П. М. ЭРДНИЕВ

МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АРИФМЕТИКЕ И АЛГЕБРЕ

(ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ)

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1965

ОТ АВТОРА

Предлагаемая работа состоит из трех частей.

В первой части излагаются общие вопросы методики математических упражнений.

Во второй и третьей частях работы описаны конкретные пути осуществления указанной методики преимущественно в курсах арифметики и алгебры восьмилетней школы.

В книге рассматриваются два основных вопроса: 1) применение на уроках математики метода противопоставления, позволяющего повысить производительность труда учителя и улучшить знания учеников; 2) методика синтетических упражнений творческого характера, которая до сих пор оставалась почти неисследованной.

Важность этих двух проблем для методики математики объясняется большим значением прямых и *обратных связей* в мыслительных процессах по усвоению математики.

В книге рассматривается классификация (и составление) математических упражнений, решение их несколькими способами, а также вопросы проверки и контроля решения задач.

Синтетические упражнения по составлению задач и примеров, которые в основном стали проникать в школу в XX веке, в значительной мере являются новыми в обучении.

Проведенная нами совместно с рядом учителей опытная работа показала, что такие упражнения, дополняя обычные аналитические упражнения по решению готовых задач, играют важную роль в развитии математического мышления и творческих способностей учеников.

В содержание книги входят некоторые разделы, являющиеся естественным обобщением отдельных вопросов школьного курса. Эти разделы могут быть использованы во внеклассных занятиях с учениками, увлекающимися математикой.

Основные методические положения настоящего пособия проверялись автором в средней школе на уроках математики с 1949 года, а также учителями: Ермолаевой П. И., Даниленко В. В., Бондаренко З. К., Щеголевой Н. М. (школа № 6 г. Ставрополя); Неберикутя А. Ф., Тарасовой К. Я., Либеровой О. И. (школа № 42 г. Ставрополя); Зинченко А. С. (школа № 32 г. Ставрополя) и другими.

Экспериментальное обучение по предлагаемой методике проводили также студенты старших курсов Ставропольского пединститута в 1957—1963 годах.

Существенному улучшению книги содействовали замечания и советы рецензентов: С. Е. Ляпина, И. Б. Вейцмана, Е. Г. Крейдлина, Т. Н. Денисовой, К. П. Сикорского, К. С. Муравина, Л. М. Волова, В. М. Брадиса.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность всем названным товарищам.

В книге излагаются не только результаты исследования, но и ставятся вопросы, требующие дальнейшего изучения.

Автор надеется, что данная работа послужит началом дальнейшей *детальной разработки* методов противопоставления и синтетических упражнений усилиями широкого круга педагогов и психологов.

Следует ожидать, что в некоторых типах школ (вечерние школы, школы с сокращенным сроком обучения, школы с математическим уклоном, средние специальные учебные заведения) рассмотренные в книге приемы и методы обучения могут найти еще более широкое применение и развитие.

Просим читателей высказать свое мнение об описанных в книге методах *после фактической проверки* их в классе. Наш многолетний опыт использования описанной в книге методики позволяет утверждать следующее: многое из того, что при первом знакомстве противоречит привычным взглядам учителя, при проверке оказывается вполне приемлемым и достойным применения.

Все замечания по поводу книги просьба направлять по адресу редакции математики издательства «Просвещение».

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

1. Математическое упражнение как основной элемент процесса обучения математике

Состояние знаний учеников средней школы по математике в настоящее время нельзя считать вполне удовлетворительным. Несмотря на значительное время, отведенное учебным планом изучению математики, знания по ней все же остаются подчас формальными и быстро выветриваются из памяти.

По свидетельству известных математиков, многие выпускники школ не умеют самостоятельно мыслить и на вступительных экзаменах в вуз показывают силу своей памяти, а не живую, активно работающую мысль [44][1].

На учительских съездах, прошедших в нашей стране в 1959—1960 годах, многие делегаты выражали глубокую озабоченность снижением уровня знаний учащихся по математике [49].

Многие из недочетов обучения математике являются следствием несовершенства методов преподавания. Наиболее распространенные методы и приемы обучения далеко не соответствуют познавательным возможностям учеников; их возможности в действительности значительно выше, чем это принято считать.

Методика математики, будучи наукой о целенаправленном развитии мышления учащихся, в своих основных положениях и выводах должна исходить из учета всего комплекса данных соприкасающихся с ней наук: физиологии высшей нервной деятельности, психологии, кибернетики, логики, дидактики, педагогики, частных методик и, главное, всеобщей методологии наук — материалистической диалектики.

Никакая наука не может достичь успехов, игнорируя смежные с ней науки.

---

[1] Здесь и в дальнейшем в квадратные скобки внесен порядковый номер книги из приложенного списка литературы.

Подходя к исследованию проблем обучения математике всесторонне, возможно обнаружить недостатки общепринятой ныне системы обучения и найти научно обоснованные, эффективные способы и приемы обучения, используя которые можно избежать голой рецептурности, которая нередко встречается в методической литературе.

Совокупность математических понятий, связь между ними относится к предмету математики, а методика математики изучает процесс формирования математических понятий и связей между ними, выявляет наилучшие способы передачи, закрепления знаний и последующего применения их.

Методика математики не может ограничиваться в своей теории понятиями и средствами формальной логики, рассматривающей мышление в статическом плане, с точки зрения результатов мышления; условием успешного развития методики математики является то, чтобы она опиралась на диалектическую логику, поскольку последняя отражает закономерности процесса мышления.

Одно из важных условий успешного овладения наукой заключается в выявлении основного элемента науки, который должен быть наиболее абстрактным и в то же время потенциально содержащим в себе главные противоречия рассматриваемой области явлений (примерами могут служить: понятие «товар» в политэкономии, понятие «энергия» в физике, понятие «ассоциация» в психологии и т. п.).

Ленин писал, что важно найти и уцепиться за такое звенышко, «которое всего меньше может быть выбито из рук..., которое всего более гарантирует обладателю звенышка обладание всей цепью» (см. [3], стр. 469).

Выявление основного элемента определенной науки позволяет, сосредоточив усилия исследователей на всестороннем анализе этого элемента, построить логически строгую систему изучаемой отрасли.

В качестве такого основного элемента методики математики, на наш взгляд, следует взять понятие *математическое упражнение*[1] в самом широком значении этого слова.

И действительно, всякое исследование по методике математики в конце концов сводится к упражнениям: к выяс-

---

[1] Мы не претендуем на окончательность решения данного и некоторых других вопросов. В настоящее время важна уже сама постановка этих вопросов.

нению принципов классификации их, разнообразия их форм и содержания, к вопросу о последовательности их выполнения, о приемах работы над ними и т. д.

Усвоение математики осуществляется в процессе выполнения упражнений, а поэтому и развитие методики математики идет по пути внедрения новых форм и видов математических упражнений, вызывающих у школьников большую мыслительную активность.

В настоящее время трудно утверждать, что общие вопросы методики математических упражнений решены достаточно основательно.

В самом деле, большинство методических исследований обычно не идет дальше рассмотрения методов изучения отдельных разделов математики или даже отдельных тем того или иного предмета («Методика изучения умножения дробей», «Методика геометрических построений» и т. п.).

Обсуждая вопрос о методах изучения науки, нельзя не вспомнить следующего указания В. И Ленина о важнейшем условии успешности познания вообще:

«Чтобы действительно знать предмет, надо охватить, изучить все его стороны, все связи и «опосредствования». Мы никогда не достигнем этого полностью, но требование всесторонности предостережет нас от ошибок и от омертвения» (см. [2], стр. 72).

В работе над математическим упражнением (задачей) отчетливо выделяются три последовательных и взаимосвязанных этапа:

а) составление математического упражнения;

б) выполнение упражнения;

в) проверка (или контроль) ответа.

В существующей практике обучения *ограничиваются* большей частью вторым из указанных этапов (то есть одним из трех этапов работы над упражнением).

Есть основания сомневаться в непогрешимости этого традиционного подхода. Развитию мышления учащегося наносится ущерб тем, что в системе обучения уделяется непропорционально мало внимания первому и третьему из указанных этапов работы над упражнением.

Даже рассматривая вопрос обучения только с обычной, более ограниченной позиции — выработки умения *решать* определенные виды задач, мы приходим к выводу о необходимости включать в учебную работу школьника *деятельность, адекватную* (тождественную) *той, которая заключе-*

на в задаче (см. [37], стр. 453); в задаче же заключена прежде всего деятельность по ее составлению, а не только деятельность по ее решению, являющаяся логически второй ступенью, следующей за деятельностью по составлению задачи.

До последнего времени в нашей школе применение математических знаний сводилось к решению задач, в которых математический вопрос уже сформулирован ее составителем. А на производстве, в жизни от человека требуется умение применять математику без посредства задачника и учителя.

Задачи, решаемые командирами производства, новаторами, рационализаторами, таковы, что для достижения поставленной цели важно уметь подобрать самим оптимальные величины, учесть зависимости, неизвестные факторы, самим сформулировать вопросы и проблемы.

Одним из способов «проектирования» этого психологического качества ума будущего строителя коммунистического общества является составление задач учениками на уроках, причем, естественно, что в начале *образцами для такого элементарного творчества детей* должны служить *типичные школьные упражнения.*

Рассматривая вопросы методики, важно далее учитывать неразрывную связь между анализом и синтезом в процессах мышления.

Нельзя при этом упускать из виду того, что классики марксизма отмечали ограниченность, односторонность аналитического метода, если он применяется в отрыве от синтетического метода или в недостаточной связи с последним (см. [40], стр. 194; [4], стр. 180—181).

Сложившаяся ныне система обучения по существу исходит из того представления, что будто аналитическому и синтетическому методу познания можно научить, не изменяя радикально структуры самих упражнений, лишь постепенно усложняя задачи, конструирование которых попрежнему будет выполнено учителем или автором задачника.

Однако, по словам В. И. Ленина: «Это вовсе не «дело нашего произвола» применять-ли аналитический или синтетический метод (как обычно говорят) — это зависит «от формы самого подлежащего познанию предмета, от которой и зависит» (см. [1], стр. 225).

Не выходя за пределы решения готовых задач, ученики не смогут достаточно успешно овладеть основными приемами анализа и синтеза в их взаимосвязи.

Приведение в соответствие анализа и синтеза происходит, в частности, тогда, когда совершается «*полный цикл*», то есть когда ученик будет не только решать (анализировать) готовое условие задачи, но и синтезировать (составлять) *свою* задачу, завершая этот процесс решением составленной задачи.

2. Взаимно обратные связи как существенные внутренние связи в содержании математики

Методы обучения в значительной степени зависят от существенных внутренних связей соответствующей научной дисциплины.

В качестве таких связей в математике должны быть приняты прежде всего так называемые взаимно обратные связи.

Для подтверждения этой точки зрения обратимся к некоторым фактам из истории математики.

Историческими исследованиями установлено, что в математике обращение ранее известной операции приводило к качественно новой операции, более сложной по содержанию.

Так, вначале умели выполнять лишь прямые операции над рациональными числами ($3 \cdot 5 - 4 = \square$); поскольку действия здесь выполнялись в том порядке, в каком они зафиксированы в данной записи, постольку они не выходили за пределы арифметики.

В результате решения данного арифметического примера получается ответ 11 ($3 \cdot 5 - 4 = 11$).

С возникновением мысли об *обращении* этих действий, (когда один из компонентов становится неизвестным, а результат входит в условие примера) возникает качественно новое образование — уравнение. (Заменив в предыдущем тождестве число 5 буквой x, получим уравнение первой степени $3x - 4 = 11$.)

Уравнения в дальнейшем «оторвались» от собственно арифметики, получили самостоятельное развитие и обобщение: возникла наука алгебра.

В шумеро-вавилонской математике даже не было специального термина, который выражал бы действие деления:

деление у них сводилось к умножению на обратное число ([12], стр. 76).

Профессор К. А. Рыбников в своей книге «История математики» указывает, что внутренней причиной открытия и развития математического анализа было исследование «обратных задач на касательные» и выявление взаимообратности задач на дифференцирование и интегрирование ([59], стр. 184).

Русский математик Н. Г. Чеботарев писал: «Для того, чтобы каждая задача могла считаться вполне решенной, необходимо решать или, по крайней мере, точно формулировать сущность задачи, ей обратной» ([67], стр. 4).

Фридрих Энгельс подчеркивал, что каждое вычитание $a - b$ можно изобразить как сложение $[a + (-b)]$, каждое деление $\frac{a}{b}$ как умножение $a \cdot \frac{1}{b}$. Эти возможности видоизменения действий соответствуют законам диалектики.

Далее он указывал:

«*И это превращение из одной формы в другую, противоположную, вовсе не праздная игра, — это один из самых могучих рычагов математической науки*». ([4], стр. 224; подчеркнуто мною. — *П. Э.*)

Переходы от одной формы математического выражения к другой, двусторонние связи, существующие между парами действий, операций, будучи «самыми могучими рычагами в *математике*», неизбежно должны быть также определяющими и в системе методов *обучения* математике. Исходя из сказанного, можно утверждать, что в математике как ни в одном другом учебном предмете, всесторонне проявляется связь между прямыми и обратными процессами мышления, а все содержание этой науки основывается на связях между противоположными понятиями, на сочетании взаимно обратных преобразований.

3. Роль прямых и обратных связей (ассоциаций) при изучении математики

Одним из основных понятий психологии является понятие «ассоциация», под которой разумеют связь между представлениями или мыслями.

Советский психолог П. А. Шеварев характеризует это понятие следующим образом:

Ассоциация обозначает такую приобретенную (условную) связь между двумя психологическими процессами у человека, в силу которой протекание первого процесса является причиной или одной из причин протекания второго процесса.

«В моменты, когда ассоциация не проявляется, она существует как некоторый «след» в коре полушарий. Когда ассоциация проявляется, этот «след» переходит в некоторое деятельное состояние» ([73], стр. 280).

Таким образом, физиологической основой ассоциаций является временная связь нервных центров коры головного мозга.

Рассмотрим примеры некоторых ассоциаций.

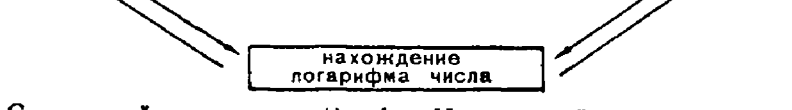
Первоклассник воспринимает написанный на доске пример $2 + 3 = \square$ (первый член ассоциации); затем он называет результат — число 5 (второй член ассоциации).

Если же он разлагает число 5 на слагаемые: $5 = 2 + 3$ («пять состоит из двух и трех»), то это звено в цепи умозаключений можно назвать обратной связью (обратной ассоциацией).

Точно так же переход от сложения к вычитанию ($6 + 4 = 10$; $10 - 4 = 6$), от умножения к делению ($2 \cdot 6 = 12$; $12 : 6 = 2$), от прямой теоремы к обратной и т. п. основан на возникновении прямых и обратных связей (ассоциаций).

Еще пример.

Поступающий в вуз вычисляет $2^5 = 32$. Ему предложено три числа 2; 5; 32 связать двумя другими способами: $\square = 2$; $\square = 5$. Установить предложенную связь между данными числами с привлечением понятий извлечения корня ($\sqrt[5]{32} = 2$) и логарифмирования ($\log_2 32 = 5$) оказалось для него трудным. Этот человек знает *порознь* каждую операцию (что и подтвердилось в данном опыте), но из этого еще не следовало, что они у него соединены взаимно обратными связями вида:



Советский психолог В. А. Крутецкий в своем исследовании [34] считает основными способностями к усвоению математики следующие:

1) способность к быстрому и широкому обобщению математического материала;

2) способность к быстрому «свертыванию», сокращению процесса рассуждения и системы соответствующих действий при решении математических задач;

3) способность к быстрому и свободному переключению на обратный ход мысли в процессе изучения математического материала. Эти три вида способностей тесно связаны друг с другом.

Если, например, ученик умеет легко переходить от решения арифметической задачи отдельными действиями к решению ее посредством формулы, то здесь проявляется как способность к обобщению, так и способность к свертыванию процесса рассуждения.

Однако, как показывает наше исследование, способность переключения мысли с прямого хода на обратный является, по-видимому, определяющим, исходным элементом математических способностей.

Нет нужды приводить здесь примеры изъянов, связанных именно с неумением учеников переходить от прямого хода мыслей к обратному.

Ограничимся лишь одним, но весьма показательным: по результатам контрольных работ, проведенных АПН РСФСР в школах Российской Федерации в 1962 году, 48% десятиклассников не сумели определить значение функции по графику, хотя прямая задача — построение графика по точкам — для них является тривиальной [41].

Известно много случаев противоположного характера, когда наличие упражнений обратной структуры содействовало улучшению качества знаний по математике. Так, например, передовые учителя Липецкой области широко используют деформированные упражнения, решение которых содействует возникновению двусторонних связей [45].

4. Противопоставление как основной дидактический прием при обучении математике

В. И. Ленин в «Философских тетрадях» подчеркивает следующую мысль:

«Природа умозрительного мышления ... состоит исключительно в понимании противоположных моментов в их единстве» ([1], стр. 112). И далее добавляет: ядро диалектики — единство и борьба противоположностей.

Обнаружение противоречивой сущности предмета (явления) предполагает *одновременное* рассмотрение полярно-противоположных частей (сторон) его; если же эти части (стороны) рассматриваются раздельно, то связи между ними не могут быть познаны столь глубоко и основательно, как в первом случае.

Такая общефилософская постановка вопроса смыкается с результатами исследований в частных науках.

Так, например, в физиологии установлен факт повышения чувствительности нервной ткани к *противоположному* раздражителю, который непосредственно следует за первым, то есть во время торможения нервных процессов, связанных с первым раздражением ([21], стр. 22).

О физиологической природе прямых и обратных связей в мышлении говорит И. П. Павлов в одной из своих незавершенных работ. В ней сказано, что если два нервных пункта связаны, объединены, то нервные процессы двигаются, идут между ними в обоих направлениях ([46], стр. 185).

В известных границах допустимо рассматривать предъявление обратной задачи ($5 + \square = 9$ или $9 - 5 = \square$) после разбора прямой задачи ($5 + 4 = \square$), как некоторые противоположные раздражители.

Естественно при этом ожидать, что обратная задача будет решена наилучшим образом тогда, когда она попадет в фазу наибольшей чувствительности нервной системы к противоположному по качеству раздражителю (это же случится при условии, когда обратная задача рассматривается вслед *за прямой без большого промежутка* времени между ними).

И. П. Павлов открыл, что наилучшим методом выработки временных связей является перемежающееся противопоставление раздражителей[1].

Об этом он писал так:

«Как же происходит специализация условного раздражителя, дифференцирование внешних агентов? Сначала нам

---

[1] Вспомним, что методом противопоставления добиваются исключительно тонкого различения (дифференцирования) раздражителей. Собаки приучались различать частоты в 96 ударов и 100 ударов в минуту, формы круга и эллипса с отношением полуосей 8 : 9, интенсивности освещения экранов с разницей в 2% и т. п.

казалось, что здесь имеют место два приема. Один — это только многократное повторение определенного агента в качестве условного раздражителя с постоянным подкреплением безусловным рефлексом. Другой — перемежающееся противопоставление этого определенного ... условного раздражителя с близким к нему агентом. *В настоящее время мы склонны признавать действительность только последнего приема.*

С одной стороны, мы имели условные раздражители, повторенные тысячекратно, и которые, однако, через это одно не делались узкоспециализированными.

С другой — было замечено, что даже однократная проба каждого из родственных агентов без подкрепления и редкое (через дни и даже недели) такое же (то есть без подкрепления) применение ряда их (каждый раз все нового агента), при повторениях с подкреплением основного условного раздражителя, ведет, однако, к специализированию его» ([46], стр. 129—130; подчеркнуто мною. — *П. Э.*) Эта закономерность является важнейшей для нервной деятельности человека, ибо, как указывал И. П. Павлов, противопоставление облегчает, упорядочивает наше здоровое мышление.

Из практики обучения известно, что одним из наиболее распространенных типов ошибок являются ошибки подмены понятия противоположным ему понятием: вместо увеличения числа (умножения) уменьшают его (делят); при составлении уравнения по условию задачи вместо знака (+) пишут знак (—) и т. п.

Чтобы преодолеть этот недостаток, многие учителя и методисты идут по пути разделения во времени на почтительное расстояние взаимообратных задач, то есть по пути, *отвергнутому* И. П. Павловым.

Советские психологи, опираясь на учение И. П. Павлова, доказали целесообразность использования метода противопоставления при обучении в школе (Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [8]; Ю. А. Самарин [60]; Н. Е. Кабанова-Меллер [22] и др.).

Метод *раздельного* изучения взаимообратных понятий и операций в математике возник и утвердился задолго до работ И. П. Павлова.

Физиологическое учение И. П. Павлова лишь в последнее время становится реально «естественнонаучной основой» психологии и педагогики. Перестройка методики обучения на основе новейших данных психологии — как всегда в подобных крутых поворотах научной и практической мысли — совершается не без борьбы мнений, не без ломки привычных установившихся приемов и взглядов.

Типичной в методах обучения математике все еще остается недооценка метода противопоставления.

Авторы многих методических пособий открыто (а в большинстве случаев молчаливо) исходят из того, что взаимно обратные понятия и операции разъясняются детям не одновременно, не совместно, а раздельно и в разное время ([31], стр. 22).

Лишь в немногих работах попутно приводятся данные о положительных результатах применения противопоставления при изучении тех или иных разделов математики ([13], [24], [32], [43], [50], [53]).

Одновременное изучение взаимно обратных действий в младших классах в свое время осуществил Л. Н. Толстой в организованной им школе в Ясной Поляне

Преимущества одновременного изучения арифметических действий отмечал также известный русский методист В. Латышев, который указывал, что при этом ученик как бы *опережает* ход мысли учителя, догадываясь о новых соотношениях помимо объяснений учителя [36].

Пусть, например, одновременно рассматриваются во II классе умножение и деление по содержанию и вычислены следующие результаты:

$$\text{по } 6 \cdot 3 = 18 \qquad 18 : \text{по } 6 = 3$$

$$\text{по } 6 \cdot 4 = 24 \qquad 24 : \text{по } 6 = 4$$

. . . .

После выполнения этих упражнений и вычисления одного примера следующей пары упражнений (по $6 \cdot 5 = 30$) ученики *предвосхищают* будущие суждения и самостоятельно извлекают совершенно новую для них информацию:

$$30 : \text{по } 6 = 5.$$

Данное явление имеет фундаментальное значение, ибо свертывание, ускорение мыслительных процессов, имеющее место при применении этой методики, оказывается конечной причиной значительной экономии времени при одновременном изучении взаимно обратных действий, операций задач, теорем, функций[1] и т. п., по сравнению с раздельным изучением их.

Правильное применение противопоставления опирается на выявление путем логического анализа двусторонних *связей* противопоставляемых действий (операций). Существенно важно при этом показать ученикам, что обратное действие есть видоизмененное прямое действие, другая форма той же операции. Говоря иначе, результат обратного действия есть *следствие* прямого, поэтому надежнее, экономнее *обе операции с их результатами запоминать одновременно в тесной связи*, как звенья одной цепи умозаключений.

Прямое и обратное действие в этом случае оказываются двумя формами, заполненными единым *содержанием*.

Противопоставление — основа развития причинно-следственного мышления.

В связи со сказанным понятно, как важно строить обучение математике на использовании *пар* взаимно связанных по структуре определений, правил, суждений вообще.

Пусть «единства противоположностей» прочно войдут в сознание ученика и станут основой для понимания двойных определений, правил. Например:

1. Взаимно простыми числами называются два или несколько натуральных чисел, которые не имеют общего для всех их множителя, отличного от единицы.

Взаимно составными числами называются такие натуральные числа, которые имеют общий для всех множитель, отличный от единицы.

2. Чтобы умножить (разделить) степени с одинаковым основанием, достаточно в произведении (частном) записать то же основание с показателем, равным сумме (разности) показателей в сомножителях (делимого и делителя) и т. п.

Первый этап противопоставления взаимно обратных операций, как показывают наши наблюдения, должен сводиться к изменению формы *при сохранении числовых данных*, компонентов:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5}$$

(сложение и вычитание дробей);

[1] Интересно отметить, что этот момент перекликается с тезисом советского физиолога П. К. Анохина, утверждающим, что характерной особенностью нервной системы, возникшей в ходе эволюции живой природы, является способность о п е р е ж а ю щ е г о о т р а ж е н и я д е й с т в и т е л ь н о с т и. См. [7].

$$\frac{3}{7}\cdot 2=\frac{3\cdot 2}{7}=\frac{6}{7} \quad \text{и} \quad \frac{6}{7}:2=\frac{6}{7\cdot 2}=\frac{3}{7}$$

(умножение и деление дроби на целое число);

$$2ab^2\cdot 8a^3=16a^4b^2 \quad \text{и} \quad 16a^4b^2:2ab^2=8a^3$$

(умножение и деление одночленов) и т. п.

Упражнения на первом этапе удовлетворяют требованию разделения трудностей: изменение формы при сохранении содержания позволяет осмыслить один и тот же материал с двух точек зрения.

При раздельном изучении взаимно обратных действий одновременно изменяются и форма и содержание.

В этом случае ученик схватывает в основном различие действий и их результаты, но не *переходы* от одного к другому; между тем именно последнее является наиболее важным для развития мышления.

После решения нескольких пар упражнений с соблюдением последовательности: прямое действие, затем обратное—надо предложить выполнить сначала обратную операцию, а потом — прямую

($24x^3y:3xy=$) и затем проверить ответ прямой операцией ($8x^2\cdot 3xy=24x^3y$).

Это второй этап.

Третий этап — это решение упражнений, в которых последовательность прямых и обратных операций идет без определенного порядка, причем проверяются обращением операции лишь в отдельных случаях (преимущественно устно).

Указанные выше три этапа упражнений имеют в определенной мере *общее* значение: оказывается, что и в случае решения *задач* целесообразно идти во многих случаях тем же путем, а не относить взаимно обратные задачи к различным годам обучения, или же вообще упускать из виду некоторые из обратных задач, что нередко встречается в современной программе.

Продуктивность одновременного изучения двух взаимно связанных вопросов можно *образно* сравнить с эффективностью стереоскопического зрения (видения двумя глазами).

Одновременное осмысливание взаимно обратных операций основано на функционировании большого числа нервных клеток; поэтому усвоение материала совершается при более полном использовании познавательных возможностей по сравнению с раздельным изучением этих операций.

И. П. Павлов писал, что «наши контрастные переживания есть, конечно, явления взаимной индукции»[1] ([47], стр. 373).

При противопоставлении контрастные понятия осознаются одновременно.

Стало быть, эффективность методики, построенной на противопоставлении, имеет физиологической основой оптимальное использование нервной системы, работающей по закону взаимной индукции.

Можно полагать, что после выполнения одного действия (например, $a^5 \cdot a^2 = a^7$) *само собой* возникает особая подготовленность нервной системы к осмысливанию противоположного действия ($a^7 : a^2 = a^5$). Решение второго примера вслед за первым означает проявление «заготовленного заранее» своеобразного механизма нервной деятельности (см. [6], [7]).

Эффективность дидактического приема противопоставления объясняется тем, что при этом создаются благоприятные условия для возникновения прямых и обратных ассоциаций; последние же в свою очередь имеют тесную связь с процессом свертывания, возникновения так называемых «обобщенных» или «правилосообразных» ассоциаций [73].

Так, например, после вывода правила умножения и деления степеней с общим основанием ($a^5 \cdot a^2 = a^{5+2}$ и $a^7 : a^2 = a^{7-2}$) неизбежно возникают следующие сдвоенные и обобщенные связи: «умножение степеней $\rightarrow$ сложение показателей, а деление степеней $\rightarrow$ вычитание показателей»; иногда даже может выпасть употребление самих понятий «основание», «показатель», и решение таких примеров ста-

---

[1] Согласно учению И. П. Павлова, понятие взаимной индукции заключается в следующем: при работе клеток мозга одного участка одновременно возникает возбуждение или торможение и в других частях мозга.

В этой связи показателен один классический опыт.

Было найдено, что в случае предъявления одного из двух слов противоположного смысла в подавляющем большинстве случаев называлось парное ему слово (вверх—вниз, плюс—минус, мать—отец, прибавить—отнять и т. п.) ([14], стр. 573). По-видимому, такие парные понятия «хранятся» в «кладовых» памяти вместе, почему и проявляются одновременно.

нет автоматическим, основываясь на проявлении еще более кратких, свернутых связей:
«Точка между выражениями → сложение чисел верхнего ряда (2 + 3), а двоеточие между выражениями → вычитание чисел верхнего ряда (5 — 2)».

При одновременном изучении контрастных или сходных понятий, операций, кроме противопоставления полных, логически завершенных правил, важно обратить внимание учеников и на сопряженность отдельных деталей, элементов контрастных операций[1].

Если не руководить свертыванием процесса мышления, как показывает практика, могут возникнуть и ошибочные ассоциации несущественных признаков [39]; [73].

Методика обучения должна учитывать как тенденцию к уменьшению времени переработки информации, так и необходимость упражнений, рассчитанных на развертывание умозаключений, то есть на выявление логических основ сокращенных связей.

Чтобы добиться последнего, уместно предлагать наряду с упражнениями вида $a^5 \cdot a^2$ упражнения деформированные (вида $a^2 \cdot a^{\boxed{?}} = a^7$); возникшая ситуация затруднения преодолевается посредством развертывания, то есть воспроизведения в сознании исходного правила полностью.

При существующей системе обучения знания у ученика наслаиваются как бы в одном направлении—вверх; если строить обучение на основе противопоставления, то возникают связи в двух направлениях: не только по вертикали (на основе обобщения), но и по горизонтали (на основе обращения[2]).

---

[1] Сравните со следующим выводом биокибернетического исследования: «Чем больше число элементарных признаков, по которым производится выбор, тем меньше вероятность ошибки и надежнее опознание».

В. Д. Глезер и др., Об опознании образов в зрительной системе, «Биологические аспекты кибернетики», изд. АН СССР, 1963, стр. 172.

[2] В данной работе под **обращением** мы понимаем прием составления новых упражнений посредством замены ролями некоторых данных условия и заключения.

В логике под обращением принимают такое же преобразование суждения, причем новые суждения должны быть истинными одновременно с исходным суждением.

Система одновременного изучения взаимно обратных действий основана именно на многократном применении логической операции обращения, которая относится к так называемым непосредственным умозаключениям.

Схематически соотношения связей в первом и втором случаях для частного случая можно изобразить так:

$$\begin{array}{|c|}\hline \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\; \\ \hline \end{array}$$
$$\uparrow$$
$$\begin{array}{|c|}\hline 8b^6c^3 : 2bc^2 \\ \hline \end{array}$$
$$\uparrow$$
$$\begin{array}{|c|}\hline b^6 \cdot b^2 \\ \hline \end{array}$$
$$\uparrow$$
$$\begin{array}{|c|}\hline \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\; \\ \hline \end{array}$$
$$\uparrow$$
$$\begin{array}{|c|}\hline 3a^2x \cdot 2a^4 \\ \hline \end{array}$$
$$\uparrow$$
$$\begin{array}{|c|}\hline a^2 \cdot a^3 \\ \hline \end{array}$$

Раздельное изучение умножения и деления одночленов.

. . . . .	$\longleftrightarrow$	. . . . .
$\uparrow$		$\uparrow$
$4a^3 \cdot 2ab$	$\longleftrightarrow$ обращение	$8a^4b : 4a^3$
обобщение $\uparrow$		$\uparrow$ обобщение
$a^2 \cdot a^3$	$\longrightarrow$ обращение	$a^5 : a^3$

Одновременное изучение умножения и деления одночленов.

Система раздельного изучения взаимосвязанных явлений *обедняет* связи между представлениями, а система одновременного изучения обогащает такие связи.

При одновременном изучении обеих операций на основе противопоставления целесообразно предлагать обратных и деформированных примеров больше, чем прямых.

Это вызвано тем, что выполнение обратной операции связано с проверкой, выполняемой посредством обращения. В этом смысле обратная операция включает в себя прямую.

Раздельному изучению взаимно обратных операций в старших классах присущ и такой недостаток: введение обратной операции сопровождается при этом так называемым доказательством; например, формула извлечения корня из произведения, частного и т. п. особо выводится посредством проверки прямой операцией — возведением в степень.

При введении обратной операции *одновременно* с прямой операцией дело обстоит иначе: если сразу после решения примера $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$ мы объясняем обратную операцию $\sqrt[3]{a^6} = a^{6 : 3} = a^2$, то необходимость специального доказательства отпадает, ибо оно осуществляется в форме проверки, так как второе суждение выступает сразу в форме следствия первого суждения.

Чем раньше начато применение метода противопоставления при обучении, тем больше эффект, получаемый от него.

Применение противопоставления не должно проходить эпизодически: в любом классе имеются возможности использования этого метода.

5. О перспективах применения метода противопоставления

Некоторые изменения, внесенные в порядок изучения математического материала, оказались целесообразными, так как обеспечили более раннее установление связей между родственными темами (например: параллельное изучение действий над радикалами и степенями с дробными показателями, изучение признаков равенства треугольников и соответствующих задач на построение треугольника и др.).

Однако в программе каждого класса можно найти такие группы взаимосвязанных вопросов, взаимно обратных или сходных задач, которые в настоящее время лишь по традиции изучаются раздельно. По характеру мыслительных процессов, на которых основывается изучение таких взаимосвязанных разделов, они совершенно сходны, поэтому важно обсудить вопрос о возможностях изучения этих тем в плане противопоставления и сопоставления.

а) Целесообразно изучать одновременно *прямые и обратные действия и операции*, как-то: сложение и вычитание; умножение и деление; возведение в степень и извлечение корня; заключение в скобки и раскрытие скобок; логарифмирование и потенцирование и т. п.

При изучении арифметики в младших классах следует смелее и шире использовать этот прием, например, изучая раздробление и превращение именованных чисел; нахождение части числа и числа по его части; задачи на уменьшение и увеличение числа в несколько раз (на несколько единиц) и т. д.

В действующих программах во многих случаях допущен отрыв задачи от обратной ей: например, нахождение одной части числа изучается во II классе, а обратная задача — нахождение числа по величине его доли — в IV классе. Мы установили на опыте, что вполне доступно и целесообразно рассматривать эти две задачи на одних и тех же уроках уже во II классе.

Экспериментальное обучение, проведенное нами совместно с учителями школ г. Ставрополя, убедительно показывает, что перегруппировка материала I—V классов и систематическое применение противопоставления позволяют экономить в каждом классе до 15—20% учебного времени при значительном улучшении знаний учащихся и знакомстве их с большим дополнительным материалом[1].

В настоящее время тождественные преобразования в начальном курсе алгебры изучаются по трем разобщенным во времени разделам: действия над одночленами и многочленами (VI класс); разложение на множители (VII класс); действия над алгебраическими дробями (VII класс).

Имеются веские данные для утверждения, что значительно более выгодным является слияние этих разделов в единой теме «Тождественные преобразования», что позволило бы одновременно рассматривать в едином цикле все возможные формы связей между алгебраическими выражениями, по следующим этапам:

1) $2a^5 \cdot 3a^2 = 6a^7$; $6a^7 : 3a^2 = 2a^5$; $6a^7 = 3a^2 : 2a^5$; $\frac{6a^7}{3a^2} = 2a^5$;

$\frac{3a^2}{6a^7}$; $\frac{4a^3}{5b^2} \cdot \frac{10b}{a^2}$; $\frac{4a^3}{5b^2} : \frac{a^2}{10b}$; $\frac{2a}{3b} + \frac{5b}{a^2}$; $\frac{a^2}{6b} - \frac{3}{4ab}$.

---

[1] Следует заметить, что после наших публикаций (1962 г.) появились сообщения других авторов о преимуществах методики одновременного изучения взаимно обратных операций, как-то: Т. К. Жикалкиной («Начальная школа», 1963, № 1); З. Петровой и К. Васильевой («Учительская газета» от 5/III 1963 г.); К. Е. Горпинича («Учительская газета» от 27/VII 1963 г.); Б. Коротеева («Народное образование», 1964, № 5); Р. А. Хабиба («Начальная школа», 1964, № 5) и др.

Положительное заключение об этой методике было высказано также в редакционной статье «Практики сказали — да», напечатанной в «Учительской газете» от 3/VIII 1963 г.

2) $(a-2b)\cdot c = ac-2bc$; $ac-2bc = c\ (a-2b)$;

$$\frac{ac-2bc}{c}=\frac{c\ (a-2b)}{c}=a-2b;\quad \frac{ac-2bc}{a-2b}=\frac{c\ (a-2b)}{a-2b}=c.$$

Все действия над алгебраическими дробями с соответствующими числителями и знаменателями.

3) Умножение многочлена на многочлен; разложение многочлена на множители группировкой; все действия над алгебраическими дробями с соответствующими членами.

4) Формулы сокращенного умножения и разложения на множители; все действия над соответствующими алгебраическими дробями.

$$(x-2y)\ (x+2y)=x^2-4y^2;$$

$$x^2-4y^2=(x-2y)(x+2y);\quad \frac{x^2-4y^2}{x+2y}=x-2y \text{ и т. п.}$$

Достойна также внедрения в практику методика одновременного изучения взаимно обратных операций на логарифмической линейке и по таблицам (умножение и деление, возведение в квадрат и извлечение квадратного корня, нахождение числа по его логарифму и нахождение логарифма числа и т. д.).

Во второй части данной книги изложена методика обучения арифметике в V классах, основанная на одновременном изучении взаимно обратных действий.

Здесь мы приведем конкретные данные лишь одного эксперимента.

В VA классе средней школы № 6 г. Ставрополя было осуществлено одновременное изучение темы «Нахождение части от числа и числа по его части».

В конце первого полугодия в опытном классе и в контрольных классах была проведена проверочная работа, содержащая задачу:

В первый день убрали 300 *га* посевов. Площадь, убранная в первый день, составила $\frac{6}{7}$ площади, убранной во второй день. В третий день убрали $\frac{4}{5}$ площади, убранной во второй день. Сколько гектаров посевов убрали в третий день?

Решение данной задачи требует четкой дифференциации двух взаимно обратных задач, причем задачи, подобные данной, с учениками ранее не решались. А поэтому нельзя было ожидать, чтобы все ученики решили данную задачу.

Приводим результаты контрольной работы:

Таблица 1

Класс	Школа	Всего писало	Правильно решили	
V А	(школа № 6)	33	19	Экспериментальный класс
V Д	(школа № 6)	32	23	
V Е	(школа № 6)	35	8	Контрольный класс
V А	(школа № 2)	32	2	Обычный »
V Б	(школа № 2)	32	2	» »

Более высокие результаты учеников опытного класса могут быть объяснены только преимуществами методов противопоставления. Характерно, что в V Д классе школы № 6, где уроки проводились студентом-практикантом по нашей методике, были получены также высокие показатели (23 из 32). Результаты проверки указывают на различие в общем развитии мышления учеников при разных методах работы.

При раздельном изучении взаимно обратных операций ученики длительное время решают однородные задачи на основе одного правила и потому создается *видимость* успешного усвоения материала. Но после того, как пройдены обе операции, ученик при решении любой задачи из данных двух типов должен уметь правильно выбрать один из двух возможных вариантов рассуждения. Тут-то и обнаруживается дефект обучения: пока дети изучали каждую тему порознь, они не встречались с необходимостью выбора и соответствующее умение у них не было выработано. Поэтому и возникают массовые ошибки подмены одного действия другим.

Иное дело при одновременном изучении этих задач: здесь с самого начала ученик рассматривает различие и сходство задач разного вида, овладевает надежными приемами их дифференциации.

б) При обучении математике важно сравнивать противоположные понятия, рассматривая их одновременно: прямая и обратная теорема; прямая и противоположная теорема; прямая и обратная функция (в частности, показательная и логарифмическая функция; тригонометрическая и обратно-тригонометрическая функция); периодические и непериодические функции; возрастающие и убывающие функции; неопределенные и определенные уравнения (системы); непротиворечивые и противоречивые уравнения, неравенства (и их системы); прямые и обратные задачи вообще (в тригонометрии: задачи на нахождение угла по значению тригонометрической функции и наоборот; в арифметике: задачи на прямую и обратную пропорциональную зависимость и т. п.[1])

В связи с этим отметим, как неоправданный, порядок изучения теорем, применяемый в книге Н. Н. Никитина «Геометрия», Учпедгиз, 1961 г. В этом учебнике в теме «Параллелограмм» сначала рассматриваются все прямые теоремы (свойства параллелограмма), а затем даны все обратные теоремы (признаки параллелограмма).

К тому же автор данного учебника к некоторым прямым теоремам этого параграфа не поместил обратных теорем и, наоборот, отдельным *признакам* параллелограмма не противопоставил соответствующие *свойства* параллелограмма.

В теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника» (§ 30) теоремы даны без названий «прямая теорема» и «обратная теорема».

Отсутствие противопоставления в подобных случаях отрицательно сказывается на развитии логического мышления учащихся.

в) Можно сопоставлять родственные или аналогичные понятия, как-то: уравнения и неравенства; арифметические и геометрические прогрессии, одноименные законы и свойства действий первой и второй ступени (в арифметике) и т. п.

г) Можно сопоставлять этапы работы над упражнением, способы решения: решение и проверку решения, решение и составление упражнения, графическое и аналитическое решения системы уравнений, построение графиков переносом графика и переносом осей координат, аналитический и синтетический способы доказательства теорем, решения задач, аналитический и синтетический способы составления уравнений, неравенств и т. п.

Некоторые методисты придерживаются того мнения, что два принципиально различных способа: скажем, раздельное и одновременное рассмотрение взаимосвязанных тем — дидактически равноценны ([10], стр. 163).

---

[1] Если по тем или иным причинам изучение сопряженных вопросов было осуществлено раздельно, полезно сравнивать их хотя бы при повторении, систематизации знаний, перестраивая прямую задачу в обратную и наоборот.

Нельзя согласиться с этим взглядом, ибо при нем притупляется острота постановки вопроса, отпадает проблема выбора лучшего из двух путей.

В литературе существует понятие *совместное*, или *параллельное*, изучение разделов математики, под которым разумеют такой порядок, когда взаимосвязанные действия сближаются во времени, но рассматриваются на *разных* уроках: скажем, один день изучают умножение трех, на следующий день — деление по три (II класс).

Хотя такой вариант и лучше варианта с разрывом изучения взаимно обратных операций на бо́льшее время (скажем, на неделю), его нельзя считать осуществлением принципа противопоставления.

Термин *одновременное изучение* подчеркивает ту мысль, что между решениями взаимосвязанных примеров или задач (например, $3 \cdot 4 = 12$ и $12 : 3 = 4$) должно пройти не больше чем несколько минут или даже секунд, а не сутки; причем этот промежуток времени нельзя заполнять какой-либо другой работой мысли; это объясняется тем, что для закрепления ассоциации необходимо, чтобы психические процессы, являющиеся первым и вторым членом данной ассоциации, непосредственно следовали один за другим.

Разумеется, это вовсе не исключает того, что в отдельных случаях при введении новых трудных понятий может быть целесообразным *один-два* урока (не больше!) посвятить ознакомлению с содержанием только этого понятия.

Так, например, специально 1—2 урока возможно посвятить введению понятия умножения в I классе (как повторение равных слагаемых) или введению понятия нахождения части числа в V классе.

Однако противоположная операция (деление по содержанию — в I классе, нахождение числа по его части — в V классе) вводится до *закрепления* прямой операции; процесс закрепления, выработка навыков применения этих операций осуществляются в процессе *одновременной* работы над обеими операциями.

В этом заключается то принципиально новое, что вносит последовательное осуществление принципа противопоставления.

Несомненно, что при детальной разработке метода противопоставления возникнут и будут решены многие иные вопросы методики математики (не только школьной), кроме перечисленных выше, например: вопрос об изучении в школе элементов интегрального исчисления в тесной связи с понятиями дифференциального исчисления.

Отметим, что мы далеки от мысли рекомендовать везде и всюду применять противопоставление как самоцель.

