция гомотетии и перемещения. Каждое из двух подобий отображает заданную полуплоскость с границей AB соответственно на различные полуплоскости с границей A_1B_1.

[1] См. Приложение III, стр. 221.

2. Центр подобия первого рода[1] есть точка пересечения окружностей (ABM) и (A_1B_1M), где $(AA_1) \cap (BB_1) = M$.

Центр подобия второго рода есть точка пересечения прямых, проходящих через точки деления отрезков AA_1 и BB_1 в отношении, равном коэффициенту подобия, внутренним и внешним образом.

3. Заметьте, что оба треугольника гомотетичны, причем центр гомотетии совпадает с общим центром вписанных в треугольники окружностей. Коэффициент гомотетии равен $k = \frac{r-d}{r}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Обратите внимание на то, что если соответственные стороны четырехугольника параллельны, но при этом параллельны несоответственные диагонали, то четырехугольники не гомотетичны. В привычном случае достаточно рассмотреть два гомотетичных треугольника.

5. $a^2 + b^2 = 5c^2$.

6. Точка Q есть центр подобия второго рода, оси симметрии данных прямых — двойные прямые подобия, коэффициент подобия равен $|\cos \varphi|$.

7. Воспользуйтесь свойством, что прямая, проходящая через основания двух высот треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному и противоположно с ним ориентированный.

Коэффициент подобия равен $|\cos \varphi|$, где φ — угол между диагоналями; полученное подобие — второго рода.

8. Подобие первого рода с центром в центре данной окружности, с коэффициентом подобия $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$ и с углом поворота $\frac{\alpha}{2}$ отображает треугольник $A'B'C'$ (A', B', C' — середины сторон BC, CA и AB) на треугольник $A_0B_0C_0$. Поэтому треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия

$$\frac{1}{2\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|}.$$

9. См. решение предыдущей задачи.

11. Убедитесь в том, что четырехугольник, определяемый серединными перпендикулярами к сторонам трапеции, обладает тем свойством, что его диагонали перпендикулярны соответствующим диагоналям данной трапеции. Поэтому поворот полученного четырехугольника на 90° около любого центра отображает его на четырехугольник, гомотетичный данному. Коэффициент подобия равен котангенсу угла наклона средней линии трапеции к ее основанию.

12. Точку A_1 выберите произвольно. Подобием с центром в этой точке с коэффициентом подобия и углом поворота, определяемыми из треугольника ABC, отобразите прямую AC на прямую, пересекающую (AB) в искомой точке C_1.

[1] Подобие, не меняющее ориентацию, называется подобием первого рода; если оно меняет ориентацию — второго рода.

13. Если $|AB| = c$, то $|A_1B_1| = c_1 = kc$. Докажите, что $|A_0B_0| = c_0 = c\sqrt{1 + k^2 - 2k\cos\varphi}$, где φ — угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ ◦ $k_0 = \sqrt{1 + k^2 - 2k\cos\varphi}$ есть коэффициент подобия, отображающего треугольник ABC на треугольник $A_0B_0C_0$.

14. Одну из окружностей отобразите на окружность в подобии первого рода с центром в данной точке. Коэффициент подобия равен отношению двух сторон данного треугольника, а угол поворота — углу между этими сторонами. Точки пересечения построенной окружности с другой данной окружностью — искомые вершины.

15. Для произвольного квадрата $A_1B_1C_1D_1$ постройте ось симметрии l, не содержащую его диагональ. Найдите на этой оси точки, отношение расстояний которых до двух вершин квадрата, расположенных по одну сторону от оси, равно отношению радиусов данных окружностей. Далее воспользуйтесь преобразованием подобия.

§ 6. КООРДИНАТЫ[1]

1. Пусть при указанном параллельном переносе плоскости произвольная точка $M(x, y)$ отображается на точку $M_1(x_1, y_1)$. Тогда $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AA_1}$, откуда $x_1 - x = a_1 - a$, $y_1 - y = b_1 - b$, или $x_1 = x + a_1 - a$, $y_1 = y + b_1 - b$.

2. Пусть $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ — базисные векторы системы координат $Ox'y'$. В системе Oxy они имеют координаты: $\vec{i}'(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{j}'(\cos(\varphi + 90°), \sin(\varphi + 90°))$ или $\vec{j}'(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, с другой стороны, $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = x'(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) + y'(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\vec{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\vec{j}$. В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}$ имеем: $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$, откуда получаем искомые формулы:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

3. Пусть при указанном повороте точка $M(x, y)$ отображается на точку $M'(x', y')$. Очевидно, при этом повороте $E_1(1, 0)$ отображается на $E_1'(\cos\varphi, \sin\varphi)$, а $E_2(0, 1)$ — на точку $E_2'(\cos(90° + \varphi), \sin(90° + \varphi))$, т. е. $E_2'(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Запишем в координатах условия конгруэнтности отрезков OM и OM', ME_1 и $M'E_1'$, ME_2 и $M'E_2'$: $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, $(x - 1)^2 + y^2 = (x' - \cos\varphi)^2 + (y' - \sin\varphi)^2$, $x^2 + (y - 1)^2 = (x' + \sin\varphi)^2 + (y' - \cos\varphi)^2$. Из этих равенств получим:

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \; y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

[1] См. Приложение II, III, стр. 219, 221.

откуда

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

4. Точка $M(x, y)$ при осевой симметрии относительно прямой $y = kx + b$ отображается на точку $M_1(x_1, y_1)$. Середина отрезка MM_1 принадлежит данной прямой, т. е.

$$\frac{y+y'}{2} = k\frac{x+x'}{2} + b.$$

Прямая MM' перпендикулярна оси симметрии, поэтому

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot k = -1.$$

Из полученных уравнений следует:

$$x' = x - \frac{2k}{1+k^2}(kx + b - y),\ y' = y + \frac{2}{1+k^2}(kx + b - y).$$

5. Согласно задаче 3 при повороте около начала координат на угол φ имеем: $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$. $A(0; 0) \to A_1(0; 0)$, $B(5; 4) \to B_1(3; 4)$, поэтому $3 = 5\cos\varphi$, $4 = 5\sin\varphi$.

Ответ. $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y.$

6. $\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}$, поэтому $x' - x_0 = k(x - x_0)$, $y' - y_0 = k(y - y_0)$, откуда $x' = kx + (1-k)x_0$, $y' = ky + (1-k)y_0$.

7. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, поэтому $x = a + x'$, $y = b + y'$, откуда $x' = x - a$, $y' = y - b$.

8. Пусть гомотетия с центром $S_1(x_1, y_1)$ и коэффициентом k_1 отображает точку $M(x, y)$ на точку $M'(x', y')$, а гомотетия с центром $S_2(x_2, y_2)$ и коэффициентом k_2 отображает точку M' на точку $M''(x'', y'')$. Согласно задаче 6 имеем:

$$x' = k_1x + (1-k_1)x_1;\ x'' = k_2x + (1-k_2)x_2.$$
$$x'' = k_2k_1x + k_2(1-k_1)x_1 + (1-k_2)x_2; \qquad (*)$$
$$y'' = k_2k_1y + k_2(1-k_1)y_1 + (1-k_2)y_2.$$

Отображение M на M'' будет гомотетией с коэффициентом k_0 и центром $S_0(x_0, y_0)$, если

$$x'' = k_0x + (1-k_0)x_0,\ y'' = k_0y + (1-k_0)y_0,$$

т. е. при условиях, что $k_1k_2 = k_0$,

$$k_2(1-k_1)x_1 + (1-k_2)x_2 = (1-k_1k_2)x_0;$$
$$k_2(1-k_1)y_1 + (1-k_2)y_2 = (1-k_1k_2)y_0.$$

Если $k_1k_2 \neq 1$, то отображение M на M'' есть гомотетия с коэффициентом $k_0 = k_1k_2$, центром гомотетии является точка $S_0(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{1}{1-k_1k_2}(k_2(1-k_1)x_1 + (1-k_2)x_2).$$

$$y_0 = \frac{1}{1 - k_1 k_2} (k_2 (1 - k_1) y_1 + (1 - k_2) y_2).$$

Если $k_1 k_2 = 1$, то равенства (*) принимают вид:

$$x'' = x + (1 - k_2)(x_2 - x_1); \qquad y'' = y + (1 - k_2)(y_2 - y_1).$$

В этом случае при $k_2 = 1$ (следовательно, и $k_1 = 1$) имеем: $x'' = x$, $y'' = y$ — тождественное отображение.

При $k_2 \neq 1$ ($k_1 k_2 = 1$) полученные формулы определяют параллельный перенос $\vec{a} = (1 - k_2)\overrightarrow{S_1 S_2}$. Предполагается, что $S_1 \neq S_2$.

9. Уравнение искомой прямой l запишем в виде $y = kx + b$, где k и b необходимо определить. Так как l параллельна прямой $y = 2x - 5$, то $k = 2$. Точка $A \in l$, поэтому $-1 = 2 \cdot 3 + b$, откуда $b = -7$.

Ответ. $y = 2x - 7$.

10. $y_1 = kx_1 + b$, $\quad y_2 = kx_2 + b$, $\quad y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

11. Точка $M(x, y)$ принадлежит указанному множеству, если ее координаты удовлетворяют уравнению

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = k^2$$

или равносильному ему уравнению

$$\left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2 + b_2}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4}.$$

При $\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} > 0$ это уравнение определяет окружность радиуса $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4}}$ с центром в середине отрезка AB. При $\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} = 0$ уравнение определяет единственную точку — середину $[AB]$. При $\frac{k^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} < 0$ искомое множество пусто.

12. $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - (x - b_1)^2 - (y - b_2)^2 = k^2$ или

$$(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y = \frac{1}{2}(k^2 - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2).$$

Полученное уравнение определяет прямую, перпендикулярную (AB).

13. Чтобы точки A, B и C принадлежали одной прямой, не параллельной оси ординат, необходимо и достаточно, чтобы угловые коэффициенты прямых AB и AC были равны, т. е.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Если эти точки принадлежат прямой, параллельной оси ординат, то $x_1 = x_2 = x_3$.

14. Выберем систему координат так, чтобы вершины треугольника имели следующие координаты: A (0; 0), B (1; 0), C (a; b). Тогда середина A_1 стороны BC имеет координаты $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b}{2}\right)$, а точка G, делящая медиану AA_1 в отношении 2 : 1, $\left(\frac{a+1}{3}, \frac{b}{3}\right)$, так как $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Вычисляя аналогично координаты точек, делящих медианы BB_1 и CC_1 в том же отношении, убедимся, что эти точки совпадают с G.

15. $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $k_1 \cdot k_2 = -1$.

16. Угловые коэффициенты прямых AB и CD равны соответственно $k_1 = \frac{b_2 - a_1}{b_1 - a_1}$, а $k_2 = \frac{d_2 - c_2}{d_1 - c_1}$. Условие перпендикулярности отрезков AB и CD согласно задаче 15 следующее: $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot \frac{d_2 - c_2}{d_1 - c_1} = -1$ или $(b_2 - a_2)(d_2 - c_2) + (b_1 - a_1)(d_1 - c_1) = 0$.

