МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ОТДЕЛ
НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ
УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ УЧИТЕЛЕЙ

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

МОСКОВСКИЙ РАБОЧИЙ
1951

МОСКОВСКИЙ
ГОРОДСКОЙ ОТДЕЛ НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ИНСТИТУТ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ УЧИТЕЛЕЙ

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

(ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ УЧИТЕЛЕЙ)

МОСКОВСКИЙ РАБОЧИЙ
1951

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наша страна — родина всего нового, передового. Большевистская партия воспитывает в советских людях стремление непрерывно повышать свои идейно-теоретические знания, улучшать свою работу, постоянно совершенствоваться. Эти замечательные качества характеризуют и советское учительство.

Учителя московских школ, из года в год улучшая качество преподавания, накопили богатейший опыт учебно-воспитательной работы, ввели немало новых, более совершенных приемов, которые помогают учащимся лучше усваивать учебный материал.

Изучение и освоение передового педагогического опыта, широкое использование его в практике работы всех учителей является необходимым условием для дальнейшего улучшения учебной и воспитательной работы.

Помещаемые в сборнике статьи по математике освещают работу некоторых учителей московских школ. В тех классах, где они преподают, учащиеся глубоко и основательно знают математику и проявляют большой интерес к ее изучению. Опыт этих учителей — результат их многолетней повседневной заботы о совершенствовании своих знаний и мастерства, заботы о высоком уровне преподавания.

Например, работа преподавателя И. И. Смирнова „Исследование уравнений" освещает более чем десятилетний опыт преподавания им этого раздела математики в 10-х классах школы и составляет определенную законченную систему.

Статьи сборника интересны тем, что они дают ответы на многие вопросы преподавания математики в школе, часто возникающие в практической работе учителей, на семинарах преподавателей, на консультациях и т. д.

Большинство работ написано настолько конкретно, что опыт, изложенный в них, может быть непосредственно использован учителями математики в их практической работе. Таковы, например, статья заслуженного учителя РСФСР Ю. О. Гурвица: „Об улучшении преподавания геометрии в VI—VII классах школы", работа преподавателей К. С. Барыбина и А. К. Исакова „Вопросы и задачи по стереометрии", развивающие пространственное воображение учащихся.

В статьях, помещенных в настоящем сборнике, разумеется, нашла свое отражение только часть того многолетнего педагогического опыта, который накопился у преподавателей московских школ. Публикация этих работ послужит примером для многих других учителей, которым есть чем поделиться с массой советского учительства.

Выпуская настоящий сборник, Московский городской отдел народного образования и Московский институт усовершенствования учителей кладут начало широкому освещению передового опыта преподавания математики в школах Москвы.

Сборник „Математика в школе" окажет помощь учителям математики в дальнейшем улучшении качества преподавания, в повышении уровня знаний учащихся.

К. С. БАРЫБИН, А. К. ИСАКОВ,
преподаватели 255-й средней школы

ВОПРОСЫ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ, РАЗВИВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВООБРАЖЕНИЕ УЧАЩИХСЯ, И ЗАДАЧИ

(МНОГОГРАННИКИ)

В стабильном задачнике Рыбкина, в отделе „Многогранники", много задач на вычисление, но недостаточно задач конструктивного характера, где требуется подумать о построении чертежа, определить форму фигуры, установить геометрическую зависимость между элементами и т. п.

Задач на проведение сечений имеется десять — двенадцать, что недостаточно. На комбинации многогранников всего три-четыре, к тому же примитивного характера. Мало и таких задач, где искомым является линейный или двугранный угол, и совсем нет задач, где бы среди данных фигурировал двугранный угол при боковом ребре.

Чувствуется настоятельная потребность в задачах, где главное место занимала бы геометрическая сущность вопроса, а вычислительная сторона была бы возможно облегчена.

Предлагаемые вопросы и задачи можно использовать как материал для работы в классе, для контрольных работ и повторения.

I. ВОПРОСЫ

1. Каким наименьшим количеством плоскостей можно ограничить часть пространства со всех сторон?

2. Чему равняется отношение последовательных квадратных единиц метрической системы? То же для кубических.

3. При каких условиях наклонная призма равновелика прямой призме?

4. На какие многогранники разбивается параллелепипед диагональной плоскостью?

5. Чему равна сумма всех плоских углов n-угольной призмы?

6. Чему равна сумма двугранных углов n-угольной призмы?

7. Какие призмы называются равными? Найдите условие равенства призм.

8. Тот же вопрос для пирамид.

9. Какие многогранники называются подобными? Каким свойством обладают у них сходственные многогранные углы, ребра и диагонали?

10. Какой вид у диагональных сечений в: а) прямоугольном, б) наклонном параллелепипеде?

11. Может ли в наклонном параллелепипеде диагональное сечение быть прямоугольником?

12. Равны ли между собой диагонали в: а) прямоугольном, б) прямом, в) наклонном параллелепипедах?

13. Какого вида сечение, перпендикулярное к ребру, в: а) прямоугольном, б) прямом, в) наклонном параллелепипедах?

14. Будет ли сечение, перпендикулярное к боковому ребру параллелепипеда, перпендикулярно к боковой грани?

15. Если боковое ребро призмы образует равные углы с прилежащими сторонами основания, то что следует сказать о проекции этого ребра на плоскость основания?

16. Одна вершина верхнего основания призмы равно отстоит от всех вершин нижнего основания. Дайте чертеж для треугольной и четырехугольной призм.

17. а) Покажите на чертеже расстояние ребра куба от не пересекающейся с ним диагонали куба и б) докажите, что прямая, соединяющая середину ребра с серединой не пересекающейся с ним диагонали куба, перпендикулярна и к ребру и к диагонали.

18. Боковые ребра пирамиды равны: а) В какую точку основания проектируется ее вершина? б) будет ли такая пирамида правильной?

19. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания. Что из этого следует?

20. Может ли вершина треугольной пирамиды проектироваться вне ее основания, если боковые ребра ее равны между собой?

21. В основании пирамиды с равными боковыми ребрами лежит прямоугольный треугольник. Куда на основание спроектируется вершина пирамиды?

22. Могут ли боковые ребра пирамиды быть равными, если в основании ее лежит: а) прямоугольник, б) ромб, в) параллелограмм, г) трапеция?

23. В каком случае вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды?

24. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, будет ли такая пирамида правильной? Какой вывод из данного условия следует сделать?

25. Могут ли боковые грани пирамиды быть одинаково наклонены к основанию, если основанием служит: а) прямоугольник, б) ромб, в) трапеция, г) неправильный треугольник, д) многоугольник?

26. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. В основании пирамиды прямоугольный треугольник. Покажите на чертеже линейные углы α.

27. Основанием пирамиды служит правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие образуют с ней равные углы ρ. Покажите на чертеже линейный угол ρ и докажите, что вершина пирамиды проектируется на середину одной из сторон основания.

28. Через середину высоты пирамиды проведено сечение параллельно основанию. В каком отношении оно делит: а) боковую поверхность, б) объем ее?

29. Поверхности подобных многогранников относятся, как 4 : 9. Как относятся их объемы?

30. Чему равен угол между непересекающимися ребрами правильного тетраэдра?

31. Покажите в правильном тетраэдре расстояние: а) между непересекающимися ребрами, б) от центра основания до боковой грани.

32. Покажите в кубе расстояние между непересекающимися диагоналями пересекающихся граней.

33. Покажите расстояние между противоположными гранями правильного октаэдра.

34. Постройте в правильной четырехугольной пирамиде линейный угол: а) двугранного угла при боковом ребре; б) двугранного угла между противоположными боковыми гранями.

II. ЗАДАЧИ

а) Линии и плоскости в многогранниках

1. Ребро куба равно a; найти проекцию каждого ребра на диагональ куба.

2. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 3 *дм*, 6 *дм* и 6 *дм*. Найти проекцию каждого ребра на диагональ.

3. Ребро куба равно a; через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найти площадь сечения.

4. Ребро куба равно a. Найти площадь сечения, проведенного через центр куба параллельно двум каким-либо диагоналям двух смежных граней куба. Два случая.

5. Провести в кубе квадратное сечение.

6. В кубе $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ провести сечение через точки K, L и M, лежащие на ребрах:

1) AA_1; B_1C_1 и CC_1; 2) AA_1; A_1B_1; B_1C_1; 3) AA_1; CC_1; CD; 4) AA_1; BB_1 и CC_1; 5) AA_1; A_1B_1; A_1D_1; 6) AA_1; CD_1; AD_1; 7) AA_1; BC; AB; 8) AB; B_1C_1; CD; 9) AA_1; B_1C_1; CD; 10) AA_1; C_1C; AD_1; 11) AA_1; CC_1; BC_1; 12) AB_1; AD_1; C_1D_1; 13) AB_1; A_1D; CC_1; 14) AA_1; A_1B_1; D_1C_1.

7. Периметры неравных граней параллелепипеда равны m, n и p. Определить длины ребер параллелепипеда.

8. Правильная шестиугольная призма с высотою, равной 10 *м*, пересечена плоскостью, которая проходит через сторону нижнего основания и пересекает линию пересечения диагональных сечений в точке, расстояние которой от нижнего основания равно 3 *м*. Определить площадь сечения, если периметр сечения равен 28 *м*.

9. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 *см* и 16 *см*, а боковое ребро равно 12 *см*. Определить: 1) площадь сечения, проведенного через диагональ боковой грани и перпендикулярную ей сторону основания; 2) периметр сечения, проведен-

ного через диагональ параллелепипеда параллельно диагонали основания, не пересекающей эту диагональ параллелепипеда.

10. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна D, а диагональ боковой грани — d. Определить площадь сечения, проходящего через сторону основания и диагональ призмы, выходящую из конца этой стороны.

11. В кубе $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.

12. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол в 30°. Найти угол диагонали с основанием призмы.

13. Основание прямого параллелепипеда—ромб; диагонали параллелепипеда образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найти углы ромба.

14. Основание прямого параллелепипеда—ромб со стороной в 2 *см*. Диагонали параллелепипеда образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найти высоту его.

15. В параллелепипеде основание — ромб со стороной a и углом в 60°. Боковое ребро b, выходящее из вершины угла в 60°, составляет со сторонами основания углы по 45°. Найти площади диагональных сечений.

16. В правильной треугольной призме, все ребра которой равны a, провести сечение через сторону основания и 1) середину оси; 2) точку, отсекающую $^1/_3$ оси; 3) центр верхнего основания. Вычислить площади полученных сечений.

17. В правильной треугольной призме, все ребра которой равны a, вычислить площадь сечения, проведенного через среднюю линию основания и 1) центр верхнего основания; 2) середину той высоты верхнего основания, которая перпендикулярна средней линии; 3) через одну из вершин верхнего основания (два случая).

18. В прямой треугольной призме с площадью основания Q проведено сечение через вершину основания параллельно противолежащему ребру, под углом в 30° к нижнему основанию. Найти площадь сечения.

19. В прямой треугольной призме площади двух боковых граней равны 42 *см*^{2} и 70 *см*^{2}. Двугранный угол между ними разделен плоскостью пополам. Как

относятся площади частей, на которые разделилась этой плоскостью третья боковая грань?

20. Основанием прямой призмы с высотой в 10 *см* служит трапеция, параллельные стороны которой равны 6 *см* и 4 *см*. Через прямую пересечения диагональных плоскостей призмы проведена плоскость параллельно основаниям трапеции. Вычислить площадь полученного сечения.

21. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 2 *см*. Найти площадь сечения, проведенного через середину большей диагонали призмы перпендикулярно к ней.

22. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a и высотой h вычислить площадь сечения, проведенного через сторону основания и 1) через середину высоты пирамиды; 2) через середину противоположного ребра.

23. В правильном тетраэдре с ребром a вычислить площадь сечения, проведенного через середины двух сторон основания: 1) параллельно боковой грани; 2) параллельно высоте пирамиды; 3) параллельно боковому ребру.

24. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a и высотой h вычислить площадь сечения, проведенного через: 1) высоту пирамиды параллельно одной из сторон основания; 2) высоту пирамиды и одну из вершин основания; 3) через середины двух боковых ребер и центр основания; 4) через центр основания параллельно двум пересекающимся ребрам.

25. В правильном тетраэдре с ребром a проведено сечение через вершину основания перпендикулярно к противолежащей грани и параллельно стороне основания. Найти его площадь.

26. В правильном тетраэдре с ребром в 2 *дм* проведена плоскость через вершину так, что эта плоскость пересекает основание по прямой, параллельной стороне основания, и делит основание на две равновеликие части. Найти площадь получившегося сечения.

27. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны каждое b. Через нижний конец одного из боковых ребер проведена пло-

скость так, что она отсекает от двух других боковых ребер части c и d (считая от вершины). Определить площадь полученного сечения.

28. Правильный тетраэдр с ребром a пересечен плоскостью, проходящей через одну из вершин и середины двух ребер противолежащей боковой грани. Определить расстояние от плоскости сечения до вершины, в которой сходятся все пересеченные ребра.

29. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Площадь полученного сечения равна площади основания. Определить боковое ребро.

30. В каком отношении делятся в точке пересечения высоты правильного тетраэдра?

31. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a и высотой h найти площадь сечения, проведенного: 1) через середину высоты основания перпендикулярно к ней; 2) через середину высоты основания перпендикулярно к пересекающемуся с ней боковому ребру; 3) через середины двух боковых ребер перпендикулярно к основанию.

32. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a и боковым ребром b найти площадь сечения: 1) проведенного через сторону основания перпендикулярно боковому ребру; 2) через высоту пирамиды перпендикулярно к стороне основания.

33. В правильной 1) четырехугольной, 2) шестиугольной пирамиде сторона основания вдвое больше высоты пирамиды. Найти двугранные углы при основании.

34. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам, делит противоположную грань на части, площади которых относятся как 96 : 25 (считая от основания). Найти высоту пирамиды, если сторона основания равна 3 *см*.

35. Вычислить площадь сечения, проведенного в правильной четырехугольной пирамиде со стороной a и высотой h: 1) через центр основания параллельно боковой грани; 2) через точку M, делящую сторону основания в отношении 1 : 3, параллельно боковой грани; 3) через ту же точку параллельно высоте.

36. Сходственные стороны оснований усеченной пирамиды равны a и b. Определить периметры оснований, если периметр сечения, проведенного через середину высоты параллельно основаниям, равен P.

37. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 *см* и 2 *см*, а высота — 1 *см*. Через сторону меньшего основания проведена плоскость, параллельная противоположному боковому ребру. Определить площадь полученного сечения.

38. Нижним основанием усеченной пирамиды служит правильный треугольник с площадью $16\sqrt{3}$ *дм*^{2}. Одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а противолежащее ей боковое ребро составляет с ним угол в 45° и равные углы с прилежащими сторонами основания. Периметр верхнего основания равен 12 *дм*. Определить высоту пирамиды.

б) Поверхность и объем многогранников

39. (Устно). Сумма всех ребер куба равна 18 *см*. Определить его поверхность.

40. (Устно). Чему равно отношение поверхностей двух кубов, если отношение их объемов равно 2?

41. Ребро одного куба равно диагонали другого. Определить отношение их объемов.

42. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 13 *см*, а диагональ боковой грани — $4\sqrt{10}$ *см*. Определить ее полную поверхность.

43. Определить боковую поверхность прямого параллелепипеда, основанием которого служит ромб с периметром $2p$, если периметр боковой грани равен $2p_1$.

44. Измерения одного прямоугольного параллелепипеда относятся между собой, как 3:5:6, а другого, как 2:3:5. Определить отношение поверхностей этих параллелепипедов, если известно, что объем первого в 24 раза больше объема второго.

45. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 5 *см*, угол между ними составляет 120°, а проекция меньшей диагонали параллелепипеда на плоскость основания равна половине этой диагонали. Определить объем параллелепипеда.

46. Определить объем параллелепипеда, в котором стороны основания a и b составляют угол в $60°$, а ребро c, выходящее из вершины угла в $60°$, составляет со сторонами a и b углы по $45°$.

47. В наклонном параллелепипеде с квадратным основанием сторона основания равна 3 *дм*, а боковое ребро равно 2 *дм*; одна пара боковых граней наклонена к плоскости основания под углом в $30°$, а другая перпендикулярна к плоскости основания. Найти объем и боковую поверхность параллелепипеда.

48. Кусок льда в форме прямоугольного параллелепипеда плавает в морской воде. Длина вертикального ребра равна 10,5 *м*, других—15,75 *м* и 20,45 *м*. Плотность льда при $0°$ составляет 0,93, морской воды—1,026. Определить объем части куска льда, погруженной в воду.

49. Основание параллелепипеда—ромб со стороной a и углом в $30°$. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна к основанию. Боковое ребро составляет с основанием угол в $60°$. Найти полную поверхность параллелепипеда.

50. В основании параллелепипеда—ромб. Через меньшую диагональ параллелепипеда d проведено сечение параллельно диагонали основания, составляющее с основанием угол в $60°$. Площадь сечения равна Q. Найти объем параллелепипеда.

51. Определить объем правильной шестиугольной призмы, в которой сторона основания равна a, а боковая грань равновелика основанию.

52. Правильная шестиугольная призма, боковое ребро которой равно 3 *см*, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определить объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 $см^2$.

53. Основанием прямой призмы служит трапеция, в которой параллельные стороны равны 21 *см* и 7 *см*, а непараллельные—15 *см* и 13 *см*. Определить объем призмы, если площадь большего диагонального сечения равна 100 $см^2$.

54. В призме основание—равнобочная трапеция, в которой высота равна 3 *см*. Диагональные сечения перпендикулярны к основанию и составляют с рав

ными сторонами углы в 30°21′ и 59°39′. Найти объем призмы, если площадь диагонального сечения равна 12 *см*^{2}.

55. Определить полную поверхность наклонной призмы, у которой площадь основания равна 3,5 *дм*^{2}, боковое ребро—3 *дм*, а перпендикулярное сечение—правильный треугольник с площадью $\sqrt{3}$ *дм*^{2}.

56. Правильная треугольная призма пересечена двумя параллельными плоскостями, наклоненными к основанию, причем линии пересечения лежат на боковых гранях. Определить боковую поверхность и объем полученной наклонной призмы, если длина ее бокового ребра b, а стороны основания данной призмы a.

57. Основание наклонной призмы — треугольник ABC, в котором $AB=BC=5$ и $AC=6$. Боковое ребро BB_1 составляет с AB и BC углы по 60° и равно 4. Определить боковую поверхность и объем призмы.

58. Основание наклонной призмы—равносторонний треугольник со стороной a. Проекцией одного из боковых ребер на нижнее основание служит высота основания. Определить объем и боковую поверхность призмы, если боковое ребро составляет с основанием угол в 45°.

59. Определить объем треугольной призмы, зная, что площади двух ее боковых граней равны M и N, боковое ребро — b и угол между этими гранями равен 30°.

60. В треугольной наклонной призме две боковые грани образуют угол в 60°. Их площади равны 5 *см*^{2} и 8 *см*^{2}. Найти боковую поверхность.

61. В параллелепипеде площади двух боковых граней, имеющих общее ребро a, равны M и N, двугранный угол между ними составляет 150°. Найти объем параллелепипеда.

62. Дана правильная пирамида; если ее боковую поверхность развернуть на плоскости, то получится трапеция, диагональ которой равна 2. Найти объем пирамиды.

63. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды, если сторона основания равна 6 *см*.

64. В правильной четырехугольной пирамиде площадь диагонального сечения равна Q. Двугранный угол при боковом ребре составляет 120°. Найти боковую поверхность пирамиды.

65. В правильной шестиугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60°; через одну из сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к противолежащей грани. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность?

66. В треугольной пирамиде два непересекающихся ребра a и b взаимно перпендикулярны; расстояние между ними равно c. Определить объем пирамиды.

67. Две грани треугольной пирамиды—равнобедренные треугольники с общим основанием a, которое отстоит на расстояние d от противолежащего ему ребра b пирамиды. Найти объем пирамиды.

68. В правильной треугольной пирамиде расстояние от вершины основания до противолежащей боковой грани равно m. Найти ее полную поверхность и объем, если двугранный угол при основании равен 60°.

69. Основание пирамиды—ромб со стороной a; две грани перпендикулярны к основанию и образуют между собой угол в 120°. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

70. Основание пирамиды—равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c. Боковое ребро, выходящее из вершины прямого угла, равно b и составляет с прилежащими сторонами углы в 60°. Найти объем пирамиды.

71. В треугольной пирамиде один из плоских углов при вершине равен 60°, а два другие равны между собой. Боковое ребро между равными углами перпендикулярно к противоположной стороне основания, равной a, и составляет с основанием и боковой гранью углы по 30°. Найти объем пирамиды.

72. Основание пирамиды—ромб с диагоналями в 6 *дм* и 8 *дм*. Диагональные сечения перпендикулярны к основанию; сумма их площадей равна 3,5 *дм*². Найти объем и полную поверхность пирамиды.

73. Три грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и площади их равны 1 *см*², 2 *см*² и 2 *см*². Найти полную поверхность пирамиды.

74. Основание пирамиды—ромб со стороной a и

острым углом в 60°. Вершина пирамиды проектируется в точку касания окружности, вписанной в основание. Грань, проходящая через противоположную сторону основания, образует с основанием угол в 45°. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

75. В правильной треугольной пирамиде расстояние между непересекающимися ребрами равно d; боковое ребро составляет с основанием угол в 30°. Определить объем пирамиды.

76. В треугольной пирамиде площади двух боковых граней равны M и N, их общее ребро равно a и перпендикулярно противолежащей стороне основания, а двугранный угол между ними равен 30°. Найти объем пирамиды.

77. Основанием пирамиды служит ромб; одно из боковых ребер перпендикулярно к основанию и равно 1 *см*, остальные боковые ребра равны 5 *см* и 7 *см*. Найти объем пирамиды.

78. Основание пирамиды—прямоугольник; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а остальные наклонены к нему под углом в 60°. Найти объем и боковую поверхность пирамиды, если ее высота равна 3 *дм*.

79. Высота правильной треугольной пирамиды равна h; двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти объем пирамиды.

80. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании составляет 60°. Через сторону основания проведена плоскость, делящая двугранный угол пополам. Найти отношение объемов полученных частей пирамиды.

81. Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60°; высота ее, равная 3 h, разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные к одному из боковых ребер. Найти отношение объемов полученных частей пирамиды.

82. Дан многогранник, ограниченный шестью равными равнобедренными прямоугольными треугольниками; поверхность его равна 27 *см*^{2}. Определить его объем.

83. Площади нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды равны a^2 и b^2. В каком отношении

делится: 1) высота, 2) боковая поверхность, 3) объем пирамиды параллельным сечением, площадь которого есть средняя пропорциональная между площадями оснований.

84. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 *см* и 5 *см*, высота—1 *см*. Проведено сечение через сторону верхнего основания параллельно боковому ребру. Найти площадь сечения и объем полученного клина.

85. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны соответственно 4 *см* и 2 *см*; двугранные углы при боковых гранях составляют по 120°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

86. Высота усеченной пирамиды равна h; сходственные стороны оснований относятся как $m : n$. Плоскость, параллельная основанию, делит объем пирамиды пополам. Найти расстояние этой плоскости от нижнего основания.

87. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на основание равна 7 *дм*, высота — 24 *дм*. Сечение, перпендикулярное к боковому ребру, есть ромб с площадью 240 *дм*^{2} и диагональю в 30 *дм*. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

в) Комбинации многогранников

88. Объем треугольной пирамиды равен v. Найти объем многогранника, вершинами которого служат середины ребер пирамиды.

89. Объем наклонного параллелепипеда равен v; середины его ребер служат вершинами второго многогранника. Найти объем последнего.

90. Ребро куба равно a. Найти объем многогранника, вершинами которого служат центры граней куба. Какой это многогранник?

91. Равносторонний треугольник служит общим основанием прямой призмы и пирамиды, все боковые ребра пирамиды одинаковы, причем высота призмы равна высоте пирамиды. Зная, что отношение их боковых ребер $2 : \sqrt{3}$, найти отношение их боковых поверхностей.

92. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3 *см* и высота — 6 *см*. В нее вписана

прямая призма так, что три ее вершины лежат на основании пирамиды, а три другие — на боковых ребрах. Определить поверхность и объем этой призмы, если все ребра призмы равны.

93. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 *дм*, а высота — $4\sqrt{3}$ *дм*. В нее вписана прямая призма так, что плоскости их оснований совпадают, а вершины верхнего основания лежат в центрах тяжести боковых граней. Определить объем призмы.

94. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны a и b, высота — h. Из него вырезаны две пирамиды, основаниями которых служат основания параллелепипеда, а общая вершина — в точке пересечения диагоналей параллелепипеда. Определить объем оставшейся части.

95. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2 *дм*, высота — $4\sqrt{3}$ *дм*. Через середину бокового ребра проведены две плоскости: одна — параллельно основанию, а другая — параллельно боковой грани. Вычислить объем оставшейся части.

96. Измерения прямоугольного параллелепипеда — 6 *дм*, 8 *дм* и 2 *дм*. Определить поверхность и объем многогранника, вершины которого находятся в точках пересечения диагоналей каждой грани.

97. В деревянном прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 32 *см* и 10 *см*, высота — 12 *см*. Из него вырезана пирамида, основание которой совпадает с основанием параллелепипеда, а вершина лежит в точке пересечения диагоналей другого основания. Найти полную поверхность оставшейся части параллелепипеда.

98. В деревянной правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 *дм*, высота — 12 *дм*. Из нее вырезан куб, четыре вершины которого лежат на основании пирамиды, а остальные четыре — на боковых ребрах. Вычислить объем и поверхность оставшейся части пирамиды.

99. В прямую призму, основание которой трапеция с основаниями 5 *см* и 7 *см*, вписан куб так, что вершины его лежат на серединах сторон основания призмы. Найти объем призмы.

100. Квадратный брусок, периметр основания которого равен 96 *см*, а длина — 4 *м*, на расстоянии 196,5 *см* от основания, распилен на две части, причем площадь сечения распила, имеющего форму прямоугольника, составляет 600 $см^2$. Определить поверхность каждой части.

101. Высота правильной четырехугольной призмы равна 2 *дм*, а сторона основания — 3 *дм*. В двух противоположных боковых гранях ее проведены две непараллельные диагонали. Определить объем и поверхность пирамиды, вершинами которой служат концы этих диагоналей.

102. Два правильных тетраэдра, все ребра которых равны a, имеют общее основание, а вершины их лежат по разные стороны основания. Ортоцентры каждой из шести граней образовавшегося многогранника служат вершинами многогранника. Определить его объем. Какой это многогранник?

103. В правильной шестиугольной призме сторона основания равна a. Одно из оснований призмы служит основанием пирамиды, вершина которой лежит в центре другого основания. Определить двугранный угол при основании пирамиды, зная, что их боковые поверхности равны.

III. ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМЫ

1. Во всяком параллелепипеде сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов его ребер.

2. Если два диагональных сечения, проведенные через диагонали одной грани, перпендикулярны к этой грани, то параллелепипед будет прямой.

3. Если два диагональных сечения параллелепипеда, проведенные через две диагонали одной и той же грани,— равные прямоугольники, то параллелепипед прямоугольный.

4. Во всякой n-угольной призме сумма двугранных углов при боковых ребрах равна $2d\ (n-2)$.

5 Если в тетраэдре каждые два противоположных ребра равны между собой, то равны будут между собой и все грани.

6. Объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние этой грани от противоположного ребра.

7. Если на трех параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложить равные отрезки, то объем треугольной призмы, имеющей эти отрезки боковыми ребрами, будет величиной постоянной.

8. Вывести геометрически формулы: 1) куба суммы и 2) куба разности двух чисел.

9. Середины двух пар противоположных ребер тетраэдра являются вершинами параллелограмма, стороны которого равны соответственно половинам оставшихся ребер.

10. Три прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и взаимно делятся пополам.

11. Плоскости, проведенные перпендикулярно к ребрам тетраэдра через середины их, пересекаются в одной точке.

12. Плоскости, делящие все двугранные углы тетраэдра пополам, пересекаются в одной точке.

13. Сумма длин перпендикуляров, опущенных из любой точки, взятой внутри правильного тетраэдра, на его грани, равна высоте тетраэдра. Рассмотреть случай, когда точка взята вне тетраэдра.

14. В тетраэдре, имеющем при вершине прямые плоские углы, квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей его боковых граней.

15. Плоскость, проходящая через одно из ребер тетраэдра и середину противоположного ребра, делит его на два равновеликих тетраэдра.

16. Объемы двух тетраэдров, имеющих по равному ребру и равному двугранному углу при этих ребрах, относятся между собой, как произведение площадей граней, содержащих эти двугранные углы.

17. Если усеченную пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основаниям и на равном расстоянии от них, то площадь сечения равна полусумме среднего арифметического и среднего геометрического площадей обоих оснований.

ОТВЕТЫ

I. Вопросы

1) 4. 2) 100; 1000. 3) Во всех случаях, когда высоты обратно пропорциональны площадям оснований, в частном случае, когда равновелики их перпен-

дикулярные сечения и боковые ребра равны. 4) Призмы. 5) $8d\ (n-1)$. 6) $4d\ (n-1)$. 7) Например, основание одной призмы и боковое ребро равны основанию и боковому ребру другой призмы, и эти ребра составляют с прилежащими сторонами основания равные углы. 9) Углы одного равны углам другого, а сходственные ребра пропорциональны. 10) а) Прямоугольники; б) параллелограммы. 11) Да, одно из них. 12) а) Да; б) равны попарно; в) нет, в частном случае могут быть равны две. 13) а) Прямоугольник; б) прямоугольник, или параллелограмм; в) параллелограммы. 14) Будет, так как боковая грань проведена через боковое ребро, которое перпендикулярно к плоскости сечения. 15) Боковое ребро проектируется на биссектрису угла основания, заключенного между этими сторонами. 16) Сначала надо найти центр основания и из него восстановить перпендикуляр к основанию пирамиды; конец его будет вершиной верхнего основания. 17) а) Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, надо через одну из них провести плоскость, параллельную другой, тогда перпендикуляр из любой точки первой прямой до этой плоскости есть искомое расстояние. Например, в кубе $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1C есть AO, где O — точка пересечения AC и BD; б) пусть K и M — середины ребра AA_1 и диагонали B_1D. Требуется доказать, что $KM \perp AA_1$ и B_1D. Треугольник KB_1D — равнобедренный, $KD = KB_1$, а потому медиана $KM \perp B_1D$. Так же доказывается, что $KM \perp AA_1$. 18) а) В центр окружности, описанной около основания; б) не всегда. 19) Равенство боковых ребер. 20) Может, если в основании тупоугольный треугольник. 21) На середину гипотенузы. 22) а) Да; б) нет; в) нет; г) да, если трапеция равнобочная. 23) Если боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом. 26) а) Нет; б) да; в) да, если суммы противолежащих сторон равны. 28) а) 1 : 3; б) 1 : 7. 29) 8 : 27. 30) 90°. 31) Отрезок, соединяющий середины этих ребер. 32) Поделить каждую диагональ в отношении 1 : 2. Отрезок, соединяющий эти точки, будет искомым расстоянием. 33) Из центра октаэдра опустить перпендикуляры на противоположные грани.

II. Задачи

1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 2) 4 *дм*; 1 *дм*. 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ 4) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ *см*^{2}.

7) $\frac{m+n-p}{4}$; $\frac{n+p-m}{4}$; $\frac{p+m-n}{4}$. 8) $\approx 46{,}5$ *м*^{2};

9) 100 *см*^{2}; 208 *см*^{2}; 49,8 *см*. 10) $d\sqrt{D^2-d^2}$; $D>d$. 11) 120°.

12) 45°. 13) 60°; 120°. 14) 2 *см*. 15) ab. 16) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$;

$\frac{5a^2\sqrt{39}}{36}$. 17) 1) $\frac{49a^2\sqrt{3}}{144}$; 2) $\frac{a^2}{2}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{19}}{16}$; 4) $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$.

18) $\frac{2Q\sqrt{3}}{3}$ 19) 3 : 5. 20) 48 *см*^{2}. 21) $2\sqrt{15}$ *см*^{2}.

22) 1) $\frac{a\sqrt{3(h^2+a^2)}}{8}$; 2) $\frac{a\sqrt{12a^2+9h^2}}{12}$. 23) 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$;

2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{16}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ и $\frac{a^2}{4}$. 24) 1) $\frac{ah}{3}$; 2) $\frac{ah\sqrt{3}}{4}$. 25) $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$.

26) $\approx 2{,}8$ *дм*^{2}. 27) $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$. 28) $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

29) $a\sqrt{2}$. 30) 1 : 3. 33) 45°; 30°. 34) 2 *см*. 36) $\frac{2pa}{a+b}$;

$\frac{2pb}{a+b}$. 37) 4 *см*^{2}. 38) $2\sqrt{3}$ *дм*^{2}. 39) 13,5 *см*^{2}.

40) $\sqrt[3]{4}$. 41) $3\sqrt{3}$. 42) 165, 36 *см*^{2}. 43) $2p(p-p_1)$.

45) 420 *см*^{3}. 46) $\frac{abc}{2}$. 47) 9 *дм*^{3}; 18 *дм*^{2}. 48) 9,52 *м*.

49) $\frac{a^2}{2}(5+2\sqrt{3})$ 50) $\frac{dQ\sqrt{3}}{4}$. 51) $\frac{27a^3}{4}$. 52) $18\sqrt{3}$ *см*^{2}

53) 70 *см*^{3}. 54) 24 *см*^{3}. 55) 25 *дм*^{2}. 56) $3ab$; $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$.

57) $4(6+5\sqrt{3})$; $3\sqrt{39}$. 58) $\frac{3a^3}{8m}$; $\frac{a^2(\sqrt{15}+\sqrt{6})}{2}$.

59) $\frac{MN}{4b}$. 60) 20 $см^2$. 61) $\frac{MN}{2a}$. 62) $\frac{2\sqrt{6}}{27}$. 63) $12\sqrt{6}$ $см^2$; 36 $см^3$. 64) $4Q$.

$SABCD$ — пирамида, SO — высота. $OK \perp SC$. $\angle BKD = 120°$. Пусть $OC = x$, тогда $OD = x$; $OK = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

$KD = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, $SC = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $SO = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Имеем $\frac{x^2}{\sqrt{2}} = Q$.

$$S_б = 4\left(\frac{1}{2} SC \cdot DK\right) = 2\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{4x^2}{\sqrt{2}} = 4Q.$$

65) 11 : 13, $SABCDEF$ — пирамида; сечение $SKL \perp AF$ (K на AF, L на CD). $KN \perp SL$. $AB_1C_1D_1E_1F$ — данное сечение, $\triangle KSL$ равносторонний, SO — высота, M — точка пересечения KN и SO, $MO = \frac{1}{3} SO$, следовательно, и

$$EE_1 = \frac{1}{3} SE, \quad BB_1 = \frac{1}{3} SB, \quad LN = \frac{1}{2} SL, \quad DD_1 = \frac{1}{2} SD.$$

Пусть площадь боковой грани Q.

$$\frac{S_{FSE_1}}{S_{FSE}} = \frac{SF_1}{SE} = \frac{2}{3}; \quad S_{FSE_1} = \frac{2}{3}Q; \quad \frac{S_{SD_1E_1}}{S_{SDE}} = \frac{SD_1 \cdot SE_1}{SD \cdot SE} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; \quad S_{SD_1E_1} = \frac{1}{3}Q; \quad S_{SC_1D_1} = \frac{1}{4} Q \text{ и т. д.}$$

66) $\frac{abc}{6}$.

$SABC$ — пирамида, D — середина AC, $DE \perp SB$.

$DE = c$. $v = \frac{1}{3} S_{AEC} \cdot SE + \frac{1}{3} S_{AEC} \cdot BE = \frac{1}{3} S_{AEC} \cdot$

$\cdot a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bca = \frac{abc}{6}$. 67) $\frac{abd}{6}$. 70) $\frac{bc^2\sqrt{2}}{24}$.

71) $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. 72) 8 $дм^3$; 50 $дм^2$. 73) 8 $см^2$.

75) $\frac{16d^3}{27}$. 76) $\frac{MN}{3a}$. 77) 8 $см^3$. 78) 6 $дм^3$; 17,1 $дм^2$.

79) $2h^3\sqrt{3}$. 80) 3 : 5. $SABCD$ — пирамида, $SK \perp CD$. Данное сечение $ABC_1D_1 \perp SCD$. Пусть $AB = a$,

тогда $v_{SABC_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

$v_{ABC_1CDD_1} = v_{SABCD} - v_{SABC_1D_1} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{48}$. 81) $\frac{h_3}{4}$; $\frac{7h^3}{4}$; $4h^3$.

82) 9 $см^3$. 83) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $a : b$; $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}$. Достроим пирамиду $ABCA_1B_1C_1$ до полной с вершиной S. Пусть сечение $A_2B_2C_2 \parallel ABC$ пересечет высоту SO_1 в O_2. $S_{A_2B_2C_2} = ab$.

Пусть $SO = H$, тогда $SO_1 : H = b : a$ и $SO_1 = \frac{bH}{a}$.

Также $SO_2 = \frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, значит $O_1O_2 = H\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{b}{a}\right)$,

$OO_2 = H\left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ и т. д. 84) $b\sqrt{3}$ $см^3$; 4 $см^2$.

85) $12\sqrt{2}$ $см^2$; $9\frac{1}{3}$ $см^3$. 86) $\frac{h}{m-n}\left(m - \sqrt[3]{\frac{m^3+n}{2}}\right)$.

87) 6 $м^3$; 17 $м^2$. 88) $\frac{v}{2}$. 89) $\frac{5}{6}v$. Пусть

$ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед и $A_1C_2B_2A_2$ одна из отсеченных пирамид (C_2 на A_1, C_1, B_2 на A_1 B_1, A_2 на AA_1).

Тогда $v_{A_1C_2B_2A_2} = \frac{1}{8}v_{A_1C_1B_1A} = \frac{1}{24}v_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{48}v$.

91) $12 : \sqrt{39}$. 92) 15,5 $см^2$; 3,5 $см^3$. 93) $2\sqrt{3}$ $дм^3$.

95) 3 $дм^3$. 96) 16 $дм^3$; 52 $дм^2$. 97) 1944 $см^2$.

98) 80 $дм^3$; 209,7 $дм^2$. 99) 6,92 $дм^3$. 100) 5976 $см^2$.

101) 6 $дм^3$; $6\sqrt{17}$ $дм^2$. 102) $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$. 103) 30°.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Теорема о двух перпендикулярах для скрещивающихся прямых. Прямая, перпендикулярная к двум прямым на плоскости, перпендикулярна и к самой плоскости.

Пусть AB перпендикулярна CD и EF, где CD и EF — пересекающиеся прямые на плоскости M, и не пересекающие AB. Перенеся CD и EF параллельно по плоскости M до пересечения с AB, получим теорему о двух перпендикулярах для пересекающихся прямых.

2. Теорема о трех перпендикулярах для скрещивающихся прямых. Прямая CD на плоскости M, перпендикулярная к проекции A_1B наклонной AB, перпендикулярна и к самой наклонной AB.

Для доказательства достаточно перенести CD параллельно до пересечения с AB в точке B.

Такая формулировка теорем часто упрощает их применение.

Задача 1. Найти угол между двумя непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

Найдем в пирамиде $SABC$ угол между AC и SB. SO—высота, $AC \perp OB$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, $AC \perp SB$. Угол между AC и SB – прямой.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде провести сечение через центр основания перпендикулярно к боковому ребру.

В пирамиде $SABC$ через центр основания O на плоскости ABC проведем прямую EF перпендикулярно к высоте основания BD и в плоскости SBD—прямую $OB_1 \perp SB$. Через две пересекающиеся прямые EF и OB_1 проводим плоскость, которая пересечет боковые грани по прямым EB_1 и FB_1. Полученное сечение EFC_1—искомое, так как оно проходит через центр основания и перпендикулярно к ребру SB, потому что $SB \perp OB_1$ по построению и $SB \perp EF$ по теореме о трех перпендикулярах. Таким образом, ребро SB перпендикулярно к двум прямым OB_1 и EF, лежащим на плоскости сечения. Задача возможна, если $\angle DSB < 90°$.

Задача 3. В правильной четырехугольной пирамиде провести сечение через вершину основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру.

$SABCD$—пирамида, SO—высота. В плоскости диагонального сечения ASC из точки A опускаем перпендикуляр AC_1 на ребро SC. $BD \perp OC$, поэтому $BD \perp SC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Через O_1—точку пересечения AC_1 и SO на плоскости BSD—проводим $B_1D_1 \parallel BD$, которая, будучи параллельна BD, также перпендикулярна SC. Через две пересекающиеся прямые AC_1 и B_1D_1 проводим плоскость, которая пересечет боковые грани по прямым AB_1; B_1C_1; C_1D_1 и D_1A. Сечение $AB_1C_1D_1$—искомое, так как проходит через вершину A и перпендикулярно ребру SC по теореме о двух перпендикулярах, так как $SC \perp AC_1$ и B_1D_1.

Задача возможна, если $\angle ASC < 90°$.

В. А. РАЕВСКИЙ,
преподаватель математики
494-й средней школы.

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

(Из опыта работы в VII классах 494-й средней женской школы Пролетарского района г. Москвы)

„...Мы должны ребят с самых младших групп научить наблюдать, делать определенные выводы, научить исследовательскому подходу к каждому явлению, которое они видят..."

Н. К. КРУПСКАЯ

Необходимость работы над развитием математического мышления учащихся на уроках математики, конечно, не требует обоснования. Мы позволим себе только напомнить кое-что из области психологии мышления, и то исключительно в целях попытки объединения описанных ниже разнохарактерных ученических работ в единое целое.

Прежде всего, укажем, в каких направлениях работает мысль учащихся, работы которых мы приводим, как вещественно выражается каждая новая мысль, как и в какое время рассматривается то или иное предложение, как оно оформляется в целях осуществления обмена опытом.

Мысль учащихся направлена, главным образом, на изыскание новых вариантов доказательства изучаемых теорем, новых способов решения геометрических и алгебраических задач.

Учащийся может выражать кратко, в письменной форме, математическую мысль с приложением графического материала, если его требует характер темы.

Сообщения учащихся делаются, в основном, на уроках, а не на математическом кружке; таким образом, охватывается весь класс и ускоряется разрешение вопросов, обычно сильно интересующих бо́льшую часть класса. Мой опыт показал, что время, затраченное на уроке, окупается большим положительным влиянием этой работы на весь коллектив (класс). Кроме того, рассмотрение представленного учащимися материала именно на уроке (а не на кружке по математике, тематика которого несколько иная) придает более значительный вес каждой новой мысли, которую всегда можно с большой пользой связать с программным материалом, используя самостоятельное творчество учащихся для расширения пройденного, для перехода к новой теме или для повторения темы целиком или частично.

После рассмотрения с классом вновь поступившего материала последний редактируется преподавателем и окончательно оформляется его авторами на отдельных листах, которые выставляются на специальных щитах в классных помещениях или коридорах школы. После этого материал переходит в педагогический кабинет школы, а в конце полугодия и осенью экспонируется на отчетных школьных и районных научно-практических учительских конференциях в целях обмена опытом.

Мы ставим целью воспитать следующие главнейшие качества мышления:

1. Критичность мышления, его дисциплинированность, соединенную с воображением, как основой творческой деятельности.

2. Гибкость мышления, т. е. свободу от шаблонного решения вопросов, инициативу в мышлении, способность находить новые (для ученического коллектива) решения одного и того же вопроса, умение использовать необычные пути решения той или иной задачи, устранение того, что именуется в психологии «инертностью мышления».