Для выяснения возможностей применения противопоставлений в тех или иных классах, по тем или иным темам требуется конкретное изучение вопроса, нужны усилия широкого круга учителей; метод противопоставления должен быть разработан в деталях.

Весьма успешным оказался наш опыт построения в пединституте курса лекций по элементарной и аналитической геометрии, в котором все парные, аналогичные предложения, относящиеся к плоскости и пространству, излагались на одном занятии, записывались параллельно (геометрические преобразования, геометрические места точек, сходные уравнения прямой и плоскости, линий и поверхностей второго порядка и т. п.).

Мы убедились также в эффективности приема сравнения сходных правил и законов при обучении математике в школе, например: изменение суммы и произведения в зависимости от изменения слагаемого и сомножителя; вычитание от числа суммы и деления числа на произведение и т. п.

Стало быть, по сравнению с системой раздельного изучения, оптимальным по расходу времени и качеству знаний является одновременное изучение как контрастных в некотором отношении вопросов, так и сходных в чем-либо вопросов; в первом случае уместно говорить о методе противопоставления, а во втором — о методе сопоставления.

Результативная общность этих методов — экономия времени — имеет глубокую причину.

Чтобы уяснить эту причину, рассмотрим схему соответствующих процессов мышления.

При раздельном изучении контрастных вопросов сначала возникают связи вида $A \rightarrow B$, а через значительное время обратные связи вида $B \rightarrow A$ (в этих двух формулах 4 буквы и две стрелки — всего 6 знаков).

Эти две связи мыслей не образуют сами по себе новой сложной связи вида $A \rightleftarrows B$, или образуют ее при дополнительных усилиях педагога.

При одновременном изучении этих вопросов сразу вводится связь вида $A \rightleftarrows B$ (две буквы, две стрелки — всего четыре знака).

Связь мыслей, возникающих при раздельном изучении сходных вопросов удобно представить в виде не сливающихся, сосуществующих ассоциаций вида $A_1 \to B_1$ и $A_2 \to B_2$, образовавшихся разобщенно.

Если же эти вопросы рассматривать одновременно, то в итоге возникают ассоциации, изображаемые схемой $A_{1;2} \to B_{1;2}$.

Так, даже в схематическом изображении процессов мышления видно, что при втором варианте расходуется меньше знаков, символов.

Это обстоятельство имеет глубокий смысл, так как в реальном процессе мышления при втором варианте подачи информации уменьшается число расходуемых слов, суждений, то есть при одновременном изучении контрастных, а также и сходных понятий, операций, предложений каждая форма, каждое умозаключение становятся более емкими, включают в себя большую информацию, чем при иных способах обучения.

6. О значении цикличности в системе математических упражнений

В процессе развития кибернетики всесторонне разработано понятие *обратная связь*. Теперь бесспорным фактом считается то, что регулирование на основе обратной связи есть универсальное явление для всех кибернетических систем.

Новейшими исследованиями советских физиологов — учеников И. П. Павлова установлено, что в основе всей психической деятельности находятся циклические, кольцевые процессы, поток информации по замкнутым путям [6].

Характерная особенность кольцевого процесса заключается в том, что он может быть начат с любого звена цепи (цикла) умозаключений.

Анализируя с этих общих позиций систему математических упражнений, можно обнаружить в них два качественно различных вида.

Структура этих упражнений такова, что при выполнении одних из них развиваются навыки в прямолинейном применении правил, выполнение других — неизбежно связано с осуществлением постоянного контроля, проверки каждой операции.

Современные школьные упражнения по математике, как правило, имеют именно первую структуру, что, конечно, не является их достоинством.

Например, в сборнике задач для VI класса предлагается решить один за другим набор примеров вида $(3a - 2b) \cdot (3a + 2b) =$ с постепенным усложнением их.

Характер мыслительных процессов резко изменится, если вместо данного примера предложить деформированный пример вида:

$$(\square - 2b) \cdot (\square + \square) = 9a^2 - \square$$

Проведенные эксперименты говорят, что решение второго примера основывается на поисках недостающих звеньев замкнутого круга умозаключений, путем анализа всей цепи, что превращает мыслительный процесс в более сложный, более содержательный и потому лучше развивающий способности ученика.

Такие задания естественным образом развивают *навыки самоконтроля*, совершающегося непроизвольно и иногда даже неосознанно.

При обычных упражнениях, как известно, самоконтроль очень долго не становится «привычкой», навыком, осуществляемым без напоминания. Причину этого можно усмотреть в том, что решение задачи прямой структуры завершается получением ответа как бы на полуцикле, и этап контроля, проверки возникает лишь при дополнительном требовании («решить и проверить»).

Совсем иное положение при выполнении деформированных упражнений: здесь контроль необходим как часть цикличного процесса.

Таким образом, проблема школьных ошибок — это один из аспектов более общей проблемы *обратной связи в управляющей системе*.

Обращенные задания являются более емкими, чем прямые; выполнение обращенных заданий в большей мере развивает у школьника *умение* выполнять и прямые преобразования, притом наиболее экономным образом: записан один пример, а в процессе решения его испробовано несколько вариантов, решено в сущности не менее 3—4 примеров.

Этим объясняется повышение активности учащихся при выполнении обращенных заданий и соответственно большая результативность решения этих примеров для усвоения материала.

Нелишне отметить, что к систематизации упражнений до сих пор предъявлялись формальнологические требования, то есть в большинстве случаев учитывалось усложнение упражнения без качественного изменения его структуры.

Например, по теме «Возведение в степень» на первых уроках алгебры в VI классе предлагаются упражнения в следующей последовательности нарастания трудности:

$$2^3 = ; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^3 = ; \quad \left(\frac{2}{3}a^3\right)^3 =; \quad (0{,}5xy^3)^2 =$$

и т. д.

Рассмотрим, можно ли предлагать ученикам того же класса по этой теме упражнения иного характера на определение значения x в следующих выражениях:

$$x^2 = a^4; \quad x^2 = 9^2; \quad x^2 = 81; \quad x^2 = 9^2\,a^8; \quad x^4 = 81a^{12}.$$

По форме последнее выражение является уравнением четвертой степени.

Однако шестиклассники успешно и с интересом решают эти уравнения, многократно пробуя и проверяя результат в уме.

Наш опыт показывает полезность достижения циклической полноты системы упражнений, когда неизвестным искомым элементом последовательно выступает каждый член данного выражения (данной задачи).

Так, шестиклассники справляются и с решением уравнения $(5a^2)^x = 125a^6$, хотя оно по форме является показательным уравнением.

Указанный подход помогает добиться не только разнообразия упражнений, но и ведет к лучшему пониманию и усвоению материала по любой теме курса математики.

Приведем несколько примеров.

1) Пусть изучаются в VIII классе уравнения, приводящиеся к квадратным.

Такие уравнения существуют трех видов:

а) Полученные в результате решения уравнения два корня, оба удовлетворяют исходному уравнению. (Уравнению $\sqrt{4x-3} + \sqrt{6-2x} = 3$ удовлетворяют оба корня $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.)

б) Один из полученных корней удовлетворяет исходному уравнению, другой — нет. (При решении уравнения $\sqrt{23-7x}-\sqrt{3x-2}=1$ получаются два корня $x_1=2$ и $x_2=1$, причем последний оказывается посторонним.)

в) Оба значения неизвестного не удовлетворяют исходному уравнению. (Решив уравнение $\sqrt{6-2x}-\sqrt{4x-3}=$ $=3$, получим $x_1=1$ и $x_2=3$, причем оба значения x не удовлетворяют условию.)

Если ученики, скажем, не встречались с уравнением последнего вида (что и бывает на самом деле), то их знания по данному разделу нельзя признать полными.

2) При исследовании значений квадратного корня учащиеся выполняют задание следующего вида:

а) Чему равно значение выражения $\sqrt{a^2-6a+9}$ при $a<3$. [Ответ. $-(a-3)=3-a$.]

В этом примере имеются три выражения, имеющие различную смысловую нагрузку: a^2-6a+9; $a<3$; $3-a$.

Для успешного понимания такого преобразования надо предлагать также и два других задания, не используемых в задачниках.

б) При каком значении m верно равенство:

$$\sqrt{m^2-4m+4}=m-2; \quad \text{и при каком } m$$
$$\sqrt{m^2-4m+4}=2-m.$$

(Ответ. $m>2$; $m<2$.)

в) $\sqrt{x}=1-c$ при $c>1$.

Определить подкоренное выражение x.

(Ответ. Нет решения.)

3) Пусть выведена следующая зависимость:

при основании, большем (меньшем) единицы, большее число имеет больший (меньший) логарифм.

Возможны три вида упражнений, которыми следует воспользоваться, чтобы обеспечить полноту системы упражнений.

а) Сравнить логарифмы чисел 5 и 6 при общем основании, равном 0,6 [то есть определить знак в выражении: [$\log_{0,6}6 \boxed{?} \log_{0,6}5$].

б) Дано $\log_{0,6}a>\log_{0,6}b$.

Какое число больше: a или b?

в) Дано $\log_a 5>\log_a 6$.

Какое число больше: 1 или a? **и т. п.**

7. О месте обратных задач при обучении математике

Одним из эффективных средств получения существенно новых разновидностей *задач* является прием обращения, когда в условие задачи вводится ответ исходной задачи, а некоторые числа из условия переводятся в разряд искомых.

В арифметической или алгебраической задаче целесообразно различать три элемента:

1) сюжетную сторону (например, задача на движение);

2) числовые данные (скажем, десятичные дроби);

3) математические зависимости и действия, посредством которых решается задача.

Существенным элементом, от которого зависит в основном *тип* (*вид*) задачи, сложность ее решения, является третий элемент; первые же два выполняют, так сказать, роль *носителя* скрытых зависимостей задачи.

В сборниках задач, при подборе упражнений, варьируют обычно сюжеты и числа, сохраняя неизменными математические зависимости.

Это приводит к тому, что в той или иной группе задач часто находятся только однотипные; взаимно противоположные задачи оказываются при этом в различных частях задачника и рассматриваются отдельно друг от друга.

Прием обращения удовлетворяет психологическому требованию, состоящему в том, чтобы объект мышления включался в процессе его изучения во все новые связи; при этом он как бы поворачивается каждый раз другой своей стороной, и из него вычерпывается все новое содержание ([57], стр. 99).

В литературе по методике арифметики ограничиваются теми обратными задачами, которые получены подстановкой ответа задачи в условие и исключением одного данного числа из условия.

Как показывает наша практика, целесообразно распространить понятие *обратная задача* на случаи типовых арифметических или алгебраических задач, когда не одно, а 2—3 числа из ответа замещают столько же чисел, данных в условии исходной задачи.

Рассмотрим в качестве примера задачу на нахождение двух чисел по их разности.

В мастерской Катя сшила 3 платья, а Нина — 12 таких же платьев. Поэтому Нина израсходовала ткани на 36 метров больше, чем Катя.

Сколько метров ткани израсходовала каждая из них в отдельности?

Если ответ задачи (числа 48 *м* и 12 *м*) ввести в условие задачи, а соответствующие числа 12 пл. и 3 пл. сделать искомыми, то мы получим обратную задачу того же типа.

Условия задач и их решения удобно записать рядом в следующей схеме.

Прямая задача

Нина — 12 пл.	□
Катя — 3 пл.	□
Больше на	36 *м*

Решение.

1. $12 - 3 = 9$ (пл.)
2. $36 : 9 = 4$ (*м*)
3. $4 \cdot 12 = 48$ (*м*)
4. $4 \cdot 3 = 12$ (*м*)

Проверка.

48 *м* — 12 *м* = 36 *м*

Обратная задача

Нина □	48 *м*
Катя □	12 *м*
9 пл.	

Решение.

1. $48 - 12 = 36$ (*м*)
2. $36 : 9 = 4$ (*м*)
3. $48 : 4 = 12$ (пл.)
4. $12 : 4 = 3$ (пл.)

Проверка.

12 пл. — 3 пл. = 9 пл.

Дополнительно к ранее сказанному о решении взаимно обратных задач в тесной связи друг с другом отметим еще несколько других случаев.

По действующим программам в IV классе рассматриваются особые приемы умножения на 5; 50; 25, но не изучаются способы деления на эти же числа.

Между тем именно *противопоставление* двух взаимно обратных действий является весьма полезным для развития мышления.

По программе задачи на встречное движение ученики решают в III классе, а структурно обратные задачи на движение в одном направлении перенесены в V класс.

В задачнике А. С. Пчелко и Г. Б. Поляка даны только прямые задачи на среднее арифметическое, все обратные к ним задачи перенесены в V класс.

В программах восьмилетней школы после изучения функции $y = x^2$ рассматривается функция $y = \sqrt{x}$, но последняя не представляет всю обратную функцию ($y = \pm \sqrt{x}$).

Вследствие этого оказалось невозможным ввести в восьмилетней школе понятие об *обратной функции* и невозможным использование важного геометрического преобразования — вращения графика вокруг биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Приведенный перечень необходимых корректив существующего порядка изучения математики можно продолжить и далее.

Важно то, что понятие *обратная задача* позволяет с некоторой общей позиции подойти к распределению материала по классам.

Прием составления новых задач, обратных данным, является *универсальным*: он применим для любых разделов математики и всегда приводит ученика к постановке новых проблем, получению существенно иных разновидностей задач. Умение решать прямую и обратную задачи является важным показателем достигнутой учеником глубины понимания изучаемого раздела математики.

Имеет поэтому смысл рассматривать в методике математики составление и решение обратных задач как важнейший прием развития творческого мышления учащихся.

В старших классах школы этим путем удается выяснить содержание логических категорий «необходимые и достаточные условия».

Рассмотрим несколько характерных примеров.

1а. Дано параметрическое уравнение первой степени $5x - 2a = ax - 3$. Требуется определить область изменения параметра a, если данное уравнение имеет решение $2 < x < 8$.

Ответ. $3\frac{1}{4} < a < 4{,}3$.

1б. Обратная задача. В уравнении $5x - 2a = ax - 3$ параметр a изменяется на промежутке $3\frac{1}{4} < a < 4{,}3$. Определить соответствующую область изменения значений корня.

Ответ. $2 < x < 8$.

Решение данной пары задач показывает, что изменение корня (x) линейного уравнения на определенном промежутке является необходимым и достаточным условием для изменения параметра (a) на соответствующем промежутке.

2а. Пусть решена следующая задача на неравенства: В каком промежутке должно изменяться число m, чтобы оба корня уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ были заключены между -2 и 4?

Ответ. $3 < m < 5$.

Интересно рассмотреть обратную задачу:

2б. Дано уравнение $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

В каких пределах будут изменяться корни уравнения, если параметр m изменяется в пределах — $3 < m < 5$.

Решив вторую пару задач, можно убедиться, что здесь необходимое условие отнюдь не совпадает с достаточным условием.

3а. Если a^2, b^2; c^2 составляют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$; $\frac{1}{a+b}$ составляют тоже арифметическую прогрессию (a, b, c — числа положительные).

3б. Обратная задача. Если $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$; $\frac{1}{a+b}$ составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 тоже составляют арифметическую прогрессию.

4а, б. Найти условие, необходимое и достаточное, чтобы корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ образовали геометрическую прогрессию.

(Данная задача помещена под № 729 в «Сборнике задач по математике» К. С. Барыбина и А. К. Исакова, причем в решении ошибочно отождествлены необходимое и достаточное условия.)

Исключительно важное значение для усвоения геометрии, для развития навыков решения задач на доказательство играет обращение геометрических предложений.

Рассмотрим два простых суждения:

Прямая теорема. Вписанный угол измеряется *половиной дуги*, на которую он опирается.

Обратная теорема. Дуга окружности измеряется *удвоенным вписанным* углом, опирающимся на эту дугу.

Указанная прямая теорема изучается в школе, а обратная — нет; тем не менее последняя используется при решении задач на вычисление столь ж часто, как и прямая.

Как показывает наша практика, большинство учеников не могут самостоятельно из первого предложения вывести второе: как и вообще в подобных случаях в математике, прямая связь вида «вписанный угол → дуга» не перерастает автоматически в обратную связь вида «дуга→вписанный угол».

В содержательной работе Л. Н. Ланда [35,*б*] указаны характерные недостатки в мышлении учащихся при решении геометрических задач и даны правильные методические рекомендации, но среди них упущена, как нам представляется, весьма существенная, а именно использование при обучении решению геометрических задач приема преобразования геометрических предложений в обратные, что является важнейшей операцией, развивающей умственные способности ученика.

Ученики легко овладевают этой операцией при выполнении упражнений по преобразованию решенной задачи (доказанной теоремы) в обратную.

Не рассматривая в данной работе методику упражнений по геометрии, мы ограничимся приведенным замечанием.

8. Определенные и неопределенные задачи. Единичные и множественные связи

Тренировочные упражнения по математике в настоящее время почти все состоят из *определенных* задач. А между тем решение *неопределенных* задач (имеющих множество решений), будучи связано с развитием способности к нахождению различных вариаций, представляет не менее важный вид упражнений, содержащих элементы *творчества.*

Проникновению в школу неопределенных упражнений, рассчитанных на развитие *комбинационных* способностей учеников, мешает иногда традиция.

Например, в книге Дж. Юнга, в свое время широко распространенной среди учителей, утверждалось, что «неопределенный результат не имеет никакой цены, а неопределенная задача даже хуже полного отсутствия задачи» ([89], стр. 144).

С точки зрения психологии определенные и неопределенные задачи различаются тем, что решение первых основано преимущественно на актуализации *единичных* связей (ассоциаций), а решение вторых — на актуализации *множественных* связей (ассоциаций).

Например, решение примера

$$(x+2y)\cdot(x^2-2xy+4y^2)$$

несомненно основано на проявлении, прежде всего, единичных связей: сначала пишем куб первого числа (x^3), а потом куб второго числа ($8y^3$).

Пусть далее, требуется решить следующий *деформированный* пример: $(? + ?) \cdot (? - 2xy + ?) = ? + ?$, причем известно, что произведение неизвестных множителей является суммой кубов.

Последнее задание — пример неопределенного упражнения, ибо решение его связано с возможностью представить средний член (второго множителя) в различных видах:

$$2xy \rightarrow \begin{cases} \rightarrow 2 \cdot xy \\ \rightarrow 2x \cdot y \\ \rightarrow x \cdot 2y \text{ и т. п.} \end{cases}$$

При решении этого примера возникает пучок связей (ассоциаций) и соответственно могут быть получены различные ответы:

$$(2 + xy)(4 - 2xy + x^2y^2) = 8 + x^3y^3$$

$$(2x + y)(+4x^2 - 2xy + y^2) = 8x^3 + y^3$$

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + 8y^3 \text{ и т. п.}$$

Хорошим приемом развития множественных связей является также упражнение по составлению учащимися нескольких задач, уравнений, неравенств, примеров и т. п., имеющих одно и то же решение.

Например, в младших классах целесообразно решать примеры с несколькими неизвестными, а в старших — составлять упражнения, подбирая значения 2—3 параметров.

В практике обучения математике неопределенные упражнения еще не получили должной оценки и распространения[1].

9. Математическое творчество как высшая форма самостоятельности мышления учащихся

Одним из важнейших принципов обучения в советской дидактике является принцип самостоятельности; соблюдение его обеспечивает прочность и глубину усвоения материала, действенность приобретенных знаний.

---

[1] Отметим, как приятное исключение, книгу В. В. Рассохина и Н. А. Целинского, в которой отмечено важное значение неопределенных задач для занятий по черчению [55].

Проблема развития самостоятельности мышления учащихся в процессе обучения математике является острой, неразрешенной еще проблемой методики математики.

Анализ характера умственной деятельности учеников на различных уроках, в разных классах показал, что лишь 15—20% учебного времени тратится на самостоятельную работу, при этом, чем старше класс, тем самостоятельных работ меньше.

Создается ненормальное положение: с возрастом учащиеся, конечно, становятся более способными к самостоятельной работе, а им предоставляют для этого все меньше возможностей.

В литературе понятие *самостоятельность* толкуют часто нечетко, основываясь лишь на *внешней* стороне деятельности учащихся.

Ученик может без помощи учителя решить тот или иной готовый пример или задачу, например, установить делимость данного многочлена на x—2, пользуясь теоремой Безу.

Однако характер мышления ученика изменяется коренным образом, если ему предложить, скажем, составить четырехчлен седьмой степени, делящийся на x—2.

Если в числе тренировочных упражнений преобладают, как это обычно имеет место в школе, однотипные, при решении которых ученик ограничивается лишь получением ответа и сверкой его с готовым ответом, то все это может привести к интеллектуальному изнеживанию ученика, к неспособности его понять сложную взаимосвязь явлений в мире, к неумению предпринять усилие для разрешения иных нешаблонных заданий, с чем ему придется встречаться в жизни.

Знания ученика будут прочными, если они приобретены не одной памятью, не механически заучены, а являются продуктом собственных размышлений и закрепились в результате его собственной творческой деятельности над учебным материалом.

Эту важную роль самостоятельности мышления для дальнейшего приобретения и применения знаний отмечали наши ведущие педагоги-математики.

Так, академик А. Н. Колмогоров указывает, что даже «простейшие математические знания могут применяться умело и с пользой лишь в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно» ([28], стр. 3).

Характерен в этом смысле также стиль работы над новым материалом известного советского математика Я. А. Хинчина; он писал, что для него лучшей формой усвоения нового является *самостоятельный вывод* того или иного результата и по возможности путем, отличным от изложенного в книге.

Творческое мышление есть высшая ступень самостоятельности; иначе говоря, не всякую самостоятельную работу можно назвать творческой работой.

Относительно так называемых *творческих упражнений* существуют две крайности.

Одни полагают, что обычно ученик не может сам ставить перед собой проблему. Отсюда делают вывод, что в школьных условиях уже достаточно, если ученик сможет решить готовую задачу, предложенную ему учителем.

К. Э. Циолковский писал, что сначала он делал открытия, известные всем, затем — известные немногим, и, наконец, — никому неизвестные.

Обучение математике в школе вполне можно и нужно строить так, чтобы оно оказалось для учащегося серией маленьких открытий.

По любому разделу математики можно сконструировать такое *синтетическое* упражнение, выполнение которого действительно содержало бы элементы творчества.

Пусть пятикласснику предложено деформированное число 35..6. Требуется добавить в середине две цифры так, чтобы число разделилось без остатка на 9.

Ход мыслей ученика примерно таков:

«Найду сумму имеющихся цифр $3+5+6=14$. Ближайшее к 14 число, делящееся на 9, — это 18.

Не хватает 4 ($18-14=4$). Две цифры надо подобрать так, чтобы их сумма была равна 4». Возможны варианты: 4 и 0; 3 и 1; 2 и 2. Во второй группе вариантов сумма двух недостающих цифр должна составить $13=4+9$ $27-14$ (4 и 9; 5 и 8; 6 и 7).

«Сколько же разных решений можно найти?» — спрашивает учитель.

Коллективно исчерпываются все возможные варианты для I группы: 35 406; 35 046; 35 316; 35 136; 35 226, а затем и для второй.

Такая работа основывается не на прямолинейном применении правила (установлении того, делится или не делится данное число на 9), а идет необычным путем.

Размышляя и опираясь на правило, ученик в этом случае встречается и с комбинаторикой и с перечислением всех возможных решений.

Это несомненно математическое творчество, пусть и элементарное.

Различные синтетические упражнения по составлению уравнений, задач и т. п. обладают для учащихся качествами новизны и оригинальности полученных результатов; поэтому есть все основания отнести подобные упражнения к творческим.

Нельзя также согласиться с другой крайностью, с ограниченным толкованием понятия *математического творчества учащихся*, когда под ним разумеют только изящное, чем-то необычное, отличное от стандартного приема, решение *готовой* задачи.

Конечно нельзя отрицать наличия элементов творчества и в такой преимущественно аналитической деятельности, но важно учитывать при обучении следующее положение.

Творчество (какое-бы оно ни было — техническое, музыкальное, математическое и т. д.) всегда означает создание, синтез чего-то существенно нового; не может быть настоящего творчества там, где деятельность не носит прежде всего синтетического, конструктивного характера.

Отметим в данной связи и психологическую сторону вопроса.

Самостоятельно составленная и решенная задача запоминается полнее и прочнее, чем просто решенная ([63], стр. 262).

Данный вывод подтверждается и опытом учителей: например, передовые учителя математики Липецкой области считают, что ни один вид работы не заставляет учащихся так активно мыслить, как составление задач [45].

10. Характерные особенности процесса составления задач и примеров

С точки зрения кибернетики условие любой задачи (или пример) содержит в закодированном виде программу для логических операций, приводящих к ответу; в этом смысле процесс составления задачи подобен процессу программирования работы некоторой вычислительной машины, причем оказывается, что количество информации, содержащейся в условии задачи, больше, чем ее количество в полученном ответе ([25], стр. 18).

Еще больше разница между объемом информации, использованной в процессе составления задачи, с одной стороны, и содержащейся в условии составленной задачи, с другой стороны: только незначительная часть информации, использованной при составлении задачи, включается в условие задачи.

В настоящее время совершенно необычны для школы задания, подобные следующим:

Составить и решить систему двух уравнений второй степени, имеющую данные корни.

Составить задачу, решаемую квадратным уравнением, так, чтобы она имела два решения.

Решено логарифмическое уравнение; составить аналогичное уравнение с корнями $x_1 = -2$; $x_2 = +1$.

Составить неравенство второй степени, имеющее решение $3 < x < 5$.

Дана алгебраическая дробь $\frac{ax^2 + bx + c}{px + e}$; подобрать параметры a, b, c, p, e так, чтобы предел этого выражения был равен числу k при $x \to -\frac{e}{p}$.

Составить тригонометрическое уравнение вида $\cos x = a$ так, чтобы одно из его решений было равно $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$.

Составить геометрическую прогрессию такую, чтобы сумма ее членов была равна 20 и т. п.[1].

С психологической точки зрения первые *члены ассоциаций*, возникающих при решении готовой задачи, имеют источник вне субъекта (подбор данных, выбор формы упражнения, выбор зависимостей выполнен другим лицом, не решающим); говоря по-другому, соответствующие ассоциации сформированы как бы извне. Иное дело, если че-

[1] Чтобы убедиться в степени новизны подобных заданий, читатель может, выполнив какое-либо из этих заданий, сравнить потраченные усилия и время с теми, которые нужны для выполнения соответствующих аналитических заданий по решению готовых задач тех же видов.

ловек создает задачу и затем решает ее: здесь и первые и вторые *члены ассоциаций* — целиком продукт данного субъекта.

Решение готовой задачи оказывается часто тривиальным и именно постольку, поскольку только им и занимались; составление аналогичной задачи, удовлетворяющей определенным условиям, *по новизне* применяемых при этом логических средств представляет вначале *значительные* трудности.

В то же время — и это очень важно — трудность выполнения задания по составлению является временной, *относительной*: показ учителем способа составления превращает это задание в обычное, *доступное для всех учащихся*[1].

Чтобы подтвердить сказанное, приведем один характерный пример.

Иррациональное уравнение вида $\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}=1$ решается в VIII классе путем преобразования к квадратному уравнению (с помощью возведения в квадрат обеих частей уравнения), что не представляет особых трудностей.

Когда же мы предложили составить уравнение вида $\sqrt{a_1x+b_1}+\sqrt{a_2x+b_2}=c$, такое, чтобы оно имело одним из корней $x_1=3$, лишь наиболее сильные из десятиклассников сумели справиться с этим заданием[2] (эксперимент проводился без специальной подготовки учащихся к выполнению таких упражнений).

Затем задание было осложнено требованием составить такое же уравнение, имеющее *два* заданных корня (скажем, $x_1=3$, $x_2=4$). Вначале задание казалось *не имеющим* общего решения даже учителям-математикам.

Однако достаточно было учителю один раз показать выполнение данного задания посредством метода неопреде-

---

[1] Сравним: деление целых чисел в средние века считалось непостижимо трудным делом, хотя сейчас, когда найден алгоритм выполнения его и разработана соответствующая методика обучения этому алгоритму, оно усваивается всеми нормальными детьми 10 лет.

[2] О сложности этой задачи, вызванной в сущности только н е о б ы ч н о с т ь ю для школы (в том числе и для учителей) синтетических приемов рассуждений, можно судить по тому, что она была опубликована редакцией журнала «Математика в школе» в к а ч е с т в е к о н к у р с н о й (условие задачи — 1960 г., № 6; решение — 1961, № 3).

ленных коэффициентов, чтобы восьмиклассники стали легко справляться с составлением подобных уравнений.

Точно так же задание составить систему двух уравнений первой степени с данным решением ($x = 2$, $y = 3$) *кажется* довольно сложным даже студентам пединститута, хотя научить этому нетрудно и семиклассников.

Введение синтетических упражнений надо начинать с элементарных; очень важно, например, приучить учеников иллюстрировать правила и определения соответствующими примерами.

Но часто учителя забывают требовать это.

В практике обучения зачастую решение нового вида упражнения (например, задачи нового типа) начинают с анализа готового условия.

Наш опыт показывает, что нередко более целесообразно идти иным путем, когда учитель, привлекая к работе учеников, *составляет* новую задачу, а затем школьники решают составленную задачу коллективно. При таком методе учащиеся наблюдают сначала процесс синтеза, а затем — анализа; здесь синтез пролагает путь анализу, в соответствии с логикой вопроса.

При этом ученики усваивают во взаимосвязи оба пути мышления: обучаются и составлению задач и решению их.

Иногда высказывается мнение, будто бы внедрение синтетических упражнений равносильно *добавлению* новых разделов в программу и поэтому потребует дополнительного времени.

Это имело бы место тогда, когда учитель знакомил учащихся с приемами составления условия совершенно отдельно от приемов решения (скажем, сначала закончили бы решение всех видов линейных уравнений, а потом лишь приступили бы к составлению некоторых из них).

Но если решение каждого нового вида уравнения (неравенства, задачи и т. д.) *сразу* на том же уроке сопровождать составлением аналогичного (либо вначале показать процесс составления нового вида упражнения, чтобы затем научить детей решать его), то дополнительного времени не потребуется.

Подобно тому как устройство машины изучают, разбирая ее на части и собирая из отдельных частей целое, так и здесь при составлении упражнения и решении его одно действие подкрепляет другое.

Указанное возражение связано также и с тем, что не учитывается сущность этих упражнений: во-первых, составляются задачи по тем же самым разделам, по которым раньше давались исключительно готовые задачи и примеры; во-вторых, составление какого-либо упражнения завершается решением его.

Стало быть, синтетическое упражнение содержательнее аналитического, первое *включает* в себя второе.

Составление и решение одной задачи дидактически гораздо поучительнее, чем решение двух готовых задач того же вида, причем первое осуществляется в общем за меньшее время.

Поэтому, как это и обнаружилось в нашем опыте, правильное сочетание синтетических и аналитических упражнений, не удлиняет, а экономит время изучения материала.

Например, сравнительно прочное усвоение восьмиклассниками темы «Квадратное уравнение» имеет одной из причин то, что здесь ученики выполняют взаимно обратные упражнения (этого пока нельзя утверждать относительно других разделов алгебры).

Знаменательно, что это положение находит психологическое объяснение, а именно составление задач и их решение всегда приводит к возникновению *циклических* связей мыслей (на основе перерастания прямой связи ($A \rightarrow B$) в обратную ($B \rightarrow A$) и появления замкнутой связи ($A \rightarrow B \rightarrow A$).

Подтвердим сказанное, для чего проанализируем несколько примеров.

Пусть решается алгебраическим способом следующая *задача*:

Отец и сын вместе заработали 60 рублей, причем заработок отца больше заработка сына в 2 раза. Сколько заработал каждый из них? (I)

Решение сводится к составлению *уравнения*

$$2x + x = 60 \qquad (II)$$

(О т в е т к задаче: 40 руб. и 20 руб.)

Проверка ответа сводится к установлению *тождества*:

$$\boxed{20} \cdot 2 + \boxed{20} = 60 \qquad (III)$$

Таким образом, схема обычных упражнений по решению задач алгебраическим способом выглядит так: задача (I) $\rightarrow$ уравнение (II) $\rightarrow$ тождество (III).

Можно решить сотню таких задач, но от этого мышление не обогащается обратной связью типа: тождество $\to$ $\to$ уравнение $\to$ задача. (Примечателен в этом отношении следующий факт: восьмиклассники обнаруживали непонимание смысла тождества, не умели конструировать тождества, пока они не выполняли упражнений по превращению тождества в уравнение).

Чтобы довести одностороннюю незамкнутую связь (I)$\to$ $\to$ (II)$\to$ (III) до циклической связи (I)$\to$ (II) $\to$(III) $\to$ $\to$ (II)$\to$ (I), надо сразу же вслед за решением предыдущей задачи предложить ученикам составить *аналогичную* задачу, исходя, например, из тождества:

$$\boxed{30}\cdot 4 + \boxed{30} = 150 \qquad (III_1)$$

Ученики обнаружат одинаковую роль чисел 20 и 30 соответственно в тождествах (III) и(III_1) и перейдут от тождества (III_1) к уравнению (II_1):

$$4x + x = 150 \qquad (II_1)$$

Дальше остается к уравнению (II_1) подобрать соответствующее условие задачи (I_1).

Ученик А. составил, например, такую задачу:

Учительница принесла тетради в клетку и в линейку— всего 150 штук. При этом оказалось, что тетрадей в клетку было больше, чем тетрадей в линейку в 4 раза.

Сколько было тех и других тетрадей в отдельности? (I_1).

Практика обучения, включающая *сопоставление* процессов решения и составления задач, показывает, что при такой методике ученики значительно быстрее усваивают не только предусмотренное программой умение — решать задачи, но сверх того овладевают и внепрограммным умением конструировать алгебраическую задачу.

Составление задачи, имеющей наперед заданные решения, требует применения знаний в иных связях, чем это бывает при решении готовой задачи, хотя и составление задачи, и решение готовой задачи, как правило, выполняются на основе одной и той же *суммы знаний*.

Однако в первом случае нужно владеть еще особыми приемами *конструирования* задачи, комбинирования ее элементов, многие из которых *намечаются с большой долей* произвольности. При этом часто приходится искать необычные связи, пока не будет найдено удачное соединение элементов задачи.

Приведем пример того, как решение готового уравнения (I→II→III →IV →V →VI) сопровождается самостоятельным составлением аналогичного уравнения (процесс составления записывается справа, снизу вверх (6→ 5 → →4→ 3→ 2→ 1).

Пусть решено показательное уравнение $3^{x+1}+3^x=108$.

Решение ↓

$3^{x+1}+3^x=108$	(I)	$2^{y+2}+2^y=80$	(1)
$3^x\cdot 3+3^x=108$	(II)	$4\cdot 2^y+2^y=80$	(2)
$4\cdot 3^x=108$	(III)	$5\cdot 2^y=80$	(3)
$3^x=27$	(IV)	$2^y=16$	(4)
$3^x=3^3$	(V)	$2^y=2^4$	(5)
$x=3$	(VI)	$y=4$	(6)

составление ↑

Учитель предлагает *составить* и записать справа уравнение такого же вида, но чтобы решение его было иное, например $y=4$.

Правильность составленного уравнения ученик проверяет, просматривая запись сверху вниз (то есть *решая* свое уравнение).

Ученики старших классов легко овладевают алгоритмом решения неравенства второй степени (см. левый столбик):

Решение неравенства ↓

$x^2+x-12<0$	(A)	$x^2-7x+10<0$	(A_1)
$(x-3)(x+4)<0$	(B)	$(x-5)(x-2)<0$	(B_1)
$\begin{cases}x-3>0\\x+4<0\end{cases}$	(C)		
$\begin{cases}x>3\\x<-4\end{cases}$	($Д$)		
Система ($Д$) противоречивая, решения нет.			
$\begin{cases}x-3<0\\x+4>0\end{cases}$	(E)	$\begin{cases}x-5<0\\x-2>0\end{cases}$	(E_1)
$\begin{cases}x<3\\x>-4\end{cases}$	(F)	$\begin{cases}x<5\\x>+2\end{cases}$	(F_1)
Неравенство (A) имеет решение $-4<x<3$	(K)	$2<x<5$	(K_1)

Составление неравенства ↑

Наиболее удобным приемом обучения составлению таких выражений (уравнений, неравенств, функций) оказалось развертывание параллельной записи в направлении снизу вверх, причем для переработки информации и определения последовательности преобразований очень важно, чтобы однородные выражения находились *строка в строку* в параллельных столбцах. При такой записи облегчается процесс перехода от формы (K_1) к форме (A_1).

С точки зрения психологии познавательная ценность упражнений по составлению задач заключается в возникновении взаимно обратных (циклических) связей мыслей во время неизбежного сопоставления при такой записи процессов решения и составления задачи.

Отметим, что именно посредством таких упражнений ученики приучаются различать необходимые и достаточные условия.

В самом деле:

Если число удовлетворяет квадратному неравенству (B), то отсюда еще не следует, что оно будет удовлетворять системе линейных неравенств (C).

Первое есть необходимое, но недостаточное условие для соблюдения второго.

И наоборот: если некоторое число удовлетворяет системе линейных неравенств (E_1), то оно обязательно удовлетворяет квадратному неравенству (B_1).

Здесь первое есть достаточное условие для второго.

11. О классификации упражнений и о математических терминах

Для решения проблемы классификации математических упражнений необходимо сначала уточнить содержание самого понятия «математическое упражнение».

В. М. Брадис в «Методике преподавания математики» пишет, что задачей следует называть «любой математический вопрос, для ответа на который недостаточно простого воспроизведения чего-либо из пройденного курса — какого-нибудь определения, текста или доказательства теоремы, текста аксиомы или правила» ([10], стр. 68).

В той же книге предлагается считать термины *задача* и *упражнение* как равнозначные.

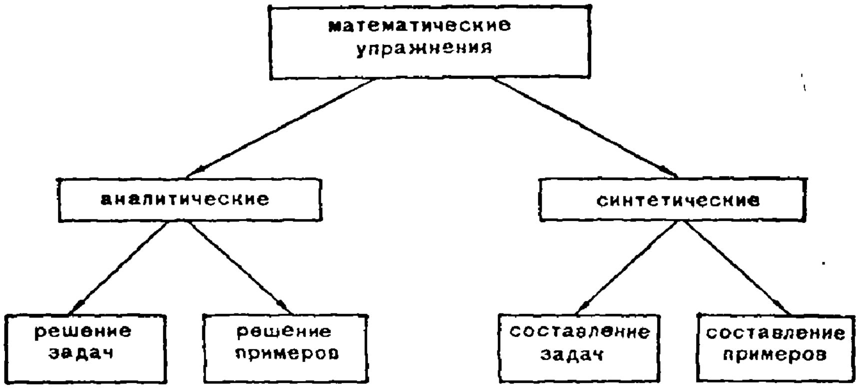
Из изложенного нами выше вытекает целесообразность придавать понятию *математическое упражнение* более широкое содержание, чем понятию *задача*.

Толкование В. М. Брадиса отражает существующее положение в практике обучения, когда под математическим упражнением понимается лишь *решение готовых задач*.

Между тем, как явствует из предыдущего, под математическим упражнением необходимо понимать задания двух видов: предложение решить задачу (или пример) и структурно обратное задание — составить задачу (или пример).

Упражнения на составление задач и примеров надо ввести в практику обучения как *равноправные* среди других упражнений.

Итак, мы приходим к следующей исходной классификации математических упражнений[1]:



Примером будем считать любое упражнение, записанное *только* с помощью математических символов.

Задание «Решить уравнение $x + 10 = 35$» — есть пример, а задание «Найти неизвестное слагаемое, если сумма равна 35, а другое слагаемое равно 10» будет задачей, так как оно сформулировано с применением слов и математических понятий, в частности.

Некоторые полагают, что составление задач и примеров очень сложно и не под силу учителю, а поэтому ради его облегчения это дело следует целиком отдать на откуп авторам задачников.

Такое мнение не выдерживает критики.

На основе своих занятий со студентами пединститута и учителями на летних курсах (1957—1964 годы) мы убеди-

[1] Читатель, конечно, обратит внимание на то, что здесь термины *аналитические и синтетические* отнесены нами не к процессу решения, а к упражнениям.

В то же время как процесс составления задач и примеров, так и процесс решения их может носить *преимущественно* либо аналитический, либо синтетический характер.

лись, что способы составления *всех* упражнений школьного курса на основе изложенных в данной книге принципов — вполне доступны и целесообразны.

Подходя к проблеме составления задач, даже исходя из потребностей учителя математики, мы видим, насколько назрела необходимость ознакомления учителей с приемами составления основных разновидностей упражнений по школьному курсу математики.

Однако главное в данной проблеме — повторяем — внедрение синтетических упражнений в школу, постепенное доведение простейших форм этой работы до учащихся.

Как и в случае использования приема противопоставления, *внедрение синтетических упражнений связано с ломкой методических шаблонов, стандартов,* поскольку в существующей учебной литературе этот вид упражнений практически отсутствует.

Хотя методика, построенная в основном на аналитических упражнениях, *проста* для учителя, но от этого в накладе оказывается ученик, ибо в силу присущей этой методике ограниченности применяемых логических средств он усваивает материал односторонне, поверхностно.

В связи с проблемой классификации математических упражнений важно обсудить вопрос о соответствующих терминах.

В исследованиях по психологии обучения установлена целесообразность сообщения ученикам терминов—названий типов задач на исходном этапе обучения этим задачам (см. [23]; [39]; [90]).

Согласно учению И. П. Павлова, слово является сильнейшим раздражителем, «сигналом сигналов». Слово-термин, обозначающий определенную разновидность упражнения *организует мышление* ученика.

Слово-термин становится толчком для проявления цепи ассоциаций, к которой сводится решение данной задачи.

Полезность терминов, обозначающих те или иные разновидности задач, для *учителей* очевидна: термины являются теми ориентирами, по которым они распределяют упражнения для занятий.

Однако нельзя согласиться с мнением, будто названия задач и соответствующая терминология должны обслуживать только учителя и вовсе не нужна ученикам.

Некоторые учители неверно отождествляют слова-*термины* и формально логические *определения* соответствующих им *понятий*.

Иногда считают, что будто слово-термин и определение обозначаемого им понятия должны вводиться одновременно после накопления у учеников достаточно большого опыта в оперировании данным понятием, не называя его соответствующим словом-термином.

В VI классе доказывают прямую и обратную теоремы о биссектрисе угла. Созданы все условия, чтобы пользоваться термином *геометрическое место точек*, не определяя самого понятия, не спрашивая учеников: «Что называется геометрическим местом точек»?

Однако же в программах ознакомление с этим термином не предусматривается вплоть до восьмого класса.

Или еще пример: семиклассники чертят график линейной функции — прямую линию; в учебнике написано: «график линейной *зависимости*».

Разгружаем ли мы ученика, подменив конкретный, точный математический термин — *функция* — другим более общим и неопределенным словом *зависимость*? Конечно, нет. Такая осторожность в сущности приводит к недооценке роли обобщений, к искусственной задержке умственного развития детей.

В учебнике геометрии Н. Н. Никитина (изд. 1964, § 27, 32) вместо доказательства обратной теоремы о биссектрисе угла доказывается *противоположная* теорема, что, вообще говоря, достойно поддержки; но плохо то, что автор не решился назвать эту теорему ее собственным именем.

Совершенно неоправданно, что в этом учебнике прямая и противоположная теоремы не отделены логически друг от друга, причем противоположная теорема вообще не сформулирована, а ее доказательство помещено в тексте в виде продолжения доказательства прямой теоремы.

Слово-термин может вводиться *раньше* формальнологического определения соответствующего понятия.

Уместно здесь напомнить, что многие математические понятия, как *число*, *площадь*, *задача на сумму и отношение*, *методы решения геометрических задач* (метод геометрических мест точек, метод подобия, алгебраический метод) и т. п., вообще не определяются в школе, хотя успешно применяются соответствующие термины при обучении.

Смысл этих понятий постигается учениками в результате многократного применения их.

Следует вспомнить Энгельса, указывавшего, что неверно думать, будто самое ценное в познании сосредоточивается в формальнологических определениях, дефинициях.