17. 1-й способ. Проведем через точку M (x_0, y_0) к прямой l перпендикуляр MA, A $(x, kx + b)$.

$$|AM|^2 = (x - x_0)^2 + (kx + b - y_0)^2. \qquad (1)$$

B (0, b) — точка пересечения l с осью Oy. Согласно теореме Пифагора для прямоугольного треугольника MAB имеем: $|BA|^2 + |AM|^2 = |BM|^2$, или в координатах

$$x^2 + k^2x^2 + (x - x_0)^2 + (kx + b - y_0)^2 = x_0^2 + (b - y_0)^2,$$

откуда $x = \frac{x_0 + ky_0 - kb}{1 + k^2}$. Подставив полученное значение x в формулу (1), получим

$$|AM| = \frac{|kx_0 + b - y_0|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

2-й способ. Пусть A — точка прямой $y = kx + b$. Расстояние от данной точки M (x_0, y_0) до точки A $(x, kx + b)$ вычислим по формуле

$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (kx + b - y_0)^2$$

или

$$\rho^2 = (1 + k^2)x^2 + 2(bk - ky_0 - x_0)x + (x_0^2 + y_0^2 + b^2 - 2by_0). \qquad (2)$$

Расстояние от точки M до прямой равно наименьшему значению этого трехчлена.

18. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром квадрата, а оси проходили через противоположные вершины квадрата. Координаты вершин: A (a, 0), B (0, a), C ($-a$, 0),

$D\ (0, -a)$, а уравнение прямой, проходящей через центр квадрата, $y = kx$. По формуле, полученной в задаче 17, вычислим сумму квадратов расстояний вершин квадрата до прямой $y = kx$:

$$\frac{1}{1+k^2}(k^2a^2 + a^2 + k^2a^2 + a^2) = \frac{2(1+k^2)a^2}{1+k^2} = 2a^2.$$

Полученная сумма не зависит от k.

19. $|AB|^2 = 5$, $|AC|^2 = 18$, $|BC|^2 = 17$. По теореме косинусов $\cos\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, тогда $\sin\widehat{A} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{2}$.

20. Вычислите квадраты длин сторон и используйте теорему косинусов.

Ответ. Равнобедренный, остроугольный.

21. Выберите систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром квадрата, а оси были параллельны сторонам квадрата.

22. Выберите систему координат так, чтобы вершины параллелограмма имели координаты $A\ (0, 0)$, $B\ (a, 0)$, $D\ (b, c)$, $C\ (a + b, c)$.

23. Выберите систему координат так, чтобы вершины прямоугольника имели координаты $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$.

Ответ. Вся плоскость.

24. Уравнения данных окружностей запишем: $x^2 + y^2 = 1$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, значит, $r_1 = 1$, $O_1\ (0, 0)$; $r_2 = \frac{1}{2}$, $O_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Искомые центры S_1 и S_2 гомотетии делят $[O_1O_2]$ внутренним и внешним образом в отношении $r_1 : r_2 = 2 : 1$. $S_1\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $S_2\ (1, 0)$.

25. Точка $M\ (x_0, y_0)$ принадлежит данной окружности, значит, $x_0^2 + y_0^2 = R^2$. Касательная $y = kx + b$ проходит через точку M, поэтому $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$. Касательная перпендикулярна (OM), поэтому ее угловой коэффициент k таков:

$$k = -\frac{1}{k_{OM}} = -\frac{x_0}{y_0}. \text{ Тогда } b = y_0 + \frac{x_0^2}{y_0},\ b = \frac{R^2}{y_0}.$$

Подставим полученные значения k и b в уравнение $y = kx + b$ и получим уравнение касательной:

$$x_0x + y_0y = R^2.$$

26. Пусть при повороте около начала координат на угол $-\beta$ точка $E'\ (\cos\alpha, \sin\alpha)$ отображается на точку $E''\ (x, y)$, тогда согласно формулам задачи 3

$$x = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta),$$

т. е.

$$x = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

С другой стороны, точка E'' имеет координаты $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, поэтому

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

27. Если точки $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ симметричны относительно центра $A(a, b)$, $\frac{x+x'}{2} = a$, $\frac{y+y'}{2} = b$, откуда $x = 2a - x'$, $y = 2b - y'$. Подставим полученные выражения в уравнение параболы $y = x^2 : 2b - y' = (2a - x')^2$ или $y' = -x'^2 + 4ax' + 2b - 4a^2$. Если взять $4a = m$, $2b - 4a^2 = n$, т. е. $a = \frac{m}{4}$, $b = \frac{m^2 + 4n}{8}$, то условию задачи удовлетворяет симметрия относительно точки $\left(\frac{m}{4}, \frac{m^2+4n}{8}\right)$.

28. Согласно задаче 6 при гомотетии с центром $S(x_0, y_0)$ и коэффициентом k $x' = kx + (1-k)x_0$, $y' = ky + (1-k)y_0$, откуда $x = \frac{1}{k}(x' - (1-k)x_0)$, $y = \frac{1}{k}(y' - (1-k)y_0)$.

Подставим эти выражения в уравнение

$$y = x^2 : \frac{1}{k}(y' - (1-k)y_0) = \frac{1}{k^2}(x' - (1-k)x_0)^2.$$

После преобразования получим

$$y' = \frac{1}{k}x'^2 - \frac{2(1-k)x_0}{k}x' + \frac{(1-k)^2 x_0^2}{k} + (1-k)y_0.$$

Искомая гомотетия будет определена, если положить $\frac{1}{k} = p$,

$$\frac{2(k-1)x_0}{k} = q, \quad \frac{(1-k)^2 x_0^2}{k} + (1-k)y_0 = r, \text{ откуда}$$

$$k = \frac{1}{p}, \quad x_0 = \frac{q}{2(1-p)}, \quad y_0 = \frac{q^2 - 4pr}{4(1-p)}.$$

29. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ (см. задачу 28).

30. Выберем систему координат так, чтобы парабола имела уравнение $y = x^2$. Пусть данные точки параболы имеют координаты $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$, $D(d, d^2)$. Угловой коэффициент прямой AB $k_{AB} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$. Аналогично $k_{CD} = c + d$, $k_{AC} = a + c$, $k_{BD} = b + d$, $k_{AD} = a + d$, $k_{BC} = b + c$. Если α — угол наклона (AB) к оси абсцисс, то $(180° - \alpha)$ — угол наклона (CD) к оси абсцисс. Но $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, поэтому $k_{AB} = -k_{CD}$ или $a + b = -c - d$. Из последнего равенства следует, что $a + c = -b - d$, $a + d = -b - c$, откуда следует утверждение задачи.

31. Касательная к параболе параллельна некоторой секущей и имеет с параболой только одну общую точку. Пусть $A_1(x_1, x_1^2)$, $A_2(x_2, x_2^2)$ — две точки параболы. Составим уравнение секущей $A_1A_2 : y = kx + b$. Угловой коэффициент (A_1A_2) $k = x_1 + x_2$ (см. задачу 30). Значение b найдем из условия принадлежности точки $A_1(x_1, x_1^2)$ этой прямой: $x_1^2 = (x_1 + x_2)x_1 + b$, откуда $b = -x_1x_2$. Уравнение секущей имеет вид:

$$y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2.$$

Если положить $x_1 = x_2 = x_0$, то получим уравнение касательной к параболе в точке $M(x_0, x_0^2)$:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

32. Пусть $A_1(a_1, a_1^2)$, $A_2(a_2, a_2^2)$ — точки касания. Уравнения касательных (см. задачу 31):

$$y = 2a_1x - a_1^2,\ y = 2a_2x - a_2^2.$$

Этим касательным принадлежит точка $M(a, b)$. Поэтому $b = 2a_1a - a_1^2$, $b = 2a_2a - a_2^2$. Следовательно, a_1 и a_2 — корни квадратного уравнения $t^2 - 2at + b = 0$, тогда $a_1 + a_2 = 2a$, $a_1 \cdot a_2 = b$. Секущая A_1A_2 имеет уравнение $y = (a_1 + a_2)x - a_1a_2$, т. е. $y = 2ax - b$.

33. Пусть данные точки имеют координаты: $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$, $D(d, d^2)$, $E(e, e^2)$, $F(f, f^2)$. Угловой коэффициент k_{AB} прямой AB равен $a + b$. Аналогично можно записать угловые коэффициенты остальных прямых. Из условий параллельности следует:

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \parallel [DE] \Rightarrow a + b = d + e\\ [BC] \parallel [EF) \Rightarrow b + c = e + f\end{array}\right. \Rightarrow c + d = f + a,$$

в силу чего $[CD] \parallel [FA]$.

Если данные точки принадлежат гиперболе $xy = p^2$, то их координаты можно записать так: $A\left(a, \frac{p^2}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{p^2}{b}\right)$, ...; угловой коэффициент хорды AB:

$$k_{AB} = \frac{\frac{p^2}{b} - \frac{p^2}{a}}{b - a} = -\frac{p^2}{ab}.$$

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \parallel [DE] \Rightarrow ab = de\\ [BC] \parallel [EF] \Rightarrow bc = ef\end{array}\right. \Rightarrow cd = fa,$$

в силу чего $[CD] \parallel [FA]$.

34. Составим уравнение прямой CC_1, перпендикулярной (AB):

$$y = kx + b,\ k_{AB} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1x_2},\ k = x_1x_2.$$

$C \in (CC_1)$, поэтому $\frac{1}{x_3} = x_1x_2x_3 + b$, откуда $b = \frac{1}{x_3} - x_1x_2x_3$.

Прямая CC_1 имеет уравнение $y = x_1x_2x + \frac{1}{x_3} - x_1x_2x_3$. Аналогично прямая AA_1, перпендикулярная (BC), имеет уравнение $y = x_2x_3x + \frac{1}{x_1} - x_1x_2x_3$. Решив систему полученных уравнений, найдем координаты точки $H : \left(-\frac{1}{x_1x_2x_3}, -x_1x_2x_3\right)$. Очевидно, точка H принадлежит гиперболе $xy = 1$.

§ 7. КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД[1]

1. 1) $(10; -8)$, 2) $(-5; 4)$, 3) $(-20; 16)$, 4) $\left(1; -\frac{4}{5}\right)$.

2. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

3. 1) $\left(\frac{3}{4}; 4\right)$, 2) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; 3) $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

4. 1) $\left(0; \frac{7}{3}\right)$, 2) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

5. 1) $(5; 0)$, 2) $(-1; -2)$, 3) $(-5; 0)$.

6. 1) $(8; 7)$, 2) $(7; 2)$, 3) $(5; -8)$, 4) $(13; 10)$.