3. Широту мышления — умение охватить вопрос в целом, не упуская в то же время существенных деталей и частных случаев.

4. Развить интеллектуальное чувство при мышлении, т. е. то чувство, которое непосредственно связано с мыслительными процессами, с их эмоциональной стороной. Из психологии мышления известно, что

мысль приобретает всю свою силу и остроту только тогда, когда она проникнута глубоким чувством. Никогда не бывает, чтобы мысли создавались человеком, равнодушным к предмету своих изысканий. Развить желание мыслить, которое часто переходит в потребность не только разрешать те или иные вопросы, но и ставить перед собой новые задачи.

5. Привить учащимся сознание необходимости знаний для правильной организации труда, необходимости умения мобилизовать свои знания в нужный момент и умело применять их, свободно маневрировать ими.

6. Создать стремление к рационализации умственного труда, к особой (научной) изобретательности.

Большинство описанных ниже самостоятельных ученических работ обнаруживает глубокое понимание их авторами сути рассматриваемого вопроса, а также стремление к расширительному толкованию явления, к обобщению той или иной мысли или приема мышления.

В этих работах мышление направлено уже не только на освоение учебного материала, но и на творческое его преобразование. В работах сказывается не просто знание тех или иных теорем или приемов решения, а такое их усвоение, которое позволяет ученику пользоваться своими знаниями при разностороннем применении их на практике, например давать различные варианты решения одного и того же вопроса.

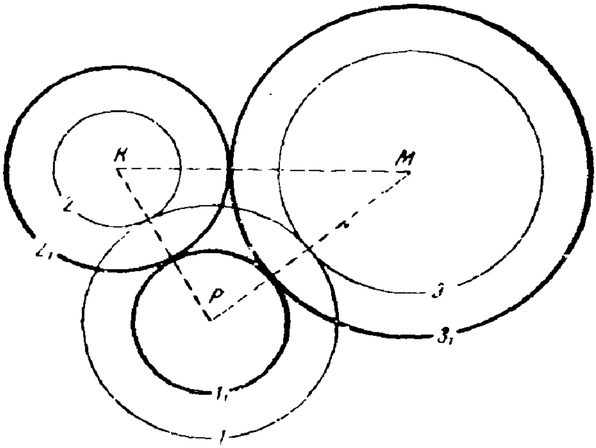
Приведем некоторые работы по решению задач учениц VII класса 494-й школы г. Москвы.

Ценность подобных работ учащихся заключается в возникновении у них мысли, что тот или иной приведенный на уроке прием вычисления, построения или доказательства не всегда является единственно возможным, наиболее изящным и наиболее общим.

Большая польза от изыскания разнообразных способов решения задач заключается еще и в том, что желание созидания новых путей решения вопроса вызывает у учащихся необходимость пересмотра всего ранее пройденного материала и изучения дополнительной литературы в целях изыскания возможностей обоснования того или иного оригинального утверждения или нового освещения вопроса; очевидно, что такой пересмотр пройденного является очень продуктивным видом повторения.

Вот работа ученицы VII-Б класса Шатериной Инны, направленная на изыскание нового способа решения задачи: построить три внешне касающиеся окружности, центрами которых являются три данные точки, не лежащие на одной прямой. В работе видна новизна самого приема мышления, к которому ученица пришла вполне самостоятельно: взамен обычного приема решения геометрической задачи на построение, исходящего, как известно, из предположения о том, что „задача уже решена", т. е. из эскиза того построения, которое требуется условиями задачи, ученицей принят прием, основанный, наоборот, на противоречиях между требованиями (условиями) задачи и результатом построений, которые выполнены циркулем и линейкой, но не связаны правильными взаимоотношениями, указанными условием задачи.

«Второй способ решения задачи — построить три внешне касающиеся окружности, центрами которых являются три данные точки, не лежащие на одной прямой.



Черт. 1

Первый — классический — способ решения основан на равенстве обеих касательных к окружности, проведенных из точки, лежащей вне круга.

Предлагаемый мною способ решения осуществляется более простыми построениями, выполняемыми в следующем порядке (чертеж 1).

ПОСТРОЕНИЕ

1. Из точки P, как из центра, произвольным радиусом проводится 1-я окружность.

2. Из точек K и M соответственными радиусами проводятся окружности 2-я и 3-я, касательные к 1-й.

3. Середина наименьшего расстояния между 2-й и 3-й окружностями (середина отрезка, выражающего неувязку, разрыв) делит отрезок KM на две части, каждая из которых является соответственно радиусом одной из двух искомых окружностей (2_1-й и 3_1-й). Эти найденные два радиуса определяют 3-й, что очевидно без пояснений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Преувеличение искомого радиуса 1-й окружности построением произвольного радиуса вызывает преуменьшение остальных двух радиусов на ту же величину.

Размер неувязки между 2-й и 3-й окружностями — следствие двойного преуменьшения их радиусов, поэтому добавление к каждому из них недостающей величины дает искомые радиусы окружностей 2_1 и 3_1.

При преуменьшении радиуса 1-й окружности рассуждения аналогичны приведенным.

ИССЛЕДОВАНИЕ

Построение возможно при любом положении точек, за исключением расположения их на одной прямой.

В последнем случае средняя точка явится центром окружности с радиусом, равным нулю, но будет все-таки общей точкой касания между двумя окружностями.

Ученица VII-Б класса Шатерина Инна».

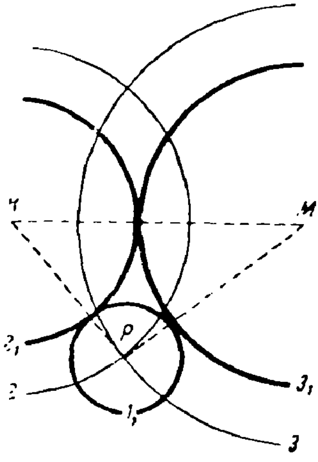
Вслед за решением этой задачи Шатериной поступает третий способ решения ее, предложенный Никитушкиной Галиной. Последняя не удовлетворяется произвольностью размера радиусов — хочет ввести обоснованные ограничения, интуитивно ощущая потребность исследования вопроса о возможных значениях длины радиусов искомых окружностей (чертеж 2).

«Вариант рассуждений при решении задачи: построить три внешне касающиеся окружности, центрами которых являются три данные точки, не лежащие на одной прямой.

Радиусы 2_1-й и 3_1-й искомых окружностей (чертеж 2) не могут быть больше расстояний от центров этих окружностей до центра 1_1-й окружности.

Строим 2-ю и 3-ю окружности этими максимально возможными радиусами, каждый из которых преувеличен на радиус искомой 1_1-й окружности.

Отсюда наименьшее расстояние между пересекающимися 2-й и 3-й окружностями равно диаметру 1_1-й искомой окружности, порядок построения которой и двух остальных искомых окружностей очевиден.



Черт. 2

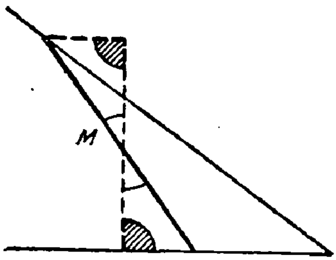
Ученица VII-А класса Никитушкина Галина».

Утверждение Никитушкиной о возможной величине радиусов 2-й и 3-й окружностей не предусматривает того, что эти радиусы не могут быть и равны отрезкам KP и PM, что правильно только в частном случае (при точках, лежащих на одной прямой и при радиусе 1-й окружности, равном нулю), но рассуждение все же указывает на самостоятельный ход мысли ученицы и приводит ее к правильному решению задачи.

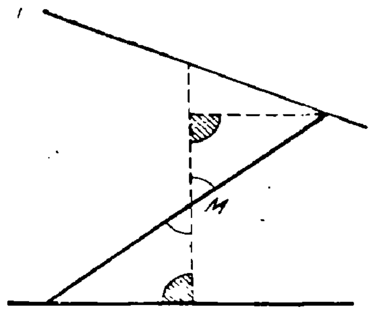
Весьма интересна работа ученицы VII-А класса Иванушкиной Тамары, которая самостоятельно дала решение известной задачи: внутри угла дана точка, через которую требуется провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился данной точкой пополам (чертеж 3 и 4).

Эта работа интересна не только со стороны приема мышления, но и по сути дела: дан новый для ученицы и ее класса метод решения, который по своей простоте и общности стоит выше обычных двух приемов, использованных большинством учениц (один из них основан на свойстве средней линии треугольника, второй — на свойстве диагоналей параллелограмма).

Правда, прием, предложенный Иванушкиной, является только частным случаем еще более общего приема, при котором проводится не перпендикуляр к одной из сторон угла, а любая прямая (через данную точку), пересекающая стороны данного угла.



Черт. 3



Черт. 4

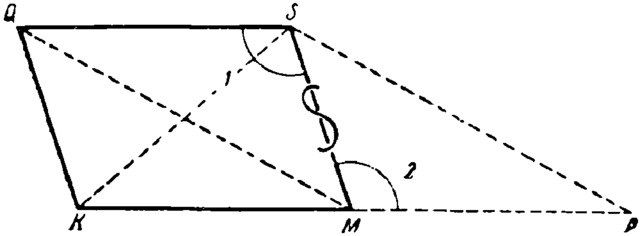
Опуская решение, приведем ту оценку, которую ученица сама дает своему способу решения (стиль отредактирован учителем).

«Предлагаемое мною решение хотя и не проще тех, которые были рассмотрены в классе (с использованием свойств элементов треугольника и параллелограмма), так как оно не пользуется меньшими средствами, но оно, по-моему, имеет более обобщенный прием построения, что, в свою очередь, позволяет применить его в некоторых частных случаях, как, например, выполнить заданное построение при отсутствии на чертеже вершины заданного угла, что может встречаться на практике, например при измерениях на пересеченной местности (чертеж 4).

Ученица VII-А класса Иванушкина Тамара».

Ученица VII-А класса Никитушкина Галина самостоятельно пришла к способу решения задачи: построить параллелограмм по двум диагоналям и стороне с помощью параллельного переноса диагонали параллелограмма (чертеж 5).

Обычный прием решения этой задачи основан на предварительном построении вспомогательного треугольника, две стороны которого получаются в результате деления данных диагоналей пополам. Способ построения ученицы виден из чертежа 5. На основе своего построения ученица дает и исследование задачи:



Черт. 5

«Построение возможно при том условии, если сумма диагоналей больше, а разность диагоналей меньше удвоенной большей стороны параллелограмма».

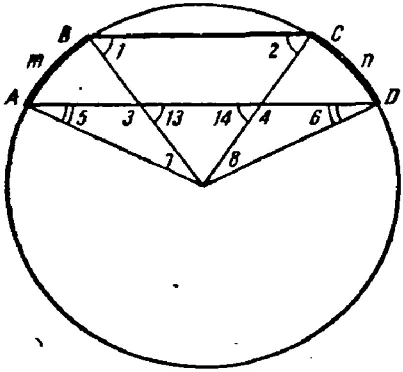
Углубленное изучение задач имеет большое значение и для усвоения учащимся нового программного материала. Коллектив учащихся, привыкших к самостоятельному творчеству, старается доказать новую теорему прежде всего самостоятельно. Таким образом, каждая очередная, предусмотренная программой, теорема выступает как задача на доказательство, и только после обнаружения невозможности самостоятельно решить эту задачу ученица пользуется учебником. Этот прием является практическим осуществлением того, что именуют обучением работе с книгой.

Приведем несколько примеров самостоятельного доказательства ученицами теорем учебника.

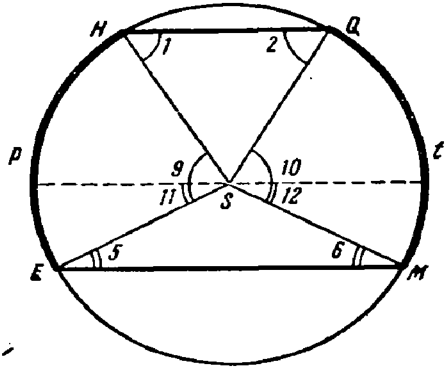
Работа Сагаловой Валентины, касающаяся доказательства равенства дуг, заключенных между параллельными хордами, интересна тем, что затрагивает два вопроса принципиального характера, касающихся метода доказательства. Доказательство построено Сагаловой, во-первых, без использования наложения (устранена необходимость выведения фигуры из плоскости) и, во-вторых, для доказательства привлечены теоремы, стоящие в курсе геометрии раньше тех, на которых основано доказательство, данное в стабильном учебнике (см. чертежи 6 и 7).

Вариант доказательства теоремы: дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

Для доказательства достаточно обоснования равенства углов, которые опираются на дуги, заключенные между данными хордами, например равенства цент-



Черт. 6



Черт. 7

ральных углов 7 и 8, соответственно опирающихся на дуги *AmB* и *CnD*, равенство которых надо доказать (чертеж 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Равными между собой углами являются:

$\angle 1$ и $\angle 2$, как углы при основании равнобедренного треугольника;

$\angle 13$ и $\angle 14$, как соответственные двум предыдущим при параллельных;

$\angle 3$ и $\angle 4$, как пополнительные к двум равным предыдущим;

$\angle 5$ и $\angle 6$, как углы при основании равнобедренного треугольника;

$\angle 7$ и $\angle 8$ — на основании теоремы о сумме внутренних углов треугольника.

При расположении параллельных хорд по обе стороны диаметра (чертеж 7) равными между собой углами являются:

$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 5$ и $\angle 6$ — на основании, указанном выше для углов за теми же номерами;

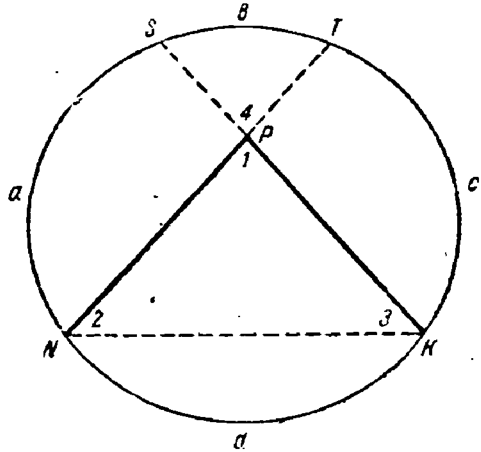
$\angle 9$ и $\angle 10$, $\angle 11$ и $\angle 12$, как накрест лежащие соответственно предыдущим равным двум парам углов.

$\angle HSE$ и $\angle QSM$ — на основании равенства предыдущих двух пар углов.

Ученица VII-Б класса Сагалова Валентина».

В приведенной ниже работе Ильченко Нины мы видим новый путь доказательства теоремы об измерении угла, вершина которого лежит внутри круга. Этот путь проще, чем приведенный в учебнике. Кроме того, он основан на теореме о сумме внутренних углов треугольника, а не на ее следствии, и вообще имеет некоторую ценность уже только потому, что он новый.

(Напоминаем, что под новизной почти во всех представленных здесь ученических работах мы подразумеваем новизну мысли для ее автора и всего ученического коллектива).



Черт. 8

„Доказательство теоремы об измерении угла, вершина которого лежит внутри круга (чертеж 8).

Доказательство учебника основано на первом следствии теоремы о сумме внутренних углов треугольника и на теореме об измерении вписанного угла.

Считаю, что возможно доказать эту теорему без следствия о внешнем угле, путем следующего обоснования.

Углы 2 и 3 треугольника NPK, как вписанные (чертеж 8), измеряются полусуммой дуг TcK и SaN, которые дополняют сумму дуг $SвT$ и NdK до полной окружности.

Угол 1 в сумме с углами 2 и 3 составляет развернутый угол.

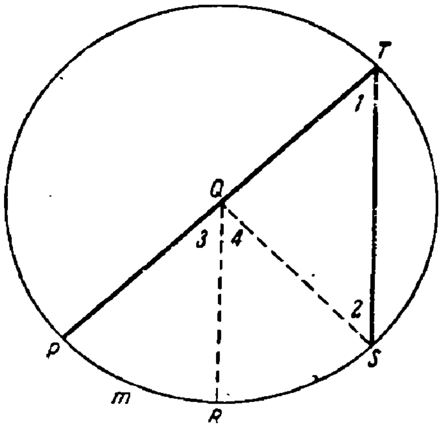
Следовательно, на долю угла 1 и равного ему угла 4 остается сумма дуг NdK и SbT.

Ученица VII-Б класса Ильченко Нина».

Вариант доказательства теоремы об измерении вписанного угла.

На чертеже 9 дан вписанный угол PTS.

После проведения радиуса QR, параллельного TS, и радиуса QS получаются четыре равных между собой угла: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$; первые два—как углы при основании равнобедренного треугольника QTS, $\angle 3$ — как соответственный $\angle 1$, а $\angle 4$—как накрест лежащий по отношению к $\angle 2$ при параллельных QR и TS.



Черт. 9

Угол 3, как центральный, измеряется дугой PmR, т. е. половиной дуги PRS; следовательно, то же относится и к равному ему $\angle 1$.

При доказательстве теоремы для остальных двух видов вписанных углов последние выражаются суммой или разностью двух вписанных углов первого вида, т. е. так же, как и в учебнике.

Ученица VII-А класса Родина Людмила».

В некоторых случаях возможно изменение в очередности доказательства теорем по сравнению с учебником. Изменение обычной последовательности иногда упрощает доказательство или дает возможность раньше ознакомить учащихся с каким-либо свойством фигуры.

Так, например, имеется возможность доказательства последней теоремы курса VII класса (о пересечении медиан; § 143 стабильного учебника) тотчас же после доказательства теоремы о средней линии треугольника, изучаемой в первой четверти учебного года.

В этом случае теорема о средней линии треугольника получает применение в теоретической части курса непосредственно после доказательства этой теоремы, что, конечно, повышает интерес к ней, ее ценность для учащихся.

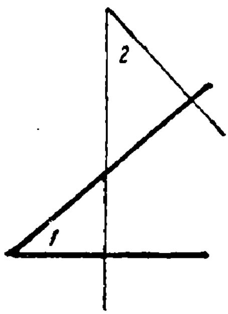
Если теорему об углах с взаимно перпендикулярными сторонами доказывать после теоремы о сумме углов треугольника, то представляется возможность доказывать эту теорему не путем построения нового угла, равного одному из данных (как в учебнике), а при помощи только продолжения сторон одного или обоих данных углов до их пересечения.

Анализ различных случаев расположения углов со взаимно перпендикулярными сторонами и видоизменений доказательства (на основе теоремы о сумме углов треугольника) был самостоятельно проведен ученицей VII-Б класса Гершойг Майей.

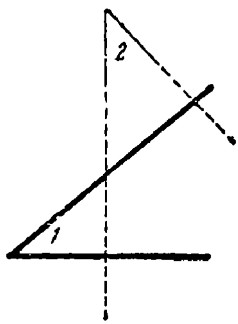
На приведенных ниже чертежах показаны различные случаи расположения углов со взаимно перпендикулярными сторонами, заметно отличающиеся от чертежа, данного в учебнике, и в то же время, что особенно важно, часто встречающиеся в задачах.

Работа Гершойг Майи интересна тем, что указывает на стремление ученицы детально исследовать все возможные случаи, обобщенные одной теоремой.

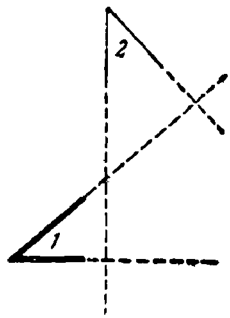
«I. Оба угла острые (чертежи 10—15).



Черт. 10



Черт. 11



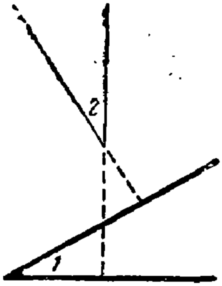
Черт. 12

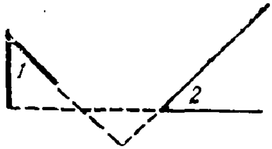
Чертеж 10. Стороны даны уже пересекающимися, остается сформулировать рассуждения о равенстве $\angle 1$ и $\angle 2$ на основании теоремы о сумме углов треугольника.

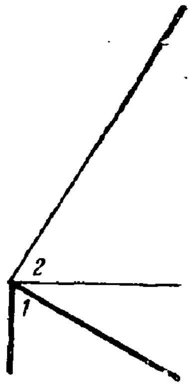
Чертеж 11. Для пересечения сторон достаточно продолжить стороны одного (второго) угла.

Чертеж 12. Требуется продолжение сторон обоих углов.

Чертеж 13. Требуется продолжение сторон одного угла (второго), но за его вершину.





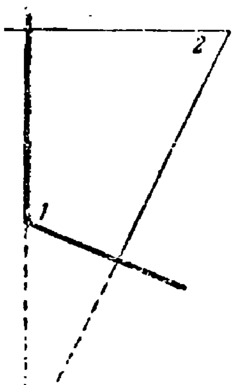


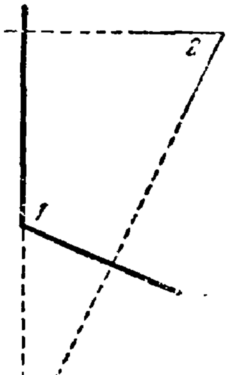
Черт. 13 Черт. 14 Черт. 15

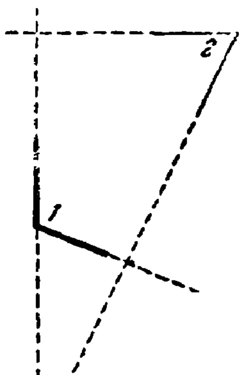
Чертеж 14. Требуется продолжение сторон обоих углов, причем одного из них (второго) — за его вершину.

Чертеж 15. Частный случай, в котором пересечения сторон не требуется.

II. Острый и тупой угол (чертежи 16—18).





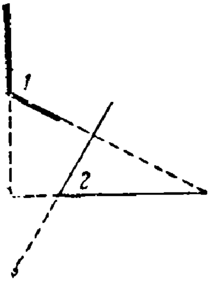


Черт. 16 Черт. 17 Черт. 18

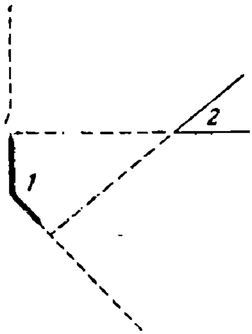
Чертежи 19—21. Случаи, аналогичные сочетаниям предыдущей группы углов.

III. Оба угла тупые (чертежи 22—24).

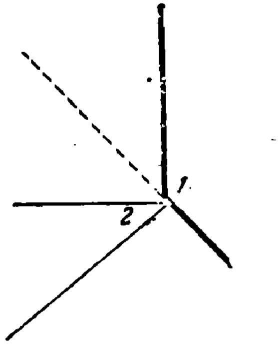
В некоторых случаях при комбинациях острого угла с тупым (чертеж 16—18) доказательство можно



Черт. 19

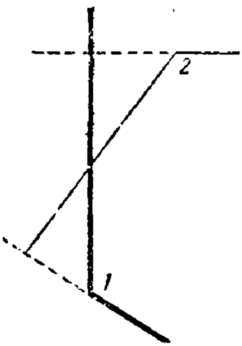


Черт. 20

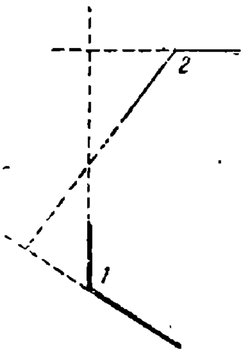


Черт. 21

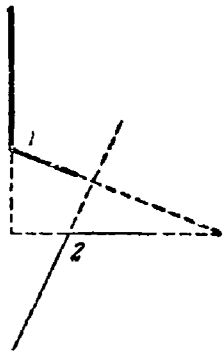
строить путем соединения вершин данных углов отрезком, который явится диагональю образовавшегося четырехугольника, разбитого на два треугольника.



Черт. 22



Черт. 23



Черт. 24

В этом случае сумма данных углов, разбитых диагональю на четыре острых угла, явится пополнением двух прямых углов четырехугольника до четырех прямых.

Ученица VII-Б класса Гершойг Майя».

Ценность вообще всякой новизны в подходе к решению математических вопросов заключается еще в следующем. Каждый коллектив учащихся, как известно, состоит из весьма разнородных по свойствам их мышления и восприятия учеников: что ни ученик, то свой особый мир.

Поэтому рассмотрение какого-либо математического положения с различных возможных точек зрения весьма ценно тем, что каждому ученику (особенно это важно при восприятии) предоставляется возможность выбора того или иного пути мышления, в зависимости от типа его восприятия или каких-либо других его особенностей, зачастую не поддающихся учету. Кроме того, новый путь, указанный учеником, нередко является более понятным для ученической массы по сравнению с материалом учебника или пояснениями преподавателя.

Здесь, конечно, играет роль не столько самое содержание новой мысли, сколько момент психологического порядка: говорит девочка (мальчик)—сверстник, а не преподаватель и не книга, отражающая мышление людей науки, накопленное тысячелетиями; создается настороженность, предельно напряженное внимание, бо́льшая заинтересованность: неужели эта, до сего дня ничем не выделявшаяся подруга, действительно, скажет сейчас что-то такое, что явится равноценным изложенному в учебнике или указанному преподавателем, не заметят ли сейчас какую-нибудь ошибку в обосновании новых утверждений...

Работа по развитию математического мышления у учащихся помогает преподавателю также и в определении характера мышления каждого ученика, типа его памяти, свойств его восприятия, т. е. содействует всестороннему изучению ученика.

Знание сильных и слабых сторон мышления учащегося, конечно, сильно помогает преподавателю в осуществлении индивидуального подхода к каждому ученику, что, как известно, является решающим условием в вопросе успеваемости.

Опыт показывает, что ученическая масса хранит в себе очень большие, но скрытые возможности, реализация которых весьма благотворно действует на успеваемость не только творчески настроенных учеников, но и всего данного коллектива (класса). Кстати следует отметить, что большинство предложений (вариантов приемов решения задач, доказательств) поступает от учащихся с успеваемостью средней или выше средней—не обязательно от отличников,—что свидетельствует о возможности охвата этой работой широкого круга учащихся.

Полагаем, что работа по вскрытию мыслительных возможностей учащихся заслуживает большего внимания преподавателей, методистов и лиц, работающих в области педагогической психологии.

И. И. СМИРНОВ,
учитель 188-й средней школы

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

В школьном курсе тема „Исследование уравнений“ ограничивается рассмотрением видов решений уравнений (положительное, отрицательное, нулевое, неопределенное, случай отсутствия решения), условий их получения, пригодности возможных решений уравнения для решения задачи; ее изучение дает основу для решения задач с буквенными параметрами.

При исследовании уравнения, составленного по условиям задачи, в более общем случае приходится устанавливать:

область допустимых значений параметров и соотношения между последними, при которых задача имеет решение;

область допустимых значений неизвестного, удовлетворяющих решению задачи;

возможные виды полученного решения уравнения в соответствии с установленными значениями параметров;

корни уравнения, удовлетворяющие решению задачи.

Очерченный круг вопросов исследования представляет для учащихся значительные трудности, методически еще недостаточно разъясненные; содействовать преодолению этих трудностей и ставит своей задачей дальнейшее изложение опыта работы по теме с 1940 г., когда был опубликован начальный опыт (журнал „Математика в школе“ № 1 за 1940 г.).

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Большое затруднение для учащихся в начале работы представляет установление по условиям задачи области допустимых значений параметров и неизвестного. Целесообразно поэтому ввести пропедевтические упражнения, материал для которых может быть взят из различных изученных разделов математики и к которым следует прибегать по мере необходимости. Приводим примеры таких упражнений.

В области каких вещественных чисел верны следующие тождества:

1. $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $\lg x^2 = 2 \lg x$.
3. $\log_x 4 = 2 \log_x 2$.
4. $\sin(\arcsin x) = x$.
5. $C_x^3 = C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2$.
6. $\arcsin a = \arccos \sqrt{1 - a^2}$

При каких вещественных значениях параметров нижеследующие уравнения имеют решения:

7. $\log x - 1 = a$.
8. $\log_a x = 2$.
9. $1 + x = \sqrt{a}$.
10. $\log_{a^2} x = 2$.
11. $2 \sin x = a$.

При каких вещественных значениях параметров нижеследующие уравнения не имеют решения:

12. $\frac{x-2}{m} = 2$.
13. $(a - 2)\ \mathrm{tg} x = 1$.
14. $\frac{2}{x} = \frac{a-2}{a+3} + 5$.

Приведем мотивированный ответ к задаче 4: $1 \leq x \leq 1$, так как абсолютная величина синуса угла не может превышать 1.

К правильному и исчерпывающе мотивированному решению и должны сводиться пропедевтические упражнения.

Приводим ответы к остальным упражнениям.

1. x — любое число.
2. $x > 0$.
3. $x > 0$, кроме $x = 1$.
5. $x \geqslant 4$ и целое число.
6. $0 \leqslant a \leqslant 1$.
7. a — любое число.
8. $a > 0$, кроме $a = 1$.
9. a — любое число.
10. a — любое число, кроме $a = 0$ и $a = \pm 1$.
11. $-2 \leqslant a \leqslant 2$.
12. $m = 0$.
13. $a = 2$.
14. $a = -3$; $a = -\frac{13}{6}$.

II. УПРАЖНЕНИЯ НА НЕРАВЕНСТВА

Место темы „Исследование уравнений" в программе X класса объясняется тем, что для работы по ней требуется знание теории неравенств и прочные навыки по решению и доказательству неравенств. При работе по теме „Неравенства", входящей также в программу X класса, следует иметь в виду ее приложение при исследовании уравнений. В частности, в неравенствах учащиеся впервые в достаточной полноте оперируют с понятием числового множества: так, возможные значения переменной в неравенствах рассматриваются только во множестве вещественных чисел; область возможных значений неизвестной, удовлетворяющих конкретному неравенству, принадлежит определенному множеству, к установлению которого и сводится решение неравенства; подчеркнуть сказанное в теме о неравенствах очень существенно.

При исследовании уравнений часто приходится прибегать к доказательству неравенств или к установлению соотношений между параметрами, при которых выполняется заданное неравенство, поэтому и этой части должно быть уделено достаточное внимание. Для упражнений следует использовать №№ 52—63 по задачнику Шапошникова (ч. II, гл. XX) и №№ 85 и 101—106 по дополнительному сборнику упражнений по алгебре под редакцией проф. Гребенча (§ 25).

Следует заметить, что методы доказательства неравенств различны (Невяжский Г. Л. — „Неравенства", изд. 1947 г.); в ограниченное учебное время учащиеся не могут овладеть всеми методами, — из них надо сделать отбор.

В последующем изложении неравенство, справедливость которого требуется доказать тождественными в заданном числовом множестве преобразованиями, приводится к очевидому неравенству, справедливость которого можно обоснованно утверждать, из чего следует, что будет верно и исходное неравенство, эквивалентное в заданном числовом множестве.

Сказанное сейчас не исключает ознакомления учащихся с другими приемами доказательства, особенно, когда их можно дать на одном примере (разд. II, задача 2°).

Приводим примеры упражнений на неравенства.

1°. При каких положительных значениях m и n неравенство

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{4}{m+n}$$

будет верно.

Решение

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{4}{m+n};$$

$$mn(m+n)>0,\ mn+n^2+m^2+mn>4mn;$$

$$m^2+n^2-2mn>0;$$

$$(m-n)^2>0.$$

Квадрат любого вещественного числа, кроме нуля, положительное число. Поэтому достаточно, чтобы $m \neq n$, и вне зависимости от знака разности $m-n$ квадрат ее будет положительным числом; эквивалентное конечному исходное неравенство будет выполняться при тех же условиях.

Ответ. При любых положительных значениях m и n при условии $m \neq n$.

2°. Доказать, что сумма квадратов двух положительных чисел больше их произведения.

Решение

Вариант 1а

Пусть $a > 0$, $b > 0$.

Тогда $a^2 + b^2 > ab$;

$$a^2 + b^2 - 2ab > -ab;$$

$$(a - b)^2 > -ab.$$

Справедливость полученного неравенства очевидна, так как квадрат разности двух вещественных чисел будет или положительное число или нуль; исходное неравенство будет также верно, как эквивалентное последнему.

Вариант 1б

$$a^3 + b^3 > 0;$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) > 0;$$
$$a + b > 0;\ a^2 - ab + b^2 > 0;$$
$$a^2 + b^2 > ab,$$

что и требовалось доказать.

Вариант 1в

$$a^2 + b^2 > ab;$$
$$a^2 + b^2 - ab > 0.$$

В левой части неравенства имеем квадратный трехчлен; исследуя его, как квадратную функцию от a при $b > 0$, получим, что при любом вещественном значении a трехчлен будет выражаться положительным числом (дискриминант $-3b^2$ число отрицательное); то же получим, рассматривая трехчлен как функцию от b при $a > 0$. Эквивалентное исходное неравенство будет также верно при любых положительных значениях a и b.

Вариант 1г

$$(a - b)^2 \geqslant 0;$$
$$a^2 + в^2 - 2aв \geqslant 0;$$
$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab > ab;$$
$$a^2 + b^2 > ab,$$

что и требовалось доказать.

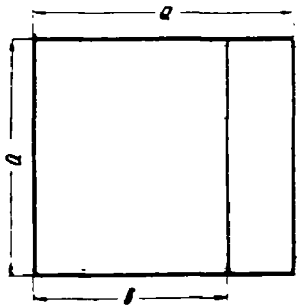
Вариант 2а. Геометрическое доказательство.

Будем рассматривать a и b как числовые значения размеров сторон прямоугольника, в котором $a > b$ (чертеж 1).

Тогда в неравенстве

$$a^2 + b^2 > ab$$

будем иметь в левой части сумму площадей двух квадратов со стороной a и стороной b, в правой — площадь прямоугольника со сторонами a и b. Так как площадь одного квадрата со стороной a будет больше площади прямоугольника, то и подавно сумма площадей двух квадратов будет больше площади прямоугольника, или:



Черт. 1

$$a^2 + b^2 > ab$$

при любых положительных значениях a и b.

3°. Доказать при $m > 0$, $n > 0$, $k > 0$:

$$\frac{-(m-2k-n)+\sqrt{(m-2k-n)^2+4mk}}{2} > k.$$

Имеем последовательно:

$$\frac{-(m-2k-n)+\sqrt{(m-2k-n)^2+4mk}}{2} > k \quad . \ . \ . \ (1)$$

$$2 > 0, \ -(m-2k-n) + \sqrt{(m-2k-n)^2+4mk} > 2k;$$

$$\sqrt{(m-2k-n)^2+4mk} > m-n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Знак разности в правой части неравенства неизвестен, поэтому рассматриваем три возможные ее значения.

1. $m-n<0$. Неравенство верно, так как любое положительное значение $\sqrt{(m-2k-n)^2+4mk}$ больше отрицательного числа.

2. $m-n=0$. Справедливость неравенства очевидна.

3. $m-n>0$. Тогда

$(m-2k-n)^2+4mk > (m-n)^2$;

$m^2+4k^2+n^2-4mk-2mn+4nk+4mk > m^2-2mn+n^2$;

$4k(k+n) > 0$.

Полученное неравенство верно, так как произведение положительных чисел в его левой части—положительное число.

Таким образом, неравенство (2) верно при любом значении разности $m-n$; эквивалентное ему исходное неравенство (1) будет также верно.

4°. Стоимость насоса a рублей, стоимость капитального ремонта его r рублей. В некоторых условиях без ремонта насос может работать n лет, с ремонтом в тех же условиях m лет. Определить условия, при которых затрата на ремонт оправдывает себя.

Решение

Стоимость употребления насоса в один год без ремонта $\frac{a}{n}$ рублей, с ремонтом $\frac{a+r}{m}$ рублей. Ремонт будет оправдывать себя в том случае, если стоимость употребления насоса в один год при ремонте будет не больше стоимости употребления без ремонта. Отсюда получаем неравенство:

$$\frac{a+r}{m} \leqslant \frac{a}{n};$$

$$m > 0, \qquad a + r \leqslant \frac{am}{n};$$

$$r \leqslant \frac{am - an}{n};$$

$$r \leqslant \frac{a}{n}(m-n).$$

Ответ.

Ремонт будет оправдывать себя, если его стоимость будет не больше произведения стоимости годового употребления насоса без ремонта на дополнительное число лет употребления его в случае ремонта.

III. УПРАЖНЕНИЯ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ В УРАВНЕНИЯХ

Упражнение на исследование параметров уравнений при заданной области допустимых значений неизвестного являются подготовительными к решению задач на составление уравнения. Примеры упражнений на уравнения первой степени с одним неизвестным и на системы уравнений с двумя неизвестными имеются в задачнике Шапошникова и др. Однако для решения таких примеров еще не имеется проверенной методики. Приводим решение упражнения № 6 (ч. II, гл. XXIII) по Шапошникову.

1°. Определить, при каких значениях a уравнение

$$\frac{3}{4x-a}=\frac{2}{ax-5}$$

имеет отрицательные решения.

Решение

$$\text{При } 4x-a\neq 0,\ x\neq\frac{a}{4}\ \text{ и } ax-5\neq 0,\ x\neq\frac{5}{a}:$$

$$3\ (ax-5)=2\ (4x-a);$$

$$3\ ax-15=8x-2a;$$

$$(3a-8)\,x=15-2a.$$

$$\text{При } 3a-8\neq 0,\ a\neq 2\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{15-2a}{3a-8}.$$

Исследование значений параметра a.

Как уже отмечено, исходное уравнение не имеет решения при $x=\frac{a}{4}$ или $x=\frac{5}{a}$. Находим соответствующие значения a по формуле решения уравнения:

$$\frac{15-2a}{3a-8}=\frac{a}{4};$$

$$60-8a=3a^2-8a;$$

$$a^2=20;$$

$$a=\pm 2\sqrt{5}.$$

Действительно, при $a=-2\sqrt{5}$ знаменатель дроби $4x-a$ в исходном уравнении будет равен нулю:

$$4\cdot\frac{15+4\sqrt{5}}{-6\sqrt{5}-8}+2\sqrt{5}=2\sqrt{5}-\frac{30+8\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+4}=0,$$

и исходное уравнение теряет смысл; то же будет при $a=2\sqrt{5}$. Подстановка в формулу значения $x=\frac{5}{a}$ даст те же значения a.

Таким образом, в условиях задачи $a \neq 2\sqrt{5}$, $a \neq -2\sqrt{5}$, $a \neq 2\frac{2}{3}$; $x < 0$.

Дробь $\frac{15-2a}{3a-8}$ будет отрицательной ($x < 0$), если числитель и знаменатель дроби имеют разные знаки; отсюда получаем две системы неравенств:

$$1. \begin{cases} 15-2a > 0 \\ 3a-8 < 0 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} 15-2a < 0 \\ 3a-8 > 0 \end{cases}$$

Решение первой системы: $a < 2\frac{2}{3}$; **второй системы:** $a > 7{,}5$.

Ответ.

При $a > 7{,}5$ или при $a < 2\frac{2}{3}$, кроме $a = -2\sqrt{5}$.

В задачнике Шапошникова приводится ответ: $a < 2\frac{2}{3}$ или $a > 7{,}5$.

Источник неточности ответа здесь следует искать в отсутствии исследования значений параметра a по исходному уравнению.

Такие неточности встречаются и в ответах к другим упражнениям в задачнике Шапошникова, а также в „Дополнительном сборнике" под редакцией проф. Гребенча (гл. XXIII, № 6). Предупреждение подобных ошибок, в частности, преследуют указанные выше пропедевтические упражнения.

Решению примеров на исследование параметров следует уделить достаточно внимания, так как это способствует и лучшему усвоению теории.

При упражнениях на систему уравнений первой степени с двумя неизвестными для выражения неизвестных удобно пользоваться общим видом выводных уравнений.

Решая систему

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

получим:

$$(ab' - a'b)\ x = cb' - c'b; \ (ab' - a'b)\, y = ac' - a'c.$$

Подставляя вместо параметров a, a', b, b', c, c' соответствующие значения по заданной системе, будем иметь для нее выводные уравнения, что сокращает работу ученика. Здесь можно указать прием, позволяющий быстро воспроизвести общий вид выводных уравнений, выражающийся в следующем.

Одинаковые коэфициенты при x и y составляются так:

1) пишем перестановки ab и ba;

2) берем их разность $ab - ba$;

3) ставим индексы у вторых сомножителей: $ab' - ba'$.

Свободные члены получаем заменой в разности $ab' - a'b$ коэфициентов определяемого неизвестного свободными членами с соответствующими индексами.

Приводим примеры упражнений.

2°. Определить значения a, при которых система

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ ax + y = 8 \end{cases}$$

имеет отрицательные решения.

Решение

$$(3 + 2a)\,x = 21;\ (3 + 2a)\,y = 24 - 5a.$$

При $3 + 2a \neq 0$ или $a \neq -1{,}5$ получаем:

$$x = \frac{21}{3 + 2a}; \qquad y = \frac{24 - 5a}{3 + 2a}.$$

Дробь, выражающая x, будет отрицательной, если ее знаменатель будет отрицательным числом:

$$2a + 3 < 0.$$

Знаменатель дроби, выражающей y, должен быть, как это установлено по x, отрицательным числом; следовательно, эта дробь может быть отрицательной только при положительном значении числителя:

$$24 - 5a > 0.$$

Таким образом, определение значений a сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 3a + 3 < 0, \\ 24 - 5a > 0. \end{cases}$$

По первому неравенству $a < -1{,}5$, а по второму $a < 4{,}8$; общее решение системы $a < -1{,}5$.

Ответ: при $a < -1{,}5$.

3°. Определить значения a, при которых система

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10, \\ 2x - ay = 2 \end{cases}$$

имеет решение нулевое относительно x и превышающее -3 относительно y.

Решение

$$(3a + 4)x = 2(2 + 5a); \ (3a + 4)y = 14.$$

При $a \neq -\frac{4}{3}$

$$x = \frac{2(2 + 5a)}{3a + 4}; \qquad y = \frac{14}{3a + 4}.$$

Исследование значений параметра a

По условию задачи

1. $x = 0$. $2 + 5a = 0$, $a = -0{,}4$ . . . . (1).

2. $y > -3$. $\frac{14}{3a+4} > -3$; $\frac{14}{3a+4} + 3 > 0$; $\frac{26 + 9a}{3a + 4} > 0$.

Дробь будет положительной, если числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки; получаем две системы неравенств:

$$1. \begin{cases} 26 + 9a > 0, \\ 4 + 3a > 0; \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} 26 + 9a < 0, \\ 4 + 3a < 0. \end{cases}$$

Решение первой системы: $a > -1\frac{1}{3}$ (2′);

второй системы: $a < -2\frac{8}{9}$ . . . . (2″).

Теперь для значений a, удовлетворяющих условию задачи, имеем:

или $a = -0{,}4$ (1) и $a > -1\frac{1}{3}$ (2′), откуда $a = -0{,}4$;

или $a = -0{,}4$ (1) и $a < -2\frac{8}{9}$ (2″), причем общих значений нет.

Ответ: $a = -0{,}4$.

4°. Определить, при каких значениях m система

$$\begin{cases} 2x - my = 3, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

не имеет решения.

Решение

$$(4 + 3m)x = 6 + 5m; \ (4 + 3m)y = 1.$$

Система не будет иметь решения, если $4 + 3m = 0$ и $6 + 5m \neq 0$

$$4 + 3m = 0; \quad m = -1\frac{1}{3}.$$

Подставляя это значение m в выражение $6 + 5m$, получаем

$$6 - 5 \cdot 1\frac{1}{3} = 6 - 6\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Значение $m = -1\frac{1}{3}$ удовлетворяет обоим условиям.