В школе надо пользоваться возможно раньше терминами, памятуя, что наполнение их содержанием, то есть становление соответствующего понятия происходит постепенно, непрерывно и по существу не завершается никогда.

12. Краткие итоги

Основным элементом (клеточкой) процесса обучения математике является математическое упражнение, в котором сочетаются деятельность учителя и ученика.

Каждое задание, предложенное учащимся, является некоторым сложным раздражителем нервной системы.

Выполнение подряд многих упражнений одного типа приводит к понижению умственной активности учеников, ибо при однообразных раздражениях притупляется аналитико-синтетическая деятельность коры головного мозга, возникает торможение.

Во избежание этого учитель должен обеспечить целесообразную *вариативность* математических упражнений, создающих условия для того, чтобы исходные временные связи и ассоциации *ветвились и кустились.*

Чтобы добиться этого, важно вести углубленную работу над задачей, решать совокупности задач, связанных единством сюжета, чисел и составленных по аналогии, путем преобразования данной задачи в обратную, или на основе обобщения.

При таких условиях знания ученика не будут представлять разрозненные мысли, слабо связанные друг с другом, а будут сцементированы друг с другом многообразными связями и приведены в определенную систему.

Рациональное сочетание аналитических упражнений с синтетическими (во-первых) и усиление внимания к завершающему этапу выполнения упражнений — контролю и проверке решения (во-вторых), одновременное изучение некоторых взаимно обратных или сходных тем (в-третьих) — вот те эффективные, но мало используемые сейчас средства активизации процесса обучения математике и повышения производительности труда учителя и учащихся.

Отметим, наконец, что предыдущие выводы созвучны с идеями, выраженными на XIX Международной конференции по вопросам преподавания математики в средних школах. В ее рекомендациях говорилось:

«Важно... побуждать учащихся к *собственным формулировкам идей и к открытию математических отношений и свойств раньше, чем ему* будет внушена завершенная зрелая мысль.

Существенно... научить *ставить задачи*, находить данные, использовать их и оценивать результаты.

Нужно... упражнять в *практике самоконтроля* и исправления собственных ошибок».

(В разработке рекомендаций принимала участие советская делегация во главе с профессором А. И. Маркушевичем; [56], стр. 19; подчеркнуто нами. — *П. Э.*)

*   *
*

Общие вопросы методики математических упражнений изложены нами в первой части книги.

В последующих частях мы рассматриваем в основном *логическую* сторону проблемы, «технику дела», иллюстрируя изложение рассмотрением методики изучения основных разделов курса арифметики и начальной алгебры.

Ради экономии места мы уделяем меньше внимания вопросам, достаточно подробно рассмотренным в существующих методических пособиях: методике введения новых математических понятий и методике аналитических упражнений.

Мы касаемся этих вопросов лишь в том случае, когда они связаны с основной темой книги.

Следует напомнить, что концентрированное изложение в книге основной проблемы ни в коей мере не означает стремления автора преувеличивать значение описанных приемов и методов или недооценить другие формы и методы обучения.

ЧАСТЬ II

МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АРИФМЕТИКЕ

ГЛАВА I

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Изучение темы «Целые числа» в V классе имеет следующие особенности. В течение первых четырех лет обучения школьники в основном занимаются только «вычислительной арифметикой», а вопросы теоретического обобщения, систематизации знаний, введения математических понятий отнесены на второе место.

Эта линия выдержана не только в программе начальной школы, но и в учебниках арифметики А. С. Пчелко и Г. Б. Поляка.

Таким образом, важные обобщения, законы действий, многие разновидности задач, которым место именно в начальной школе, без основания «сдвинуты» в настоящее время в V класс[1].

Это обстоятельство является одной из причин, которые порождают общеизвестную «проблему арифметики в V классе».

В книге «Методические разработки по арифметике», для V класса, Учпедгиз, 1956 г. Е. Н. Саговская совершенно правильно выражала «большую тревогу» по поводу недостатка времени для работы над задачей вследствие перегрузки программы теоретическим материалом, что не устранено и в настоящее время.

Однако же и в рамках существующей программы удается существенно рационализировать процесс обучения арифметике, чему и посвящен данный раздел книги.

---

[1] Например, задачи на движение в одном направлении, на разность и отношение, на нахождение числа по его части, обратные задачи на отношение, обратные задачи на среднее арифметическое, изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов и многое другое оказывается вполне посильным и целесообразным для изучения в I—IV классах.

В основу построения системы изучения арифметики мы положили следующие выведенные из практики принципы[1].

1. Вместо общепринятого ныне рядоположного распределения материала (сложение, вычитание, умножение, деление) более целесообразно идти по пути группировки его по принципу установления аналогии, сходства и противопоставления.

Так, например, оказалось выгодным на одних и тех же уроках изучать совместно переместительный закон сложения и умножения; сочетательный закон сложения и умножения; распределительный закон умножения и одноименное свойство деления (умножение и деление суммы на одно и то же число); умножение и деление разности на одно и то же число.

В плане противопоставления рассматривается прибавление суммы к числу и умножение числа на произведение; вычитание суммы из числа и деление чисел на произведение; прибавление разности к числу и умножение числа на частное; вычитание разности из числа и деление чисел на частное.

Следуя той же линии, раздел изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов целесообразно изучать посредством объединения взаимно симметричных случаев: изменение суммы и произведения; изменение разности и частного.

2. Вторым основным принципом является построение обучения арифметике на основе циклических связей.

Осуществление данного подхода сводится в двум моментам:

а) одновременное изучение взаимно обратных операций, действий, типов задач;

б) широкое использование структурно обратных и деформированных упражнений для каждого вида учебных заданий.

3) И, наконец, при обучении арифметике мы обращали специальное внимание на синтетические упражнения, то есть на упражнения по самостоятельному составлению примеров, задач, числовых соотношений, удовлетворяющих определенным условиям.

---

[1] Теоретические обоснования этих принципов были подробно обсуждены выше в общей части данной работы.

1. Одновременное изучение переместительного закона сложения и умножения

Эти два закона известны ученикам из IV класса. Поэтому первое ознакомление с самим методом противопоставления на этом материале оказывается оправданным и эффективным.

Доска и страница тетради делятся вертикальной чертой на две половины; записывается тема урока в следующей форме[1].

Переместительный закон

сложения

$3 + 5 = 5 + 3$

Рис. 1

Чтобы найти, сколько всего клеточек в данном ряду, мы можем

1) сложить числа слева направо: к 3 черным клеткам прибавить 5 белых, получится 8:

$$3 + 5 = 8$$

2) сложить справа налево: к 5 белым клеткам прибавить 3 черных, получится 8:

$$5 + 3 = 8.$$

умножения

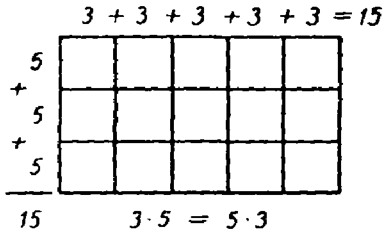


Рис. 2

Чтобы найти, сколько всего клеточек в данном прямоугольнике, мы можем

1) сосчитать по рядам. В каждом ряду по 5 клеточек, всего таких рядов 3, поэтому имеем:

$$5 \cdot 3 = 15$$

2) подсчитать число клеточек по столбикам. В каждом столбике по 3 клетки, а таких столбиков 5, поэтому

$$3 \cdot 5 = 15.$$

[1] Для удобства записей при применении противопоставления выгодно отказаться от выделения полей в тетрадях.

Или окончательно:

$$\boxed{3+5=5+3}$$

Числа 3 и 5 — слагаемые, 8 — сумма

От перемены мест слагаемых сумма не изменяется.

$$a+b=b+a$$

Или окончательно:

$$\boxed{3\cdot 5=5\cdot 3}$$

Числа 3 и 5 — сомножители, 15 — произведение.

От перемены мест сомножителей произведение не изменяется.

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Переместительный закон иногда используется для ускорения вычислений.

Пусть требуется решить следующие два примера:

15 *см* + 6 *м* 85 *см*

Вместо того чтобы к меньшему числу прибавлять большее число, удобнее к большему числу прибавить меньшее:

6 *м* 85 *см* + 15 *см* = 7 *м*

3 коп. · 248

Вместо того чтобы меньшее число умножать на большее, удобнее поступить наоборот:

$248\cdot 3=744$

Значит,

3 коп. · 248 = 7 руб. 44 коп.

Далее предлагается учащимся решать вперемежку примеры на применение обоих законов, в частности, и деформированные примеры:

$$\square+32=818+\square;\quad \square\cdot 815=3\cdot\square \text{ и т. д.}$$

2. Одновременное изучение сочетательного закона сложения и умножения

На доске и в тетрадях записываем название темы:

Сочетательный закон

сложения

Пусть требуется найти сумму трех чисел:

$$500+289+11=$$

Можно

умножения

Пусть требуется найти произведение трех чисел:

$$40\cdot 2\cdot 5=$$

Вычислить произведение этих трех чисел можно двумя способами:

1) найти сумму первых двух слагаемых ($600 + 289 = 889$) и затем прибавить к ней третье слагаемое

$$(889 + 11 = 900)$$

[подробно:
$(600 + 289) + 11 = 900$]

2) найти сумму двух последних слагаемых
($289 + 11 = 300$) и ее прибавить к первому слагаемому ($600 + 300 = 900$)
[подробно:
$600 + (289 + 11) = 900$]

В обоих случаях мы получили одну и ту же сумму:

$$\boxed{(600 + 289) + 11 = 600 + (289 + 11)}$$

Сумма не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих слагаемых их суммой.

$$a + b + c = a + (b + c).$$

1) найти произведение первых двух сомножителей ($40 \cdot 2 = 80$) и затем умножить это произведение на третий сомножитель:

$$(80 \cdot 5 = 400)$$

Иначе говоря:

$$(40 \cdot 2) \cdot 5 = 400$$

2) найти произведение двух последних чисел
($2 \cdot 5 = 10$) и помножить на него первый сомножитель:

$$(40 \cdot 10 = 400)$$

Или подробно:

$$40 \cdot (2 \cdot 5) = 400$$

В обоих случаях мы получили одно и то же произведение:

$$\boxed{(40 \cdot 2) \cdot 5 = 40 \cdot (2 \cdot 5)}$$

Произведение не изменится, если заменить какую-либо группу рядом стоящих сомножителей их произведением.

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

После объяснения сочетательных законов предлагаются парные примеры на применение этих законов, причем числа надо брать не слишком малые, чтобы ученики могли почувствовать практическую выгоду от применения этих законов.

Найти сумму, используя сочетательный закон сложения:

$$720 + 593 + 7 =$$
$$1000 + 889 + 11 + 600 =$$

Вычислить, используя сочетательный закон умножения

$$30 \cdot 4 \cdot 25 =$$
$$24 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 3 =$$

Во многих случаях решение примеров облегчается, если применяются оба закона — переместительный и сочетательный: сначала надо наиболее удобным образом переставить слагаемые (сомножители), а потом применить сочетательный закон.

Пусть требуется найти сумму

$$2000 + 981 + 680 + 19 =$$

Заметив, что второе и четвертое слагаемые дают в сумме 1000, мы можем их переставить, написать рядом:

$$2000 + 981 + 19 + 680 =$$

(применили переместительный закон)

$$= 2000 + (981 + 19) + \\ + 680 =$$

(применили сочетательный закон)

$$= (2000 + 1000) + 680 = \\ = 3000 + 680 = 3680$$

Пусть требуется найти произведение четырех сомножителей

$$30 \cdot 50 \cdot 7 \cdot 2 =$$

Заметив, что второй и четвертый сомножители дают в произведении 100, мы можем их записать рядом:

$$30 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 7 =$$

(применили переместительный закон)

$$= 30 \cdot (50 \cdot 2) \cdot 7 =$$

(применили сочетательный закон)

$$= (30 \cdot 100) \cdot 7 = \\ = 3000 \cdot 7 = 21000$$

При устном решении примеров эти изменения в расположении чисел и группировки выполняются в уме.

В упражнениях по применению данных законов надо использовать не только обычные их формы, подобные приведенным выше, но и деформированные примеры.

Определить быстро пропущенное слагаемое (обратите внимание на связь подчеркнутых чисел):

$$\square + 568 + 7 = 668$$
$$996 + \square + 4 = 1200$$
$$989 + \square + 11 + \\ + \boxed{23} = 1200$$

и т. п.

Быстро определить пропущенный сомножитель (обратите внимание на связь подчеркнутых чисел)

$$4 \cdot 68 \cdot \square = 6800$$
$$25 \cdot \square \cdot 4 = 4700$$
$$2 \cdot \square \cdot 50 \cdot \boxed{4} = 10\,000$$

и т. п.

3. Одновременное изучение распределительного закона умножения и распределительного свойства деления

Параллельное рассмотрение этих двух вопросов основано на использовании при объяснении одного и того же числового примера в двух разных формах.

Пусть требуется выполнить умножение $432 \cdot 2$

Поразрядное умножение можно изобразить так:

$$(400+30+2)\cdot 2 =$$
$$400\cdot 2+30\cdot 2+2\cdot 2=$$
$$800+60+4=864$$

Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно каждое слагаемое умножить на это число и полученные произведения сложить.

Данное правило является выражением распределительного закона умножения.

Решим пример, обратный предыдущему, а именно произведение (864) разделим на множитель (2):

$$864:2=(800+60+4):2=$$
$$=800:2+60:2+4:2=$$
$$=400+30+2=432$$

Чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, достаточно каждое слагаемое разделить на это число и полученные частные сложить.

Данное правило является выражением распределительного свойства деления.

Разница между распределительным законом умножения и таким же свойством деления заключается в том, что в первом случае закон всегда выполняется, а во втором случае правило можно применить не для всяких слагаемых.

Например, требуется разделить 84 на 7; $(80+4):7$; слагаемые 80 и 4 на 7 не делятся и поэтому распределительное свойство деления при таком разложении числа применить невозможно.

Число 84 разложим на два слагаемых другим способом: $84=70+14$. Тогда можно использовать распределительное свойство деления:

$$84:7=(70+14):7=70:7+14:7=10+2=12$$

Рассмотренные нами правила «распределять» умножение и деление по слагаемым в общем виде можно записать следующим образом:

$(a+b+c)\cdot x=a\cdot x+$ $+b\cdot x+c\cdot x$	$(a+b+c):x=a:x+b:x+c:x$

Мы выше рассмотрели пару примеров, причем сначала взяли пример на умножение, а потом его преобразовали в пример на деление.

Другую пару примеров следует давать в иной последовательности; сначала предлагаем пример на деление (решение записывается справа):

$$
\begin{aligned}
&609:3=\\
&(600+0+9):3=\\
&600:3+0:3+9:3=\\
&200+0+3=203
\end{aligned}
$$

А потом предлагаем учащимся проверить ответ этого примера умножением, то есть показать выполнение распределительного закона умножения.

$$
\begin{aligned}
&203\cdot 3=\\
&(200+0+3)\cdot 3=\\
&200\cdot 3+0\cdot 3+3\cdot 3=\\
&600+0+9=609
\end{aligned}
$$

На следующем уроке следует обобщить данное свойство на вычитание, причем опять же рассматриваются рядом умножение и деление разности.

Пусть требуется разность чисел 1000 и 8 умножить на 3. Решим обычным способом: $(1000-8)\cdot 3=992\cdot 3=$ $=2976$. Если же распределить это умножение, то результат можно получить быстрее: $(1000-8)\cdot 3=1000\cdot 3-$ $-8\cdot 3=3000-24=2976$.

Рассмотрим обратное действие — деление.

Пусть требуется разность чисел 3000 и 24 разделить на 3. Решим обычным способом:

$$(3000-24):3=2976:3=992$$

Гораздо скорее можно решить этот пример, воспользовавшись распределительным свойством деления:

$$(3000-24):3=3000:3-24:3=1000-8=992$$

Соответствующие правила выгодно записать в совмещенной форме.

Чтобы $\dfrac{\text{умножить}}{\text{разделить}}$ разность на число, достаточно $\dfrac{\text{умножить}}{\text{разделить}}$ на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого $\dfrac{\text{произведения}}{\text{частного}}$ вычесть второе $\dfrac{\text{произведение}}{\text{частное}}$[1].

Данные правила в общем виде выглядят так:

$$(a - b) \cdot x = a \cdot x - b \cdot x \mid (a - b) : y = a : y - b : y$$

В качестве упражнений по данной теме надо предлагать такие задания, чтобы применение распределительного свойства умножения и деления заметно облегчало бы вычисления, например: $(8000 - 42) \cdot 2 =$; $(5000-35) : 5 =$.

Полезно иногда предложить для решения деформированные примеры на данные правила, в которых требуется восстановить некоторые числа:

$$(6000 - \square) : 3 = 1985$$

$$(\square - 64) : 2 = 3968$$

$$(2000 - \square) \cdot 4 = 7980; \quad (400 - \square) : \square = 198$$

$$(\square - 7) \cdot 3 = 879; \quad (\square - 3) \cdot \square = 2994$$

4. Одновременное изучение свойств сложения и умножения (вычитания и деления)

Как прибавить сумму к числу?

Пусть требуется решить пример:
$600 + (80 + 42 + 7) =$

Первый способ

1) Сначала вычисляем сумму в скобках $(80 + 42 + 7 = 129)$, а потом ее прибавляем к числу 600 : $(600 + 129 = 729)$.

Как умножить число на произведение?

Пусть требуется решить пример: $20 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 3) =$

Первый способ

1) Сначала вычисляем произведение в скобках $(2 \cdot 5 \cdot 3 = 30)$, а затем умножаем первое число на полученное произведение: $20 \cdot 30 = 600$.

[1] Правило в такой форме можно записать и в тетрадях; для выявления двух мыслей удобно слова под чертой выделить другим цветом.

Второй способ

Чтобы прибавить к числу сумму нескольких слагаемых, достаточно прибавить к нему сначала первое слагаемое, к полученному результату — второе слагаемое и т. д.

$$600 + 80 = 680;$$
$$680 + 42 = 722$$
$$722 + 7 = 729$$

Второй способ

Чтобы умножить число на произведение нескольких сомножителей, достаточно сначала умножить его на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д.

$$20 \cdot 2 = 40; \quad 40 \cdot 5 = 200$$
$$200 \cdot 3 = 600$$

Указанные свойства сложения и умножения можно записать в общем виде:

$$a + (x + y + z) = [(a + x) + y] + z$$
$$a \cdot (x \cdot y \cdot z) = [(a \cdot x) \cdot y] \cdot z.$$

Рассмотренное выше свойство умножения используется иногда при выполнении устного умножения (способ последовательного умножения).

Пусть требуется выполнить умножение $320 \cdot 6$.

Заменим число 6 произведением чисел 2 и 3, тогда получим:

$$320 \cdot 6 = 320 \cdot (2 \cdot 3) = (320 \cdot 2) \cdot 3 = 640 \cdot 3 = 1920$$

Рассмотрим еще один пример:

$$34 \cdot 27 = 34 \cdot 3 \cdot 9 = 102 \cdot 9 = 918$$

Как прибавить число к сумме?

Пусть требуется решить пример: $(236 + 71 + 100) + 29 =$

Первый способ

Найдем сумму в скобках $(236 + 71 + 100 = 407)$ и к ней прибавим данное число $(407 + 29 = 436)$.

Как умножить произведение на число?

Пусть требуется решить пример:

$$(36 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 2 =$$

Первый способ

Найдем произведение в скобках $(36 \cdot 5 \cdot 3 = 540)$ и его умножим на данное число $(540 \cdot 2 = 1080)$.

Второй способ

Чтобы прибавить к сумме нескольких слагаемых какое-нибудь число, достаточно его прибавить к одному из слагаемых, оставив остальные без изменения.

В рассматриваемом примере удобно прибавить число 29 ко второму слагаемому:

$(236+71+100)+29=$
$236+(71+29)+100=$
$236+100+100=436$

Второй способ

Чтобы умножить произведение нескольких сомножителей на какое-нибудь число, достаточно умножить один из сомножителей на это число, оставив остальные без изменения.

В рассматриваемом примере удобно умножить на 2 второй сомножитель

$(36\cdot5\cdot3)\cdot2=$
$=36\cdot(5\cdot2)\cdot3=$
$36\cdot10\cdot3=$
$=360\cdot3=1080$

Установленные здесь свойства сложения и вычитания можно обозначить в общем виде так:

$$(a+b+c)+x=a+(b+x)+c=(a+x)+b+c=a+b+(c+x)$$

$$(a\cdot b\cdot c)\cdot x=(a\cdot x)\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot x)\cdot c=a\cdot b\cdot(c\cdot x)$$

При выполнении упражнений по закреплению данных свойств необходимо предлагать такие задания, чтобы ученик сознательно выбирал тот способ, который быстрее всего приводит к цели.

Сложение

1. $(500+18+82)+69=$ (I способ)
2. $(500+31+82)+69=$ (II способ)

и т. п.

Как вычесть сумму из данного числа?

Пусть требуется вычесть от 729 сумму трех слагаемых: $729-(80+42+7)$.

Умножение

1. $(24\cdot25\cdot30)\cdot4=$ (I способ)
2. $(2\cdot50\cdot27)\cdot3=$ (II способ)

и т. п.

Как разделить данное число на произведение?

Пусть требуется разделить число 600 на произведение трех сомножителей: $600:(2\cdot5\cdot3)$.

Первый способ

Сначала вычисляем сумму в скобках ($80+42+$ $+7=129$), а потом вычитаем эту сумму из данного числа: $729-129=600$.

Второй способ

Чтобы вычесть из числа сумму нескольких слагаемых, достаточно вычесть из него сначала первое слагаемое, из полученной разности — второе слагаемое и т. д.

$729-80=649$
$649-42=607$
$607-7=600$

Первый способ

Сначала мы находим произведение в скобках ($2\cdot5\cdot3=30$), а потом делим число на найденное произведение: $600:30=20$.

Второй способ

Чтобы разделить число на произведение нескольких сомножителей, достаточно разделить его сначала на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель и т. д.

$600:2=300$; $300:5=60$
$60:3=20$

Выведенные свойства вычитания и деления записываются в общем виде:

$$a-(x+y+z)=[(a-x)-y]-z$$

$$a:(x\cdot y\cdot z)=[(a:x):y]:z$$

Рассмотренное здесь свойство деления облегчает устные вычисления (последовательное деление).

Например, вместо того чтобы делить на двузначное число 27, можно его заменить произведением $9\cdot3$ и разделить последовательно на 9 и на 3:

$$918:27=918:(9\cdot3)=(918:9):3=102:3=34$$

Предлагаются для самостоятельного решения аналогичные упражнения: $824:16=824:(8\cdot2)=\ldots$

Полезно решать и деформированные примеры на это правило:

$$\square:\square=\square:(\square\cdot3)=(\square:\square):3=105:3=35$$

Учащийся должен восстановить пропущенные числа.

Также в противопоставлении рассматриваются следующие два свойства:

Как вычесть из суммы данное число?

Пусть требуется решить пример: $(236+129+100)-29=$

Первый способ

Найдем сумму в скобках ($236+129+100=465$) и из нее вычтем данное число: $465-29=436$

Второй способ

Чтобы вычесть число из суммы нескольких слагаемых, достаточно его вычесть из одного слагаемого, оставив остальные без изменения.

В рассматриваемом случае удобно вычесть число 29 из второго слагаемого:

$$(236+129+100)-29=$$
$$=236+(129-29)+100=$$
$$=236+100+100=436$$

Как разделить произведение на данное число?

Пусть требуется решить пример: $(36\cdot 20\cdot 3):2$

Первый способ

Найдем произведение в скобках ($3\cdot 36\cdot 20=720\cdot 3=2160$) и его разделим на данное число: ($2160:2=1080$)

Второй способ

Чтобы разделить произведение нескольких сомножителей на какое-нибудь число, достаточно разделить один из сомножителей на это число, оставив остальные без изменения.

В рассматриваемом примере выгодно разделить на 2 третий сомножитель:

$$(3\cdot 36\cdot 20):2=3\cdot 36\times$$
$$\times(20:2)=36\cdot 10\cdot 3=1080$$

Запишем данные свойства в общем виде.

$$(a+b+c)-x=a+$$
$$+(b-x)+c=(a-x)+$$
$$+b+c=a+b+(c-x)$$

$$(a\cdot b\cdot c):x=(a:x)\cdot b\cdot c=$$
$$=a\cdot(b:x)\cdot c=$$
$$=a\cdot b\cdot(c:x)$$

Здесь мы использовали прием противопоставления действий на основе аналогии; например, сложение и умножение имеют сходные свойства в том отношении, что они являются действиями увеличения числа, а вычитание и деление сходны в смысле уменьшения числа.

В некоторых случаях уместно сопоставлять свойства взаимно обратных действий.

Довольно часто один и тот же материал полезно рассматривать при повторении в новых связях.

Так, выше мы рассматривали следующие пары свойств: Прибавление числа к сумме → Умножение произведения на число. Вычитание числа из суммы → Деление произведения на число.

Поучительно сопоставить при повторении следующие пары:

прибавление числа к сумме: $(236 + 62 + 100) + 38 =$	вычитание числа из суммы: $(236 + 3063 + 100) - 63 =$
умножение произведения на число: $(27 \cdot 25 \cdot 3) \cdot 4$	деление произведения на число: $(24 \cdot 200 \cdot 3) : 2 =$

Пусть первоначально было осуществлено противопоставление следующих вопросов:

прибавление суммы к числу: $a + (b + c + d) =$	умножение числа на произведение: $a \cdot (b \cdot c \cdot d) =$
вычитание суммы из числа: $a - (b + c + d) =$	деление числа на произведение $a : (b \cdot c \cdot d) =$

В другом случае интересно сравнить эти свойства в пределах действий одной и той же ступени, например, так:

последовательное сложение: $a + (b + c + d) = [(a + b) + c] + d$	Последовательное вычитание: $a - (b + c + d) = [(a - b) - c] - d$

Особенно важно одновременно рассмотреть последовательное умножение и деление:

последовательное умножение: $26 \cdot 36 = 26 \cdot (4 \cdot 9) = (26 \cdot 4) \cdot 9 = 104 \cdot 9 = 936$	

Пример, решенный последовательным умножением, тут же преобразуется в пример на деление.

Последовательное деление:

$936 : 36 = 936 : (9 \cdot 4) = (936 : 9) : 4 = 104 : 4 = 26$

Как прибавить разность к числу?

Пусть требуется решить пример: $247 + 96 =$

Первый способ

$247 + 96 = 247 + 90 + 6 = (247 + 90) + 6 = 337 + 6 = 343$

Второй способ

Заменим число 96 разностью $100 - 4$, то есть округлим его. Тогда имеем: $247 + 96 = 247 + (100 - 4) = (247 + 100) - 4 = 347 - 4 = 343$

Чтобы прибавить разность к числу, достаточно прибавить к нему уменьшаемое и вычесть вычитаемое.

$a + (b - c) = a + b - c$

Как отнять разность от числа?

Решим обратный пример: $343 - 96 =$

Первый способ

Заменим число 96 суммой $90 + 6$

$343 - 96 = 343 - (90 + 6) = 343 - 90 - 6 = 253 - 6 = 247$

Второй способ

Проще заменить число 96 разностью $100 - 4$, округлив его до ближайшего круглого числа. Тогда имеем: $343 - 96 = 343 - (100 - 4) = 343 - 100 + 4 = 243 + 4 = 247$

Чтобы вычесть разность от числа, достаточно вычесть из него уменьшаемое и прибавить вычитаемое.

$a - (b - c) = a - b + c$

Последние свойства используются для вычислений способом округления (в частности, при вычислениях на счетах).

После рассмотрения этих свойств целесообразно выполнять упражнения вперемежку на оба свойства:

$3029 + (100 - 2) =$	$3127 - (100 - 2) =$
$5986 + 997 =$	$6983 - 997 =$

При этом вначале целесообразно один и тот же пример преобразовывать в двух направлениях, Если первая пара примеров решалась в последовательности сложение $\rightarrow$ вычитание ($247 + 96 =$, $343 - 96 =$), то вторую пару можно предложить в порядке вычитание $\rightarrow$ сложение: ($6983 - 997 =$ и $5986 + 997 =$).

Уяснению сущности применяемого способа вычисления содействует также решение деформированных примеров:

$$358 + \square = 358 + \square - \boxed{6} = 458 - 6 = 452$$

$$\square - \square = \square - 1000 + 4 = 6730 + 4 = 6734$$

Рассмотрим аналогичные приемы устного выполнения умножения и деления.

Как умножить число на частное?

Пусть требуется решить пример: $86 \cdot 5$

Первый способ

$$86 \cdot 5 = (80 + 6) \cdot 5 = \\ = 80 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 430$$

Второй способ

Множитель 5 представим в виде частного ($5 = 10 : 2$)

Дальше можно вычислять так:

$$86 \cdot 5 = 86 \cdot (10 : 2) = \\ = (86 \cdot 10) : 2 = 860 : 2 = 430$$

Чтобы умножить число на частное, достаточно умножить его на делимое и полученное произведение разделить на делитель

$$a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$$

Как разделить число на частное?

Пусть требуется решить обратный пример: $430 : 5$

Первый способ

$$430 : 5 = (400 + 30) : 5 = \\ = 400 : 5 + 30 : 5 = \\ 80 + 6 = 86$$

Второй способ

Делитель 5 представим в виде частного ($5 = 10 : 2$)

Дальше решение выполняется так:

$$430 : 5 = 430 : (10 : 2) = \\ = (430 : 10) \cdot 2 = 43 \cdot 2 = 86$$

Чтобы разделить число на частное, достаточно разделить его на делимое и полученный результат умножить на делитель

$$a : (b : c) = a : b \cdot c$$

Выведенные свойства используются при устном решении примеров. Вначале целесообразно преобразовывать один и тот же пример, варьируя порядок преобразования, то есть пример на умножение заменить обратным примером на деление, а в другом случае поступить наоборот.

$$46 \cdot 50 = 46 \cdot 100 : 2$$
$$280 \cdot 25 = 280 \cdot 100 : 4$$

$$8300 : 50 = 8300 : 100 \cdot 2$$
$$2700 : 25 = 2700 : 100 \cdot 4$$

Весьма полезны упражнения с деформированными примерами.

$$\square \cdot 50 = \square \cdot 100 : 2 = 2300$$
$$\square : \square = \square : 100 \cdot 4 = 1600$$
$$\square \cdot 2 = 360 \cdot \square : 2 = 18\,000$$
$$\square : \square = \square : 1000 \cdot 4 = 12$$

Впоследствии уместно иногда сравнить решения примеров, которые содержат разные действия, но могут быть решены сходными приемами.

$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$3765 + 997 = 3765 +$$
$$+ (1000 - 3) =$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$
$$5782 - 997 = 5782 -$$
$$- (1000 - 3) =$$

$$a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$$
$$38 \cdot 50 = 38 \cdot (100 : 2) = \ldots$$
$$a : (b : c) = a : b \cdot c$$
$$6300 : 50 = 6300 : 100 \cdot 2 = \ldots$$

5. Изучение зависимости между компонентами и результатами действий

При систематизации знаний учащихся по определению неизвестного компонента полезно также устанавливать связи типа «сложение → умножение» и «вычитание → деление».

Как находить неизвестное слагаемое?

Пусть решается задача:

В классе было 20 мальчиков и несколько девочек. Всего в классе было 36 учащихся.

Сколько всего девочек было в классе?

Условие задачи кратко записывается так:

$$20 + x = 36$$

Как находить неизвестный сомножитель?

Пусть решается задача:

Купили несколько книг по 7 коп. за штуку и всего уплатили 42 коп.

Сколько книг было куплено?

Условие задачи кратко записывается так:

$$7 \cdot x = 42$$

Решение

$$x = 36 - 20 = 16$$

Ответ. В классе было 16 девочек.

Правило. *Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы двух слагаемых вычесть известное слагаемое.*

Решение

$$x = 42 : 7 = 6$$

Ответ. Купили 6 книг.

Правило. *Чтобы найти неизвестный сомножитель, надо произведение двух сомножителей разделить на известный сомножитель.*

Найденные зависимости записываются в общем виде.

$$A + B = C$$
$$A = C - B; \quad B = C - A$$

В этих формулах записан способ проверки сложения вычитанием.

$$M \cdot N = K$$
$$M = K : N; \quad N = K : M$$

В этих формулах записан способ проверки умножения делением.

По записанным формулам ученики формулируют оба правила проверки сложения и умножения.

Как находить неизвестное уменьшаемое?

Рассмотрим задачу:

На обед было подано несколько огурцов. За обедом съели 8 огурцов, и после обеда осталось еще 6 огурцов.

Сколько огурцов было подано к обеду?

Условие задачи запишется так:

$$x - 8 = 6$$

Решение

$$x = 6 + 8 = 14$$

Ответ. К обеду было подано 14 огурцов.

Правило. *Чтобы найти неизвестное уменьшае-*

Как находить неизвестное делимое?

Решим задачу:

Учитель раздал тетради 30 ученикам, причем каждому досталось по 2 тетради.

Сколько тетрадей было роздано ученикам?

Условие задачи запишется так:

$$x : 30 = 2$$

Решение

$$x = 2 \cdot 30 = 60$$

Ответ. Было роздано 60 тетрадей.

Правило. *Чтобы найти неизвестное делимое,*

мое, надо к разности прибавить вычитаемое

Как находить неизвестное вычитаемое?

Составим задачу обратную предыдущей.

На обед было подано 14 огурцов. Когда за обедом съели несколько из них, после обеда осталось 6 огурцов. Сколько огурцов съели за обедом?

Краткая запись условия задачи в виде уравнения:

$$14 - x = 6$$

Решение

$$x = 14 - 6 = 8$$

Ответ. За обедом съели 8 огурцов.

Правило. *Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо от уменьшаемого вычесть разность*

надо частное умножить на делитель

Как находить неизвестный делитель?

Составим следующую задачу.

Учитель раздал 60 тетрадей нескольким учащимся, причем каждый из них получил по 2 тетради. Сколько учащихся получили тетради?

Краткая запись условия задачи в виде уравнения:

$$60 : x = 2$$

Решение

$$x = 60 : 2 = 30$$

Ответ. Тетради получили 30 учащихся.

Правило. *Чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное*

С помощью этих двух зависимостей можно *проверять действия вычитание* и *деление*. Способы проверки этих действий запишем в виде формул, расположенных друг против друга:

$$A - B = C$$

Первый способ проверки вычитания (сложением):

$$C + B = A$$

Второй способ проверки вычитания (вычитанием):

$$A - C = B$$

$$M : N = K$$

Первый способ проверки деления (умножением):

$$K \cdot N = M$$

Второй способ проверки деления (делением):

$$M : K = N$$

Соответствующие правила проверки действий могут быть сформулированы учащимися самостоятельно или с помощью учителя.

6. Изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов[1]

В общепринятой ныне системе обучения арифметике данный раздел рассматривается как четыре отдельных вопроса, почти не связанные друг с другом.

Между тем одновременное рассмотрение вопроса, основанное на взаимно обратных действиях (сложения → умножения и вычитания → деления), позволяет более упорядоченно и основательно изучить данный материал за меньшее время.

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко используется слово *данные* вместо термина *компоненты.*

Наша практика обучения показывает, что для пятиклассников употребление обобщенного научного понятия *компоненты* никакой трудности не составляет.

Слово *данные* неточно отражает содержание понятия, так как, вообще говоря, можно задать не только компоненты действия, но и результат действия и соответственно варьировать, видоизменять компоненты, например:

$$\square + \square = 20; \quad \square \cdot \square = 24 \text{ и т. д.}$$

Понятие *данные числа* включает и компоненты, и результат действий. Целесообразно составить вместе с учениками и записать в тетрадях следующую таблицу:

Таблица 2

Действие	Компоненты			Результат действия
	первый		второй	
Сложение	20 слагаемое	+	10 слагаемое	= 30 сумма
Вычитание	40 уменьшаемое	—	15 вычитаемое	= 25 разность
Умножение	8 множимое	·	2 множитель	= 16 произведение
Деление	35 делимое	:	7 делитель	= 5 частное

[1] В психологическом исследовании А. Д. Виноградовой было установлено, что изучение данной темы в плане противопоставления сложения умножению осуществляется за значительно меньшее время при лучших показателях усвоения знаний. См. [13].

При проверке действия обратным действием полезно указать изменение роли компонентов, входящих в то и другое действия

$$8 \quad 2 = 16 \qquad 16 : 2 = 8$$

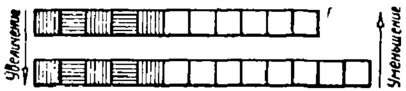
Множимое становится частным.
Множитель — делителем.
Произведение — делимым.

1. *Одновременное изучение изменения суммы и произведения*

На доске и в тетрадях записывается тема урока:

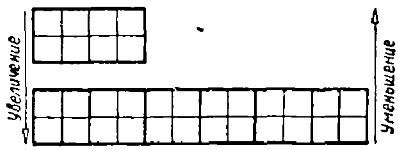
Изменение

суммы (рис. 3) *произведения* (рис. 4)



$$\begin{array}{r} 5+6=11 \\ +2 \quad +2 \\ \hline 5+8=13 \end{array}$$

Рис. 3



$$\begin{array}{r} 2 \cdot 4 = 8 \\ 3 \quad \cdot 3 \\ \hline 2 \cdot 12 = 24 \end{array}$$

Рис. 4

Имеется 5 черных квадратиков и 6 белых квадратиков.

Найдем сумму двух чисел:

$$5 + 6 = 11$$

Как изменится сумма, если одно из слагаемых, (например, число белых квадратиков) увеличить на 2?

Тогда всех квадратиков станет больше на 2.

Нарисован прямоугольник с длиной 2 *см* и шириной 4 *см*.

Подсчитаем, сколько квадратных сантиметров содержится в прямоугольнике:

$$2 \cdot 4 = 8$$

Как изменится произведение, если один из сомножителей (например, длину) увеличить в 3 раза?

Тогда и вся площадь увеличится в 3 раза.

Проверим:

$$\begin{array}{r} 5+6=11 \\ +2+2 \\ \hline 5+8=13 \end{array}$$

Второе слагаемое было равно 6, теперь оно увеличилось на 2 и стало равняться $6+2=8$.

Прежняя сумма была равна $5+6=11$, а теперь сумма равна $5+8=13$.

Сумма увеличилась на $13-11=2$ единицы.

Правило. *Если одно из слагаемых увеличить на несколько единиц, а другое оставить без изменения, то сумма увеличится на столько же единиц.*

Проверим:

$$\begin{array}{l} 2\cdot 4=8 \text{ (кв. см)} \\ 3\cdot \quad \cdot 3 \\ \hline 6\cdot 4=24 \text{ (кв. см)} \end{array}$$

Второй сомножитель (длина) была равна 4 *см*, теперь она увеличилась в 3 раза и стала равняться 4 *см*. $\cdot 3=12$ *см*.

Прежнее произведение было равно $2\cdot 4=8$ (*кв. см*), а теперь произведение равно $2\cdot 12=24$ (*кв. см*).

Произведение увеличилось в 24 *кв. см* : 8 *кв. см* = = 3 (раза).

Правило. *Если один из сомножителей увеличить в несколько раз, а другой оставить без изменения, то произведение увеличится во столько же раз.*

После рассмотрения этих двух случаев надо разобрать противоположное изменение компонентов, причем для иллюстрации берутся те же самые числа.

Рассмотрим обратную задачу:

Как изменится сумма, если одно из слагаемых уменьшить на несколько единиц?

Допустим, что сначала была найдена сумма двух слагаемых $5+8=13$.

Затем мы уменьшим второе слагаемое на несколько единиц, например на 2 единицы. (Иллюстрируем это с помощью черных и белых квадратиков.)

Рассмотрим обратную задачу:

Как изменится произведение, если один из сомножителей уменьшить в несколько раз?

Допустим, что сначала была найдена площадь большего прямоугольника: 6 $\cdot$ $\cdot$ 4 = 24 (*кв. см.*)

Затем мы уменьшим длину прямоугольника в 3 раза.

Иначе говоря, первый сомножитель был равен 6 *см*, а теперь будет равен 6 *см* : : 3 = 2 *см*.

Второе слагаемое вначале было равно 8, теперь оно уменьшилось на 2 и стало равняться $8 - 2 = 6$

Новая сумма составит $5 + 6 = 11$.

Сумма уменьшилась на $13 - 11 = 2$ единицы.

Коротко это изменение можно записать так[1]:

$$\begin{array}{r}5 + 8 = 13\\ -2 = -2\\ \hline 5 + 6 = 11\end{array}$$

Правило. *Если одно из двух слагаемых уменьшить на несколько единиц, а второе оставить без изменения, то и сумма уменьшится на столько же единиц.*

Площадь меньшего прямоугольника будет равна $2 \cdot 4 = 8$ (*кв. см*).

Произведение уменьшилось в 24 . 8 = 3 (раза).

Сокращенно это изменение можно записать так[1]:

$$\begin{array}{c}6 \cdot 4 = 24\\ :3 \quad\;\; :3\\ \hline 2 \cdot 4 = 8\end{array}$$

Правило. *Если один из двух сомножителей уменьшить в несколько раз, а второй оставить без изменения, то произведение уменьшится во столько же раз.*

Выведенные правила можно записать в общем виде следующим образом:

$$\begin{array}{l}A + B = C\\ +X \quad +X\\ \hline (A+X)+B=C+X\end{array} \qquad \begin{array}{l}A \cdot B = C\\ \cdot X \quad\; \cdot X\\ \hline (A\cdot X)\cdot B = C\cdot X\end{array}$$

Аналогично предыдущему записываются в общем виде два последних правила:

$$\begin{array}{l}A + B = C\\ -X \quad -X\\ \hline (A-X)+B=C+X\end{array} \qquad \begin{array}{l}A \cdot B = C\\ :X \quad\; :X\\ \hline (A:X)\cdot B=C:X\end{array}$$

После рассмотрения этих двух правил необходимо выполнить следующие упражнения.

а) Поставить недостающие числа в следующих кратких записях изменения суммы и произведения и пояснить, какие изменения произошли с суммой и произведением.

[1] Ученики без труда понимают смысл числа с поставленным перед ним знаком: уменьшить на 2(—2); уменьшить в 2 раза (:2) и т. д.

$$\begin{array}{l} 100+20=120\\ \quad +\square+\square\\ \hline \square+25=125 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10\cdot 40=400\\ \quad \cdot\square \quad \cdot\square\\ \hline \square\cdot 80=800 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{50}+37=87\\ -5 \qquad -\square\\ \hline \square+37=\square \end{array} \qquad \begin{array}{l} 300\cdot 2=600\\ \; :5 \qquad :\square\\ \hline \square\cdot 2=\square \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \square+\square=\square\\ \qquad +50 \quad +50\\ \hline 1000+250=2150 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \square\cdot\square=\square\\ \quad \cdot 5 \qquad \cdot 5\\ \hline 50\cdot 20=1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \square+\square=\square\\ -20 \qquad\quad -20\\ \hline 80+300=380 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \square\cdot\square=\square\\ :10 \qquad\quad :10\\ \hline 3\cdot 4 \qquad =12 \end{array}$$

После упражнений в изменении одного из двух компонентов надо перейти к выяснению того, как будет изменяться результат, когда изменяются оба компонента одновременно.