7. 1) $(1; 4)$, 2) $(1; 0)$, 3) $(0; -1)$, 4) $(7; 6)$.

8. $k = 7$.

9. $M\left(0; \frac{7}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{NP}\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{PM}\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

10. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, D(x, y)$, $\begin{cases} -1 - 2 = 1 - x, \\ 4 - 3 = 1 - y, \end{cases}$ $x = 4, y = 0$.

2) $(0; 6)$, 3) $(-2; 2)$.

11. $\overrightarrow{AA_1}\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

12. $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

13. $\overrightarrow{AB}(4; 6)$, $\overrightarrow{CD}(-2; -3)$, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.

14. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, $C \notin (AB)$, $ACBD$.

15. $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$, $C \notin (AB)$, $ACDB$.

16. $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ или $mq - np = 0$.

17. Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала данной прямой, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{p}$ были коллинеарны.

1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1}$; $x - 4y - 6 = 0$; 2) $3x + y - 4 = 0$; 3) $y - 2 = 0$.

18. Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — две точки данной прямой: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$, откуда $y_1 = \frac{C - Ax_1}{B}$,

$$y_2 = \frac{C - Ax_2}{B},\quad B \neq 0,\quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(C - Ax_2) - (C - Ax_1)}{B(x_2 - x_1)} = \frac{A}{-B}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{p}$. Если $B = 0$, то доказательство очевидно.

19. $m_1 = 4$, $m_2 = -4$.

---

[1] См. Приложение II, III, стр. 219.

20. $m = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad n = |\vec{a}| \sin \alpha, \quad p = |\vec{b}| \cos (\alpha + 90°),$ $q = |\vec{b}| \sin (\alpha + 90°)$, $p = -|\vec{b}| \sin \alpha$, $q = |\vec{b}| \cos \alpha$, $mp + nq = - |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \alpha \sin \alpha + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha \cos \alpha = 0$. Необходимость доказана.

21. $(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}) = \alpha, \quad |\vec{a}| \cos \alpha = x_0, \quad |\vec{a}| \sin \alpha = y_0.$

$$\vec{b}\,(x, y),\ x = |\vec{b}| \cos (\alpha + 90°) = -|\vec{a}| \sin \alpha = -y_0,$$
$$y = |\vec{b}| \sin (\alpha + 90°) = |\vec{a}| \cos \alpha = x_0,\ b\,(-y_0, x_0).$$

22. При повороте около начала координат на угол φ

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi,\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Если $\varphi = 90°$, то $x' = -y$, $y' = x$.

$$A_1\,(-1;\ 1),\ B_1\,(1;\ 2),\ C_1\,(-4;\ -1).$$

23. Прямая параллельна вектору $\vec{p}$, перпендикулярному $\vec{n}$. Согласно задаче 21 $\vec{p}\,(-1;\ -4)$. Уравнение прямой: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{-4}$, или $4x - y - 11 = 0$ (см. задачу 17).

24. $D\,(x, y)$, $\overrightarrow{AB}\,(3;\ 1)$, $\overrightarrow{AD}\,(x - 1,\ y + 2)$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. Согласно задаче 20 $3(x - 1) + (y + 2) = 0$. $|AB|^2 = |AD|^2$, поэтому $10 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$. Полученная система уравнений имеет два решения: $(2;\ -5)$ и $(0;\ 1)$. Чтобы найти координаты точки $C\,(x, y)$, учтем, что середины отрезков AC и BD совпадают, в силу чего

1) $\begin{cases} 1 + x = 4 + 2, \\ -2 + y = -1 - 5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 + x = 4 + 0, \\ -2 + y = -1 + 1, \end{cases}$

откуда $C_1\,(5;\ -4)$, $C_2\,(3;\ 2)$.

Ответ. Задача имеет два решения: $C_1\,(5;\ -4)$, $D_1\,(2;\ -5)$; $C_2\,(3;\ 2)$, $D_2\,(0;\ 1)$.

25. $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Если точка B имеет координаты (x, y), то D будет иметь координаты $(1 - x,\ -1 - y)$, учитывая, что M — середина $[BD]$.

$$\overrightarrow{AB}\,(x - 2,\ y + 4),\ \overrightarrow{AD}\,(-x - 1,\ 3 - y).\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x - 2)(-x - 1) + (y + 4)(3 - y) = 0;\ |AB|^2 = |AD|^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = (x + 1)^2 + (3 - y)^2.$$

Полученная система уравнений имеет два решения $(4;\ 1)$ и $(-3;\ -2)$. По координатам вершины B вычисляем координаты D:

если $B\,(4;\ 1)$, то $D\,(-3;\ -2)$;

если $B\,(-3;\ -2)$, то $D\,(4;\ 1)$.

26. Согласно задаче 18 первая прямая параллельна вектору $\vec{p}_1\,(1;\ 3)$, вторая — вектору $\vec{p}_2\,(-3;\ 1)$. Согласно задаче 20 прямые перпендикулярны, так как $1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0$.

27. Прямая параллельна вектору $\vec{p}\,(-3;\,5)$, $|\vec{p}| = \sqrt{34}$;

$$\vec{p}_0\left(-\frac{3}{\sqrt{34}};\ \frac{5}{\sqrt{34}}\right).$$

28. $k = \frac{13}{8}$.

§ 8. ПЛОЩАДИ

1. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает треугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ часть площади данного четырехугольника.

2. Равновеликие треугольники с равными основаниями имеют равные высоты; значит, две смежные вершины четырехугольника удалены на равные расстояния от противолежащей стороны. Средняя линия проходит через середины оснований трапеции.

3. Средние линии четырехугольника $ABCD$ являются диагоналями параллелограмма $PQRS$ и разбивают его на четыре равновеликие части. Суммы площадей треугольников BPQ, DSR и ASP, CQR равны, так как каждая равна $\frac{1}{4}$ площади данного четырехугольника.

4. Пусть $W = (SC) \cap (UV)$, $D = (SC) \cap (AB)$;

$$S_{ADWV} = 2S_{ACV},\ S_{ACMN} = 2S_{ASC},\ \text{но}\ S_{ACV} = S_{ASC}$$

($ASCV$ — параллелограмм), поэтому $S_{ACMN} = S_{ADWV}$. Аналогично $S_{DBUW} = S_{BCPQ}$.

5. Докажите, что отрезок MN искомой прямой, заключенный внутри угла MAN, делится данной точкой P пополам. Для этого достаточно через P провести любую другую прямую $M'N'$ (пусть $|PN'| > |PM'|$) и доказать, что $S_{PMM'} < S_{PNN'}$. Последнее становится очевидным, если через точку провести прямую, параллельную (AN). Последняя прямая пересекает продолжение отрезка $M'N'$.

6. Пусть $|AM| = \frac{1}{n}|AB|$, $|CN| = \frac{1}{n}|CD|$, тогда

$$S_{BDM} = \frac{n-1}{n} S_{ABD},\ S_{DBN} = \frac{n-1}{n} S_{BCD} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_{BDM} + S_{DBN} = S_{MBND} = \frac{n-1}{n} S_{ABCD}.$$

Аналогично

$$S_{MCNA} = \frac{1}{n} S_{ABCD},$$

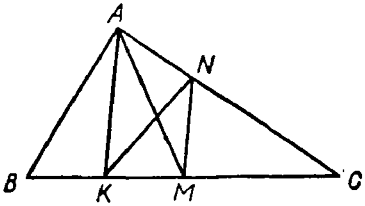


Рис. 234

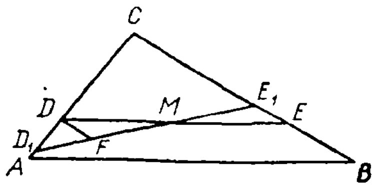


Рис. 235

значит,

$$S_{MBND} + S_{MCNA} = S_{ABCD}$$
$$\text{или } S_{ABCD} - S_{MQNP} + S_{BCQ} + S_{DPA} = S_{ABCD},$$
$$\text{откуда } S_{MQNP} = S_{BCQ} + S_{DPA}.$$

7. Пусть данная точка K принадлежит стороне BC треугольника ABC (рис. 234). Если K — середина $[BC]$, то (AK) — искомая прямая. Если $|BK| < |BM|$, где M — середина $[BC]$, то построив $[MN] \parallel [AK]$, получим искомую прямую KN. Действительно, так как $S_{AMN} = S_{KMN}$, то $S_{KCN} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

8. Если прямая, проведенная через точку пересечения медиан, параллельна стороне треугольника (рис. 235), то указанное в условии отношение площадей равно $\frac{4}{5}$, в остальных случаях оно больше (см. задачу 5).

9. $\widehat{BCM} = \widehat{CMD} = \widehat{MDA}$ (рис. 236) и

$$\widehat{CBM} = \widehat{DMA} \Longrightarrow \triangle BCM \sim \triangle MDA \Longrightarrow \frac{|BC|}{|MD|} =$$
$$= \frac{|CM|}{|AD|} \Longrightarrow \frac{|BC|}{|MD|} \cdot \frac{|MC|}{|MC|} = \frac{|CM|}{|AD|} \cdot \frac{|MD|}{|MD|} \Longrightarrow \frac{S_{BCM}}{S_{MDC}} = \frac{S_{MDC}}{S_{AMD}}.$$

10. Новые треугольники подобны данному; следовательно, площади их относятся как квадраты сходственных сторон.

11. Нет. Достаточно рассмотреть выпуклый четырехугольник, диагональ BD которого делит диагональ AC пополам. Точкой M взять середину $[BD]$.

12. Убедитесь, что

$$S_{DMM_1} = S_{N_1MM_1} \text{ и } S_{MN_1N} =$$
$$= S_{BN_1N} \Longrightarrow S_{DMBN_1} = 2S_{MNN_1M_1}.$$

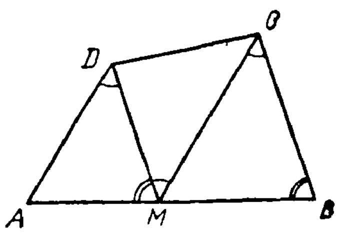


Рис. 236

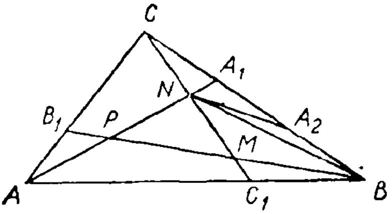


Рис. 237

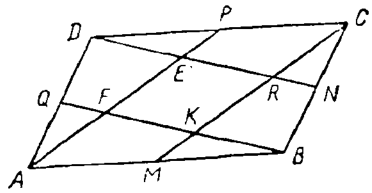


Рис. 238

Постройте диагональ DB, заметьте, что

$$S_{ADM} = \frac{1}{3} S_{ADB} \text{ и } S_{CBN_1} = \frac{1}{3} S_{CBD}.$$

13. Докажите, что каждый отрезок делится точками пересечения с другими на три равные части.