Ответ: $m = -1\frac{1}{3}$.

Примечание. Упражнения на систему первой степени можно также решать, основываясь на отношениях между коэфициентами, определяющими вид решения системы, и другими приемами.

IV. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Здесь прежде всего следует притти к известным соглашениям, на основе которых проводится исследование уравнения, составленного по условиям задачи.

Основными из таких соглашений, положенных в дальнейшем в основу решения задач, являются следующие.

1. Решить задачу — значит дать ответ на вопрос задачи в точном соответствии с формулировкой ее условия; исследование решения уравнения является составной частью такого решения задачи.

2. Величины, выражаемые параметрами, рассматриваются как ненаправленные, и областью допустимых значений параметров принимается множество положительных чисел.

Поясним сказанное (соглашения первое и второе) на примере.

В приводимом ниже решении задачи (разд. IV, А, задача 3°) условие: „В каждый час в первый резервуар вливается по m ведер, а во второй по n ведер"—выполняется при $m>0$ и $n>0$; допущения: $m>0$ и $n<0$, или $m<0$, $n>0$, или $m<0$, $n<0$, или $m=0$, $n<0$ и т. д., что равносильно изменению условий задачи, не рассматриваются; допущение $m>0$ и $n<0$ соответствовало бы такой измененной формулировке условия задачи: „В каждый час в первый резервуар вливается по m ведер, а из второго вытекает по n ведер", и т. п.

3. Неизвестные величины могут рассматриваться как направленные, когда это допускает смысл задачи; областью допустимых значений неизвестной величины при этом будет множество вещественных чисел.

Таким допущением отрицательному решению уравнения дается определенное толкование: его абсолютная величина дает ответ на вопрос, противоположный по смыслу поставленному в задаче („расширенное понимание вопроса задачи"); также получает определенный смысл и нулевое решение. В отдельных случаях, как, например, при определении температуры смеси, отрицательное решение дает прямой ответ на вопрос задачи (—3°Ц; и т. п.).

Примером здесь может служить решение задачи (разд. IV А, задача 2°), в которой требуется ответить на вопрос: „Через сколько лет отец будет старше сына в k раз, если в данное время отцу a лет и сыну b лет?" Решение начинается с допущения, что отец будет старше сына в k раз через x лет. Это допущение можно рассматривать как соглашение, по которому за начало отсчета времени принимается данный момент, время в будущее считается положительным, время в прошедшее — отрицательным. При таком соглашении нулевое или положительное значение x дает ответ на вопрос задачи; отрицательное же решение показывает, что при $\frac{a}{b}<k$ поставленный в задаче вопрос не имеет ответа, так как заданное соотношение возрастов (k) уже было в прошлом, и что задача будет иметь решение, если изменить вопрос на противоположный по смыслу: „Сколько лет назад отец был старше сына в k раз?" Абсолютная величина отрицательного значения x дает ответ на такой измененный вопрос.

4. Соотношения между параметрами и ограничения области допустимых значений параметров и искомой величины, определяющие возможность решения задачи, устанавливаются логически по смыслу задачи („Условия задачи, не выражаемые уравнением“—по Киселеву и Бертрану).

В качестве примера укажем на приводимые ниже (разд. IV А, задача 2°) условия, при которых задача имеет смысл: 1) $a > b$, так как отец всегда старше сына; 2) $k > 1$, потому что k выражает отношение большего положительного числа (возраст отца) к меньшему (возраст сына); 3) $x > -b$ (b лет назад не было еще сына, и при $x \leqslant -b$ задача не имеет решения).

5. В процессе исследования формулы решения уравнения могут быть установлены дополнительные соотношения между параметрами, определяющие либо вид решения уравнения (разд. IV А, задачи 2°, 3°), **либо условия возможности решения задачи** (раздел IV А, задачи 3°, 4°, 5°).

На основе приведенных соглашений намечается такой план решения задачи на составление уравнения.

1. Составление и решение уравнения.

2. Исследование формулы решения уравнения:

а) определение по условиям задачи области допустимых значений параметров и соотношений между ними, при которых задача имеет смысл (решение);

б) определение области допустимых значений искомой величины, удовлетворяющих решению задачи;

в) установление возможных видов решения уравнения и их смысла;

г) отбор решений уравнения, дающих определенный ответ на вопрос задачи.

Заметим, что в основу исследования уравнения при решении задачи может быть положена и другая методика.

Сформулированные здесь соглашения, цель и содержание исследования уравнения при решении задач применялись в упомянутой выше статье („Математика в школе“, 1940 г.) и с 1940 г. отражены в требованиях к экзаменационным работам в X классах в следующей формулировке.

«При исследовании решения надо определить:

1. При каких значениях параметров и при каких соотношениях между ними задача имеет смысл?

2. Каково должно быть решение (положительное, отрицательное или нулевое), чтобы оно удовлетворяло условиям задачи?

3. Какой корень удовлетворяет этим условиям и почему?

Приводим приложение сказанного здесь к решению задач (А, Б, В).

А. Уравнение первой степени с одним неизвестным

1°. Переднее колесо повозки имеет в окружности a метров, заднее b метров. Как велик путь, на котором переднее колесо сделает одним оборотом больше заднего? (Шапошников, ч. II, гл. XXIII, № 20).

Решение

Пусть искомый путь будет x метров; тогда заднее колесо сделает $\frac{x}{b}$ оборотов, переднее $\frac{x}{a}$ оборотов и по условию

$$\frac{x}{b}+1=\frac{x}{a};$$

$$(b-a)\,x=ab.$$

При $b-a\neq 0$

$$x=\frac{ab}{b-a}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $0<a<b$, так как длина окружности заднего колеса больше: на одинаковом расстоянии это колесо делает одним оборотом меньше; $x>a$ — по условию задачи переднее колесо делает более одного оборота.

При $b>a$ разность „$b-a$“ >0, корень уравнения выражает положительное число. Проверяем его по условию $x>a$.

$$\frac{ab}{b-a}>a;$$

$$b-a>0,\quad ab>ab-a^2;$$

$$0>-a^2.$$

Справедливость полученного неравенства очевидна, эквивалентное ему исходное неравенство будет верно, и корень уравнения удовлетворяет условию задачи.

Ответ.

Искомый путь равен $\frac{ab}{b-a}$ километрам.

2°. Отцу a лет, сыну b лет. Через сколько лет отец будет в k раз старше сына? (там же, № 18).

Решение

Допустим, что отец будет старше сына в k раз через x лет. Тогда отцу будет $(a+x)$ лет, а сыну $(b+x)$ лет в тот момент, когда отношение их возрастов будет равно k.

Получаем уравнение

$$a+x=k(b+x);$$

$$(k-1)x=a-kb.$$

При $k-1\neq 0$

$$x=\frac{a-kb}{k-1}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $0<b<a$ (отец старше сына); $k>1$, так как k выражает отношение большего положительного числа к меньшему; $x>-b$ (b лет назад сына еще не было).

Положительное решение

$k>1$, $k-1>0$ — знаменатель дроби положительное число; числитель $(a-kb)$ также должен иметь положительное значение;

$$a-kb>0;\quad \frac{a}{b}>k.$$

Последнее соотношение $\frac{a}{b}>k$ показывает, что отец будет старше сына по прошествии нескольких лет, если отношение возрастов в данное время больше k: от прибавления к числителю и знаменателю неправильной дроби равных чисел дробь уменьшается.

Нулевое решение

$k-1\neq 0$; $a-kb=0$, $\frac{a}{b}=k$, т. е. требуемое соотношение имеется в данный момент.

Отрицательное решение

При $k-1>0$ решение будет отрицательным, если числитель дроби будет иметь отрицательное значение:

$$a-\kappa b<0,$$

откуда

$$\frac{a}{b}<k.$$

Как видно из последнего неравенства, отрицательное решение получается в том случае, если отношение возрастов в данное время меньше заданного и, следовательно, требуемое соотношение уже было ранее: при вычитании из числителя и знаменателя неправильной дроби равных чисел дробь увеличивается.

Проверяем отрицательное решение по условию $x>-b$:

$$\frac{a-kb}{k-1}>-b;$$

$$\kappa-1>0, \qquad a-kb>-kb+b;$$

$$a>b.$$

Справедливость неравенства очевидна.

Ответ.

1. При $\frac{a}{b}>k$ отец будет старше сына в k раз через $\frac{a-kb}{k-1}$ лет.

2. При $\frac{a}{b}=k$ отец в данное время в k раз старше сына.

3. При $\frac{a}{b}<k$ отец был старше сына в k раз $\left|\frac{a-kb}{k-1}\right|$ лет назад.

Замечание. Исследование условий, при которых уравнение не имеет корня или имеет неопределенное решение, отпадает в силу условий $k>1$.

3°. В одном резервуаре a ведер, а в другом b ведер воды. В каждый час в первый резервуар прибавляется по m ведер, а во второй по n ведер. Через сколько часов количество ведер воды в обоих резервуарах сравняется? (там же, № 17).

Решение

Допустим, что количество воды в обоих резервуарах сравняется через x часов, тогда в первом резервуаре будет $(a+mx)$ ведер, а во втором $(b+nx)$ ведер воды. Получаем уравнение

$$a+mx=b+nx;$$

$$(m-n)x=b-a \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

При $m-n\neq 0$

$$x=\frac{b-a}{m-n}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a>0$, $b>0$, $m>0$, $n>0$; или $x>-\frac{a}{m}$ ($\frac{a}{m}$ часов назад в первом резервуаре не было воды), или $x>-\frac{b}{n}$ ($\frac{b}{n}$ часов назад не было воды во втором резервуаре).

Положительное решение

Вариант 1. $b-a>0$ и $m-n>0$.

Отсюда $b>a$ и $m>n$, т. е в данное время во втором резервуаре воды больше и поступает в него за каждый час меньше, почему количество воды в резервуарах может сравняться по прошествии нескольких часов.

Вариант 2. $b-a<0$ и $m-n<0$.

Теперь $b<a$ и $m<n$: в данное время во втором резервуаре воды меньше, а за каждый час в него поступает больше, и опять количество воды в обоих резервуарах может сравняться в будущем.

Нулевое решение

$$m-n\neq 0,\ b-a=0.$$

Если $m\neq n$ и $b=a$, т. е. если за каждый час в резервуары поступает разное количество воды, то равное количество воды в них может быть только в данный момент.

Отрицательное решение

Вариант 1. $b-a>0$ и $m-n<0$.

Тогда $b>a$ и $m<n$, т. е. при меньшем количестве воды в первом резервуаре в данный момент и при меньшем поступлении в него воды за каждый час равное количество воды в обоих резервуарах могло быть только ранее.

Так как в данное время во втором резервуаре воды больше и за каждый час в него поступает большее количество воды, то равное количество последней в обоих резервуарах могло быть в какой-либо предшествующий момент лишь в том случае, если наполнение второго резервуара начинается позднее;
отсюда

$$\frac{b}{n}<\frac{a}{m}$$

или

$$-\frac{b}{n}>-\frac{a}{m}.$$

Проверяем решение по условию $x>-\frac{b}{n}$.

$$\frac{b-a}{m-n}>-\frac{b}{n};$$

$m-n<0,$ $\qquad$ $bn-an<-bm+bn;$

$-mn<0,$ $\qquad$ $\frac{a}{m}>\frac{b}{n}.$

Конечное неравенство выражает соотношение между параметрами, при котором момент выравнивания количества воды в резервуарах мог наступить; отрицательное решение уравнения (при $b-a>0$ и $m-n<0$) удовлетворяет решению задачи.

Вариант 2. $b-a<0$ и $m-n>0$.

Теперь имеем: $b<a$ и $m>n$; это значит, что в данное время воды больше в первом резервуаре и за каждый час поступает в него воды больше, чем во второй; поэтому опять равное количество воды в обоих резервуарах могло быть только раньше данного момента.

При $a > b$ и $m > n$ момент выравнивания количества воды в резервуарах мог наступить при

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{n} \quad \text{или} -\frac{a}{m} > -\frac{b}{n}.$$

Проверяем решение по условию $x > -\frac{a}{m}$.

$$\frac{b-a}{m-n} > -\frac{a}{m};$$

$m - n > 0, \qquad bm - am > -am + an;$

$mn > 0, \qquad \frac{b}{n} > \frac{a}{m}.$

Конечное неравенство выражает соотношение между параметрами, при котором отрицательное решение уравнения (при $b - a < 0$ и $m - n > 0$) удовлетворяет решению задачи.

Неопределенное решение

Если в уравнении $(m - n)x = b - a$, $m - n = 0$ и $b - a = 0$ или $m = n$ и $b = a$, то оно будет удовлетворяться любым значением x. Соотношение $m = n$ выражает, что в каждый резервуар за час прибывает равное количество воды, соотношение $b = a$ указывает на равное количество воды в резервуарах в данный момент. Очевидно, что количество воды в резервуарах при таких условиях будет в любой момент равным.

Уравнение не имеет решения

Если $m - n = 0$ и $b - a \neq 0$, то при любом значении x равенство, выражаемое уравнением, невыполнимо, решения нет. Вытекающие соотношения $m = n$ и $b \neq a$ выражают равное поступление воды в каждый резервуар за час при неравном ее количестве в резервуарах в данный момент — условия, при которых выравнивание количества воды в резервуарах не может наступить.

Ответ.

1. При $b > a$ и $m > n$ или $b < a$ и $m < n$. Равное количество воды в резервуарах будет через $\left|\frac{b-a}{m-n}\right|$ часов.

2. При $b=a$ и $m \neq n$. Равное количество воды в резервуарах имеется в данный момент.

3. При $b>a$, $m<n$ и $\frac{b}{n}<\frac{a}{m}$ или при $b<a$, $m>n$ и $\frac{b}{n}>\frac{a}{m}$. Равное количество воды в резервуарах было $\left|\frac{b-a}{m-n}\right|$ часов назад.

4°. Два куска латуни весят a килограммов. В первом куске чистой меди содержится p процентов, во втором q процентов; при этом в первом куске чистой меди на b килограммов больше, чем во втором. Сколько весит каждый кусок латуни?

Решение

Предположим, что первый кусок весил x килограммов, тогда второй весил $(a-x)$ килограммов; в первом куске чистой меди будет $\frac{px}{100}$ килограммов, во втором $\frac{(a-x)q}{100}$ килограммов. По условию в первом куске на b килограммов чистой меди больше, что и выражаем уравнением: $\frac{px}{100}-\frac{(a-x)q}{100}=b$; решаем его.

$$(p+q)x=aq+100b;$$

$$x=\frac{aq+100b}{p+q}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a>0$, $p>0$, $q>0$, $b>0$; $b<x<a$.

В формуле решения уравнения числитель и знаменатель дроби — положительные числа, и уравнение имеет положительное решение. Проверяем его по условию $x<a$.

$$\frac{aq+100b}{p+q}<a;$$

$$p+q>0, \qquad aq+100b<ap+aq;$$

$$100b<ap;$$

$$100>0, \qquad b<\frac{ap}{100}.$$

Полученное неравенство определяет условие, при котором задача имеет решение ($x < a$): разность содержания чистой меди в двух кусках меньше ее содержания в первом куске, она и подавно должна быть меньше содержания чистой меди в обоих кусках, при том же (p) проценте, что и выражает неравенство. Эквивалентное исходное неравенство будет выполняться при тех же условиях.

Проверяем решение по условию $x > b$

$$\frac{aq + 100b}{p + q} > b;$$

$$aq + 100b > \quad + qb$$

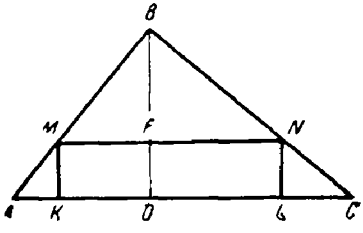
$$(a - b)q > (p - 100)b.$$

Полученное неравенство верно, так как $a > b$ и $p < 100$ (латунь). Решение удовлетворяет условию $x > b$.

Ответ при $b < \frac{ap}{100}$.

Первый кусок весит $\frac{aq + 100b}{p + q}$ килограммов, второй $\frac{ap - 100b}{p + q}$ килограммов.

5°. Установить условия, при которых в треугольник с основанием a и высотой h можно вписать прямоугольник, периметр которого равен $2\,p$, так, чтобы две вершины его лежали на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах треугольника.



Черт. 2

Аналитическое решение

Допустим (чертеж 2): $AC = a$, $BD = h$, $MK + MN = p$.

Чтобы вписать прямоугольник, достаточно, как видно из чертежа, определить его сторону MK; тогда, отложив на высоте треугольника от его основания отрезок, равный MK, и проведя параллельную основанию до пересечения с боковыми сторонами треугольника, получим вершины прямоугольника, лежащие на боковых сторонах треугольника; далее, опустив перпендикуляры из полученных вершин на основание, будем иметь требуемый прямоугольник.

Обозначим длину MK через x, тогда длина MN будет $p-x$.

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$ имеем:

$$\frac{AC}{MN}=\frac{BD}{BF}, \text{ или } \frac{AC}{MN}=\frac{BD}{BD-BF}, \text{ или } \frac{a}{p-x}=\frac{h}{h-x}.$$

При $p-x\neq 0$ и $h-x\neq 0$

$$ah-ax=ph-hx;$$

$$(h-a)x=h(p-a).$$

При $h-a\neq 0$

$$x=\frac{h(p-a)}{h-a}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a>0, h>0, p>0$; $0<x<h$ или $0<x<p$.

$$MN=p-x=\frac{a(h-p)}{h-a}.$$

Получаем

$$\frac{h(p-a)}{h-a}>0 \text{ и } \frac{a(h-p)}{h-a}>0.$$

Оба неравенства одновременно выполняются при соотношениях:

1. $h-a>0$, $p-a>0$, $h-p>0$, $h>a$, $p>a$, $h>p$;

$$\frac{a<p<h}{h<p<a}.$$

2. $h-a<0$, $p-a<0$, $h-p<0$; $h<a$, $p<a$, $h<p$;

Проверка по условию $x<h$ (при $h<p<a$).

$$\frac{h(p-a)}{h-a}<h; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$h-a<0, \qquad hp-ha>h^2-ah;$$
$$hp>h^2;$$
$$h>0, \qquad p>h.$$

Справедливость полученного неравенства очевидна из соотношения $h<p<a$.

Проверка по условию $x<p$ (при $a<p<h$).

$$\frac{h(p-a)}{h-a}<p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$h-a>0, \; -ha<-pa;$$
$$-a<0, \; h>p.$$

Полученное нéравенство верно ($a<p<h$).

Таким образом, неравенства первое и второе, эквивалентные конечным, выполняются при соотношениях $h<p<a$ или $a<p<h$; следовательно, эти соотношения и определяют условия, при которых прямоугольник может быть вписан в треугольник.

Пусть теперь в уравнении

$$(h-a)x=h(p-a)$$

$h-a=0$.

Тогда при $p-a=0$ равенство, выражаемое уравнением, будет выполняться при любых допустимых ($x<p, x<h$) значениях x. Имеем:

$$h-a=0, \; p-a=0; \; h=a, \; p=a; \; h=p=a.$$

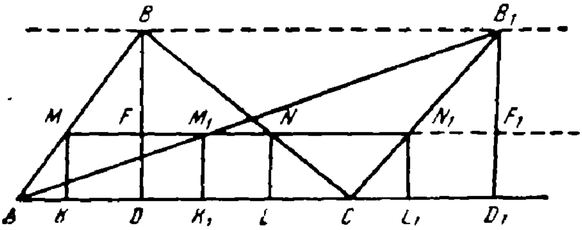
Ответ

Прямоугольник можно вписать и только один, при $h<p<a$ или при $a<p<h$.

Можно вписать бесчисленное множество прямоугольников при $h=p=a$.

Геометрическое решение

Докажем, что если в треугольник вписать прямоугольник в соответствии с условиями задачи, то с перемещением вершины треугольника параллельно основанию периметр прямоугольника сохраняет постоянную величину, если MK (чертеж 3) остается постоянной.



Черт. 3

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$ имеем:

$$\frac{AC}{MN}=\frac{BD}{BD-DF}.$$

Из подобия $\triangle AB_1C$ и $\triangle M_1B_1N_1$ получаем:

$$\frac{AC}{M_1N_1}=\frac{B_1D_1}{B_1D_1-D_1F}.$$

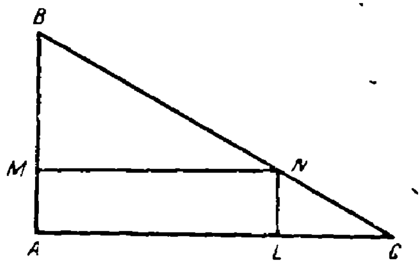
Так как $BD=B_1D_1$ и $FD=F_1D_1$, то

$$\frac{BD}{BD-BF}=\frac{B_1D_1}{B_1D_1-D_1F_1},$$

поэтому и $\frac{AC}{MN}=\frac{AC}{M_1N_1}$, откуда $MN=M_1N_1$.

Таким образом, стороны прямоугольников $MNLK$ и $M_1N_1L_1K_1$, а следовательно, и периметры их равны.

Рассмотрим интересующие нас соотношения в прямоугольном треугольнике, так как по доказанному сейчас они сохранятся в любом треугольнике.



Черт. 4

Допустим (чертеж 4): $AC=a$; $AB=h$, $a>h$.
Тогда $\angle B> \angle C, AB=AM+MB=h, AM+MN=p$.
В $\triangle BMN$ будет: $\angle B> \angle N, MN>BM$.
Тогда $AM+MN>AM+MB$ или $p>h$ . . (1).

В $\triangle NCL$ будет: $\angle N > \angle C$ ($\angle N = \angle B$), $LC > NL$. Отсюда $AL + LC > AC + LN$ или $a > p$ . . . (2).

Сопоставление полученных неравенств (первого и второго) дает: $h < p < a$.

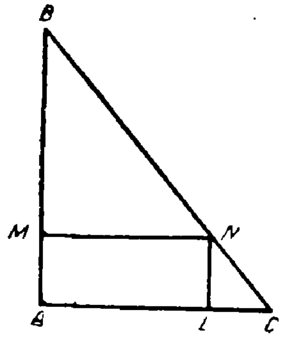
Аналогично доказывается и соотношение $a < p < h$. Пусть теперь (чертеж 5) $a = h$.

Теперь $\triangle BMN$ и $\triangle NCL$ прямоугольные и равнобедренные.

$$BM = MN;\ AM + MB = AM + MN;\ h = p\ .\ .\ (1).$$

$$NL = LC;\ AL + LC = AL + LN;\ a = p\ .\ .\ .\ (2).$$

Сопоставляя равенства первое и второе, имеем: $h = p = a$.



Черт. 5

Мы пришли к тем же соотношениям, как и при аналитическом решении.

Приводя в заключение ряд задач на составление, решение и исследование решения уравнения первой степени с одним неизвестным, полагаем, что педагогически целесообразно предварительно на ряде задач провести устные упражнения на установление области допустимых по смыслу задачи значений параметров и соотношений между параметрами, а также области допустимых значений неизвестного.

15. За несколько метров сукна заплачено a рублей; если бы купили сукна более на b метров, то нужно было бы заплатить c рублей. Сколько метров куплено?

Ответ. $\frac{ab}{c-a}$ метров.

16. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов A и $Б$ и равномерно едут по одному направлению от города A к городу $Б$ и далее. Первый проезжает в час a километров, второй b километров. Расстояние $AБ$ равно d километрам. Когда и на каком расстоянии от A первый автомобиль догонит второй?

Ответ. Через $\frac{d}{a-b}$ часов; $\frac{ab}{a-b}$ километров.

17. Два тела движутся по окружности. Если они движутся в одном направлении, то встречаются через каждые a секунд, если же движутся навстречу друг другу, то встречаются через каждые b секунд. За сколько секунд каждое тело пробегает окружность?

Ответ. $\frac{2ab}{a+b}$ секунд; $\frac{2ab}{a-b}$ секунд.

18. Переднее колесо экипажа имеет окружность в a метров, окружность заднего b метров. Какое расстояние должен проехать экипаж, чтобы переднее колесо сделало на n оборотов больше заднего?

Ответ. $\frac{abn}{b-a}$ метров.

19. Из двух сортов товара ценою в a рублей и в b рублей за килограмм составлено d килограммов смеси. При продаже этой смеси по m рублей за килограмм получено S рублей убытка. Сколько килограммов того и другого сорта пошло на составление смеси?

Ответ. $\frac{d(m-b)+S}{a-b}$ килограммов;

$\frac{d(a-m)-S}{a-b}$ килограммов (при $a>b$).

20. В бассейн, вмещающий m ведер, проведены две трубы. Первая равномерно вливает в бассейн a ведер в час. Вторая равномерно выливает весь бассейн в b часов. Во сколько часов наполнится бассейн при одновременном действии обеих труб?

Ответ. $\frac{bm}{ab-m}$ часов.

21. Сосуд наполнен водным раствором спирта, содержащим p процентов чистого спирта. Такой смеси отлили a литров и сосуд дополнили чистой водой. Получившаяся новая смесь содержала q процентов чистого спирта. Определить емкость сосуда.

Ответ. $\frac{ap}{p-q}$ литров.

22. Два тела равномерно движутся навстречу одно другому из двух мест, находящихся на расстоянии d метров. Первое движется со скоростью v метров в секунду. С какой скоростью должно двигаться второе тело, если оно вышло на h секунд позднее первого и должно итти до встречи n секунд?

Ответ. $\frac{d - v(h + n)}{n}$ метров в секунду.

23. Если из раствора соды отлить a литров, то оставшаяся часть будет содержать в растворе p граммов соды; если же отлить b литров, то в оставшемся растворе окажется q граммов соды. Сколько соды содержится во всем растворе?

Ответ. $\frac{aq - bp}{a - b}$ граммов (при $a > b$ и $b > p$ или $a < b$ и $q < p$).

24. Два автомобиля равномерно движутся от пункта A по направлению к пункту $Б$, причем скорость первого a километров в час, скорость второго b километров в час. Первый в некоторый момент проехал через пункт A, а второй на m часов позднее — через пункт $Б$, отстоящий от A на d километров. Где по отношению к пункту $Б$ встретятся автомобили? Истолковать возможные решения.

Ответ: 1. В $\frac{b(d - am)}{a - m}$ километрах за пунктом $Б$ (при $a > b$ и $d > am$ или при $a < b$ и $d < am$).

2. За $\left|\frac{b(d - am)}{a - b}\right|$ километров до пункта $Б$ (при $a > b$ и $d < am$ или при $a < b$ и $d > am$).

3. В пункте $Б$ (при $d = am$ и $a \neq b$).

Замечание. №№ 15, 16, 18, 19, 20, 22 взяты по Шапошникову ч. I, гл. VI).

Б. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными

Исследование решения системы уравнений первой степени, составленной по условиям задачи, не вносит ничего принципиально нового, поэтому ограничиваемся рассмотрением решения одной задачи:

Два аэроплана равномерно летят в одном направлении. Первый аэроплан, имеющий скорость v километров в час, проходит пункт A на t часов раньше, чем второй, имеющий скорость v_1 километров в час, проходит последующий пункт $Б$, отстоящий от A на d километров. Когда и на каком расстоянии от $Б$ встретятся аэропланы?

Решение

Вариант 1

Обозначим время, протекшее с момента пролета второго аэроплана над пунктом $Б$, за x часов, а расстояние от пункта $Б$ до места встречи — за y километров. Первый аэроплан за $(t+x)$ часов до места встречи пройдет $v(t+x)$ километров или $(m+y)$ километров, откуда получаем уравнение:

$$v(t+x)=m+y;$$

$$vx-y=m-vt.$$

Второй аэроплан до места встречи за x часов пройдет v_1x километров, равное y километрам; отсюда имеем другое уравнение:

$$v_1x=y$$

$$v_1x-y=0.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} vx-y=m-vt, \\ v_1x-y=0. \end{cases}$$

Решение системы дает:

$$(v-v_1)x=m-vt \text{ и } (v-v_1)y=v_1(m-vt).$$

При $v-v_1\neq 0$

$$x=\frac{m-vt}{v-v_1}; \quad y=\frac{v_1(m-vt)}{v-v_1}.$$

Исследование решения системы

По смыслу задачи $v>0$, $v_1>0$, $m>0$, $t>0$;

если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то встреча произойдет в пункте $Б$ или далее за этим пунктом;

если $x > -t$, $y < 0$, то аэропланы встретятся над пунктом A или между этим пунктом и $Б$;

если $x < -t$, $y < 0$, то встреча произойдет до пункта A.

Положительное решение

Вариант 1а

Условия: $v - v_1 > 0$, $m - vt > 0$.

$v > v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m > vt$, $\frac{m}{v} > t$ — время, потребное первому аэроплану, чтобы покрыть расстояние от A до $Б$, больше t; следовательно, второй аэроплан будет над пунктом $Б$ раньше первого, который, идя с большей скоростью, нагонит второй аэроплан за пунктом $Б$.

Вариант 1б

Условия: $v - v_1 < 0$, $m - vt < 0$.

$v < v_1$ — скорость второго аэроплана больше.

$m < vt$, $\frac{m}{v} < t$ — первый аэроплан за t часов пролетает расстояние большее, чем расстояние от пункта A до $Б$, и будет над последним раньше второго, который, имея большую скорость, нагонит первый за пунктом $Б$.

Отрицательное решение

Вариант 2а

Условия: $v - v_1 < 0$, $m - vt > 0$.

$v < v_1$ — скорость второго больше.

$m > vt$, $\frac{m}{v} > t$ — первый аэроплан будет над пунктом $Б$ после второго, который при большей скорости нагонит первый перед пунктом $Б$.

1. Встреча произойдет между пунктами A и $Б$, если $x > -t$.

Устанавливаем дополнительные условия:

$$\frac{m-vt}{v-v_1} > -t;$$

$\underline{v-v_1<0,}$ $$m-vt < -vt+v_1t;$$

$$m < v_1t;$$

$\underline{v_1>0,}$ $$\frac{m}{v_1} < t.$$

При $\frac{m}{v_1} < t$ второй аэроплан тратит на путь от A до $Б$ меньше t часов и поэтому появляется над A позднее первого. Встреча может произойти только между пунктами A и $Б$, так как второй аэроплан, идя с большей скоростью, раньше проходит над $Б$, как это уже установлено.

2. Встреча происходит над пунктом A

$$\frac{m-vt}{v-v_1} = -t;$$

$$m-vt = -vt+v_1t;$$

$$\frac{m}{v_1} = t.$$

При $\frac{m}{v_1} = t$ очевидно, что встреча произойдет над пунктом A, где второй аэроплан нагонит первый и при большей скорости в дальнейшем уйдет вперед.

3. Встреча происходит перед пунктом A.

$$\frac{m-vt}{v-v_1} < -t;$$

$\underline{v-v_1<0,}$ $$m-vt > -vt+v_1t;$$

$\underline{v_1>0,}$ $$\frac{m}{v_1} > t$$

При $\frac{m}{v_1} > t$ второй аэроплан проходит расстояние от A до $Б$ больше чем за t часов и поэтому должен быть над A раньше первого, чтобы раньше быть и над $Б$; встреча может произойти только перед A, так как второй аэроплан идет с большей скоростью.

Вариант 2б

Условия: $v - v_1 > 0$, $m - vt < 0$.

$v > v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m < vt$, $\frac{m}{v} < t$ — первый аэроплан будет за пунктом $Б$, когда над последним появится второй, и в дальнейшем при большей скорости будет только удаляться от второго; встреча может произойти только перед $Б$, где первый аэроплан нагонит второй.

1. Встреча произойдет между пунктами $А$ и $Б$

$$\frac{m - vt}{v - v_1} > -t;$$

$$\underline{v - v_1 > 0,} \qquad m - vt > -vt + v_1 t$$

$$\underline{v_1 > 0,} \qquad \frac{m}{v_1} > t.$$

При $\frac{m}{v_1} > t$ второй аэроплан проходит пункт $А$ раньше первого, который нагонит второй между $А$ и $Б$ и ранее пройдет над $Б$.

2. Встреча происходит над пунктом $А$.

$$\frac{m - vt}{v - v_1} = -t;$$

$$\frac{m}{v_1} =$$

По предыдущему встреча происходит над $А$, где первый аэроплан нагоняет второй и в дальнейшем уходит вперед.

3. Встреча произойдет перед пунктом $А$.

$$\frac{m - vt}{v - v_1} < -t;$$

$$\underline{v - v_1 > 0,} \qquad m - vt < -vt + v_1 t;$$

$$\underline{v_1 > 0,} \qquad \frac{m}{v_1} < t.$$

При $\frac{m}{v_1} < t$, как уже рассмотрено, над пунктом A позднее проходит второй аэроплан; следовательно, идущий при этом с большей скоростью первый аэроплан мог обогнать второй только перед пунктом A.

Нулевое решение:

$$x = y = 0.$$

Условия: $v - v_1 \neq 0$, $m - vt = 0$.

$v \neq v_1$— скорости аэропланов различны.

$m = vt$, $\frac{m}{v} = t$ — первый аэроплан появится над пуктом $Б$ одновременно со вторым, в дальнейшем, как и ранее, не встречаясь, так как скорости аэропланов различны.

Случай, когда решения нет

Рассматривая выводные уравнения

$$(v - v_1)x = m - vt \text{ и } (v - v_1)y = v_1(m - vt),$$

находим, что при $v - v_1 = 0$ и $m - vt \neq 0$ равенство невозможно при любых значениях x и y: система не имеет решения.

$v = v_1$— скорости аэропланов равны.

$m \neq vt$, $\frac{m}{v} \neq t$ — над пунктом $Б$ аэропланы появляются в разное время, как и над любым другим пунктом пути (скорости равны); встречи не произойдет. Задача не имеет решения.

Неопределенное решение

Из тех же уравнений вытекает, что при $v - v_1 = 0$ и $m - vt = 0$ равенства будут верны при любых значениях x и y; уравнения не имеют определенного решения.

$v = v_1$ — скорости равны.

$m = vt$, $\frac{m}{v} = t$ — аэропланы одновременно будут над пунктом $Б$ и при равных скоростях над любым другим пунктом пути.

Ответ

1. $v > v_1 \frac{m}{v} > t.$

Первый аэроплан нагонит второй в $\frac{v_1 (m - vt)}{v - v_1}$ километрах за пунктом $Б$ через $\frac{m - vt}{v - v_1}$ часов после пролета второго аэроплана над $Б$.

2. $v < v_1, \ \frac{m}{v} < t.$

Второй аэроплан нагонит первый в $\frac{v_1 (m - vt)}{v - v_1}$ километрах за пунктом $Б$ через $\frac{m - vt}{v - v_1}$ часов после пролета над $Б$.

3. $v \neq v_1, \ \frac{m}{v} = t.$

Встреча произойдет над пунктом $Б$.

4. $v < v_1, \ \frac{m}{v} > t, \ \frac{m}{v_1} < t.$

Второй аэроплан нагонит первый между пунктами $А$ и $Б$ в $\left| \frac{v_1 (m - vt)}{v - v_1} \right|$ километрах перед $Б$ и за $\left| \frac{m - vt}{v - v_1} \right|$ часов перед пролетом над $Б$.

5. $v > v_1, \ \frac{m}{v} < t, \ \frac{m}{v_1} > t.$

Первый аэроплан нагонит второй между пунктами $А$ и $Б$ в $\left| \frac{v_1 (m-vt)}{v - v_1} \right|$ километрах перед $Б$ и за $\left| \frac{m - vt}{v - v_1} \right|$ часов перед пролетом второго аэроплана над $Б$.

6. $v < v_1, \ \frac{m}{v} > t, \ \frac{m}{v_1} = t.$

Второй аэроплан нагонит первый над пунктом $А$

7. $v > v_1$, $\frac{m}{v} < t$, $\frac{m}{v_1} = t$.

Первый аэроплан нагонит второй над пунктом A.

8. $v < v_1$, $\frac{m}{v} > t$, $\frac{m}{v_1} > t$.

Второй аэроплан нагонит первый перед пунктом A в $\left|\frac{v_1(m - vt)}{v - v_1}\right|$ километрах до $Б$ и за $\left|\frac{m - vt}{v - v_1}\right|$ часов пролета над $Б$.

9. $v > v_1$, $\frac{m}{v} < t$, $\frac{m}{v_1} < t$.

Первый аэроплан нагонит второй перед пунктом A в $\left|\frac{v_1(m - vt)}{v - v_1}\right|$ километрах до $Б$ и за $\left|\frac{m - vt}{v - v_1}\right|$ часов до пролета второго аэроплана над $Б$.

Решение

Вариант 2

Допустим, что встреча произойдет через x часов после пролета первого аэроплана над пунктом A и в y километрах за $Б$. Тогда первый аэроплан пройдет до встречи vx километров или $(m + y)$ километров, откуда получаем уравнение:

$$vx = m + y; \quad vx - y = m.$$

Второй аэроплан будет в пути $(x - t)$ часов и пройдет до встречи $v_1(x - t)$ километров или y километров; отсюда:

$$v_1 x - v_1 t = y;$$
$$v_1 x - y = v_1 t.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} vx - y = m \\ v_1 x - y = v_1 t, \end{cases}$$

решая которую, получим:

$$(v - v_1)x = m - v_1 t; \quad (v - v_1)y = v_1(m - vt).$$

При $v - v_1 \neq 0$

$$x = \frac{m - vt}{v - v_1}; \qquad y = \frac{v_1(m - vt)}{v - v_1}.$$

Исследование решения системы.

По смыслу задачи $v>0$, $v_1>0$, $m>0$, $t>0$; $x\geqslant 0$ или $x<0$; $y\geqslant 0$ или $y<0$.

1. Оба корня — положительные числа: $x>0$, $y>0$.

Вариант 1а

Условия: $v-v_1>0$, $m-v_1t>0$, $m-vt>0$.

$v>v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m>v_1t$, $\frac{m}{v_1}>t$ — второй аэроплан в момент пролета первого над пунктом A находится между A и $Б$, т. е. летит впереди.

$m>vt$, $\frac{m}{v}>t$ — первый аэроплан в момент пролета второго над пунктом $Б$ находится между A и $Б$, т. е. позади второго, и нагонит последний за пунктом $Б$.

Вариант 1б

Условия: $v-v_1<0$, $m-v_1t<0$, $m-vt<0$.

$v<v_1$ — скорость второго аэроплана больше.

$m<v_1t$, $\frac{m}{v_1}<t$ — второй аэроплан в момент пролета первого над пунктом A находится перед A, летит позади.

$m<vt$, $\frac{m}{v}<t$ — первый аэроплан в момент пролета второго над пунктом $Б$ находится за $Б$, т. е. все еще летит впереди.

Второй аэроплан, имеющий бо́льшую скорость, нагонит первый за пунктом $Б$.

2. Оба корня — отрицательные числа: $x<0$, $y<0$.

Вариант 2а

Условия: $v-v_1>0$, $m-v_1t<0$, $m-vt<0$.

$v>v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m<v_1t$, $\frac{m}{v_1}<t$ — в момент пролета первого аэроплана над пунктом A второй летит перед A, т. е. позади, и в дальнейшем, имея меньшую скорость, будет только отставать.

$m<vt$, $\frac{m}{v}<t$ — в момент пролета второго аэроплана над пунктом $Б$ первый находится впереди, что

соответствует выводам из рассмотрения второго условия.

Первый аэроплан мог нагнать второй только перед пунктом A, оставаясь при большей скорости в дальнейшем впереди второго.

Вариант 2б

Условия: $v - v_1 < 0$, $m - v_1 t > 0$, $m - vt > 0$.

$v < v_1$ — скорость второго аэроплана больше.

$m > v_1 t$, $\frac{m}{v_1} > t$ — в момент пролета первого аэроплана над пунктом A второй находится между A и $Б$, летит впереди и при большей скорости все дальнейшее время будет итти впереди, в том числе и в момент пролета над $Б$: $m > vt$, $\frac{m}{v} > t$.

Второй аэроплан мог нагнать первый перед пунктом A.

3. Решение положительное относительно x и отрицательное относительно y: $x > 0$, $y < 0$.

Вариант 3а

Условия: $v - v_1 > 0$, $m - v_1 t > 0$, $m - vt < 0$.

$v > v_1$ — скорость первого больше.

$m > v_1 t$, $\frac{m}{v_1} > t$ — в момент пролета первого аэроплана над пунктом A второй находится между A и $Б$.

$m < vt$, $\frac{m}{v} < t$ — через пункт $Б$ пролетает раньше первый аэроплан, обогнав второй при большей скорости между A и $Б$.

Вариант 3б

Условия: $v - v_1 < 0$, $m - v_1 t < 0$, $m - vt > 0$.

$v < v_1$ — скорость второго больше.

$m < v_1 t$, $\frac{m}{v_1} < t$ — в момент пролета первого аэроплана над пунктом A второй будет перед A.

$m > vt$, $\frac{m}{v} > t$ — над пунктом $Б$ раньше появится второй аэроплан, обогнав первый между A и $Б$.

4. Решение отрицательное относительно x и положительное относительно y: $x < 0$, $y > 0$.

Случай противоречит смыслу задачи (встреча происходит перед пунктом A и за пунктом $Б$). О том же противоречии говорит и исследование. Разберем один вариант условий.

$v - v_1 > 0$, $v > v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m - v_1 t < 0$, $\frac{m}{v_1} < t$ — в момент пролета первого аэроплана над пунктом A второй находится еще перед пунктом A и при меньшей скорости в дальнейшем останется позади.

$m > vt, \frac{m}{v} > t$ — первый аэроплан проходит пункт $Б$ после второго, т. е. летит позади, что противоречит выводу, сделанному из рассмотрения второго условия ($m - v_1 t < 0$).

5. Решение нулевое относительно x и положительное относительно y: $x = 0$, $y > 0$.

Случай противоречит смыслу задачи.

6. Решение нулевое относительно x и отрицательное относительно y: $x = 0$, $y < 0$.

Вариант 6а

Условия: $v - v_1 > 0$, $m - v_1 t = 0$, $m - vt < 0$.

$v > v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m = v_1 t$, $\frac{m}{v_1} = t$ — второй аэроплан находится над пунктом A одновременно с первым, который, идя с большей скоростью, в дальнейшем уйдет вперед и раньше появится над $Б$: $m < vt, \frac{m}{v} < t$. Первый аэроплан, таким образом, нагонит второй над пунктом A.

Вариант 6б

Условия: $v - v_1 < 0$, $m - v_1 t = 0$, $m - vt > 0$.

$v < v_1$ — скорость второго аэроплана больше.

$m = v_1 t$, $\frac{m}{v_1} = t$ — над пунктом A оба аэроплана будут одновременно и только над A, так как при разных скоростях в другие моменты аэропланы будут находиться в разных пунктах пути. В дальнейшем (после A) впереди будет второй, в том числе и над пунктом $Б$

$$m - vt > 0; \quad \frac{m}{v} > t.$$

Таким образом, второй аэроплан нагоняет первый над пунктом A.

7. Решение положительное относительно x и нулевое относительно y: $x > 0$, $y = 0$.

Вариант 7а

Условия $v - v_1 > 0$, $m - v_1 t > 0$, $m - vt = 0$.

$v > v_1$ — скорость первого аэроплана больше.

$m > v_1 t$, $\frac{m}{v_1} > t$ — второй аэроплан в момент пролета первого над пунктом A находится между A и $Б$.

$m = vt$, $\frac{m}{v} = t$ — оба аэроплана одновременно находятся над пунктом $Б$, где первый нагоняет второй.