Возможны следующие случаи:

1. Оба слагаемых (сомножители) увеличиваются.

$$\begin{array}{l} 100+20=120\\ +10+3 \quad +13\\ \hline 110+23=133 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10\cdot 40=400\\ \cdot 2 \;\cdot 3 \qquad \cdot 6\\ \hline 20\cdot 120=2400 \end{array}$$

После рассмотрения этих примеров уместно предложить для восстановления деформированную запись:

$$\begin{array}{l} \square+\square=300\\ +10+25+35\\ \hline \square+225=\square \end{array} \qquad \begin{array}{l} 20\cdot 30=600\\ \;\cdot\square\cdot 5 \quad \cdot 10\\ \hline 40\cdot\square=\square \end{array}$$

2. Оба слагаемых (сомножителя) уменьшаются.

$$\begin{array}{l} 300+500=800\\ -10-20 \quad -30\\ \hline 290+480=770 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 100\cdot 20=2000\\ :5 \quad :2 \qquad :10\\ \hline 20\cdot 10=200 \end{array}$$

Затем предлагается для восстановления деформированная запись:

$$\begin{array}{l}600+200=800\\ \underline{-\square+-\square-40}\\ 550+180=760\end{array}\qquad\begin{array}{l}\square\cdot 60=3000\\ \underline{:\square:2\quad :20}\\ \square\cdot\square\;=300\end{array}$$

3. Один из компонентов увеличивается, а другой уменьшается.

$$\begin{array}{l}200+40=240\\ \underline{+10-20\;-10}\\ 210+20=230\end{array}\qquad\begin{array}{l}6\cdot 40=240\\ \underline{\cdot 20:5\quad \cdot 4}\\ 120\cdot 8=960\end{array}$$

Предлагаем восстановить следующую деформированную запись:

$$\begin{array}{l}\square+300=1000\\ \underline{+400-\square-100}\\ \square+\square=900\end{array}\qquad\begin{array}{l}20\cdot\square=800\\ \underline{\cdot\square\quad :6\quad \cdot 2}\\ \square\cdot\square=1600\end{array}$$

После того как учащиеся свыкнутся с решением подобных упражнений, можно перейти к *обобщенным упражнениям*, когда даны только изменения некоторых чисел, а учащиеся должны найти соответствующие изменения остальных чисел; кроме того, они должны уметь проиллюстрировать данную зависимость на каком-либо примере или задаче.

Изменение суммы

Таблица 3

Первое слагаемое	Второе слагаемое	Сумма
+ 20	не изм.	$\square$
не изм.	− 30	$\square$
не изм.	$\square$	+ 40
$\square$	не изм.	− 30
+ 10	+ 20	
+ 40	$\square$	+ 50
− 3	− 7	$\square$
$\square$	− 15	− 20
+ 20	− 50	$\square$
$\square$	+ 100	+ 40

Изменение произведения

Таблица 4

Первый сомножитель	Второй сомножитель	Произведение
· 2	не изм.	$\square$
не изм.	: 3	$\square$
не изм.	$\square$	· 12
$\square$	не изм.	: 4
· 5	· 3	$\square$
· $\square$	· 9	· 18
: 6	: 2	$\square$
$\square$	: 3	: 12
· 12	: 6	$\square$
$\square$	· 6	· 3

При выполнении, например, последнего задания ученик должен сначала без иллюстрации *предсказать*, что первое слагаемое надо уменьшить на 60; так как второе слагаемое при этом увеличивается на 100, соответственно сумма увеличится на 40.

После этого он проверяет свой ответ, *придумав* пример.

$$\begin{array}{l} 600 + 400 = 1000 \\ -60 + 100 + 40 \\ \hline 540 + 500 = 1040 \end{array}$$

Еще лучше, если им будет составлена текстовая задача.

За месяц мастер обработал 600 деталей, а ученик 400.

На следующий месяц мастер обработал на 60 деталей меньше, а ученик на 100 деталей больше.

На сколько деталей больше обработали они во второй месяц, чем в предыдущий?

Рассмотрим, как должно выполняться последнее задание.

Ученик *предсказывает* изменение первого сомножителя, его надо *уменьшить* в 2 раза; так как при этом второй сомножитель увеличивается в 6 раз, то произведение увеличится при этом в 3 раза.

Затем он проверяет свой ответ, иллюстрируя его составленным примером:

$$\begin{array}{l} 200 \cdot 30 = 6000 \\ :2 \quad \cdot 6 \qquad \cdot 3 \\ \hline 100 \cdot 180 = 18000 \end{array}$$

Желательно, чтобы ученик подобрал сюжет задачи, иллюстрирующий данное соотношение.

Размеры одного прямоугольного участка были следующие: длина 200 *м*, ширина 30 *м*. Длина второго прямоугольного участка в 2 раза меньше длины первого участка, а ширина второго участка в 6 раз больше ширины первого участка.

Во сколько раз площадь второго участка больше площади первого участка?

2. *Изменение разности в зависимости от изменения вычитаемого и изменение частного в зависимости от изменения делителя.*

Изменение разности и частного также удобно изучить приемом, аналогичным изложенному выше.

Различие здесь будет заключаться в том, что данный раздел удобнее разбить на два:

1. Изменение разности в зависимости от изменения уменьшаемого и изменение частного в зависимости от изменения делимого.

2. Изменение разности (частного) в зависимости от изменения вычитаемого (делителя).

В качестве завершающего этапа изучения этих разделов целесообразно предложить ученикам такие упражнения, в которых даны одни лишь изменения; учащийся должен по этим условиям определить изменение третьего числа, иллюстрируя его в отдельных случаях на конкретных примерах.

Изменение разности — Таблица 5 | *Изменение частного* — Таблица 6

Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность	Делимое	Делитель	Частное
+ 10	+ 20	□	· 15	· 3	□
□	+ 30	+ 20	: 18	: 6	□
— 20	— 30	□	□	· 3	: 2
□	+ 15	+ 5	: 12	□	: 4
+ 4	— 1	□	□	· 4	· 3
— 2	+ 5	□	· 16	· 8	□
□	— 20	+ 60	· 4	: 3	□
+ 20	□	— 40	: 5	□	: 2

ГЛАВА II
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Для общепринятой ныне системы изучения обыкновенных дробей характерны те же недостатки, что и для обучения арифметике целых чисел в начальной школе, а именно:

1) Взаимно обратные действия и операции изучаются в настоящее время вне связи друг с другом, одно после другого, а не совместно одно с другим.

Наш опыт показывает, что именно второй путь обладает серьезными преимуществами перед традиционной методикой.

Так, например, раздробление и укрупнение долей (сокращение дробей) выгодно и удобно изучать одновременно; обращение смешанного числа в неправильную дробь и обращение неправильной дроби в смешанное число — удобно также рассматривать на одних и тех же уроках.

Правила сложения и вычитания дробей целесообразно ввести одновременно.

2) По действующим ныне программам три взаимно связанные задачи: нахождение части числа, нахождение числа по его части, нахождение отношения чисел — изучаются в отрыве друг от друга, в разных классах (V и VI классы).

Здесь целесообразно использовать цикличность знаний путем совместного рассмотрения всех трех задач (в V классе).

Как следствие предыдущего, вытекает необходимость одновременного изучения двух видов задач на нахождение процентов числа и на нахождение числа по его процентам. Изучение вслед за ними процентного отношения позволяет завершить цикл знаний по теме «Задачи на проценты».

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко (Учпедгиз, 1964) глава «Основные понятия» развертывается в следующей последовательности параграфов:

50. «О долях единицы.

51. Изображение дробей.

52. Возникновение дробей.

53. Сравнение дробей по величине.

54. Дроби правильные и неправильные. Смешанные числа.

55. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование.

56. Обращение целого числа в неправильную дробь.

57. Изменение величины дроби с изменением ее членов.

58. Сокращение дробей.

59. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю».

В нашей системе обучения основные понятия о дробях рассматривались в следующей последовательности:

1. Возникновение дробей и их изображение.

2. Сравнение дробей по величине. Изменение величины дроби с изменением ее членов.

3. Дроби правильные и неправильные.

4. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование.

5. Основное свойство дроби. Раздробление и укрупнение (сокращение) дробей.

В нашей системе некоторые вопросы объединены, для чего внесены следующие коррективы в традиционное расположение материала.

При изучении сравнения дробей рассматривается изменение величины дроби от уменьшения и увеличения одного из членов дроби на *несколько единиц*.

Тема «Изменение величины дроби от уменьшения — увеличения одного из членов в несколько раз» — не предшествует теме «Основное свойство дробей», как это имеет место в учебнике И. Н. Шевченко, а изучается позже, совместно с умножением и делением дробных чисел на целое число.

1. Возникновение дробей и их изображение

На доске вычерчивается отрезок, длина которого равна единице, и он делится на несколько равных частей, например на 6 (рис. 5).

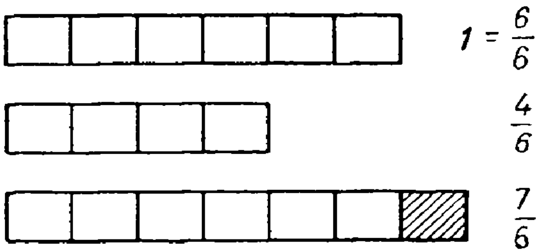


Рис. 5

Выясняется, что в 1 единице содержится **шесть шестых** частей, что записывается так: $1 = \frac{6}{6}$.

Если взять четыре таких доли, то получается дробь $\frac{4}{6}$; семь таких долей образуют число $\frac{7}{6}$.

Для иллюстрации дробей используются круги, прямоугольники и их части, вырезанные из картона или бумаги (рис. 6, 7, 8, 9).

Белых частей — $\frac{5}{8}$ круга; заштрихованных частей $\frac{3}{8}$ круга

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$ $\qquad$ $\frac{8}{8} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

При введении понятия дроби предлагаются упражнения двух видов:

1) По рисунку, имеющемуся на доске или в книге, *назвать* дробное число и *записать* его.

Например, по рисунку 6 ученик должен определить, что там изображено пять восьмых круга и написать: $\frac{5}{8}$.

2) Предлагается учащимся нарисовать в тетрадях круг или прямоугольник и заштриховать $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ этой фигуры.

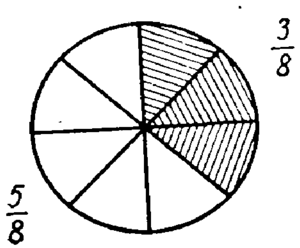


Рис. 6

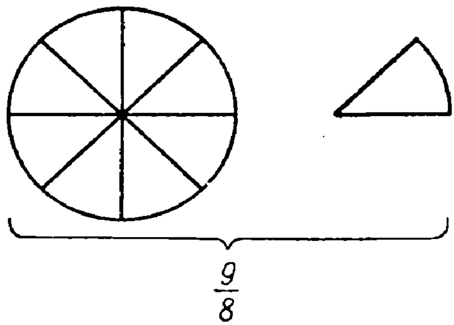


Рис. 7

Уже на первом уроке можно записывать действия сложения и вычитания дробей (конечно, без всяких правил, только на основе «здравого смысла»), например, так: в одном круге *восемь восьмых* долей; пишу: $1 = \frac{8}{8}$; да еще отдельно дана одна восьмая доля; восемь восьмых да одна восьмая — девять восьмых долей: $\frac{8}{8} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ (рис. 7).

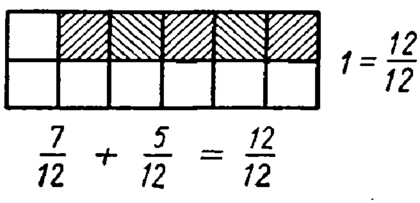


Рис. 8

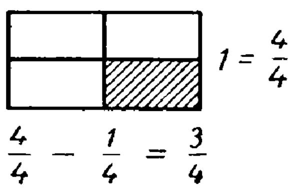


Рис. 9

Прямоугольник разделен на четыре четвертых доли; пишу: $1 = \frac{4}{4}$; из них одна доля закрашена. Остается белых долей три четвертых: $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (рис. 9).

На вводных уроках необходимо использовать для упражнений в записи и чтении дробей десятичные единицы измерения, скажем, так: в метре десять дециметров; значит, 1 дециметр — это одна десятая доля метра; поэтому пишут:

$$1\ \text{дм} = \frac{1}{10}\ \text{м};\ \ 3\ \text{дм} = \frac{3}{10}\ \text{м}.$$

Предлагаются далее упражнения в двусторонних преобразованиях.

$$7\ \text{дм} = \frac{\square}{\square}\ \text{м}$$

$$\square\ \text{дм} = \frac{23}{100}\ \text{м}$$

$$25\ \text{коп.} = \frac{\square}{\square}\ \text{руб.}$$

$$\square\ \text{коп.} = \frac{37}{100}\ \text{руб.}$$

$$\square\ \text{ц} = \frac{7}{10}\ \text{т}$$

$$6\ \text{ц} = \frac{\square}{\square}\ \text{т и т.д.}$$

2. Сравнение дробей по величине. Изменение величины дроби в зависимости от изменения членов дроби

При введении сравнения дробей удобно иллюстрировать дроби с помощью полосок бумаги или нарисованных отрезков.

Сначала сравниваются дроби с одинаковыми знаменателями (рис. 10).

Сравнивая длины отрезков, выясняем, что $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

Что одинакового в этих дробях? (Знаменатели.) У какой дроби числитель больше (меньше)? (У первой дроби числитель больше, чем у второй.)

Правило формулируется в двух видах:

Из двух дробей с равными знаменателями та *больше*, у которой числитель *больше*.

Например: $\frac{17}{10} > \frac{9}{10}$, так как $10 = 10$ и $17 > 9$.

Из двух дробей с равными знаменателями та *меньше*, у которой числитель *меньше*.

Например: $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$, так как $3 = 3$, и $2 < 5$.

Для вывода правила сравнения дробей с разными знаменателями надо взять дроби, *резко* различающиеся знаменателями:

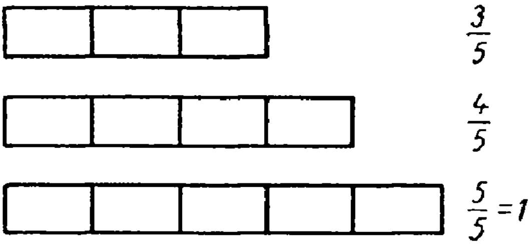


Рис. 10

Сравниваем дроби: $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{3}$ (рис. 11). Шестая часть меньше *третьей* части: $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$. Две шестых части будут также меньше двух третьих частей $\frac{2}{6} < \frac{2}{3}$.

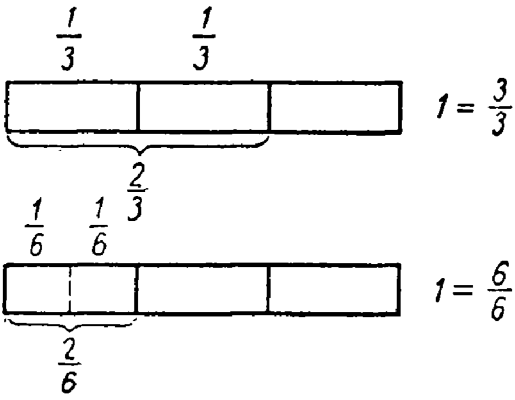


Рис. 11

Приходим к выводу.

Из двух дробей с общим числителем та $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$, у которой знаменатель $\frac{\text{меньше}}{\text{больше}}$.

$\frac{2}{6} < \frac{2}{3}$, так как $2 = 2$ и $6 > 3$.	$\frac{2}{7} > \frac{2}{10}$, так как $2 = 2$ и $7 < 10$.

После изучения темы о сравнении дробей выполняются следующие упражнения:

1. Сравнить дроби с общим знаменателем: $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$; $\frac{7}{10}$ и $\frac{5}{10}$ и т. д.

2. Сравнить дроби с общим числителем: $\frac{6}{9}$ и $\frac{6}{7}$; $\frac{9}{15}$ и $\frac{9}{10}$; $\frac{3}{20}$ и $\frac{3}{21}$.

3. Дописать недостающие члены дроби в следующих выражениях: $\frac{9}{10} < \frac{9}{\square}$; $\frac{6}{5} > \frac{6}{\square}$; $\frac{\square}{5} > \frac{2}{5}$; $\frac{3}{7} < \frac{\square}{7}$; $\frac{10}{\square} > \frac{10}{15}$; $\frac{5}{7} < \frac{5}{\square}$; $\frac{6}{7} < \frac{\square}{8}$; $\frac{3}{8} > \frac{\square}{9}$ и т. д.

Решение этих упражнений сопряжено для учащихся с преодолением ситуации затруднения и по этой причине они содействуют глубокому усвоению данной зависимости.

Решение прямого примера на сравнение дробей протекает примерно так:

$\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$; их надо сравнить. Эти дроби имеют общий знаменатель ($7 = 7$); из двух дробей с общим знаменателем та больше, у которой числитель больше; $5 > 3$, значит, $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

Решение деформированного примера протекает иначе, в форме более сложного рассуждения, например, $\frac{5}{7} < \frac{5}{\square}$; данные дроби имеют равные числители; из двух дробей с равными числителями та *меньше*, у которой знаменатель *больше*; первая дробь $\frac{5}{7}$ должна быть меньше второй дроби $\frac{5}{\square}$; значит, знаменатель 7 должен быть больше числа $\square$ и наоборот: число $\square$ меньше числа 7; вместо неизвестного числа $\square$ можно взять любое число, меньшее 7, (1, 2, 3, 4). Имеем: $\frac{5}{7} < \frac{5}{\boxed{3}}$; $\frac{5}{7} < \frac{5}{4}$ и т. д.

Из анализа решения второго примера видно, как важно в математике умение *обращать* суждения.

Исходное суждение: если даны две дроби с одинаковыми знаменателями, причем числитель первой дроби больше числителя второй дроби, то первая дробь будет больше второй дроби.

Обращенное суждение: если две дроби имеют одинаковые знаменатели и первая дробь больше второй дроби, то числитель первой дроби должен быть больше числителя второй дроби.

Опыт показывает, что применение только первой (прямой) формы не может обеспечить ученику понимания им второй формы рассуждения.

Применение обеих логических форм является хорошим средством развития математического мышления вообще.

При ознакомлении учеников с приемами сравнения дробей надо предлагать им вопросы и примеры как на одну, так и на другую формы рассуждения.

1. Две дроби имеют равные числители. Знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби. Какая дробь больше? Привести пример.

2. Первая дробь больше второй дроби, причем у них числители одинаковы. Знаменатель которой из этих дробей больше? Привести пример.

Удобно иногда предлагать такие *неопределенные* упражнения в краткой символической записи:

$$\frac{5}{\square} > \frac{5}{\square}; \qquad \frac{\square}{8} < \frac{\square}{8}$$

$$\frac{\square}{10} > \frac{8}{\square}; \qquad \frac{5}{\square} < \frac{\square}{7} \text{ и т. д.}$$

В связи с рассмотрением вопроса о сравнении дробей изучается вопрос об изменении величины дроби в зависимости от изменения одного из членов дроби.

Пусть дана дробь $\frac{5}{8}$. Увеличим числитель дроби на 2. Получим новую дробь: $\frac{5+2}{8}=\frac{7}{8}$.

Была дробь $\frac{5}{8}$, стала дробь $\frac{7}{8}$. Эти две дроби имеют общий знаменатель, а числитель второй дроби больше; значит, вторая дробь больше первой дроби: $\frac{5}{8}<\frac{7}{8}$.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть была дана дробь $\frac{7}{8}$.

Уменьшим числитель на 2. Получим дробь $\frac{7-2}{8}=\frac{5}{8}$, которая меньше первоначальной дроби: $\frac{7}{8}>\frac{5}{8}$.

Формулируем правило:

Если числитель дроби $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$, оставив знаменатель без изменения, то величина дроби $\frac{\text{увеличится}}{\text{уменьшится}}$.

Аналогично выводится второе правило:

Если знаменатель дроби $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$, оставив числитель без изменения, то величина дроби $\frac{\text{уменьшится}}{\text{увеличится}}$.

Для закрепления данного материала полезно варьировать задания.

1. Дана дробь, числитель ее увеличили на 3. Что будет больше: первоначальная дробь или новая дробь? Привести пример.

2. Дана дробь. После изменения числителя она увеличилась. В бо́льшую или меньшую сторону *изменили* числитель? Привести пример.

3. Знаменатель некоторой дроби уменьшили на 2. Как изменилась дробь: увеличилась или уменьшилась? Привести пример.

4. Когда *изменили* знаменатель дроби, величина дроби уменьшилась. Что сделали со знаменателем: увеличили или уменьшили его? Привести пример.

3. Дроби правильные и неправильные

При введении понятий *правильные и неправильные дроби* необходимо использовать противопоставление этих понятий.

Вводятся определения:

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется правильной.

Правильная дробь меньше единицы.

Например: $\frac{5}{6} < 1$; $\frac{7}{100} < 1$; $\frac{999}{1000} < 1$ — все эти дроби — правильные дроби.

Дробь, у которой числитель равен знаменателю или больше его, называется неправильной.

Неправильная дробь равна единице или больше единицы (или говорят: не меньше единицы). Например: $\frac{3}{3} = 1$; $\frac{6}{5} > 1$; $\frac{105}{100} > 1$; $\frac{1000}{1000} = 1$ — все эти дроби — неправильные дроби.

Упражнения по данной теме предлагаются в следующих вариантах:

1. Какая дробь называется неправильной (правильной)? Придумать несколько таких дробей.

2. Назовите какую-нибудь неправильную дробь $\left(\frac{7}{5}\right)$. Почему считаешь эту дробь неправильной?

3. На сколько пятых долей названная дробь $\frac{7}{5}$ больше единицы? (В единице пять пятых долей; $1 = \frac{5}{5}$; **семь пятых** больше **пяти пятых** на **две пятых**: $\frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$.)

4. Дана дробь $\frac{7}{8}$. Какая это дробь: правильная или неправильная? На сколько долей данная дробь меньше 1? (В единице восемь восьмых долей; $\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$; дробь $\frac{7}{8}$ меньше единицы на $\frac{1}{8}$.)

Следует предлагать также упражнения на сравнение дробей посредством нахождения *избытка* над единицей или *недостатка* до единицы.

5. Какая дробь больше: $\frac{7}{8}$ или $\frac{8}{9}$? От $\frac{7}{8}$ до 1 не хватает $\frac{1}{8}\left(\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}\right)$. От $\frac{8}{9}$ до 1 не хватает $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{8}>\frac{1}{9}$, значит и наоборот $\frac{7}{8}<\frac{8}{9}$.

6. Что больше: $\frac{9}{7}$ или $\frac{15}{13}$? Обе дроби неправильные. Надо их сравнить с единицей. $\frac{9}{7}$ больше 1 на $\frac{2}{7}\left(\frac{9}{7}-\frac{7}{7}=\frac{2}{7}\right)$. $\frac{15}{13}$ больше 1 на $\frac{2}{13}\left(\frac{15}{13}-\frac{13}{13}=\frac{2}{13}\right)$; $\frac{2}{7}>\frac{2}{13}$. В первом случае избыток над единицей больше, чем во втором случае; значит, $\frac{9}{7}>\frac{15}{13}$.

4. Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко (Учпедгиз, 1964 г.) эта тема изучается в порядке, противоречащем логике вопроса, а именно:

1. Обращение неправильной дроби в смешанное число.
2. Обращение смешанного числа в неправильную дробь.
3. Обращение целого числа в неправильную дробь.

Здесь совершенно не рассматривается случай обращения неправильных дробей, равных целому числу (например: $\frac{3}{3}=1$; $\frac{10}{2}=5$).

Кроме того, логически более оправданным является порядок, когда случай $2=\frac{8}{4}$ предшествует случаю $2\,\frac{1}{4}=$

$$=\frac{9}{4};$$

ибо решение второго примера опирается как на промежуточное звено, — на превращение целого числа в неправильную дробь.

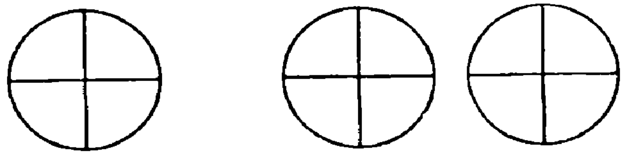
Кроме того, замена целого и смешанного числа равной ему неправильной дробью должна считаться *исходной* операцией хотя бы потому, что при этом выполняются более простые действия (умножение и сложение).

Таким образом, данную тему целесообразно рассматривать как две подтемы:

а) Обращение целого числа в неправильную дробь и обратное превращение.

б) Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное превращение.

Изучение первого вопроса выглядит так (рис. 12).



$1 = \frac{4}{4}$ $\qquad$ $2 = \frac{4 \cdot 2}{4} = \frac{8}{4}$

Рис. 12

В одном круге четыре четвертых частей: $1 = \frac{4}{4}$.

В двух таких кругах будет в 2 раза больше частей:

$$2 = \frac{4 \cdot 2}{4} = \frac{8}{4}.$$

Сразу же рассматривается обратная задача: сколько целых кругов можно образовать из 12 четвертых долей круга?

$$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3.$$

При закреплении этого материала упражнения предлагаются на взаимно обратные преобразования *одновременно:* $3 = \frac{\square}{7}$; $\frac{15}{3} = \square$; $\frac{\square}{5} = 4$; $\frac{32}{4} = \square$; $\frac{12}{\square} = 3$; $2 = \frac{\square}{10}$; $7 = \frac{42}{\square}$ и т. п.

Затем вводится понятие о смешанном числе, как числе, состоящем из целого числа и дроби: $2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Предлагаются упражнения на правильную запись смешанных чисел: $3 + \frac{1}{4} = \square$; $\square + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$; $5 + \frac{\square}{\square} = 5\frac{1}{4}$.

Обращение смешанного числа в неправильную дробь и обратное преобразование изучаются *одновременно* (рис. 13).

Сразу же решается обратная задача: заменить неправильную дробь смешанным числом $\frac{11}{4} = $ ——.

Решение: в 11 четвертых содержатся по 4 четвертых 2 раза. Итак, 2 целых и еще 3 в остатке; остаток 3 означает три четвертых: $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Упражнения на оба преобразования предлагаются *вперемежку*, причем на первом этапе одна операция *проверяется* обратной операцией: $\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}$. Проверка: $3\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} = \frac{19}{5}$.

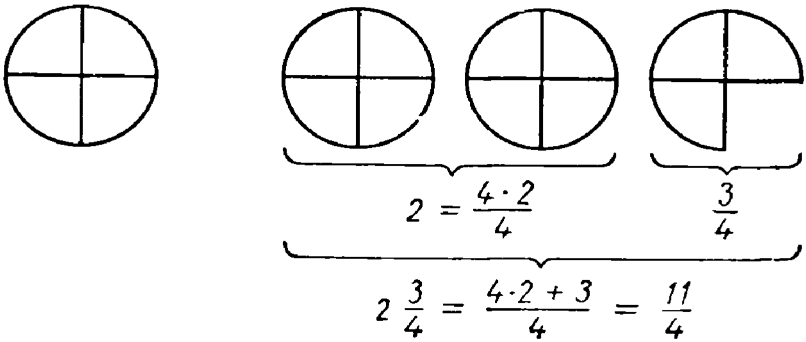


Рис. 13

Среди упражнений целесообразно предлагать **деформированные** примеры:

$$\frac{18}{7} = 2\frac{\square}{\square}; \quad 4\frac{3}{5} = \frac{\square}{\square};$$

$$3\frac{\square}{7} = \frac{26}{7}; \quad 3\frac{\square}{5} = \frac{\square}{5}; \quad \frac{25}{\square} = 8\frac{\square}{\square};$$

$$5\frac{\square}{\square} = \frac{21}{\square}; \quad \frac{41}{\square} = 6\frac{\square}{6};$$

$5\frac{3}{5} = 3\frac{\square}{5}$; $8\frac{12}{7} = 9\frac{\square}{7}$; $8\frac{15}{10} = 6\frac{\square}{10}$; $5\frac{\square}{6} = 6\frac{5}{6}$ и т. д.

5. Основное свойство дроби

В «Арифметике» И. Н. Шевченко, как и других методических пособиях, основное свойство дроби выводится на основе двукратного изменения дроби: сначала дробь увеличивают в несколько раз, а потом ее уменьшают во столько же раз.

Между тем основное свойство дроби удобнее вводить непосредственно, как изменение *вида* дроби при заведомом сохранении ее величины.

Об изменении величины дроби в зависимости от изменения в *несколько раз* одного из ее членов следует говорить позже в связи с изучением умножения и деления дроби на целое число, так как, если, например, требуется *записать*, что величина дроби $\frac{2}{3}$ от увеличения знаменателя в 4 раза уменьшилась в 4 раза, то наиболее удобная запись этого преобразования такова: $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3 \cdot 4}$, а это деление дроби на целое число.

Сказанное еще раз убеждает в необходимости совместного изучения увеличения (уменьшения) дроби в несколько раз и соответственно умножения (деления) дроби на целое число.

Основное свойство дроби изучаем в таком порядке (рис. 14).

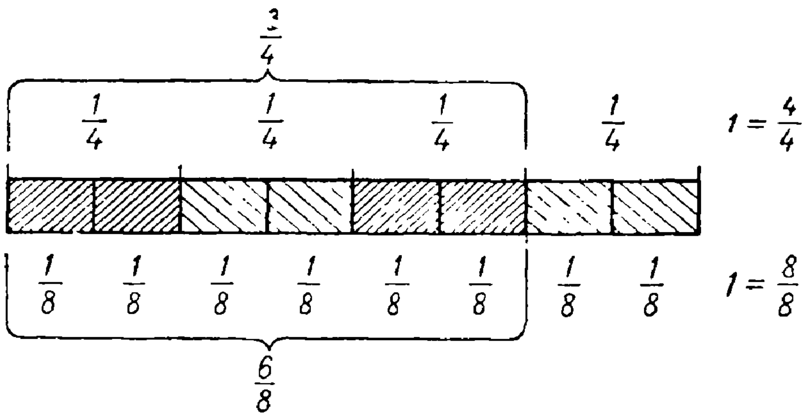


Рис. 14

Проводим беседу. Сколько четвертых долей содержится в единице? (Четыре четвертых долей: $1 = \frac{4}{4}$.) Отделите три четвертых доли отрезка прямой. Поделим каждую четвертую долю отрезка пополам.

Если единицу разделить на восьмые доли, то сколько таких долей содержится в единице? (Восемь восьмых долей : $1 = \frac{8}{8}$.) В одной четвертой сколько восьмых долей $\left(\frac{1}{4} = \frac{2}{8}\right)$.

В трех четвертых сколько восьмых долей? $\left(\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.\right)$ $\frac{3}{4}$ и $\frac{6}{8}$ — это равные дроби, так как они изображают длину одного и того же отрезка AB.

Во сколько раз числитель второй дроби больше числителя первой дроби? (В 2 раза.)

Во сколько раз знаменатель второй дроби больше знаменателя первой дроби? (В 2 раза.) Когда же величина дроби не изменяется? Записываем подробно:

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$; и наоборот: $\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$.

После того как проведены наблюдения еще на 1—2 аналогичных примерах, формулируем основное свойство дроби:

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число.

Далее проводятся упражнения по *размельчению долей* и *сокращению* дробей, рассматриваемым совместно.

Вначале обе операции надо выполнять над одной и той же дробью. Пусть надо *заменить две седьмых в 3 раза более мелкими долями.*

Решение. $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$. Сразу же выполняем обратное преобразование: $\frac{6}{21} = \frac{6 : 3}{21 : 3} = \frac{2}{7}$.

Дробь $\frac{10}{20}$ *заменить в 5 раз более крупными долями.*

Решение. $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

Сразу же выполняем размельчение долей: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=$ $=\frac{15}{20}$.

Записываем в общем виде формулу основного свойства дроби.

Размельчение	*Сокращение* (укрупнение)
$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot X}{B\cdot X}$	$\frac{A}{B}=\frac{A:X}{B:X}$

В систему упражнений должны быть включены не только обычные упражнения, но и деформированные, например:

$$\frac{2}{5}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square}=\frac{\square}{20};\quad \frac{18}{45}=\frac{\square:\square}{\square:\square}=\frac{2}{5};$$

$$\frac{9}{7}=\frac{\square}{35};\quad \frac{25}{40}=\frac{5}{\square};\quad \frac{8}{20}=\frac{\square}{5};$$

$$\frac{\square}{5}=\frac{26}{65};\quad \frac{7}{\square}=\frac{21}{36}\ \text{и т. д.}$$

Специально рассматриваем несколько примеров, в которых используется последовательное сокращение дроби.

$$\frac{40}{56}=\frac{40:4}{56:4}=\frac{10}{14}=\frac{10:2}{14:2}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{\overset{5}{60}}{90}=\frac{\overset{2}{12}}{18}=\frac{\overset{3}{6}}{9}=\frac{2}{3}$$

6. Приведение дробей к общему знаменателю

В предыдущем параграфе процесс размельчения долей рассматривался как процесс, обратный сокращению дроби. Тем самым была выполнена определенная подготовка к изучению приведения дробей к общему знаменателю.

В задачниках по арифметике обычно содержится много упражнений, в которых требование привести к общему знаменателю предъявляется как самоцель.

Однако с психологической точки зрения важно, чтобы операция приведения к общему знаменателю *работала*, то есть была средством для следующей операции, прежде всего, для *сравнения* дробей по величине (до изучения сложения и вычитания дробей).

Пусть требуется сравнить величину дроби $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{14}$ с помощью приведения их к общему знаменателю.

Сравниваемые дроби удобно записывать не рядом, а *друг под другом*. Находим для знаменателей 7 и 14 наименьшее общее кратное 14.

$$\begin{cases} \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{4}{14}; \quad \frac{4}{14} > \frac{3}{14}; \\ \frac{3}{14}; \text{ значит, } \frac{2}{7} > \frac{3}{14}. \end{cases}$$

Пусть требуется расположить в порядке возрастающей величины следующие дроби: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$. Наименьшее общее кратное их знаменателей 3, 12, 10 есть число 60.

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{20}{60}; \\ \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}; \quad \frac{25}{60} > \frac{20}{60} > \frac{18}{60}. \\ \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{18}{60}; \text{ значит, } \frac{5}{12} > \frac{1}{3} > \frac{3}{10}. \end{cases}$$

7. Одновременное изучение сложения и вычитания дробей

Существующая система изучения арифметики построена на принципе раздельного изучения взаимно обратных действий.

Проведенное нами экспериментальное обучение показало дидактическую целесообразность одновременного изучения сложения и вычитания, а впоследствии умножения и деления. При такой системе обучения учащиеся сознательно усваивают связь между этими действиями. Кроме того, достигается сравнение промежуточных операций и соответственно этому работа ведется над парами соответствующих правил.

Эти приемы помогают изучить программный материал со значительной экономией времени при лучшем качестве усвоения знаний.

В действующей системе изучения данного материала взаимосвязанные случаи сложения и вычитания отрываются друг от друга. Так, например, между сложением дробей с общим знаменателем и вычитанием дробей с общим знаменателем проходило обычно несколько уроков.

Мы в своей практике вместо 6 подтем рассматриваем всего три «спаренных» раздела:

1. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

2. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.

3. Сложение и вычитание смешанных чисел.

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

На доске записывается тема урока.

Действия над дробями

Сложение	*Вычитание*
$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ (рис. 15)	$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$ (рис. 15)

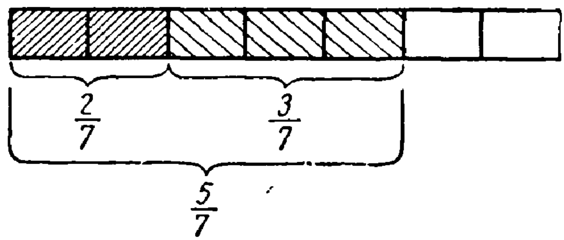


Рис. 15

После решения этого примера решается обратный пример на вычитание (записывается рядом справа).

Вторая пара примеров решается в иной последовательности: сначала — на вычитание, потом — на сложение

$\frac{6}{15}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}-\frac{2}{15}=\frac{6}{15}$

Затем примеры решаются вперемежку. Совместно с учениками формулируются правила сложения и вычитания дробей с общим знаменателем.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и под этой суммой подписать первоначальный знаменатель.

Чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, надо вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и под этой разностью подписать прежний знаменатель.

Правила записываются в виде формул:

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}=\frac{a+b}{k}$$

$$\frac{a}{k}-\frac{b}{k}=\frac{a-b}{k}$$

На этом же уроке повторяются зависимость между компонентами (то есть определения неизвестного компонента) и правила проверки действий первой ступени.

Пусть ученики решают пример: $\frac{7}{11}-x=\frac{3}{11}$.

Они рассказывают правило нахождения неизвестного вычитаемого и находят x.

$$x=\frac{7}{11}-\frac{3}{11}=\frac{7-3}{11}=\frac{4}{11}.$$

Затем *проверяют* правильность найденного значения, подставляя его в исходное уравнение:

$$\frac{7}{11}-\frac{4}{11}=\frac{7-4}{11}=\frac{3}{11}.$$

Таким образом, наряду с выполнением действий учащиеся повторяют и правила *проверки* действий.

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Сначала решается пример на сложение:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}=$$
$$=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$$

Пусть теперь одно из слагаемых неизвестно:

$$\frac{2}{3}+x=\frac{5}{6}$$

$\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{6}$ — слагаемые,
а $\frac{5}{6}$ — сумма.

Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое:

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=$$
$$=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{5-4}{6}=\frac{1}{6}$$

Вторая пара примеров решается в иной последовательности:

Сначала решим пример на вычитание[1]:

$$\frac{23}{24}-\overset{4}{\frac{5}{6}}=\frac{23}{24}-\frac{20}{24}=$$
$$=\frac{23-20}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

Пусть теперь неизвестно уменьшаемое:

$$x-\frac{5}{6}=\frac{1}{8}$$

---

[1] На первых порах решения примеров внимание детей бывает приковано к *преобразуемым* элементам записи, а постоянные элементы вообще забываются. Так, пятиклассник пишет: $\frac{5}{8}+\overset{2}{\frac{1}{4}}=$ $=\frac{2}{8}(?)$.

Этот недочет вызван неудачной последовательностью записей. С ней мы сопоставили психологически оправданную последовательность:

	неверно:	верно:
1-й этап	$\frac{5}{8}+\overset{2}{\frac{1}{4}}=$	$\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{}{8}+\frac{}{8}$
2-й этап	$\frac{5}{8}+\overset{2}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{8}+$	$\frac{5}{8}+\overset{2}{\frac{1}{4}}=\frac{}{8}+\frac{}{8}$
3-й этап	$\frac{5}{8}+\overset{2}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=$ и т. д.	$\frac{5}{8}+\overset{2}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=$ и т. д.
	Здесь сначала фиксируется дополнительный множитель.	Здесь сначала фиксируется количество слагаемых и общий знаменатель.

Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое:

$$\frac{\overset{3}{1}}{8}+\frac{\overset{4}{5}}{6}=\frac{1\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{3+20}{24}=\frac{23}{24}.$$

Затем даются для решения примеры на сложение и вычитание вперемежку, причем записи постепенно сокращаются, а промежуточные преобразования выполняются в уме:

$$\frac{1}{8}+\frac{5}{6}=\frac{3+20}{24}=\frac{23}{24}, \text{ или сразу } \frac{\overset{3}{1}}{8}+\frac{\overset{4}{5}}{6}=\frac{23}{24}.$$

Отметим следующее важное обстоятельство: при одновременном изучении обоих действий ученики постигают двоякую роль вспомогательного числа — дополнительного множителя (приведение к общему знаменателю) и общего делителя (сокращение дроби).

Пусть решается пример:

$$\frac{\overset{4}{1}}{6}+\frac{\overset{3}{3}}{8}=\frac{4+9}{24}=\frac{13}{24}$$

Решим обратный пример на вычитание:

$$\frac{13}{24}-\frac{\overset{4}{1}}{6}=\frac{13-4}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

Если при сложении дробь $\frac{3}{8}$ была заменена более мелкими долями $\left(\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{9}{24}\right)$, то при вычитании совершается обратная операция сокращения $\left(\frac{9}{24}=\frac{9:3}{24:3}=\frac{3}{8}\right)$.

Стало быть, при одновременном изучении взаимно обратных действий и промежуточные операции сопоставляются или противопоставляются (размельчение и укрупнение при сложении и вычитании дробей).

Для уяснения последовательности преобразований при сложении и вычитании дробей весьма полезно упражнение на восстановление пропущенных чисел.

$$\frac{\overset{4}{\square}}{\square}-\frac{\overset{3}{\square}}{\square}=\frac{4+9}{24}=\text{——} \text{ и т. п.}$$

Сложение и вычитание смешанных чисел

Пусть требуется решить пример:

$$3\frac{1}{6}+5\frac{3}{8}=$$

Сначала приводим дроби к общему знаменателю, а затем складываем отдельно целые части и дробные части:

$$3\frac{\overset{4}{\smile}\!\!\!\!1}{6}+5\frac{\overset{3}{\smile}\!\!\!\!3}{8}=3\frac{4}{24}+5\frac{9}{24}=8\frac{4+9}{24}=8\frac{13}{24}$$

Преобразуем решенный пример: $3\frac{1}{6}+5\frac{3}{8}=8\frac{13}{24}$ в уравнение[1] так:

$$x+5\frac{3}{8}=8\frac{13}{24};$$

$$x=8\frac{13}{24}-5\frac{\overset{3}{\smile}\!\!\!\!3}{8}=8\frac{13}{24}-5\frac{9}{24}=3\frac{13-9}{24}=3\frac{4}{24}=3\frac{1}{6}$$

Затем даем ученикам пример на вычитание:

$$9\frac{\overset{5}{\smile}\!\!\!\!2}{3}-5\frac{\overset{3}{\smile}\!\!\!\!4}{5}=9\frac{10}{15}-5\frac{12}{15}=4\frac{10-12}{15}=3\frac{25-12}{15}=3\frac{13}{15},$$

причем предлагаем *проверить* результат вычитания сложением:

$$3\frac{13}{15}+5\frac{\overset{3}{\smile}\!\!\!\!4}{5}=8\frac{13+12}{15}=8\frac{25}{15}=9\frac{10}{15}=9\frac{2}{3}.$$

Если при решении предыдущего примера пришлось раздроблять единицу в пятнадцатые доли $\left(1=\frac{15}{15}\right)$, то в обратном примере была выполнена противоположная операция замены неправильной дроби $\frac{15}{15}$ целым числом 1.

8. Умножение и деление дробей

В «Арифметике» И. Н. Шевченко умножение и деление дробей рассматриваются в следующей последовательности:

Умножение дробей

1. Нахождение дроби данного числа.
2. Умножение целого числа на дробь.

---

[1] Примеры с иксом надо называть уравнением уже с первого класса.

3. Умножение дроби на дробь.
4. Умножение смешанных чисел.

Деление дробей.

1. Деление целого числа на целое.
2. Нахождение числа по данной его дроби.
3. Деление целого числа на дробь.
4. Деление дроби на дробь.
5. Деление смешанных чисел.

Эта система имеет следующие недостатки:

а) медленный темп приобретения знаний;

б) обилие правил, часть из которых не используется, а поэтому выветривается из памяти.

В «Планах уроков по арифметике» Е. Н. Саговской (Учпедгиз, 1955 г.) из 88 уроков, отведенных собственно на изучение четырех действий с дробями, 24 урока выделены на сложение и вычитание, а 35 уроков — на изучение умножения и деления. Характерно при этом, что в продолжение указанных 35 уроков сложных задач ученикам не предлагают решать.

В оценке роли связей между взаимно обратными задачами методисты придерживаются разных взглядов.

В методическом пособии В. М. Брадис утверждает, что смешение учащимися задач на нахождение числа по части и части от числа можно преодолеть якобы с равным успехом «прямо противоположными средствами»: рассматривая эти задачи рядом или отделить их друг от друга значительным промежутком времени.

По «Методике преподавания арифметики в V и VI классах» Я. Ф. Чекмарева (Учпедгиз, 1962 г.) изучение умножения дробей *начинается* с умножения дроби на целое число; изучение же сопряженного ему деления не начинается с деления дробей на целое число (что было бы в известной степени логичным), а по существу завершается (?) этим действием.

Отметим, наконец, что в методическом руководстве по арифметике И. Н. Шевченко сделана попытка построить курс дробей, опираясь в основном на нахождение части от числа, и всячески «избегая» задачи, обратной ей.

Объяснение деления целого числа на дробь без применения обратной задачи проводится в этой книге так:

«Нам дано задание

$$6 : \frac{2}{3} = x.$$

По определению деления: $x \cdot \frac{2}{3} = 6$.