14. Примем $S_{ABC} = 1$ (рис. 237).

Заметим, что $S_{CNA_1} = S_{A_1NA_2} = S_{A_2NB} = z$, где точка A_2 — середина $[A_1B]$; $S_{C_1NB} = \frac{1}{3} - 3z$, но $S_{ANC_1} = 2S_{C_1NB}$.

Так как $S_{AA_1B} = S_{ANC_1} + S_{CC_1B} - S_{CNA_1}$, то $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3} - 3z\right) + \frac{1}{3} - z$, откуда $z = \frac{1}{21}$.

Значит,

$$S_{MNP} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{7}.$$

15. Параллелограмм, так как противоположные стороны принадлежат параллельным прямым (рис. 238). Построенные прямые отсекают от параллелограмма треугольники, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{4}$ площади данного параллелограмма. Видим, что $\triangle MBK \cong \triangle PDE \Rightarrow S_{MKQA} = S_{DEA} \Rightarrow S_{MKFA} = S_{QFED}$, так как треугольник AFQ является их общей частью. Следовательно, $S_{AFQ} = S_{MBK}$, но

$$S_{MBK} = \frac{1}{4} S_{ABF}; \text{ значит, } S_{MBK} = \frac{1}{20} S_{ABCD}, \text{ а } S_{FKRS} = \frac{1}{5} S_{ABCD}.$$

16. $S_{ADM} = S_{ANB} = \frac{1}{4} S_{ABCD} \Rightarrow S_{PND} = S_{MPB}$, но

$$S_{PND} = S_{ANP} \text{ и } S_{MPB} = S_{AMP} \Rightarrow S_{AMPN} =$$

$$= \frac{2}{3} S_{AMD} \Rightarrow S_{AMPN} = \frac{1}{6} S_{ABCD}.$$

17. $\dfrac{kl(k+l+2)}{2(k+l)(l+1)(k+l+1)}$.

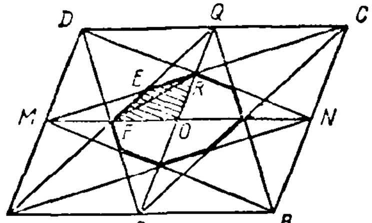


Рис. 239

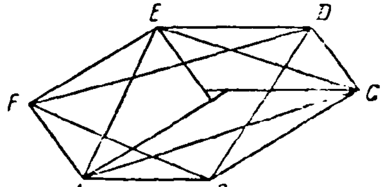


Рис. 240

18. Рассмотрите параллелограмм $MOQD$ (рис. 239), площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма $ABCD$;

$$S_{FORE} = S_{FOR} + S_{RFE} = \frac{1}{4} S_{MCQ} + \frac{1}{12} S_{MOQ} = \frac{1}{3} S_{MOQ} = \frac{1}{6} S_{MOQD}.$$

20. Площади треугольников ACE и BDF сравните с площадью данного шестиугольника и площадью треугольника, сторонами которого являются отрезки, равные разностям противоположных сторон шестиугольника (рис. 240).

21. Воспользуйтесь следующим положением. Если на медиане AM треугольника ABC взять любую точку O, то $S_{ABO} = S_{ACO}$.

Дан пятиугольник $ABCDE$. Пусть отрезки, проходящие через вершины A, B, D и E, пересекаются в точке O. Чтобы пятый отрезок содержал точку O, достаточно доказать, что $S_{EOC} = S_{AOC}$. Можем записать:

$$S_{EOC} = S_{EOB},\ S_{EOB} = S_{DOB},\ S_{DOB} = S_{DOA},$$
$$S_{DOA} = S_{AOC} \Longrightarrow S_{EOC} = S_{AOC};$$

значит, (CO) пересекает $[AE]$ в его середине.

22. Постройте через середину K стороны AB прямую, параллельную (CD), пусть M и N — точки ее пересечения с (BC) и (AD). Треугольники KBM и KNA равновелики, поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади параллелограмма $MNDC$, т. е. ab.

23. Середины сторон четырехугольника являются вершинами ромба, у которого диагонали — средние линии четырехугольника. Площадь ромба равна половине площади четырехугольника.

24. $S = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

25. Докажите, что стороны вписанного прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

Ответ. $\sqrt{2(a^2 - S)}$.

26. Строим высоту CH треугольника ABC. Пусть $[HB_1]$ — перпендикуляр к стороне AC, а $[HA_1] \perp [BC]$. Тогда около четырехугольника HB_1CA_1 можно описать окружность, диаметром которой служит $|CH| = h$. По теореме синусов $|A_1B_1| = h \sin \widehat{C}$. Докажите далее, что $\widehat{BCH} = \widehat{ACO}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $[CO] \perp [A_1B_1]$ и $S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2}|CO| \cdot |A_1B_1|$,

$$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} R \cdot h \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} \frac{c}{2 \sin \widehat{C}} \cdot h \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ch}{2},$$

т. е. $S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

§ 9. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

1. Пусть $|AB| = c$, $|BC| = a$, $c > a$. Тогда $\widehat{C} > 75°$, $\widehat{B} < 30°$. Постройте высоту треугольника $|CC_1| = h_c$. Заметим, что $h_c < \frac{a}{2} < \frac{c}{2}$, т. е. $2h_c < c$, что противоречит условию задачи. Установите невозможность соотношения $c < a$. Остается $c = a$ и $\widehat{C} = 75°$.

2. Пусть точка M симметрична O относительно (BC). Треугольник OMB равносторонний; $\widehat{AOB} = 150°$, $\widehat{BOM} = 60° \Longrightarrow \widehat{AOM} = 150°$, $|AM| = |AB|$, и треугольник AMB равнобедренный, $AMB = 80°$. Из точек M и C отрезок AB виден под равными углами; значит, около четырехугольника $ABMC$ можно описать окружность. Так как $\widehat{MAB} = 20°$, то и $\widehat{MCB} = 20°$, а в силу симметрии $\widehat{BCO} = 20°$, следовательно, $\widehat{ACO} = 60°$.

3. Четырехугольник $ABCE$ — равнобедренная трапеция, следовательно, треугольник CED равносторонний;

$|CE| = 2a$, $S_{ABCDE} = S_{ABCE} + S_{CED}$;

$$S_{ABCDE} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{3}.$$

$$S_{ABCDE} = \frac{7}{4} a^2 \sqrt{3}.$$

6. $c^2(a^2 + b^2) = (a^2 - b^2)^2$.

7. $\frac{a}{2}$.

8. Пусть M_1 — середина медианы CD (рис. 241), тогда $|B_1M_1| = |M_1A_1| = \frac{c}{4}$, $|CM_1| = \frac{m_c}{2}$, $|M_1G| = \frac{m_c}{6}$, где $m_c = |CD|$. Но $|B_1M_1| \cdot |M_1A_1| = |GM_1| \cdot |M_1C|$.

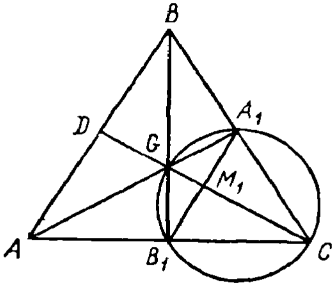


Рис. 241

Следовательно, $\frac{c^2}{16} = \frac{m_c^2}{12}$.

Но $m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2$, поэтому

$$\frac{3}{4}c^2\,\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \text{ и } c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$10\cdot(a^2 + b^2 - c^2)(a + b) = 2ab^2.$$

11. $\frac{|AN|}{|NB|} = \frac{|CA|\cdot|\cos\varphi|}{|CB|\cdot|\cos\psi|}$.

12. 1) Равнобедренный ($a = b$).

2) Прямоугольный ($\hat{C} = 90°$).

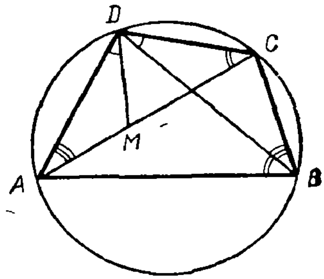


Рис. 242

13. Пусть M, N, P, Q соответственно середины отрезков AO, BO, DO, BC. Докажите, что $\triangle MNQ \cong \triangle MOP$. Треугольник MQP равнобедренный с углом при вершине 60°. (Другое решение: $|PQ| = |MQ| = \frac{1}{2}|BC|$, $|MP| = \frac{1}{2}|AD| \Longrightarrow |PQ| = |MQ| = |MP|$.)

15. В двух треугольниках биссектрисы углов являются высотами, значит, треугольники равнобедренные и углы при основаниях конгруэнтны.

16. Постройте угол ADM, конгруэнтный углу BDC, $M \in [AC]$ (рис. 242). Замечаем, что

$$\triangle AMD \sim \triangle BCD \Longrightarrow \frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DB|},\ |AM| = \frac{|BC|\cdot|AD|}{|DB|},$$

$$\triangle MDC \sim \triangle ADB \Longrightarrow \frac{|MC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|},\ |MC| = \frac{|AB|\cdot|DC|}{|DB|}.$$

Но $|AM| + |MC| = |AC| \Rightarrow |AC|\cdot|BD| = |BC|\cdot|AD| + |AB| \times$ $\times\ |DC|$.

18. Обозначим $|AC| = |CB| = a$, $|CD| = d$, $|AD| = m$, $|DB| =$ $= n$. Построим $[CH] \perp [AB]$ ($H \in [AB]$).

Тогда $|HB| = |AH| = \frac{m+n}{2}$, $|DH| = \frac{|n-m|}{2}$.

Из прямоугольных треугольников ACH и DCH запишем:

$$\left.\begin{aligned} |CH|^2 &= a^2 - \left(\frac{m+n}{2}\right)^2, \\ |CH|^2 &= d^2 - \left(\frac{n-m}{2}\right)^2, \end{aligned}\right\} \Longrightarrow d^2 = a^2 - mn.$$

19. Пусть O — центр описанной, а K — вписанной в треугольник ABC окружности, $[CM]$ — отрезок биссектрисы угла C, где точка M принадлежит описанной окружности (рис. 243).

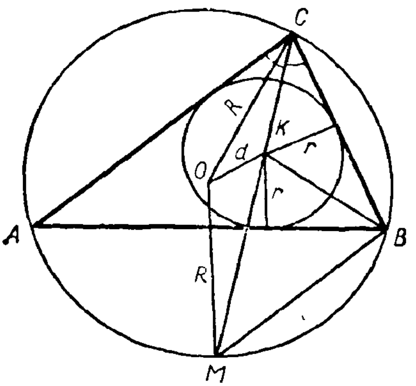


Рис. 243

Для $\triangle MOC$ $d^2 = R^2 - |CK| \cdot |KM|$ (согласно задаче 18).

В $\triangle MKB$ $\widehat{MKB} = \widehat{MBK} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow |MK| = |MB|$, но $|MB| = 2R \sin\frac{\widehat{C}}{2}$.