Вариант 7б

Условия: $v - v_1 < 0$, $m - v_1 t < 0$, $m - vt = 0$.

$v < v_1$ — скорость второго аэроплана больше.

$m < v_1 t$, $\frac{m}{v_1} < t$ — второй аэроплан в момент пролета первого над пунктом A находится перед A.

$m = vt$, $\frac{m}{v} = t$ — над пунктом $Б$ оба аэроплана находятся одновременно; здесь второй при большей скорости нагоняет первый.

8. Решение отрицательное относительно x и нулевое относительно y: $x < 0$, $y = 0$.

Случай противоречит смыслу задачи.

9. Решения нет.

Рассматривая уравнения

$$(v - v_1)\,x = m - v_1 t \quad \text{и} \quad (v - v_1)\,y = v_1(m - vt),$$

находим, что при $v - v_1 = 0$ и $m - v_1 t \neq 0$, следовательно, и $m - vt \neq 0$ уравнения не имеют решений.

$v = v_1$ — скорости одинаковы.

$m \neq v_1 t$, $\frac{m}{v_1} \neq t$ — аэропланы над пунктом A появляются в разное время, как и над любым другим пунктом, в том числе и над $Б$: $m \neq vt$, $\frac{m}{v} \neq t$. Встреча не произойдет.

10. Неопределенное решение.

Из тех же уравнений следует, что при $v - v_1 = 0$. $m - v_1 t = 0$, следовательно, и при $m - vt = 0$ равенства, выраженные уравнениями, будут выполняться при любых значениях x и y; уравнения не имеют определенного решения.

$v = v_1$ — скорости одинаковы.

$m = v_1 t$, $\frac{m}{v_1} = t$ — оба аэроплана появляются над пунктом A одновременно и при равной скорости будут вместе в любом пункте полета, в том числе и над $Б$: $m - vt = 0$, $\frac{m}{v} = t$.

Задача не имеет определенного решения.

Ответ.

1. $v > v_1$, $\frac{m}{v} > t$.

Первый аэроплан нагонит второй спустя $\frac{m - v_1 t}{v - v_1}$ часов после своего появления над пунктом A и в $\frac{v_1 (m - vt)}{v - v_1}$ километрах за пунктом $Б$.

2. $v < v_1$, $\frac{m}{v} < t$.

Второй аэроплан нагонит первый через $\frac{m - v_1 t}{v - v_1}$ часов после пролета первого над пунктом A и в $\frac{v_1 (m - vt)}{v - v_1}$ километрах за пунктом $Б$.

3. $v > v_1$, $\frac{m}{v_1} < t$, $\frac{m}{v} < t$.

Первый аэроплан нагонит второй за $\left|\frac{m - v_1 t}{v - v_1}\right|$ часов до своего появления над пунктом A и за $\left|\frac{v_1 (m - vt)}{v - v_1}\right|$ километров перед пунктом $Б$.

4. При $v < v_1$, $\frac{m}{v_1} > t$, $\frac{m}{v} > t$.

Второй аэроплан нагонит первый за $\left|\frac{m - v_1 t}{v - v_1}\right|$ часов до появления первого над пунктом A и за $\left|\frac{v_1(m - vt)}{v - v_1}\right|$ километров перед пунктом $Б$.

5. При $v > v_1$, $\frac{m}{v_1} > t$, $\frac{m}{v} < t$.

Первый аэроплан нагонит второй через $\frac{m - v_1 t}{v - v_1}$ часов после своего пролета над пунктом A и за $\left|\frac{v_1(m - vt)}{v - v_1}\right|$ километров перед пунктом $Б$.

6. При $v < v_1$, $\frac{m}{v_1} < t$, $\frac{m}{v} > t$.

Второй аэроплан нагонит первый через $\frac{m - v_1 t}{v - v_1}$ часов после пролета первого над пунктом A и за $\left|\frac{v_1(m - vt)}{v - v_1}\right|$ километров перед пунктом $Б$.

7. При $v > v_1$, $\frac{m}{v_1} = t$, $\frac{m}{v} < t$.

Первый аэроплан нагонит второй над пунктом A.

8. При $v < v_1$, $\frac{m}{v_1} = t$, $\frac{m}{v} > t$.

Второй аэроплан нагонит первый над пунктом A.

9. При $v > v_1$, $\frac{m}{v_1} > t$, $\frac{m}{v} = t$.

Первый аэроплан нагонит второй над пунктом $Б$.

10. При $v < v_1$, $\frac{m}{v_1} < t$, $\frac{m}{v} = t$.

Второй аэроплан нагонит первый над пунктом $Б$.

Решение (ответ) то же, что и по первому варианту. Разница, как видно, заключается в разном выражении искомого времени, что равносильно разным соглашениям о начале отсчета времени и новому отсюда смыслу отрицательного значения времени. Это повело только к разному ходу исследования: во втором варианте все условия, определяющие вид решения и его смысл, установлены при непосредственном рассмотрении формул решения системы, в первом — дополнительным исследованием их.

Цель исследования, таким образом, при любом возможном выражении искомой величины, не противоречащем смыслу задачи, заключается в том, чтобы при этом выражении дать исчерпывающее решение задачи, обоснованное, правильно истолкованное.

Для упражнений можно указать те из приведенных задач за №№ 15—24, в которых имеются две искомые величины.

В. Квадратное уравнение

В программу по алгебре для средней школы входит тема «Исследование корней квадратного уравнения по его дискриминанту и коэфициентам». Для этого исследования может служить следующая схема.

Так как в любом квадратном уравнении ax^2+bx+ $+c=0$ коэфициент a при x^2 может быть сделан положительным числом, то как здесь, так и в последующем изложении и предполагается, что первый коэфициент a квадратного уравнения есть положительное число.

Схема исследования корней полного квадратного уравнения

Значение свободного члена	Значение дискриминанта	Значение коэфициента b	Вывод относительно корней уравнения
1. $c>0$	$b^2-4ac<0$	$b\neq 0$	Корни уравнения — мнимые числа.
	$b^2-4ac=0$	$b>0$	Корни уравнения — равные отрицательные числа.
		$b<0$	Корни уравнения — равные положительные числа.
	$b^2-4ac>0$	$b>0$	Корни уравнения—неравные вещественные числа, оба отрицательные.
		$b<0$	Корни уравнения—неравные вещественные числа, оба положительные.
2. $c<0$	$b^2-4ac>0$	$b>0$	Корни уравнения—неравные вещественные числа с разными знаками; большее абсолютное значение имеет отрицательный корень.
		$b<0$	Корни уравнения—неравные вещественные числа с разными знаками; большее абсолютное значение имеет положительный корень.

Кроме того, непосредственным решением неполных квадратных уравнений (или из рассмотрения общей формулы) устанавливается:

При $b=0$

$ax^2+c=0$; $x \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Корни уравнения равны по модулю и противоположны по знаку.

При $c=0$

$ax^2+bx=0$; $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$. Один корень уравнения равен нулю.

При $b=0$ и $c=0$

$ax^2=0$; $x_1=x_2=0$. Оба корня уравнения равны нулю.

В задачнике Шапошникова почти отсутствуют упражнения на определение значений параметров квадратного уравнения. Приводим примеры таких упражнений для закрепления теории.

При каких значениях n нижеследующие уравнения имеют одно нулевое решение?

25. $2x^2+3x+4n-8=0$.

Ответ. $n=2$.

26. $2x^2+(n-3)x+n-5=0$.

Ответ. $n=5$.

При каких значениях m нижеследующие уравнения имеют корни, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку?

27. $x^2-mx+3x-5m=0$.

Ответ. $m=3$.

28. $x^2+(m+2)x+m-1=0$.

Ответ. $m=-2$.

При каких значениях n нижеследующие уравнения имеют два нулевых решения?

29. $x^2+2x+nx-2-n=0$.

Ответ. $n=-2$.

30. $\frac{2x}{n-1}=\frac{x+1}{x}$.

Ответ. Нулевых решений нет.

При каких значениях n нижеследующие уравнения имеют мнимые корни?

31. $x^2+10x+n=0$.

Ответ. $n>25$.

32. $x^2+2nx+4=0$.

Ответ. $|n|<2$.

33. $x^2+nx-4x-2n+13=0$.

Ответ. $|n|<6$.

При каких значениях m нижеследующие уравнения имеют равные корни?

34. $x^2+(m-2)x+m+1=0$.

Ответ. 1) $m=0$, 2) $m=8$.

35. $x^2+(2m-1)x+m-1=0$.

Ответ. Вещественных решений нет.

36. $mx^2+2mx-x-2+m=0$.

Ответ. $m=-\frac{1}{4}$.

При каких значениях m нижеследующие уравнения имеют целые корни?

37. $x^2+4x+m=0$.

Ответ. $m=4-k^2$, где k — любое целое число.

38. $3x^2-6x+2m=0$.

Ответ. $m=\frac{3(1-k^2)}{2}$, где k — любое целое число.

39. $x^2-3x+m=0$.

Ответ. $m=k(3-k)$, где k — любое целое число.

При каких значениях n нижеследующие уравнения имеют целый положительный корень?

40. $2x^2+10x-n=0$.

Ответ. $n=2k(k+5)$, где $k>0$ и целое число.

41. $2x^2+4x+n=0$.

Ответ. $n=-2k(k+2)$, где $k>0$ и целое число.

Решение задач

Переходя теперь к вопросу исследования решений квадратных уравнений, составленных по условиям задач, отметим, что общей основой во всех случаях будет исследование по дискриминанту и коэфициентам. В отдельных случаях, когда это допустимо, можно итти по пути упрощения исследования. Пути упрощения чрезвычайно разнообразны, почему к исследованию может быть предъявлено одно требование: оно должно проводиться обоснованно, его выводы должны быть доказательны; изящные, наиболее простые варианты должны поощряться.

В приводимых ниже примерах решения задач даны возможные (не единственные) варианты исследования, причем для иллюстрации при решении первой (1°) задачи разобрано несколько вариантов исследования.

В целях сокращения объема исследования в задачах с двумя искомыми целесообразно вести исследование на меньшем неизвестном, когда это можно установить; тогда, определив значение меньшего искомого, удовлетворяющее решению задачи, не приходится исследовать значение второго искомого, получаемое прибавлением положительного числа; в противном случае — при вычитании — необходимо было бы исследовать возможное значение получаемой разности (см. первую задачу). Переходим к рассмотрению решений соответствующих задач.

Первый случай, когда дискриминант, очевидно, неотрицателен

1°. Два автомобиля выезжают одновременно из места A в место $Б$. Один из них равномерно проходит в час на m километров больше, чем другой, и поэтому приходит в место $Б$ на n часов раньше другого. Расстояние между A и $Б$ равно p километрам. Сколько километров в час проходит каждый автомобиль? (Шапошников, ч. II, гл. XI, № 130).

Решение.

Пусть автомобиль с меньшей скоростью проходит в час x километров и весь путь — за $\frac{p}{x}$ часов; тогда второй за один час проходит $(x+m)$ километров, а весь путь — за $\frac{p}{x+m}$ часов. Так как автомобиль с меньшей скоростью на весь путь затрачивает на n часов больше, то

$$\frac{p}{x}=\frac{p}{x+m}+n \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

В полученном уравнении $x \neq 0$, $x \neq -m$, так как при значениях $x=0$ или $x=-m$ члены уравнения теряют числовой смысл и уравнение не имеет решений.

Преобразовывая уравнение (1), получаем:

$$px + pm = px + nx^2 + mnx;$$

$$nx^2 + mnx - pm = 0$$

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-mn + \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n}; \quad x_2 = \frac{-mn - \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $x > 0$.

Дискриминант $m^2n^2 + 4mnp$ — число положительное, как сумма положительных чисел, поэтому корни уравнения — вещественные и неравные числа.

Свободный член „$-pm$“ < 0, следовательно, корни уравнения — числа с разными знаками: один — положительное число, другой — отрицательное.

Второй коэфициент „nm“ положительное число, сумма корней выражается отрицательным числом, и положительный корень имеет меньшую абсолютную величину. При равных знаменателях абсолютно меньшим будет x_1, в числителе которого сумма чисел с противоположными знаками. Этот корень и выражается положительным числом. Он удовлетворяет и исходному уравнению ($x \neq 0$, $x \neq -m$), и решению задачи.

Ответ.

Автомобиль с меньшей скоростью проходит в час $\frac{-mn + \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n}$ километров; автомобиль с большей скоростью проходит в час $\frac{-mn + \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n} + m =$ $= \frac{mn + \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n}$ километров.

Примечание. Если бы за x километров принять расстояние, которое пройдет за один час автомобиль с большей скоростью, то, выделив исследованием положительный корень

$$\frac{mn + \sqrt{m^2n^2 + 4mnp}}{2n},$$

для определения расстояния, проходимого за час автомобилем с меньшей скоростью, пришлось бы дополнительно исследовать знак разности «$\frac{mn+\sqrt{m^2n^2+4mnp}}{2n}-m$», что нерационально.

Приводим теперь несколько из возможных здесь вариантов исследования.

Пусть по дискриминанту и свободному члену установлено, что корни уравнения — числа с разными знаками, тогда возможны такие продолжения.

Вариант 1а. Второй корень (x_2)—число явно отрицательное, так как числитель дроби—отрицательное число, как сумма двух отрицательных чисел, знаменатель же—число положительное ($2n>0$), почему вся дробь—отрицательное число.

Тогда первый корень (x_1) должен быть положительным числом, так как из двух корней, как это установлено по свободному члену, один—положительное число.

Примечание. Этот вариант (1а), как показывает опыт, наиболее доступно воспринимается учащимися.

Вариант 1б. $m^2n^2+4mnp>m^2n^2$, так как сумма двух положительных чисел больше одного слагаемого, откуда:

$$\left|\sqrt{m^2n^2+4mnp}\right|>|mn|;$$
$$\frac{-mn+\sqrt{m^2n^2+4mnp}}{2n}>0.$$

(в числителе сумма двух чисел с абсолютно большим слагаемым — число положительное, знаменатель также число положительное).

$$\frac{-mn-\sqrt{m^2n^2+4mnp}}{2n}<0$$

(другой корень — отрицательное число).

Вариант 1в. Положительный корень больше отрицательного, так как любое положительное число больше отрицательного. При равных знаменателях ($2n$) числитель первого корня (x_1) больше числителя второго (x_2), потому что в числителе первой дроби к числу $-mn$ прибавляется положительное число $\sqrt{m^2n^2+4mnp}$, в числителе второй дроби из того же числа «$-mn$» вычитается то же положительное число $\sqrt{m^2n^2+4mnp}$; следовательно, число «$-mn$» в первом случае увеличивается, во втором — уменьшается. Поскольку дробь, выражающая первый корень (x_1), больше, то этот корень и будет положительным числом.

Вариант 2а. Свободный член уравнения — $pm < 0$, поэтому дискриминант будет положительным числом; одинь корень—положительное число, другой — отрицательное.

Второй корень (x_2) — число отрицательное, так как числитель дроби — отрицательное число, как сумма отрицательных чисел, а знаменатель дроби — положительное число. Поэтому положительным числом будет первый корень (x_1).

Можно, наконец, при исследовании совершенно обойти дискриминант.

Вариант 3а. Так как $m^2n^2 + 4mnp > 0$,

$$\sqrt{m^2n^2+4\ mnp}$$

— вещественное число.

$m^2n^2 + 4mnp > m^2n^2$ (сумма двух положительных чисел больше одного из слагаемых).

$$\left|\sqrt{m^2n^2+4mnp}\right| > |mn|,$$

$\dfrac{-mn+\sqrt{m^2n^2+4mnp}}{2n} > 0$, так как числитель дроби — положительное число, как сумма двух чисел с абсолютно большим положительным слагаемым, знаменатель — также положительное число.

$\dfrac{-mn-\sqrt{m^2n^2+mnp}}{2n} < 0$; в этой дроби числитель— число отрицательное, как сумма двух отрицательных чисел, знаменатель — положительное число, следовательно, дробь — отрицательное число.

Вариант 3б. Свободный член уравнения — $pm < 0$, поэтому корни уравнения не могут быть сопряженными комплексными числами, произведение которых всегда число положительное. Корни уравнения — вещественные числа с разными знаками; второй корень (x_2) — явно отрицательное число, следовательно, положительным числом выражается первый корень (x_1).

Примечание. Варианты 2а и 3б рационально применять при отрицательном значении свободного члена.

2°. Из города A в город $Б$ отправился турист. Расстояние $AБ$ равно d километрам. Через один час после него из города A в город $Б$ отправился другой турист, скорость которого на b километров в час больше скорости первого. Второй турист, обогнав первого и дойдя до города $Б$, возвращается обратно в A и приходит туда в тот момент, когда первый турист приходит в город $Б$. Определить скорость первого туриста.

Решение.

Первый турист шел со скоростью x километров в час и прошел расстояние в d километров за $\frac{d}{x}$ часов. Второй турист двигался со скоростью $(x+b)$ километров в час и прошел расстояние из A в $Б$ и обратно за $\frac{2d}{x+b}$ часов. По условию задачи, второй турист затратил на прохождение своего пути на один час меньше первого. Отсюда можно написать уравнение:

$$\frac{2d}{x+b}+1=\frac{d}{x}.$$

В данном уравнении $x \neq 0$ и $x \neq -b$, так как при $x=0$ или $x=-b$ члены уравнения теряют числовой смысл, и уравнение перестает существовать.

$$2dx+x^2+bx=dx+bd;$$

$$x^2+(b+d)x-bd=0;$$

$$x=\frac{-(b+d)\pm\sqrt{(b+d)^2+4bd}}{2};$$

$$x_1=\frac{-(b+d)+\sqrt{(b+d)^2+4bd}}{2};$$

$$x_2=\frac{-b+d-\sqrt{(b+d)^2+4bd}}{2};$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи a, b, d, x — числа положительные, $x<d$, так как d — весь путь, а x — часть пути, которую первый турист прошел за один час.

Свободный член „$-bd$“ — число отрицательное, поэтому дискриминант выражает положительное число; корни уравнения — вещественные числа с разными знаками, один корень — число положительное, другой — число отрицательное.

Отрицательным числом является второй корень, так как числитель его — число отрицательное, как сумма двух отрицательных чисел, а знаменатель — число положительное; отсюда вся дробь — число отрицательное.

Если второй корень — число отрицательное, то, следовательно, первый корень — число положительное. Этот корень удовлетворяет исходному уравнению ($x \neq 0$, $x \neq -b$). Второй корень не удовлетворяет условию задачи, потому что скорость по смыслу задачи не выражается отрицательным числом.

Проверка корня x по условию: $x < d$.

$$\frac{-(b+d)+\sqrt{(b+d)^2+4bd}}{2} < d;$$

$$2>0, \quad \sqrt{(b+d)^2+4bd} < 3d+b;$$

$$b^2+d^2+2bd+4bd < 9d^2+6bd+b^2;$$

$$8d^2>0.$$

Справедливость неравенства очевидна.

$$x_1 = \frac{-(b+d)+\sqrt{(b+d)^2+4bd}}{2}$$

удовлетворяет условию задачи: $0<x<d$.

Ответ. Первый турист шел со скоростью

$$\frac{-(b+d)+\sqrt{(b+d)^2+4bd}}{2} \text{ километров в час.}$$

3°. Колонна войск протяжением d километров движется по шоссе походным маршем со скоростью v километров в час. Конный вестовой выезжает из конца колонны в ее начало, передает приказание и тотчас же отправляется обратно в конец колонны. На проезд туда и обратно вестовой затратил t минут. Определить скорость вестового, если она на всем протяжении была одинаковой.

Решение.

Скорость конного вестового x километров в час. Двигаясь к голове колонны, вестовой за каждый час приближается к ней на $(x-v)$ километров, а двигаясь обратно, по направлению к концу колонны, он за каждый час приближается к нему на $(x+v)$ километров. При этом на путь к началу колонны вестовой затратил $\frac{d}{x-v}$ часов, а в обратном направлении $\frac{d}{x+v}$ часов.

При условии, что весь путь вестовой проходит за t минут, т. е. за $\frac{t}{60}$ часов, можно составить уравнение:

$$\frac{d}{x-v}+\frac{d}{x+v}=\frac{t}{60}.$$

В полученном уравнении $x \neq \pm v$, так как при $x=v$ или $x=-v$ члены уравнения теряют числовой смысл и уравнение перестает существовать.

Решая уравнение, имеем:

$$60(dx+dv+dx-dv)=t(x^2-v^2);$$

$$tx^2-120dx-tv^2=0;$$

$$x=\frac{60d \pm \sqrt{3600d^2+t^2v^2}}{t}.$$

$$x_1=\frac{60d+\sqrt{3600d^2+t^2v^2};}{t}$$

$$x_2=\frac{60d-\sqrt{3600d^2+t^2v^2}}{t}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи d, t, v, x — положительные числа; $x > v$, так как в противном случае вестовой не мог бы добраться до начала колонны.

Свободный член «$-tv^2$» — число отрицательное. Отсюда корни — вещественные числа с разными знаками, т. е. один корень — число положительное, другой — отрицательное.

Первый корень (x_1) — явно положительное число. Знаменатель дроби, выражающей этот корень, — положительное число, а числитель дроби, представляющий собой сумму двух положительных чисел, — тоже положительное число.

Тогда второй корень — отрицательное число, которое не удовлетворяет условию задачи: $x > 0$.

Проверка положительного корня по условию $x > v$.

$$\frac{60d + \sqrt{3600d^2 + t^2v^2}}{t} > v;$$

$$t > 0, \quad \sqrt{3600d^2 + t^2v^2} > tv - 60d.$$

1) Предположим, что $tv - 60d < 0$.

При этом условии неравенство справедливо, так как положительное число больше отрицательного.

2) Допустим, что $tv - 60d = 0$.

Неравенство тоже будет верно: положительное число больше нуля.

3) При условии $tv - 60d > 0$ возвышаем в квадрат обе части неравенства:

$$3600d^2 + t^2v^2 > t^2v^2 - 120dvt + 3600d^2;$$

$$-120dvt < 0;$$

$$dvt > 0, \qquad -120 < 0.$$

Полученное неравенство верно, так как отрицательное число меньше нуля.

Неравенство

$$\sqrt{3600d^2 + t^2v^2} > tv - 60d$$

верно при любом значении разности $tv - 60d$, следовательно, эквивалентное исходное неравенство также верно, и положительный корень удовлетворяет условию задачи, удовлетворяя тем и исходному уравнению ($x \neq +v$).

Ответ. Скорость конного вестового равна

$$\frac{60d + \sqrt{3600d + t^2v^2}}{t}$$ километров в час.

4°. На уборке всего урожая два комбайна работали вместе a дней и, кроме того, один первый работал еще b дней.

За сколько дней каждым комбайном в отдельности можно было убрать весь урожай, если одним вторым всю уборку можно провести на c дней скорее.

Решение

Допустим, что одним вторым комбайном весь урожай можно убрать за x дней, тогда одним первым весь урожай можно убрать за $x+c$ дней. За один день первым комбайном убирается $\frac{1}{x+c}$ часть всего урожая, одним вторым $\frac{1}{x}$ часть.

За a дней вторым комбайном было выполнено $\frac{a}{x}$ всей работы, а за $(a+b)$ дней первым сделано $\frac{a+b}{x+c}$ всей работы по уборке урожая, вместе же они при этих условиях выполнили всю работу по уборке урожая, принятую нами за единицу.

Отсюда имеем уравнение

$$\frac{a}{x}+\frac{a+b}{x+c}=1 \ldots \ldots \quad (1)$$

В условиях данного уравнения $x \neq 0$, $x \neq -c$, так как при значениях $x=0$ и $x=-c$ составленное уравнение (1) не имеет решения.

$$ax+ac+ax+bx=x^2+cx;$$

$$x^2+(c-2a-b)x-ac=0 \ldots \ldots \quad (2)$$

$$x=\frac{-(c-2a-b)\pm\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2};$$

$$x_1=\frac{-(c-2a-b)+\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2};$$

$$x_2=\frac{-(c-2a-b)-\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$.

Кроме того: $x > a$, так как на уборку всего урожая второму комбайну потребуется больше времени, чем на уборку совместно с первым части урожая (a дней).

$x < 2a + b$. Действительно (чертеж 6), если бы на уборке всего урожая комбайны работали последовательно, т. е. сначала один второй работал a дней, а затем один первый $a + b$ дней, то всего было бы затрачено $(2a + b)$ дней; если же часть работы, выполненную за $(a + b)$ дней первым комбайном, работающим менее производительно («одним вторым всю уборку можно провести на c дней скорее»), выполнить вторым комбайном, то времени для этого потребуется менее чем $(a + b)$ дней; но тогда весь урожай будет убран вторым комбайном за срок меньший, чем $(a + a + b)$, или $(2a + b)$ дней.

Черт. 6

Пояснения к чертежу. $A + B + C$ — вся площадь уборки.

A — площадь, убранная вторым комбайном за a дней.

B — площадь, убранная первым комбайном за a дней.

C — площадь, убранная первым комбайном за b дней.

Свободный член уравнения (2) «$-ac$» — число отрицательное, следовательно, оба корня — вещественные числа, один корень — число положительное, второй — отрицательное: корни уравнения при отрицательном значении свободного члена квадратного уравнения не могут выражаться сопряженными комплексными числами, произведением которых всегда будет положительное число.

$$(c - 2a - b)^2 + 4ac > (c - 2a - b)^2;$$

$$\left|\sqrt{(c - 2a - b)^2 + 4ac}\right| > |c - 2a - b|.$$

Теперь очевидно, что первый корень (x_1) выражается положительным числом, так как при положительном знаменателе $(2 > 0)$ числитель дроби выражается положительным числом — алгебраической суммой с абсолютно большим положительным слагаемым; второй же корень (x_2) — отрицательное число (числитель дроби—отрицательное число) и не удовлетворяет условию задачи ($x>0$).

Первый корень (x_1) удовлетворяет исходному уравнению ($x\neq 0$, $x\neq -c$) и условию $x>0$; проверяем его по условиям $a<x<2a+b$.

$$\frac{-(c-2a-b)+\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2}>a \ldots \quad (3)$$

$$2>0, \sqrt{c-2a-b)+4ac}>c-b \ldots \quad . \; . \; . \; (4)$$

Так как знак разности $c-b$ неизвестен, то рассмотрим три возможных случая.

4а. $c-b<0$; неравенство (4) верно, так как положительное число больше отрицательного.

4б. $c-b=0$; неравенство (4) опять верно: положительное число больше нуля.

4в. $c-b>0$; в этом случае обе части неравенства можно возвести в квадрат, не меняя знака неравенства:

$$(c-2a-b)^2+4ac>(c-b)^2;$$

$$c^2+4a^2+b^2-4ac-2bc+4ab+4ac>c^2-2bc+b^2;$$

$$4a(a+b)>0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Полученное неравенство (5) верно, так как в левой части произведение положительных чисел — положительное число, большее нуля.

Оказалось, что при любых возможных значениях разности $c-b$ неравенство (4) верно; следовательно, будет верно и эквивалентное ему исходное (3). Положительный корень уравнения (x_1) удовлетворяет условию $x>a$.

Проверим теперь этот корень по условию: $x<2a+b$.

$$\frac{-(c-2a-b)+\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2}<2a+b \quad . \; . \; . \; (6)$$

$$2>0, \sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}<c+2a+b;$$

$$c^2+4a^2+b^2-4ac-2bc+4ab+4ac<c^2+4a^2+$$
$$+b^2+4ac+2bc+4ab;$$
$$4c(a+b)>0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Полученное неравенство (7) очевидно верное; следовательно, будет верно и эквивалентное ему исходное (6) неравенство.

Таким образом, положительный корень удовлетворяет условиям $a < x < 2a + b$ и пригоден для решения задачи.

Ответ.

Одним вторым комбайном можно было убрать весь урожай за $\frac{-(c-2a-b)+\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2}$ дней,

одним первым—за $\frac{-(c-2a-b)+\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2}+$

$+c=\frac{c+2a+b+\sqrt{(c-2a-b)^2+4ac}}{2}$ дней.

5°. Письмоносец должен был пройти a километров за определенное время. Пройдя b километров, он отдохнул 15 минут и, чтобы притти во-время, увеличил скорость на c километров в час. Определить первоначальную скорость письмоносца.

Решение.

Примем первоначальную скорость письмоносца за x километров в час; тогда его скорость после отдыха будет $x+c$ километров в час. Остаток пути $a-b$ километров письмоносец прошел за $\frac{a-b}{x+c}$ часов, и так как при этом он пришел во-время, то потратил на 15 минут, или $^1/_4$ часа, меньше времени, чем требовалось ему пройти этот остаток пути с первоначальной скоростью, т. е. $\frac{a-b}{x}$ часов. Выражаем уравнением соотношение между тем и другим временем:

$$\frac{a-b}{x}=\frac{a-b}{x+c}+\frac{1}{4}.$$

В данном уравнении $x \neq 0$, $x \neq -c$;
при значениях $x=0$ или $x=-c$ уравнение не имеет решения.

$$4(a-b)x+4(a-b)c=4(a-b)x+x^2+cx;$$

$$x^2+cx-4(a-b)c=0;$$

$$x=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+16(a-b)c}}{2}.$$

$$x_1=\frac{-c+\sqrt{c^2+16(a-b)c}}{2},$$

$$x_2=\frac{-c-\sqrt{c^2+16(a-b)c}}{2}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a>0$, $b>0$, $x>0$; $a>b$, так как a километров — весь путь, b километров — часть пути, пройденная письмоносцем до отдыха.

$x>4(a-b)$. На остаток пути $(a-b)$ километров письмоносец должен был с первоначальной скоростью затратить более $^1/_4$ часа; следовательно, на $4(a-b)$ километра пути он должен затратить более часа, и потому его первоначальная скорость меньше $4(a-b)$ километров в час.

Свободный член «$-4(a-b)c$» — отрицательное число (знак минус стоит перед положительным произведением трех сомножителей); корни уравнения — вещественные числа (дискриминант — положительное число) с разными знаками.

Второй корень (x_2) — явно отрицательное число, так как при положительном знаменателе числитель дроби—отрицательное число, как сумма двух отрицательных чисел, и поэтому другой корень (x_1) по установленному при рассмотрении свободного члена должен быть положительным числом. Этот положительный корень уравнения удовлетворяет исходному уравнению ($x\neq 0$, $x\neq -c$).

Проверяем его по условию: $x<4(a-b)$.

$$\frac{-c+\sqrt{c^2+16(a-b)c}}{2}<4(a-b);$$

$$2>0, \sqrt{c^2+16(a-b)c}<8(a-b)+c;$$

$$c^2+16(a-b)c<64(a-b)^2+16(a-b)c+c^2;$$
$$64(a-b)^2>0.$$

Справедливость неравенства очевидна, и, таким образом, первый корень (x_1), удовлетворяя условию $0<x<4(a-b)$, пригоден для решения задачи.

Ответ.

Первоначальная скорость письмоносца была $\frac{-c+\sqrt{c^2+16(a-b)c}}{2}$ километров в час.

6°. За выгрузку товара уплачено a рублей. Так как рабочих явилось на 3 человека меньше, то каждый из них получил на 3 рубля больше предположенного. Сколько рабочих было намечено на выгрузку?

Решение.

Допустим, что рабочих на выгрузку было намечено x человек, тогда явилось $(x-3)$ человека; предполагалось каждому уплатить $\frac{a}{x}$ рублей, уплатили же каждому из явившихся $\frac{a}{x-3}$ рублей. По условию задачи каждый явившийся рабочий получил на 3 рубля больше предположенного, отсюда:

$$\frac{a}{x-3}=\frac{a}{x}+3.$$

В полученном уравнении $x\neq 0$, $x\neq 3$, так как при $x=0$ или $x=3$ равенство невозможно.

$$ax=ax-3a+3x^2-9x;$$
$$x^2-3x-a=0;$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4a}}{2};$$
$$x_1=\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}; \qquad x_2=\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a>0$, $x>3$ и целое число. Так как $a>0$, то $9+4a>9$, $|\sqrt{9+4a}|>3$.

$\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}>3$; $\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}<0$, так как в числителе дроби — отрицательное число при положительном значении знаменателя.

Корень (x_1) удовлетворяет условию $x>3$; кроме того, этот корень должен выражаться целым числом, что, очевидно, зависит от значений a; определяем последние.

Допустим: $\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}=k$, где $k>3$ и целое число.

Тогда

$$3+\sqrt{9+4a}=2k;$$
$$\sqrt{9+4a}=2k-3;$$
$$9+4a=4k^2-12k+9;$$
$$a=k(k-3).$$

Отсюда

$$k=4;\quad 5;\quad 6 \text{ и т. д.}$$
$$a=4;\ 10;\ 18\ldots..$$
$$x=4;\quad 5;\quad 6\ldots..$$

Проверка.

$a=18$, $x=6$. Предполагалось каждому выдать $18:6=3$ (рубля), явилось на выгрузку $6-3=3$ (человека), уплачено каждому $18:3=6$ (рублей), на $6-3=3$ (рубля) больше, чем предполагалось, и т. д.

Ответ.

При $a=k(k-3)$, где $k>3$ и целое число, рабочих на выгрузку было намечено $\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}$ человек.

Второй случай, когда знак дискриминанта надо устанавливать

7°. Два человека одновременно вышли из двух мест *А* и *Б*. При встрече оказалось, что первый прошел на a километров больше, чем второй. Продолжая движение, первый приходит в *Б* через b часов, а второй в A—через C часов после встречи. Как велико расстояние от A до $Б$?

Решение.

Принимаем расстояние от A до $Б$ за x километров. Тогда первый человек до встречи прошел $\frac{x+a}{2c}$ километров, а второй $\frac{x-a}{2}$ километров; скорость первого $\frac{x-a}{2b}$ километров в час, второго $\frac{x+a}{2c}$ километров в час. Первый шел до встречи $\frac{(x+a)2b}{2(x-a)} = \frac{(x+a)b}{x-a}$ часов, второй $\frac{(x-a)c}{x+a}$ часов. По условию задачи оба человека вышли из пунктов A и $Б$ одновременно, следовательно, время, затраченное каждым из них до встречи, одинаково:

$$\frac{(x+a)b}{x-a} = \frac{(x-a)c}{x+a} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

По смыслу задачи $x-a \neq 0$ и $x+a \neq 0$, так как $x > a > 0$

$$(x+a)^2 b = (x-a)^2 c; \quad \ldots\ldots (2)$$

$$(b-c)x^2 + 2a(b+c)x + a^2(b-c) = 0 \quad \ldots (3)$$

Скорость второго человека меньше, так как за одинаковое время он прошел на a километров меньше, поэтому большее расстояние $\frac{x+a}{2}$ километров после встречи он проходит за большее время, т. е. $c > b$.

Первый коэфициент в последнем (3) уравнении — отрицательное число, поэтому меняем знаки членов уравнения на противоположные, умножая обе части уравнения на -1:

$$(c-b)x^2 - 2a(b+c)x + a^2(c-b) = 0.$$

$$x = \frac{a(b+c) \pm \sqrt{a^2(b+c)^2 - a^2(c-b)^2}}{c-b} = \frac{a(b+c \pm 2\sqrt{bc})}{c-b}.$$

$$x_1 = \frac{a(\sqrt{c}+\sqrt{b})^2}{c-b} = \frac{a(\sqrt{c}+\sqrt{b})}{\sqrt{c}-\sqrt{b}};$$

$$x_2 = \frac{a(\sqrt{c}-\sqrt{b})^2}{c-b} = \frac{a(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи a, b, c, x — положительные числа; $c > b$; $x > a$, так как a километров только часть всего пути x километров.

Если $c > b$, то $\sqrt{c} > \sqrt{b}$ и разность $\sqrt{c} - \sqrt{b} > 0$. Поэтому оба корня — положительные числа, так как числитель обеих дробей представляет произведение положительных чисел, знаменатель — тоже положительное число.

Проверяем полученные корни по условию: $x > a$.

$$\frac{a(\sqrt{c}+\sqrt{b})}{\sqrt{c}-\sqrt{b}} > a;$$

$$a > 0. \quad \frac{\sqrt{c}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}} > 1.$$

В полученном последнем неравенстве в левой части неправильная дробь, неравенство верное; следовательно, первый корень (x_1) удовлетворяет решению задачи.

$$\frac{a(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} > a;$$

$$a > 0, \quad \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}} > 1.$$

Здесь последнее неравенство неверное, так как в левой части правильная дробь, и второй корень (x_2) не удовлетворяет условию задачи.

Ответ.

Расстояние между A и $Б$ равно $\frac{a(\sqrt{c}+\sqrt{b})}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$ километрам.

Примечание. В аналогичных случаях проф. Дубнов („Математика в школе" № 6 за 1947 г.) предлагает следующий вариант решения.

По уравнению (2) $(x+a)^2 b = (x-a)^2 c$ имеем:

$$\text{или} \qquad (x+a)\sqrt{b} = (x-a)\sqrt{c} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\text{или} \qquad (x+a)\sqrt{b} = -(x-a)\sqrt{c} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

и, поскольку по смыслу задачи $x > a$, то последнее равенство (5) отпадает. Тогда (по 4-му):

$$x(\sqrt{c}-\sqrt{b}) = a(\sqrt{c}+\sqrt{b});\ x = \frac{a(\sqrt{c}+\sqrt{b})}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}.$$

Полученный корень, очевидно, удовлетворяет условию $x > a$.

8°. Расстояние между двумя городами A и $Б$ равно a километрам. Два автомобиля, выехав навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t часов раньше другого. Если же они выедут одновременно навстречу друг другу, то встреча произойдет через $2t$ часов. Сколько километров в час проезжает каждый автомобиль, двигаясь равномерно?

Решение.

Первый автомобиль идет со скоростью x километров в час. Время, которое он затратит на прохождение полпути в $\frac{a}{2}$ километров с этой скоростью до встречи со вторым автомобилем, равно $\frac{a}{2x}$ часам. Второй автомобиль выехал из пункта $Б$ на t часов позднее первого. Значит, время, затраченное им на прохождение полпути в $\frac{a}{2}$ километров, равно $\frac{a}{2x} - t = \frac{a-2tx}{2x}$ часам, а скорость, с которой он шел, равна $\frac{2ax}{2(a-2tx)} = \frac{ax}{a-2tx}$ километрам в час. За $2t$ часов со скоростью x километров первый автомобиль до встречи со вторым проходит $2tx$ километров. Второй автомобиль за $2t$ часов до встречи с первым проходит расстояние в $\frac{2atx}{a-2tx}$ километров. Автомобили встречаются, — значит, за $2t$ часов они вместе проходят a километров.

$$2tx + \frac{2atx}{a-2tx} = a.$$

В данном уравнении $x \neq \frac{a}{2t}$, так как при $x = \frac{a}{2t}$ член уравнения теряет числовой смысл, и уравнение не имеет решений.

$$2tx(a - 2tx) + 2atx = a(a - 2tx);$$

$$2atx - 4t^2x^2 + 2atx = a^2 - 2atx;$$

$$4t^2x^2 - 6atx + a^2 = 0.$$

$$x = \frac{3at \pm \sqrt{9a^2t^2 - 4a^2t^2}}{4t^2} = \frac{3at \pm \sqrt{5a^2t^2}}{4t^2} = \frac{a(3 \pm \sqrt{5})}{4t}$$

Полученные корни удовлетворяют исходному уравнению $\left(x \neq \frac{a}{2t}\right)$.

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи a, t, x — числа положительные. Рассмотрим получившиеся корни:

$$x_1 = \frac{a(3+\sqrt{5})}{4t}; \qquad x_2 = \frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}.$$

Первый корень — положительное число, так как у этой дроби числитель — число положительное, как произведение положительных чисел (a и $3+\sqrt{5}$), и знаменатель — число положительное.

Второй корень — тоже положительное число, потому что у дроби $\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ числитель — число положительное, как произведение положительного числа на разность $(3-\sqrt{5})$, выражающуюся положительным числом $(3 > \sqrt{5})$, и знаменатель дроби — тоже положительное число.

Таким образом, оба корня положительные числа.

Пусть скорость первого автомобиля $\frac{a(3+\sqrt{5})}{4t}$ километров в час. Скорость второго автомобиля будет:

$$\frac{a^2(3+\sqrt{5})}{4t\left[a - \frac{2at(3+\sqrt{5})}{4t}\right]} = \frac{a^2(3+\sqrt{5})}{2at(2-3-\sqrt{5})} = -\frac{a(3+\sqrt{5})}{2t(1+\sqrt{5})}.$$

Скорость движения второго автомобиля выражается отрицательным числом, но его скорость в данной задаче отрицательной быть не может; значит, значение x_1, равное $\frac{a(3+\sqrt{5})}{4t}$, для решения задачи не годится.

Если скорость первого автомобиля $\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ километров в час, то скорость второго автомобиля

$$\frac{a^2(3-\sqrt{5})}{4t\left[a-\frac{2at(3-\sqrt{5})}{4t}\right]} = \frac{a^2(3-\sqrt{5})}{2at(2-3+\sqrt{5})} = \frac{a^2(3-\sqrt{5})}{2t(\sqrt{5}-1)} =$$

$= \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4t}$ километров в час. В данном случае скорости обоих автомобилей выражаются положительными числами ($\sqrt{5} > 1$, $\sqrt{5}-1 > 0$). Следовательно, значение x_2, равное $\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$, удовлетворяет решению задачи.

Ответ. Первый автомобиль проезжает в час $\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ километров, а второй автомобиль $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4t}$ километров.

9°. При совместной работе двух тракторов разной мощности колхозное поле было вспахано в t дней. Если половину поля вспахать одним трактором, а другую половину — вторым, то вся работа будет окончена в k дней. Во сколько дней все поле можно вспахать каждым трактором в отдельности?

Решение.

Допустим, что трактором большей мощности все поле можно вспахать з x дней, за 1 день $\frac{1}{x}$ часть поля, за t дней $\frac{t}{x}$ часть поля. Половину поля трактором большей мощности можно вспахать за $\frac{x}{2}$ дней, трактором меньшей мощности — за $k - \frac{x}{2} = \frac{2k - x}{2}$ дней, все же поле трактором меньшей мощности можно вспахать за $(2k - x)$ дней.

Принимая теперь во внимание, что за один день трактором меньшей мощности можно вспахать $\frac{1}{2k - x}$ часть поля и за t дней $\frac{t}{2k - x}$ часть поля и что за t дней совместной работы обоих тракторов будет вспахано все поле (единица работы), получаем уравнение:

$$\frac{t}{x} + \frac{t}{2k - x} = 1.$$

В полученном уравнении $x \neq 0$ и $x \neq 2k$, так как при $x = 0$ или $x = 2k$ члены уравнения теряют числовой смысл и уравнение не имеет решения.

$$2kt - tx + tx = 2kx - x^2;$$

$$x^2 - 2kx + 2kt = 0;$$

$$x = k \pm \sqrt{k^2 - 2kt}.$$

$$x_1 = \quad + \sqrt{k(k - 2t)}; \quad x_2 = k - \sqrt{k(k - 2t)}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $t > 0$, $k > 0$, $x > 0$. Кроме того, $k > 2t$. Действительно, если вместо совместной работы в t дней каждый трактор вспашет соответствующую часть поля, работая один после другого, то на вспашку всего поля потребуется $2t$ дней, причем трактором большей мощности за одинаковое время (t дней) будет вспахано больше половины поля. Если бы избыток пашни над половиной поля, выполненный трактором большей мощности, был вспахан трактором меньшей мощности, то на вспашку всего поля было бы потрачено больше $2t$ дней. Но тогда затраченное время будет k дней, так как каждым трактором будет вспахано по половине поля. Таким образом, $k > 2t$.