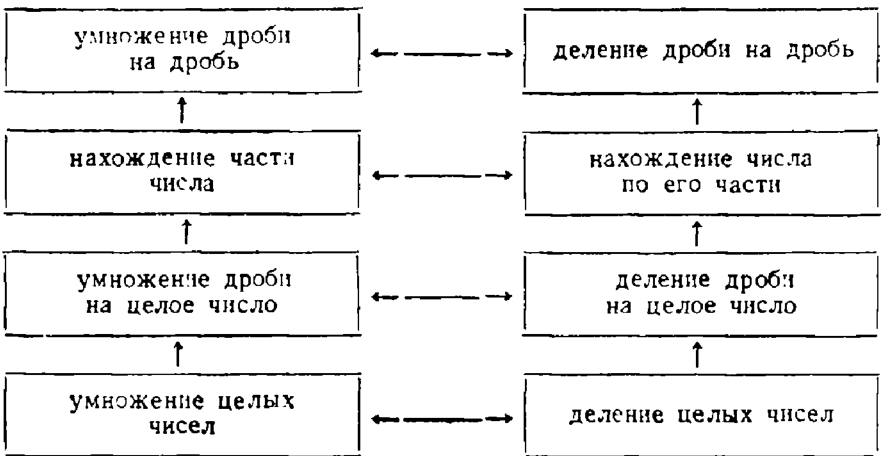
Здесь написано, что некоторое число x, умноженное на $\frac{2}{3}$, дало 6. А что значит умножить на $\frac{2}{3}$? Это значит найти $\frac{2}{3}$ этого числа. Стало быть, можно рассуждать так: **две трети какого-то числа равны шести, а одна треть, очевидно, равна трем, а три трети, то есть все число, равно девяти»** (стр. 168).

Но ведь подчеркнутое нами и есть объяснение решения чистейшего вида обратной задачи на нахождение числа по его части.

Автор книги не замечает этого и предлагает изучить «впервые» обратную задачу в конце темы «Деление смешанных чисел», о чем и говорит на странице 178 своей книги.

Нахождение части от числа и числа по его части связаны неразрывно друг с другом так же, как умножение и деление.

Чтобы улучшить качество знаний, достичь логической четкости в системе изучаемого материала и компактно его расположить, что дает значительную экономию во времени, целесообразно изучать тему «Умножение и деление дробных чисел» в следующей последовательности спаренных вопросов: (последовательность указана стрелками):



В данной схеме отсутствуют два вопроса, содержащихся в традиционном курсе дробей, — умножение и деление целого числа на дробь.

Оказалось, что эти вопросы можно вообще опустить, ибо они не являются *основанием* для изучения последующего раздела — «умножение и деление дроби на дробь», так как являются *частным* случаем его.

Изучение умножения и деления дроби на дробь основывается на нахождении части от дробного числа и обратной ей задачи, что, в свою очередь, сводится к умножению и делению дроби на целое число.

Вывод и заучивание правил умножения и деления целого числа на дробь является, таким образом, лишним звеном, так как в ходе последующего изучения материала в сознании остается лишь одно *общее* правило умножения и деления дроби на дробь.

Если таким образом рационализировать обучение, то вслед за изучением нахождения части от *дробного* числа и обратной ей задачи сразу же рассматривается общий случай умножения и деления дроби на дробь; умножение и деление целого числа на дробь изучается после изучения общего случая, поскольку любое целое число можно представить в виде неправильной дроби со знаменателем 1. Тогда соответствующие действия будут выполняться так:

$$7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{14}{3};$$

$$8 : \frac{2}{3} = \frac{8}{1} : \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 12 \text{ и т.п.}$$

В предлагаемой схеме изучения умножения и деления на дробь существенно новыми являются верхние три ступени.

Руководствуясь этой схемой, вместо 8 правил, предложенных в учебнике И. Н. Шевченко, нужно заучить всего 6 правил (точнее, три сдвоенных правила):

1. Умножение и деление дроби на целое число.
2. Нахождение части от числа и числа по его части.
3. Умножение и деление дроби на дробь.

9. Умножение и деление целых чисел

После того как ученики ознакомились с дробями, они могут не только умножить любое целое число на целое число, но и производить деление любого целого числа на целое число (кроме деления на нуль).

Результат деления целого числа на целое есть дробь, у которой числителем является делимое, а знаменателем — делитель, например:

$$4 : 10 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$46 : 20 = \frac{46}{20} = 2\frac{3}{10}$$

и в частном случае — целое число $\left(6 : 3 = \frac{2}{1} = 2\right)$.

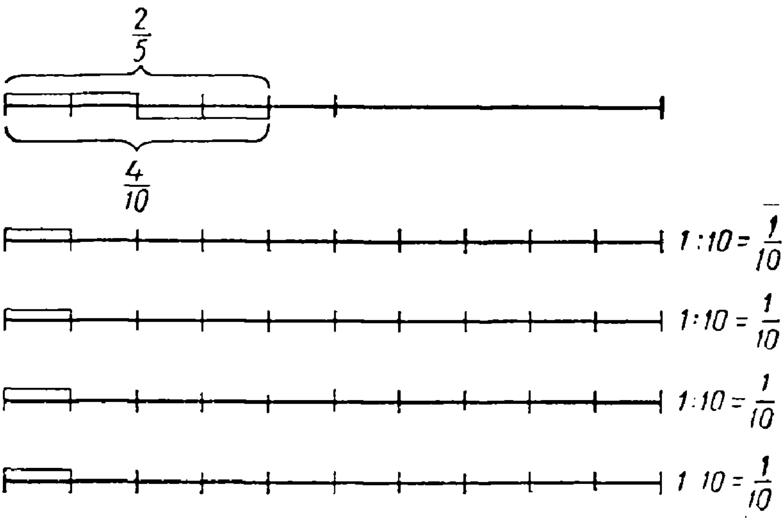


Рис. 16

Смысл деления целого на целое легко проиллюстрировать на отрезках прямой (рис. 16).

$$4 : 10 = (1 + 1 + 1 + 1) : 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Нужно решить несколько примеров на деление и умножение на 1.

$$\frac{7}{\square}=7;\quad \frac{\square}{1}=5;\quad 16\cdot\square=16;\quad \square\cdot 8=8;$$

$$\square\cdot 1=9;\qquad \frac{8}{1}=\square;\qquad 6\cdot 1= \qquad \text{и т.п.}$$

10. Умножение и деление дроби на целое число. Увеличение и уменьшение дроби в несколько раз

Данный раздел является одним из центральных в арифметике дробей: здесь мы не только противопоставляем взаимно обратные операции умножения и деления дроби на целое число, но и *совмещаем* с ними до сих пор отдельно рассматривавшиеся вопросы: увеличение дроби в целое число раз с умножением дроби на целое число; уменьшение дроби в целое число раз с делением ее на целое число. Рассмотрим методику этого вопроса (рис. 17).

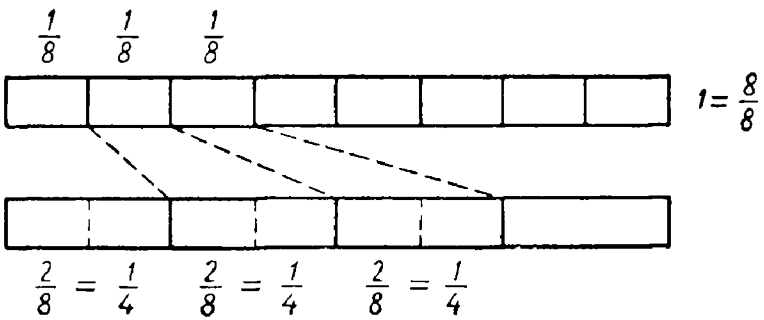


Рис. 17

Пусть требуется умножить дробь $\frac{1}{8}$ на 2.

Умножить на 2 — это значит взять число $\frac{1}{8}$ слагаемым 2 раза:

$$\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Пусть требуется разделить число $\frac{1}{4}$ на 2.

В $\frac{1}{4}$ содержится две восьмые доли, а две восьмые разделить на 2, получится одна восьмая.

$$\frac{1}{4}:2=\frac{\square}{\square}=\frac{1}{8}$$

Короче это можно было записать так:

$$\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1\cdot 2}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Как же получена новая дробь $\frac{1}{8}$?

Был знаменатель 4, стал знаменатель 8, числитель остался без изменения. Иначе говоря, мы выполнили следующее преобразование:

$$\frac{1}{4}:2=\frac{1}{4\cdot 2}=\frac{1}{8}$$

Решим еше пример:

$$\frac{3}{8}\cdot 2=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 2}{8}=$$
$$=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Можно было поступить и по другому:

$$\frac{3}{8}\cdot 2=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdot 2=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 2+$$
$$+\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+$$
$$+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Пусть теперь требуется определить множимое по произведению $\left(\frac{3}{4}\right)$ и множителю (2), то есть требуется решить обратную задачу: $\frac{3}{4}:2$. Так как деление есть действие, обратное умножению, то мы имеем право *писать сразу* результат деления

$$\frac{3}{4}:2=\frac{\square}{\square}=\frac{3}{8}$$

Здесь числитель в делимом и частном один и тот же, а знаменатель в частном увеличился в 2 раза:

$$\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4\cdot 2}=\frac{3}{8}$$

Подробно можно решить еще и так:

$$\frac{3}{4}:2=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right):$$
$$:2=\frac{1}{4}:2+\frac{1}{4}:2+$$
$$+\frac{1}{4}:2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=$$
$$=\frac{3}{8}$$

Чтобы умножить дробь $\left(\frac{ч}{з}\right)$ на целое число (ц), нужно умножить числитель на это число, оставив знаменатель без изменения.

Запишем правило умножения дроби на целое число в общем виде:

$$\frac{ч}{з} \cdot ц = \frac{ч \cdot ц}{з}$$

$$\left[\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}} \cdot \text{целое} = \frac{\text{числитель} \cdot \text{целое}}{\text{знаменатель}}\right]$$

Чтобы разделить дробь $\left(\frac{ч}{з}\right)$ на целое число (ц), нужно умножить знаменатель дроби на это число, оставив числитель без изменения.

Правило деления дроби на целое число запишется так:

$$\frac{ч}{з} : ц = \frac{ч}{з \cdot ц}$$

$$\left[\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}} : \text{целое} = \frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель} \cdot \text{целое}}\right]$$

После того как выведены оба правила, необходимо решить несколько парных примеров:

$$\frac{3}{17} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{17} = \frac{15}{17} \qquad \frac{15}{17} : 5 = \frac{\cancel{15}^{3}}{17 \cdot \cancel{5}_{1}} = \frac{3}{17}$$

Во второй паре сначала предлагается пример на деление, который потом *проверяется* умножением.

Затем решаются примеры на обе операции вперемежку, причем лишь некоторые из них преобразуются в обратные.

Важно *на первых* же уроках наряду с прямыми примерами предложить ученикам решить деформированные примеры вида:

$$\frac{7}{10} : \square = \frac{7}{30}; \qquad \frac{\square}{9} : 4 = \frac{1}{36};$$

$$\frac{8}{\square} : 5 = \frac{8}{15}; \qquad \frac{7}{30} \cdot \square = \frac{21}{30};$$

$$\frac{\square}{9} \cdot 4 = \frac{8}{9}; \qquad \frac{\square}{\square} : 7 = \frac{1}{21};$$

$$\frac{\square}{\square} \cdot 5 = \frac{10}{21}; \qquad \frac{3}{\square} \cdot 2 = \frac{6}{35}.$$

Для проверки, как ученики справляются с указанными деформированными примерами, в опытном классе нами была проведена перед началом второго урока краткая самостоятельная работа (на первом уроке были введены оба правила).

Вот текст I варианта этой работы.

$$\frac{3}{5}\cdot 6 = \qquad \frac{2}{13} : \square = \frac{2}{39}$$

$$\frac{8}{17} : 4 = \qquad \frac{\square}{\square} : 5 = \frac{3}{20}$$

$$\frac{\square}{\square} : 3 = \frac{6}{11} \qquad \frac{3}{19}\cdot \square = \frac{9}{19}$$

Всего писали работу 35 человек, из них безошибочно написали 23 человека; по 1 ошибке допустили 4 человека, по 2 ошибки допустили 5 человек, по 3 ошибки допустили 3 человека.

Всего на контрольной работе решено примеров 200; из них в 23 примерах допущены ошибки. Таким образом, уже после первого урока, то есть еще до закрепления материала, правильно решено около 90% примеров.

После закрепления материала на втором уроке ошибки в решении прямых и деформированных примеров почти полностью исчезли.

В существующих учебниках арифметики и методических пособиях обычно даются *два способа* умножения и деления дробей.

Например, в учебнике арифметики И. Н. Шевченко дано следующее правило:

«Чтобы умножить дробь на целое число, нужно умножить на это целое число числитель и оставить тот же знаменатель или, *если возможно, разделить на это число знаменатель, оставив без изменения числитель*» (подчеркнуто мною. — *П. Э.*).

Эти два способа *логически неравноценны*, ибо первый способ можно *применить всегда*, а второй лишь в отдельных случаях. Поэтому второй прием нецелесообразно возводить в ранг *правила*.

В психологическом отношении наличие двух правил для одной операции оказывается источником ошибок (так называемых ошибок интерференции); дело еще более усложняется, когда появляются два соответствующих правила деления. Чтобы избежать этого, удобно противопоставлять только основные правила. Сравнивая два действия, выясняют, что при умножении дроби на целое число числитель умножается на это число, а при делении — умножается знаменатель; далее, при умножении дроби на целое число постоянным остается знаменатель, а при делении постоянным остается числитель.

Отметим, что в процессе дальнейшей выработки автоматизированных навыков случай умножения и деления дроби на целое число подводится под общее правило умножения и деления на дробь.

Иначе говоря, так называемые «вторые способы» выполнения действий $\left(\frac{5}{8}\cdot 2=\frac{5}{8:2}=\frac{5}{4};\ \frac{12}{37}:6=\frac{12:6}{37}=\frac{2}{37}\right)$, будучи побочными и не имея особой ценности, вовсе не применяются впоследствии.

Не случайно в вычислительных навыках учеников старших классов остается единообразный путь умножения и деления *дроби на дробь*:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a\cdot x}{b\cdot y} \qquad \Big| \qquad \frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a\cdot y}{b\cdot x},$$

на который и следует ориентировать школьников при обучении уже в V классе.

Основную роль в уяснении сущности данных операций с промежуточным (в уме) сокращением дробей играют опять не прямые примеры, а деформированные:

$$\frac{5}{9}\cdot\square=\frac{5}{3};\qquad \frac{7}{\square}\cdot 6=\frac{7}{3};\qquad \frac{\square}{15}\cdot 3=\frac{2}{5};$$

$$\frac{15}{19}:\square=\frac{5}{19};\qquad \frac{\square}{11}:4=\frac{2}{11};\qquad \frac{18}{\square}:9=\frac{2}{25}.$$

После того как будут усвоены действия умножения и деления дроби на целое число, вводится понятие увеличения (уменьшения) дроби в 3; 5; 8; ... (целое число) раз как *синонимов* понятий умножения (деления) дроби на эти же целые числа и только.

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко рассматриваются случаи уменьшения и увеличения каждого члена дроби в несколько раз (всего четыре приема). Между тем они также неравноценны в логическом отношении, поскольку не всегда целое число (член дроби) можно разделить на любое целое число.

Рациональным оказывается следующее: два новых правила увеличения и уменьшения числа в целое число раз должны *слиться* в мышлении соответственно с правилами умножения и деления дроби на целое число.

Приведем это правило.

Чтобы $\dfrac{\textit{увеличить}}{\textit{уменьшить}}$ *дробь в несколько раз, надо увеличить во столько же раз* $\dfrac{\textit{числитель}}{\textit{знаменатель}}$, *оставив постоянным другой* член дроби.

И вот эффект экономии: вместо 8 правил по действующей системе конечным результатом изучения данной темы по предлагаемой системе оказывается запоминание в сущности только двух правил.

Последние два правила можно сформулировать иначе, как перефразировки (обращение) предыдущих правил.

Если при постоянном знаменателе числитель дроби увеличить в несколько раз, то величина дроби увеличится во столько же раз.	*Если при постоянном числителе знаменатель дроби увеличить в несколько раз, то величина дроби уменьшится во столько же раз.*

Для усвоения данного материала ценна, как и вообще в математике, не тренировка ученика в одностороннем применении заученных правил, а максимальная вариация форм вопросов, ответы на которые требуют каждый раз иного осмысливания знаний.

1. Выполнено действие: $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$.

Прочитать данную зависимость, используя слова: *увеличить, меньше, больше*.

Ответ. а) $\frac{4}{9}$ увеличить в 2 раза — получится $\frac{8}{9}$;

б) $\frac{4}{9}$ меньше $\frac{8}{9}$ в 2 раза;

в) $\frac{8}{9}$ больше $\frac{4}{9}$ в 2 раза.

2. Как уменьшить (увеличить) дробь в 4 раза? Придумай пример.

3. Была дробь $\frac{2}{7}$. После изменения она стала равной $\frac{6}{7}$.

Увеличилась или уменьшилась дробь? Во сколько раз? Записать это изменение. $\left(\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7}\right)$.

4. Как следует изменить дробь $\frac{3}{7}$, чтобы получилась дробь $\frac{3}{28}$?

5. Увеличить дробь $\frac{2}{9}$ в 4 раза. Ответ *проверить* делением.

6. Уменьшить дробь $\frac{6}{17}$ в 3 раза. Ответ *проверить* умножением.

7. Некоторую дробь увеличили в 4 раза и получили дробь $\frac{8}{15}$. Какова была первоначальная дробь? $\left(\frac{\square}{\square} \cdot 4 = \frac{8}{15}.\right)$

8. Дробь $\frac{8}{9}$ больше дроби $\frac{4}{9}$ в 2 раза. Записать данную зависимость двумя способами.

(Решение. $\frac{8}{9} : 2 = \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$.)

11. Умножение и деление смешанных чисел на целое число

Вначале решаем пример на умножение.

$$\frac{2}{7} \cdot 10 = \frac{2 \cdot 10}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}.$$

Затем решаем обратный пример:

$$2\frac{6}{7} : 10 = \frac{20}{7} : 10 = \frac{\cancel{20}^{2}}{7 \cdot \cancel{10}_{1}} = \frac{2}{7}$$

Необходимость замены смешанного числа $\left(2\frac{6}{7}\right)$ неправильной дробью $\left(\frac{20}{7}\right)$ очевидна ученикам из предыдущего примера.

Вторая пара примеров решается в ином порядке; сначала на деление, а затем проверка умножением.

Потом рассматривается наиболее общий случай:

$$2\frac{3}{5}\cdot 4=\left(2+\frac{3}{5}\right)\cdot 4=2\cdot 4+\frac{3}{5}\cdot 4=8+\frac{12}{5}=8+2\frac{2}{5}=$$
$$=10\frac{2}{5}.$$

Далее показывается краткая запись решения этого примера.

$$2\frac{3}{5}\cdot 4=8\frac{12}{5}=10\frac{2}{5}.$$

Найдем теперь неизвестный сомножитель в следующем уравнении:

$$x\cdot 4=10\frac{2}{5}$$

$$x=10\frac{2}{5}:4=\frac{52}{5}:4=\frac{\cancel{52}^{13}}{5\cdot\cancel{4}_1}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$$

Показывается и второй способ решения:

$$10\frac{2}{5}:4=\left(8+2\frac{2}{5}\right):4=8:4+\frac{12}{5}:4=2+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}$$

Или короче: $10\frac{2}{5}:4=8\frac{12}{5}:4=2\frac{3}{5}$.

Полезно предложить решить деформированный пример:

$$\square\frac{2}{5}:3=18\frac{12}{5}:3=\ldots$$

Преимущества второго способа деления смешанного числа на целое число следует показать при решении тем и другим способом достаточно сложных примеров: $\left(86\frac{2}{3}:\right.$ $\left.:4;\ 117\frac{6}{7}:9\right)$.

Выводится заключение: умножение (деление) смешанных чисел на целое число сводится к раздельному умножению (делению) целого числа и дроби на целое число.

Обращается внимание учащихся на то, что при втором способе (разбиения множимого и делимого на два слагаемых) применяется распределительный закон умножения и одноименное свойство деления.

При решении таких обобщенных примеров надо иногда пользоваться оборотами *увеличить число* $2\frac{1}{3}$ в 2 раза, *уменьшить число* $10\frac{1}{5}$ в 4 раза.

12. Нахождение части от числа и всего числа по его части

В настоящее время задача на нахождение одной части числа рассматривается во II классе, числа по величине одной части — в IV классе, нахождение нескольких частей числа — в III классе, обратная задача по определению чисел по величине нескольких его частей — лишь в V классе.

Эксперимент, осуществленный нами в начальных классах, показал, что первые две задачи вполне доступны для одновременного изучения во II классе, а две другие — в III классе.

При таком раннем ознакомлении учеников с этими задачами значительно облегчалось бы изучение умножения и деления дробей в V классе.

В этом случае уже при изучении натуральных чисел в V классе стало бы возможным повторять взаимно обратные задачи на нахождение части числа и числа по величине его части.

Однако и до изменения программы начальных классов целесообразно изучить задачи на нахождение части числа и числа по величине его части в теме «Натуральные числа», до изучения курса дробей в V классе.

Рассмотрим методику такого пропедевтического изучения данных взаимно обратных задач.

13. Нахождение части числа и всего числа по его части в теме «Натуральные числа»

Задачи на нахождение части числа и числа по величине его части являются *обобщением* задач на приведение к единице, изучаемых во II классе. Как в тех, так и в других вполне оправданно и выгодно использование следующих приемов:

1. Схематической записи условия задачи в две строчки, облегчающей первоначальный анализ условия задачи (этап соотнесения данных).

Большинство ошибок учеников, обучаемых по общепринятой системе раздельного рассмотрения взаимно обратных вопросов, возникает именно из-за неумения найти связь между числами, неумения найти зависимость между числовыми данными; этим и объясняются распространенные ошибки подмены одного действия другим (вместо умножения — делят или наоборот и т. п.).

2. Одновременного изучения двух взаимно обратных задач, имеющих один и тот же сюжет и числовые данные, — на основе противопоставления.

Рассмотрим задачу:

На сберкнижке было 100 рублей. $\frac{2}{5}$ *вклада взяли для покупки пальто. Сколько денег взяли?*

Обычная методика объяснения решения этой задачи оперирует тремя числами: двумя данными (100 руб., $\frac{2}{5}$) и одним искомым (40 руб.).

Между тем важно акцентировать внимание учащихся на четырех числах, попарно соотносящихся друг с другом.

Именно такое *развертывание* логических операций облегчает усвоение алгоритма решения этих задач.

Сначала записываем слева друг под другом два числа:

1 составляет... $\square$

$\frac{2}{5}$ составляют $\square$

Учитель. Какое число надо принять за условную единицу? Чему был равен весь вклад?

Учащийся. За условную единицу принимаем 100 рублей и поэтому это число пишем против 1, читаем: «1 целое составляет 100 руб.»

Учитель. Сколько же рублей составляют $\frac{2}{5}$ части всего вклада?

Ученик. Нам это неизвестно, мы должны найти его.

Появляется запись:

1 составляет 100 руб.

$\frac{2}{5}$ составляют $\boxed{?}$

Учитель. Прежде чем найти $\frac{2}{5}$ числа, надо найти $\frac{1}{5}$ числа. Как же найти $\frac{1}{5}$ числа?

Ученик. Надо 100 руб. поделить на 5.

Важно в этом месте провести анализ глубже, выяснить, почему надо делить именно на 5.

Учитель. Почему мы делим число 100 на 5, а не на какое-нибудь другое число? Сколько *пятых* частей содержится в одном целом? Сколько пятых долей в 100 рублях?

Ученик. В одном целом пять пятых частей.

Запись на доске приобретает следующий вид:

$$1 = \frac{5}{5} \text{ составляют } 100 \text{ руб.}$$

$$\frac{2}{5} \text{ составляют } \boxed{}$$

Учитель. Прочитайте условие без знаменателя.

Ученик. Пять частей составляют 100 рублей, 2 части составляют ... неизвестно сколько.

Учитель. Как же найти, чему равны две пятых части? Что сначала надо найти?

Ученик. Сначала надо найти $\frac{1}{5}$ часть; 100 руб. разделить на 5, получится 20 рублей; $\frac{1}{5}$ часть вклада составляет 20 рублей.

Запись на доске приобретает вид:

$$1 = \frac{5}{5} \text{ составляют } 100 \text{ руб.}$$

$$\frac{2}{5} \text{ составляют } \boxed{} \text{ руб.}$$

$$\frac{1}{5} \text{ составляет } 20 \text{ руб.}$$

Учитель, закрыв первую строчку, заставляет прочитать две последние строки.

Учитель. Во сколько раз $\frac{2}{5}$ больше $\frac{1}{5}$ части? Как узнать, сколько составляют $\frac{2}{5}$ части, если $\frac{1}{5}$ составляет 20 руб.

Ученик. Надо увеличить 20 рублей в 2 раза — получится 40 рублей. Две пятых вклада равны 40 рублям.

После решения прямой задачи ее тут же *перестраиваем* в обратную задачу при тех же числовых данных и том же сюжете.

Учитель. В прямой задаче мы знали весь вклад (100 рублей), а надо было найти $\frac{2}{5}$ всего вклада (40 руб). А теперь поступим наоборот: пусть известны 40 рублей, а надо найти 100 рублей.

На доске рядом со схемой прямой задачи появляется схема обратной задачи (третья строчка стирается, стирается также дробь $\frac{5}{5}$).

Прямая задача	Обратная задача
1 составляет 100 руб.	1 составляет $\square$ руб.
$\frac{2}{5}$ составляют $\square$ руб.	$\frac{2}{5}$ составляют 40 руб.

Ученики читают по схеме условие обратной задачи: *На сберкнижке было несколько рублей. Сколько было — неизвестно. Известно, что* $\frac{2}{5}$ *этого числа составляют 40 рублей. Найти весь вклад.*

Учитель. $\frac{2}{5}$ вклада известны. А сколько пятых частей составляет весь вклад?

Ученик. Весь вклад составляет $\frac{5}{5}$ частей.

Учитель. Как же определить весь вклад, то есть как определить 5 частей, если известны две части $\left(\frac{2}{5}\text{ части}\right)$?

Ученик. Сначала надо найти одну часть: 40 рублей разделить на 2, получится 20.

$\frac{1}{5}$ часть составляет 20 рублей.

Учитель дописывает схему и она приобретает вид:

$1 = \frac{5}{5}$ составляют $\square$

$\frac{2}{5}$ составляют 40 руб;

$\frac{1}{5}$ составляет 20 руб.

Учитель. Кто скажет, как теперь определить весь вклад? Во сколько раз $\frac{5}{5}$ больше чем $\frac{1}{5}$? Во сколько раз 5 частей больше одной части?

Ученик. $\frac{5}{5}$ больше $\frac{1}{5}$ в 5 раз.

20 рублей увеличить в 5 раз, получится 100 рублей. Весь вклад составляет 100 рублей.

Условия двух задач и их решения записываются в тетрадях рядом:

Нахождение части от всего числа [1].	Нахождение всего числа по его части [1].
$1 = \frac{5}{5}$ ———— 100 руб.	$1 = \frac{5}{5}$ ———— $\square$ руб.
$\frac{2}{5}$ ———— $\square$ руб.	$\frac{2}{5}$ ———— 40 руб.
$\frac{1}{5}$ ———— 20 руб.	$\frac{1}{5}$ ———— 20 руб.

[1] В методической литературе нет единства в употреблении терминов в данном разделе.

Так, в книге Е. Н. Саговской используются названия «часть от целого», «целое по части».

Более целесообразным представляется использовать *вначале* термины *найти часть от всего числа*, *найти все число по его части*, ибо понятие *целое число* в связи с введением понятия *дробное число* приобретает второй смысл.

Поэтому методически важно избегать многозначных терминов.

В учебнике И. Н. Шевченко используется название: «нахождение величины дроби данного числа»; нам представляется более удобным краткое название *нахождение части числа*, с употреблением данного названия дети свыклись еще в начальной школе и поэтому психологически невыгодно перестраивать этот стереотип.

Решение

1. Чему равна $\frac{1}{5}$ часть вклада?
100 руб. : 5 = 20 руб.

2. Чему равны $\frac{2}{5}$ части вклада?
20 руб. · 2 = 40 руб.

Решение

1. Чему равна $\frac{1}{5}$ часть вклада?
40 руб. : 2 = 20 руб.

2. Чему равны $\frac{5}{5}$ частей вклада (весь вклад)?
20 руб. · 5 = 100 руб.

После решения сравниваются условия и решения задач.

Этот завершающий этап объяснения материала является наиболее важным звеном в методике противопоставления: именно здесь ученики постигают взаимопереходы и взаимосвязи понятий и операций, усваивают приемы дифференцирования (различения) обеих задач.

Учитель. Чем отличается условие одной задачи от другой?

Ученик. В первой задаче мы находим *часть* вклада, во второй задаче — *весь* вклад.

Учитель. Что сходного, одинакового вы заметили в решениях этих задач?

Ученик. Обе задачи решены двумя действиями. Первое действие деление, второе — умножение.

Учитель. Почему *одинаковы* первые вопросы?

Ученик. Там и тут мы находим, чему равна *одна* часть.

Учитель. Какие известные вам задачи напоминает данная задача?

Ученик. Задачи на *приведение к единице.*

Учитель. Правильно! Здесь мы тоже первым действием «приводим к *единице*» — находим *одну* часть.

Как показывает приведенный выше анализ решения подобных задач, опорными пунктами в цепи рассуждений являются *числители* дробей; поэтому иногда чтение дробей следует варьировать, прочитывая их без упоминания знаменателя: не *пять пятых*, а *пять частей* и т. д. Нужно также делать ударения на числители, «*пять* пятых», «*две* пятых», «*одна* пятая».

Попутно отметим, что основную информацию для отнесения задачи к одной из двух разновидностей («часть от числа» или «число по части») несут предлоги *от* и *по*; учитель должен их выделить голосом, делать на них логическое ударение, написать крупными буквами.

Если первая пара задач появилась в последовательности *часть от числа* → *число по части*, то вторую пару задач следует решать в обратном порядке: *число по части* → *часть от числа*.

В правой половине листа (доски) записывается задача:

| 1 ———————————— $\square$ *кг*
| $\frac{2}{7}$ ———————————— 30 *кг*

←——————————————————

Условие задачи может быть либо сообщено учителем, либо составлено с учащимися коллективно:

Со склада взяли $\frac{2}{7}$ *всего имевшегося там картофеля; это составило* 300 *кг. Сколько всего картофеля было первоначально?*

После решения этой задачи (300 *кг* : 2 = 150 *кг*; 150 *кг* · 7 = 1050 *кг*) идет беседа учителя с учениками:

Учитель. Какого вида была решенная нами задача?

Ученик. Задача на нахождение *всего числа* по его части.

Учитель. Почему вы так думаете?

Ученик. Потому что в задаче дано, сколько килограммов составляет часть *всего* запаса $\left(\frac{2}{7}\right)$. А надо найти все число (1050 *кг*).

Учитель. Чтобы проверить решение данной задачи, надо составить обратную ей задачу. Каково название второй задачи?

Ученик. Задача на нахождение части от всего числа.

Учитель. Кто напишет схему второй задачи? Кто расскажет условие новой задачи?

На доске (в тетрадях) слева от предыдущей записи появляется новая запись:

1 ———————————— 1050 *кг* |
$\frac{2}{7}$ ———————————— $\square$ *кг* |

←——————————————————

Ученик читает условие *проверочной задачи.*

На складе было 1050 кг картофеля. $\frac{2}{7}$ *от этого количества взяли. Сколько килограммов картофеля взяли?*

Решение. 1) 1050 *кг* : 7 = 150 *кг*; 2) 150 *кг* × 2 = = 300 *кг*.

В домашние или контрольные работы надо включать и задание по решению *пар* задач: если дана одна какая-либо задача, то ученик после решения должен преобразовать ее в обратную задачу и решить последнюю.

Впоследствии, конечно, решаются и изолированные задачи обеих разновидностей.

При одновременном (на одном уроке!) введении этих задач ученик приучается заранее, до того как приступит к решению задачи, определять ее вид.

В психологическом отношении преимущество одновременного изучения взаимно обратных (или сопряженных задач) заключается в том, что здесь на первый план выступает обучение приемам различения вида задачи, на основе выяснения ее характеристических признаков.

А это и означает овладение учеником логическими средствами анализа структуры задачи, зависимостей между ее величинами.

В этой связи отметим следующий полезный прием.

Прежде чем решать задачу по данной теме, на доске записывают названия обеих разновидностей задач.

Часть от всего числа	Все число по его части

Затем читается задача, подлежащая решению.

Учитель спрашивает: «Какого вида прочитанная задача? Почему так думаешь?»

После того как разновидность задачи будет определена, ученики решают ее в соответствующей половине страницы (или доски).

Выяснение разновидностей задач должно идти по пути от первоначального различения к последующему *обобщению*.

Для этой цели весьма удобны задачи промежуточные, которые не относятся ни к тому и ни к другому виду (такие задачи в существующей практике обучения не используются совершенно).

Задача. *Турист проехал 45 км всего пути на велосипеде, и это составило $\frac{5}{9}$ всего пути. $\frac{2}{9}$ пути он прошел пешком.*

Сколько километров он прошел пешком?»

Схема задачи:

$$\frac{5}{9} \text{ ———————— } 45 \text{ км}$$

$$\frac{2}{9} \text{ ———————— } \square \text{ км}$$

Задача решается двумя действиями:

1) 45 *км* : 5 = 9 *км* (ехал на велосипеде)

2) 9 *км* · 2 = 18 *км* (шел пешком)

Затем можно сформулировать и решить обратную ей задачу по схеме:

$$\frac{5}{9} \text{ ———————— } \square \text{ км}$$

$$\frac{2}{9} \text{ ———————— } 18 \text{ км}$$

После того как будут изучены оба вида задач (на нахождение части от числа и числа по его части), при тренировке в устном решении их следует использовать следующую удобную форму записи условия:

1) $\frac{1}{7}$ от $630 = \square$; 5) $\frac{5}{6}$ от $\square = 300$;

2) $\frac{1}{8}$ от $\square = 40$; 6) $\frac{\square}{9}$ от $270 = 60$;

3) $\frac{1}{\square}$ от $320 = 80$; 7) $\frac{7}{\square}$ от $500 = 350$;

4) $\frac{3}{8}$ от $560 = \square$; 8) $\frac{\square}{\square}$ от $400 = 120$.

Отметим, что из этих упражнений лишь 1), 2), 4), — соответствуют задачам, изучаемым в начальной школе.

Остальные упражнения преследуют цель дальнейшего *углубления* знаний учащихся по данной теме.

Задача вида 3) $\frac{1}{\square}$ от $320 = 80$ является третьей задачей совокупности задач. *Какую часть сос-*

тавляет 80 от 320? (Решение: $320:80=4$; значит, 80 составляет $\frac{1}{4}$ от 320.) Иногда полезно составить и решить по одному сюжету все три вида задач.

Например:

$$\frac{1}{7} \text{ от } 210 = \square;$$

$$\frac{1}{7} \text{ от } \square = 30;$$

$$\frac{1}{\square} \text{ от } 210 = 30.$$

Как показала практика, эти упражнения при правильной методике обучения посильны уже третьеклассникам (и тем более пятиклассникам).

Чтобы облегчить анализ этих задач, учащимся удобно показать стрелкой связь между членом дроби и соответствующим ему числом условия задачи:

$$\frac{\square}{9} \text{ от } 270 = 60$$

Дальше рассуждения протекают так:

«В числе 270 должно быть 9 частей; одна часть будет равна $270:9=30$».

Рассматриваем далее другую связь: «Число 60 связано с числителем. Сколько частей было взято? Сколько раз по 30 содержится в 60? $60:30=2$ (раза).

Значит, искомый числитель — 2.

Проверяем: $\frac{2}{9}$ от 270 равно 60».

Последний пример вида $\frac{\square}{\square}$ от $400=250$ является неопределенным; он может быть предложен в качестве упражнения повышенной трудности. Решается этот пример *подбором*: пусть были *десятые доли*:

$\frac{\square}{10}$ от $400=120$; $400:10=40$; $120:40=3$. Значит, $\frac{3}{10}$ от $400=120$.

Могут быть и другие решения этой задачи:

$$\frac{6}{20} \text{ от } 400 = 120$$

$$\frac{12}{40} \text{ от } 400 = 120$$

14. Нахождение части всего числа и всего числа по его части в разделе дробных чисел

Пусть дана задача:

1 кг пряников стоит $\frac{4}{5}$ рубля. Сколько стоят $\frac{3}{8}$ кг пряников?

Запишем условие задачи в краткой форме:

1 *кг* ——————— $\frac{4}{5}$ руб.

$\frac{3}{8}$ *кг* ———————— $\square$

Решение

Сначала найдем стоимость $\frac{1}{8}$ *кг пряников*: $\frac{1}{8}$ *кг* стоит в 8 раз дешевле 1 *кг*, поэтому $\frac{4}{5}$ надо разделить на 8.

$\frac{3}{8}$ *кг* стоят дороже, чем $\frac{1}{8}$ *кг*, в 3 раза; поэтому полученное частное надо умножить на 3.

Решение выглядит так.

$$\frac{4}{5} : 8 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} \text{ (рубля)}$$

После решения прямой задачи преобразовываем ее в обратную задачу

1 *кг* ———————— $\square$ руб.

$\frac{3}{8}$ *кг* ———————— $\frac{3}{10}$ руб.

$\frac{3}{8}$ кг пряников стоят $\frac{3}{10}$ руб.

Сколько стоит 1 кг пряников?

Решение

Найдем стоимость $\frac{1}{8}$ *кг*; $\frac{1}{8}$ *кг дешевле* $\frac{3}{8}$ *кг* в 3 раза. Поэтому $\frac{1}{8}$ *кг* стоит $\left[\frac{3}{10} : 3\right]$ (рубля). $\frac{8}{8}$ *кг* стоит *дороже* $\frac{1}{8}$ *кг* в 8 раз.

Поэтому 1 *кг* стоит $\frac{3}{10} : 3 \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 3} = \frac{8}{10}$ (рубля).

Вторая пара задач решается в другой последовательности: сначала на нахождение всего числа по части, а потом части от числа.

1 ———————— $15\frac{3}{4}$ *км*

$\frac{2}{3}$ ———————— $\square$ *км*

Решение

$$15\frac{3}{4} : 3 \cdot 2 = \frac{63 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2} \text{ (км)}$$

1 ———————— $\square$

$\frac{2}{3}$ ———————— $10\frac{1}{2}$ *км*

Велосипедист проехал $10\frac{1}{2}$ *км, что составляет* $\frac{2}{3}$ *всего пути.*

Чему равен весь путь?

Решение

$$10\frac{1}{2} : 2 \cdot 3 = \frac{21 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4} \text{ (км)}$$

Потом решенная задача преобразуется в обратную: число $15\frac{3}{4}$ *км* принимается за известное, а искомым будет число $10\frac{1}{2}$ *км*. (Краткая запись условия и решение записаны слева.)

При изучении этого материала не следует спешить с ранним свертыванием операций: сначала следует записывать решение в строчку, обозначая обе операции деления и умножения.

Запись в строчку хорошо показывает *последовательность* рассуждений и понуждает ученика осмысленно подходить к решению задач.

Следует предлагать для устного решения и деформированные примеры с несложными дробями, например:

$$\frac{1}{3} \text{ от } 10\frac{1}{2} = \square;$$

$$\frac{1}{5} \text{ от } \square = 2\frac{1}{2};$$

$$\frac{\square}{\square} \text{ от } 12\frac{1}{4} = 6\frac{1}{8}.$$

Полезны вначале и такие примеры на определение вида задач, соответствующих формулам:

$$\frac{4}{5} : \square \cdot \square = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 2} =$$

$$\frac{3}{8} : \square \cdot \square = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 10} =$$

Выше мы приводили краткую форму записи условия задач на нахождение части от числа и числа по его части в виде четырех чисел, расположенных в две строки.

Например, прямую и обратную задачи легко различить благодаря ассоциациям, связанным с анализом расположения чисел, в следующей записи:

1 ———————— 600 руб.	1 ———————— $\square$ руб.
$\frac{2}{5}$ ———————— $\square$	$\frac{2}{5}$ ———————— 240 руб.

При определении вида задачи помогают и такие простейшие ассоциации:

Клетка против 1 — задача на нахождение всего числа по его части,

клетка против дроби — задача на нахождение части числа.

Неверно мнение, будто бы такие связи умозаключений являются искусственными, механическими; в психологии доказано, что в основе сложных цепей умозаключений лежат простейшие связи мыслей.

Механизм действий не принесет ученику вреда, если его «механические действия» основаны на сознательном понимании всего процесса. —

После изучения действий умножения и деления дробей можно обходиться более короткой формой записи условия подобных задач:

Задачи на нахождение части числа	*Задачи на нахождение всего числа по его части*
$\frac{2}{5}$ от 600 руб. $= \square$;	$\frac{2}{5}$ от $\square = 240$.
или $\frac{2}{5}$ от $600 = x$.	или $\frac{2}{5}$ от $x = 240$.
Решение	Решение
$x = \frac{2}{5}$ от $600 = 600 \cdot \frac{2}{5} =$ $= 240$ (руб.)	$y = 240 : \frac{2}{5} = \frac{240 \cdot 5}{2} =$ $= 600$ (руб.)

Отметим, что большое значение для усвоения материала имеет *стандартность* форм записей. Например, при краткой записи условия задач в одну строку возникают следующие связи умозаключений:

$\frac{2}{5}$ от $600 = \square$; *неизвестное число на третьем месте — умножать второе число на первое;*
или: *неизвестное число (клетка) на третьем месте — задача на нахождение части числа.*

Если же появилась запись:

$\frac{2}{5}$ от $x = 240$, то проявляются следующие ассоциации:

неизвестное число на втором месте — задача на нахождение всего числа по его части,
или *неизвестное число на втором месте — делить третье число на первое и т. п.*

В данной связи уместно отметить методическую ошибку в оформлении условия задачи, которая встречается в практике обучения многих учителей.

Так, в книге Е. Н. Саговской (стр. 148) задача на нахождение числа по его части записывается так:

«$\frac{3}{5}x = 15$, $\frac{1}{5}x = 15 : 3 = 5$; $x = 5 \cdot 5 = 25$ (*л*)».

Между тем при решении задачи на нахождение части числа согласно общепринятой в нашей системе обозначения множимого и множителя дробь $\frac{3}{5}$ в записи $\frac{3}{5} \cdot x =$

15 является *множимым*, а не множителем, как это указано в условии задачи.

Поэтому вместо записи $\frac{3}{5} \cdot x = 15$ следует писать так:

$$\frac{3}{5} \text{ от } x = 15; \quad x = 15 : \frac{3}{5} = \text{ и т.д.,}$$

либо так:

$$\frac{3}{5} \text{ от } x = 15; \qquad x \cdot \frac{3}{5} = 15 \text{ и т. д.}$$

Произвольная перемена места чисел при оформлении решения создает излишнюю трудность для учеников в осмысливании содержания задач и определении того, к какому из двух видов относится данная задача.

Данную запись $\frac{3}{5} \cdot x$ вместо правильной $x \cdot \frac{3}{5}$ — нельзя объяснить применением переместительного закона умножения дробей, поскольку к этому времени не изучено само действие умножения числа на дробь.

15. Умножение и деление дроби на дробь

Данная тема является кульминационным пунктом всей арифметики дробей.

Введению понятия *умножение дроби на дробь* надо посвятить один урок, а следующий урок — введению понятия об обратной задача — делению дроби на дробь.

Возьмем пример: покупали помидоры ценой по $\frac{2}{5}$ рубля за килограмм.

Составим таблицу для вычисления стоимости.