Так как $|CK| = \frac{r}{\sin\frac{\widehat{C}}{2}}$, то $d^2 = R^2 - 2Rr$.

20. Около треугольника ABC опишем окружность. Пусть (CC_1) пересекает окружность в точке D. Тогда

$$\triangle ACC_1 \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{|CC_1|}{|CB|} = \frac{|AC|}{|CD|} \text{ или } \frac{|CC_1|}{|CB|} = \frac{|AC|}{|CC_1| + |C_1D|},$$

$$|CC_1|^2 + |CC_1| \cdot |C_1D| = |CB| \cdot |AC|.$$

Но $|CC_1| \cdot |C_1D| = |AC_1| \cdot |C_1B| \Rightarrow |CC_1|^2 = |CB| \cdot |AC| - |AC_1| \times \times |C_1B|$.

21. (Рис. 244.) $c = \rho\frac{\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}} + 2\rho + \rho\frac{\cos\frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{B}}{2}}$ и $c = r\frac{\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}} +$

$$+ r\frac{\cos\frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{B}}{2}} \Rightarrow c = 2\rho + \rho\left(\frac{\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}} + \frac{\cos\frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{B}}{2}}\right),$$

$$\text{но } \frac{\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}} + \frac{\cos\frac{\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{B}}{2}} = \frac{c}{r} \Rightarrow c = 2\rho + \frac{\rho c}{r}.$$

27. Рассмотрев равнобедренный треугольник ABC ($|AB| = |AC| = 1$) с углом $\widehat{A} = \alpha$ (рис. 245). Постройте перпендикуляры: через точку A к $[BC]$, а через точку B к (AC).

Так как $|BD| = |DC| = \sin\frac{\alpha}{2}$, $|AE| = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, а $|CD| \cdot |CB| = |CA| \cdot |CE|$, то $2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 1 \cdot (1 - \cos\alpha)$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

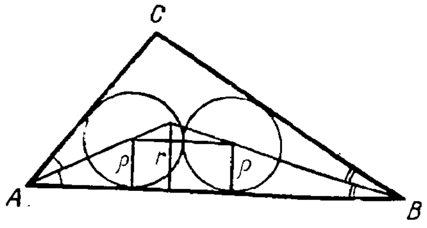


Рис. 244

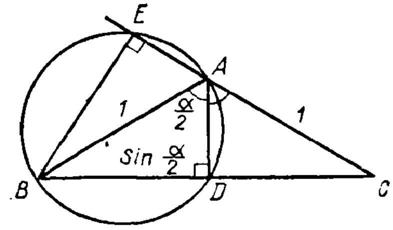


Рис. 245

(Для $\alpha < 90°$ вывод несколько видоизменяется.)

28. Воспользуйтесь теоремой косинусов и решением задачи 27.

30. Воспользуйтесь соотношениями задачи 29.

31. Воспользуйтесь соотношениями $S = pr$, $r = (p - a)\ \mathrm{tg}\,\frac{\widehat{A}}{2}$, формулой Герона для вычисления площади треугольника (p — полупериметр, r — радиус круга, вписанного в треугольник).

33. 1. Воспользуйтесь соотношением 1) задачи 29. Сделайте замену: $c = 2R\sin\widehat{C}$, $a = 2R\sin\widehat{A}$, $b = 2R\sin\widehat{B}$.

2. Соотношение 1) задачи 33 примените для углов треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной в данный треугольник окружности (рис. 246, *а*).

3. Соотношение 1) задачи 33 примените для углов треугольника, вершинами которого являются основания высот данного треугольника (рис. 246, *б*).

36. Из равенства $\mathrm{tg}\,\widehat{A}\cdot\mathrm{tg}\,\widehat{B} = 2$ следует, что углы A и B острые. Пусть H — точка пересечения высот, а C_1 — основание высоты к стороне AB. Тогда

$$|HC_1| = |AC_1|\,\mathrm{ctg}\,\widehat{B} = |AC|\cos\widehat{A}\,\frac{\mathrm{tg}\,\widehat{A}}{2} = \frac{1}{2}|AC|\sin\widehat{A} = \frac{|CC_1|}{2}.$$

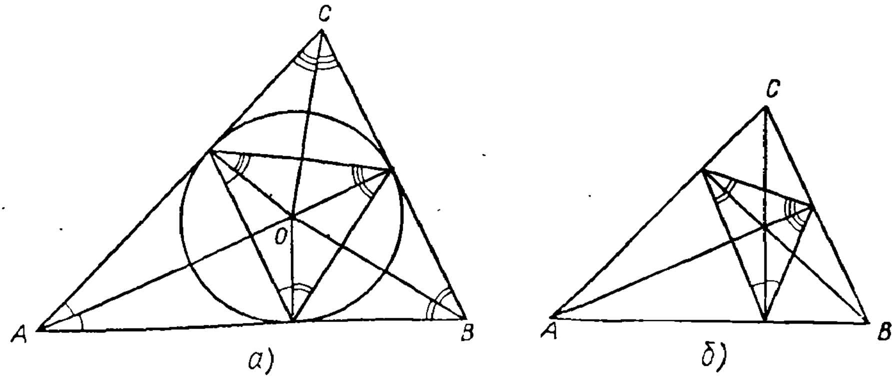


Рис. 246

§ 10. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

В приведенных ниже кратких решениях, доказательство обратного утверждения в ряде случаев опускается.

1. Окружность без двух точек, получаемая из данной гомотетией с центром в середине отрезка AB и коэффициентом $\frac{1}{3}$.

2. Средняя линия MN треугольника ABC, параллельная стороне AC, без ее концов.

3. Треугольник, определяемый средними линиями треугольника ABC, без его границы.

4. Две прямые, проходящие через точку пересечения прямых AB и CD, без этой точки.

5. Точки плоскости, не принадлежащие (принадлежащие) открытому кругу, построенному на $[AB]$ как на диаметре; все точки прямой AB исключаются.

6. Введем прямоугольную систему координат, в которой вершины квадрата $ABCD$ имеют координаты (a, a), $(a, -a)$, $(-a, -a)$, $(-a, a)$. Сумма квадратов расстояний от точки $P(x, y)$ до прямых AB и CD равна $(x-a)^2+(x+a)^2=2(x^2+a^2)$, а сумма квадратов расстояний до (BC) и (AD) равна $(y-a)^2+(y+a)^2=2(y^2+a^2)$. Имеем: $2(y^2+a^2)=2(x^2+a^2)$, откуда $x^2-y^2=0$, или $(x-y)(x+y)=0$. Искомое множество M есть пара прямых AC и BD.

7. Квадрат со стороной длины $c\sqrt{2}$, вершины которого принадлежат данным прямым.

8. Средняя линия MN треугольника ABC, параллельная основанию AB, без ее концов.

9. Обозначим центр данной окружности через O, радиус через R, а точку пересечения высот вписанного треугольника ABC через H. Пусть сторона AB в треугольнике ABC фиксирована. Имеем: $\widehat{AHB}=180^\circ-\widehat{ACB}$, так что при переменной вершине C точка H описывает окружность, симметричную данной относительно AB. Все такие окружности радиуса R, пересекающие данную, лежат в круге радиуса $3R$ с центром O.

10. Опишем окружность радиуса R около четырехугольника $OPCQ$. Согласно теореме синусов $2R=\frac{d}{\sin(\widehat{AOB})}$ — const, причем $|OC|=2R$. Искомое множество M есть общая часть окружности с центром O и радиусом $\frac{d}{\sin(\widehat{AOB})}$ и угла AOB.

11. Если C_1D_1 — другая секущая, а точка P_1 делит $[C_1D_1]$ в данном отношении k, то из подобия треугольников BCD и BC_1D_1 и равенства $|CP|:|PD|=|C_1P_1|:|P_1D_1|$ следует, что в подобии, определяемом этими треугольниками, $P\to P_1$, поэтому $\widehat{CPB}=\widehat{C_1P_1B}$. Отсюда следует, что множество M точек P есть окруж-

ность, проходящая через точки A и B, радиус которой зависит от k.

12. Пусть PC — биссектриса угла APB, $C \in [AB]$ (рис. 247). Обозначим $|BP| = a$, $|AP| = ka$, $|PC| = l$, $\widehat{PCB}=\alpha$, $|CB| = c$. Тогда $|AC| = kc$, а по теореме косинусов в треугольнике ABP имеем:

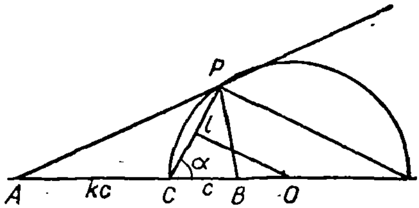


Рис. 247

$$\cos \widehat{B} = \frac{(k+1)^2 c^2 + a^2 - k^2a^2}{2(k+1)ac} = \frac{(k+1)c^2 - (k-1)a^2}{2ac}.$$

По той же теореме в $\triangle PBC$: $l^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} = k(a^2 - c^2)$. Но $\cos\alpha = \frac{c^2 + l^2 - a^2}{2lc}$, откуда $\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{2kc}{k-1}$, т. е. $l = 2R\cos\alpha$,

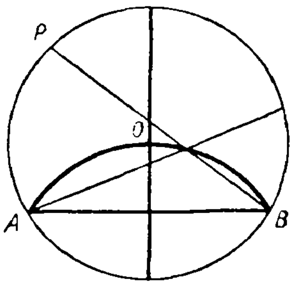


Рис. 248

где $R = \frac{kc}{k-1}$, $k > 1$. Значит, точка P принадлежит окружности радиуса R с центром O, принадлежащим (AB), и проходящей через точку C.

13. Объединение хорды AB, перпендикулярного к ней диаметра и дуги AOB окружности, где O — центр данной окружности (рис. 248).

14. Из условия задачи следует равенство:

$$|PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC| = |PC| \cdot |AB|.$$

Согласно теореме, обратной теореме Птолемея (см. задачу § 9, 16), $BCAP$ — вписанный четырехугольник с диагоналями AB и PC. Поэтому искомое множество точек есть дуга AB окружности, описанной около треугольника ABC.

15. Введем прямоугольную систему координат, в которой вершины квадрата имеют координаты (a, a), $(-a, a)$, $(a, -a)$, $(-a, -a)$. Тогда сумма квадратов расстояний от точки (x, y) до сторон квадрата равна: $(a+x)^2 + (a-x)^2 + (a+y)^2 + (a-y)^2 = c^2 = \text{const}$. Отсюда $x^2 + y^2 = \frac{c^2}{2} - 2a^2 = R^2$, следовательно, M есть пересечение квадрата и окружности радиуса R с центром в центре квадрата при условии, что $c > 2a$.

16. Если O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, то $\widehat{AOB} = 90° + \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Поэтому множество M состоит из двух дуг двух окружностей.

17. См. задачу 10.