$x > t$: одному трактору на вспашку всего поля времени требуется больше, чем двум при совместной работе.

$x < k$: трактору с большей мощностью на вспашку всего поля потребуется меньше времени, чем двум при последовательной вспашке по половине поля.

Дискриминант «$k(k-2t)$» > 0, так как $k > 0$ и

$$k-2t > 0.$$

Корни уравнения — вещественные разные числа.

Свободный член $2kt > 0$; корни — числа одинакового знака.

Первый корень (x_1) — положительное число, как сумма положительных чисел, поэтому и второй корень — положительное число; оба корня, очевидно, удовлетворяют исходному уравнению ($x \neq 0$, $x \neq 2k$).

Проверка корней по условию: $t < x < k$.

Первый корень $k+\sqrt{k(k-2t)}$ не удовлетворяет условию $x < k$, так как $k+\sqrt{k(k-2t)} > k$ (сумма двух положительных чисел больше одного из слагаемых).

Второй корень $k-\sqrt{k(k-2t)}$ удовлетворяет условию $x < k$.

Проверяем его по условию: $x > t$.

$$k-\sqrt{k(k-2t)} > t;$$
$$k-t > \sqrt{k(k-2t)}.$$

В обоих частях полученного неравенства положительные числа.

$$k^2-2kt+t^2 > k^2-2kt;$$
$$t^2 > 0.$$

Справедливость неравенства очевидна, и, таким образом, второй корень удовлетворяет условиям: $t < x < k$.

Ответ.

Трактором большей мощности можно вспахать все поле за $k-\sqrt{k(k-2t)}$ дней, трактором меньшей мощности — за

$$2k-\left[k-\sqrt{k(k-2t)}\right]=k+\sqrt{k(k-2t)} \text{ дней.}$$

10°. Из прямоугольного куска жести, измерения которого a и b, требуется сделать открытую коробку так, чтобы площадь стенок равнялась площади дна. Определить высоту стенок коробки.

Решение.

Принимаем высоту стенок за x, тогда площадь дна будет $(a-2x)(b-2x)$ кв. ед., площадь стенок составит $2x(b-2x)+2x(a-2x)$ кв. ед. и по условию задачи:

$$(a-2x)(b-2x)=2x(b-2x)+2x(a-2x).$$

$$ab-2ax-2bx+4x^2=2bx-4x^2+2ax-4x^2;$$

$$12x^2-4(a+b)x+ab=0;$$

$$x=\frac{2(a+b)\pm\sqrt{4(a+b)^2-12ab}}{12}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

$$x_1=\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6};\ x_2=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Исследование решения уравнения

По смыслу задачи $a>0$, $b>0$, $x>0$, $a>b$ (допущение); $x<\frac{b}{4}$, так как при $x=\frac{b}{4}$ площадь только двух стенок будет уже равна площади дна.

Дискриминант «a^2+b^2-ab», представляющий разность между суммой квадратов двух положительных чисел и их произведением, — положительное число, так как сумма квадратов двух положительных чисел больше их произведения (доказательство приведено выше, в упражнениях на неравенства); корни уравнения — вещественные разные числа.

Свободный член ab—положительное число, следовательно, корни уравнения—числа с одинаковыми знаками. Так как первый корень (x_1) — явно положительное число, то и второй корень (x_2)—тоже положительное число.

Проверяем пригодность корней для решения задачи по условию: $x<\frac{b}{4}$.

$$\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}<\frac{b}{4};$$

$$\underline{24>0},\quad 4a+4b-6b<-4\sqrt{a^2+b^2-ab};$$

$$2a-b<-2\sqrt{a^2+b^2-ab}.$$

По допущению $a > b$, следовательно, и подавно $2a > b$; неравенство неверное, так как положительное число больше (а не меньше) отрицательного; первый корень (x_1) не удовлетворяет условию задачи.

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6} < \frac{b}{4};$$

$$\underline{24 > 0,} \quad 2a - b < 2\sqrt{a^2+b^2-ab};$$

$$\underline{2a - b > 0,} \quad 4a^2 - 4ab + b^2 < 4a^2 + 4b^2 - 4ab;$$

$$3b^2 > 0.$$

Справедливость неравенства очевидна; второй корень (x_2) удовлетворяет решению задачи.

Ответ.

Высота стенок коробки $\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$ кв. ед.

Из рассмотрения решения задач, в которых дискриминант—разность, видно, что целесообразно преобразовать подкоренное выражение, прежде чем приступить к исследованию решения уравнения. Если при этом под корнем останется разность неопределенного знака, то одним из вариантов исследования может быть допущение, что эта разность больше или равна нулю,—дополнительное условие, определяющее возможность существования вещественных корней, следовательно, и решения задачи.

Решения задач 2°, 3°, 4°, 7°, 8°, 9° даны из текущих работ учениц в учебном году и на экзамене (3°) в 1949 г.

Одной из больших трудностей для учащихся, по нашим наблюдениям, является в некоторых случаях установление по условиям задачи допустимых соотношений между параметрами и границ возможных значений неизвестной величины; поэтому требования здесь не должны выходить за пределы соглашений, изложенных выше.

В заключение приводим задачи на исследование решения квадратного уравнения.

42. Из точек A и $Б$ навстречу друг другу начали двигаться равномерно два тела и через a минут пришли в точку N. Расстояние $БN$ на b метров меньше расстояния AN. Определить расстояние AN, если из-

вестно, что одно тело тратит на прохождение каждого метра одной минутой больше, чем другое.

Ответ. $\frac{b+\sqrt{b^2+4ab}}{2}$ метров.

43. Водоем снабжен двумя трубами. Через первую вода выливается, через вторую вливается. Узнать, за сколько часов через первую трубу пройдет n ведер воды, если известно, что через вторую вольется в 2 раза больше, когда она будет открыта a часами меньше первой. Если обе трубы открыты сразу, то в каждый час в водоем прибывает a ведер воды.

Ответ. $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2+n^2}}{2a}$ часов.

44. Из точки A начало равномерно двигаться тело по направлению к точке $Б$. Спустя t единиц времени из той же точки A двинулось другое тело, которое, догнав первое, тотчас приняло обратное направление и возвратилось в точку A в тот момент, когда первое достигло точки $Б$. Определить скорость первого тела, если известно, что скорость второго равна v километрам в час и расстояние $AБ$ равно d километрам.

Ответ. $\frac{-(d+vt)+\sqrt{d^2+6dvt+v^2t^2}}{2t}$ километров в час.

45. Из двух точек M и N, расстояние между которыми d метров, одновременно начали двигаться навстречу друг другу два тела; встреча произошла в тот момент, когда первое тело, вышедшее из M, прошло a метров. Определить скорость каждого тела, зная, что число метров, выражающее разность между скоростями первого и второго тел, равно числу секунд, прошедших от начала движения до встречи.

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{2a-d}}$ метров в секунду и $\frac{d-a}{\sqrt{2a-d}}$ метров в секунду.

46. Из сосуда, вмещающего a литров и наполненного спиртом, отлили некоторую часть и вместо спирта долили водой; потом из сосуда отлили такую же часть, после чего в нем осталось b литров спирта. По

сколько литров жидкости отливали из сосуда каждый раз?

Ответ. $a - \sqrt{ab}$ (литров).

47. Два прокатных стана могут прокатать a тонн железа, если проработают одновременно T часов и, сверх того, один второй будет еще работать t часов. Во сколько часов может прокатать a тонн железа один второй стан, если первому на эту работу требуется на c часов меньше?

Ответ. $\frac{c + 2T + t + \sqrt{(c-t)^2 + 4T(T+t)}}{2}$ часов.

48. Два куска латуни вместе весят a килограммов. В первом куске чистой меди содержалось b килограммов, во втором c килограммов. Сколько процентов меди содержит второй кусок латуни, если первый содержит меди на 5 процентов больше?

Ответ. $\frac{100b + 100c - 5a + \sqrt{(100b + 100c - 5a)^2 + 2000ac}}{2a}$ процентов.

49. В питательной жидкости в колбе имеется некоторое число живых бактерий. Через час из колбы брали $\frac{1}{n}$ жидкости (n—целое число) и при этом через 2 часа оставшееся число бактерий в 2 раза превысило начальное их число в колбе. Определить: процент увеличения числа бактерий за 1 час; наибольший возможный в условиях задачи процент, полагая, что бактерии в питательной жидкости распределены равномерно и что размножение бактерий также протекало равномерно.

Ответ. $\frac{100\,n(\sqrt{2}-1)+100}{n-1}$ процентов; 182 процента.

V. Приложения

Исследование уравнений в дальнейшей работе учащихся X класса должно входить в качестве обязательной составной части в решение задач и уравнений по алгебре, геометрии и тригонометрии; этого требует и характер письменных работ на вступительных экзаменах в вузы (разд. V, задачи 5°, 7°). Так, в геометрии формула решения задачи, по существу, является конечным результатом последовательного решения ряда уравнений, и здесь рационально исследовать конечный результат (разд. V, задачи 4°, 5°); в других случаях решение задачи может включать отдельные моменты исследования уравнений — определение области допустимых значений неизвестного, установление соотношений между параметрами,— ведущие к решению поставленного вопроса (разд. V, задача 7°), и т. п.

Рассмотрение такого вопроса в полном объеме выходит за пределы настоящей работы, почему ограничиваемся иллюстрацией сказанного на ряде примеров.

1°. Решить уравнение: $A_{n-1}^{3} = 1{,}2\, C_{n+1}^{3}$ . . . . (1)

Решение

$$(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{6(n+1)\,n\,(n-1)}{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$5(n-1)(n-2)(n-3) = (n+1)\,n\,(n-1) \quad . \; . \; . \; (2)$$

В условиях исходного (1) уравнения имеем (по символу A_{n-1}^{3}) $n-1 \geqslant 3$ и целое число, как число элементов, из которых составляются размещения по три элемента, иначе $n \geqslant 4$ и целое число;

по символу C_{n+1}^{3} имеем:
$n+1 \geqslant 3$ или $n \geqslant 2$ и целое число.

По уравнению в целом $n \geqslant 4$ и целое число.

Теперь обе части последнего (2) уравнения можно сократить на множитель $(n-1)$; при этом теряется корень уравнения $n=1$, не удовлетворяющий условию $n \geqslant 4$.

$$5(n^2-5n+6) = n^2+n;$$

$$2n^2-13n+15=0;$$

$$n_1=5; \quad n_2=1{,}5.$$

Второй корень не удовлетворяет условию «$n \geqslant 4$ и целое число».

Ответ. $n=5$.

2°. Найти член разложения бинома

$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}}\right)^n$, содержащий $a^{-4\frac{2}{3}}$, если известно, что отношение биномиального коэфициента 7-го члена разложения к биномиальному коэфициенту 6-го члена разложения равно $^7/_6$.

Решение.

Биномиальный коэфициент 7-го члена разложения равен C_n^6, а 6-го члена разложения равен C_n^5. По условию задачи имеем:

$$\frac{C_n^6}{C_n^5}=\frac{7}{6} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\;(n-4)}=\frac{7}{6} \quad (2)$$

В условиях исходного (1) уравнения:

по символу C_n^6 имеем $n \geqslant 6$ и целое число;

по символу C_n^5 имеем $n \geqslant 5$ и целое число;

для уравнения: $n \geqslant 6$ и целое число.

Дробное выражение в левой части последнего (2) уравнения можно сократить на произведение $n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$, при этом по условию $n \geqslant 6$ получим тождественную дробь:

$$\frac{n-5}{6}=\frac{7}{6};$$

$$n=12.$$

Полученный корень удовлетворяет условию $n \geqslant 6$ и целое число.

Теперь имеем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}}\right)^{12}=(a^{-\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{2}})^{12}.$$

Напишем искомый член разложения в общем виде:

$$T_{k+1}=(-1)^k C_{12}^k\, a^{-\frac{k}{3}}\, b^{\frac{k}{2}}\, a^{\frac{k-12}{2}}=(-1)^k\; C_{12}^k\, b^{\frac{k}{2}}\; a^{\frac{k-36}{6}}.$$

По условию искомый член разложения должен содержать $a^{-4\frac{2}{3}}$, т. е. показатель при a должен быть равен $-4\frac{2}{3}$; отсюда

$$\frac{k-36}{6}=-\frac{14}{3};$$

$$k-36=-28;$$

$$k=8.$$

В условии задачи показатель степени бинома равен 12, поэтому k — число членов, предшествующих определяемому, может иметь значения:

$$0\leqslant k\leqslant 12 \text{ и целое число.}$$

Полученное значение $k=8$ удовлетворяет условию.

$$T_9=C_{12}^{8}\,a^{-4\frac{2}{3}}\,b^4=\frac{495b^4}{a^4\sqrt[3]{a^2}}.$$

Ответ. Девятый член разложения содержит $a^{-4\frac{2}{3}}$, он равен $\frac{495b^4}{a^4\sqrt[3]{a^2}}$.

Примечание. Если из решения приведенной задачи на бином исключить исследование получаемых уравнений, то решение теряет теоретическую ценность; сведение решения к показательному уравнению $a^{\frac{k-36}{6}}=a^{-4\frac{2}{3}}$, с истолкованием допустимых значений основания, в условиях задачи не имеет смысла, так как показатель при a в членах разложения составляется по законам, совершенно не зависящим от числовой величины a.

3°. Решить уравнение: $4\log_{x^2}2+6\log_{2x}2=3$.

Так как основание логарифмов — положительное число, не равное единице, то по второму члену уравнения $x>0$ и $2x\neq 1$, или $x\neq\frac{1}{2}$. В первом члене уравнения можно перейти на первую степень x — область допустимых значений неизвестного не изменится, так как оно не может выражаться отрицательным числом; остается по 1-му члену: $x\neq 1$.

Итак: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$.

$$2 \log_x 2 + 6 \log_{2x} 2 = 3;$$

$$\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2x} = 3;$$

$$\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log x} = 3;$$

$$3 \log_2^2 x - 5 \log_2 x - 2 = 0;$$

или: $\log x_2 = 2$, $x = 4$;

или: $\log_2 x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Оба полученных значения x удовлетворяют данному уравнению ($x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$).

Ответ. 4; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4°. В усеченном конусе сечение, проведенное через две образующие, составляет с основанием угол α. Определить плошадь сечения, если радиусы оснований конуса R и r и образующая конуса наклонена к основанию под углом β.

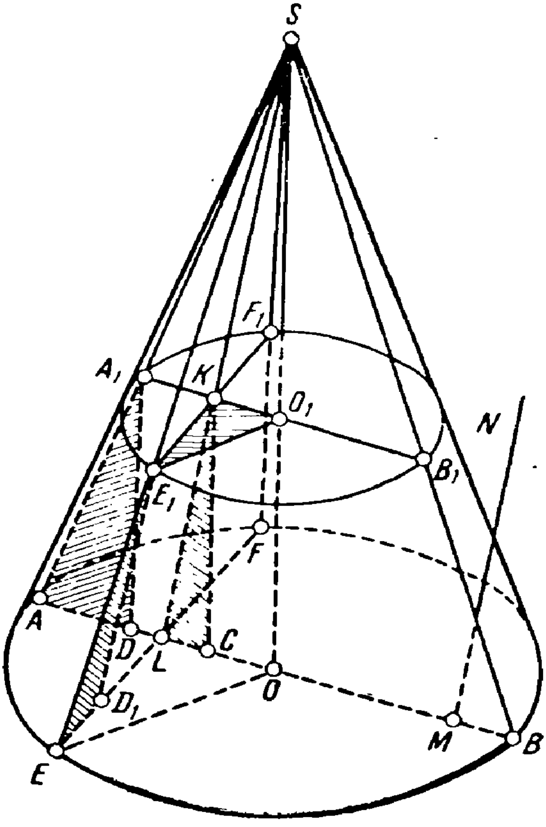
Решение ученицы X класса Арман И.

I. Объяснение к чертежу 7 (стр. 114).

AB — диаметр основания, SO — высота полного конуса. В осевом сечении ASB полного конуса строим заданный угол ($\angle NMB = \alpha$). Из вершины S в осевом сечении проводим прямую $SL \parallel MN$; $\angle SLO = \alpha$. На плоскости основания через точку L проводим прямую $EF \perp AB$.

Через две пересекающиеся прямые SL и EF проводим плоскость, которая пересечет поверхность конуса по двум образующим SE и SF. $\angle SLO$ — линейный угол двугранного угла EF ($OL \perp EF$ и $SL \perp EF$ на основании теоремы о трех перпендикулярах: EF мы проводили перпендикулярно AB, часть которой LO является проекцией SL).

Полный конус сечем плоскостью, параллельной основанию, и получаем усеченный конус с высотой OO_1. Верхнее основание конуса пересечет построенную плоскость ESF по прямой $E_1F_1 \parallel EF$, так как если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны. $EE_1 = FF_1$, как образующие



Черт. 7

усеченного конуса. Следовательно, данное сечение — равнобочная трапеция.

$\angle A_1AO$ — угол между образующей и основанием, так как наименьшим углом между прямой и плоскостью является угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость (высота SO — перпендикуляр к плоскости основания, а радиус AO — проекция образующей).

II. Данные.

$A_1O_1 = r$; $AO = R$; $\angle A_1AO = \beta$; $\angle KLO = \alpha$.

III. Решение.

1. В осевом сечении из точки A_1 опускаем перпендикуляр A_1D к плоскости основания, который будет лежать в плоскости осевого сечения. $A_1D \parallel OO_1$; $A_1D = OO_1$, как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями.

Мы получим прямоугольный треугольник ADA_1, где известны: угол A_1AD и катет AD, который равен $AO - A_1O_1$.

$$AA_1 = \frac{AO - A_1O_1}{\cos\beta} = \frac{R - r}{\cos\beta}.$$

$A_1A = E_1E$, как образующие, значит, $E_1E = \frac{R - r}{\cos\beta}$.

2. Из точки K в осевом сечении проводим $KC \parallel O_1O$. $KC \parallel A_1D$, $KC = A_1D$. $A_1D = (R-r)\operatorname{tg}\beta$, $KC = (R-r)\operatorname{tg}\beta$. В прямоугольном треугольнике KLC известны: угол KLC и катет KC.

$$LK = \frac{(R-r)\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$

3. Определим ED_1.

KL—высота трапеции, так как $KL \perp EF$. KL делит EF пополам (AO радиус, перпендикулярный к хорде EF, делит ее на две равные части).

Из точки E_1 в плоскости сечения опускаем перпендикуляр E_1D_1 к EF. В прямоугольном треугольнике E_1D_1E известны катет и гипотенуза:

$$E_1D_1 = KL, \quad EE_1 = A_1A.$$

$$ED_1 = \sqrt{E_1E^2 - E_1D_1^2} = \sqrt{\frac{(R-r)^2}{\cos^2\beta} - \frac{(R-r)^2\operatorname{tg}^2\beta}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{R-r}{\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{R-r}{\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\frac{2\sin^2\alpha - 2\sin^2\beta}{2}} =$$

$$= \frac{R-r}{\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha - 1 + \cos 2\beta}{2}} =$$

$$= \frac{R-r}{\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

4. Определяем EL.

$\triangle E_1KO_1 \sim \triangle ELO$ (оба прямоугольные и $\angle KE_1O_1 = \angle LEO$, так как оба угла острые и стороны их соответственно параллельны).

$$\frac{E_1O_1}{EO} = \frac{E_1K}{EL};$$

$$E_1K = x, \quad EL = ED_1 + x;$$

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{ED_1 + x};$$

$$ED_1r + rx = Rx; \quad x = \frac{ED_1 \cdot r}{R - r} = E_1K$$

$$E_1K = \frac{r(R-r)\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{(R-r)\sin\alpha\cos\beta} = \frac{r\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha\cos\beta}$$

$$EL = \frac{(R-r)\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha\cos\beta} + \frac{r\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

5. Площадь трапеции (сечения) равна:

$$\frac{FE + F_1E_1}{2} \cdot KL = \left(\frac{FE}{2} + \frac{F_1E_1}{2}\right) \cdot KL = (EL + E_1K) \cdot KL =$$

$$\frac{R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha\cos\beta} + \frac{r\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin\alpha\cos\beta} \cdot \frac{(R-r)\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(R^2 - r^2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin^2\alpha\cos\beta}.$$

Исследование полученного решения

Площадь сечения должна выражаться в квадратных единицах и положительным числом.

$\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$ — числа положительные, так как α и β — углы острые.

$\sin(\alpha+\beta)$ — число положительное, так как $\alpha+\beta$ угол острый или тупой, но синусы углов первой и второй четверти положительны.

$\sin(\alpha - \beta)$ — тоже число положительное, так как $\alpha > \beta$ ($\angle KLC$ является внешним по отношению к треугольнику ALS, значит, он больше всякого внутреннего, с ним не смежного).

Решение выражает положительное число квадратных $(R^2 - r^2)$ единиц.

Ответ. Площадь сечения равна:

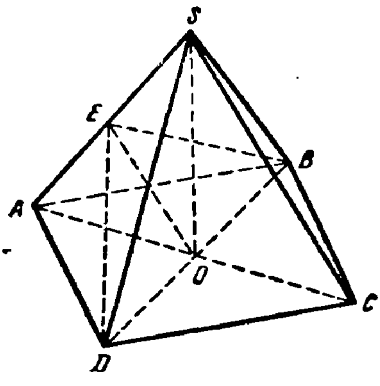
$$\frac{(n^2 - r^2)\operatorname{tg}\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin^2\alpha\cos\beta} \text{ кв. ед.}$$

5°. Предложена на вступительных экзаменах в Московском государственном университете им. Ломоносова в 1947 г.

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между двумя боковыми гранями равен β, а боковое ребро равно L. Определить объем этой пирамиды.

Решение ученицы X класса Карпенковой В.

I. Дополнительное построение



Черт. 8

Из точки D в плоскости ASD проводим $ED \perp SA$. Соединяем точку E с точкой B.

$\triangle AED = \triangle AEB$ (AE — общая сторона, $AD = AB$, $\angle EAD = \angle EAB$, так как боковые грани в правильной пирамиде равные и равнобедренные треугольники).

Против AD в $\triangle AED$ лежит $\angle AED$, против AB в $\triangle AEB$ лежит $\angle AEB$, но $AD = AB$, следовательно, $\angle AED = \angle AEB$; $\angle AED = 90°$ (по построению), значит, $\angle AEB = 90°$; угол BED — линейный угол двугранного угла AS. $\angle BED = \beta$.

Соединим точку E с точкой O. $SA \perp$ плоскости BED, значит, $OE \perp SA$, $ED = BE$ ($\triangle AED = \triangle AEB$); $\triangle BED$ равнобедренный. $BO = DO$; EO — медиана. Значит, EO — высота и биссектриса, т. е. $EO \perp BD$ и $\angle DEO = \angle BEO = \frac{\beta}{2}$.

II. Дано: $\angle BED = \beta$; $AS = L$.

III. Решение. $V_{пир} = \frac{1}{6} BD^2 SO$.

1. Определяем SO.

$\Delta ASO \backsim \Delta AEO$ ($\angle SAO$—общий); $\frac{AS}{AO} = \frac{SO}{EO}$; $SO =$

$$= \frac{AS \cdot EO}{AO};$$

$$AO = OD_1 \cdot SO = \frac{AS \cdot EO}{OD}.$$

$$EO = DO \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \; AS = L;$$

$$SO = \frac{L \cdot DO \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{DO} = L \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

2. Определяем BD.

Из ΔAOS по теореме Пифагора определим AO.

$$AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} = \sqrt{L^2 - L^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}} =$$

$$= L\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{L}{\sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{-\left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)} =$$

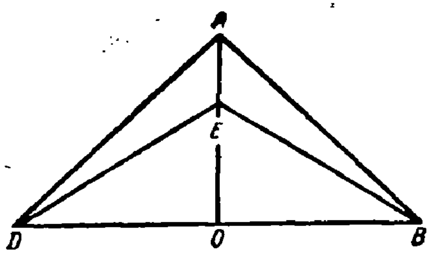
$$= \frac{L}{\sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{-\cos \beta}.$$

$$BD = \frac{2L}{\sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{-\cos \beta}.$$

3. Определяем $V_{пир}$.

$$V_{пир} = \frac{4 L^2(-\cos \beta) \cdot L \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{6 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = -\frac{2 L^3 \cos \beta \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{3 \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$2 > 0, L^3 > 0$, $\cos\beta < 0$. Действительно, $AO > EO$; перенесем ΔDAB и ΔDEB в одну плоскость (чертеж 9).



Черт. 9

$\angle DEO$ — внешний угол ΔDAE; $\angle DEO > \angle DAO$, значит, $\angle DEB > \angle DAB$, $\angle DAB = 90°$, поэтому $\angle DEB$ тупой; $\angle DEB = \beta$, $\cos\beta < 0$

$$3 > 0,\ \sin^2\frac{\beta}{2} > 0 \qquad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} > 0 \qquad \left(\beta 0 < \frac{\beta}{2} < 90°\right).$$

$$-\frac{2L^3\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{3\sin^2\frac{\beta}{2}} > 0.$$

Решение выражает положительное число кубических единиц.

Ответ: Объем правильной пирамиды равен —

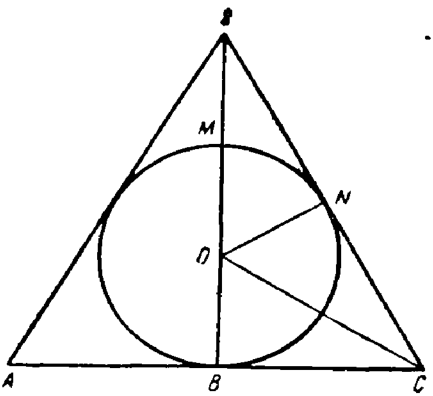
$$-\frac{2L^3\cos\beta\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{3\sin^2\frac{\beta}{2}}$$ куб. ед.

6°. Определить угол между образующей и плоскостью основания в конусе, объем которого в m раз более объема вписанного в него шара. Найти наименьшее значение m; вычислить угол, если $m = 2\frac{1}{4}$.

Работа ученицы X класса Борисовой В.

Объяснение к чертежу.

Пусть прямоугольный $\triangle SBC$ и вписанный в него полукруг BMN вращаются около оси SB. При вращении этой фигуры мы получим конус с вписанным в него шаром. Центр шара, как видно, лежит в точке пересечения высоты конуса с биссектрисой угла, образованного образующей конуса и плоскостью основания его.



Черт. 10

Для решения задачи достаточно вычертить осевое сечение конуса и сечение вписанного шара — большой круг, что и представлено на чертеже.

Решение.

Искомый угол — $\angle SCB$, так как угол между образующей конуса и плоскостью основания его — это угол между наклонной SC и проекцией BC этой наклонной на плоскость основания.

Обозначим искомый угол SCB через x.

По условию задачи известно, что объем конуса ($V_к$) в m раз более объема шара ($V_ш$), вписанного в него. Выразим объем конуса и объем шара.

$$V_к = \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot SB.$$

Из $\triangle SBC$ определяем SB через BC:

$$SB = BC \cdot \operatorname{tg} x.$$

Следовательно, $V_к = \frac{1}{3}\pi BC^3 \operatorname{tg} x.$

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi OB^3.$$

Из $\triangle OCB$ определяем OB через BC:

$$OB = BC \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Тогда $V_ш = \frac{4}{3}\pi BC^3 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}$.

На основании условия $V_к = m V_ш$ составляем уравнение $\frac{1}{3} BC^3 \operatorname{tg} x = \frac{4}{3}\pi BC^3 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} \cdot m$ и решаем его:

$$\operatorname{tg} x = 4m \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2};$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 4m \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}.$$

При умножении обеих частей уравнения на разность $1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ посторонних корней не получится, так как

$1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \neq 0$, в противном случае угол x (острый угол в прямоугольном треугольнике) был бы равен 90°: если $1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=0$, то $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$;

$$\frac{x}{2}=45°,\ x=90°.$$

Получаем: $2tg\frac{x}{2} - 4m\operatorname{tg}^3\frac{x}{2} + 4\, m\operatorname{tg}^5\frac{x}{2} = 0$;

$$tg\frac{x}{2}\left(1 - \quad m\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2m\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\right) = 0;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \neq 0{,}2\, m\operatorname{tg}^4\frac{x}{2} - 2\, m\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

$$g\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{m \pm \sqrt{m^2-2m}}{2m}}.$$

Исследование корней уравнения

По смыслу задачи $m > 0$, x — острый угол, следовательно, $0 < \frac{x}{2} < 45°$.

Для $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ берем только положительное значение корня, так как $\frac{x}{2}$ острый угол.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не должен выражаться комплексным числом, поэтому дискриминант «m^2-2m» $\geqslant 0$.

1. Пусть
$$m^2-2m=0.$$
$$m(m-2)=0;$$
$$m\neq 0,\ m-2=0;$$
$$m=2.$$

При $m=2$ имеем: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Отсюда $\frac{x}{2}$ меньше $45°$, а угол $x<90°$. Это значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

2. Допустим теперь, что $m(m-2)>0$.

Рассмотрим величину $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$m>\sqrt{m^2-2m},\ \text{так как}\ m^2-2m<m^2.$$

Теперь мы имеем $m+\sqrt{m^2-2m}<2m$

$$\text{и}\ m-\sqrt{m^2-2m}<m;$$

тогда $\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}}<1.$

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, равный $\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}}$, удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<1$.

Таким образом, при $m\geqslant 2$ значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, равное $\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}}$, удовлетворяет условию задачи.

Отсюда находим x:

$$\frac{x}{2}=arc\,tg\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}};$$

$$x=2arc\,tg\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}}.$$

Наименьшее значение $m=2$, так как при меньшем значении m (при $m<2$) значение $tg\frac{x}{2}$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $m=2\frac{1}{4}$, то:

$$x_1=2arc\,tg\sqrt{\frac{\frac{9}{4}+\sqrt{\frac{81}{16}-\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}}=2arc\,tg\,0{,}816\approx$$

$$\approx 78^\circ 28'$$

$$x_2=2arc\,tg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}.$$

Ответ. 1. При $m\geqslant 2$ угол между образующей конуса и основанием равен $2arc\,tg\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}}$.

2. Наименьшее значение m равно 2.

3. При $m=2\frac{1}{4}$ угол между образующей конуса и основанием равен или $78^\circ 28'$, или 60°.

7°. Предложена на вступительных экзаменах в Московском государственном университете им. Ломоносова в 1947 г.

Определить номер наибольшего члена разложения бинома $(p+q)^n$, расположенного по убывающей степени буквы p, предполагая, что $p+q=1$. При каких условиях: a) наибольшим членом будет первый; b) наибольшим членом будет последний; c) разложение будет содержать два одинаковых, последовательных члена, превышающих все остальные члены разложения.

Работа ученицы X класса Калининой Л.

„Решение.

Бином при разложении содержит члены $T_{k-1} = C_n^{k-2} q^{k-2} p^{n-k+2}$ и член $T_k = C_n^{k-1} q^{k-1} p^{n-k+1}$.

Числовую величину члена T_k из числовой величины члена T_{k-1} можно получить следующим образом. По теории бинома Ньютона, биномиальный коэфициент члена T_k получается из биномиального коэфициента предшествующего члена T_{k-1} умножением его на показатель буквы p предшествующего (T_{n-1}) члена, т. е. на $n-k+2$, и делением на число членов разложения, предшествующих члену T_k, т. е. на $k-1$. Учитывая, кроме того, что члены разложения расположены по убывающим степеням p и возрастающим степеням q, получаем множитель, на который следует умножить числовую величину члена T_{k-1}, чтобы получить числовую величину члена T_k:

$$\frac{(n-k+2)\cdot q}{(k-1)\cdot p}.$$

Так же находятся множители, на которые нужно множить каждый предыдущий член, чтобы получить последующий, для приводимых ниже членов разложения.

Порядковые члены:	T_{k-1}	T_k	T_{k+1}	T_{k+2}
Переходные множители:	$\frac{(n-k+2)q}{(k-1)p}$	$\frac{(n-k+1)q}{kp}$	$\frac{(n-k)q}{(k+1)p}$	

Предположим, что член T_{k+1} наибольший, следовательно, множитель, на который нужно умножить числовую величину члена T_k, чтобы получить величину члена T_{k+1}, будет больше единицы, так как при умножении на неправильную дробь число увеличивается, и член T_{k+1} будет больше члена T_k. Но в то же время множитель, на который нужно умножить член T_{k+1}, чтобы получить член T_{k+2}, будет меньше единицы, так как при умножении на правильную дробь число уменьшается, и член T_{k+1} будет больше T_{k+2}, т. е.:

$$\begin{cases} \dfrac{(n-k+1)q}{kp} > 1, \\ \dfrac{(n-k)q}{(k+1)p} < 1. \end{cases}$$

$p>0$, $0 \leqslant k \leqslant n$ и целое число, $k+1>0$.

$$\begin{cases} (n-k+1)q>kp, \\ (n-k)q<(k+1)p. \end{cases}$$

По условию задачи $p+q=1$, $p=1-q$.

$$(n-k+1)q>k(1-q); \quad nq-kq+q>k-kq;$$

$$\underline{k<q(n+1);}$$

$$(n-k)q<(k+1)(1-q); \; nq-kq<k-kq+1-q;$$

$$\underline{k>q(n+1)-1;}$$

Решение.

$$q(n+1)-1<k<q(n+1).$$

Числовой пример.

Предположим, что $n=100$ и $q=\frac{2}{3}$, тогда $q(n+1)-1=$ $=\frac{2\cdot 101}{3}-1=66\frac{1}{3}$ и $q(n+1)=67\frac{1}{3}$, значит, $66\frac{1}{3}<k<67\frac{1}{3}$, но k — целое число, поэтому $k=67$

Ответ. Наибольший член 68-й.

Условия, при которых наибольшим членом разложения бинома будет первый.

Если наибольшим членом является первый, то множитель, на который умножается первый член, должен быть меньше единицы, т. е.:

$$\frac{nq}{p}<1;$$

$$\underline{p>0,} \quad nq<p;$$

$$n(1-p)<p;$$

$$n<p(1+n);$$

$$\boxed{p>\frac{n}{n+1}}$$

Числовой пример.

Предположим, что $n=15$, тогда $p>\frac{15}{16}$. Значит, при любом значении $p>\frac{15}{16}$ (при $n=15$) наибольшим членом разложения бинома будет первый.

Условия, при которых наибольшим членом разложения бинома будет последний.

Предпоследний член $T_n = C_n^{n-1} q^{n-1} p$, следовательно, множитель, на который нужно умножить T_n, чтобы получить последний член, будет $\frac{q}{pn}$.

$\frac{q}{pn} > 1$, так как последний член—наибольший.

$$q > pn;$$
$$1 - p > pn;$$
$$1 > p(n+1);$$
$$\boxed{p < \frac{1}{n+1}}.$$

Числовой пример.

Допустим, $n = 15$, тогда $p < \frac{1}{16}$; значит, при любых значениях $p < \frac{1}{16}$ (при $n = 15$) наибольшим членом будет последний.

Условия, при которых разложение бинома содержит два одинаковых, последовательных и наибольших члена.

Предложим, что наибольшими членами будут $T_{\kappa+1}$ и $T_{\kappa+2}$; тогда множитель $\frac{(n-k)q}{(k+1)p} = 1$, так как при умножении на единицу дробь сохраняет свое значение.

$p > 0$, $\kappa + 1 > 0$, $\quad (n-k)\, q = kq + p;$

$$qn - kq = kp + p;$$
$$qn - p = k(p+q);$$
$$p + q = 1, \qquad k = nq - p.$$

Числовой пример.

Примем $n = 200$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$; тогда $k = \frac{200 \cdot 5}{6} - 1 = \frac{999}{6} = 166\frac{1}{2}$. Так как k—число членов, предшествующих определяемому, должно выражаться целым числом, то, следовательно, произвольно давать значения p и q мы не имеем права. В уравнении $k = nq - p$ заменим p через q, тогда $k = nq - 1 + q$; $k = q(n+1) - 1$, где $q(n+1)$ должно быть целое число, чтобы в разложении были два последовательных наибольших члена.

Из последнего выражения для k определим q: $\boxed{q = \frac{k+1}{n+1}}$. Придавая n определенное значение ($n=200$) и принимая за наибольшие определенные члены (например, T_{10} и T_{11}), находим при $k = 9$:
$q = \frac{10}{201}$; тогда $p = \frac{191}{201}$.

Проверим правильность найденных значений q и p подстановкой их в соответствующие множители:

1) $\frac{(n-k)q}{(k+1)p} = \frac{191 \cdot 10 \cdot 201}{201 \cdot 10 \cdot 191} = 1$. Если $T_{k+1} = T_{k+2}$, то множитель $\frac{(n-k)q}{(k+1)p}$, на который следует умножить числовую величину члена T_{k+1}, чтобы получить числовую величину члена T_{k+2}, должен быть равен единице. Он и равен единице, следовательно, значения $p = \frac{191}{201}$ и $q = \frac{10}{201}$ удовлетворяют требованию.

2) $\frac{(n-k+1)q}{kp} = \frac{(200-8) \cdot 10}{9 \cdot 191} = \frac{1920}{1719} > 1$. Значения $p = \frac{191}{201}$ и $q = \frac{10}{201}$ удовлетворяют условию, так как множитель, на который нужно умножить девятый член, чтобы получить больший десятый член, должен быть, действительно, больше единицы.

3) $\frac{(n-k-1)q}{(k+2)p} = \frac{190 \cdot 10 \cdot 201}{201 \cdot 191 \cdot 11} = \frac{1\,900}{2\,101} < 1$. Множитель, на который надо умножить числовую величину члена T_{k+2}, чтобы получить числовую величину следующего меньшего члена, должен быть меньше единицы. Из рассмотренного выше случая (3) мы видим, что при $p = \frac{191}{201}$ и $q = \frac{10}{201}$ этот множитель, действительно, меньше единицы. Полученные нами значения p и q удовлетворяют всем рассмотренным выше условиям; значит, при $n = 200$ и $k = 9$ наиболь-

шими членами разложения бинома будут десятый и одиннадцатый, если $q=\frac{10}{201}$ и $p=\frac{191}{201}$.

Частные случаи

I. **Условия, при которых двумя одинаковыми, последовательными и наибольшими членами разложения бинома являются первый и второй.**

Первый и второй члены наибольшие и одинаковые, следовательно, множитель, на который нужно умножить числовую величину первого члена, чтобы получить числовую величину второго члена, должен быть равен единице, т. е.:

$$\frac{nq}{p}=1;$$
$$nq=p;$$
$$n(1-p)=p;$$
$$n=p(n+1);$$
$$\boxed{p=\frac{n}{n+1}}.$$

Числовой пример.

Примем $n=20$, тогда

$$p=\frac{20}{21}, \text{ а } q=\frac{1}{21}.$$

Проверим правильность найденных значений p и q подстановкой их значений в соответствующие множители.

1) $\frac{nq}{p}=\frac{20 \cdot 21}{21 \cdot 20}=1$. Найденные значения $p=\frac{20}{21}$ и $q=\frac{1}{21}$ удовлетворяют требованию, так как, действительно, множитель, на который нужно умножить первый член, чтобы получить равный ему второй член, равен единице.

2) $\frac{(n-1)q}{2p}=\frac{19 \cdot 21}{21 \cdot 2 \cdot 20}=\frac{19}{40}<1$. Множитель, на который нужно умножить числовую величину второго члена, чтобы получить числовую величину меньшего

третьего члена, действительно меньше единицы при $p=\frac{20}{21}$ и $q=\frac{1}{21}$. Значит, найденные значения p и q удовлетворяют требованию.

Полученные нами числовые значения p и q удовлетворяют двум рассмотренным выше условиям, следовательно, при $n=20$, $p=\frac{20}{21}$ и $q=\frac{1}{21}$ наибольшими, одинаковыми членами разложения бинома будут первый и второй, т. е. первые два члена.

Примечание. Проверить правильность полученных значений p и q можно следующим способом.

Разложение бинома имеет вид:

$$(p+q)^n = p^n + nqp^{n-1} + \frac{n(n-1)\,q^2p^{n-2}}{1\cdot 2}\ \ldots\ldots$$

Так как в рассмотренном случае $nq=p$ $\left(\frac{nq}{p}=1\right)$, то второй член разложения бинома примет вид: $p\cdot p^{n-1}=p^n$, т. е. первый член разложения бинома (p^n) равен второму члену разложения бинома (p^n).

Третий член будет:

$$nq\,\frac{(n-1)\,q}{2}\,p^{n-2}=\frac{(n-1)\,q}{2}\,p^{n-1}.$$

Этот член будет меньше p^n (второго члена), потому что сомножитель $\frac{(n-1)\,q}{2}$ меньше p (числитель дроби $(n-1)\,q$ меньше p, так как $nq=p$, следовательно, вся дробь и подавно будет меньше p). Все последующие члены также будут меньше второго члена разложения. Значит, первый и второй члены разложения будут наибольшими и равными, и найденные значения $p=\frac{n}{n+1}$ и $q=$ $=\frac{1}{n+1}$ удовлетворяют требованию.

II. **Условия, при которых одинаковыми, последовательными и наибольшими членами разложения бинома являются два последних.**

Два последних члена равные, наибольшие; значит, множитель, на который нужно умножить предпоследний (T_n) член разложения, чтобы получить равный ему последний (T_{n+1}) член, должен быть равен единице, т. е.:

$$\frac{q}{np}=1;\ q=np;\ 1-p=np;\ 1=p(n+1);$$

$$\boxed{p=\frac{1}{n+1}}.$$

Числовой пример.

Предположим, что $n=30$; тогда $p=\frac{1}{31}$ и $q=\frac{30}{31}$. Проверим правильность найденных значений p и q подстановкой их в соответствующие множители: $\frac{q}{pn}=$ $=\frac{30\cdot31}{31\cdot30}=1$. Полученные значения $p=\frac{1}{31}$ и $q=\frac{30}{31}$ удовлетворяют требованию, так как множитель, на который нужно умножить числовую величину члена T_n, чтобы получить числовую величину равного ему члена T_{n+1}, действительно, должен равняться единице. $\frac{2q}{(n-1)p}=\frac{2\cdot30\cdot31}{31\cdot29}=\frac{60}{29}>1$. Найденные значения p и q удовлетворяют требованию, потому что множитель, на который нужно умножить числовую величину меньшего члена T_{n-1}, чтобы получить числовую величину наибольшего члена T_n, действительно, должен быть больше единицы. Полученные нами значения $p=\frac{1}{31}$ и $q=\frac{30}{31}$ удовлетворяют двум рассмотренным выше условиям; значит, при $n=30$, $p=\frac{1}{31}$ и $q=\frac{30}{31}$ наибольшими и одинаковыми членами разложения бинома будут два последних члена.

III. Остается рассмотреть случай, когда $p=q$.

Разложение бинома примет вид:

$$(p+q)^n=p^n+C_n^1qp^{n-1}+C_n^2q^2p^{n-2}+C_n^3q^3p^{n-3}\ \ldots$$

Так как $q=p$, то разложение бинома можно написать так:

$$(p+q)^n=p^n+C_n^1p^n+C_n^2p^n+C_n^3p^n\ \ldots\ldots$$

Из последнего видно, что теперь величины членов разложения бинома зависят только от величины биномиальных коэфициентов, а потому наибольшими, одинаковыми членами разложения будут два средних члена разложения, если n — нечетное число, т. е.:

$$T_{\frac{n+1}{2}} \text{ и } T_{\frac{n+1}{2}+1}.$$

При n—четном числе двух одинаковых, последовательных, наибольших членов разложения быть не может, так как при n — четном числе наибольшим членом будет только один средний член разложения бинома.