Таблица 7

Цена	Количество в *кг*	Цена · количество=стоимость
$\frac{2}{5}$ руб.	2 *кг*	$\frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ руб.
$\frac{2}{5}$ руб.	1 *кг*	$\frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ руб.
$\frac{2}{5}$ руб.	$\frac{7}{10}$ *кг*	$\frac{2}{5} \quad \frac{7}{10} = \ldots$

Так как стоимость равна произведению цены товара на количество купленного товара, то *смысл* произведения $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10}$ очевиден: оно показывает стоимость $\frac{7}{10}$ *кг* помидоров при цене $\frac{2}{5}$ руб. за 1 *кг*.

Проблема заключается в том, чтобы.

1) *вычислить* это произведение;

2) найти краткое правило умножения дроби на дробь.

Решим задачу. Для этого сначала найдем стоимость $\frac{1}{10}$ *кг* помидоров; $\frac{1}{10}$ *кг* стоит дешевле 1 *кг* в 10 раз.

$$\frac{2}{5} : 10 = \frac{2}{5 \cdot 10} \text{ (руб.)}$$

Чтобы найти стоимость $\frac{7}{10}$ *кг*, надо найденную стоимость $\frac{1}{10}$ *кг* *увеличить* в 7 раз:

$$\frac{2}{5 \cdot 10} \cdot 7 = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 10} = \frac{14}{50} \text{ (руб.)}.$$

Итак, имеем:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 10}.$$

Таким образом, умножение одной дроби $\left(\frac{2}{5}\right)$ на другую $\left(\frac{7}{10}\right)$ решается нахождением части числа — второй дроби $\left(\frac{7}{10}\right)$ от первой дроби $\left(\frac{2}{5}\right)$.

Умножить $\frac{2}{5}$ на $\frac{7}{10}$ — это значит найти $\frac{7}{10}$ от $\frac{2}{5}$.

Данное положение позже видоизменим в обращенное: *Чтобы найти дробь от числа, надо это число умножить на данную дробь.*

Коллективно формулируется правило:

Чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить отдельно числители и знаменатели; первое произведение взять числителем, а второе — знаменателем.

На первом уроке *ограничиваемся* выводом правила умножения дроби на дробь.

В традиционной системе изучение умножения дроби на дробь оторвано от рассмотрения обратной задачи (деления дроби на дробь) промежутком времени в несколько недель.

Опыт показывает — гораздо лучше поступить иначе, а именно: уже на втором уроке обратить предыдущую задачу и вывести правило деления дроби на дробь.

Последующие же уроки посвятить *одновременному* закреплению обоих правил, используя противопоставление и сравнение данных задач.

На втором уроке берется *та же самая задача*, что и на предыдущем уроке, с той лишь разницей, что перестраиваются числовые соотношения, изменяется форма связей между числами
(по известной стоимости и количеству товара находится цена 1 *кг*).

Таблица 8

Стоимость	Количество товара	$\frac{\text{стоимость}}{\text{количество}}=\text{цена}$
$\frac{4}{5}$ руб.	2 *кг*	$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}$ (руб.)
$\frac{2}{5}$ руб.	1 *кг*	$\frac{2}{5} : 1 = \frac{2}{5}$ (руб.)
$\frac{14}{50}$ руб.	$\frac{7}{10}$ *кг*	$\frac{14}{50} : \frac{7}{10} =$.

Для нахождения цены необходимо стоимость товара разделить на количество товара. $\frac{14}{50}$ руб. были уплачены за $\frac{7}{10}$ *кг* помидоров, поэтому цена 1 *кг* помидоров будет равна:
$\frac{14}{50} : \frac{7}{10} = \frac{\square}{\square} = \frac{2}{5}$ (руб.)

Таким образом, смысл деления дроби на дробь и ответ $\left(\frac{2}{5}\right)$ совершенно ясны для учеников из предыдущей задачи.

Требуется лишь выполнить следующее:

1) найти путь для вычисления частного,

2) сформулировать правило деления дроби на дробь.

Для решения задачи рассуждаем так: надо найти цену, то есть стоимость 1 *кг.*

За $\frac{7}{10}$ *кг* уплатили $\frac{14}{50}$ руб.; за $\frac{1}{10}$ *кг* уплатили в 7 раз меньше, то есть $\frac{14}{50} : 7 = \frac{14}{50 \cdot 7}$ (руб.); 1 *кг* стоит в 10 раз больше, чем $\frac{1}{10}$ *кг*, поэтому имеем:

$$\frac{14}{50 \cdot 7} \cdot 10 = \frac{\cancel{14}^{2} \cdot \cancel{10}^{1}}{\cancel{50}_{5} \cdot \cancel{7}_{1}} = \frac{2}{5} \text{ (руб.)}$$

Итак, получаем правило деления дроби на дробь:

$$\frac{14}{50} : \frac{7}{10} = \frac{14 \cdot 10}{50 \cdot 7} =$$

Формулируем правило:

Чтобы разделить дробь на дробь, надо числитель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби, а знаменатель первой дроби умножить на числитель второй дроби; первое произведение взять числителем, а второе знаменателем.

Оба правила в символической форме записываются *рядом*:

$\frac{A}{B} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{A \cdot X}{B \cdot Y}$	$\frac{A}{B} : \frac{X}{Y} = \frac{A \cdot Y}{B \cdot X}$

Необходимо добиться того, чтобы дети воспринимали понятия *умножение на дробь* и *нахождение части числа* как ***синонимы***, *а также* и *нахождение числа по части* и *деление на дробь.*

Для этой цели важно *противопоставлять* обе задачи, предлагая следующие парные вопросы:

1. Каким действием решается задача на нахождение части числа? всего числа по его части?

2. Задача решена умножением некоторой дроби на $\frac{3}{5}$.

Какого типа была задача? (На нахождение всего числа **по** части или части **от** числа.) Составить такую задачу.

3. Задача решена делением некоторой дроби на $\frac{2}{3}$.

Какого типа была задача? (На нахождение всего числа **по** его части или части **от** числа.) Составить такую задачу.

4. Задача решена делением некоторой дроби на $\frac{2}{3}$. Какого типа была задача? (На нахождение всего числа **по** его части или части **от** числа.) Придумать такую задачу.

5. Весьма уместны деформированные примеры:

$$\frac{2}{5}\ \boxed{?}\ \frac{9}{10}=\frac{2\cdot 10}{5\cdot 9};\quad \frac{\square}{\square}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 5};$$

$$\frac{5}{6}:\frac{\square}{\square}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 10};\quad \frac{6}{7}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{6\cdot 5}{7\cdot 8}\ \text{и т.п.}$$

Далее тренировочные упражнения выполняются *парные*, причем направление преобразования систематически изменяется.

Пусть предложена задача.

За $\frac{4}{5}$ м ленты уплатили $\frac{12}{25}$ руб. Сколько стоит 1 м ленты?

Решение.

Количество товара известно, стоимость известна, неизвестна цена 1 метра ленты. Чтобы найти цену, надо стоимость разделить на количество товара:

$$\frac{12}{25}:\frac{4}{5}=\frac{12\cdot 5}{25\cdot 4}=\frac{3}{5}\ \text{(руб.)}$$

Условие решенной задачи записывается так:

$$\frac{4}{5}\ \text{м},\quad \frac{12}{25}\ \text{руб.},\quad \square.$$

По решению составляется схема обратной задачи

$$\frac{4}{5}\ \text{м},\quad \square,\quad \frac{3}{5}\ \text{руб.}$$

К схеме составляется условие задачи:

1 м ленты стоит $\frac{3}{5}$ руб. Сколько стоят $\frac{4}{5}$ м?

Решение

Цена 1 *м* ленты известна — $\frac{3}{5}$ руб.

Количество товара известно — $\frac{4}{5}$ *м*.

Стоимость товара неизвестна. Чтобы найти стоимость, надо цену умножить на количество товара.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25} \text{ (руб.)}$$

Проверка ответа первой задачи закончена. Если ученики встречаются с затруднениями при кратком способе решения посредством умножения (деления) на дробь, надо некоторые задачи решать двумя способами с подробной записью условия задачи в две строки.

Прямая задача

1 ———————— $\frac{2}{5}$ руб.

$\frac{4}{5}$ ———————— $\square$

Решение.

I способ

$$\frac{3}{5} : 5 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25} \text{ (руб.)}$$

II способ

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25} \text{ (руб.)}$$

Обратная задача

1 ———————— $\square$

$\frac{4}{5}$ ———————— $\frac{12}{25}$ руб.

Решение

I способ

$$\frac{12}{25} : 4 \cdot 5 = \frac{\cancel{12}^{3} \cdot \cancel{5}^{1}}{\cancel{25}_{5} \cdot \cancel{4}_{1}} = \frac{3}{5} \text{ (руб.)}$$

II способ

$$\frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{\cancel{12}^{3} \cdot \cancel{5}^{1}}{\cancel{25}_{5} \cdot \cancel{4}_{1}} = \frac{3}{5} \text{ (руб.)}$$

16. Умножение и деление целого и смешанного чисел на дробь как частные случаи умножения и деления дроби на дробь

Учащиеся еще из курса начальной школы знают, что при делении числа на единицу в частном получается то же самое число. Поэтому для них законны и понятны записи: $7 = \frac{7}{1}$; $12 = \frac{12}{1}$ и т. д.

Пусть требуется выполнить умножение целого числа 15 на $\frac{2}{3}$; решаем так:

$$15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{15}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot 2}{1 \cdot \cancel{3}_{1}} = \frac{10}{1} = 10 .$$

Разумеется, впоследствии промежуточные операции свертываются, и записи приобретают вид:

$$15\cdot\frac{2}{3}=\frac{15\cdot 2}{3}= \text{и т. д.}$$

Рассмотрим обратную задачу: —

$$10:\frac{2}{3}=\frac{10}{1}:\frac{2}{3}=\frac{\cancel{10}^{5}\cdot 3}{1\cdot \cancel{2}_{1}}=\frac{15}{1}=15 .$$

Затем можно перейти к кратким формам записи:

$$10:\frac{2}{3}=\frac{10\cdot 3}{2}=\frac{15}{1}=15.$$

Если первая пара примеров была решена в порядке: умножение → деление, то вторую пару примеров надо предложить в порядке: деление → умножение.

$$12:\frac{3}{4}=\frac{12}{1}:\frac{3}{4}= \text{и т.д.}$$

Затем результат деления проверяется умножением: $16\cdot\frac{3}{4}$.

Умножение и деление смешанных чисел на дробь рассматриваем так же совместно.

$$3\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{33}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{\cancel{33}^{11}\cdot\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{2}\cdot\cancel{6}_{2}}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4} .$$

Умножение проверяем делением.

$$2\frac{3}{4}:3\frac{3}{10}=\frac{11}{4}:\frac{33}{10}=\frac{\cancel{11}^{1}\cdot\cancel{10}^{5}}{\cancel{4}_{2}\cdot\cancel{33}_{3}}=\frac{5}{6}$$

Вторую пару примеров решаем в другой последовательности: сначала решаем пример на деление: $9\frac{1}{15}:3\frac{2}{5}$ и ответ проверяем умножением: $3\frac{2}{5}\cdot 2\frac{2}{3}$.

Особые правила умножения и деления смешанных и целых чисел на дробь не заучиваются.

Достаточно, если ученики смогут своими словами передать следующее:

Чтобы умножить или разделить смешанные (целые) числа на дробь, нужно их представить в виде дроби и дальше выполнять действия по правилам умножения или деления дроби на дробь.

При изучении переместительного закона умножения необходимо обратить внимание на то, что произведения вида $6 \cdot \frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3} \cdot 6$ равны друг другу, причем оба произведения можно вычислять по общему правилу:

$$6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\boxed{6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 6}$$

Умножение дробей полезно иллюстрировать на одном из уроков посредством вычисления площади прямоугольника.

17. Работа над тройкой задач: нахождение части числа, числа по величине его части и задачи типа «какую часть составляет одно число от другого?»

В связи с решением двух взаимно обратных задач иногда необходимо составлять третью разновидность задачи; решение такой тройки задач обеспечивает прочную циклическую связь мыслей.

I. Пусть была решена задача:

Рабочий заработал 92 рубля, $\frac{2}{5}$ этой суммы он положил на сберкнижку. Сколько денег он положил на сберкнижку?

Записываем условие задачи в виде следующей схемы:

$$92 \text{ руб.}, \ \frac{2}{5}, \ \boxed{?}$$

Решение

$$\frac{2}{5} \text{ от } 92 = 92 \cdot \frac{2}{5} = \frac{92 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{184}{5} = 36\frac{4}{5} \text{ (руб.)}$$

II. Составляем схему первой обратной задачи:

$$\square,\ \frac{2}{5},\ 36\frac{4}{5}\ \text{руб.}$$

Рабочий положил $\frac{2}{5}$ своих денег на сберкнижку, то есть $36\frac{4}{5}$ руб. Сколько денег было у него первоначально?

Решение

$$36\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{184 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 92\ (\text{руб.})$$

III. Составляем схему третьей задачи:

$$92\ \text{руб.},\ \square,\ 36\frac{4}{5}\ \text{руб.}$$

Рабочий заработал всего 92 руб. Из них он положил на сберкнижку $36\frac{4}{5}$ руб. Какую часть своих денег он положил на сберкнижку?

Решение

Чтобы найти, какую часть составляет меньшее число от большего необходимо меньшее число разделить на большее:

$$36\frac{4}{5} : 92 = \frac{184}{5} : \frac{92}{1} = \frac{184 \cdot 1}{5 \cdot 92} = \frac{2}{5}\ (\text{части}).$$

Ответ. Рабочий положил на сберкнижку $\frac{2}{5}$ своих денег.

Последняя задача — на нахождение отношения меньшего числа к большему, но мы решаем эту задачу, *не используя термина отношение*, а поставив вопрос: какую часть составляет одно число от другого?

Впоследствии употребляются оба названия задач одновременно, то есть используется оборот: *отношение меньшего числа к большему.*

В качестве исходной задачи может быть предложена и задача такого вида:

Отцу — 40 лет, а сыну — 15 лет. Какую часть возраста отца составляет возраст сына?

Решение

Чтобы определить, какую часть составляет одно число от другого, выполним деление: $15 : 40 = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$.

Возраст сына составляет $\frac{3}{8}$ от возраста отца.

Напишем схему решенной прямой задачи.

$$40 \text{ л.}, \ 15 \text{ л.}, \ \boxed{\frac{3}{8}}.$$

II. Сделаем искомым число 15:

$$40 \text{ л}, \ \square, \ \frac{3}{8}.$$

Отцу 40 *лет, возраст сына составляет* $\frac{3}{8}$ *части от возраста отца. Сколько лет сыну?*

Решение

$$\frac{3}{8} \text{ от } 40 = 40 \cdot \frac{3}{8} = \text{и т.д.}$$

III. Наконец, пусть неизвестным будет число 40:

$$\square, \ 15 \text{ л.}, \ \frac{3}{8}.$$

Сыну 15 *лет. Возраст сына составляет* $\frac{3}{8}$ *от возраста отца. Сколько лет отцу?*

Решение

$$15 : \frac{3}{8} = \ldots$$

Работа над такими тройками задач должна стать в дальнейшем *основным* приемом работы над данными тремя взаимосвязанными задачами.

Полезно проанализировать первые две задачи с точки зрения соотношения между исходным числом и результатом, например:

$\frac{3}{8}$ от $40 = 40 \cdot \frac{3}{8} = 15$	$\frac{3}{8}$ от $x = 15$
$15 < 40$	$x = 15 : \frac{3}{8} = \frac{15 \cdot 8}{3} = 40$
	$40 > 15$

Выясняется, что при нахождении части от числа (правильная дробь) результат будет *меньше* исходного числа

($15 < 40$); при определении числа по его части (правильная дробь) результат оказывается *больше* исходного числа ($40 > 15$).

В другой форме это выражается так: *когда умножают число на правильную дробь—число уменьшается*; *когда делят на правильную дробь — число увеличивается.*

Для того чтобы ученики уяснили эти факты, следует предлагать упражнения следующих видов:

1. Некоторое число умножили на дробь. Произведение оказалось меньше множимого. На какую дробь умножали? (Правильную или неправильную). Привести пример.

2. Некоторое число разделили на $\frac{2}{3}$. Что будет больше: делимое или частное? Привести пример. Находим ли в этом случае часть числа или число по его части?

3. Число A разделили на дробь $\frac{1}{2}$, получили в частном $Б$. Что больше, A или $Б$? Привести пример.

4. Если A разделить на неправильную дробь, то что будет больше, A или частное $Б$? Привести пример.

18. Распространение свойств действий на дробные числа

В существующей практике обучения изучение действий с дробями рассматривается последовательно одно за другим: сложение, вычитание, умножение, деление.

Между тем, используя методы противопоставления, эти вопросы удается изучить более рациональным путем.

Пусть решен пример на вычитание:

$$3\frac{3}{5} - 2\frac{1}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Превратим его в уравнение, скажем, с неизвестным уменьшаемым:

$$x - 2\frac{1}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Уменьшаемое находится действием обратным вычитанию:

$$x = 1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

То же самое делается в упражнениях на действия второй ступени:

$$5\frac{2}{7}\cdot 2 = 10\frac{4}{7}$$

$$x\cdot 2 = 10\frac{4}{7}$$

$$x = 10\frac{4}{7} : 2 = 5\frac{2}{7}.$$

Полезно иногда сопоставить решение двух примеров на нахождение неизвестного слагаемого и сомножителя; уменьшаемого и делимого; вычитаемого и делителя, записывая эти примеры рядом в двух столбцах.

Приведем пример к последнему случаю:

$3\frac{5}{8} - x = 1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{8} : x = 1\frac{3}{16}$
Решение	Решение
$x = 3\frac{5}{8} - 1\frac{1}{2}\ldots$	$x = 2\frac{3}{8} : 1\frac{3}{16}\ldots$

Приходим к суждению: *вычитаемое находится вычитанием, а делитель — делением.*

В разделе целых чисел нами были показаны все основные случаи сопоставления свойств действий.

Обязательно надо изучить основные из них, остальные могут предлагаться как упражнения. Это в еще большей степени относится к изучению дробных чисел.

Для сложения и умножения дробных чисел рассматриваются одновременно переместительный и сочетательный законы.

Соответствующие упражнения необходимо подобрать так, чтобы использование законов заметно ускоряло и облегчало вычисления (особенно устные), то есть чтобы была видна *польза* от применения этих законов.

Упражнения на переместительные законы

сложения:	*умножения:*
$35\frac{2}{17} + 120\frac{13}{34} + 4\frac{15}{17} = \left(35\frac{2}{17} + 4\frac{15}{17}\right) + 120\frac{13}{34} = 40 + 120\frac{13}{34} = 160\frac{13}{34}$	$\frac{5}{8}\cdot 12\frac{1}{5}\cdot 1\frac{3}{5} = \left(\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}\right)\times 12\frac{1}{5} = 1\cdot 12\frac{1}{5} = 12\frac{1}{5}$

Упражнения на сочетательные законы

сложения:	*умножения*:
$30+13\frac{3}{8}+63\frac{2}{17}+6\frac{5}{8}=$ $=30+\left(13\frac{3}{8}+6\frac{5}{8}\right)+$ $+63\frac{2}{17}=$	$25\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot3\cdot1\frac{1}{4}=$ $=25\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot3=$
(применили переместительный закон сложения)	(применили переместительный закон умножения)
$=30+\left(13\frac{3}{8}+6\frac{5}{8}\right)+$ $+63\frac{2}{17}=$	$=25\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot3=$
(применили сочетательный закон сложения)	(применили сочетательный закон умножения)
$=30+20+63\frac{2}{17}=113\frac{2}{17}$	$=25\frac{1}{6}\cdot1\cdot3=75\frac{1}{2}$

Среди упражнений должны содержаться как прямые, так и деформированные:

$2\frac{5}{11}+49\frac{1}{2}+3\frac{6}{11}=$	$\frac{4}{5}\cdot13\frac{1}{3}\cdot2\frac{1}{4}=$
$45\frac{2}{7}+\square+4\frac{5}{7}=63\frac{4}{8}$	$\square\cdot16\frac{2}{7}\cdot3\frac{1}{4}=16\frac{2}{7}$
$\square+20\frac{4}{15}+1\frac{13}{16}=30\frac{4}{15}$	$2\frac{1}{5}\cdot\square\cdot\frac{5}{11}=100$

Очень важное значение при изучении умножения и деления смешанных чисел на целое число имеет правильное использование распределительного закона умножения и одноименного свойства деления.

Поскольку оба действия изучаются одновременно, постольку и указанные закон и свойство также рассматриваются одновременно:

$$26\frac{3}{7}\cdot 2=\left(26+\frac{3}{7}\right)\cdot 2=26\cdot 2+\frac{3}{7}\cdot 2=52+\frac{6}{7}=52\frac{6}{7}$$

$$52\frac{6}{7}:2=\left(52+\frac{6}{7}\right):2=52:2+\frac{6}{7}:2=26+\frac{3}{7}=26\frac{3}{7}$$

Уместно предложить несколько пар примеров на применение распределительного свойства к вычитанию:

$$99\frac{19}{20}:4=\left(100-\frac{1}{20}\right):4=100:4-\frac{1}{20}:4=25-\frac{1}{80}=24\frac{79}{80}$$

$$24\frac{79}{80}\cdot 4=\left(25-\frac{1}{80}\right)\cdot 4=25\cdot 4-\frac{1}{80}\cdot 4=100-\frac{1}{20}=99\frac{19}{20}$$

$$99\frac{17}{19}:2=\left(100-\frac{2}{19}\right):2=\ldots$$

$$49\frac{17}{19}\cdot 2=\left(50-\frac{2}{19}\right)\cdot 2=\ldots$$

При повторении изменения результатов действий в зависимости от изменения компонентов достаточно ограничиться простейшими случаями, причем в примеры нужно иногда включать и целые числа, рассматривая их как частный случай дробных чисел. В этих упражнениях удобны записи в три строчки, известные нам по предыдущему изложению.

Изменение суммы

$$4\frac{5}{8}+10=14\frac{5}{8}$$

$$+\frac{1}{8}\qquad +\boxed{?}$$

. . . . .

К этой записи учитель составляет совместно с учениками задачу:

Как изменится сумма двух чисел, если одно слагаемое осталось постоянным, а другое — увеличилось на $\frac{1}{8}$?

Изменение произведения

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$$

$$\cdot 10\qquad \cdot\square$$

. . . . .

К этой записи учитель составляет совместно с учащимися задачу:

Как изменится произведение двух чисел, если один сомножитель увеличился в 10 раз, а другой остался постоянным?

Ученик должен дать предварительный ответ:

«... тоже увеличится на $\frac{1}{8}$»

Потом убеждается в этом посредством подробных вычислений (в уме):

1) $4\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=4\frac{6}{8}$

2) $4\frac{6}{8}+10=14\frac{6}{8}$

3) $14\frac{6}{8}-14\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

Ответ ученика:

«... произведение также увеличится в 10 раз».

Ответ подтверждает подробными вычислениями в уме:

1) $\frac{3}{5}\cdot 10=\frac{30}{5}=6$

2) $6\cdot\frac{2}{7}=\frac{12}{7}$

3) $\frac{12}{7}:\frac{6}{35}=\frac{12\cdot 35}{7\cdot 6}=10$

Произведение увеличилось в 10 раз.

И в том и в другом случае исходная запись приобретает следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} 4\frac{5}{8} & +10= & 14\frac{5}{8} \\ +\frac{1}{8} & & +\frac{1}{8} \\ \hline 4\frac{6}{8} & +10= & 14\frac{6}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{5} & \cdot\frac{2}{7}= & \frac{6}{35} \\ 10 & & \cdot 10 \\ \hline 6 & \cdot\frac{2}{7}= & \frac{12}{7} \end{array}$$

В отдельных случаях полезно сопоставлять влияние одновременного изменения обоих компонентов на результат действия:

Изменение

разности

$$\begin{array}{ccc} 8\frac{7}{9} & -2\frac{3}{9}= & 6\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \square \\ \hline & \ldots\ldots & \end{array}$$

частного

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{15} & :\frac{4}{45}= & 3 \\ :5 & :5 & \boxed{?} \\ \hline & \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Если уменьшаемое и вычитаемое уменьшить *на одно и то же число*, то разность не изменяется.

Если делимое и делитель уменьшить *в одно и то же число раз*, то частное не изменится.

ГЛАВА III
ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

1. Общие сведения о десятичных дробях. Запись и чтение десятичной дроби

Вводится определение десятичной дроби, как такой, у которой знаменателем является единица с нулями: $\frac{327}{100}$, $\frac{13}{1000}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{2376}{100}$ и т. д.

Пусть дана дробь $\frac{327}{100}$.

Представим ее так:

$$\frac{327}{100}=\frac{300}{100}+\frac{20}{100}+\frac{7}{100}=3+\frac{2}{10}+\frac{7}{100}=3 \text{ целых}+2 \text{ десятых доли}+7 \text{ сотых доли.}$$

Таким образом, десятичную дробь можно выразить как сумму целого числа и нескольких десятичных дробей, представляющих десятые, сотые и т. д. доли.

Точно так же целое число можно изобразить в виде суммы единиц различных разрядов:

$$327=3 \text{ сотни}+2 \text{ десятка}+7 \text{ единиц.}$$

Так как десятичная дробь представляет собой сумму целых чисел и десятых, сотых и т. д. долей, то ее можно записывать в строчку, отделяя запятой целую часть числа от дробной части числа, а название знаменателя (то есть название долей) будет зависеть от числа цифр после запятой;

Рассмотрим таблицу.

Таблица 9

Целая часть			Дробная часть		
сотни	десятки	единицы	десятые доли	сотые доли	тысячные доли
	2	3	7	0	4

Левее запятой стоит число 23 — это 23 целых.

Правее запятой на первом месте стоит цифра 7 — 7 десятых; на втором месте стоит цифра 0 — нуль сотых; на третьем месте стоит цифра 4—это четыре тысячных и т. д.

Для того чтобы ученики научились правильно писать и читать десятичные дроби, важно создавать ассоциации двусторонние: *количество десятичных знаков→название дроби* и *название дроби → количество десятичных знаков.*

На этом этапе изучения дробей полезно предлагать вопросы двух видов:

1. Десятичная дробь содержит стотысячные доли. Сколько цифр будет записано после запятой? Придумать пример. (Решение задачи основано на цепи умозаключений: сто тысяч → пять нулей в нем → пять цифр после запятой. Например: 3,07061.)

2. После запятой написано четыре цифры. Назвать знаменатель дроби. Какие доли в этой дроби? Придумать пример. (Решение основано на последовательности ассоциаций: четыре цифры → четыре нуля → десять тысяч → десятитысячные доли; например: 5, 0062; читаем: 5 целых 62 десятитысячных.)

Далее выясняется, что сокращение и раздробление десятичных дробей осуществляется соответственно зачеркиванием и дописыванием нулей в конце числа.

Раздробление (размельчение долей)	*Сокращение* (укрупнение долей)
$\frac{7}{10}=\frac{7\cdot 100}{10\cdot 100}=\frac{700}{1000}$	$\frac{700}{1000}=\frac{700:100}{1000:100}=\frac{7}{10}$
$0,7=0,700$	$0,700=0,7$
Если к десятичной дроби справа приписать несколько нулей, то величина дроби не изменяется.	*Если зачеркнуть нули, стоящие справа десятичной дроби, то величина дроби не изменяется.*

Так же просто осуществляется сравнение десятичных дробей.

Пусть даны две дроби: 3,72 и 3,7256 =

Для сравнения сначала их приведем к общему знаменателю. Запишем эти дроби друг под другом:

$$\begin{array}{c}3,7200\\3,7256.\end{array}$$

Начинаем сравнивать цифры слева: в обеих дробях по 3 целых; в обеих дробях по 7 десятых; в обеих дробях по 2 сотых; и вот, наконец, доходим до *различия*: в верхней дроби нет тысячных, а в нижней дроби — 5 тысячных.

Значит, $3{,}7200 < 3{,}7256$, или $3{,}72 < 3{,}7256$.

Можно рассуждать и так: знаменатели этих дробей одинаковы (10000), а числитель верхней дроби меньше числителя нижней дроби ($7200 < 7256$).

При изучении сравнения очень хорошую роль играют упражнения на придумывание дробей, то есть на дописывание недостающих цифр в следующих записях:

$$8{,}7\square\square\square < 8{,}7567$$

$$5{,}07\square > 5{,}07\square$$

$$0{,}071 < 0{,}1\square\square \text{ и т. п.}$$

При изучении десятичных дробей следует широко использовать вычисления на счетах.

Для удобства работы со счетами на первое время можно укрепить рядом с проволоками счетов надписи с названиями разрядов (рис. 18).

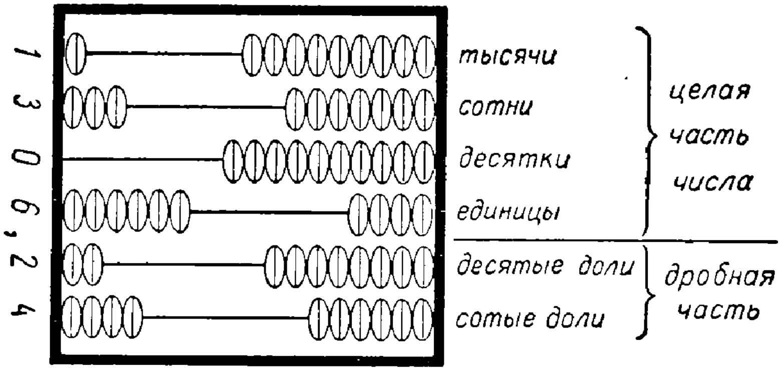


Рис. 18

Уже на первых уроках одновременно с записью и чтением дробей следует тренировать учащихся в откладывании десятичных дробей на счетах.

Округление десятичных дробей

При ознакомлении с правилами округления десятичных дробей следует не только сообщить это правило для заучивания, но и показать целесообразность такого правила.

Пусть указана длина стола — 83 *см*; требуется округлить эту длину до десятков сантиметров, то есть до дециметров. Можно поступить двумя способами:

1) Округлить в большую сторону:

$$83 \text{ см} \approx 90 \text{ см } (= 9 \text{ дм})$$

2) Округлить в меньшую сторону:

$$83 \text{ см} \approx 80 \text{ см } (= 8 \text{ дм})$$

Который из этих двух способов округления точнее? Точнее тот, при котором допущена меньшая ошибка (меньше погрешность).

При первом способе округления ошибка составляет около 7 *см* (83 + 7 = 90); при втором способе мы допускаем ошибку, составляющую *примерно* 3 *см* (83 — 3 = 80).

Значит, выгоднее округлить в данном случае в меньшую сторону.

Рассуждая так, приходим к правилу:

Если первая (слева) отбрасываемая цифра равна 0; 1; 2; 3; 4, то последняя сохраняемая цифра не изменяется; например: $0{,}83 \approx 0{,}8$; $7{,}693 \approx 7{,}69$ и т. д.; *если первая (слева) отбрасываемая цифра равна 5; 6; 7; 8; 9, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.*

В упражнениях следует охватить все случаи округления; например, требуется округлить следующие числа до сотых: 7,6023; 5,025; 5,997.

Последний случай интересен тем, что добавление трех тысячных приводит к цепи преобразований: $5{,}997 \approx 6{,}00$; на этом примере видно, что округленное число иногда может оканчиваться нулями.

Уяснению сущности правила округления помогают структурно-обратные упражнения:

После округления числа 3,7$\square$ *до десятых долей число оказалось равным* 3,7; *какие значения могла принять цифра сотых?* $3{,}7\,\square \approx 3{,}7$.

Сколько различных ответов имеет данная задача?

Ответ: $3{,}70 \approx 3{,}7$;
$3{,}71 \approx 3{,}7$;
$3{,}72 \approx 3{,}7$;
$3{,}73 \approx 3{,}7$;
$3{,}74 \approx 3{,}7$.

Полезно заранее определять количество решений:

$8{,}3\square \approx 8{,}4$ (пять решений).

$8{,}\square\square \approx 8{,}5$ (десять решений)

2. Сложение и вычитание десятичных дробей

В сборнике задач С. А. Пономарева и Н. И. Сырнева упражнения на сложение и вычитание десятичных дробей даны раздельно. Между тем гораздо удобнее рассматривать их совместно, постепенно усложняя компоненты действий.

Пусть выполнено сложение:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3{,}67 \\ 0{,}548 \\ \hline 4{,}218. \end{array} \end{array}$$

После решения примера на сложение мы сразу же рассматриваем обратный пример на вычитание:

$$-\begin{array}{r} 4{,}218 \\ 0{,}548 \\ \hline 3{,}67 \end{array}$$

Вторую пару примеров рассматриваем в другом порядке, то есть первым решаем пример на вычитание, а результат проверяем сложением:

$$-\begin{array}{r} 10{,}038 \\ 8{,}37 \\ \hline 1{,}668 \end{array} \qquad \text{Проверка:} \quad +\begin{array}{r} 1{,}668 \\ 8{,}37 \\ \hline 10{,}038 \end{array}$$

Чтобы научить учащихся правильно располагать цифры при выполнении сложения и вычитания, целесообразно запись второго компонента начинать с постановки запятой под запятой:

$$-\begin{array}{r} 10{,}038 \\ , \\ \hline \end{array}$$

Потом правее и левее запятой располагать цифры, обозначающие разряды.

Полезно иногда предлагать деформированные примеры, в которых ученик должен восстановить пропущенные цифры, например:

$$
\begin{array}{r}
2,\square 5\,\square \\
+\ \square 7,\square 9\,6 \\
\hline
35,736.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\square 8,\square\,\square \\
-\ 3\square,6\,5\square \\
\hline
59,743.
\end{array}
$$

Одновременное изучение сложения и вычитания десятичных дробей позволяет с первых же шагов решать простейшие уравнения, сопровождая решение проверкой:

$$x + 28{,}6 = 36{,}05$$

$$
\begin{array}{r}
36{,}05 \\
-\ 28{,}6 \\
\hline
7{,}45
\end{array}
\qquad \text{Проверка:} \qquad
\begin{array}{r}
7{,}45 \\
+\ 28{,}6 \\
\hline
36{,}05
\end{array}
$$

При изучении сложения и вычитания необходимо систематически производить вычисления на счетах. Сложение и вычитание десятичных дробей — один из удобных разделов для тренировки в вычислениях на счетах.

3. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10; 100; 1000;... и т. д. раз (Умножение и деление десятичной дроби на 10; 100;... и т. д.)

В учебнике арифметики И. Н. Шевченко вопрос об увеличении и уменьшении десятичной дроби в 10; 100; 1000; ... и т. д. раз рассматривается до изучения действий с десятичными дробями.

Однако, как и в случае обыкновенных дробей, оказывается целесообразным совмещение умножения (деления) десятичной дроби на 10; 100; ... и увеличение (уменьшение) дроби в 10; 100; ... и т. д. раз.

В книге Н. Н. Саговской умножение десятичной дроби на 10; 100; ... и т. д. рассматривается на одном уроке и деление десятичной дроби на 10; 100; ... и т. д. рассматривается на другом уроке.

Опытная проверка показала исключительную эффективность одновременного изучения данных разделов программы. При этом учащиеся хорошо усваивают связь между умножением и делением, а учебное время используется более экономно, чем при раздельном изучении материала.

Пусть имеется число 26,45. Увеличим его в 10 раз. Тогда 2 десятка станут 2 сотнями, 6 единиц — 6 десятками, 4 десятых доли станут 4 единицами, 5 сотых долей — 5 десятыми.

Запишем это преобразование:

$$26,45 \cdot 10 = 264,5$$

Для того чтобы десятичную дробь увеличить в 10 раз (умножить на 10), надо запятую перенести *вправо* на один знак.

Рассмотрим обратную задачу—уменьшить число 264,5 в 10 раз:

$$264,5 : 10 = 26,45$$

Для того чтобы десятичную дробь уменьшить в 10 раз (разделить на 10), надо запятую перенести *влево* на один знак.

Пусть требуется увеличить число 3,765 в 100 раз. Для того чтобы увеличить число в 100 раз, надо увеличить его сначала в 10 раз, а потом опять в 10 раз, то есть запятую надо перенести на два знака вправо;

$3,765 \cdot 100 = 376,5.$

Очевидно, верно и следующее:

$376,5 : 100 = 3,765.$

Таким образом, мы приходим к следующему объединенному правилу:

Для того чтобы $\frac{\text{увеличить}}{\text{уменьшить}}$ *десятичную дробь в* 10; 100; 1000; ... *и т. д. раз, надо перенести запятую соответственно на 1*; *2*; *3*; ... *и т. д. знаков* $\frac{\text{вправо}}{\text{влево}}$.

Решение второй пары примеров надо начать с деления и проверить умножением.

Упражнения по этой теме должны состоять как из обычных, так и обратных им, то есть на восстановление деформированной записи:

$$3,76 \cdot 10 = \square;$$
$$25,6 : 10 = \square;$$
$$123,45 : \square = 1,2345;$$
$$\square \cdot 1000 = 8,36;$$
$$\square : 100 = 2,68;$$
$$3,06 \cdot \square = 3060 \quad \text{и т. п.}$$

Понятиями *увеличить* (*уменьшить*) в 10; 100; ... *раз* и *умножить* (*разделить*) *на* 10; 100; ... надо пользоваться при решении этих примеров, как синонимами.

При изучении этого материала уместно повторить соотношения между десятичными мерами посредством выполнения следующих упражнений:

3,78 *м* = $\square$ *см*;	37,9 *мм* = $\square$ *см*;
$\square$ *м* = 63 *дм*;	876,4 *кв. дм* = $\square$ *кв. см*;
5 *кг*:1000 = $\square$ *г*;	$\square$ *куб. м*:1000 = 5 *куб. дм*;
7,2 *ц*:100 = $\square$ *кг*;	$\square$ коп.·100 = 36 руб.
87 руб.: $\square$ = 87 коп;	

4. Умножение и деление десятичных дробей

В поурочных разработках Е. Н. Саговской умножение десятичных дробей объясняется на двух уроках; причем на одном уроке рассматривается умножение десятичной дроби на целое число, а на втором уроке — умножение на десятичную дробь, то есть здесь проявилось стремление сохранить при изучении десятичных дробей ту же последовательность, что и при изучении обыкновенных дробей.

Однако изучение умножения *обыкновенной* дроби на целое число было необходимым предварительным звеном к изучению следующей темы — нахождению части числа и числа по его части.

В случае десятичных дробей вывод правила умножения дроби на дробь совершается не на основе нахождения части числа, а на основе умножения обыкновенной дроби на дробь. Здесь цепь обоснований оказывается короче, чем в случае обыкновенных дробей.

К тому же целое число следует считать частным видом десятичной дроби, в которой после запятой стоят нули.

Стало быть, нет нужды отдельно рассматривать умножение десятичной дроби на целое число, а следует сразу вывести общее правило умножения десятичной дроби на десятичную дробь, которое верно и для частного случая, когда один или оба сомножителя — целые числа.

Пусть требуется выполнить умножение: 0,37 · 0,4 = Выполним умножение в форме обыкновенных дробей:

$$0{,}37 = \frac{37}{100}; \quad 0{,}4 = \frac{4}{10};$$

$$0{,}37 \cdot 0{,}4 = \frac{37 \cdot 4}{100 \cdot 10} = \frac{148}{1000} = 0{,}148.$$

. Чтобы найти числитель произведения, мы перемножили дроби, не обращая внимания на запятые, как целые числа ($37 \cdot 4 = 148$).

Знаменатель первого сомножителя — 100, знаменатель второго сомножителя — 10, а знаменатель произведения — 1000.

Говоря по-другому: если в первом сомножителе были отделены запятой справа две цифры (знаменатель 100 имеет два нуля) и во втором — одна цифра (знаменатель 10 имеет один нуль), то в произведении отделены справа 3 цифры (в тысяче — три нуля).

Для уяснения правила постановки запятой в произведении при умножении десятичных дробей целесообразно предлагать для *устного* решения примеры с несложными числами, например:

$$
\begin{aligned}
&0{,}22 \cdot \square = 0{,}0044;\\
&\square \cdot 2{,}3 = 69;\\
&4{,}231 \cdot \square = 846{,}2;\\
&31{,}2 \cdot \square = 0{,}624 \text{ и т. д}
\end{aligned}
$$

Умножение десятичной дроби на целое число (или наоборот) подводится под общее правило:

$$0{,}37 \cdot 4 = 1{,}48.$$

В одном сомножителе запятой справа отделены две цифры (0,37), а в другом сомножителе ни одна цифра не отделена запятой (отделены нуль цифр), поэтому в произведении мы отделяем запятой лишь две цифры ($2 + 0 = 2$).

5. Деление десятичной дроби на десятичную дробь

Если в предыдущем случае можно было сразу вывести правило для общего случая — умножения десятичной дроби на десятичную дробь, то в случае деления необходимо сначала рассмотреть деление дроби на целое число, а затем изучать общий случай деления дроби на дробь.

Это следует из того, что деление десятичной дроби на дробь *сводится* к делению десятичной дроби на целое число.

Пусть требуется выполнить действие:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}0168 & 3 \\ \underline{15} & 0{,}0056 \\ 18 & \\ \underline{18} & \end{array}$$

Рассуждаем так: 0 целых разделить на 3, получится 0 целых; 0 десятых разделить на 3, получится 0 десятых; 1 *сотую* разделить на 3 невозможно, записываем 0 *сотых*; 16 *тысячных* разделить на 3, получится 5 *тысячных*, а в остатке 1 тысячная; сносим 8 десятитысячных; 18 *десятитысячных* при делении на 3 дадут 6 *десятитысячных*, то есть получим ответ 0,0056.

Таким образом, деление десятичной дроби на целое число выполняется поразрядно так же, как и деление целого числа на целое.

Деление десятичной дроби на десятичную дробь сводится к предыдущему случаю.

Вывод правила деления десятичной дроби на десятичную дробь может быть осуществлен так:

Сначала вспоминаем, что если делимое и делитель — целые числа и они умножены на одно и то же число, то частное не изменяется: $24 : 12 = 2$;

$$(24 \cdot 100):(12 \cdot 100) = 2400:1200 = 2.$$

Убеждаемся, что это верно и для дробей.

Пусть найдено частное от деления двух *дробей:*

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1\,\frac{7}{8}\,.$$

Увеличим каждую дробь в несколько раз, например в 10 раз:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot 10\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot 10\right) = \frac{3 \cdot 10}{4} : \frac{2 \cdot 10}{5} = \frac{30}{4} : \frac{20}{5} =$$

$$= \frac{30 \cdot 5}{4 \cdot 20} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1\,\frac{7}{8}\,.$$

Пусть требуется вычислить:

$$0{,}256:1{,}6 =$$

Так как компоненты этого действия — дроби, то их можно увеличить в одно и то же число раз и от этого частное не изменится.

Так как разделить десятичную дробь на целое число ученики умеют, то наша цель — превратить делитель в целое число; в делителе 1,6 содержатся десятые доли; значит, чтобы свести деление дробей к делению дроби и на целое число, оба компонента — делимое и делитель — надо умножить на 10; имеем:

$$0{,}256:1{,}6=(0{,}256\cdot 10):(1{,}6\cdot 10)=256:16;$$

$$\begin{array}{r|l} -\,2{,}56 & 16 \\ \underline{16} & \overline{0{,}16}. \\ -\,96 & \\ \underline{96} & \end{array}$$

Удобно располагать запись деления так, чтобы новый пример находился под прежним примером, а не рядом с ним; в этом случае расположение одних и тех же цифр друг под другом облегчает подсчет знаков, через которые переносится запятая:

3,672 : 2,04 =
367,2 : 204 =

Формулируем правило: *чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо делимое и делитель увеличить во столько раз, чтобы делитель обратился в целое число. Дальше выполнять деление по правилам деления дроби на целое число.*

В этом правиле целое число понимается как частный случай десятичной дроби; например:

3672,000 : 2,04 =
367200,0 : 204 =

С интересом решают ученики устно следующие деформированные примеры:

$18\cdot 0{,}001=\quad;$	$\square\cdot 0{,}0001=0{,}25;$
$\square\cdot 0{,}01=13{,}7;$	$13{,}6\cdot\square=1{,}36;$
$3{,}89:0{,}1=\quad;$	$\square:0{,}01=93{,}056;$
$15{,}6:\square=1560;$	$\square\cdot 100=2{,}3;$
$\square\cdot 1000=37{,}5;$	$37{,}6:\square=3{,}76.$

6. Решение задач на нахождение части от числа и числа по его части

Десятичные дроби — частный случай обыкновенных дробей, а поэтому в теме «Десятичные дроби» законно находить часть от числа и число по его части *сразу* умножением и делением:

а) чтобы найти 0,3 от числа, надо число умножить на 0,3;

б) чтобы найти все число по величине 0,3 частей его, надо данную величину разделить на 0,3.