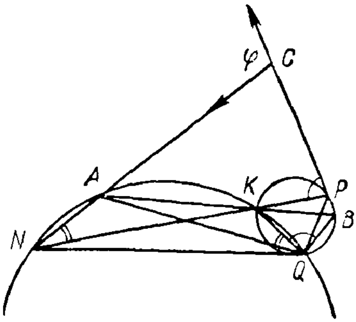


Рис. 249

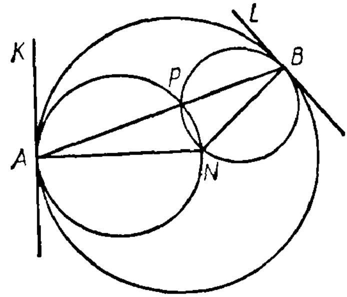


Рис. 250

18. Рассмотрите подобие с центром Q, отображающее точку B на точку A (рис. 249). Это подобие отображает точку P на точку N. Угол φ поворота этого подобия равен углу BQA. Но угол между $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{AN}$ также равен φ. Следовательно, точка Q принадлежит окружности ABC.

19. Обозначим через (KA) и (LB) касательные к данной окружности в точках A и B (рис. 250), а через N вторую точку пересечения окружностей радиусов r_1 и r_2, касающихся (AK) и (LB) в точках A и B соответственно и проходящих через точку P. Тогда $\widehat{PNA} = \widehat{PAK}$, а $\widehat{PNB} = \widehat{PBL} = \widehat{PAK}$. Следовательно, $\widehat{ANB} = 2\widehat{ABL}$, т. е. M есть окружность. При этом $2r_1 = \dfrac{|AP|}{\sin \widehat{ANP}}$, $2r_2 = \dfrac{|PB|}{\sin \widehat{PNB}}$, откуда $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|AP|}{|PB|}$. (Из окружности следует исключить три точки.)

20. Точки O, A, B, C, P (рис. 251) принадлежат окружности диаметра $[OP]$. Отсюда $\widehat{BCA} = \widehat{(a,\, b)}$, $\widehat{ABC} = \widehat{(a,\, c)}$, $\widehat{BAC} = \widehat{(b,\, c)}$. Так

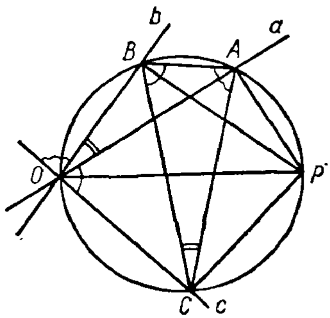


Рис. 251

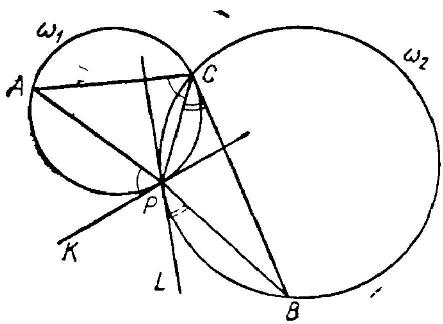


Рис. 252

как $\triangle\ ABC$ имеет фиксированные углы и данную площадь, то он конгруэнтен фиксированному треугольнику. Поэтому и описанная около него окружность имеет фиксированный диаметр d, причем $|OP| = d$. Таким образом, M есть окружность с центром в точке O радиуса d.

21. Обозначим окружность ACP через ω_1, BCP — через ω_2 (рис. 252). Пусть (KP) — касательная к окружности ω_1, а (LP) — касательная к окружности ω_2 и угол KPL постоянен. Тогда $\widehat{ACP} = \widehat{APK}$, $\widehat{BCP} = \widehat{BPL}$, поэтому $\widehat{APB} = \widehat{APK} + \widehat{KPL} + \widehat{LPB} = \widehat{ACP} + \widehat{PCB} + \widehat{KPL} = \widehat{ACB} + \widehat{KPL} = \text{const}$, т. е. M есть окружность без точек A и B.

22. Дана хорда AB. Возьмем две параллельные хорды AC и BD, и пусть P и Q—их середины (рис. 253). Тогда множество середин всех хорд, параллельных $[AC]$ и пересекающих $[AB]$, есть отрезок PQ, проходящий через центр O окружности. Если прямые AC описывают пучок, то и прямые PQ тоже, притом углы APO и OQB всегда прямые. Следовательно, M есть множество точек кругов, полученных из данного гомотетиями с центрами A и B и коэффициентами $\frac{1}{2}$, кроме точек, принадлежащих пересечению этих кругов.

23. Возьмем точку $P \in (AC)$, равноудаленную от прямых BC и AB, и точку Q, равноудаленную от прямых AC и AB. Тогда (PQ)— искомая прямая. В самом деле, пусть $S \in (PQ)$, $|PS| = h$ и расстояния от точки S до (AC), (BC) и (AB) равны h_1, h_2, h_3, а от точек P и Q до (AB) равны h_0 и H_0 соответственно. Тогда $h_1 = h \sin \varphi_1$, $h_2 = (|PQ| - h) \sin \varphi_2$, $h_3 = h_0 + h \sin \varphi_3$, где $\varphi_1 = \widehat{QPC}$, $\varphi_2 = \widehat{PQC}$, $\varphi_3 = (\widehat{(PQ), (AB)})$. Имеем: $h_1 + h_2 - h_3 = h(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3) + |PQ| \sin \varphi_2 - h_0$. При $h = h_0$ и при $h = |PQ|$ имеем: $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, откуда $\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3 = 0$ и $|PQ| \sin\varphi_2 - h_0 = 0$. Поэтому $h_1 + h_2 - h_3 = 0$, когда $S \in |PQ|$.

24. Пусть C — вторая точка пересечения прямой (AP) с окружностью (рис. 254). Так как $|PT|^2 = |PA| \cdot |PC|$, то $|PB| = |PC|$, поэтому $\widehat{PCB} = \widehat{CBP}$, и, следовательно, $\widehat{APB} = 2ACB$ —

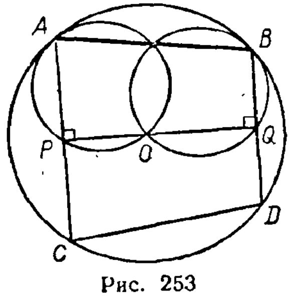


Рис. 253

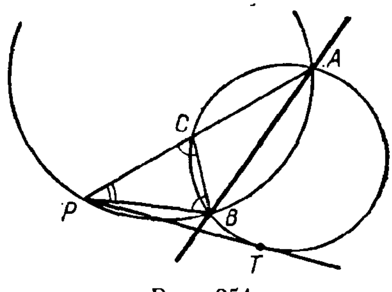


Рис. 254

$-\pi = \text{const}$. Таким образом, $\{M\}$ есть объединение дуги окружности, опирающейся на хорду AB, расположенной вне данной окружности, и двух лучей принадлежащих прямой AB, с началом в точках A и B, расположенных вне данной окружности.

§ 11. НЕРАВЕНСТВА

1. Достройте треугольник до параллелограмма.

2. Если $\widehat{A} = \widehat{B}$, то $|CM| = |CL|$.

Пусть $\widehat{A} < \widehat{B} \Longrightarrow \frac{2\widehat{B}+\widehat{C}}{2} > \frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = 90°$,

$$\text{но } \widehat{MLC} = \widehat{B} + \frac{\widehat{C}}{2} \Longrightarrow \widehat{MLC} > 90° \text{ и } |CM| > |CL|.$$

3. Пусть $(CD_0) \perp (CD)$ и DD_0—диаметр. Тогда $|CD|^2 + |CD_0|^2 = |DD_0|^2$. Если $M = (AB) \cap (CD)$ лежит вне окружности, то $|AB| < |CD_0|$, а если внутри, то $|AB| > |CD_0|$. Учитывая написанное выше равенство, получаем требуемый результат.

4. Показать, что длина проекции $[M_1N_1]$ отрезка MN на прямую CD больше длины отрезка CD.

5. Заметим, что $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leqslant 2$.

Обозначим a и b длины катетов прямоугольного треугольника ABC, c — длину гипотенузы, $\widehat{A} = \alpha$, тогда $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, следовательно, $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a+b}{c} \leqslant \sqrt{2}$.

6. Обозначим $|AM| = b_0$, $|AS| = a$, $|MB_0| = a_0$, $|QB| = b$, где $(AM) \parallel (OQ)$, $(MB) \parallel (OS)$, $A \in [OS)$, $B \in [OQ)$ (рис. 255). Так как $\triangle ASM \sim \triangle MBQ$, то $\frac{a}{b_0} = \frac{a_0}{b}$, или $ab = a_0b_0$. Далее, $S_{OSQ} = S_{OAMB} + (ab + a_0b)\sin\alpha$. Но $ab_0 + a_0b \geqslant \sqrt{2aba_0b_0} = 2a_0b_0$, причем равенство достигается, когда $ab_0 = a_0b$. Сравнивая с первым равенством, получаем $a = a_0$. Таким образом, площадь $\triangle OSQ$ минимальна, когда $|OA| = |AS|$, т. е. M — середина отрезка SQ.

7. $m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$,

$$m_a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = a^2 + \frac{b^2}{4},$$

$$\frac{m_a^2}{m_a^2} = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2}{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^2+16b^2}{4a^2+b^2}\right) > \frac{1}{4},$$

или $\frac{m_a}{m_b} > \frac{1}{2}$. Аналогично $\frac{m_b}{m_a} > \frac{1}{2}$.

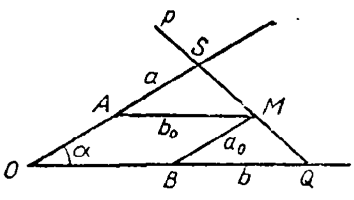


Рис. 255

8. По теореме косинусов в треугольниках ABC и BCC_1, где $[CC_1]$ — биссектриса угла C, имеем:

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+\left(\frac{ca}{a+b}\right)^2-l_c^2}{2a\left(\frac{ca}{a+b}\right)},$$

откуда $l_c^2 = |CC_1|^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2-c^2)$. Аналогично
$l_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}\cdot((b+c)^2-a^2)$, $l_b^2 = \frac{ac}{(a+c)^2}((a+c^2)-b^2)$.

Складывая, получаем:

$$l_a^2+l_b^2+l_c^2 = p\left(\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\frac{2ab}{a+b}+\left(1-\frac{b}{a+c}\right)\frac{2ac}{a+c}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\frac{2bc}{b+c}\right),$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Учитывая, что $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$, $\frac{2bc}{b+c}\leqslant\frac{b+c}{2}$, $\frac{2ac}{a+c}\leqslant\frac{a+c}{2}$, получаем:

$$l_a^2+l_b^2+l_c^2\geqslant\frac{p}{2}((a+b-c)+(a+c-b)+(b+c+a)) = p^2.$$

9. Имеем: $S = rp$, где S — площадь треугольника. По формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Отсюда
$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Но по свойству среднего арифметического трех чисел $(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$. Откуда $r^2\leqslant\frac{p^2}{27}$, или $r\leqslant\frac{p}{3\sqrt{3}}$. Следовательно, $S = rp\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

10. По формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{h^2Aa^2}{4}$. Далее, $a^2\geqslant a^2-(b-c)^2 = (a+c-b)(a+b-c) = 4(p-b)(p-c)$. Отсюда $h_A = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}}\leqslant\sqrt{p(p-a)}$.