Ответ.

1. Наибольшим членом будет T_{k+1} при
$$q(n+1)-1<k<q(n+1).$$

2. Наибольшим членом будет T_1 при $p>\frac{n}{n+1}$.

3. Наибольшим членом будет T_{n+1} при $p<\frac{1}{n+1}$.

4. Наибольшими, одинаковыми, последовательными членами будут T_{k+1} и T_{k+2}; при $k=q(n+1)-1$, где $q(n+1)$ — целое число, или при $q=\frac{k+1}{n+1}$;

в частных случаях: T_1 и T_2 при $p=\frac{n}{n+1}$;

T_n и T_{n+1} при $p=\frac{1}{n+1}$;

два средних члена при $p=q$ и нечетном n".

Ю. О. ГУРВИЦ,
заслуженный учитель РСФСР

ОБ УЛУЧШЕНИИ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ В VI—VII КЛАССАХ

Начиная с VI класса, учащимся дается систематический элементарный курс геометрии. Следует, конечно, иметь в виду, что изучение систематического курса геометрии отнюдь не должно протекать в отрыве от практической деятельности. Опыт, предваряющий доказательство или подтверждающий уже доказанную теорему, должен найти свое место в систематическом курсе геометрии: практические жизненные процессы должны подчас являться исходным моментом суждения, которые затем теоретически подтверждаются; в другом случае теоретические выводы иллюстрируются примерами из окружающей действительности.

Идея движения, наглядность, использование моделей, особенно при прохождении стереометрии, идея симметрии, решение задач на построение, приложение теории к решению практических задач, проведение аналогии между отдельными вопросами планиметрии и стереометрии, систематизация пройденного, выявление широкой инициативы со стороны учащихся в деле постановки ими вопросов и самостоятельного решения ряда проблем — вот главнейшие вехи, указывающие преподавателю путь методического построения курса.

В своей работе преподаватель должен суметь:

1) надлежащим образом использовать накопление учащимися знаний для развертывания перед ними курса геометрии, в котором логическое доказательство

выдвигается на первое место, где интуиция играет роль разведки, а опыт уходит на задний план;

2) приучить учащихся находить новые геометрические факты;

3) подкреплять при рассмотрении отдельных вопросов теоретические выводы иллюстрацией их практической ценности и тем самым находить тесную увязку теории с практикой;

4) использовать явления окружающей действительности, опыт и интуицию как стимул для постановки вопроса, отнюдь не заменяя логическое доказательство опытом;

5) приучить учащихся усматривать взаимозависимость между отдельными геометрическими фактами;

6) развить в учащихся наблюдательность, строгость и последовательность в суждениях, любознательность, любовь к исследованию;

7) научить, наконец, учащихся пользоваться учебной книгой, вести четкую конспективную запись, выполнять опрятно и точно чертеж и быть всегда готовым к ответу.

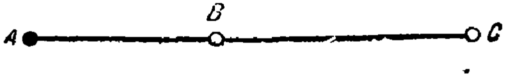
Исходя из перечисленного, преподаватель обязан в первую очередь добиться, чтобы учащиеся вполне уяснили себе новые геометрические понятия, могли дать четкую, краткую, притом исчерпывающую их формулировку и, наряду с этим, научились давать четкие, опрятно выполненные чертежи рассматриваемых ими геометрических образов, удовлетворяющих заданным условиям. Необходимо требовать, чтобы каждый учащийся имел циркуль и линейку, умел с ними обращаться и пользоваться ими при выполнении как домашней, так и классной работы.

Работа, выполненная без соблюдения указанных условий, должна возвращаться учащемуся для исправления. Требования, предъявляемые к учащимся, обязывают, в свою очередь, преподавателя при выполнении им чертежа на доске давать его точным, четко и красиво выполненным.

Наряду с этим следует приучать учащихся к чтению чертежа, к умению выделить в чертеже те его элементы, которые необходимы для ответа на поставленный вопрос и для решения задачи.

Полезно давать учащимся VI—VII классов упражнения следующего рода:

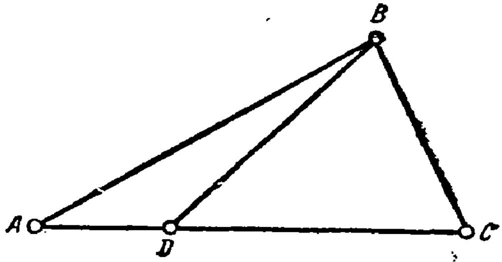
1) Дается отрезок AC, равный сумме отрезка AB и BC (чертеж 1).



Черт. 1

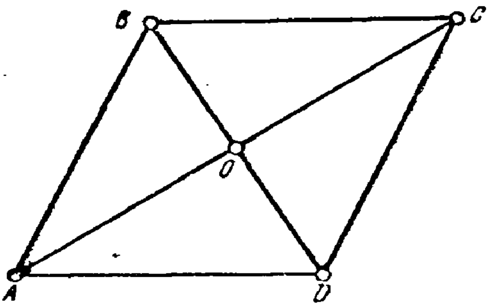
Учащийся должен видеть, что чертеж 1 представляет собой три отрезка: отрезки AB, BC и AC, что $AC=AB+BC$; $AB=AC-BC$; $BC=AC-AB$.

2) Дается треугольник ABC, в котором проведен отрезок BD (чертеж 2). Рассматривая чертеж 2, учащийся должен указать, что на нем имеется три треугольника: $\Delta\ ABD$, $\Delta\ BCD$, $\Delta\, ABC$; что все треугольники имеют одну общую вершину B; что BD является общей стороной двух треугольников — треугольника ABD и треугольника BCD; что стороны AD и DC составляют одну прямую; что $\angle ABD+\angle DBC=$ $=\angle ABC$ и т. д.



Черт. 2

3) Дан четырехугольник $ABCD$ (чертеж 3), в котором $\angle AOB=90^\circ$ и $AO=OC$ и $BO=OD$.



Черт. 3

Сколько усматривается на данном чертеже треугольников? Что можно сказать об углах данной фигуры? Что эта за фигура? Что можно сказать о сторонах фигуры $ABCD$? и т. д.

Подобного рода упражнения, которые могут быть весьма разнообразными, приучают учащихся к подробному рассмотрению заданной фигуры и выяснению взаимного расположения отдельных ее элементов.

Много труда и внимания преподаватель должен уделить тому, чтобы научить учащегося четко и правильно формулировать теорему, выделить и записать ее условие и заключение, сделать четкий и правильно выполненный чертеж, необходимый для доказательства теоремы, наконец, излагать доказательство теоремы.

В своей работе преподаватель всегда обязан помнить, что учащиеся должны научиться доказывать, но отнюдь не заучивать непонятое доказательство. Учащимся необходимо разъяснить, что всякое доказательство обосновывается или при помощи основных суждений—аксиом, или при помощи уже доказанных суждений—теорем.

Не следует забывать, что всякое доказательство, даже доказательство несложной теоремы, требует от учащихся сосредоточенности внимания и напряжения мысли; поэтому нельзя перегружать урок разбором и доказательством более двух теорем.

Когда учащиеся уже приобрели навык в расчленении теоремы на отдельные составные ее части: на то, что дано, и на то, что требуется доказать, и когда преподаватель уверен, что с помощью книги учащиеся сумеют сами разобраться в доказательстве теоремы, можно в качестве самостоятельной работы предложить им разобраться в доказательстве теорем и следствий, не рассмотренных на уроке.

В VI классе, в котором учащиеся приступают к изучению систематического курса, большинство теорем и следствий из них должно быть разобрано на уроке. Для самостоятельного доказательства учащимся следует дать такие теоремы, которые являются частными случаями уже доказанных теорем, как, например, теоремы о равенстве прямоугольных треугольников, вытекающие из теорем о равенстве косоугольных треугольников, и доказательство которых несложно.

Задачи на доказательство безусловно должны быть включены в план работы преподавателя; подобного рода задачи имеются в достаточном числе и в учебнике геометрии Киселева, и в сборнике задач по геометрии Рыбкина. Следует отметить, что задачи на доказательство должны быть даны учащимся уже начиная с VI класса, так как для развития мышления учащихся и привития им навыков самостоятельной работы, особенно на первых этапах обучения систематическому курсу геометрии, полезно упражнять их в самостоятельном проведении рассуждений, приучать их использовать ранее изученные ими теоремы и определения для обоснования своих суждений.

Вполне понятно, что даваемые учащимся задачи на доказательство должны соответствовать уровню их подготовки. Прежде чем дать учащимся задачи на доказательство в качестве домашнего задания, необходимо проработать ряд таких задач в классе, выделив условие и заключение теорем и кратко записав само доказательство.

Заметим, что изучение в VI классе темы «Треугольник» и в VII классе темы «Параллелограммы» позволяет отобрать достаточное число теорем, не входящих в программу курса и посильных учащимся для самостоятельного рассмотрения их.

ДЛЯ VI КЛАССА

1. В равнобедренном треугольнике медианы (высоты), проведенные к боковым сторонам, равны.

2. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

3. Если две стороны и медиана, проведенная к одной из данных сторон одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Доказать, что проекции биссектрисы AD на стороны AB и AC равны.

5. AD—биссектриса угла BAC. Доказать, что любая точка, взятая на биссектрисе, отстоит на равном расстоянии от сторон угла

6. Доказать, что в прямоугольном равнобедренном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна ее половине.

7. Дано $AB \parallel CD$ и EF—секущая. Доказать, что биссектрисы 1) двух равных углов параллельны, 2) двух неравных углов—перпендикулярны.

8. Дан отрезок BC и точка A вне его. Точка A соединена с точкой D—серединой отрезка BC, и на

продолжении AD взята точка E так, что $DE = AD$. Доказать, что $AB = EC$.

9. Доказать, что высоты разностороннего треугольника равны между собой.

10. Если от вершины равнобедренного треугольника отложить на сторонах его равные отрезки, то прямая, соединяющая концы этих отрезков, параллельна основанию.

11. Хорды AB и CD равны между собой. Доказать, что, соединив концы этих хорд с центром, мы получим равные треугольники.

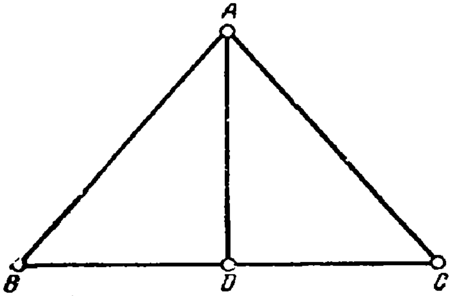
ДЛЯ VII КЛАССА

1. Высоты ромба равны.
2. Точка пересечения диагоналей ромба равно отстоит от всех его сторон.
3. Перпендикуляры, опущенные из вершин прямоугольника на диагонали, равны.
4. Прямые, соединяющие середины смежных сторон прямоугольника, образуют ромб.
5. Прямые, соединяющие середины смежных сторон ромба, образуют прямоугольник.
6. Прямые, соединяющие середины смежных сторон равнобедренной трапеции, образуют ромб.
7. Доказать, что в равнобедренной трапеции диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника, из которых два, прилежащие к основаниям, равнобедренные, а два, прилежащие к боковым сторонам, равны между собой.
8. Если в окружность вписать прямоугольник и в вершинах его провести касательные, то в пересечении их получится ромб.
9. В круге из концов хорды проведены перпендикулярные к ней хорды. Доказать, что они равны.
10. Доказать, что вписанная в круг трапеция—равнобедренная.

Для закрепления изученной теории и умения применять ее необходимо решение большого числа задач на вычисление. Как правило, следует распределить задачи на вычисление из задачника по геометрии Рыбкина во времени так, чтобы в течение учебного года решить (желательно) все задачи тех параграфов, которые включают программный материал соответствующих классов.

Так, учащиеся VI класса должны проработать из сборника задач Рыбкина (ч. 1—«Планиметрия») задачи § 1—§ 4; учащиеся VII класса—задачи § 5 — § 7.

Для повторения и закрепления учащимися пройденного следует при рассмотрении нового материала кратко остановиться на теоремах, с помощью которых доказывается новая теорема.



Черт. 4

Пусть требуется доказать теорему:

Если из одной и той же точки, взятой вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр и две наклонные, то, в случае равенства наклонных, их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра (чертеж 4).

Дано: $AD \perp BC$

AB и AC—наклонные

$AB = AC$

Тр. док. $BD = DC$

Доказательство 1-е:

$\triangle ABD = \triangle ACD$, так как

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$

$AB = AC$

$BD = DC$

Доказательство 2-е:

$\triangle ABC; AB = AC$,

$AD \perp BC$

AD — медиана

$BD = DC$

В первом случае для доказательства равенства отрезков BD и DC были рассмотрены прямоугольные треугольники ABD и ACD, которые равны (по гипотенузе и катету); во втором случае было использовано свойство перпендикуляра, опущенного из вершины равнобедренного треугольника и являющегося одновременно и медианой.

Доказательство приведенной теоремы дает преподавателю достаточный материал для повторения и закрепления учащимися ранее пройденных теорем.

Готовясь к предстоящему занятию с учащимися, преподаватель должен иметь в виду целесообразное использование проработки нового материала и повторение уже пройденного. Для этого всегда имеется достаточно разнообразный и интересный материал.

В целях повышения уровня знаний учащихся по геометрии необходимо уделять исключительно большое внимание решению задач на построение. Следует отметить, что одной из причин недочетов в преподавании геометрии в школах является недооценка преподавателями значения систематического решения задач на построение и доказательство.

Недостаточное внимание к этому важному разделу работы по геометрии, несомненно, является одной из причин, почему учащиеся не всегда достаточно четко разбираются в разнообразии форм изучаемых ими геометрических образов, не умеют целесообразно использовать при решении задач свойства изученных фигур, зачастую не умеют правильно выполнить чертеж, в полном соответствии с условиями задачи; одним словом, пространственное воображение большинства учащихся развито слабо.

В первую очередь учащиеся должны уметь безукоризненно производить элементарные геометрические построения, к которым относятся:

1) через данные две точки провести прямую;

2) по данной точке—центру—и данному радиусу построить окружность;

3) взять точку на прямой или вне прямой;

4) взять точку на окружности, внутри или вне ее;

5) построить точку пересечения двух прямых (непараллельных);

6) построить точку пересечения прямой с окружностью;

7) построить точку пересечения двух окружностей.

Знанием этих элементарных задач на построение обусловливается выполнение задач на построение: отложить на данной прямой от данной точки данный отрезок; построить сумму или разность двух или нескольких отрезков и т. п.; построить в данном круге хорду данной длины при условии, что данная хорда не больше диаметра круга, и др.

После ознакомления учащихся с признаками равенства треугольников следует приступить к рассмотрению основных задач на построение. Эти задачи следует расположить в следующем порядке:

1) построить угол, равный данному;

2) разделить данный угол пополам, вообще на 2^n равных частей, где n—натуральное число;

3) провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку (два случая);

4) разделить данный отрезок пополам, или вообще на 2^n равных частей, где n — натуральное число;

5) построить треугольник по стороне a и двум прилежащим углам B и C;

6) построить треугольник по двум сторонам a и b и углу c, заключенному между ними;

7) построить треугольник по трем его сторонам a, $в$ и c;

8) построить треугольник по двум сторонам a и b и углу A, лежащему против большей стороны ($a > b$).

После прохождения тем «Параллельные прямые» и «Параллелограммы» к числу основных задач следует присоединить еще следующие задачи:

9) построение прямой, параллельной данной;

10) деление отрезка на произвольное число равных частей.

В VII классе к перечисленным задачам необходимо присоединить следующие:

1) разделить дугу пополам;

2) найти центр данной окружности;

3) из конца A данного луча AB, не продолжая его, восставить к нему перпендикуляр;

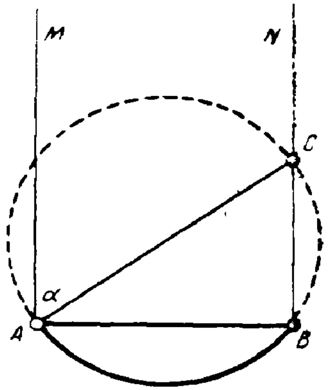
4) через данную точку провести к данной окружности касательную (два случая: а) данная точка лежит на окружности, б) данная точка лежит вне окружности);

5) к двум окружностям провести общую касательную (внешние и внутренние касательные);

6) на данном отрезке построить сегмент, вмещающий данный угол.

Приводим ниже более простое решение последней задачи (чертеж 5), отличное от решения, данного в учебнике Киселева.

Дан отрезок AB, в концах которого восставим к нему перпендикуляры AM и BN и при основании перпендикуляра AM (при точке A) строим угол α, равный данному углу.



Черт. 5

Сторона угла α пересечет перпендикуляр BN в точке C. На отрезке AC, как на диаметре, строим окружность, которая и будет искомой.

Действительно, хорда AB—данный отрезок; $AM \parallel BN$ и AC—секущая, следовательно, $\angle MAC = \angle ACB = \alpha$ и сегмент ACB—искомый; он вмещает угол α, и концы его соединены хордой AB, равной данному отрезку.

Усвоение учащимися приемов решения основных задач на построение позволяет приступить к решению более сложных задач на построение, при решении которых используются приобретенные учащимися навыки.

Понятно, что необходимо научить учащихся проводить анализ решения задач на построение, который позволит им найти нужный путь построения искомой фигуры. Наряду с анализом следует приучить учащихся проводить после выполнения построения доказательство, что построение выполнено в полном соответствии с условиями задачи, а также исследование полученного решения. Образцы анализа, построения, доказательства и исследования решения задачи имеются в каждом учебнике геометрии.

Небесполезно четко выполненный образец подробного и полного решения задачи на построение вывесить в классе и требовать от учащихся аккуратного выполнения решения на отдельных листах; каждое решение должно быть тщательно просмотрено и оценено.

Надо помнить, что только решение значительного числа задач на построение позволит учащимся развить пространственное воображение, комбинаторные способности, лучше осознать зависимость между элементами искомой фигуры, понять смысл и цель изучения теорем.

Ниже приводятся задачи на построение для VI и VII классов, большинство из которых должно быть решено учащимися в классе, на кружковых занятиях и на дому.

Задачи на построение

I. Построить равнобедренный треугольник:

1) по основанию и боковой стороне;
2) по основанию и углу при основании;
3) по боковой стороне и углу при основании;
4) по боковой стороне и углу при вершине.

II. Построить прямоугольный треугольник:

1) по двум катетам;
2) по гипотенузе и катету;
3) по гипотенузе и острому углу.

III. Построить треугольник:

1) по основанию, боковой стороне и высоте, опущенной на основание;
2) по основанию, высоте и медиане, проведенным к основанию;
3) по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них;
4) по основанию, высоте и медиане, проведенным к одной из боковых сторон;
5) по основанию, высоте и углу при основании;
6) по основанию, высоте и проекции одной из боковых сторон на основание.

IV. Построить равнобедренный треугольник:

1) по основанию и высоте на это основание;
2) по боковой стороне и высоте;
3) по основанию и боковой высоте;
4) по высоте и углу при основании;
5) по высоте и углу при вершине.

V. Построить параллелограмм:

1) по двум сторонам и диагонали;
2) по стороне и двум диагоналям;
3) по стороне, углу и диагонали;
4) по двум диагоналям и углу между ними;

5) по стороне, диагонали и высоте, проведенной к данной стороне;

6) по двум диагоналям и высоте.

VI. Построить прямоугольник:

1) по диагонали и углу между диагоналями;

2) по стороне и углу между диагоналями.

VII. Построить ромб:

1) по стороне и диагонали;

2) по двум диагоналям;

3) по углу и диагонали;

4) по стороне и высоте.

VIII. Построить трапецию:

1) по четырем сторонам;

2) по большему основанию, двум прилежащим углам и одной из боковых сторон;

3) по большему основанию, двум углам, прилежащим к меньшему основанию, и одной из боковых сторон;

4) по двум основаниям, высоте и одной из боковых сторон;

5) по двум основаниям, одной из боковых сторон и одной из диагоналей;

6) по основанию, высоте и двум диагоналям;

7) по двум основаниям и двум диагоналям;

8) по одному основанию, высоте и двум боковым сторонам.

IX. Построить равнобедренную трапецию:

1) по двум смежным сторонам и диагонали;

2) по двум смежным сторонам и высоте;

3) по одному из оснований, высоте и диагонали;

4) по острому углу, высоте и диагонали.

X. Задачи, решаемые методом геометрических мест:

1) провести данным радиусом R окружность через точки A и B;

2) построить точку, находящуюся на расстоянии a от точки A и на расстоянии b от точки B;

3) описать окружность около треугольника: а) остроугольного, б) тупоугольного и в) прямоугольного;

4) построить точку, равноудаленную от всех сторон треугольника;

5) построить точку, равноудаленную от сторон AB и BC треугольника и равно удаленную от вершин его A и B;

6) в треугольник ABC вписать равнобедренный треугольник данной высоты h так, чтобы его основание было параллельно стороне AC;

7) построить треугольник по радиусу R описанной окружности, высоте и медиане из вершины угла A;

8) провести через точку A окружность, касающуюся в точке B прямой MN;

9) через точку A провести окружность радиуса R, касающуюся прямой MN;

10) построить треугольник по стороне a, углу A и медиане m из вершины угла A;

11) построить треугольник по стороне a, углу A и высоте h из вершины угла A;

12) провести окружность радиуса R, касающуюся прямой MN и данной окружности;

13) построить окружность, касающуюся прямой AB в точке C и касающуюся прямой MN;

14) построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и лежащей между ними окружности;

15) построить треугольник по двум сторонам и радиусу R описанного круга;

16) построить равносторонний треугольник по радиусу r вписанного круга.

XI. Задачи более сложные:

1) построить прямоугольный треугольник по катету в сумме гипотенузы с другим катетом;

2) построить прямоугольный треугольник по катету и разности двух других сторон;

3) построить квадрат по сумме стороны с диагональю;

4) построить квадрат по разности диагонали и стороны.

Приведенный перечень задач на построение не является исчерпывающим. Большое число подобных задач преподаватель найдет в учебнике геометрии Киселева; ими следует воспользоваться по мере приобретения учащимися навыка в решении задач на построение.

Необходимо указать, что работу с учащимися по решению задач на построение весьма полезно проводить следующим образом. Зачитывается задача; учащиеся вычерчивают искомую фигуру, отмечая на чертеже заданные по условиям отрезки и углы, а затем рассказывают, как они намерены выполнять построение. Применяя указанный прием, можно в качестве домашнего задания предложить учащемуся провести подробное решение одной задачи на построение, другие же задачи проанализировать, с тем чтобы затем в классе рассказать ход решения задачи.

Следует вывешивать в классе на неделю список 5—10 задач на построение, предложив желающим решить их дома и сообщить решение задач на уроке в классе или на кружковых занятиях.

Много внимания должно быть уделено повторению пройденного. Для этой цели полезно на каждом уроке уделять 5—8 минут на опрос учащихся. Для успешного проведения беглого опроса нужно заранее приготовить необходимый для этого материал: перечень вопросов, включающий определения, формулировки теорем, задачи на вычисление, решение которых может быть выполнено в уме, задачи на построение и доказательство.

Ниже дается примерный перечень таких вопросов по отдельным темам программы VI и VII классов.

VI КЛАСС

Параллельные прямые. Углы треугольника

1. Какие прямые называются параллельными?

2. Как измерить расстояние между параллельными прямыми?

3. При каком положении секущей равны все углы, образуемые двумя параллельными и секущей?

4. Как называются углы, образованные пересечением двух параллельных прямых секущей?

5. Как можно измерением углов выяснить, параллельны ли две прямые?

6. Какие углы называются соответственными?

7. При каком условии внутренние (внешние) односторонние углы равны?

8. Внутренние односторонние углы соответственно равны 55° и 122°. На сколько градусов надо повернуть одну из прямых вокруг точки ее пересечения с секущей, чтобы прямые были параллельны?

9. Как отбить на стенной доске при помощи отвеса несколько параллельных прямых?

10. Как читается аксиома о параллельных прямых?

11. Каковы признаки параллельности двух прямых?

12. Что можно сказать о двух прямых на плоскости, перпендикулярных к одной и той же прямой?

13. Почему прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и другую?

14. Дана прямая AB и точка M вне ее. Как построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой AB?

15. Дана прямая AB и вне ее, по одну сторону прямой, точки M и N, отстоящие от прямой AB соответственно на 4 и 5 *см*. Почему прямая MN не будет параллельна прямой AB?

16. Даны две параллельные прямые; на одной из них взяты две точки M и N. Каким построением найти на другой прямой точку, равно удаленную от данных точек M и N?

17. Даны две параллельные прямые и секущая. Какая точка секущей одинаково удалена от обеих параллельных? Как доказать, что найденная точка действительно отстоит от обеих параллельных на одном и том же расстоянии?

18. Даны две параллельные прямые и две секущие, из которых одна делит другую пополам. На какие части делится вторая секущая? Как доказать, что так проведенные секущие отсекают от параллельных прямых равные отрезки?

19. Отрезок секущей между двумя параллельными равен a. Какая зависимость должна существовать между отрезком a и отрезком b — расстоянием между параллельными?

20. Как построить прямую, равно удаленную от двух данных параллельных прямых?

21. Даны две параллельные прямые. Как построить между ними прямоугольный треугольник так, чтобы вершина C прямого угла лежала на одной прямой, а гипотенуза AB — на другой?

22. Один из углов, образованных пересечением двух параллельных прямых третьей, равен $58°32'$. Чему равны остальные углы?

23. Один из двух внутренних (внешних) односторонних углов втрое больше другого. Чему равны углы?

24. Чему равна величина углов, образованных пересечением двух параллельных прямых третьей, если:

1) один из углов втрое больше угла, с ним смежного?

2) один из углов на 25° меньше другого?

3) один из углов составляет $^2/_3$ другого?

4) разность двух смежных углов равна 43°?

5) внешние односторонние углы относятся между собой, как 2:3?

25. Под каким углом (острым, тупым, прямым) пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов?

26. При каком условии углы с параллельными (перпендикулярными) сторонами равны или в сумме составляют два прямых?

27. Угол A равен 43°. Чему равен тупой (острый) угол, образованный перпендикулярами к сторонам угла в его вершине?

28. Каковы признаки непараллельности двух прямых?

29. Чему равна сумма внутренних углов треугольника?

30. Как доказывается теорема о сумме внутренних углов треугольника?

31. Почему нельзя построить треугольник с двумя прямыми (тупыми) углами?

32. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

33. Чем характерен прямоугольный треугольник с углом в 30°?

34. Катет, лежащий против угла в 30°, равен 17,3 *см*. Чему равна гипотенуза?

35. В каком треугольнике один из углов равен сумме двух других?

36. Чему равны углы треугольника, если сумма двух из них: $A+B=103°$ и разность тех же углов: $A-B=63°$?

37. Чему равны углы треугольника, если они относятся между собой, как 1:2:3?

38. Два угла треугольника относятся между собой, как 2:3. Чему равны углы, если третий угол равен 35°?

39. Чему равен угол равностороннего треугольника?

40. Чему равен угол, составленный двумя биссектрисами углов в равностороннем треугольнике?

41. Чему равен угол, составленный биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника?

42. Чему равен угол, составленный биссектрисами углов при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине треугольника равен 70°?

43. Биссектрисы углов B и C треугольника пересекаются под углом в 132°. Чему равен угол A треугольника?

44. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 43°20′. Чему равен угол при основании?

45. Как записать формулой величину угла α при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен β?

46. Как записать формулой величину угла β при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен α?

47. Чему равен внешний угол треугольника?

48. Чему равна сумма внешних углов треугольника?

49. Чему равен внешний угол равностороннего треугольника?

50. Как доказать, что сумма внешних углов треугольника равна $4d$?

51. Внешний угол прямоугольного треугольника равен 139°40′. Чему равны углы треугольника?

52. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 118°. Чему равны углы треугольника?

53. В каком треугольнике углы внешний и внутренний, с ним смежный, равны?

54. Во сколько раз сумма внешних углов треугольника больше суммы внутренних его углов?

55. В каком треугольнике каждый внешний угол вдвое больше внутреннего?

56. Внешние углы треугольника относятся между собой, как 5:6:7. Чему равны углы треугольника?

57. Острые углы прямоугольного треугольника

относятся между собой, как 2:3. Чему равны внешние углы треугольника?

58. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов с одним из внешних углов равна 290°. Чему равен угол при вершине (при основании)?

59. Могут ли все внешние углы треугольника быть:

1) острыми?

2) тупыми?

3) прямыми?

60. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 46°. Чему равен внешний угол при вершине треугольника? Как расположена биссектриса этого внешнего угла относительно основания треугольника?

61. В прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен 42°30', из вершины прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу. На какие две части делится прямой угол?

62. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит угол на две части, из которых одна втрое больше другой. Чему равны углы треугольника?

63. Дан треугольник с углом в 123°. Перпендикуляр, опущенный из тупого угла, делит его на два угла, из которых один равен 67°. Чему равны углы треугольника?

64. Один из углов прямоугольного треугольника равен 50°. Чему равен острый угол, образуемый биссектрисой прямого угла и гипотенузой?

65. Прямая, проведенная через вершину угла при основании равнобедренного треугольника параллельно боковой его стороне, образует с основанием угол в 163°40'. Чему равен угол при вершине треугольника?

66. Если в равнобедренном треугольнике провести прямую, параллельную основанию, то отсекаемый треугольник будет равнобедренным. Почему?

67. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с противолежащей стороной угол в 75°. Чему равны углы треугольника?

68. Угол A равен 52°. В произвольной точке одной из его сторон восставлен к ней перпендикуляр. Под каким углом этот перпендикуляр пересекает другую сторону угла?

69. Чему равны углы равнобедренного треугольника, если его высота делит треугольник на два равнобедренных треугольника?

70. В каком равнобедренном треугольнике основание вдвое больше его высоты?

71. Основание равнобедренного прямоугольного треугольника равно 14,6 *см*. Чему равна высота?

72. В равнобедренном прямоугольном треугольнике сумма основания и высоты равна 25 *см*. Чему равны основание и высота?

73. Каким построением разделить прямой угол на три равные части?

74. Каким построением разделить развернутый угол на три равные части?

75. По какой формуле вычисляется сумма внутренних углов n-угольника?

76. При помощи каких вспомогательных построений доказывается теорема о сумме внутренних углов n-угольника?

77. Чему равна сумма внутренних углов 12-угольника (15, 20, 23-угольника).

78. Почему сумма углов любого n-угольника всегда выражается четным числом прямых углов?

79. Почему сумма углов n-угольника не может равняться $9d$, $15d$, вообще нечетному числу прямых углов?

80. Сколько сторон содержит многоугольник, если сумма его углов равна $14d$, $20d$, $32d$?

81. Сколько диагоналей можно провести в n-угольнике ($n = 7$, 12, 15, 20)?

82. На сколько треугольников можно разбить n-угольник диагоналями, проведенными из одной вершины многоугольника ($n = 10$, 15, 18)?

83. Чему равна сумма внешних углов n-угольника?

84. Как доказывается теорема о сумме внешних углов n-угольника?

85. Почему нельзя определить число сторон многоугольника, зная, что сумма внешних углов многоугольника равна $4d$?

86. На какой угол повернется человек, если он будет двигаться по контуру многоугольника и весь его обойдет?

87. Сумма внутренних и внешних углов многоуголь-

ника равна $14d$. Чему равно число сторон многоугольника?

88. Сумма внутренних углов многоугольника больше суммы внешних углов его на $4d$. Чему равно число сторон многоугольника?

89. В каком многоугольнике сумма его внутренних углов равна сумме внешних его углов?

90. Чему равен внешний угол восьмиугольника, все внутренние углы которого равны?

91. В каком многоугольнике каждый внутренний угол равен внешнему углу?

92. Под каким углом пересекаются биссектрисы любого внутреннего и смежного с ним внешнего угла многоугольника?

93. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Через вершину внешнего его угла проведена прямая, параллельная гипотенузе. На какие части разделит эта прямая внешний угол треугольника?

94. Дан равнобедренный треугольник. Через вершину одного из его внешних углов проведена прямая, параллельная стороне треугольника. На какие части разделит эта прямая внешний угол треугольника?

95. Как построить равнобедренный треугольник, если дана его высота h и угол α при основании?

96. Как построить треугольник, если даны его основание a, высота h и один из углов, угол B, при основании?

97. Как построить треугольник ABC, если даны высота $BD = h$ и углы A и C при основании треугольника?

98. Как построить треугольник ABC, если даны сторона AB и углы A и C треугольника?

99. В круге с центром O проведена хорда AB. Каким построением провести хорду, равную данной и ей параллельную, пользуясь только одной линейкой?

VII КЛАСС

Параллелограммы и трапеции

1. Какой четырехугольник называется параллелограммом?

2. При каких условиях четырехугольник — параллелограмм?

3. Когда диагонали параллелограмма не равны?

4. Как определить расстояние между равными сторонами параллелограмма?

5. Почему расстояние между бо́льшими сторонами параллелограмма не больше меньшей его стороны?

6. В параллелограмме проведены обе его диагонали. Сколько получилось треугольников? Какие из них равны между собой и почему?

7. Каковы свойства диагоналей параллелограмма?

8. Каковы свойства сторон и углов параллелограмма?

9. Чему равна сумма внутренних (внешних) углов параллелограмма?

10. Как выразить формулой периметр параллелограмма, смежные стороны которого a и b?

11. Как доказать, что сумма средних линий параллелограмма равна половине его периметра?

12. Чему равны углы параллелограмма, если:

1) один из углов равен $43°20'$? $122°30'$?

2) перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма, составляет с одной из сторон угол в $32°$?

3) тупой угол вдвое, втрое больше острого угла?

4) тупой и острые углы относятся между собой, как $7:5$?

5) диагональ составляет с его сторонами соответственно углы в $72°$ и $32°$?

6) диагональ перпендикулярна к одной из его сторон, а с другой составляет угол в $50°$?

7) тупой угол на $\alpha°$ больше острого?

13. Почему угол между высотами параллелограмма равен его острому углу?

14. Меньшая диагональ параллелограмма равна одной из его сторон и равна 12 *см*. Чему равны стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 *см*?

15. В какой точке находится центр симметрии параллелограмма?

16. На основании какого признака равны между собой треугольники, на которые диагональ разбивает параллелограмм?

17. Каким построением дополнить треугольник до параллелограмма?

18. Даны два равных прямоугольных треугольника. Какими сторонами надо приложить их друг к другу, чтобы получить косоугольный параллелограмм? Какой

линией в параллелограмме является в данном случае общая сторона обоих прямоугольных треугольников?

19. Из каких двух треугольников составлен параллелограмм, если диагональ его одновременно является и высотой?

20. Под каким углом пересекаются биссектрисы тупого и острого углов параллелограмма?

21. Стороны параллелограмма равны 6 *см* и 10 *см*. На какие отрезки делит биссектриса угла параллелограмма бóльшую его сторону?

22. В параллелограмме проведены биссектрисы двух противолежащих углов. Почему можно утверждать, что указанные биссектрисы параллельны?

23. Параллелограмм делится диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Чему равна высота, опущенная на бóльшую сторону a параллелограмма?

24. Диагональ разбивает параллелограмм на два треугольника. Чему равна диагональ, если периметр параллелограмма равен 54 *см*, а периметр треугольника 40 *см*?

25. Одна из сторон параллелограмма втрое больше другой. Чему равна каждая из сторон параллелограмма, если его периметр равен 14,4 *см*?

26. Как построить параллелограмм, если даны две его стороны a и $в$ и угол A, заключенный между ними?

27. Как построить параллелограмм, если даны две его стороны a и $в$ и высота h параллелограмма?

28. Каким свойством диагоналей параллелограмма надо воспользоваться для построения параллелограмма по двум его диагоналям m и n и углу α между ними?

29. Как построить параллелограмм, если даны две его стороны a и b и диагональ m?

30. Сколько и какие элементы надо задать для построения косоугольного параллелограмма?

31. Как построить параллелограмм, если даны бóльшая сторона a, высота h и диагональ m?

32. При каком условии параллелограмм называется прямоугольником?

33. Почему в прямоугольнике диагональ больше любой из его сторон?

34. Каковы свойства диагоналей прямоугольника?

35. Чему равна меньшая сторона прямоугольника,

если диагональ, равная 17,4 *см*, составляет с одной из сторон угол в 30°?

36. Почему треугольники, полученные проведением в прямоугольнике диагоналей, будут равнобедренными?

37. В прямоугольнике середины его сторон последовательно соединены между собой. Какая получается фигура? Чему равен ее периметр, если диагональ прямоугольника равна 12 *см*?

38. Как построить оси симметрии прямоугольника?

39. Как объяснить, что сумма отрезков осей симметрии прямоугольника равна половине его периметра?

40. Какими сторонами надо приложить два прямоугольных треугольника друг к другу, чтобы получить прямоугольник?

41. В прямоугольнике проведены диагонали и оси симметрии. На сколько треугольников разобьют эти линии прямоугольник? Почему все полученные таким построением треугольники равны между собой?

42. В прямоугольнике бо́льшая сторона вдвое больше меньшей. Как отрезать от прямоугольника два равных треугольника, чтобы, приложив их к оставшейся части прямоугольника, получить квадрат?

43. Диагональ прямоугольника составляет со стороной 35°. Чему равен острый угол, образованный пересечением диагоналей?

44. Угол, составленный диагоналями прямоугольника, равен 124°. Какие углы составляет диагональ со сторонами прямоугольника?

45. Стороны прямоугольника равны 8 *см* и 15 *см*. На какие части делит биссектриса угла бо́льшую сторону прямоугольника?

46. Каким построением находится центр симметрии прямоугольника?

47. Почему противоположные вершины прямоугольника считаются точками, симметричными относительно центра симметрии?

48. На одной из сторон прямоугольника взята точка M. Как найти симметричную ей точку M_1 относительно центра симметрии? Где она лежит?

49. На сколько градусов надо повернуть прямоугольник вокруг центра симметрии, чтобы он снова занял прежнее положение?

50. Стороны прямоугольника относятся между

собой, как 5 : 3. Чему равна каждая сторона прямоугольника, если:

1) одна из них больше другой на 3,4 *см*?

2) периметр его равен 5,6 *см*?

51. Диагонали прямоугольника разбивают его на четыре треугольника. Чему равна высота каждого из треугольников, опущенная из точки пересечения диагоналей?

52. Какая зависимость существует между меньшей стороной прямоугольника и диагональю, если последняя делит угол прямоугольника в отношении 1 : 2?

53. Диагонали прямоугольника делят его углы в отношении 1 : 2. Какого вида получаются треугольники, прилежащие к меньшим сторонам прямоугольника?

54. Почему достаточно задать для построения прямоугольника только два основных элемента?

55. Какой треугольник надо построить, чтобы путем дополнения получить прямоугольник?

56. Как построить прямоугольник, если даны диагональ и угол α между диагоналями?

57. Как построить прямоугольник, если даны отрезки его осей симметрии? Какие элементы прямоугольника можно было бы задать вместо отрезков осей симметрии?

58. Как объяснить, что получается ромб, если последовательно соединить между собой концы отрезков осей симметрии прямоугольника?

59. На плоскости отмечена точка О — центр симметрии прямоугольника — и задан угол между диагоналями. Почему этого недостаточно для построения определенной величины прямоугольника?

60. Какая фигура называется ромбом?

61. Из каких двух треугольников можно составить ромб? Как приложить их друг к другу?

62. Каким свойством обладают: а) стороны, б) диагонали, в) углы ромба?

63. Почему равны между собой высоты, опущенные на стороны ромба из одной и той же вершины?

64. Чему равен острый угол ромба, если одна из его диагоналей равна его стороне?

65. Чему равен острый угол ромба, если высота делит сторону пополам?

66. Из равносторонних треугольников с периметром в 16,2 *см* составлен ромб. Чему равен его периметр?

67. Дан равносторонний треугольник. Как разрезать его на три части, чтобы получить из частей треугольника два равных между собой ромба?

68. В ромбе проведена диагональ. Как доказать, не проведя других построений, что диагональ — биссектриса угла ромба?

69. Сколько осей симметрии в ромбе?

70. Какие линии в ромбе служат осями симметрии?

71. Почему противоположные вершины ромба являются симметричными точками?

72. Если взять на одной из сторон ромба точку M, то как найти точку M_1, симметричную ей относительно оси симметрии, и точку M_2, симметричную ей относисительно центра симметрии? Для каких точек ромба точки, симметричные относительно оси и центра симметрии, сливаются?

73. Как построить ромб, если даны две его диагонали m и n?

74. Как построить ромб по его стороне и углу?

75. Как построить ромб по его стороне и высоте?

76. Как построить ромб, если даны одна из его диагоналей и высота?

77. Как построить ромб, если даны его периметр и одна из диагоналей?

78. Сколько элементов и каких надо задать для построения ромба?

79. Какому условию должен удовлетворять ромб, если для его построения достаточно задать только одну его сторону?

80. Какая получится фигура, если середины сторон ромба соединить между собой в последовательном порядке?

81. Какая зависимость существует между диагоналями m и n ромба и периметром фигуры, полученной последовательным соединением между собой середин сторон ромба?

82. Чему равны углы ромба, если его периметр равен 24 *см*, а высота 3 *см*?

83. Каким свойством должны обладать диагонали четырехугольника, чтобы последний был ромбом?

84. В чем сходство и в чем различие между:

1) прямоугольником и ромбом?

2) параллелограммом и ромбом?

85. В параллелограмме диагонали пересекаются под углом в 48°. На какой угол надо повернуть одну из диагоналей относительно другой, чтобы параллелограмм превратился в ромб?

86. Как построить ромб, если даны его сторона и угол, образуемый одной из диагоналей со стороной?

87. Биссектриса угла, образованного стороной и диагональю ромба, пересекает другую его диагональ под углом в 72°. Чему равны углы ромба?

88. Как вписать в треугольник ABC ромб, имеющий с треугольником общий угол A?

89. Может ли быть такой ромб, у которого бо́льшая диагональ вдвое больше стороны?

90. Во сколько раз сумма углов ромба больше суммы углов треугольника?

91. На сколько градусов сумма углов ромба больше суммы углов треугольника?

92. Меньшая диагональ ромба равна 10 *см*, периметр каждого из двух треугольников, на которые разделится ромб, равен 35 *см*. Чему равен периметр ромба?

93. Как называется ромб, у которого основание и высота одинаковы?

94. Какая фигура называется квадратом?

95. Каковы свойства: а) сторон, б) углов, в) диагоналей квадрата?

96. В чем сходство и в чем различие между:

1) квадратом и параллелограммом?

2) квадратом и прямоугольником?

3) квадратом и ромбом?

97. Острый угол ромба равен 63°. На сколько градусов надо повернуть около вершины одну из сторон ромба, чтобы превратить его в квадрат?

98. Какие углы образует диагональ квадрата с его сторонами?

99. На какие два треугольника диагональ разбивает квадрат?

100. Что является высотой квадрата?

101. На стороне квадрата взята точка M. Сколько точек, симметричных точке M, можно построить? При

каком положении точки M на стороне квадрата имеются: а) четыре точки, б) три точки, ей симметричные относительно осей симметрии?

102. В квадрате проведены обе диагонали. На какие и на сколько треугольников они разбивают квадрат?

103. Как проверить, не пользуясь ни линейкой, ни циркулем, что вырезанный из листа бумаги четырехугольник есть квадрат?

104. Как проверить, что выпиленный из фанеры четырехугольник есть квадрат?