Для четкого различения этих взаимно обратных суждений полезно использовать противопоставление.

Нахождение части числа	*Нахождение числа по величине его части*
1 ———— 6,3 руб.	1 ———— □
0,4 ———— □	0,4 ———— 2,52 руб.
Решение	Решение
$6{,}3 \cdot 0{,}4 = 2{,}52$ (руб.).	$2{,}52 : 0{,}4 = 6{,}3$ (руб.).

Большей частью выгодно использовать свернутые формы записи:

0,4 от 6,3 руб. $= x$	0,4 от $y = 2{,}52$
Решение	Решение
$x = 6{,}3 \cdot 0{,}4 = 2{,}52$ (руб.).	$y = 2{,}52 : 0{,}4 = 25{,}2 : 4 = 6{,}3$ (руб.).

Необходимо упражнять учеников в составлении задач, подобных следующим:

Всего было 6,3 руб. Из них израсходовали 0,4 части. Сколько денег израсходовали?	На покупку книг израсходовали 0,4 денег, то есть 2,52 руб. Сколько всего денег было первоначально?

7. Задачи на проценты

В существующей программе задачи на проценты выделены в отдельную тему и изучаются после десятичных дробей путем сведения их к нахождению части числа и числа по величине его части.

Пусть дана задача:

Семья заработала за месяц 300 руб. Из них 6% израсходовали на оплату квартиры. Сколько денег израсходовали на квартиру?

Общепринятый сейчас способ решения этой задачи сводится к тому, что необходимо, во-первых, 6% переосмыслить как шесть сотых $\left(6\% = \frac{6}{100}\right)$; во-вторых, изобразить эту дробь в виде десятичной дроби: $6\% = 0{,}06$; в-третьих, задачу на нахождение процента от числа осмыслить как задачу на нахождение дроби от числа: найти 6% от числа — это значит найти 0,06 от этого числа.

Но вот посмотрим, что дальше получается:
6% от 300; $6\% = 0{,}06$; 0,06 от 300; $300 \cdot 0{,}06 = 18$ (руб.).

Решение этой же задачи без обращения процентов в десятичную дробь выглядит так: 6% от $300 = \frac{300 \cdot 6}{100} = 18$ (руб.).

Решение обратной задачи выглядит так:

6% от $x = 18$ (руб.);
0,06 от $x = 18$ (руб.);
$x = 18:0{,}06 = 1800:6 = 300$ (руб.).

Без обращения процентов в десятичную дробь решение обратной задачи осуществляется короче: 6% от $x = 18$ (руб.);

$$x = \frac{18 \cdot 100}{6} = 300 \text{ (руб.)}.$$

Рассмотрим подробнее последнюю задачу. По первому способу решения вначале заменяем 6% дробью 0,06; выполнив по существу деление ($6 : 100 = 0{,}06$); далее приходится выполнять снова обратное преобразование, а именно делитель 0,06 заменяем числом 6, умножив делимое и делитель на 100 ($18 : 0{,}06 = 1800 : 6 =$ и т. д.).

Существующая схема решения задач на проценты посредством замены последних десятичной дробью нередко приводит к лишним преобразованиям, то есть к усложнению решения.

Поэтому целесообразно обходиться вторым способом решения этих задач, наиболее распространенным в технических и экономических расчетах (без замены процентов дробью).

Обычно задачи на проценты рассматривают *одну за другой* на разных уроках; между тем их целесообразно рассматривать одновременно, одну в сравнении с другой.

Нахождение процента от числа	*Нахождение числа по процентам*
100% ——— 300 6% ——— $\square$	100% ——— $\square$ 6% ——— 18 руб.
Решение	Решение
$\frac{300}{100} \cdot 6 = \frac{300 \cdot 6}{100} = 18$ (руб.).	$\frac{18}{6} \cdot 100 = 300$ руб.

Если первая пара задач рассматривалась в прямом порядке (от задачи на нахождение процентов — к задаче на нахождение числа по его процентам), то вторую пару задач надо решить в противоположном порядке: сначала решить задачу второго вида, а потом ее решение проверить решением обратной задачи.

	В классе была 21 девочка, что составляло 60% всех учащихся. Сколько было учащихся в классе?
100% ——— 35 человек 60% ——— $\square$	100% ——— $\square$ 60% ——— 21 человек
Решение	Решение
$\frac{35}{100} \cdot 60 = 21$ (человек).	$\frac{21 \cdot 100}{60} = 35$ человек.

Потом записывается схема, а по ней составляется обратная задача и решается.

Задачи на проценты (решаемые, кстати сказать, всего лишь двумя отдельными действиями) вполне возможно изучать уже в III—IV классах. Если бы этот шаг был осуществлен, то снова заметно было бы облегчено изучение арифметики в V—VI классах.

Рассматривая краткую запись условия обеих задач на проценты, мы видим, что они относятся к виду задач на прямое приведение к единице:

100% ——— 300 руб.
60% ——— $\square$ руб.

Решение: 1) 300 руб. : 100 = 3 руб.; 2) 3 руб. $\times$ $\times$ 6 = 18 руб.

$$100\% \text{———} \square \text{ руб.}$$
$$60\% \text{———} 18 \text{ руб.}$$

Решение: 1) 18 руб. : 6 = 3 руб.; 2) 3 руб. · 100 = = 300 руб.

Решения обеих задач осуществляются двумя действиями — делением (первое действие) и умножением (второе действие).

Задача же на нахождение процентного отношения чисел относится уже к задачам на *обратное приведение к единице*, так как решается двумя действиями *деления*.

Задача. *Семья получила за месяц* 300 *руб. Из них за квартиру уплатила* 18 *руб.*

Сколько процентов своих денег она израсходовала на оплату квартиры?

$$100\% \text{———} 300 \text{ руб.}$$
$$\square\% \text{———} 18 \text{ руб.}$$

Решение. 1. 300 руб.:100 = 3 руб.;

2. 18 руб.:3 руб. = 6 (%).

Проведенный выше анализ показывает, что задачи на проценты отнюдь не должны связываться с десятичными дробями.

Проценты могут изучаться до знакомства с последними, даже в начальной школе, и в разделе целых чисел в начале V года обучения, и в разделе обыкновенных дробей.

Решение любой задачи на проценты связано с использованием постоянного числа долей (100%) и потому достигается даже более прозрачными умозаключениями, чем решение задач на нахождение части числа и числа по его части.

Задачи на проценты по своей структуре значительно ближе к задачам на прямое и обратное приведение к единице, изучаемым во II классе.

При решении задачи на нахождение процентного отношения необходимо пользоваться либо подробным способом решения (как показано выше — в 2 действия), либо свернутым правилом:

1) Находим, чему равен 1% числа: $\left(\frac{300}{100}\right)$.

2) Определяем, сколько процентов составляют 18 руб.

$$18 : \frac{300}{100} = \frac{18 \cdot 100}{300} = \frac{18}{300} \cdot 100.$$

По последней записи формулируем правило нахождения процентного отношения.

Это правило можно на первых порах сформулировать, не используя понятия *процентного отношения*, скажем, так:

Чтобы определить, сколько процентов составляет одно число от другого, надо первое число разделить на второе, а потом умножить на 100.

В такой формулировке правило можно использовать после введения понятия о получении дроби путем деления одного числа на другое, то есть с самого начала курса обыкновенных дробей: изучением тройки задач на проценты надо заниматься в V классе.

После изучения темы «Отношение» то же правило формулируется короче, в общепринятой форме:

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо найти отношение этих чисел, а потом умножить его на 100. Понятие отношения вполне уместно дать в V классе в связи с делением дроби на дробь.

Наряду с решением задач с различными сюжетами, *иногда* необходимо практиковать решение всех трех задач по одному сюжету и набору чисел, причем первой, исходной, может быть любая из этой тройки задач.

ГЛАВА IV

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ИЗУЧЕНИИ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ АРИФМЕТИКИ

Как известно, развитие математического мышления учащихся в основном достигается посредством решения задач: более половины учебного времени отводится на решение разнообразных составных задач.

Выше мы показали методику изучения контрастных действий, операций или сходных свойств и законов в курсе арифметики.

Опыт, подтвердивший успех этой методики, натолкнул на мысль, что в курсе арифметики целесообразно при решении составных задач рассматривать преобразование задач прямой структуры в обратную или наоборот.

Перечислим пары и тройки таких сопряженных задач:

1. Задачи на прямое и обратное приведение к единице.

2. Две разновидности задач на пропорциональное деление (нахождение чисел по двум суммам и по двум разностям.

3. Задачи на нахождение чисел:

а) по сумме и отношению,

б) по разности и отношению,

в) по сумме и разности.

4. Задачи на движение в одном и противоположном направлениях.

5. Задачи на нахождение среднего арифметического, обратная ей задача.

6. Задача на сложное тройное правило и обратная ей задача.

7. Прямая и обратная задача вообще, безотносительно к тому, является ли исходная задача типовой или нет, простой или сложной.

Наш опыт показал, что составление и решение обратной задачи вслед за решением прямой задачи является, помимо всего остального, прекрасной формой развития навыков самоконтроля.

В силу различных причин немало учеников, поступающих в V класс, не обладают достаточной подготовкой даже в объеме тех довольно скромных требований нынешней программы начальных классов.

Не будем таить греха и в том, что сами учителя, работающие в V классе, не всегда хорошо представляют все разновидности простых и составных задач, решаемых в начальной школе, связи и переходы между этими задачами. Недостаточную помощь в этом приносят учителю и существующие в настоящее время пособия по методике арифметики для средней школы, в которых обычно мало внимания уделяется арифметике начальных классов.

Поэтому очень важно учителю *тщательно* изучить методику обучения арифметике в начальных классах, которую оказывается возможным и выгодным также *перестроить* на принципе одновременного изучения взаимно обратных действий и задач. В этом ему поможет знакомство со статьями, указанными в библиографии (см. [74]; [75]; [76]; [82]; [86]).

Здесь же мы ограничимся рассмотрением лишь одного вида задач на сложное тройное правило, который рассматривается в теме «прямая и обратная пропорциональность величин»[1].

Как и вообще при введении новой задачи, знакомство с решением этих задач целесообразно начать с процесса составления условия.

Для этого заранее выбирают исходную единицу, используя существующие нормы производительности труда, расхода материалов, средств и т. п.

Пусть 1 человек в 1 день может заготовить в среднем 3,6 *куб. м* дров. Затем намечаем значения двух величин — времени работы и количества рабочих и соответственно вычисляем объем выполненной работы:

15 человек за 18 дней заготовят $3{,}6 \cdot 15 \cdot 18 = 972$ (*куб. м*) дров.

12 человек за 25 дней заготовят $3{,}6 \cdot 12 \cdot 25 = 1080$ *куб. м* дров.

Эти числа располагаем в две строки:

18 дней	15 дней	972 *куб. м*
12 дней	25 дней	1080 *куб. м*

Чтобы составить задачу на сложное тройное правило, достаточно исключить одно число из этой таблицы.

Например, может быть предложена следующая задача:

За 18 рабочих дней бригада лесорубов в составе 15 человек заготовила 972 куб. м дров. Сколько дров заготовит бригада из 12 человек за 25 дней при такой же производительности труда?

Рассмотрим для сравнительной характеристики несколько способов решения этой задачи.

Условие задачи запишем так:

Количество рабочих дней.	Число рабочих.	Объем работы
18 дней	15 чел.	972 *куб. м*
25 дней	12 чел.	x *куб. м*

I способ (приведением к единице)

1) Сколько дров заготовят 15 человек за 1 день?

$$\frac{972}{18} \ (\textit{куб. м})$$

[1] Представляется целесообразным это название, ставшее уже архаизмом, заменить другим названием: «Задачи на сложную пропорциональную зависимость» (аналогично названию «сложно-пропорциональное деление»)

2) Сколько дров заготовит 1 человек за 1 день?

$$\frac{972}{18 \cdot 15} \text{ (куб. м)}$$

3) Сколько дров заготовит 1 человек за 25 дней?

$$\frac{972 \cdot 25}{18 \cdot 15} \text{ (куб. м)}$$

4) Сколько дров заготовят 12 человек за 25 дней?

$$\frac{972 \cdot 25 \cdot 12}{18 \cdot 15} = 1080 \text{ (куб. м)}$$

II способ (способ пропорций)

При решении способом пропорции применяется по существу следующий *алгоритм*:

1) Закрываем один из столбиков с двумя числами; например, закроем первый столбик (количество рабочих дней).

Получается следующая запись:

15 чел. — 972 *куб. м*
12 чел. — x_1 *куб. м*

2) К указанной таблице придумываем (устно!) условие задачи:

15 *человек могут заготовить* 972 *куб. м дров за некоторое время; сколько дров могут заготовить за то же самое время* 12 *человек?*

Учитель объясняет, что мы намеренно заменили сложную зависимость простой, для чего *отвлеклись* от значений времени работы. Затем вместе с учениками выясняем, что такая частная задача есть задача на прямую пропорциональную зависимость; и поэтому

$$\frac{15}{12} = \frac{972}{x_1}; \quad x_1 = \frac{972 \cdot 12}{15} \text{ (куб. м)}$$

3) Закрываем второй столбик и получаем запись:

18 дней — $\boxed{x_1}$
15 дней — x *куб. м*

4) Вместо квадрата вставляем найденное число $x_1 = \frac{972 \cdot 12}{15}$ (*куб. м*).

Получается новая запись:

$$18 \text{ дней} - \frac{972 \cdot 12}{15} \text{ (куб. м)}$$

$$25 \text{ дней} - x$$

5) Формулируем условие новой задачи по последней таблице:

За 18 дней можно заготовить $\frac{972 \cdot 12}{15}$ *(куб. м) дров. Сколько дров можно заготовить за 25 дней?*

Здесь мы *отвлекаемся* от числа рабочих и поэтому снова получили задачу на прямо пропорциональную зависимость:

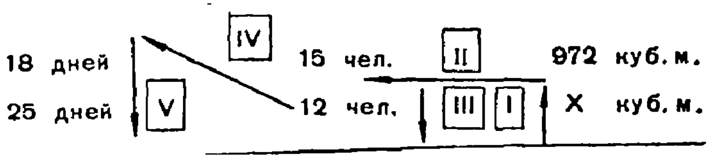
$$18:25 = \frac{972 \cdot 12}{15} : x; \quad x = \frac{972 \cdot 12 \cdot 25}{15 \cdot 18} = 1080 \text{ (куб. м)}$$

К числу особенностей этого способа следует отнести: Наличие сложных этапов переработки информации; так, например, разъяснение перехода от 2-го этапа к 3-му довольно трудно для понимания ученика. И здесь он поневоле (без объяснений учителя) вырабатывает свой алгоритм, своеобразные обобщенные связи.

Этот способ решения, хотя и называется «арифметическим», представляет трудный и искусственный способ решения.

III способ (метод приведения к сложной единице)[1]

Схема решения задачи этим способом выглядит так:



Алгоритм этого метода выглядит примерно так:

1. Напиши дробную черту и в числителе число, находящееся в одном столбике с искомым числом x (на схеме операция I),

$$x = \frac{972 \cdot}{} \quad .$$

---

[1] Данный способ отличается от способа I тем, что в основу положены вертикальные переходы, а в способе I сначала переходят вдоль одной строки чисел.

2. Перейди к числу, находящемуся *рядом* с числом 972 (на схеме переход II).

3. Составь задачу, приведя условие к 1 человеку (то есть пользуясь в уме схемой):

$$\begin{array}{ll} 15 \text{ чел.} & 972 \textit{ куб. м} \\ 1 \text{ чел.} & \square \end{array}$$

«Если 15 чел. заготовили 972 *куб. м* дров, то 1 человек заготовит в 15 раз меньше». Выражение для x приобретает вид:

$$x = \frac{972}{\quad 15}$$

(15 пишем в стороне от 972, в отдельном столбике).

4. *Над* числом 15 (или *под* ним) в одном столбце напиши число 12, расположенное с ним в одном столбце в записи условия задачи (на схеме переход III).

(12 человек сделают в 12 раз *больше*, чем 1 человек; поэтому число $\frac{972}{15}$ надо умножить на 12, получаем $\frac{972}{15} \times 12 = \frac{972 \cdot 12}{15}$).

5. Перейди к числу следующего столбика, но находящемуся в записи условия исходной задачи опять в одной строке с числом 972 (на схеме переход IV).

6. Составь задачу, приведя условие задачи к 1 дню (пользуясь по существу схемой

$$\begin{array}{l} 18 \text{ дней} \text{———} \frac{972 \cdot 12}{15} \textit{ куб. м.} \\ 1 \text{ день} \text{———} \square) \end{array}$$

«Если за 18 дней заготовлено $\frac{972 \cdot 12}{15}$ *куб. м* дров, то за 1 день будет заготовлено в 18 раз *меньше*»; выражение для x приобретает вид:

$$x = \frac{972 \cdot 12}{15 \cdot 18}$$

7. *Над* (или *под*) числом 18 напиши число 25, расположенное с ним в одном столбике по записи условия задачи. (За 25 дней сделают в 25 раз больше, чем за 1 день).

Выражение для ответа, наконец, приобретает вид:

$$x = \frac{972 \cdot 12 \cdot 25}{15 \cdot 18} = 1080 \ (\textit{куб. м})$$

Легко видеть, что если бы в задаче были не 3 столбика, а больше, то указанный алгоритм всегда привел бы к ответу.

Нетрудно далее заметить значительную сложность и этого способа, который описывается в методических пособиях без выяснения особенностей процесса решения, то есть без развертывания соответствующего *алгоритма* операций.

IV способ (алгебраический)

1) Пусть 1 человек в 1 день заготавливает x *куб. м* дров.
2) 15 чел. в 1 день заготовят $x \cdot 15$ *куб. м* дров.
3) 15 чел. в 18 дней заготовят $x \cdot 15 \cdot 18$ *куб. м* дров.
Но по условию $x \cdot 15 \cdot 18 = 972$.
Откуда имеем: $x = \frac{972}{15 \cdot 18}$ (*куб. м*).

4) 12 чел. за 25 дней заготовят $x \cdot 12 \cdot 25 = \frac{972}{15 \cdot 18} \times$ $\times 12 \cdot 25 = \frac{972 \cdot 12 \cdot 25}{15 \cdot 18} = 1080$ (*куб. м*) дров.

Сравнивая четыре способа решения данной задачи, мы видим *наибольшую простоту* первого и четвертого способов решения: так называемый алгебраический способ IV значительно проще арифметических способов II и III.

Сказанное, по-видимому, относится ко многим типовым задачам, указанным выше. Иначе говоря, использование *алгебраических способов решения задач в арифметике является первостепенной проблемой методики обучения математике.*

Возвращаясь к исходной задаче, отметим, что нужно научить ученика перестраивать решенную исходную задачу в обратную задачу; успешное решение обратной задачи является хорошим средством *проверки* решения прямой задачи.

Задачи приведенного типа своеобразны в том смысле, что обратные им задачи не относятся к другим разновидностям задач, а остаются задачами того же типа, что и исходная, тоже на сложную пропорциональную зависимость (на сложное тройное правило).

Обсудим с классом, сколько всего обратных задач можно составить к этой задаче. Если учитывать задачи по видам величин, то таких задач может быть *две*: на определение числа рабочих или количества рабочих дней в том или ином случае.

Если же принять в основу вообще *числа*, содержащиеся в условии исходной задачи, то обратных задач может быть пять.

Пусть мы остановились на следующем варианте обратной задачи.

Количество рабочих дней	Число рабочих	Объем работы
y дней	15 чел.	972 *куб. м*
25 дней	12 чел.	1080 *куб. м*

За сколько рабочих дней заготовит 972 *куб. м. дров бригада из* 15 *человек, если при той же производительности труда бригада из* 12 *человек заготавливает за* 25 *дней* 1080 *куб. м. дров?*

Решение (алгебраическим способом)

1 человек в 1 день заготавливает x *куб. м* дров;

$x \cdot 12 \cdot 25 = 1080;$

$x = \frac{1080}{12 \cdot 25};$ $\quad x \cdot 15 \cdot y = 972;$

$$\frac{1080 \cdot 15 \cdot y}{12 \cdot 25} = 972;$$

$$y = \frac{972 \cdot 12 \cdot 25}{1080 \cdot 15} = 18 \text{ (дней)}.$$

ЧАСТЬ III

МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АЛГЕБРЕ

Общепринятая ныне система обучения алгебре основана преимущественно на аналитических упражнениях, под которыми мы разумеем все виды упражнений по решению готовых задач, уравнений, неравенств и преобразованию различных выражений.

Как было показано в первой части книги, важным средством повышения качества знаний, активизации мыслительных процессов является сочетание аналитических упражнений традиционного курса алгебры с синтетическими (куда входит конструирование учащимися выражений, задач и пр., аналогичных решенным).

В тесной связи с применением синтетических упражнений мы рассматриваем вопросы обучения школьников приемам проверки, контроля решения. В психологическом отношении роль этого этапа сводится к достижению завершенности мыслительных процессов (законченного цикла умозаключений).

Ограничиваясь в основном материалом курса алгебры восьмилетней школы, в отдельных случаях мы кратко указываем на возможность применения описанных приемов в старших классах.

Чтобы облегчить читателю понимание единства методического подхода к сходным по структуре темам, материал этой части книги распределен по следующим трем главам:

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

2. Функции. Уравнения. Неравенства.

3. Задачи в курсе алгебры.

ГЛАВА I

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. О приемах проверки тождественных преобразований в VI-VII классах

При изучении всех тождественных преобразований[1] в VI—VIII классах целесообразно в каждой теме рассматривать числовые значения алгебраических выражений до и после их преобразования. Это приучает учащихся видеть в алгебраическом выражении числа, а в алгебраических операциях — действия над числами.

Для контроля подобных преобразований поступают обычно так:

1. Приведение подобных членов.

$$7\,ab + 8\,ab = 15\,ab$$

Пусть $a = -1$; $b = 2$.

л. ч.: $7\,ab + 8\,ab = 7\cdot(-1)\cdot(2) + 8\cdot(-1)\cdot(2) =$
$= -14 + (-16) = -30$;

п. ч.: $15\,ab = 15\cdot(-1)\cdot(2) = -30$;

л. ч. равна п. ч.

Значит, преобразование верно.

2. Разложение на множители.

$$4a^2b - b^3 = b\,(4a^2 - b^2) = b\,(2\,a - b)\,(2\,a + b).$$

Пусть: $a = \frac{1}{2}$; $b = 4$.

л. ч.: $4a^2b - b^3 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4 - 4^3 = -60.$

Ученик должен *ожидать*, что и в правой части появится число — 60. В самом деле:

п. ч.: $b(2a + b)\,(2a - b) = 4\cdot\left(2\frac{1}{2} - 4\right)\cdot\left(2\frac{1}{2} + 4\right) =$
$= 4\cdot(-3)\cdot 5 = -60$;

л. ч. равна п. ч.

Значит, множители найдены правильно.

---

[1] См. [74].

Следует указать учащимся, что применяемая выше подстановка числовых значений букв исчерпывающей проверкой тождественных преобразований служить не может, что это всего лишь проверка одного частного случая, то есть частичный контроль.

При действиях над одночленами и многочленами, при изучении формул сокращенного умножения и деления, при разложении на множители, при изучении действий над алгебраическими дробями наряду с числовыми подстановками целесообразно применять обычную проверку на основании зависимостей между компонентами действий.

Такая проверка является уже *полной проверкой.*

3. Рассмотрим пример на разложение многочлена на множители:

$$b(a^2-4b^2)-a^2+4b^2=(a-2b)(a+2b)(b-1)$$

Проверка (раскроем скобки в исходном и окончательном выражениях и сравним их):

л. ч.: $b(a^2-4b^2)-a^2+4b^2=a^2b-4b^3-a^2+4b^2$;

п. ч.: $(a-2b)(a+2b)(b-1)=(a^2-4b^2)(b-1)=$
$=a^2b-4b^3-a^2+4b^2$;

л. ч. равна п. ч.

Значит, разложение выполнено верно.

4. Произведено действие с алгебраическими дробями:

$$\frac{4a+b}{a-b}-\frac{a+b}{a-b}=\frac{3a}{a-b}$$

I способ проверки (находим вычитаемое):

$$\frac{4a+b}{a-b}-\frac{3a}{a-b}=\frac{4a+b-3a}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}$$

II способ проверки (находим уменьшаемое):

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{3a}{a-b}=\frac{a+b+3a}{a-b}=\frac{4a+b}{a-b}$$

5. При решении алгебраических примеров иногда целесообразно проводить проверку частного случая при некоторых допустимых значениях букв (контроль).

Для этой цели следует найти отдельно числовое значение данного примера и числовое значение ответа при одних и тех же значениях букв.

Пусть решается пример:

$$\frac{7}{p}-\frac{4}{p-2k}-\frac{p-k}{4p^2-k^2}.$$

Ответ. $\dfrac{4p^2-9kp-28k^2}{p(p-2k)(p+2k)}$.

Контроль ответа

Пусть $p=3$, $k=2$ (при этих значениях знаменатели дробей не равны нулю).

Найдем числовое значение левой части:

$$\text{л. ч.: } \frac{7}{3}-\frac{4}{3-4}-\frac{3-2}{16-9}=2\frac{1}{3}+4-\frac{1}{7}=6\frac{4}{21}$$

Вычислим при тех же значениях букв правую часть.

$$\text{п. ч.: } \frac{4\cdot 9-9\cdot 6-28\cdot 4}{3\cdot(-1)\cdot 7}=\frac{-18-112}{-21}=\frac{130}{21}=6\frac{4}{21}$$

л. ч. = п. ч.

2. Составление алгебраических выражений при изучении тождественных преобразований[1]

Самостоятельное составление примера с психологической точки зрения важно тем, что решение его составителем подвергается *контролю мышления* значительно в большей мере, чем при выполнении готового задания.

При решении *своего* примера ученик *отвечает* за все этапы композиции и решения, за выбор числовых данных, за правильное построение условия, не говоря уже о решении и ответе. Эти особенности синтетических упражнений делают их особенно ценными для развития мышления учащихся.

Приведем несколько примеров синтетических заданий по отдельным темам.

При изучении действий с рациональными числами уместно предлагать задания по замене знака вопроса соответствующим числом:

$?+(27)=15$	$-40:(?)=+30$
$-10-?=-18$	$(?+?):(-20)=-5$
$10+?+5=+8$	$[(-?)+(-?)]\cdot(-3)=+6$
$-12\cdot(?)=+20$	$[(-?)-(+?)]:(-2)=-10$ и т. д.

[1] См. [77].

Аналогичные упражнения с пропущенными числами предлагаются и при изучении действий с одночленами и многочленами.

Для этой цели удобно использовать записи, в которых неизвестное выражение обозначено прямоугольником (клеткой).

Ученики тогда освобождаются от необходимости переписывать одни и те же выражения: выполнив в уме соответствующие вычисления, они пишут недостающие числа *внутри прямоугольника.*

Вот примеры таких упражнений:

Сложение многочленов

$$+\begin{array}{r} 5a^3+6a^2-3a+10 \\ \square+4a^2+\square-\square \\ \hline -9a^3+10a^2+6a-15 \end{array}$$

Вычитание многочленов

$$-\begin{array}{r} \square+7xy^2-\square-6x+7 \\ 5x^2y+\square+4y-\square-8 \\ \hline \square+3xy^2-9y+4x+\square \end{array}$$

Наш опыт убеждает в том, что при решении деформированных упражнений у учеников вырабатывается *осмотрительность*; они избегают после первых неудач делать поспешные умозаключения (с физиологической точки зрения решение этих упражнений связано с процессом торможения нервных процессов, предотвращающим необдуманные действия).

Решение подобных упражнений связано с тонкой дифференциацией различных факторов, влияющих на окончательный результат.

Когда мы предложили классу указанный выше второй пример, многие ученики подметили существенное отличие старшего и низшего членов разности: здесь старший член может быть *произвольным* в зависимости от того, какой будет выбран старший член уменьшаемого, а низший член разности есть *определенное* число 15.

Некоторые упражнения уже при изучении действий над одночленами и многочленами удобно предлагать в форме линейных уравнений с тем, чтобы учащиеся после решения проверяли полученный ответ.

Найти значение x в следующем уравнении и проверить решение:

$$x+(3a-2b)=a+3b.$$

Решение

Слева — действие сложения. Чтобы найти неизвестное слагаемое x, надо от суммы вычесть известное слагаемое:

$$x = a + 3b - (3a - 2b) = a + 3b - 3a + 2b = 5b - 2a.$$

П р о в е р к а.

л. ч. $5b - 2a + (3a - 2b) = 5b - 2a + 3a - 2b = 3b + a$;
п. ч. $a + 3b$; л. ч. = п. ч.

При изучении умножения и деления одночленов важно давать примеры, в которых использовались бы обратные операции как относительно коэффициентов, так и относительно показателей степеней:

$2x^2 \cdot (?\,x^3) = -14x^5$	$3x^4 \cdot 6x^? = 18x^6$
$(?\,x^5) : (-3x^3) = -\frac{2}{3}x^2$	$14a^? : 7a^5 = 2a^3$
$10xy^3 : (?\,y^2) = -20xy$	$32pk^8 : 4pk^? = 8k^2$
$9b^? \cdot 2b^3 = 18b^7$	$(?\,p) \cdot (5p^?) = 20p^5$

Полезно предлагать примеры, решая которые ученик будет отличать два действия (сложение — умножение или вычитание — деление), относящиеся к понятиям *коэффициент* и *показатель степени*.

Например, им предлагаются следующие *пары* примеров:

$3k^2 + 5k^2$ и $3k^2 \cdot 5k^2$

$3a^2b + 7a^2b$ и $3a^2b \cdot 7a^2b$

$\frac{1}{4}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^3y^2$ и $\frac{1}{4}x^3y^2 \cdot \frac{1}{4}x^3y^2$

$0{,}5b^7c + 3{,}6b^7c$ и $0{,}5b^7c \cdot 3{,}6b^7c$

$16k^2 - 4k^2$ и $16k^2 : 4k^2$

$21\,a^2b - 7a^2b$ и $21a^2b : 7a^2b$

$\frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{4}x^3y^2$ и $\frac{1}{2}x^3y^2 : \frac{1}{4}x^3y^2$

$3{,}5b^7c - 0{,}7b^7c$ и $3{,}5b^7c : 0{,}7b^7c$

$(3a^2c^3)^2$ и $(3a^2c^3) \cdot 2$

$(4ax^3)^3$ и $(4ax^3) \cdot 3$ и т. п.

В VI—VII классах учащиеся изучают возведение в квадрат и куб одночленов; обратную операцию — извлечение из одночлена кубического и квадратного корня они не изучают.

Однако в тех же классах при разложении на множители разности квадратов, суммы и разности кубов ученики выполняют не что иное, как извлечение корня второй и третьей степени.

Недостатком практики обучения следует признать то, что второе преобразование не рассматривается специально до изучения разложения на множители.

Между тем вполне целесообразно предлагать ученикам такие упражнения, не вводя терминов и символов, связанных с извлечением корня.

Например, решая упражнение $(?)^3 = 8a^6$, ученик рассуждает так: «Какое число надо возвести в куб, чтобы получить $8a^6$?».

С целью развития такого навыка полезно предлагать следующие *деформированные* упражнения, в которых неизвестное число находится рядом проб:

$$9a^4 = (?)^2 \qquad (?\,a^2b)^2 = 16a^4b$$
$$(?)^2 = 16b^6 \qquad (?\,a^3c)^3 = -64?$$
$$\left(\frac{1}{2}\,ax^2\right)^? = \frac{1}{8}\,a^3x^6 \qquad (?\,p^2)^? = 125p^6$$
$$(5k^3)^? = 25\cdot ? \qquad (2\,?\,b^2)^? = 8a^3\,?$$
$$(?)^3 = 27p^6 \qquad (?\,c^2) = 8a^3c^6$$
$$(?)^? = 64a^6c^{12} \text{ и т. д.}$$

Последний пример имеет несколько решений:

$$(+\,8a^3c^6)^2 = 64a^6c^{12}$$
$$(-\,8a^3c^6)^2 = 64a^6c^{12}$$
$$(4a^2c^4)^3 = 64a^6c^{12} \text{ и др.}$$

Полезно сопоставлять сходные по виду, но отличные по содержанию выражения, предлагая примеры парами и требуя, чтобы ученики объясняли, чем отличаются примеры и их ответы:

$$(a+2)^2 \text{ и } (a-2)^2$$
$$(2b+3)^3 \text{ и } (2b-3)^3$$
$$(4c-1)^3 \text{ и } (4c-1)\cdot 3$$
$$(5p+k)^2 \text{ и } (5p+k)\cdot 2$$
$$(x+1)(x^2+x+1) \text{ и } (x+1)(x^2-x+1) \text{ и т. д.}$$

Раздел «Разложение на множители» нужно изучать так, чтобы ученик схватывал характерные черты примера, его конструктивные особенности и использовал эти наблюдения при составлении своих примеров.

Пусть решен пример: $-2a - 5ab = -a\ (2 + 5b)$.

Двучлен имеет множитель $(-a)$.

Учащимся дается задание:

Составить двучлен, сходный с данным, имеющий множитель $(-3x)$.

Возможный ответ: $-3xk - 6xp = -3x\ (k + 2p)$.

Проверка умножением: $-3x\ (k + 2p) = -3xk - 6xp$.

После анализа решения следующего примера:

$$5x^2 - 10xy + 5y^2 = 5\,(x^2 - 2xy + y^2) = 5 \cdot (x - y) \cdot (x - y)$$

предлагается задание: составьте трехчлен, представляющий собой произведение $6a$ на квадрат суммы двух чисел. Разложить его на множители и проверить ответ.

Один из ответов: $6ax^2 + 12axy + 6ay^2 = 6a\ (x^2 + 2xy + y^2) = 6a\ (x + y)\ (x + y)$.

При решении лишь готовых примеров ученики зачастую не улавливают существенно важных понятий, например, такого как — *противоположные числа*. Но эти понятия конкретно выясняются при составлении учениками собственных примеров.

Из одного *наблюдения* выражений $(a - 3b)$ и $(3b - a)$ ученику труднее сделать заключение о противоположности этих чисел. Пусть, напротив, требуется в выражении $x\ (a - 3b - 2) - y\ (\ldots?\ \ldots) = (a - 3b - 2)\ (x + y)$ дополнить множитель во вторых скобках (в них должен находиться многочлен, противоположный многочлену, содержащемуся в первых скобках). Это задание рассчитано на практическое преобразование одного выражения в другое, ему противоположное. Подобное *активное* оперирование выражением быстрее приводит к пониманию существа дела, чем пассивное наблюдение готового выражения.

Очень полезно предлагать некоторые примеры *парами* с тем, чтобы ученики при решении их сравнивали сходные операции, правила и учились отличать одно от другого.

Например, можно предложить разложить на множители следующие пары выражений:

$a^2 + 6a + 9$ и $a^2 - 6a + 9$;

$k^3 - 6k^2p + 12kp^2 - 8p^3$ и $k^3 + 6k^2p + 12kp^2 + 8p^3$;

$x^3 - 27$ и $x^3 + 27$;

$b^2 - 4b + 1$ и $b^2 - 1$;

$a^3 + 2a^2b - 3a - 6b$ и $a^3 - 2a^2b - 3a + 6b$ и т. п.

Учащимся можно также предложить составить выражение, которое разлагалось бы способом группировки.

Для этого берут два несложных многочлена и находят их произведение, например:

$$(a-2)(x^2+2x-3)=ax^2-2x^2+2ax-4x-3a+6.$$

Далее выполняются *обратные* операции по разложению полученного выражения на множители.

$$ax^2-2x^2+2ax-4x-3a+6=(ax^2-2x^2)+(2ax-4x)-(3a-6)=$$
$$=x^2(a-2)+2x(a-2)-3(a-2)=(a-2)(x^2+2x-3).$$

После вычисления учениками следующего выражения:

$$165^2-35^2=(165+35)(165-35)=200\cdot 130=26\,000$$

уместно предложить им обращенное задание: представить число 34 000 в виде разности квадратов двух чисел.

Это задание записывается под предыдущим примером так:

$$\square-\square=(\square+\square)\cdot(\square-\square)=\square\cdot\square=34\,000.$$

Решение осуществляется справа налево:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots=200\cdot 170=34\,000;$$

$$185^2-15^2=(185+15)(185-15)=200\cdot 170=34\,000.$$

Знакомство с более сложными случаями разложения на множители лучше провести также не опираясь полностью на решение *разных* примеров из задачника, а показывая постепенное возникновение все более сложных примеров путем вариации знаков и членов исходного примера.

Поясняем сказанное.

В стабильном задачнике часто предлагаются четверки примеров с разным набором чисел и букв на один и тот же прием, например, таких:

1. $x(a-b)+y(b-a)$
2. $a(k-p)-b(p-k)$
3. $p(x-y)-(y-x)$
4. $5(x-3)-(3-x)$

Вместо решения этих примеров полезно ***составить цепь*** взаимосвязанных примеров и решить их.

Пусть решен первый пример:

$$x(a-b)+y(b-a)=x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(x-y)$$

Обязательно проверяем решение:

л. ч.: $x(a-b)+y(b-a)=xa-xb+yb-ya$

п. ч.: $(a-b)(x-y)=ax-bx-ay+yb=xa-xb+yb-ay$

л. ч. равна п. ч.

Затем *ставим вопрос*: какие другие виды примеров можно составить, исходя из решенного примера?

а) Изменим *знак* между скобками.

$$x(a-b)-y(b-a)=x(a-b)+y(a-b)=(a-b)(x+y).$$

Проверяем и убеждаемся в правильности ответа.

б) Первый пример видоизменим посредством замены *множителей* при скобках более сложными выражениями, например, x — через $6x$, а y — через y^2:

$$6x(a-b)+y^2(b-a)=6x(a-b)-y^2(a-b)=(a-b)(6x-y^2).$$

Такую замену чисел производим по предложению учащихся (при необходимости с исправлением названных множителей учителем.)

в) Первый пример видоизменим путем замены *выражений* в скобках, причем подчеркиваем, что в двух скобках должны быть *противоположные* числа (например, вместо a берем $3k$, вместо b берем $5p$):

$$6x(3k-5p)+y^2(5p-3k)=6x(3k-5p)-y^2(3k-5p)=$$
$$=(3k-5p)\cdot(6x-y^2).$$

Вначале все преобразования выписываем подробно; затем ученики замечают, что можно писать ответ сразу; в этих случаях нужно обращать их внимание на исходные преобразования, требуя устного объяснения, например, того, как был получен общий множитель $3k-5p$.

При изучении совместного применения всех способов разложения на множители надо не перебирать упражнения в той последовательности, в которой они даны в задачнике, но отбирать их целенаправленно, добиваясь того, чтобы класификация упражнений по возможным комбинациям способов решения была *показана* учителем и понята учениками. Эти комбинации таковы.

1. Сочетание вынесения за скобки и формул сокращенного умножения.
2. Сочетание вынесения за скобки и способа группировки.

3. Сочетание способа группировки и формул сокращенного умножения.

4. Сочетание всех трех способов в одном примере. Пусть решен пример:

$$7x^2y^2 - 63x^2p^2 = 7x^2(y^2 - 9p^2) = 7x^2(y - 3p)\,(y + 3p).$$

Анализируем структуру данного примера: разность двух чисел (двучлен) разложена на три множителя; после вынесения за скобки множителя $7x^2$ в скобках осталась разность квадратов; значит, исходное выражение $7x^2y^2 - 63x^2p^2$ есть произведение *разности квадратов* $y^2 - 9p^2$ на *одночлен* $7x^2$.

Совместно с учениками составляем и решаем аналогичные примеры, причем вначале пользуемся для усложнения примера одной из трех вариаций:

а) Изменяем выносимый за скобки множитель (вместо $7x^2$ берем, например, $2a$), то есть ту же разность квадратов умножим на $2a$:

$$2ay^2 - 18ap^2 = 2a\,(y^2 - 9p^2) = 2a(y + 3p)(y - 3p).$$

б) Заменяем разность квадратов $y^2 - 9p^2$ другой разностью квадратов $4a^2 - 1$, а выносимый за скобки одночлен $7x^2$ оставляем без изменения:

$$28x^2a^2 - 7x^2 = 7x^2\,(4a^2 - 1) = 7x^2\,(2a - 1)\,(2a + 1).$$

в) Одновременно изменяем и выносимый за скобки множитель и разность квадратов:

$$8a^3 - 2a = 2a\,(4a^2 - 1) = 2a\,(2a - 1)\cdot(2a + 1).$$

г) Следующей ступенью усложнения является замена двучленного множителя в скобках любым другим разлагаемым выражением из изученных ранее.

Учитель говорит:

— Пусть выносимым множителем будет $3p$, а вторым множителем — разность кубов.

Кто предложит разность кубов? ($a^3 - 64$.)

— Кто же продиктует разлагаемое выражение ($3pa^3 -$ $- 192\,p$.)

— Как же вы нашли это выражение? (— Умножили $3p$ на $a^3 - 64$.)

Затем учащиеся разлагают на множители составленное выражение:

$$3pa^3 - 192p = 3p\,(a^3 - 64) = 3p(a - 4)\,(a^2 + 4a + 16)$$

— Какие иные варианты этих выражений можно еще составить?

— Какие еще выражения могут остаться внутри скобок после вынесения за скобки общего множителя?

(— Любое из выражений: сумма кубов, куб суммы и т. д.)

При изучении действий с алгебраическими дробями можно также предлагать учащимся самим составить несложные примеры.

Наиболее доступным окажется составление примера по аналогии с решенным из задачника.

Пусть решен пример:

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)=3-x^2.$$

Ученик по аналогии может попытаться составить *свой* пример, причем он сообразит, что в упражнение следует ввести, скажем, разность квадратов и ее множители:

$$(y^2-4a^2)\cdot\left(\frac{1}{y-2a}+\frac{2}{y+2a}+3\right)=$$

Решив этот пример, он находит ответ:

$$3y^2+3y-2a-12a^2.$$

3. Преобразования радикалов

На внеклассных занятиях уместно ввести решение линейных уравнений (и даже несложных систем линейных уравнений) с иррациональными коэффициентами, причем решение завершается проверкой.

Уравнения предлагаются примерно в следующих формах:

$$\sqrt{12}x-\sqrt{27}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{48}$$

$$5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}\cdot x=\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\text{ и. т. п.}$$

Пусть требуется решить уравнение:

$$(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}):x=\sqrt{b}-\sqrt{a}.$$

Неизвестен делитель. Чтобы его найти, надо делимое разделить на частное:

$$x = \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} =$$

$$= \frac{ab - b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab} - ab}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{ab}\,(a - b)}{b - a} = -\sqrt{ab}.$$

П р о в е р к а:

$$\text{л. ч.: } \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{-\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{b}}{-\sqrt{ab}} - \frac{b\sqrt{a}}{-\sqrt{ab}} =$$

$$= -\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

$$\text{п. ч.: } \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Уравнение решено правильно.

Составим далее систему двух линейных уравнений, **имеющих**, например, следующее решение:

$$x = \sqrt{5}; \quad y = \sqrt{5} - 2$$

(то есть систему, имеющую решение с иррациональным числом $\sqrt{5}$).