11. Согласно задаче 8 имеем: $l_a^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2-a)^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}\frac{(b+c+a)}{2}\frac{(b+c-a)}{2} = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$. Но $4bc\leqslant (b+c)^2$. Поэтому $l_a^2\leqslant p(p-a)$.

12. По теореме синусов имеем: $\sin\widehat{B} = \frac{b}{a}\sin\widehat{A}$. Далее, $h_a = c\sin\widehat{B} = \frac{cb}{a}\sin\widehat{A}$, $h_b = c\sin\widehat{A}$, откуда $a+h_a-b-h_b = a+\frac{cb}{a}\sin\widehat{A}-b-c\sin\widehat{A} = \frac{a-b}{a}(a-c\sin\widehat{A}) = \frac{a-b}{a}(a-h_b)\geqslant 0$, поскольку $a>b$, $a\geqslant h_b$.

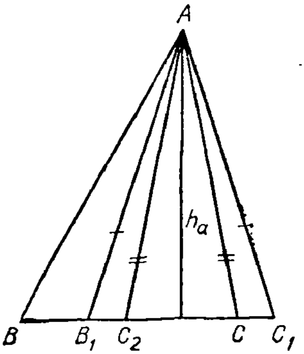


Рис. 256

13. $S=\frac{bc\sin\alpha}{2}\leqslant\frac{bc}{2}$, где α — угол между сторонами $[AB]$ и $[AC]$ треугольника ABC и $|AB|=c$, $|AC|=b$. Но $bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}$.

Поэтому $S\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}$.

14. Углы A и B — острые. Если $\widehat{A}=90°-\widehat{B}$, то $\operatorname{tg}\widehat{A}=\operatorname{ctg}\widehat{B}$. Если $\widehat{A}>90°-B$, т. е. треугольник ABC остроугольный, то $\operatorname{tg}\widehat{A}>\operatorname{ctg}\widehat{B}$, или $\operatorname{tg}\widehat{A}\times\operatorname{tg}\widehat{B}>1$. Если же $\widehat{A}<90°-\widehat{B}$, т. е. треугольник ABC тупоугольный, то $\operatorname{tg}\widehat{A}<\operatorname{ctg}\widehat{B}$, или $\operatorname{tg}\widehat{A}\cdot\operatorname{tg}\widehat{B}<1$.

15. Пусть $\triangle AB_1C_1$ равнобедренный (рис. 256) и $\widehat{B_1AC_1}=\widehat{A}$, $B_1, C_1\in(BC)$. Построим равнобедренный $\triangle ACC_2$. Тогда $[AB_1]$ — биссектриса в $\triangle ABC_2$. Так как $BB_1A>90°$, то согласно задаче 2 $|BB_1|>|B_1C_2|$, откуда $a=|BC|>|B_1C_1|$. Но $|B_1C_1|=2h_a\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}$, поэтому $a>2h_a\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}$. Если же $\widehat{C_1}=\widehat{C}$, то $a=2h_a\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}$.

16. Обозначим $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$. Площадь $\triangle ABC$ равна $S=\frac{ab}{2}=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)r$, откуда $r=\frac{ab}{a+b+c}$.

Кроме того, $R=\frac{c}{2}$. $R+r=\frac{ab}{a+b+c}+\frac{c}{2}=\frac{2ab+ac+bc+c^2}{2(a+b+c)}=$

$$=\frac{2ba+bc+ac+a^2+b^2}{2(a+b+c)}=\frac{(a+b)^2+c(a+b)}{2(a+b+c)}=\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}=\sqrt{2S}.$$

17. В $\triangle AA_1C$, где $[AA_1]$ — биссектриса угла A, имеем:

$$|AC|=b,\ |A_1C|=\frac{ab}{b+c},\quad |AA_1|=l_a=\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}$$

(см. задачу 8). Здесь $a=|BC|$, $c=|AB|$. По теореме синусов $\frac{l_a}{\sin\widehat{C}}=\frac{|A_1C|}{\sin\widehat{A}}$.

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2}=\frac{\sin\widehat{C}\cdot|A_1C|}{l_a}=\frac{ab\sin\widehat{C}}{(b+c)\,l_a}=\frac{2S}{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}},$$

где S — площадь $\triangle ABC$. Используя формулу Герона, получаем:

$\sin\frac{\widehat{A}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Далее, $b\sin\frac{\widehat{A}}{2}\leqslant|CA_1|=\frac{ab}{b+c}$, или $\sin\frac{\widehat{A}}{2} \leqslant \frac{a}{b+c}$. Аналогично, $\sin\frac{\widehat{B}}{2} \leqslant \frac{b}{a+c}$, $\sin\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{c}{a+b}$.

Отсюда $\sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$

$$= \frac{abc}{c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)+2abc} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{abc}{c(2ab)+b(2ac)+a(2bc)+2abc} = \frac{1}{8}.$$

18. Предположим, что $a \geqslant b \geqslant c$, где $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Используя формулы задачи 17, получаем: $\sin^2\frac{2\widehat{A}}{2} + \sin^2\frac{\widehat{B}}{2} + \sin^2\frac{\widehat{C}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} + \frac{b^2-(a-c)^2}{4ac} + \frac{c^2-(a-b)^2}{4cb} - \frac{3}{4} = \frac{a(a^2-(b-c)^2)+b(b^2-(c-a)^2)+c(c^2-(a-b)^2)-3abc)}{4abc} =$

$$= \frac{a^3+b^3+c^3+3abc-a(b^2+c^2)-b(a^2+c^2)-c(a^2+b^2)}{4abc} =$$

$$= \frac{(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)}{4abc} \geqslant 0.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} \geqslant 0.$$

Из основного тождества тригонометрии получаем:
$\cos^2\frac{\widehat{A}}{2} + \cos^2\frac{\widehat{B}}{2} + \cos^2\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{9}{4}$. Но $3\left(\cos^2\frac{\widehat{A}}{2} + \cos^2\frac{\widehat{B}}{2} + \cos^2\frac{\widehat{C}}{2}\right) \geqslant \left(\cos\frac{\widehat{A}}{2} + \cos\frac{\widehat{B}}{2} + \cos\frac{\widehat{C}}{2}\right)^2$. Отсюда $\cos\frac{\widehat{A}}{2} + \cos\frac{\widehat{B}}{2} + \cos\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19. Обозначим $45° - \frac{\widehat{A}}{4} = \alpha$, $45° - \frac{\widehat{B}}{4} = \beta$, $45° - \frac{c}{4} = \gamma$. Имеем $\alpha+\beta+\gamma = 90°$, $\gamma = 90° - (\alpha+\beta)$. Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 257), у которого $\widehat{A_1} = \alpha$, $\widehat{B_1} = \beta$, $|A_1B_1| = c$, $|B_1C_1| = a$, $|C_1A_1| = b$. Если S — площадь $\triangle A_1B_1C_1$, то $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$, $\sin\beta = \frac{2S}{ac}$. Кроме того, по теореме косинусов $\cos(\alpha+\beta) = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} \geqslant 0$.

Используя формулу Герона, получаем: $\frac{1}{8} - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{8} - \sin\alpha\sin\beta\sin(90° - (\alpha+\beta)) = \frac{1}{8} - \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) =$

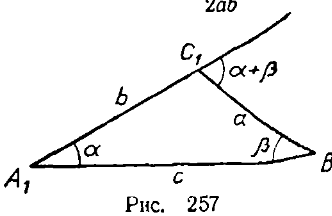


Рис. 257

$$= \frac{1}{8} - \frac{4S^2(c^2 - a^2 - b^2)}{2a^2b^2c^2} =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2 - (c^2 - a^2 - b^2)((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}{8a^2b^2c^2}.$$

Поскольку $(c^2 - a^2 - b^2)((a+b)^2 - c^2) \leqslant \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2 + (a+b)^2 - c^2}{2}\right)^2 = a^2b^2$, то мы получаем:

$$\frac{a^2b^2c^2 - (c^2 - a^2 - b^2)((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a^2 - b)^2)}{8abc} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a^2b^2c^2 - a^2b^2(c^2 - (a-b)^2)}{8a^2b^2c^2} = \frac{(a-b)^2}{8c^2} \geqslant 0$$

20. По теореме косинусов в $\triangle ABC$ имеем: $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ca}$, $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, где a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$. Положим $c \leqslant b \leqslant a$. Имеем:

$$\frac{1}{8} - \cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} = \frac{a^2b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8a^2b^2c^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2 - c^2) + c^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{8a^2b^2c^2} \geqslant 0.$$ Неравенство

$(a^2 - b^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2) + c^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) \geqslant 0$ можно переписать в виде: $c^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 + b^2(a^2 + c^2 - b^2)^2 + a^2(c^2 + b^2 - a^2)^2 \geqslant$ $\geqslant 3a^2b^2c^2$, откуда $\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2} + \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \cos^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{C} \geqslant \frac{3}{4}$.

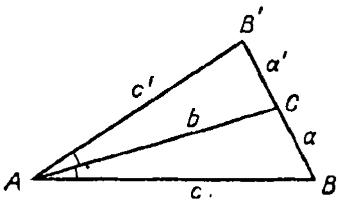


Рис. 258

21. Неравенство вытекает из последнего неравенства задачи 20, если учесть основное тождество тригонометрии.

22. Построим $\triangle AB'C$ (рис. 258), у которого $\widehat{CAB'} = \widehat{A}$ и $B' \in (BC)$. $[AC]$ — биссектриса угла BAB'. Пусть $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $a' = |B'C|$, $c' = |AB'|$. По свойству биссектрисы $\triangle ABB'$ имеем: $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$, или $\frac{a + a'}{c + c'} = \frac{a}{c}$. Далее, $b^2 = c'c\left(1 - \left(\frac{a + a'}{c + c'}\right)^2\right) = cc'\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)$ (см. задачу 8). Отсюда

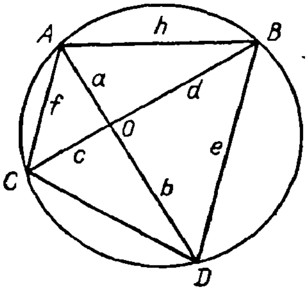


Рис. 259

$c' = \frac{b^2c}{c^2 - a^2}$, $a' = \frac{b^2a}{c^2 - a^2}$. Получаем: $\cos 2\widehat{A} = \frac{c^2 + c'^2 - (a + a')^2}{2cc'} = 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) - 1 = 2\cos^2 \widehat{A} - 1$. Аналогично $\cos 2\widehat{B} = 2\cos^2 \widehat{B} - 1$, $\cos 2\widehat{C} = 2\cos^2 \widehat{C} - 1$. Но $\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C} \geqslant \frac{3}{4}$, откуда $\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} \geqslant \frac{6}{4} - 3 = -\frac{3}{2}$.