105. При каком отношении сторон прямоугольника можно разбить его на два равных квадрата?

106. Как построить квадрат, если дана его сторона?

107. Как построить квадрат, если дана его диагональ?

108. Как вписать в прямоугольный треугольник квадрат, две из сторон которого лежали бы на катетах?

109. На какое расстояние отстоит центр симметрии квадрата от стороны?

110. Как вписать в данный квадрат другой квадрат, имеющий с данным общий центр симметрии? Сколько таких квадратов можно вписать?

111. Как описать около данного квадрата другой квадрат, имеющий с данным общий центр симметрии?

112. Пользуясь какой теоремой, можно утверждать, что диагонали квадрата равны?

113. Какая фигура называется трапецией?

114. Какая трапеция называется: а) равнобедренной, б) прямоугольной?

115. Каково свойство углов трапеции?

116. При каком условии одна из диагоналей трапеции будет биссектрисой?

117. Что можно сказать об углах равнобедренной трапеции?

118. Углы при одном основании трапеции соответственно равны 52° и 63°. Чему равны другие углы трапеции?

119. Высота равнобедренной трапеции вдвое меньше ее боковой стороны. Чему равны углы трапеции?

120. В равнобедренной трапеции проведены диагонали. Как доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равны?

121. В какой трапеции имеется ось симметрии и притом только одна?

122. Какой отрезок в трапеции называется средней линией трапеции? Как его построить?

123. Основания трапеции соответственно равны a и b. Чему равна средняя линия трапеции?

124. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$; AC и BD — диагонали. Как доказать, что диагонали равны? Какие следует рассмотреть треугольники? По какому признаку равенства треугольников равны треугольники?

125. Провести высоту трапеции через точку пересечения диагоналей. Почему середина высоты не совпадает с точкой пересечения диагоналей?

126. В какой точке средняя линия трапеции пересечет высоту? Почему средняя линия трапеции не может пройти через точку пересечения диагоналей трапеции?

127. В равнобедренной трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке O. Как доказать, что треугольники AOD и BOC, прилежащие к основаниям, равнобедренные?

128. В данной равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Как доказать, что диагонали наклонены к основаниям под углом в 45°?

129. Как доказать, что в равнобедренной трапеции, в которой диагонали взаимно перпендикулярны, высота трапеции равна средней линии?

130. Средняя линия трапеции равна 20 *см*. Чему равно каждое из оснований, если одно втрое больше другого?

131. Разность оснований трапеции равна 12 *см*. Чему равна средняя линия, если основания относятся между собой, как 1 : 2?

132. Верно ли утверждение, что средняя линия трапеции равна среднему арифметическому ее оснований?

133. В равнобедренной трапеции основания равны 9 *см* и 5 *см* и тупой угол равен $\frac{4}{3}d$?

1) Чему равна боковая сторона?

2) Чему равен периметр?

134. В прямоугольной трапеции одна из боковых

сторон вдвое больше другой. Чему равны углы трапеции?

135. Дана равнобедренная трапеция. Высота, опущенная из вершины тупого угла, делит большее основание на две части, равные 10 *см* и 4 *см*. Чему равна средняя линия?

136. Основания трапеции равны 20 *см* и 16 *см*. Чему равна средняя линия трапеции? Чему равен отрезок, соединяющий середины диагоналей?

137. Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на три части; крайние части равны по 4 *см*, средняя часть равна 5 *см*. Чему равны основания трапеции?

138. Дана трапеция, одна из боковых сторон которой равна a. Если из конца меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне, то трапеция разобьется на ромб и равносторонний треугольник. Чему равны углы трапеции? Чему равен периметр трапеции?

139. Как доказать, что отрезок средней линии, заключенный между диагоналями трапеции, равен полуразности оснований?

140. Как построить прямоугольную трапецию, если даны большее ее основание и боковые стороны?

141. Как построить равнобедренную трапецию, если даны бо́льшее ее основание, высота и острый угол?

142. Как построить трапецию, если даны четыре ее стороны?

143. Сколько сторон трапеции и какие должны быть даны, чтобы построить равнобочную трапецию?

144. Как построить равнобочную трапецию, если даны одно из оснований, диагональ и высота трапеции?

145. Как построить прямоугольную трапецию, если даны нижнее основание, средняя линия и боковая сторона, перпендикулярная к основаниям?

146. Какая получится фигура, если отрезками последовательно соединить между собой середины сторон равнобедренной трапеции? Чему равен периметр полученной фигуры, если диагональ трапеции равна m?

147. Диагонали трапеции равны 20 *см* и 15 *см*. Чему равен периметр фигуры, образованной последовательным соединением отрезками середин сторон трапеции?

Постановкой приведенных вопросов и задач, к устному решению которых следует приучить учащихся, еще не ограничивается повторение изученного материала. Повторение должно проводиться постоянно, в течение всего учебного года, что, конечно, не исключает, по завершении программы, повторение и в конце учебного года как всего курса, проработанного за год, так и основных разделов предшествующего года обучения.

В качестве примера укажем, что при прохождении в VI классе темы «Углы при пересечении двух параллельных третьей» полезно повторить темы «Углы смежные и вертикальные», «Перпендикуляр и наклонные»; тему «Признаки равенства прямоугольных треугольников» желательно увязать с темой «Перпендикуляр и наклонная». В VII классе тему «Четырехугольники» полезно увязать с повторением темы «Признаки равенства треугольников»; тему «Ромб»—с темой «Равнобедренный треугольник и его свойства», и т. д.

Вполне понятно, что основательное повторение пройденной темы должно предшествовать прохождению новой темы, с которой пройденная тема тесно связана. Весьма целесообразно после прохождения той или иной темы уделить время на повторение ее, включая при опросе доказательство теорем, не разобранных в учебнике, решение более сложных задач на построение и вычисление, вопросы, требующие обобщения всего материала.

В процессе учебной работы большое внимание должно быть уделено самостоятельной работе учащихся, проявлению ими инициативы находить доказательства некоторых теорем, отличные от приведенных в учебнике, решению одной и той же задачи различными способами и т. д.

К выполнению самостоятельной работы учащихся следует приучать: надо учить их, как ее выполнять, как справляться со встречающимися трудностями. Для этого целесообразно давать учащимся в классе минут на 15—20 работу, которую они выполняют самостоятельно, под руководством учителя.

На доске записываются несколько вариантов заданий и указывается, какой вариант каждый из учащихся решает.

Можно заранее заготовить варианты на листках и раздать их учащимся.

Во время работы учащихся учитель, обходя класс, внимательно следит за работой каждого и при возникновении у него затруднений дает нужные пояснения.

По прошествии установленного времени учитель отбирает работу, просматривает ее на дому, а затем разбирает на одном из следующих уроков в классе. Во время подобного рода самостоятельных работ учащийся может пользоваться учебником.

Просматривая на дому выполненную работу, учитель должен отмечать себе, что затрудняет учащегося, и вместе с тем намечать для отдельных учащихся посильные индивидуальные задания, помогающие им приобрести навыки самостоятельной работы. Какие же задания могут быть даны учащимся для самостоятельной работы в классе? Доказательство несложных теорем, не предусмотренных программой, всякого рода построения, анализ заданного чертежа, обобщение изученного материала, запись и исследование формул, решение вычислительных задач и т. п.

В качестве примера приведем несколько вариантов.

После изучения темы «Признаки равенства треугольников» можно предложить учащимся следующие варианты.

Доказать теорему:

Вариант 1. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

Вариант 2. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

Вариант 3. В равнобедренном треугольнике медианы боковых сторон равны.

Вариант 4. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные из вершин углов при основании, равны.

Вариант 5. Если в треугольнике медиана перпендикулярна к стороне, то треугольник равнобедренный.

После проработки темы „Основные задачи на построение“ в качестве самостоятельной работы в классе можно дать следующее задание.

Построить равнобедренный треугольник:

Вариант 1—по высоте и основанию.

Вариант 2—по высоте и боковой стороне.

Вариант 3—по биссектрисе *АД* и углу при вершине.

Вариант 4—по основанию и углу *А* при основании.

Вариант 5—по боковой стороне и углу при вершине.

Вариант 6—по боковой стороне и углу при основании.

Весьма полезно давать учащимся задания, требующие умения по заданным условиям составить чертеж, формулировать словами запись, данную на математическом языке, рассмотреть заданный чертеж и все, что можно усмотреть на данном чертеже, записать.

Пример.

1) Дано: $AB \perp MN$ и $CD \perp MN$.

Вывод:

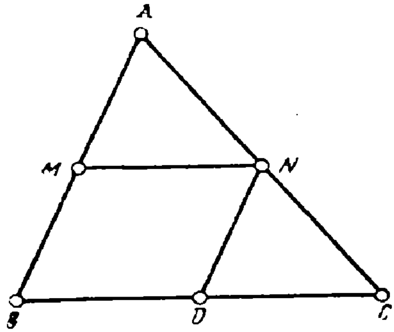
Сделать чертеж, записать с помощью математических знаков вывод из заданного условия, а затем записать, что дано, и вывод словами.

2) Дано:

$$\triangle ABC,\ AB = AC = BC,\ AD \perp BC$$
$$DE \parallel AB \text{ и } DF \perp AC$$

Требуется доказать: $DE = DC$; $EF = FC$.

Сделать чертеж и записать теорему словами. Рассмотреть чертеж, перечислить все треугольники, усматриваемые на чертеже. Сколько их?



Черт. 6

3) В треугольнике ABC—M середина стороны AB, $MN \parallel BC$ и $ND \parallel AB$. На основании каких данных (чертеж 6)

$$\triangle AMN = \triangle NDC?$$

Записать доказательство кратко математическим языком.

Все указанные выше работы должны помочь учащимся в усвоении и закреплении материала. Однако этого еще недостаточно.

Учитель должен повседневно наблюдать за работой учащегося и контролировать, насколько полно и добросовестно он выполняет все задания и указания учителя. Требовательность к учащемуся должна быть повышена.

Домашние задания, разбор теорем и их доказательство, решение всякого рода задач, составление чертежей и т. п. учащиеся обязаны выполнять к указанному им сроку добросовестно и полностью. Надо приучать к ответственному отношению к работе учащихся, а поэтому необходимо систематически проверять выполнение ими домашних работ. Если учащийся будет знать, что каждая его работа просматривается, а за невыполнение ее без достаточно уважительных на то причин он должен будет отвечать, учащийся приложит необходимые усилия, чтобы приготовить задание.

Для учета выполнения заданий учащимся целесообразно, начиная с первого же урока, номеровать задачи, проставляя справа, после отметки номера задачи по учебнику, в скобках — очередной номер задания.

Подобного рода учет числа заданных для решения задач позволяет учителю, во-первых, знать, сколько задач каждый учащийся решил за определенный отрезок времени, во-вторых, проследить, какие задачи им не решены.

Проверка домашних заданий может проводиться различными методами. Учащийся, вызываемый к доске, обязан представить свою работу, которая тут же просматривается преподавателем. Решение задачи зачитывается одним из учащихся, остальные же проверяют решение по своим записям. Если задача решена кем-либо из учащихся иным приемом, следует зачитать и это решение; при этом желательно, чтобы преподаватель указал, какое решение более простое и более изящное и почему.

Если в начале урока выясняется, что письменная домашняя работа сделана всеми учащимися, то можно и не терять времени на ее проверку, но тогда желательно, чтобы преподаватель все же обошел учащихся и просмотрел, действительно ли все они решили задание, уделяя при этом должное внимание просмотру работ более слабых учащихся. Такой просмотр домашних работ преподаватель должен проводить при условии занятости всего класса определенной, указанной им работой. В тех случаях, когда домашнее задание не выполнено большинством учащихся из-за трудности, следует решить его в классе.

Просмотр домашних работ в классе не исключает периодического просмотра преподавателем на дому всех работ учащихся. Подробный просмотр работ учащихся должен производиться, как правило, не менее двух-трех раз в месяц. Целесообразно, во избежание накопления большого числа работ, просматривать ежедневно десять—пятнадцать работ учащихся, делая в тетради нужные указания и отмечая одновременно в своей записной книжке как усвоение, так и недочеты каждого учащегося.

Остановимся на устном опросе учащихся, который является наиболее распространенным и общепринятым методом проверки их знаний и навыков.

Устный опрос ценен тем, что он позволяет преподавателю, при правильной постановке вопроса, выявить степень понимания учащимися изучаемого материала, качество и глубину знаний, умение приложить теорию к практике.

При устном опросе недостаточно ограничиться только ответом заданного урока; необходимо еще, в целях выяснения, насколько сознательно овладел учащийся новым материалом, насколько четко увязывает он вновь изученное с ранее пройденным, задать ему ряд вопросов. Вопросы не должны быть случайными, и подбор их надлежит заранее тщательно продумать.

Приведем примерный перечень вопросов, которые можно задать учащимся при опросе, например, по теме «Трапеция, ее свойства и построение».

Вызванному к доске учащемуся предлагается доказать теорему о средней линии трапеции, а затем могут быть заданы и ему и всему классу примерно следующие вопросы:

1. Чем отличается трапеция от параллелограмма?
2. Сумма углов, прилежащих к любой из сторон

параллелограмма, равна $2d$. Почему такое утверждение не верно для трапеции?

3. Чему равна сумма всех внешних (внутренних) углов трапеции? Как доказывается, чему равна сумма углов трапеции?

4. Что можно сказать о сторонах трапеции, если обе диагонали делят пополам углы, прилежащие к одному из оснований?

5. Что можно сказать о сторонах трапеции, если одна из диагоналей делит угол пополам?

6. Какая трапеция имеет ось симметрии? Как ее построить?

7. Как объяснить, что теорема о средней линии трапеции справедлива для любого параллелограмма?

8. Каким построением разбить трапецию на: а) два треугольника, б) параллелограмм и треугольник, в) прямоугольник и два треугольника, г) четыре треугольника и д) две трапеции?

9. Как построить трапецию по высоте, одному из оснований и двум боковым сторонам?

10. Как построить трапецию по четырем ее сторонам?

11. Как построить трапецию по высоте, одной из диагоналей и двум основаниям?

12. Как построить трапецию по высоте, углу при основании и двум диагоналям?

13. Сколько элементов надо задать для построения трапеции: а) общего вида, б) равнобедренной и в) прямоугольной?

14. Как построить прямоугольную трапецию по высоте и двум основаниям?

15. Как построить прямоугольную трапецию по высоте, одной из диагоналей и боковой стороне? Условие возможности построения.

16. В равнобедренной трапеции проведены диагонали. На основании какой теоремы равны треугольники, прилежащие к боковым сторонам?

17. В равнобедренной трапеции углы при основании равны 45°, основания соответственно равны 22 *см* и 15 *см*. Чему равна высота трапеции?

18. Средняя линия трапеции равна 44 *см*. Чему равны основания, если диагональ делит среднюю линию на отрезки в отношении 3:5?

19. Средняя линия трапеции вычисляется по формуле $m=\frac{a+b}{2}$, где a и b—основания трапеции. Если уменьшить одно из оснований, положим b, как запишется формула при $b=0$? В какую фигуру преобразуется трапеция при $b=0$? Что выражает формула при $b=0$?

20. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний со стороною a и прямоугольный треугольник. Чему равна средняя линия трапеции?

21. Как доказать, что в равнобедренной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны, высота равна средней линии?

22. Основания трапеции относятся между собой, как 3 : 5. Чему равна средняя линия этой трапеции, если одно из оснований больше другого на 2,5 *см*?

23. Как доказать, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны?

Этот перечень вопросов лишь примерный; конечно, могут быть заданы и другие вопросы. Приводя этот перечень, хочется подчеркнуть, что для ответа на ряд поставленных вопросов преподаватель в процессе изучения с учащимися трапеции и ее свойств должен проделать большую работу. Нельзя ограничиваться лишь одним учебником,—надо еще рассмотреть ряд интересных задач, имея в виду все разнообразие вопросов, с которыми учащийся может встретиться при приложении изучаемой теории к практике.

Постановка подобного рода вопросов приковывает внимание учащихся, заставляет их думать, представлять себе изучаемую фигуру вместе с теми дополнительными построениями, которые необходимы для ответа на тот или иной поставленный вопрос.

Иногда, в зависимости от размера доски, можно вызвать для опроса не одного, а двух-трех учащихся, дав каждому определенное задание. Полезно, в целях экономии времени, заранее подготовить ряд заданий, записать их на листках и предложить вызванным к доске учащимся дать на них исчерпывающие ответы.

Приведем несколько образцов таких заданий, которые можно было бы предложить учащимся VI класса после проработки темы «Признаки равенства треугольников». В зависимости от общего уровня знаний учащихся, их умения быстро справляться с заданием, можно потребовать ответ лишь на три, четыре или пять вопросов, записанных в задании.

Задание № 1.

1) Доказать теорему о равенстве двух треугольников по двум сторонам и углу между ними.

2) Провести в тупоугольном треугольнике с помощью угольника высоту из вершины острого угла.

3) При каких условиях равны два прямоугольных треугольника?

4) Что такое перпендикуляр?

5) (Устно). Чему равна каждая из сторон равнобедренного треугольника, если его периметр равен 26 *см* и одна из сторон больше другой на 2 *см*? Сколько возможно решений?

Задание № 2.

1) Доказать теорему о равенстве двух треугольников по стороне и двум прилежащим углам.

2) Построить с помощью угольника равнобедренный прямоугольный треугольник и провести в нем высоту из вершины прямого угла.

3) При каких условиях равны два равнобедренных треугольника?

4) Что такое наклонная?

5) (Устно). Дуга сектора равна $^1/_5$ окружности. Чему равен угол сектора?

Задание № 3.

1) Доказать теорему о равенстве двух треугольников по трем сторонам.

2) Провести с помощью угольника в тупоугольном треугольнике высоты из вершин тупого и одного из острых углов.

3) Почему высота, опущенная из вершины любого угла косоугольного треугольника, меньше сторон, образующих угол?

4) Что такое сектор?

5) (Устно). Один из смежных углов больше другого на $^2/_5 d$. Чему равен каждый из смежных углов?

Задание № 4.

1) Доказать теорему: «Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки».

2) Построить отрезок $x = 2a - b$. Условие возможности построения.

3) При каком условии равны равносторонние треугольники?

4) Что такое треугольник?

5) (Устно). Даны два тупых угла, у которых общая вершина, одна общая сторона, а две другие их стороны взаимно перпендикулярны. Сколько градусов содержит каждый из тупых углов, если один больше другого на 30°?

После проработки в VII классе темы «Измерение углов в круге» можно дать учащимся следующие задания:

Задание № 1.

1) Доказать теорему об измерении вписанного угла, между сторонами которого расположен центр круга.

2) Построить окружность около тупоугольного треугольника.

3) В чем отличие касательной от секущей?

4) (Устно). Угол, образованный двумя касательными, равен 138°. Сколько градусов содержат дуги, заключенные между точками касания?

Задание № 2.

1) Доказать теорему об измерении угла с вершиной внутри круга.

2) Построить равнобедренный прямоугольный треугольник по высоте, проведенной из вершины прямого угла.

3) Что представляет собой геометрическое место точек—вершин прямых углов треугольников, имеющих общую гипотенузу? Как построить это геометрическое место точек?

4) (Устно). Угол сектора равен 112°. Чему равен вписанный угол, опирающийся на дугу этого сектора?

Задание № 3.

1) Доказать теорему об угле с вершиной вне круга.

2) Построить ромб по высоте и диагонали m.

3) Как записать формулой внешнее и внутреннее касание двух окружностей разных радиусов?

4) (Устно). Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Чему равен угол между диагоналями?

З а д а н и е № 4.

1) Доказать теорему об измерении угла, образованного касательной и хордой.

2) Построить параллелограмм по сторонам a и b и высоте h.

3) Сумма двух внешних углов треугольника равна 238°. Сколько градусов содержит внутренний угол, не смежный с ними?

4) (Устно). Угол с вершиной внутри круга равен 105°. Одна из дуг, на которую опираются стороны угла, равна 80°. Чему равна дуга, на которую опираются продолжения сторон угла?

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПИСЬМЕННЫХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТАХ

Контрольную работу следует давать после изучения темы или части ее, решения значительного числа упражнений и задач и устного опроса по теме большого числа учащихся. Давая контрольную работу, преподаватель должен быть уверен в том, что пройденная тема понята и усвоена, что задание средней трудности под силу всем учащимся класса.

Контрольная работа должна протекать в условиях, которые обеспечивают самостоятельность работы каждого учащегося и исключают списывание у товарищей. Поэтому необходимо давать не менее двух вариантов работ.

Ценность контрольной работы состоит в том, что она позволяет преподавателю проверить, насколько свободно разбираются учащиеся в проработанном материале и приобрели ли они нужные навыки: составить четкий и правильный чертеж, соответствующий условиям задачи; сделать краткую запись условий; дать краткие и исчерпывающие объяснения; выполнить до конца вычисления; записать ответы на вопросы задачи и т. д.

Неверно решенные контрольные задания и допущенные в них ошибки укажут преподавателю, с одной стороны, какую работу надо провести с каждым учащимся в отдельности и с классом в целом для ликвидации выявившихся недочетов, с другой,— что следует еще раз повторить и углубить для повышения качества знаний учащихся.

Приведем примерные варианты контрольных работ для VI класса после проработки темы «Признаки равенства треугольников и основные построения».

Вариант 1.

1) К прямой MN провести перпендикуляр из точки A, лежащей вне данной прямой.

2) BD — биссектриса угла ABC. Доказать, что точка M, взятая на биссектрисе BD, отстоит на равном расстоянии от сторон угла.

3) С помощью какой теоремы можно объяснить, что в прямоугольном треугольнике сумма двух катетов больше гипотенузы? Сделать чертеж, записать неравенство и дать ответ словами.

Вариант 2.

1) Построить $\triangle ABC$ по основанию $BC = a$, углу B и биссектрисе $BD = m$ угла B.

2) По одну сторону от отрезка AC построены два равнобедренных треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$. Вершины B и D соединены между собою прямой. Доказать, что $\triangle ABD = \triangle ADC$.

3) Что такое медиана?

Вариант 3.

1) Дан треугольник ABC с тупым углом при вершине A. Построить высоты, выходящие из вершин B и C острых углов.

2) В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC отложены равные между собою отрезки AD и CE, $AD = CE$. Точки D и E соединены прямыми с вершиной B. Доказать, что $\triangle ABD = \triangle BCE$.

3) В каких треугольниках высоты и медианы, проведенные из одной и той же вершины, равны? Ответ пояснить чертежом.

Вариант 4.

1) Построить треугольник ABC по высоте $BD = h$ и двум отрезкам $AD = m$ и $DC = n$, на которые высота делит основание AC.

2) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею пополам. Концы A и C, B и D соединены прямыми. Доказать, что отрезки AC и BD равны.

3) В равнобедренном треугольнике стороны равны 3 *см* и 6 *см*. Чему равно основание и периметр треугольника?

Вариант 5.

1) Построить прямоугольный треугольник ABC по катету $BC = a$ и его медиане $BD = m$.

2) A — вершина равнобедренного треугольника ABC. Боковые стороны продолжены за вершину A на равные отрезки AD и AE, $AD = AE$. Объяснить, по какому признаку равенства треугольников $\Delta ABD = \Delta ACE$.

3) В каком треугольнике две его высоты равны? Ответ пояснить чертежом и записью.

Вариант 6.

1) Построить треугольник ABC, если даны две его стороны a и c и высота h, опущенная на третью сторону.

2) В треугольнике ABC медиана AD продолжена за точку D на отрезок $DE = AD$. Точка E соединена прямой с вершиной C. Доказать, что $CE = AB$.

3) Что такое треугольник?

Варианты контрольных работ для VII класса после проработки темы „Четырехугольники"

Вариант 1.

1) Что такое четырехугольник?

2) Доказать, что в равнобедренной трапеции диагонали равны.

3) Построить параллелограмм по высоте и двум его диагоналям.

Вариант 2.

1) Что такое трапеция?

2) Доказать, что параллелограмм, в котором диагональ делит угол пополам, есть ромб.

3) Построить параллелограмм по высоте, диагонали и одной из сторон.

Вариант 3.

1) В чем сходство и в чем различие между квадратом и ромбом?

2) Доказать, что высоты ромба, проведенные из одной и той же вершины, равны.

3) Построить квадрат, если даны две его противолежащие вершины A и C.

Вариант 4.

1) В каких выпуклых четырехугольниках диагонали равны?

2) Доказать, что фигура, полученная от последова-

тельного соединения середин сторон выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм.

3) Построить равнобедренную трапецию по большему основанию a, высоте h и диагонали m.

Вариант 5.

1) Почему в параллелограмме диагонали не равны?

2) Доказать, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны.

3) Построить ромб по стороне a и высоте h.

Вариант 6.

1) Почему для построения ромба достаточно задать два элемента, из которых или оба или только один — линейный?

2) Доказать, что точка пересечения диагоналей ромба равно отстоит от его сторон.

3) Построить квадрат, если даны две точки M и N — середины двух его смежных сторон.

Для углубления и расширения программного материала, а главное, повышения качества знаний и удовлетворения интереса учащихся к геометрии, желательна организация внеклассных занятий по математике, выпуск математических бюллетеней и журналов. Темами внеклассной работы по геометрии с учащимися VI и VII классов могут быть:

1. Задачи на доказательство теорем, не предусмотренные программой.
2. Задачи на построение.
3. Производственные задачи на вычисление.
4. Разбор исторических задач.
5. Вопросы из истории математики; жизнь и деятельность знаменитых математиков.
6. Доклады, ставящие своей задачей обобщение материала.
7. Изготовление таблиц и моделей.
8. Экскурсии в поле (землемерные работы).

К. С. БОГУШЕВСКИЙ,
преподаватель 46-й школы.

РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ IX КЛАССА

Одним из серьезных пробелов в математическом образовании учащихся средней школы считают обычно недостаточность развития у них пространственных представлений.

Так, на выпускных экзаменах в школе и на приемных испытаниях в вузах иногда обнаруживается, что отдельные экзаменующиеся не умеют читать пространственных чертежей — рисунков, не различают на них отдельных плоскостей, имеют смутное представление о скрещивающихся прямых, не могут найти на чертеже линий пересечения данных плоскостей, затрудняются в построении сечений данного тела данной плоскостью и т. д.

Характерны следующие, довольно распространенные ошибки:

1. Кажущиеся точки пересечения скрещивающихся прямых принимаются за действительные точки пересечения.

2. В пирамиде, у которой одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания, а основанием является, например, квадрат, высоту сплошь и рядом проводят из вершины пирамиды в центр основания, т. е. вне перпендикулярной грани.

3. Если шар вписан в пирамиду, то точки касания шара с боковыми гранями считают расположенными на боковых ребрах пирамиды.

4. С трудом находят на чертеже взаимно перпенди-

кулярные плоскости и, например, в правильной пирамиде не видят, что боковая грань перпендикулярна к плоскости, проведенной через высоту пирамиды и апофему ее, лежащую в этой грани.

5. С углами, имеющими общую сторону, но расположенными в разных плоскостях, обращаются, как с углами, лежащими в одной плоскости, т. е. находят их сумму и разность, и т. п.

6. Если какая-нибудь прямая пересекает плоскость и через точку пересечения на плоскости проходит другая прямая, то в случае, когда направления этих прямых на чертеже оказываются совпадающими, они принимаются за одну прямую.

7. Иногда случается, что пересечением двух плоскостей оказываются две различные прямые.

Особенно следует подчеркнуть, что «в уме», т. е. без помощи чертежа и модели, учащиеся затрудняются решать даже простейшие вопросы о расположении в пространстве линий и плоскостей или делают на этот счет самые фантастические предположения и заключения.

Стремлением развить и улучшить пространственные представления у учащихся продиктовано, очевидно, включение в курс стереометрии IX класса задач на построение; часть из них, с подробным и мотивированным описанием решения, помещена в учебнике геометрии Киселева в качестве обязательного материала для изучения. (В старых, дореволюционных изданиях учебника Киселева этих задач не было.)

Нет сомнения, что задачи на построение в стереометрии должны помочь и помогают достижению цели — развитию пространственных представлений. Однако постановку этого раздела курса в стабильном учебнике, повидимому, не все считают удовлетворительной. Так, проф. Четверухин предлагает провести радикальную перестройку как в области тематики задач на построение, так и в области методики и приемов их решения.

В стабильном учебнике геометрии, в § 6, изложены основные принципы, которыми надлежит руководствоваться при решении задач на построение.

Привожу выдержку из этих «принципов».

«... при построениях в пространстве необходимо точно определить, что значит выполнить то или иное построение и, в частности, что значит построить плоскость в пространстве. Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать:

1) что плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие ее положение в пространстве (§§ 3 и 4), т. е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне ее, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

2) что если даны две плоскости, то дана и линия их пересечения, т. е. что мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей...».

Легко видеть, что в этих «принципах» говорится о постулатах построения, но не говорится, как это построение изобразить на чертеже.

Подбор задач на построение и описание их решений, приведенное в учебнике, наводят на мысль, что изображения на чертеже этих построений предоставляются воображению и фантазии учащихся или, в лучшем случае, воображению учителя.

Применение изложенных выше „принципов“ приводит к тому, что чертежи выполняются в большинстве случаев совершенно произвольно. Так, плоскость по данным трем точкам изображается произвольно; линия пересечения двух плоскостей строится также произвольно, а ведь правильное изображение этой линии является в дальнейшем (особенно в X классе) одним из серьезнейших камней преткновения.

В результате получается, что все построения в стереометрии представляются учащимся совершенно условными и произвольными, а решение задач на построение—чисто формальным и только умозрительным.

Чтобы избежать этой опасности и использовать все положительные стороны задач на построение, мне всегда представлялось необходимым составить набор таких задач,— во всяком случае, для использования их на первых порах,—которые требовали бы для своего решения таких же точных построений при помощи линейки, как в планиметрии. Осуществив составление подобного небольшого сборника задач на построение, я решил использовать его при работе в IX классах 46-й школы Фрунзенского района. Во всех задачах сборника о произвольности чертежа можно говорить только в отношении изображения данных; решение же каждой задачи выполняется при помощи совершенно определенных, точных построений, не допускающих никакого произвола.

Набор задач рассчитан примерно на восемь—десять уроков, при одновременном прохождении, начиная с пятого урока, теорем о параллельных прямых и плоскостях.

Разобрав с учащимися основные свойства плоскости и следствия из них, я не перешел немедленно к изучению теорем о параллельности прямых и плоскостей, а задержался на четыре-пять часов на решении задач, основанных на использовании свойств плоскости.

Привожу перечень этих задач, сопровождая некоторые из них изложением тех объяснений, которые должны были давать учащиеся при их решении.

№ 1. Из двух данных точек A и B плоскости P проведены вне плоскости две параллельные прямые AC и BD. Через эти прямые проведена плоскость Q. Найти прямую пересечения плоскостей P и Q.

Объяснение к решению

Плоскости P и Q имеют две общие точки A и B, следовательно, они пересекаются по прямой AB.

№ 2. Из точки A вне плоскости P проведены две прямые, которые пересекают плоскость P в точках B и C. Через эти прямые проведена плоскость Q. Найти прямую пересечения плоскостей P и Q.

№ 3. Через точку A плоскости P и прямую CD, пересекающую плоскость P в точке F, проведена плоскость Q. Найти прямую пересечения плоскостей P и Q.

№ 4. Плоскости P и Q пересекаются по прямой AB. В плоскости P дана прямая $CD \neq AB$. Найти точку пересечения продолженной прямой CD с плоскостью Q.

Объяснение к решению

Прямая CD пересечет прямую AB, так как обе они лежат в плоскости P.

В этой же точке прямая CD пересечет и плоскость Q, так как AB лежит в плоскости Q.

№ 5. Основание AC треугольника ABC находится в плоскости P, а вершина B—вне плоскости. Через точки M и N, данные на сторонах AB и BC, проведена прямая. Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью P.

Исследовать условие возможности задачи

№ 6. Плоскости P и Q пересекаются по прямой AB. В плоскости P дана трапеция, основания которой параллельны AB. Найти точки пересечения продолженных боковых сторон трапеции с плоскостью Q.

№ 7. Из точек A и B плоскости P проведены вне плоскости две параллельные друг другу прямые AC и BD. Эти прямые пересечены прямой MN. Найти точку пересечения прямой MN с плоскостью P.

Исследовать условие возможности задачи.

Объяснение к решению

1. Через параллельные прямые AC и BD проводим плоскость Q.

2. Плоскости P и Q пересекаются по прямой AB.

3. Прямые MN и AB пересекаются, если $MN \neq AB$, так как лежат в одной плоскости.

4. В той же точке пересекутся и прямая MN и плоскость P, так как AB лежит в плоскости P.

Приведенные задачи имели своим назначением следующее:

1. Показать учащимся, что и в стереометрических задачах на построение решение получается при помощи совершенно определенного построения, не допускающего никакого произвола.

Этому обстоятельству я придавал очень большое значение. Нередко учащиеся делают чертежи в стереометрии произвольно, а это приводит к ошибочным выводам и к неправильному решению задач.

2. Научить строить линию пересечения двух плоскостей, если известны две общие точки этих плоскостей.

3. Сделать ясной мысль о том, что линия пересечения двух плоскостей лежит в обеих этих плоскостях и каждая точка этой прямой также лежит в обеих плоскостях.

4. Сделать для учащихся совершенно очевидным положение о том, что прямая, лежащая в одной из

двух пересекающихся плоскостей, пересекается с другой плоскостью в точке, лежащей на линии пересечения плоскостей.

5. Приучить учащихся различать на чертеже две различные плоскости.

Эти навыки и положения, несмотря на всю кажущуюся их очевидность и элементарность, усваиваются учащимися не сразу.

После решения этих задач, часть из которых задавалась на дом, я перешел к решению задач на построение сечений основных геометрических тел (куба, призм и пирамид) плоскостью.

Конечно, решению этих задач я предпослал демонстрирование моделей таких тел, как куб, правильная четырехугольная пирамида, правильная треугольная пирамида, правильные треугольная и четырехугольная призмы. Обнаружилось, что эти тела учащимся хорошо известны. Была указана терминология. Затем были показаны приемы изображения этих тел на чертежах — рисунках. Почти все учащиеся умели выполнять чертежи, но я все-таки подверг их некоторому рассмотрению. Так, были заданы и обсуждены вопросы:

1) Сколько плоскостей изображено на чертеже?

2) По какой прямой пересекаются такие-то грани?

3) Какие прямые лежат в той или иной грани?

4) В каких плоскостях лежат такие-то точки (взятые на ребре, на грани, в вершине тела)?

5) В каких плоскостях лежат те или иные ребра? И т. п.

6) Как продолжить ту или иную грань в указанном направлении?

Было установлено, наконец, что значит построить сечение данного тела плоскостью.

После этих предварительных упражнений и пояснений, занявших около 30 минут, я перешел к решению задач непосредственно на построение сечений тел плоскостью.

Этим задачам я придаю большое значение и уделяю решению их достаточно времени, так как именно построение сечений тел в наибольшей степени содействует развитию пространственных представлений у учащихся. Между тем в стабильном учебнике об этих задачах совершенно не упоминается, и это обстоятельство не случайно. Оно является логическим следствием из установленных принципов решения задач на построение, так как, согласно этим принципам, линия пересечения данных плоскостей считается данной, и, следовательно, никаких задач на построение сечений, строго говоря, не может и существовать.

Привожу теперь несколько задач на построение сечений; часть из них была разобрана в классе, часть задана на дом.

Для решения задач №№ 8—18 используются только основные свойства плоскости; задачи №№ 19—22 можно решать также на основании свойств параллельных прямых и плоскостей. Этими свойствами можно воспользоваться для исследования решения задачи (выяснить условие возможности, разобраться во взаимном расположении сторон полученной фигуры сечения и пр.).

В задачах №№ 8—15 данные точки преподаватель должен разместить так, чтобы в сечении всякий раз получался треугольник.

№ 8. Построить сечение куба $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M, данные на ребрах:

а) AD; DC; DD_1

б) A_1D_1; D_1C_1; DD_1

в) A_1B_1; A_1D_1; AA_1

№ 9. Выбрать три точки на ребрах куба так, чтобы плоскость, проведенная через эти точки, дала в сечении с кубом равнобедренный треугольник.

Точки выбрать на ребрах:

а) A_1B_1; A_1D_1; AA_1

б) CD; BC; CC_1

Выполнить построение и доказать правильность решения задачи.

№ 10. Выбрать на ребрах куба A_1B_1; B_1C_1 и BB_1 точки так, чтобы сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, являлось правильным треугольником.

№ 11. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M, данные на ребрах:

а) AD; SD; DC

б) SB; BC; AB

№ 12. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проведенной через точки:

а) A; S; C

б) S; B; D

№ 13. Выбрать три точки на ребрах пирамиды $SABCD$ так, чтобы плоскость, проведенная через эти точки, дала в сечении с пирамидой равнобедренный треугольник.

Точки выбрать на ребрах:

а) BC; SC; CD

б) AB; AD; AS

Выполнить построение и доказать правильность решения задачи.

№ 14. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L и M, данные:

а) на ребрах D_1D и D_1C_1 и грани $A_1B_1C_1D_1$

б) на гранях $A_1B_1C_1D_1$ и DD_1C_1C и ребре D_1C_1

в) на гранях AA_1B_1B и BB_1C_1C и ребре B_1B

№ 15. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M, данные:

а) на ребрах SD и DC и грани $ABCD$

б) на ребрах SD и DC и грани SAD

в) на ребре CD и гранях $ABCD$ и SDC

Решению первых из нижеследующих задач хорошо предпослать рассмотрение каркасных моделей тел, с тем чтобы на них намечать примерное расположение секущих плоскостей (впрочем, моделями особенно увлекаться не следует).

В задачах №№ 16, 17 и 18 данные точки преподаватель может размещать так, чтобы в сечении получался четырехугольник и в процессе решения приходилось строить одну вспомогательную точку.

№ 16. Построить сечение куба $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M, взятые на ребрах:

а) AD; BC; CC_1

б) AD; A_1D_1; DC

в) B_1C_1; BC; D_1C_1

г) B_1C_1; B_1B; A_1D_1

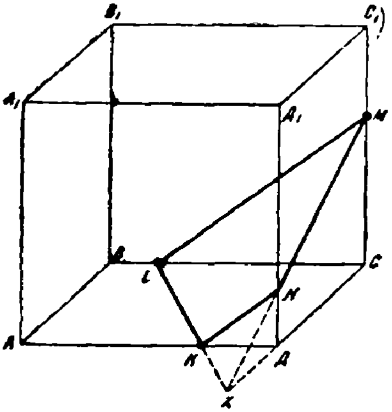
Примерное решение задачи № 16 (а)

1) Точки K и L на плоскости $ABCD$ и на секущей плоскости, следовательно, LK — линия сечения плоскости $ABCD$.

2) Точки L и M на плоскости $BB_1\ C_1C$ и на секущей плоскости, следовательно, LM — линия сечения грани $BB_1\ C_1C$.

3) Продолжаем LK и DC до пересечения (они лежат в одной плоскости) в точке X. Точки X и M на плоскости DD_1C_1C и на секущей плоскости, следовательно, линия XM — линия пересечения этих плоскостей, а отрезок NM — сечение грани DD_1C_1C.

4) Точки K и N на грани AA_1D_1D и на секущей плоскости, следовательно, KN — сечение грани AA_1D_1D.



Черт. 1

Ответ. Сечение куба данной плоскостью есть четырехугольник $KLMN$.

Исследование формы сечения: $LM \parallel KN$.

Дополнительные вопросы: а) построить линию пересечения данной секущей плоскости с продолжением верхнего основания куба; б) построить линию сечения данной секущей плоскости с продолжением грани AA_1B_1B.

№ 17. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через данные точки K, L и M, взятые на ребрах:

а) AD; SD; SC
б) AD; BC; SC
в) SA; SB; BC
г) AA_1; BB_1; DD_1

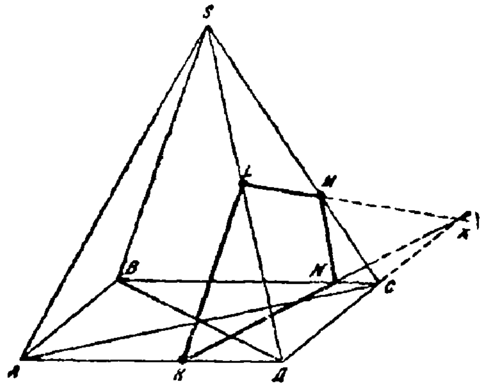
Примерное решение задачи № 17 (а)

1) Точки L и M на грани SDC и секущей плоскости, следовательно, LM — сечение грани SDC.

2) Точки L и K на грани SAD и на секущей плоскости, следовательно, LK — сечение грани SAD.

3) Продолжаем LM и DC до пересечения в точке X. Точки X и K на плоскости $ABCD$ и на секущей плоскости, следовательно, KX — линия пересечения этих плоскостей, а отрезок KN — сечение грани $ABCD$.

4) Точки M и N на грани SBC и на секущей плоскости, следовательно, MN — сечение грани SBC.



Черт. 2

Ответ. Сечение пирамиды данной плоскостью есть четырехугольник $KLMN$.

№ 18. Построить сечение правильной треугольной призмы $ABC\ A_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через данные точки K, L и M, взятые:

а) на ребрах: AC; AB; A_1C_1

б) BC; B_1C_1; A_1B_1

в) на ребрах AC и A_1C_1 и грани $A_1B_1C_1$.

г) на ребрах BC и AB и грани $A_1B_1C_1$.

Исследование формы сечения.

Решение последующих задач — №№ 19 и 20 требует построения двух и более вспомогательных точек.

№ 19. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L и M, взятые на ребрах:

а) AD; DD_1; B_1C_1

б) AD; BB_1; A_1D_1

в) AB; AD; CC_1

г) AB; AD; D_1C_1

д) BC; CD; AA_1

Схема решения задачи № 19 (а)

1) Проводим сечение KL грани AA_1D_1D.

2) Продолжаем KL и A_1D_1, находим точку X.

3) Проводим XM — пересечение плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и секущей плоскости.

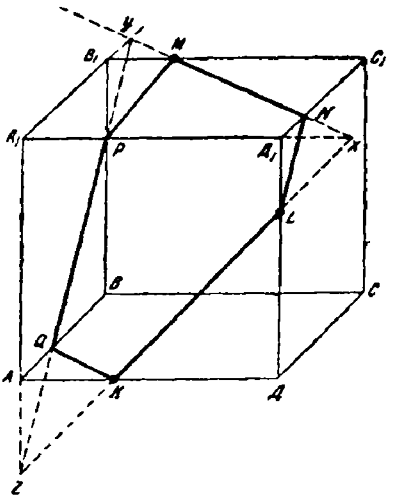
4) Строим NM — сечение грани $A_1B_1C_1D_1$.

5) Продолжаем NM и A_1B_1, получаем точку $У$.

6) Проводим продолжение LK и A_1A, получаем точку Z.

7) Проводим ZY — пересечение плоскости AA_1B_1B и секущей плоскости.

8) Строим PQ — сечение грани AA_1B_1B.



Черт. 3

9) Строим PM — сечение грани BB_1C_1C.

10) Строим QK — сечение грани $ABCD$.

Ответ. Сечение куба данной плоскостью—шестиугольник $KLNMPQ$.

Исследование формы фигуры сечения:

$QK \parallel MN$; $KL \parallel MP$; $LN \parallel PQ$.

№ 20. а) Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки K и L, взятые на ребрах SA и SB, и точку D.

б) То же для точек, взятых на ребре SC и гранях $ABCD$ и SBC.

в) То же для точек, взятых на ребрах SA; SB и SD. Указание: построить линию сечения продолженной плоскости основания.

г) То же для точек, взятых на ребрах SA и SB и грани SAD.

№ 21. На ребрах куба взять три точки так, чтобы плоскость, проведенная через эти точки, дала в сечении с кубом: 1) треугольник, 2) равнобедренный треугольник, 3) правильный треугольник, 4) квадрат, 5) прямоугольник, 6) параллелограмм, 7) трапецию, 8) ромб, 9) пятиугольник, 10) шестиугольник.

№ 22. На ребрах правильной четырехугольной пирамиды выбрать три точки так, чтобы плоскость, проведенная через эти точки, образовала в сечении с пирамидой: 1) треугольник, 2) равнобедренный треугольник, 3) трапецию, 4) какой-либо четырехугольник, 5) пятиугольник.

Работа над указанными задачами на построение была завершена контрольной письменной работой.

Результаты контрольных работ характеризуются следующими цифрами.

В IX-А классе:

Писали работу	30	человек
Получили оценку 5	8	„
„ „ 4	12	„
„ „ 3	9	„
„ „ 2	1	„

В IX-Б классе:

Писали работу	29	человек
Получили оценку 5	5	„
„ „ 4	8	„
„ „ 3	10	„
„ „ 2	6	„

К решению задачи учащиеся обязаны были приложить описание и объяснение построения.

Анализируя и оценивая результаты проделанной мной работы, я полагаю, что она принесла мне для дальнейшего прохождения курса стереометрии известную пользу. Эта моя уверенность основывается на следующих обстоятельствах.

1. Учащиеся, решая предлагаемые мною задачи, все время должны были наблюдать и различать целый ряд плоскостей на одном чертеже.

2. Учащимся приходилось отбирать на чертеже прямые пересекающиеся, т. е. лежащие в одной плоскости, от прямых скрещивающихся (на этом внимание учащихся в обычных условиях задерживается мало).

3. Учащиеся многократно использовали свойство линии пересечения двух плоскостей как линии, принадлежащей обеим плоскостям, и поэтому это свойство с его следствиями не только выучили, но и стали наглядно представлять.

4. Учащиеся имели много случаев наблюдать различные фигуры сечения плоскостью таких тел, как кубы, призмы и пирамиды.

5. Учащиеся должны были убедиться, что и в стереометрии не все построения условны, что многие задачи решаются при помощи построений циркулем и линейкой.

6. Учащиеся приобрели интерес к задачам на построение в пространстве.

7. Учащиеся приучались сопровождать решение задач объяснениями, причем эти объяснения к разоб-

ранным задачам легко схематизировались, а необходимость их ясно ощущалась самими учащимися.

Мне представляется, что в последние годы я могу констатировать известное повышение общего уровня развития пространственных представлений у учащихся IX классов по сравнению с тем уровнем, которого мне удавалось достигать в предшествующие учебные годы. Точно так же учащиеся стали более сознательно относиться к вопросам взаимного расположения линий и плоскостей в пространстве.

Особенно явственно это обнаружилось при решении задач на вычисление по задачнику Рыбкина (§§ 1—4). Тех грубых ошибок в отношении пространственных представлений, которые мне приходилось наблюдать в прошлые годы и о которых я уже упоминал, в настоящем году совершенно не было.

Так, например, кажущуюся точку пересечения скрещивающихся прямых учащиеся ни разу не сочли действительной точкой пересечения.

Ни разу к чертежу, изображающему несколько плоскостей, не отнеслись, как к чертежу планиметрическому.

Ни разу прямую, начатую в одной плоскости, не продолжили по другой плоскости и т. п.

Конечно, в таком сложном и многостороннем процессе, как успеваемость, трудно с полной уверенностью установить причины, от которых в первую очередь зависит то или иное наблюдающееся явление. Однако я все-таки вправе думать, что одним из факторов, повлиявших на повышение качества пространственных представлений и усиление сознательного отношения к этим представлениям у моих учащихся, оказалась система задач на построение сечений, которую я положил в основу изучения первых разделов курса стереометрии.

Поэтому я считаю необходимым и в дальнейшем использовать эту же систему задач.

Н. И. СЫРНЕВ,
учитель математики 352-й школы

ИЗ ОПЫТА ОЗНАКОМЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ С НЕКОТОРЫМИ ИЗЫСКАНИЯМИ ВЕЛИКОГО РУССКОГО МАТЕМАТИКА П. Л. ЧЕБЫШЕВА

Объяснительная записка к программе по математике для средней школы ставит перед учителем задачу — познакомить учащихся с великими русскими математиками и их научными открытиями.

Попытки решения этой задачи часто сводятся к сообщению биографии ученого и перечислению его основных работ. Но это не может вызвать у учащихся глубокого интереса, не дает возможности должным образом оценить заслуги ученого в развитии науки и не может удовлетворить учителя.

С другой стороны, более глубокое знакомство с работами ученого потребует очень много времени и знаний, которыми учащиеся не располагают.

Опыт работы показал, что лучше всего подробно остановиться на одном из вопросов, над которым работал ученый, изложить всю историю этого вопроса, познакомить с результатами предшественников, что вызовет должный интерес, позволит в полной мере оценить важность научного открытия и его влияние на дальнейшее развитие науки. На этом фоне и личность самого ученого глубоко запечатлеется в сознании учащихся как личность творца и мыслителя.

К такому выводу я пришел после того, как в течение трех лет проводил в различных классах (с VI по X) беседы и доклады на тему „Закон распределения простых чисел и великий русский математик П. Л. Чебышев". Доклад-беседа занимал один-два академических часа, в зависимости от количества излагаемого материала.

В качестве наглядных пособий, которые совершенно необходимы, я брал: 1) таблицу простых чисел от 1 до 100 размером 80 *см*$\times$80 *см* и 2) таблицу простых чисел от 1 до 10 000 размером 100 *см*$\times$100 *см*.

Изложение материала велось в такой последовательности:

1. Распределение простых чисел — одна из древнейших задач математики и первая известная нам таблица простых чисел — Эратосфеново решето (III век до н. э.).

При изложении этого материала следует обратить внимание учащихся на сходство таблицы № 1, а особенно таблицы № 2 с решетом.

2. Число простых чисел бесконечно (самого большого простого числа не существует) — теорема, доказанная Эвклидом.

При доказательстве этой теоремы методом Эвклида следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Мы допускаем существование наибольшего простого числа p, а затем рассматриваем другое число $A = 2.3.5.7....p + 1$, равное произведению всех простых чисел, сложенному с единицей.

Число A не будет делиться ни на одно из простых чисел от 2 до p включительно и, следовательно, будет простым числом (или будет делиться на некоторое простое число, но большее p). И то и другое заключение приводят нас к противоречию с предположением, что p есть наибольшее простое число. В младших классах здесь можно дать упражнения на составление чисел, не делящихся ни на одно простое число, до 11, 13, 17 включительно.

3. В натуральном ряде чисел можно указать промежуток, состоящий из любого (конечного) числа составных чисел, идущих подряд.

Доказательство этой теоремы, которое сводится к тому, что для заданного числа n мы составляем число $A = 2.3.5....\ p$, где p наибольшее из простых чисел, меньших $(n+1)$, а затем составляем последовательность $A+2;\ A+3;\ A+4;...A+n+1$ и убеждаемся, что она состоит из одних составных чисел, следует дополнить такими упражнениями:

Упражнение первое. Найти в натуральном ряде чисел промежуток, содержащий не менее 5 составных чисел.

$$n=5;\ n+1=6;\ p=5;\ A=2\cdot 3\cdot 5=30.$$

Искомый промежуток $30+2; 30+3; 30+4; 30+5; 30+6$ или 32, 33, 34, 35, 36. Этот промежуток учащиеся находят на таблице № 1.

Упражнение второе. Найти в натуральном ряде чисел промежуток, содержащий не менее 11 составных чисел.

Решение: $n=11$.

$$n+1=12;\ p=11;\ A=2\cdot 3\cdot 5\cdot 11=2310.$$

Искомый ряд чисел: $2310+2$; $2310+3$;....$2310+12$ или 2312; 2313;....2322.

В младших классах упражнения первое и второе следует рассмотреть до общего доказательства теоремы.

4. Иногда в натуральном ряде чисел можно видеть два простых числа, разделенных только одним составным числом. Такие числа называют близнецами. Учащиеся называют числа-близнецы и находят их на таблицах.

Числа-близнецы встречаются и довольно далеко в натуральном ряде чисел, например: 10 006 427 и 10 006 429.

Но будут ли такие числа встречаться без конца, существует ли последняя, наибольшая пара близнецов,— современная наука пока не знает.

Здесь следует обобщить весь предыдущий материал, отметив крайнюю сложность закономерности распределения простых чисел, и указать на исключительную трудность решения задачи о распределении простых чисел.

Петербургский академик Л. Эйлер в XVIII веке высказал мысль, что простые числа встречаются «бесконечно реже, чем целые». Если рассматривать отношение числа n простых чисел, не превосходящих N к самому числу N, т. е. $\frac{n}{N}$, то с увеличением N это отношение уменьшается.

Здесь можно предложить учащимся заполнить таблицу:

N	10	100	1000	100000	1000000
n	4	25	168	9592	78498
$\frac{n}{N}$	0,4	0,25	0,168	0,09592	0,078498

сообщив им значения n для $N=1\,000$; $N=100\,000$ и $N=1\,000\,000$.

Перед математиками стояла задача — дать формулу, выражающую число простых чисел, меньших данного числа N. Немецкий математик Гаусс и французский математик Лежандр пытались опытным путем получить такую формулу, но дать доказательства никто не мог.

5. Приведенный выше план исторического обзора при желании можно наполнить меньшим или большим содержанием. Но самое важное то, чтобы учащиеся активно восприняли весь материал, тогда и последующая беседа о работе П. Л. Чебышева над законом распределения простых чисел не будет для них простым звуком даже в том случае, если им будет дан только окончательный результат исследования Чебышева и они не смогут познакомиться с самим доказательством. Давать ли результат П. Л. Чебышева: $\frac{0,92129}{\ln x} < \frac{\Pi(x)}{x} < \frac{6}{5\ln x}$, ознакомив предварительно с понятием функции $\Pi(x)$? Это дело преподавателя. Но если это соотношение рассматривать, то необходимо иллюстрировать его на числовых примерах, например когда $x = 10$; 100; 1000.

Данная заметка не ставит себе целью дать полное изложение вопроса, которое можно найти в книгах: Чебышев П. Л. — Полное собрание сочинений; Гнеденко Б. В. — «Очерки по истории математики в России»; Берман Г. Н. — «Число и наука о нем» и др.

Задача, поставленная здесь, заключалась в желании поделиться опытом работы и высказать ряд методических соображений по этому важному и новому виду работы учителя математики.

С. В. ФИЛИЧЕВ,
С. С. ЩЕРБАКОВ

ПЕРВАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АРИФМЕТИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ V—VI КЛАССОВ ШКОЛ г. МОСКВЫ В 1949/50 УЧЕБНОМ ГОДУ

Первый тур арифметической олимпиады состоялся 26 марта 1950 г. в районах г. Москвы.

Из 25 районов не участвовали в олимпиаде лишь Железнодорожный, Ленинский, Первомайский, Свердловский и Советский. Всего в 20 районах было 4712 участников, из которых 421 учащийся были премированы грамотами и направлены на второй тур.

Второй тур был рассчитан на 421 человека, однако приняли участие 721 человек.

Второй тур состоялся 9 апреля 1950 г. при Московском институте усовершенствования учителей. Успешно прошли второй тур 195 учащихся. Из 195 учащихся 68 человек получили грамоты от Московского городского отдела народного образования. Из 195 учащихся, прошедших успешно второй тур, 17 учеников V класса, 63 девочки.

Для подготовки к арифметической олимпиаде в школах развернулась большая внеклассная работа по арифметике с учащимися V—VI классов.

На началах добровольности в кружках было обращено внимание на решение задач повышенной трудности в стабильном задачнике и др. К сожалению, сборник подготовительных упражнений по арифметике для участников первой арифметической олимпиады вышел поздно и был напечатан нетипографским способом.

Учащиеся V и VI классов готовились к олимпиаде с интересом. Учителя в массе считают организацию такого рода олимпиад полезной и необходимой для поднятия интереса к арифметике.

Двадцать районов организованно провели первый тур.

Анализ итогов первого тура показал, что больше всего затруднений вызвал четвертый вопрос, где требовалось показать умение логически рассуждать. Видимо, в решении такого рода задач у учащихся мало опыта.

Что касается первого примера, то он многими учащимися решен оригинально и, главное, различными способами. Это отрадное явление, тем более, что примеры были не шаблонными.

Что касается задач № 2 и № 3, то они не вызвали особых трудностей, так как такого рода задач немало и в стабильном задачнике.

Анализ работы второго тура показал следующее. Если взять, например, 47 работ учеников, успешно прошедших второй тур, т. е. решивших правильно не менее трех задач, то картина будет такая:

	I вариант	II вариант	Всего
Решили 1-ю задачу	25	18	43
„ 2-ю „	22	19	41
„ 3-ю „	11	20	31
„ 4-ю „	6	2	8
„ 5-ю „	27	1	28

Приведенная таблица показывает, что первый пример на вычисление не вызвал никаких затруднений для основной массы учеников, принимавших участие во втором туре.

Третью задачу первого варианта решило правильно меньшее количество участников, потому что в ней были более громоздкие вычисления. Учащиеся не имеют настойчивости доводить до конца вычисления с большими числами.

Четвертая задача на доказательство решена четко небольшим числом учеников. Это еще раз подтверждает, что задачи на доказательство многим ученикам трудны,—они мало упражняются в решении такого рода задач.

Пятая задача по тематике на движение во втором варианте была немного потрудней, чем в первом. Небольшое усложнение задачи снижает процент правильного решения.

Анализ работы первого и второго туров показал, что лучше всего справились с работами ученики VI класса. Отсюда вывод: ученикам V и VI классов надо давать различные тексты.

Ниже даны тексты работ первого и второго туров (в каждом туре было по два варианта) и задачи для подготовки к олимпиаде.

Первый тур (в районах)

Вариант № 1

1. Найти быстро результат:

$$\frac{423\,134 \times 846\,267 - 423\,133}{423\,133 \times 846\,267 + 423\,134}$$

2. В трех районах города 12 000 жителей. Сколько жителей в каждом районе, если известно, что $^2/_3$ числа жителей первого района равны 0,5 числа жителей второго района и $^2/_5$ числа третьего?

3. Два автомобиля вышли из города *B* в одном направлении: первый—в 8 час. утра, второй—в 10 час. 50 мин. После того как второй автомобиль догнал первый, они еще продолжали путь в течение $2^1/_2$ часов и в момент остановки оказалось, что второй автомобиль обогнал первый на 30 *км*. В котором часу второй автомобиль догнал первый и какое расстояние прошли автомобили до этого, если скорость первого равна 0,6 скорости второго?

4. Почему, если правильная дробь несократима, то дробь, дополняющая ее до 1, также несократима?

Вариант № 2

1. Какое число нужно вычесть из числителя дроби 52 367/47 633 и прибавить к знаменателю этой дроби, чтобы после сокращения получилось 17/83?

2. В двух бочонках было 38 ведер кваса. Из первого отлили 0,25 бывшего в нем кваса, а из второго — $^1/_6$. Тогда в обоих бочонках осталось кваса по одинаковому количеству ведер. Сколько было ведер кваса в каждом бочонке?

3. Два самолета вылетели одновременно из Москвы в одном и том же направлении: один — со скоростью 350 *км*, другой — со скоростью 280 *км* в час. Через 2 часа первый самолет уменьшил скорость до 230 *км* в час. На каком расстоянии от Москвы второй самолет догонит первый?

4. Почему, если сложить несократимую дробь с единицей, то вновь полученная дробь будет также несократима?

Второй тур (при Гороно)

Вариант № 1

1. Найти быстро сумму дробей:

$$\frac{2^2}{5\times 7}+\frac{2^2}{7\times 9}+\frac{2^2}{9\times 11}+\frac{2^2}{11\times 13}+\ldots+\frac{2^2}{59\times 61}$$

2. В двух кассах универмага было 24 600 руб. Если бы число рублей в первой кассе увеличить в $1^2/_7$ раза, а число рублей второй кассы уменьшить на $^4/_{25}$ ее количества, то в первой кассе было бы в $2^1/_7$ раза больше, чем во второй. Сколько было денег в каждой кассе?

3. За 22 апельсина и 9 яблок уплачено 61,2 руб. Если бы цену апельсинов поднять на $^1/_9$, а цену яблок понизить на $^1/_{10}$ прежней цены, то за такую же покупку пришлось бы уплатить 67,24 руб. Сколько стоит один апельсин и одно яблоко?

4. Докажите, что если даны три каких-либо целых числа, из которых ни одно не делится на три, то или сумма всех этих чисел, или сумма двух каких-нибудь из них должна делиться на три.

5. $^7/_{12}$ расстояния между двумя городами *А* и *В* равны 75,25 *км*. В 5 час. 36 мин. утра один велосипедист выехал из города *А* по направлению к *В*; в 7 час. 15 мин. утра выехал по той же дороге из *В* по направлению к *А* другой велосипедист, который проезжал в час на 0,75 *км* более первого. Зная, что велосипедисты встретятся ровно в полдень того же

дня, вычислить, по скольку километров проезжал каждый из них в час.

Вариант № 2

1. Найти быстро сумму дробей:

$$\frac{7^2}{2\times 9}+\frac{7^2}{9\times 16}+\frac{7^2}{16\times 23}+\ldots+\frac{7^2}{65\times 72}$$

2. За $^1/_4$ *кг* сыра и 700 *г* творога уплачено 17,5 руб. Когда сыр подешевел на $^1/_5$ его стоимости, а творог — на $^1/_7$ его стоимости, то за такую же покупку было заплачено 14,7 руб. Сколько стоили первоначально 1 *кг* сыра и 1 *кг* творога?

3. Цена 1 *кг* одного сорта конфет больше цены 1 *кг* другого сорта на $2^3/_4$ руб. 50 *кг* первого сорта конфет стоят столько же, сколько 61 *кг* конфет другого сорта. Определить цену 1 *кг* конфет каждого сорта.

4. Докажите, что если к какому-нибудь четному числу прибавить единицу и к полученному числу снова прибавить единицу, а затем все эти три числа перемножить, то это произведение разделится без остатка на 24.

5. В 9 час. 25 мин. утра пешеход отправился из пункта A в пункт B. Идя с одинаковой скоростью, пешеход прибыл в B в 1 час 15 мин. пополудни. На следующий день в 11 час. утра он отправился из B в пункт A той же дорогой и, идя равномерно, но несколько скорее, чем он шел накануне, прибыл в A в 2 час. 40 мин. пополудни. Зная, что расстояние между пунктами A и B равно 12 *км*, определить, на каком расстоянии от A находится то место, через которое пешеход проходил в один и тот же час в каждый из этих двух дней.

1.

$$\left[\frac{1\,397\,760}{(5\,000\,000-x):10\,989}\cdot 30\,125+546\,000\right]:744720=125$$

Найти x.

2.

$$\left\{6\,099\,948-\left[756\,000:\frac{1000}{(300-x):36}\right]\cdot 201\right\}:407\,025=12$$

Найти x.

3.

$$\left\{13^{8}/_{9}-\left[\frac{11^{1}/_{10}}{(4^{3}/_{4}+x)\cdot {}^{4}/_{11}}-2^{7}/_{15}\right]\cdot\frac{181}{222}\right\}:1^{1}/_{24}=3^{1}/_{3}.$$

Найти x.

4.

$$0{,}228:\left[\left(1{,}5291-\frac{14{,}53662}{3-x}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right]=9{,}5.$$

Найти x.

5.

$$\left[3^{9}/_{16}:\left(\frac{2{,}75}{x:{}^{2}/_{7}-45}-\frac{7}{24}\right)+6{,}2\right]:12^{2}/_{9}=1{,}2.$$ Найти x.

6.

Надо выполнить умножение 823×743; умножение уже начато:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}823\\743\end{array}\\ \hline 2469\\ 3292 \end{array}$$

Как его продолжить, не умножая прямым приемом числа 823 на 7?

Придумайте подобные примеры на умножение сами.

7. $\left.\begin{array}{r}19+21+17+36=\\81+79+83+64=\end{array}\right\}$ Узнайте первую сумму непосредственно. Как при ее помощи проще узнать вторую сумму?

8. Продолжите ряд примеров:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}$$

Каков ответ в каждом из них?

9. $\left.\begin{array}{r}\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20}=\\[6pt]\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{16}+\frac{9}{20}=\end{array}\right|$ Вычислите первую сумму. Как тогда узнать вторую сумму, не выполняя сложения?

10. Вычислить:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}\right)=$$

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{2}-\left(\frac{7}{5}+\frac{7}{2}\right)=$$

Составить такие дроби, чтобы от умножения их и от сложения получился один и тот же результат.

11. Найдите несколько пар чисел, разность которых равна их произведениям,

например: а) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$

б) $\frac{2}{5}-\frac{2}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}$ и т. д.

12. Как быстро найти следующую сумму:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{9.10}$

б) $\frac{1}{10.11}+\frac{1}{11.12}+\frac{1}{12.13}+\frac{1}{13.14}+\frac{1}{14.15}+\frac{1}{15.16}+$
$+\frac{1}{16.17}+\frac{1}{17.18}+\frac{1}{18.19}+\frac{1}{19.20}$.

13. В одном кармане лежит 75 руб., а в другом — 24 руб. Сколько рублей нужно переложить из первого кармана во второй, чтобы во втором было в два раза больше денег, чем в первом?

14. Если бы школьник купил 3 тетради, то у него осталось бы 5 коп., а если бы он захотел купить 4 тетради, то ему нехватило бы 5 коп. Сколько денег было у школьника?

15. Из города *А* вышли в город *В* в одно время два парохода; скорость первого — 18 *км*, а второго — 15 *км* в час. Первый приехал в *В* на 2 часа раньше второго. Сколько километров от *А* до *В*?

16. 4 яблока и 3 груши стоят 2 р. 50 к., а пара яблок и пара груш стоят 1 р. 50 к. Что стоит одно яблоко и одна груша?

17. 3 тетради и 2 карандаша стоят 70 коп. Если бы тетради вздорожали втрое, а карандаши вдвое, то за

то же количество пришлось бы заплатить 1 р. 70 к. Что стоила одна тетрадь и один карандаш?

18. Двумя насосами качают воду. Когда один насос действовал 2 часа, а другой — 8 часов, тогда они вместе дали 44 бочки воды. Если бы первый насос качал воду вдвое скорее, а второй—вчетверо медленнее, то оба насоса дали бы за то же время 32 бочки. Сколько каждый насос выкачивал воды в час?

19. Если бы я купил 6 лимонов и 3 апельсина, то мне нехватило бы 6 руб., а если бы купил только 3 лимона и 1 апельсин, то у меня осталось бы из моих денег 10 руб. Что стоит один лимон и один апельсин, если лимон и апельсин вместе стоят 6 руб.?

20. Когда брат съел из своих слив 8 штук, а сестра 12, то у брата осталось на 9 слив больше, чем у сестры. На сколько брат имел слив больше, чем сестра?

21. На этажерке лежало на 37 книг больше, чем в шкафу. Сколько книг нужно переложить с этажерки в шкаф, чтобы в нем было на 13 книг больше, чем на этажерке?

22. В двух классах 55 учеников. Когда в первый класс поступило еще 5 учеников, то в нем стало втрое больше учеников, чем во втором. Сколько было учеников во втором классе?

23. У меня втрое больше яблок чем у сестры. А если бы мне дали еще 4 яблока, то стало бы в 5 раз больше. Сколько у меня яблок?

24. На нескольких скамейках нужно было рассадить детей. Если посадить на каждую скамейку по двое, то один останется без места, а если сажать по одному, то нехватит места для пятерых. Сколько было скамеек и сколько детей?

25. Два мальчика получили 62 сливы. Когда первый съел 6 слив, а второй — 11, то второй имел по 5 слив столько раз, сколько первый — по 4. Сколько слив получил каждый?

26. Куплены фрукты по следующей цене за десяток: яблоки — по 6 руб., сливы — по 2 руб. и груши — по 8 руб. За все фрукты заплачено 92 руб. Сколько десятков куплено каждого рода фруктов, если слив куплено на 2 десятка больше, чем яблок, а груш—на 3 десятка больше, чем слив?

27. Школа купила за 92 руб. 8 альбомов, 1 линейку и 2 циркуля. Сколько было заплачено за каждый предмет, если циркуль вдвое дороже линейки, а 4 альбома стоят столько же, сколько 9 линеек?

28. В книжном магазине на двух полках было 75 книг. Когда с первой полки переложили на вторую 7 книг, а со второй продали 9 книг, то на обеих полках стало книг поровну. Сколько книг было первоначально на каждой полке?

29. Из пунктов A и B вышли две лодки навстречу одна другой. Лодка из A вышла на 7 часов раньше и делает в час на 5 *км* больше второй. Через 3 часа после выхода второй лодки они встретились. Определить их скорости и место встречи, если от A до B 115 *км*.

30. Поезд проходит данное расстояние в 10 часов. Но если бы он шел на 10 *км* в час скорее, то ехал бы всего 8 часов. Определить расстояние и скорость.

31. Для устройства елки купили 760 орехов, конфет и пряников; орехов взяли на 80 штук больше, чем конфет, а пряников — на 120 меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса и сколько орехов, конфет и пряников в отдельности войдет в каждый подарок?

32. Три автобуса в 6 час. утра отправились с конечной станции по трем различным маршрутам и совершают рейс: первый автобус — за 1 час 30 минут, второй — за 1 час 50 минут и третий — за 1 час 10 минут. По совершении каждого рейса автобусы через 10 минут отправляются в следующий рейс по тому же маршруту. В котором часу: 1) первый автобус отправится одновременно со вторым, 2) второй автобус — с третьим и 3) все три автобуса одновременно выедут с конечной станции?

33. На складе имеются ножи и вилки. Известно, что их число больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки считать вместе десятками или дюжинами, то в обоих случаях получается целое число десятков и целое число дюжин. Сколько было ножей и вилок в отдельности, если ножей было на 160 меньше, чем вилок?

34. В городе мужчины составляют $^9/_{10}$ числа жен-

щин, живущих в этом городе. Какую часть составляют мужчины от всего населения города? Сколько женщин живет в городе, если мужчин и женщин в городе 380 000?

35. В классе число отсутствующих учеников составляет $^1/_6$ числа присутствующих. После того как из класса вышел еще один ученик, число отсутствующих оказалось равным $^1/_5$ числа присутствующих. Сколько учеников в этом классе?

36. Отец и дочь получают вместе в месяц 1450 руб. $^1/_2$ зарплаты отца равна $^2/_3$ зарплаты сына и $^3/_4$ зарплаты дочери. Какова зарплата каждого члена семьи?

37. Город состоит из четырех районов. В первом районе живет $^4/_{13}$ всех жителей города, во втором районе—$^5/_6$ числа жителей первого района, в третьем—$^4/_{11}$ числа жителей первых двух районов, вместе взятых, а в четвертом районе живет 18 000 человек. Сколько хлеба требуется всему населению города на 3 дня, если в среднем один человек потребляет 500 *г* в день?

38. Смешано три сорта яблок: по 12, 10 и 8 руб. за 1 *кг*. Получено 20 *кг* смеси ценой по 10 р. 60 к. за 1 *кг*. Яблок 2-го и 3-го сортов взято столько, сколько было взято яблок 1-го сорта. Сколько было взято яблок каждого сорта?

39. Первый покупатель купил $9^1/_2$ *м* ситца и $8^1/_2$ *м* сатина и уплатил 246 руб.; второй покупатель купил 3 *м* шерсти и $8^1/_2$ *м* шелка и уплатил 580 руб. Сколько стоит 1 *м* каждой ткани, если 1 *м* ситца в 10 раз дешевле 1 *м* шерсти, а 1 *м* шелка на 20 руб. дороже 1 *м* сатина?

40. Бассейн наполняется двумя трубами. Сначала открыли первую трубу; через $3^3/_4$ часа, когда наполнилась половина бассейна, открыли вторую трубу. Через $2^1/_2$ часа совместной работы труб бассейн наполнился. Найти его вместительность, если через вторую трубу вливалось 20 ведер в час.

41. Бригада из 8 рабочих получила наряд на выполнение заказа в 30 дней. Ввиду болезни 3 рабочих в течение нескольких дней бригадой за 15 дней было выполнено $^3/_8$ заказа. На сколько рабочих надо увеличить бригаду, чтобы выполнить заказ в срок, если производительность труда останется прежней?

42. Из города A в город $Б$ вышел поезд со скоростью 40 *км* в час. Спустя некоторое время из A отошел по тому же направлению второй поезд, со скоростью 60 *км* в час, который должен прибыть в $Б$ одновременно с первым. Первый поезд, пройдя $^3/_4$ пути, уменьшил свою скорость наполовину, и благодаря этому второй поезд догнал первый в 45 *км* от $Б$. Определить расстояние между A и $Б$.

43. В трех вагонах электропоезда помещаются 126 пассажиров. $^3/_5$ числа пассажиров первого вагона, $^3/_4$ числа пассажиров второго вагона и $^2/_3$ числа пассажиров третьего вагона равны между собой. Сколько пассажиров в каждом вагоне?

44. Из города A в город $Б$, расстояние между которыми 40 *км*, вышел пешеход. Через $8^1/_2$ часов после его выхода навстречу ему из города $Б$ выехал автомобиль, скорость движения которого в $6^1/_4$ раза больше скорости пешехода. Встреча произошла на середине пути между A и $Б$. Определить скорость автомобиля и скорость пешехода в час.

45. Четверо рабочих разделили полученные деньги следующим образом: первый взял $^1/_3$ всего числа денег и еще 32 руб., второй—$^1/_3$ того числа денег, что осталось после первого, и еще 32 руб., третий взял $^1/_3$ того, что осталось после второго, и еще 32 руб., четвертый взял $^1/_3$ того, что осталось после третьего, и последние 32 руб. Сколько получил каждый рабочий?

46. Рабочий разлил бочонок уксуса в бутылки по $^1/_2$ *л* каждая, причем в каждые 3 минуты наполнял 5 бутылок; на всю работу он затратил $2^1/_2$ часа. Сколько времени потребуется другому рабочему, чтобы разлить такой же бочонок уксуса в бутылки по $^5/_8$ *л* каждая, если каждые 10 бутылок он наполняет в 7 минут?

47. На продовольственной базе для туристов сделан запас продовольствия на 90 дней, если каждому выдавать в день по 1,2 *кг*. На сколько надо уменьшить порцию продовольствия одного человека, чтобы $^3/_5$ запаса хватило на 56 дней, если число туристов будет увеличено на $^2/_7$ их прежнего состава?

48. Артель землекопов в $6^1/_4$ дня вырыла ров длиной 150 *м*, шириной 60 *м* и глубиной $1^3/_4$ *м*, причем $^1/_2$ артели посменно отдыхала. Во сколько дней дру-

гая артель, число рабочих в которой вдвое меньше числа рабочих в первой, выроет ров длиной 120 *м*, шириной 48 *м* и глубиной $2^1/_3$ *м*, если отдыхать посменно будет $^1/_3$ артели?

49. Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды; после некоторого времени он напитывается водой так, что содержит 15% воды. На сколько при этом увеличивается вес $26^3/_4$ *ц* угля?

50. Книжный магазин покупает книги с уступкой $33^1/_3$% с цены, обозначенной на обложке, а продает ее с уступкой 15% с той же цены. Сколько процентов прибыли получает магазин?

51. В бассейн проведена труба; вследствие засорения трубы, приток воды через нее уменьшился на 60%. На сколько процентов в результате этого увеличится время, потребное для наполнения бассейна?

52. Два брата имели равные суммы денег. Старший брат положил свои деньги в сберкассу, дающую 3% годовых, а младший купил облигации займа, дающего доход 4% годовых. Через год они получили вместе 350 руб. дохода. Сколько денег имел каждый брат?

53. Служащий выиграл некоторую сумму денег, присоединил к ней еще $^2/_3$ этой суммы из своей зарплаты и разделил на две части, из которых одна была на 100 руб. больше другой. На меньшую часть он купил облигации процентного займа и за год получил от них 4% дохода, а большую часть поместил в сберкассу из 3% годовых. Через год доход с обеих частей был одинаков. Сколько он выиграл?

54. 20 *м* ткани продали с убытком в $2^1/_3$%. Если бы вместо убытка получили $5^1/_4$% прибыли, то выручили бы за ткань на 4,65 руб. больше ее стоимости. Почем продавали метр ткани?

55. Сплавлены 3 куска меди. Первый весил на $2^1/_2$ *кг* более второго, второй весил вдвое больше третьего, а третий — в 3 раза меньше первого. Сколько весил каждый кусок?

56. Три машинистки перепечатали вместе 251 лист. Сколько листов перепечатала каждая, если первая печатала $12^1/_{12}$ листа в то время, в которое вторая — $11^2/_3$ листа, а третья печатала $10^2/_3$ листа в то время, в которое вторая печатала $11^1/_5$ листа?

57. Продуктовый магазин получил 75 *кг* конфет

трех сортов: по 10, по 8 и по 6 руб. за 1 *кг*. За первый сорт он уплатил на 180 руб. больше, чем за третий, а за второй — на 80 руб. больше, чем за третий. Сколько куплено килограммов конфет каждого сорта?

58. Цена за вход в сад — 1 р. 50 к. с человека. Когда цену понизили, количество публики увеличилось на $^1/_2$, а сбор увеличился на $^1/_4$. На сколько понижена плата?

59. Число жителей одного города относилось к числу жителей другого, как 7 : 9; когда же число жителей выросло в первом на 2 000, а во втором — на 4 000, то это отношение изменилось и составило 3 : 4. Сколько жителей стало в каждом городе?

60. Двумя насосами можно выкачать содержимое 40-ведерной бочки в 5 раз скорее, чем одним первым насосом; второй насос выкачивает содержимое бочки на 30 минут скорее, чем первый. По скольку ведер выкачивает каждый насос в минуту?

61. Часы показывают 12 часов. В котором часу минутная стрелка будет снова совпадать с часовой? Указать время трех последовательных (после 12 часов) совпадений.

62. Поезд идет в течение 15 секунд мимо телеграфного столба и за 45 секунд проходит тоннель в 450 *м*. Вычислить скорость и длину поезда.

63. Производительность труда повысилась на 20%. На сколько процентов уменьшилось время, необходимое для изготовления некоторой детали?

64. Двое рабочих могут выполнить определенный заказ за $7^1/_2$ часов, работая с одинаковой производительностью. Один из них, применив стахановский метод работы, увеличил свою производительность на 40%. За сколько часов рабочие выполнили заказ?

65. Мальчик скопил 104 руб. на радио. Ему помогли купить радио отец и два дяди. При этом выяснилось, что первый дядя дал 25% того, что было собрано без него, включая накопления мальчика, второй дядя дал $33^1/_3$% и отец — 50% того, что было собрано без них, включая накопления мальчика. Сколько стоило радио?

66. Найти целое число, которое в 7 раз больше цифры его единиц.

67. Если неизвестное число разделить на 7 и част-

ное сложить с делимым и делителем, то получится 263. Найти это число.

68. Найти наименьшее число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 – 2, при делении на 4—3, при делении на 5—4, при делении на 6—5, при делении на 7—6, при делении на 8—7, при делении на 9—8 и при делении на 10 дает в остатке 9.

69. Найти 4 последовательных целых числа, произведение которых равно 1680.

70. Если в неизвестном числе зачеркнуть крайнюю справа цифру 7, то число уменьшится на 31 156. Найти это число.

71. Длина куска полосового железа относится к его ширине и толщине, как 600 : 45 : 3. Вычислить вес этого куска, если толщина его — $12^1/_2$ *мм* и если 1 *см*^{3} железа весит 7,8 *г*.

72. Пусть каждый из вас напишет любое трехзначное число. Припишите к нему справа такое же. Получившиееся шестизначное разделите на 7. Почему в остатке нуль?

73. Крышка прямоугольного ящика заключает 120 *см*^{2}, передняя его стенка содержит 96 *см*^{2}, а боковая — 80 *см*^{2}. Определить длину, высоту и ширину ящика.

74. Стоя неподвижно на ступени эскалатора метро, человек доставляется этой движущейся лестницей от платформы до уровня улицы в течение одной минуты. Тот же человек, взбегая по ступеням неподвижного эскалатора, может добраться до верху в 50 секунд. Во сколько времени доберется до уровня улицы этот же человек, если станет взбегать по поднимающемуся эскалатору?

75. Напишите число 31 пятью цифрами: 3, 3, 3, 3 и 3.

76. Скорость товарного поезда — 38 *км* в час, а пассажирского — 57 *км* в час. Первый вышел со станции *А* на 7 часов раньше второго, но второй обогнал его и прибыл на станцию *В* двумя часами раньше. Сколько километров от *А* до *В*?

77. Для номерации страниц энциклопедического словаря потребовалось 6 869 цифр. Сколько страниц заключал в себе этот словарь?

78. Разделить между тремя лицами 1 564 руб. так, чтобы первому досталось в 3 раза меньше, чем двум

остальным, и чтобы часть второго была на 285 руб. больше разности между частями третьего и второго.

79. Мальчик на вопрос, сколько ему лет, отвечал, что через 13 лет ему будет в 4 раза больше, чем ему было 2 года назад. Сколько лет мальчику?

80. Отец в 2,75 раза старше сына, а 10 лет назад он был старше сына в $5^2/_3$ раза. Сколько лет каждому?

81. У двух братьев было по 900 руб. Старший тратил в месяц 57 руб., а младший — 21 руб. Через сколько месяцев у первого останется втрое меньше, чем у второго?

82. Купили два куска материи: один — в 40 *м*, другой — в 30 *м*, заплатив за оба 425 руб.; если бы первый кусок был куплен по цене второго, а второй — по цене первого, то за оба куска заплатили бы 415 руб. Сколько стоил метр материи каждого куска?

83. Букинистический магазин продал книгу со скидкой в 10% с назначенной цены и при этом получил 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально предполагал получить магазин?

84. Двое часов пущены в ход в 9 час. утра. Одни идут верно, а другие каждый час уходят вперед на 1,5 минуты. Через какой промежуток времени показания часов снова совпадут и в котором часу это произойдет?

85. Разность цен двух кусков ткани одинаковой длины — 126 руб. 4 *м* первого куска стоят на 13,5 руб. дороже, чем 3 *м* второго; 3 *м* первого и 4 *м* второго стоят вместе 38,25 руб. Найти длину кусков и цену 1 *м* ткани каждого куска.

86. Отец разделил между детьми свои сбережения следующим образом: первому досталось 100 руб. и $^1/_{10}$ остатка, второму — 200 руб. и $^1/_{10}$ нового остатка, третьему — 300 руб. и $^1/_{10}$ остатка и т. д. Сколько получил каждый, если всем детям досталось поровну, и сколько было детей?

87. Число молекул водорода (и всякого другого газа), заключающегося в 1 *см*^{3} при нормальных условиях (0° и 760 *мм* давления), оценивается приблизительно в $27 \cdot 10^{18}$ (27 триллионов). Какой длины получилась бы нить, составленная из всех молекул, вплотную приложенных одна к другой, если диаметр каждой молекулы принимать за 0,2 миллимикрона? Сравните

длину этой нити с длиной цепи, которая получилась бы, если бы все население земного шара (около 2 миллиардов человек) стало, взявшись рука с рукою, так, чтобы на каждого человека приходилось 1,35 *м*.

88. Воды океанов и морей содержат золото, количество которого в среднем будет $10 \cdot 10^{-6}$ *мг* на 1 *л* воды. Подсчитайте при таком допущении вес всего золота, содержащегося в 1 *км*^{3}.

89. Рельс в 9 *м* длины весит 364 *кг*. Вы хотите отпилить от такого рельса кусок весом в 2,5 *кг*. Какой длины должен быть этот кусок?

90. Литр семян ржи весит 0,7 *кг*, а в 1 *кг* содержится 32 000 зерен. Подсчитайте, сколько чайных стаканов (250 *см*^{3}) таких зерен надо взять, чтобы получить 1 000 000 зерен.

91. Кормовая трава «тимофеевка» высевается по 15 *кг* на гектар. Обычно всходит 80%. При этом в среднем на каждом квадратном дециметре получается 48 растений. Вычислить число семян в 1 *г*.

92. Количество воды, выпадающее при хорошем летнем дожде в районе Москвы, может покрыть поверхность земли слоем в 50 *мм*. Сколько стоила бы искусственная поливка таким количеством воды 1 *га* огорода, считая по 5 коп. за литр?

93. Проволоку длиной в 48 *дм* разрезали на 6 равных частей. Из двух частей согнули одинаковые прямоугольники так, что ширина каждого прямоугольника составляла $^1/_3$ его длины. Остальными четырьмя кусками проволоки скрепили по углам эти два прямоугольника таким образом, что в результате получилась проволочная прямая призма. Определить объем этой призмы.

94. От смешения 5-процентной серной кислоты с 20-процентной получилась 14-процентная серная кислота. Сколько килограммов отдельно той и другой серной кислоты взято в смесь, если первая содержала чистой серной кислоты на 7,5 *кг* меньше, чем вторая?

95. Сплавили два куска бронзы с куском меди, весящим 1,25 *кг*. В первом куске бронзы количество меди и олова находилось в отношении $5 : {}^1/_2$; во втором куске бронзы вес меди составлял $83^1/_3$% веса всего куска. В полученном сплаве количества меди

и олова находились в отношении 7 : 1. Сколько весил каждый кусок бронзы, если во втором куске было меди на 2,5 *кг* больше, чем в первом?

96. Сплавили два серебряных слитка 700 и 800 пробы. Сплав получился 750 пробы. Определить вес каждого слитка, если известно, что чистого серебра в первом слитке было на 3 *кг* больше, чем во втором.

97. Дорожная карта имеет масштаб 1 : 100 000. Я должен отправиться из деревни *A* в деревню *B*. На карте расстояние между этими деревнями равно 3,5 *дм*. Сколько времени я потрачу на дорогу, если поеду на велосипеде со скоростью 15 *км* в час?

СОДЕРЖАНИЕ

Редакторы *С. И. Наумов, К. К. Журавлев*

Техн. ред. *А. Н. Кочетков*

Наблюдающие за изданием: *А. Н. Алексеева, С. С. Грингауз*

Сдано в набор 19/VI 1951 г. Подписано к печати 14/XII 1951 г.
Л146861 Бумага 84×108 1/32 Печ. л. 9,64 Тираж 8000 экз. Зак. 2887

Серпуховская типография Мособлполиграфиздата

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
51	13 сверху	вет	Ответ
55	2 снизу	$\neq$	$=$
62	4 снизу	$\dfrac{a<p<h}{h<p<a}$	$a<h<h$
62	3 снизу	$h-a<0,\ p-a<a,$ $h-p<0;$	$h-a<0,\ p-a<0,$ $h<p<a,\ h-p<0;$
65	2 сверху	$>AC+LN$	$>MN+LN$
68	2 снизу	пункт	пункт Б
71	8 снизу	$\dfrac{m}{v_1}$	$\dfrac{m}{v_1}=t$
91	3 снизу	$(x\neq+v).$	$(x\neq\pm v).$
119	11 снизу	$(\beta 0<\dfrac{\beta}{2}<90^\circ).$	$(0^\circ<\dfrac{\beta}{2}<90^\circ).$