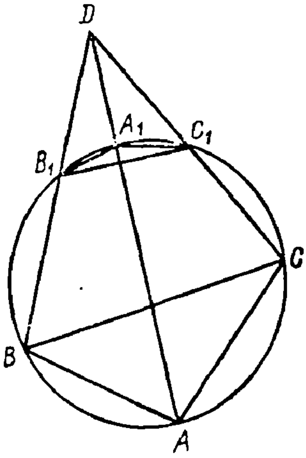


Рис. 260

23. Обозначим $a = |OA|$, $b = |OD|$, $c = |OC|$, $d = |OB|$, $e = |BD|$, $f = |AC|$, $h = |AB|$ (рис. 259). Здесь O — точка пересечения прямых AD и BC. Так как $\triangle AOC \sim \triangle BOD$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. По свойству секущих $ab = cd$. Отсюда $a = c$, $b = d$. Поскольку угол BOD прямой, то по теореме Пифагора $e^2 = 2d^2$. Аналогично $f^2 = 2a^2$. Таким образом, $e^2 + f^2 = 2(a^2 + d^2) = 2h^2$ или $h^2 = \frac{e^2 + f^2}{2} \geqslant ef$, т. е. $|AB|^2 \geqslant |AC| \cdot |BD|$.

24. Имеем согласно задаче 9: $S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, где $p = \frac{a + b + c}{2}$. Но $(a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Отсюда $S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$.

25. Через точки A, B, C проведем окружность и обозначим через A_1, B_1, C_1 ее точки пересечения с прямыми (AD), (BD) и (CD) (рис. 260). Получаем подобные треугольники: $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D$, $\triangle BCD \sim \triangle B_1C_1D$, $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D$. Из подобия этих пар треугольников имеем:

$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1D|} = \frac{|AB|}{|AD|},\quad \frac{|B_1D|}{|B_1C_1|} = \frac{|DC|}{|BC|},\quad \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD| \cdot |BC|};$$

$$\frac{|A_1C_1|}{|DC_1|} = \frac{|AC|}{|AD|},\quad \frac{|DC_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|BD|}{|BC|},$$

$$\frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|},\quad \frac{|A_1B_1| + |A_1C_1|}{|B_1C_1|} =$$

$$= \frac{|AB| \cdot |CD| + |AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} \geqslant \frac{|B_1C_1|}{|B_1C_1|} = 1.$$

При другом расположении данных точек решение видоизменяется.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

1. Выберем в плоскости два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Оба эти вектора ненулевые. Отложим их от некоторой точки O: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор. Отложив его от точки O, получим точку A: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Через точку A проведем прямые, параллельные прямым OE_1 и OE_2, пересекающие (OE_2) и (OE_1) в точках A_2 и A_1 (рис. 261). Из правила сложения векторов следует равенство: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Но вектор $\overrightarrow{OA_1}$ коллинеарен вектору $\vec{e}_1$. Поэтому $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{e}_1$. Аналогично можно записать $\overrightarrow{OA_2} = \beta\vec{e}_2$. Таким образом, имеет место равенство:

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2. \tag{1}$$

Представление вектора $\vec{a}$ в виде суммы произведений неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ на числа α и β называют *разложением* вектора $\vec{a}$ по этим векторам. Заданные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ называют *базисными* или *координатными векторами*, а числа α и β — *координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$*.

Итак, каждый вектор плоскости разлагается в данном базисе, и это разложение приводит к координатам вектора. Докажем, что такое разложение является *единственным*, т. е. из равенства $\vec{a} = \alpha'\vec{e}_1 + \beta'\vec{e}_2$ при условии (1) следует $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$.

В самом деле, если $\vec{a} = \alpha'\vec{e}_1 + \beta'\vec{e}_2 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$, то, используя основные свойства действий над векторами, можно записать $(\alpha' - \alpha)\vec{e}_1 + (\beta' - \beta)\vec{e}_2 = 0$.

Если хотя бы один из коэффициентов в полученном равенстве отличен от нуля, то один из векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ отличается от другого множителем, например $\vec{e}_2 = -\dfrac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta}\vec{e}_1$, $\beta' - \beta \neq 0$. Но в таком случае вектор $\vec{e}_2$ коллинеарен вектору $\vec{e}_1$, что противоречит выбору этих векторов. Следовательно, $\beta'-\beta \neq 0$ ведет к противоречию. Аналогично $\alpha'-\alpha \neq 0$ ведет к противоречию. Остается $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, чем единственность разложения доказана.

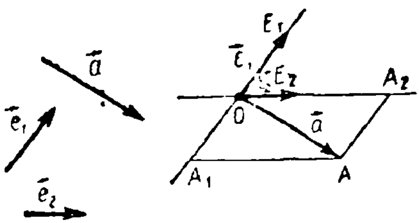


Рис. 261

Следует заметить, что каждая пара чисел α и β однозначно задает вектор относительно базиса $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ согласно равенству (1), т. е. относительно данного базиса пара чисел служит координатами определенного вектора.

Вместо записи (1) будем применять более короткую: $\vec{a}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2} = (\alpha;\ \beta)$ или еще короче: $\vec{a}=(\alpha;\ \beta)$, если все векторы рассматриваются относительно однозначно заданного базиса.

2. Рассмотрим операции сложения векторов и умножения вектора на число в координатах.

Вычислим координаты вектора $p\vec{a}+q\vec{b}$ по координатам векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и заданным числам p и q.

Пусть $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$. Тогда $p\vec{a}=p\,(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2)$, $q\vec{b}=q\,(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2)$, $p\vec{a}+q\vec{b}=(px_1+qx_2)\,\vec{e}_1+(py_1+qy_2)\,\vec{e}_2$. Таким образом,

$$p\vec{a}+q\vec{b}=(px_1+qx_2;\ py_1+qy_2). \tag{2}$$

Если $p=1$, $q=\pm 1$, то из (2) следует

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2).$$

Координаты суммы (разности) двух векторов равны суммам (разностям) одноименных координат данных векторов.

Если же $q=0$, то из (2) следует $p\vec{a}=(px_1;\ qy_1)$.

Координаты произведения вектора на число равны произведению одноименных координат этого вектора на данное число.

Замечание. Можно показать истинность более общей формулы:

$$p_1\vec{a}_1+p_2\vec{a}_2+\ldots+p_n\vec{a}_n=(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n;\ p_1y_1+p_2y_2+\ldots+p_ny_n), \tag{3}$$

где $\vec{a}_1=(x_1;\ y_1)$, $\vec{a}_2=(x_2;\ y_2)$, ..., $\vec{a}_n=(x_n;\ y_n)$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — произвольные числа.

II. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

1. Выберем в плоскости некоторую точку O и отложим от нее два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Если A — произвольная точка плоскости, то $\overrightarrow{OA}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$, где x и y — координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$.

Таким образом, точке A мы приписываем две координаты — *абсциссу* и *ординату* y, которые совпадают с первой и второй координатой вектора $\overrightarrow{OA}$ при раз и навсегда фиксированной точке O. Эту точку называют *началом координат*, а направленные прямые OE_1 и OE_2, где $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, — *осями координат*. Направленную прямую OE_1 называют *осью абсцисс*, а направленную прямую OE_2 — *осью ординат*.

Точка O и базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ задают *общую декартову систему координат* (для точек) на плоскости.

В частном случае, когда $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = 90°$,

система координат называется *прямоугольной декартовой*.

Если точка A имеет координаты x и y, то записывают: $A\ (x;\ y)$.

2. Используем координаты точек для получения условия принадлежности трех точек одной прямой и вычисления отношения, в котором одна из точек делит отрезок с концами в двух других точках.

Рассмотрим три точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$, принадлежащие одной прямой. Имеем:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1),$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (x_2 - x_3;\ y_2 - y_3).$$

Но $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$. Поэтому имеет место система:

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = k\,(x_2 - x_3), \\ y_3 - y_1 = k\,(y_2 - y_3). \end{cases} \tag{4}$$

Совместность этой системы относительно k есть условие, необходимое и достаточное для принадлежности трех точек одной прямой.

Вместо системы (4) иногда пишут пропорцию

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \tag{5}$$

в предположении, что $x_2 - x_3 \neq 0$ и $y_2 - y_3 \neq 0$.

Из равенства $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$ следует:

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Отсюда можно вычислить вектор $\overrightarrow{OC}$, зная точки A и B и число k:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k}, \tag{6}$$

или в координатной форме

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}. \tag{7}$$

В частности, при $k = 1$ точка C совпадает с серединой отрезка AB. Поэтому координаты x_0, y_0 середины отрезка AB вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

III. ПОДОБИЯ ПЛОСКОСТИ

Напомним определение преобразования подобия.

Отображение плоскости на себя, при котором для любых двух точек A и B и их образов A_1 и B_1 выполняется равенство $|A_1B_1| = k|AB|$, где k — положительное число, называется преобразованием подобия плоскости с коэффициентом подобия k.

Если $k = 1$, подобие становится перемещением.

В дальнейшем, говоря о подобии, будем иметь в виду подобие, отличное от перемещения.

Всякое подобие можно представить композицией гомотетии (с произвольно заданным центром и с коэффициентом, равным коэффициенту подобия) *и перемещения.* Композиция гомотетии и перемещения первого рода есть подобие первого рода. Композиция гомотетии и перемещения второго рода есть подобие второго рода. Подобие первого рода сохраняет ориентацию плоскости, подобие второго рода меняет ее на противоположную.

Представление подобия композицией гомотетии и перемещения неоднозначно. Можно показать, что *всякое подобие первого рода есть либо гомотетия, либо композиция гомотетии и поворота с общим центром.* Этот общий центр есть *неподвижная точка подобия* и называется *центром подобия* первого рода. Представление подобия первого рода в виде композиции гомотетии и поворота с общим центром *единственное*, и эти два преобразования можно выполнять в любом порядке.

Подобие первого рода обладает тем свойством, что *угол между направлением луча и его образа постоянен для данного подобия.* Поэтому подобие первого рода однозначно задается своим центром, коэффициентом и углом поворота или центром и парой соответственных точек.

Всякое подобие второго рода можно представить однозначно в виде композиции гомотетии и симметрии, ось которой проходит через центр гомотетии. Такое представление подобия второго рода единственное. От перестановки компонентов композиции подобие не меняется. Центр гомотетии в этом случае является *неподвижной точкой подобия.*

Подобие второго рода задается однозначно центром и парой соответственных точек, лежащих на одном луче с началом в центре подобия.

ОГЛАВЛЕНИЕ