а) Для этого составим сначала систему двух тождеств, *причем коэффициенты пусть также не содержат иных радикалов, кроме* $\sqrt{5}$.

$$\begin{cases} 3 \cdot \boxed{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \cdot \boxed{\sqrt{5} - 2} - \ldots \\ (4 - \sqrt{5}) \cdot \boxed{\sqrt{5}} - 2 \cdot \boxed{\sqrt{5} - 2} = \ldots \end{cases}$$

б) Вычислив правую часть тождеств и выполнив подстановку неизвестных, получаем искомую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 \cdot x - \sqrt{5} \cdot y = 5\sqrt{5} - 5 \\ (4 - \sqrt{5}) \cdot x - 2y = 2\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

в) Решим составленную систему. Для этого первое уравнение умножим на 2, второе на $-\sqrt{5}$ и сложим оба уравнения по частям.

Получив ответ $x = \sqrt{5}$, подставим это значение x в одно из уравнений, например во второе:

$$(4-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}-2y = 2\sqrt{5}-1$$

$$2y = 2\sqrt{5}-4$$

$$y = \sqrt{5}-2.$$

Аналогично можно составить и решить систему линейных уравнений, имеющую решение в поле двух иррациональностей, например, $x = \sqrt{3}-\sqrt{5}$, $y = 2\sqrt{3}+1$.

Если система предложена учителем, то ученики решают и проверяют решение; если же система составлялась *самими* учениками, то этап проверки отпадает; получение *намеченного заранее ответа убеждает в правильности преобразований*.

Некоторые примеры на освобождение от иррациональности полезно решать в двух вариантах.

Пусть решен пример на уничтожение иррациональности в знаменателе:

$$\frac{14}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}} = \frac{14(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})}{(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{98\sqrt{2}+28\sqrt{7}}{98-28} = \frac{98\sqrt{2}+28\sqrt{7}}{70} = \frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5}$$

Проверку можно выполнить, избавившись от иррациональности в числителе:

$$\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5} = \frac{(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{5(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{98-28}{5(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})} = \frac{14}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}.$$

Указанное выше разнообразие примеров возможно осуществить и при действиях над степенями с дробными показателями.

Например, уместны деформированные примеры:

$$9^{?} : 9^{2} = 9^{0,5} \qquad 7^{?}\cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{10}{3}}$$

$$a^{?} : a^{?} = a^{3} \qquad b^{?}\cdot b^{?} = b^{0,3}$$

$$(6^{?})^{4} = 6^{8} \qquad a^{?} : a^{2} = a^{\frac{4}{3}}$$

По стабильному задачнику в VIII классе решаются примеры на тождественные преобразования вида:

$$(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{4}) =$$
$$= \sqrt[3]{15^3}-\sqrt[3]{2^3} = 15-2 = 13.$$

Наша практика показала целесообразность сочетания примеров этого вида с заданием выразить натуральное число в виде произведения иррациональных множителей.

Выполнение данного задания оказалось удобным записывать справа налево.

Пусть дано задание: представить число 11 в виде произведения двух множителей.

Решение развертывается так:

$$\ldots = 13-2 = 11$$

$$\ldots = \sqrt[3]{13^3}-\sqrt[3]{2^3} = 13-2 = 11$$

$$(\sqrt[3]{13}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{169}+\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{13^3}-\sqrt[3]{2^3} =$$
$$= 13-2 = 11.$$

Данное упражнение имеет сколько угодно решений. Наиболее сообразительные ученики догадываются и об общем решении

$$\ldots = (11+a)-a = 11$$

$$\ldots = \sqrt[3]{(11-a)^3}-\sqrt[3]{a^3} = (11+a)-a = 11$$

$$\left(\sqrt[3]{(11+a)^2}+\sqrt[3]{(11+a)a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{11+a}-\sqrt[3]{a}\right) = 11.$$

Другое общее решение будет такое:

$$\ldots = (11-b)+b = 11$$

$$\ldots = \sqrt[3]{(11-b)^3}+\sqrt[3]{b^3} = 11$$

$$\left(\sqrt[3]{(11-b)^2}-\sqrt[3]{(11-b)b}+\sqrt[3]{b^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{11-b}+\sqrt[3]{b}\right) = 11.$$

Получив ответ $x = \sqrt{5}$, подставим это значение x в одно из уравнений, например во второе:

$$(4-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}-2y = 2\sqrt{5}-1$$

$$2y = 2\sqrt{5}-4$$

$$y = \sqrt{5}-2.$$

Аналогично можно составить и решить систему линейных уравнений, имеющую решение в поле двух иррациональностей, например, $x = \sqrt{3}-\sqrt{5}$, $y = 2\sqrt{3}+1$.

Если система предложена учителем, то ученики решают и проверяют решение; если же система составлялась *самими* учениками, то этап проверки отпадает; получение *намеченного заранее ответа убеждает в правильности преобразований.*

Некоторые примеры на освобождение от иррациональности полезно решать в двух вариантах.

Пусть решен пример на уничтожение иррациональности в знаменателе:

$$\frac{14}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}} = \frac{14(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})}{(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{98\sqrt{2}+28\sqrt{7}}{98-28} = \frac{98\sqrt{2}+28\sqrt{7}}{70} = \frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5}$$

Проверку можно выполнить, избавившись от иррациональности в числителе:

$$\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5} = \frac{(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{5(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{98-28}{5(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})} = \frac{14}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}.$$

Указанное выше разнообразие примеров возможно осуществить и при действиях над степенями с дробными показателями.

Например, уместны деформированные примеры:

$$9^{?} : 9^{2} = 9^{0,5} \qquad 7^{?}\cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{10}{3}}$$

$$a^{?} : a^{?} = a^{3} \qquad b^{?}\cdot b^{?} = b^{0,3}$$

$$(6^{?})^{4} = 6^{8} \qquad a^{?} : a^{2} = a^{\frac{4}{3}}$$

По стабильному задачнику в VIII классе решаются примеры на тождественные преобразования вида:

$$(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{4})=$$
$$=\sqrt[3]{15^3}-\sqrt[3]{2^3}=15-2=13.$$

Наша практика показала целесообразность сочетания примеров этого вида с заданием выразить натуральное число в виде произведения иррациональных множителей. *Выполнение данного задания оказалось удобным записывать справа налево.*

Пусть дано задание: представить число 11 в виде произведения двух множителей.

Решение развертывается так:

$$\ldots = 13-2=11$$

$$\ldots = \sqrt[3]{13^3}-\sqrt[3]{2^3}=13-2=11$$

$$(\sqrt[3]{13}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{169}+\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{4})=\sqrt[3]{13^3}-\sqrt[3]{2^3}=$$
$$=13-2=11.$$

Данное упражнение имеет сколько угодно решений. Наиболее сообразительные ученики догадываются и об общем решении

$$\ldots = (11+a)-a=11$$

$$\ldots = \sqrt[3]{(11-a)^3}-\sqrt[3]{a^3}=(11+a)-a=11$$

$$(\sqrt[3]{(11+a)^2}+\sqrt[3]{(11+a)a}+\sqrt[3]{a^2})\cdot(\sqrt[3]{11+a}-\sqrt[3]{a})=11.$$

Другое общее решение будет такое:

$$\ldots = (11-b)+b=11$$

$$\ldots = \sqrt[3]{(11-b)^3}+\sqrt[3]{b^3}=11$$

$$(\sqrt[3]{(11-b)^2}-\sqrt[3]{(11-b)b}+\sqrt[3]{b^2})\cdot(\sqrt[3]{11-b}+\sqrt[3]{b})=11.$$

— Какие иные варианты этих выражений можно еще составить?

— Какие еще выражения могут остаться внутри скобок после вынесения за скобки общего множителя?

(— Любое из выражений: сумма кубов, куб суммы и т. д.)

При изучении действий с алгебраическими дробями можно также предлагать учащимся самим составить несложные примеры.

Наиболее доступным окажется составление примера по аналогии с решенным из задачника.

Пусть решен пример:

$$(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)=3-x^2.$$

Ученик по аналогии может попытаться составить *свой* пример, причем он сообразит, что в упражнение следует ввести, скажем, разность квадратов и ее множители:

$$(y^2-4a^2)\cdot\left(\frac{1}{y-2a}+\frac{2}{y+2a}+3\right)=$$

Решив этот пример, он находит ответ:

$$3y^2+3y-2a-12a^2.$$

3. Преобразования радикалов

На внеклассных занятиях уместно ввести решение линейных уравнений (и даже несложных систем линейных уравнений) с иррациональными коэффициентами, причем решение завершается проверкой.

Уравнения предлагаются примерно в следующих формах:

$$\sqrt{12}x-\sqrt{27}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{48}$$

$$5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}\cdot x=\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \quad \text{и. т. п.}$$

Пусть требуется решить уравнение:

$$(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}):x=\sqrt{b}-\sqrt{a}.$$

Неизвестен делитель. Чтобы его найти, надо делимое разделить на частное:

$$x = \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} =$$

$$= \frac{ab - b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab} - ab}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{ab}\,(a-b)}{b-a} = -\sqrt{ab}.$$

П р о в е р к а:

$$\text{л. ч.:}\ \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{-\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{b}}{-\sqrt{ab}} - \frac{b\sqrt{a}}{-\sqrt{ab}} =$$

$$= -\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

$$\text{п. ч.:}\ \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Уравнение решено правильно.

Составим далее систему двух линейных уравнений, имеющих, например, следующее решение:

$$x = \sqrt{5};\ y = \sqrt{5} - 2$$

(то есть систему, имеющую решение с иррациональным числом $\sqrt{5}$).

а) Для этого составим сначала систему двух тождеств, *причем коэффициенты пусть также не содержат иных радикалов, кроме* $\sqrt{5}$.

$$\begin{cases} 3\cdot\boxed{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\cdot\boxed{\sqrt{5}-2} - \ldots \\ (4-\sqrt{5})\cdot\boxed{\sqrt{5}} - 2\cdot\boxed{\sqrt{5}-2} = \ldots \end{cases}$$

б) Вычислив правую часть тождеств и выполнив подстановку неизвестных, получаем искомую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\cdot x - \sqrt{5}\cdot y = 5\sqrt{5} - 5 \\ (4-\sqrt{5})\cdot x - 2y = 2\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

в) Решим составленную систему. Для этого первое уравнение умножим на 2, второе на $-\sqrt{5}$ и сложим оба уравнения по частям.

Получив ответ $x = \sqrt{5}$, подставим это значение x в одно из уравнений, например во второе:

$$(4-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5} - 2y = 2\sqrt{5} - 1$$

$$2y = 2\sqrt{5} - 4$$

$$y = \sqrt{5} - 2.$$

Аналогично можно составить и решить систему линейных уравнений, имеющую решение в поле двух иррациональностей, например, $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$, $y = 2\sqrt{3} + 1$.

Если система предложена учителем, то ученики решают и проверяют решение; если же система составлялась *самими* учениками, то этап проверки отпадает; получение *намеченного заранее ответа убеждает в правильности преобразований.*

Некоторые примеры на освобождение от иррациональности полезно решать в двух вариантах.

Пусть решен пример на уничтожение иррациональности в знаменателе:

$$\frac{14}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}} = \frac{14(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})}{(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{98\sqrt{2}+28\sqrt{7}}{98-28} = \frac{98\sqrt{2}+28\sqrt{7}}{70} = \frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5}$$

Проверку можно выполнить, избавившись от иррациональности в числителе:

$$\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5} = \frac{(7\sqrt{2}+2\sqrt{7})(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{5(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{98-28}{5(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})} = \frac{14}{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}}.$$

Указанное выше разнообразие примеров возможно осуществить и при действиях над степенями с дробными показателями.

Например, уместны деформированные примеры:

$$9^{?} : 9^{2} = 9^{0,5} \qquad 7^{?}\cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{10}{3}}$$

$$a^{?} : a^{?} = a^{3} \qquad b^{?}\cdot b^{?} = b^{0,3}$$

$$(6^{?})^{4} = 6^{8} \qquad a^{?} : a^{2} = a^{\frac{4}{3}}$$

По стабильному задачнику в VIII классе решаются примеры на тождественные преобразования вида:

$$(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{4})= \\ =\sqrt[3]{15^3}-\sqrt[3]{2^3}=15-2=13.$$

Наша практика показала целесообразность сочетания примеров этого вида с заданием выразить натуральное число в виде произведения иррациональных множителей.

Выполнение данного задания оказалось удобным записывать справа налево.

Пусть дано задание: представить число 11 в виде произведения двух множителей.

Решение развертывается так:

$$\underleftarrow{\ldots = 13-2=11}$$

$$\underleftarrow{\ldots = \sqrt[3]{13^3}-\sqrt[3]{2^3}=13-2=11}$$

$$\underleftarrow{(\sqrt[3]{13}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{169}+\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{4})=\sqrt[3]{13^3}-\sqrt[3]{2^3}=} \\ \underleftarrow{=13-2=11.}$$

Данное упражнение имеет сколько угодно решений. Наиболее сообразительные ученики догадываются и об общем решении

$$\underleftarrow{\ldots = (11+a)-a=11}$$

$$\underleftarrow{\ldots = \sqrt[3]{(11-a)^3}-\sqrt[3]{a^3}=(11+a)-a=11}$$

$$\underleftarrow{(\sqrt[3]{(11+a)^2}+\sqrt[3]{(11+a)a}+\sqrt[3]{a^2})\cdot(\sqrt[3]{11+a}-\sqrt[3]{a})=11.}$$

Другое общее решение будет такое:

$$\underleftarrow{\ldots = (11-b)+b=11}$$

$$\underleftarrow{\ldots = \sqrt[3]{(11-b)^3}+\sqrt[3]{b^3}=11}$$

$$\underleftarrow{(\sqrt[3]{(11-b)^2}-\sqrt[3]{(11-b)b}+\sqrt[3]{b^2})\cdot(\sqrt[3]{11-b}+\sqrt[3]{b})=11.}$$

4. Одновременное изучение взаимно обратных операций

В VI—VIII классах взаимно обратные операции можно и целесообразно изучать на основе противопоставления.

Прием противопоставления позволяет за счет усиления *умственной деятельности* учащихся пройти материал за меньшее время, к тому же при высоком качестве знаний.

Использование противопоставлений в алгебре требует дальнейшей детальной методической разработки.

Приведем краткое описание лишь нескольких уроков, построенных на этом принципе.

а. *Раскрытие скобок и заключение в скобки*

Эти два вопроса в VI классе изучаются обычно на разных уроках.

При этом в сборнике задач по алгебре П. А. Ларичева дано гораздо больше упражнений на первое преобразование, чем на обратное ему.

При этом упражнения на раскрытие скобок сформулированы кратко (раскрыть скобки в выражении $2a - (b - c + 2)$), а краткой формы задания упражнений на заключение в скобки нет.

Недостаточная отработка навыков в раскрытии скобок в VI классе приводит к большому количеству ошибок учащихся при изучении разложения на множители способом группировки.

Указанных недостатков можно избежать при одновременном изучении этих преобразований.

После того как учитель объяснил правило раскрытия скобок, когда перед скобками стоит знак плюс:

$$3a + (b - c + 2) = 3a + b - c + 2,$$

ученикам предлагается решить обращенный пример *с теми же числами*: $3a + (\dots\dots\dots) = 3a + b - c + 2$.

Решение этого примера служит переходом к обратному преобразованию — заключению в скобки.

Далее учитель разъясняет структуру нового примера, указывая, что в последнем примере скобки были даны в левой части равенства, а в алгебре приходится иногда некоторые члены выражения специально заключать в скобки.

Решить следующий пример:

$$2x + 3y - z + 1 = 2x + (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,).$$

Здесь нужно заключить в скобки последние три члена.

Анализируя решение двух взаимно обратных примеров, приходят к «двойному» правилу:

Для того чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, достаточно выписать из скобок все члены выражения с их *знаками.*	Для того чтобы заключить выражение в скобки, перед которыми стоит знак плюс, достаточно записать внутри скобок все члены выражения с их знаками.

Далее также *параллельно* рассматриваются упражнения на раскрытие скобок и заключение в скобки в тех случаях, когда перед скобками находится знак минус.

$$3a - (2b - c + 2) =$$
$$3a - (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,) = 3a - 2b + c - 2$$
$$x - y + 2 = x - (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,)$$
$$x - y + 2 = x + (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,).$$

Ученики самостоятельно формулируют второе «двойное» правило, которое отличается от приведенного выше лишь тем, что вместо слова *плюс* используется слово *минус*, а оборот *с их знаками* заменяется оборотом *с противоположными знаками*.

Некоторые примеры на заключение в скобки решаются *с проверкой* раскрытием скобок.

Урок завершается решением примеров на обе операции:

$$a + (b - 4c + 3) =$$
$$a + 3b + 2c - d = a + 3b + (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,)$$
$$a + 3b + 2c - d = a + 3b - (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,)$$
$$5x - (y - 2) =$$
$$5x - 2y + 4 = 5x - (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,)$$
$$5x - 2y + 4 = 5x + (\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\,) \text{ и т. п.}$$

При проверке знаний надо требовать, чтобы ученик на каждое правило приводил свои примеры; при этом важно добиться того, чтобы отвечающий рассказывал *оба* правила.

6. *Умножение и деление одночлена на одночлен*

Для одновременного изучения этих разделов учитель делит доску чертой на две половины. (Ученики также проводят черту посредине страницы своей тетради.)

Сначала выводится правило умножения степеней одного основания:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$
$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}.$$

Проверка:

л. ч.: $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$
п. ч.: $2^5 = 32$
л. ч. равна п. ч.

Решается первый пример с буквенным основанием:

$$b^7 \cdot b^3 = b^{7+3} = b^{10}.$$

На основе правила нахождения неизвестного сомножителя, учитель предлагает решить пример $b^{10} : b^7$, причем ответ записывается сразу, но с *пропуском* места посредине строки.

$$b^{10} : b^7 = \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = b^3.$$

У ч и т е л ь. Вы сказали ответ сразу на основании зависимости между компонентами. А как можно было *вычислить* показатель частного? (От 10 отнять 7.)

Строка заполняется, и запись приобретает форму:

$$b^{10} : b^7 = b^{10-7} = b^3.$$

Следующий пример предлагается сначала на деление и записывается в правой половине страницы:

$$\longleftarrow \quad | \quad x^7 : x^2 = x^{7-2} = x^5.$$

Учитель предлагает *проверить* деление умножением и записать обратное действие слева на той же строке:

$$x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7 \quad | \quad x^7 : x^2 = x^{7-2} = x^5$$

Далее решается несколько пар примеров того же вида, причем первый пример дается то на умножение, то на деление.

Формулируется пара правил, причем сначала они записываются *рядом* в символической форме:

$a^k \cdot a^p = a^{k+p}$	$b^x : b^y = b^{x-y}$

Также с использованием противопоставления изучаются умножение и деление *одночлена на одночлен.*

Соответствующие правила фиксируются в тетради в символической форме:

$\mathrm{K}a^m b^k \cdot \mathrm{P}a^n = \mathrm{K} \cdot \mathrm{P}a^{m+n}b^k$	$\mathrm{M}a^x b^z : \mathrm{N}a^y = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \cdot a^{x-y} b^z$

Большинство примеров предлагается на разные действия, ***не парные.*** Лишь решения некоторых примеров сопровождаются проверкой обратным действием, причем большей частью она осуществляется устно, но с подробными объяснениями

Пример. $(-100\ x^4y^6) : (-4xy^6) = 25x^3$.

Проверка. $(-4xy^6) \cdot 25x^3 = -4 \cdot 25 \cdot x \cdot x^3 \cdot y^6 = -100x^4y^6$.

На этом же уроке и последующих наряду с решением обычных примеров даются деформированные примеры вида:

$$a^5 \cdot a^? = a^7$$
$$b^7 : b^3 = b^4$$
$$\square \cdot (-3xy) = 18x^3y$$
$$-14x^3y^2 : \square = 2x^3 \text{ и т. д.}$$

Предлагаются также примеры на разложение **одночлена** на множители такого вида:

$$12k^3p^2 = \square \cdot \square = \square \cdot \square = \square \cdot \square = \ldots$$
$$12k^3p^2 = 2 \cdot \square \cdot \square = 2 \cdot \square \cdot \square = \ldots$$

Полезны для решения на последующих уроках такие упражнения в разложении на множители:

а. *Представить число* $12k^3p^2$ *в виде удвоенного произведения одного числа на другое.*

Или: *Дано равенство* $12k^3p^2 = 2 \cdot x \cdot y$. *Найти различные значения* x и y.

б. *Представить число* $36a^4b^6$ *в виде утроенного произведения квадрата одного числа на другое.*

Или: *Дано равенство* $36a^4b^6 = 3 \cdot x^2 \cdot y$. *Найти различные значения* x и y.

На дом дается задание на *придумывание* двух примеров (по одному на каждое действие, с последующей проверкой решения их обратным действием).

К концу следующего урока, посвященного закреплению материала, мы давали самостоятельную работу в двух вариантах.

Приведем текст одного из них.

1. Придумать и решить один пример на деление. Решение проверить.
2. $(-2x^4y^2)\cdot(6x^3) =$
3. $6a^2\cdot \square = 12a^5$
4. $45k^3p^2x:(+15k^2x) =$
5. $60x^3y:\square = -4$
6. $80x^4y^6 = 2\cdot\square\cdot\square$
7. $80x^4y^6 = 2\cdot\square\cdot\square$.

Последние два примера должны иметь разные решения.

Результаты работы такие.

Из 39 работ выполнены отлично — 6 работ, хорошо — 12, посредственно — 19, плохо — 2.

Эта работа показывает, что еще до закрепления материала ученики, за исключением двух, усвоили оба правила.

в. *Умножение и деление многочлена на одночлен.*

Изучение этого материала следует начать с рассмотрения распределительного закона умножения и одноименного свойства деления:

$234\cdot 2 = 200\cdot 2 + 30\cdot 2 + 4\cdot 2 = 468$	$468:2 = 400:2 + 60:2 + 8:2 = 234$

Учащиеся формулируют эти правила, известные им из курса арифметики.

Затем решаем пару примеров на умножение и деление многочленов:

$(2a^3b - 3a^2 + 5)\cdot 4ab^2 = 8a^4b^3 - 12a^3b + 20ab^2$	$(8a^4b^3 - 12a^3b^3 - 20ab^2):4ab^3 = \dots\dots\dots$

Вторую пару примеров решаем в другом порядке: сначала на деление, потом — на умножение, то есть проверяем деление умножением.

Правила для выполнения обеих операций записываются в одной фразе:

Чтобы $\dfrac{\text{умножить}}{\text{разделить}}$ *многочлен на одночлен, надо каждый его член* $\dfrac{\text{умножить}}{\text{разделить}}$ *на этот одночлен и полученные* $\dfrac{\text{произведения}}{\text{частные}}$ *сложить.*

Затем предлагаются деформированные примеры, являющиеся собственно подготовкой к разложению многочлена на множители посредством вынесения множителя за скобки (последняя тема в этом случае может быть успешно изучена сразу же вслед за умножением и делением многочлена на одночлен):

$$(12k^2 - 6k^2p) : \square = 6k^2 - kp$$
$$(\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;) \cdot 4b^2c = 8b^5c + 3c^2$$
$$\square \cdot (2a - 3ab + 4a^2) = 10a^3 - 6a^3b + 8a^4$$
$$6x^3y^2 - 4x^2y - 10xy = \square \cdot (\square - \square - \square) \text{ и т. д.}$$

г. *Умножение многочленов и разложение на множители*

Ограничимся описанием одного урока, посвященного одновременному изучению двух вопросов: умножения суммы двух чисел на их разность и разложения на множители разности квадратов двух чисел.

Сначала вводится понятие разности двух квадратов (разность квадратов).

Устно выполняется несколько упражнений вида:

$$(3c)^2 = \square; \qquad (\qquad\qquad)^2 = 16b^4 \text{ и т. д.}$$

Даны два числа: $5x$ и $2y^2$.

Учитель предлагает найти сумму этих чисел $(5x + 2y^2)$, разность этих чисел $(5x - 2y^2)$, квадраты этих чисел $[(5x)^2 = 25x^2, (2y^2)^2 = 4y^4]$ и, наконец, разность квадратов этих чисел $(25x^2 - 4y^4)$.

Затем дается числовой пример:

$$\underrightarrow{3 \cdot 5 = 15}$$

Произведение 3 и 5 равно 15.

$$\underrightarrow{15 = 3 \cdot 5}$$

15 разлагается на два множителя 3 и 5.

Выясняется, что пример на умножение всегда можно прочитать в двух направлениях, так, как это показано выше.

Так же в двух направлениях прочитывается и следующая запись:

$$4 \cdot 6 = 24.$$
$$\rightleftarrows$$

Далее выводится формула разности квадратов перемножением двух многочленов:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Выводится и заучивается пара правил:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Разность квадратов разлагается на два множителя: на сумму оснований и на их разность.

Дальнейшие упражнения приводятся с двусторонним чтением решенных примеров, с чередованием примеров на разложение с примерами на умножение, причем пример-следствие решается обычно устно.

Широко используются деформированные примеры и составление примеров учащимися; задания предлагаются следующие:

1) $x^4 - 9 = (\square + \square)\cdot(\square - \square)$
2) $(3k^2 + 2p)\cdot(3k^2 - 2p) = \square - \square$
3) $(\square + 4)\cdot(\square - 4) = 25a^6 - \square$
4) $\square - 36x^4 = (7 - \square)(7 + \square)$

5) Записать разность квадратов двух чисел и разложить ее на множители.

6) Написать два одночлена.

Найти произведение суммы и разности этих одночленов двумя способами: подробным перемножением и сокращенно.

д. *Возведение в степень и извлечение корня*

Понятие *возведение в степень* и *извлечение корня* удобно также ввести одновременно и все последующие преобразования рассматривать также попарно.

Пусть решен пример:

$$(b^3)^4 = b^3 \cdot b^3 \cdot b^3 \cdot b^3 = b^{3 \cdot 4} = b^{12}.$$

Далее ставится обратная задача ($x^4 = b^{12}$); по степени (b^{12}) и показателю (4) надо найти неизвестное основание x.

Вместо записи $x^4 = b^{12}$ удобно писать равенство со специальным значком — радикалом: $x = \sqrt[4]{b^{12}}$; показатель (4) над радикалом показывает, что если число x возвести в четвертую степень, то получится подкоренное выражение (b^{12}); обратную операцию принято называть так:

Извлечь корень 4-й степени из числа b^{12}.

Имеем: $\sqrt[4]{b^{12}} = \ldots\ldots = b^3$.

Очевидно, что промежуточной операцией будет деление показателей; заполняется промежуточное звено:

$$\sqrt[4]{b^{12}} = b^{12:4} = b^3.$$

На доске и в тетрадях фиксируются рядом две записи и объединенное двойное правило:

$$(b^3)^4 = b^{3 \cdot 4}$$

Чтобы возвести степень в степень, надо перемножить показатели, а основание оставить то же.

$$\sqrt[4]{b^{12}} = b^{12:3}$$

Чтобы извлечь корень из степени, надо показатель подкоренного выражения разделить на показатель корня, а основание оставить то же.

Аналогично сказанному возможно рассматривать одновременно взаимно обратные операции над степенями с дробными показателями.

$$x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4}} \longleftrightarrow x^{\frac{5}{4}} : x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$$

$$\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^6 = y^{\frac{2}{3} \cdot 6} = y^1 \longleftrightarrow (y^4)^{\frac{1}{6}} = y^{4 : \frac{1}{6}} = y^{\frac{2}{3}} \text{ и т. п.}$$

ГЛАВА II

ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА

1. Составление линейных уравнений и их систем

При работе над уравнениями и их системами в школе обычно ограничиваются решением готовых уравнений, взятых из различных источников.

С процессом составления уравнений ученики встречаются лишь при решении задач алгебраическим способом.

Однако для глубокого овладения понятием *уравнение* оказываются необходимыми упражнения по синтезу уравнений, имеющих заданные решения, причем такие упражнения должны идти рука об руку с обычными аналитическими упражнениями, являясь их органическим дополнением[1].

Анализ существующей практики обучения показывает, что нередко также мало внимания обращается на проверку решенных уравнений[2].

При составлении уравнений по аналогии удобно фиксировать *рядом* два процесса — решение данного уравнения (сверху вниз) и составление аналогичного уравнения (снизу вверх). Пусть подробно решено уравнение, не имеющее корня [(I)→(II)→(III)→(IV)→(V)]:

Решение уравнения ↓

$$\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{8}{x^2-4} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{1\cdot(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{8}{x^2-4} \qquad (\mathrm{II})$$

$$2(x+2)-(x-2)=8 \qquad (\mathrm{III})$$

$$2x+4-x+2=8 \qquad (\mathrm{IV})$$

$$x=2 \qquad (\mathrm{V})$$

Значение $x=2$ не удовлетворяет уравнению (I)

Составление уравнения ↑

$$\frac{3}{y-3}-\frac{2}{y+3}=\frac{18}{y^2-9} \qquad (1)$$

$$\frac{(y+3)}{y^2-9}-\frac{2(y-3)}{y^2-9}=\frac{18}{y^2-9} \qquad (2)$$

$$3(y+3)-2(y-3)=18 \qquad (3)$$

$$3y+9-2y+6=18 \qquad (4)$$

$$y=3 \qquad (5)$$

Пусть требуется составить уравнение (1) с тем же свойством: значение $y=3$ не должно удовлетворять ему.

---

[1] См. [79].

[2] См. [74]; [75].

Процесс составления удобно развернуть снизу вверх в правой половине листа, проходя те же этапы, но в обратной последовательности (5) → (4) → (3) → (2) → (1)

Пусть решена система уравнений:

$$\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Ответ $x=7$; $y=5$.

Проверка

$$\begin{cases} (7+5)\cdot(5-2)=(7+2)\cdot(5-1) \\ (7-4)\cdot(5+7)=(7-3)\cdot(5+4) \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{cases} 12\cdot3=9\cdot4 \\ 3\cdot12=4\cdot9 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Если необходимо составить аналогичную систему уравнений, развертываем преобразования в обратной последовательности, то есть сначала запишем систему двух числовых тождеств

$$\begin{matrix} 8\cdot6=6\cdot8 \\ 7\cdot5=5\cdot7 \end{matrix} \qquad (3)$$

Далее выбираем решение конструируемой системы, например, $x=4$, $y=9$.

Выразим множители тождества (3) с помощью значений x и y:

$$\begin{matrix} \left(\boxed{4}+4\right)\cdot\left(\boxed{9}-3\right)=\left(\boxed{4}+2\right)\cdot\left(\boxed{9}-1\right) \\ \left(\boxed{4}+3\right)\cdot\left(\boxed{9}-4\right)=\left(\boxed{4}+1\right)\cdot\left(\boxed{9}-2\right) \end{matrix} \qquad (2)$$

И, наконец, получаем искомую систему:

$$\begin{cases} (x+4)\cdot(y-3)=(x+2)\cdot(y-1) \\ (x+3)\cdot(y-4)=(x+1)(y-2) \end{cases} \qquad (1)$$

Решив систему (1), получаем намеченные заранее значения неизвестных:

$$x=4;\ y=9.$$

2. Составление параметрической системы уравнений, имеющей одно и то же решение

В книге И. Я. Депмана «Рассказы о решении задач» (Детгиз, Л., 1957) в разделе «Об уравнениях и решении задач при помощи их» рассматриваются системы параметрических уравнений, имеющих одно и то же решение.

Сначала доказывается, что система

$$\begin{cases} ax+(a+k)y=a+2k \\ (a+3k)x+(a+4k)y=a+5k, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

в которой коэффициенты представляют собой арифметическую прогрессию с разностью k, имеет одно и то же решение $x=-1$, $y=2$ при любых a и k. Приведем отрывок из указанной книги.

«Существует система двух уравнений с двумя неизвестными более общего вида, имеющая то же решение:

$$x=-1 \text{ и } y=2.$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} ax+(a+k)y=a+2k \\ bx+(b+p)y=b+2p \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Предполагаем в ней $a \neq b$, $k \neq p$.

Вычитая почленно второе уравнение из первого, получаем уравнение:

$$(a-b)x+(a-b)y+(k-p)y=a-b+2(k-p) \qquad \text{(III)}$$

Это уравнение *можно заменить* системой двух уравнений:

$$\begin{cases} (a-b)x+(a-b)y=a-b \\ (k-p)y=2(k-p) \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ \quad\;\; y=2 \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

Откуда $x=-1$; $y=2$».

(Нумерация систем добавлена нами; подчеркнуто также нами. — П. Э.)

Прежде всего заметим, что ограничения, наложенные автором на параметры, далеко недостаточны для обеспечения единственности решения системы: при $a = t \cdot b$ и $k = t \cdot p$ ($t \neq 1$), система (II) неопределенная и имеет бесчисленное множество решений, и в то же время удовлетворяет условиям $a \neq b$; $k \neq p$.

(Мы не говорим о тривиальных условиях неопределенности системы, когда все коэффициенты равны нулю.)

Кроме этой фактической ошибки, принципиально неверен и прием решения системы (II), данный в книге.

В самом деле, систему (II) автор *заменяет* одним уравнением с двумя неизвестными (III), сложив (не перемножив!) по частям уравнения системы (II).

Очевидно, одно уравнение с двумя неизвестными (III) имеет бесчисленное множество решений, если его рассматривать обособленно; чтобы воспользоваться (III) для решения исходной системы, надо было решить (III) совместно с одним из уравнений системы (II).

Однако автор рассматривает уравнение (III) *отдельно* от системы (II) и тем не менее получает... одно решение (!) для системы (II).

Это получилось потому, что указанная выше ошибка «перекрыта» в книге другой ошибкой: автор заменяет одно уравнение с двумя неизвестными (III) снова системой двух уравнений с двумя неизвестными (IV).

Замена уравнений (III) системой уравнений (IV) оказалась «удачной» лишь *случайно*, поскольку эта операция выполняется бесконечнозначно.

Например, системы могли быть такими:

$$\begin{cases} (a-b)x+(a-b)y=a-b+1 \\ (k-p)y=2(k-p)-1 \end{cases} \qquad \text{(IV а)}$$

$$\begin{cases} (a-b)x+(a-b)y=a-b+2 \\ (k-p)y=2(k-p)-2 \text{ и т. п.} \end{cases} \qquad \text{(IV б)}$$

Легко видеть, что системы (IV), (IV а) (IV б) имеют, вообще говоря, по одному решению, отличному друг от друга.

Решения систем (II), (IV а), (IV б)... удовлетворяют выводимому из них общему уравнению (III), но обратное неверно; следовательно, исходная система (II), «преобразованная» или в (IV), или в (IV а), общих решений с последними, вообще говоря, не имеет.

Ясно, что подобных «приемов» решения уравнений нельзя показывать учащимся.

Попытаемся разобраться в психологических причинах такой ошибки, интересной в методическом отношении.

Эту ошибку легко может допустить составитель задачи. Автор задачи, приступая к поискам обходных путей решения, *помнил*, какой *должен* быть ответ $x = -1$, $y = 2$ и какой должна быть получена для этого простейшая система

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

Этим и объясняется «счастливая» догадка: для перехода к нужной системе (V), где уравнение (III) заменяется... системой двух уравнений (IV).

Способ, описанный И. Я. Депманом, для составления параметрических систем является всего лишь частным приемом составления таковых.

Существует общий способ решения данного вопроса.

Пусть решением параметрической системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными должны быть числа $x = -1$ и $y = 2$.

Напишем систему с этим решением с неизвестными коэффициентами:

$$\begin{cases} A\cdot(-1) + B\cdot 2 = K \\ C\cdot(-1) + D\cdot 2 = M \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C, D могут быть выражены произвольно, лишь бы выполнялось условие $A\cdot D \neq CB$.

Свободные члены K и M *вычисляются* после *подбора* коэффициентов A, B, C, D.

Коэффициентам A, B, C, D дадим, например, следующие значения:

$$A = a; \quad B = a + b; \quad C = 3a; \quad D = a + 2b$$

Найдем далее значения K и M:

$$K = a\cdot(-1) + (a + b)\,2 = + a + 2b$$

$$M = 3a\,(-1) + (a + 2b)\cdot 2 = - a + 4b.$$

Мы составили систему уравнений:

$$a\cdot x + (a + b)\cdot y = a + 2b$$

$$3a\cdot x(a + 2b)\,y = - a + 4b.$$

Учитывая условие $A \cdot D \neq C \cdot B$, имеем: $a(a+2b) \neq$ $\neq (a+b)3a$.

Пусть $a \neq 0$; тогда имеем: $a+2b \neq 3a+3b$.

Или $b \neq -2a$.

Итак, последняя система имеет единственное решение

$$x = -1, \quad y = 2 \quad \text{при } a \neq 0, \quad b \neq -2a.$$

3. О классификации систем линейных уравнений

Наиболее удобной для пользования в школе представляется дихотомическая классификация, приведенная ниже (см. стр. 194).

Необходимо разъяснить учащимся смысл оборота *хотя бы*. Например, выражение «хотя бы одно из чисел a_1, a_2, b_1, b_2 не равно нулю» означает, что выполняется один из *четырех* возможных случаев:

1) любое одно из этих чисел не равно нулю;
2) любые два из них не равны нулю;
3) любые три из них не равны нулю;
4) все четыре не равны нулю.

После того как будет понята эта мысль, легко находить *противоречащее* суждение («все числа равны нулю» $a_1 =$ $= a_2 = b_1 = b_2 = 0$).

По этой схеме наглядно видно, что существует один вид определенной системы (I);
два вида неопределенной системы (III, V);
два вида противоречивой системы (II, IV).

Полезно предлагать ученикам составлять системы уравнений, удовлетворяющие тем или иным условиям, например:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x-5y=10 \end{cases} \quad \text{(I)} \qquad \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+6y=1 \end{cases} \quad \text{(II)} \qquad \begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=4 \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0 \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases} \quad \text{(V)}$$

Отметим, что в методических пособиях нередко допускают ошибки при изложении вопросов классификации системы линейных уравнений и решении соответствующих задач.

Системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

↓

$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

определенная система

I

↓

$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

↓

Хотя бы одно из Δ_1 и Δ_2 не равно нулю

$\Delta_1 = a_1c_2 - c_1a_2$;
$\Delta_2 = b_1c_2 - b_2c_1$

(противоречивая система)

II

↓

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$

↓

Хотя бы одно из чисел a_1, a_2, b_1, b_2 не равно нулю (неопределенная система)

III

↓

$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$

↓

Хотя бы одно из чисел c_1, c_2 не равно нулю (противоречивая система)

IV

↓

$c_1 = c_2 = 0$ (неопределенная система)

V

1. В книге «Методика преподавания математики» под общей редакцией С. Е. Ляпина (часть II, Учпедгиз, 1956) утверждается следующее положение:

«Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

Из $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ следует $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, т. е.

если система уравнений несовместна, то коэффициенты неизвестных соответственно пропорциональны, но непропорциональны свободным членам» (стр. 140).

Оба эти утверждения ошибочны: если, например, $a_2 = 0$, то из условий $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ $(a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0)$ отнюдь не вытекают заключения $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ $\left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right)$; делить на нуль нельзя!

Правильными являются не приведенные суждения, а суждения *обращенные*:

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, то $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$».

Аналогичные ошибки повторяются в этой книге в других местах (стр. 140, 141).

2. В книге А. Н. Барсукова «Алгебра» (часть II, Учебник для 8—10 классов средней школы, Учпедгиз, 1957) утверждается, что при $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1c_2 - a_2c_1 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Исследование системы (I) производится исходя из этого основного положения.

Однако это исходное положение ложно.

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести хотя бы один противоречащий пример.

Возьмем непротиворечивую, но неопределенную систему:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Заменим систему (III) по схеме А. Н. Барсукова системой:

$$\begin{cases}(1\cdot 2-1\cdot 2)\,x=1\cdot 2-2\cdot 1\\(1\cdot 2-1\cdot 2)\,y=1\cdot 2-2\cdot 1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}0\cdot x=0\\0\cdot y=0\end{cases}\qquad\text{(IV)}$$

Очевидно, системы (III) и (IV) неравносильны. Например, $x=y=2$ является решением системы (IV), но не является решением системы (III).

3. В «Задачнике по алгебре» В. А. Кречмара (Гостехиздат, 1950) предлагается следующее упражнение.

«№ 29. Показать, что для совместности уравнений $ax+b=0$, $a^1x+b^1=0$ необходимо и достаточно, чтобы $ab^1-a^1b=0$».

Ошибка при решении задачи допущена в том месте, когда автор полагает, что из $ab^1-a^1b=0$ следует *пропорциональность коэффициентов*, то есть $\frac{b}{a}=\frac{b^1}{a^1}$; (например, при $a=0$, $b=0$, $a^1=1$, $b^1=1$ первое уравнение имеет бесчисленное множество решений, второе — одно решение; однако условие $ab^1-a^1b=0$ соблюдается).

4. В книге К. С. Барыбина и А. К. Исакова «Сборник задач по математике» (Учпедгиз, 1955) приводится следующая задача на исследование:

«661. Доказать, что если система

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

1) не имеет решения, то

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2};$$

2) имеет бесчисленное множество решений, то

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}».$$

Авторы задачи не замечают, что оба утверждения — ложные, а верными являются обратные им предложения.

4. Об изучении линейной функции

Обычно изучение функции (в том числе и линейной) основывается в школе только на построении графиков их по готовому уравнению. Обратная задача в школе не рассматривается и совершенно напрасно; не случайно ученики, умеющие строить график по точкам, не знают, как написать уравнение функции по данным координатам точек. определяющих график функции.

Эту тему следует изучать при сочетании алгебраического и геометрического методов, с привлечением одного из них для контроля результата, полученного другим методом.

Весьма важно соблюдать постепенность нарастания трудностей при решении таких упражнений. Уже при изучении прямой пропорциональности необходимо установить, что не только уравнению $y = ax$ всегда соответствует прямая, проходящая через начало координат, но и наоборот: любой прямой, проходящей через начало координат, соответствует уравнение вида $y = ax$ (за исключением самой оси абсцисс).

Для этих целей следует наравне с решением задач по вычерчиванию графиков выполнять упражнения типа:

1. *Прямая проходит через начало координат и точку A* (3, 4). *Найти ее уравнение, потом проверить ответ.*

Решение сводится к определению коэффициента a по известным значениям x и y, что осуществляется подстановкой координат в общее уравнение:

$$4 = a \cdot 3; \qquad a = \frac{4}{3}.$$

Итак, искомое уравнение будет: $y = \frac{4}{3} \cdot x$.

Проверка алгебраическая: $4 = \frac{4}{3} \cdot 3;\ 4 = 4$.

Проверку можно провести и геометрически: построив прямую $y = \frac{4x}{3}$, убедиться, что она действительно проходит через точку A (3, 4).

В дальнейшем задания могут несколько усложняться и предлагаться учащимся в следующих формах:

2. *Линейная функция* $y = 2x + b$ при $x = 4$ *принимает значение, равное 9. Написать уравнение этой функции (определить b).*

3. *График функции* $y = ax + 3$ *проходит через точку A* (2, 5). *Найти значение a.*

4. *Прямая проходит через точки A* (2, 1) и *B* (+2; —3). *Написать уравнение этой прямой.*

Решение таких задач основывается на методике «неопределенных коэффициентов», знакомство с которым, не требуя каких-либо новых теоретических сведений, позволяет выполнять существенно новые виды упражнений.

Выполним последнее задание.

Искомое уравнение имеет вид:

$$y = ax + b.$$

Подставляя координаты обеих точек в это уравнение для определения двух неизвестных параметров a и b, получим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 2 + b \\ -3 = a \cdot (+2) + b \end{cases}$$

Откуда $a = 1$, $b = -1$.

Искомое уравнение: $y = x - 1$.

5. Следующим этапом усложнения задания, усиления элементов самостоятельности является задание, когда предлагается вниманию учащихся график прямой линии, проходящей через несколько точек с целочисленными координатами.

Ученики должны сами определить координаты любых двух точек прямой и по ним написать уравнение прямой. Проверка обязательна, причем она может проводиться подстановкой в найденное уравнение координат не обязательно данных двух точек, но любых иных точек прямой.

С учащимися выясняется вопрос: координаты скольких точек надо подставлять в уравнение для проверки правильности найденного уравнения? Почему?

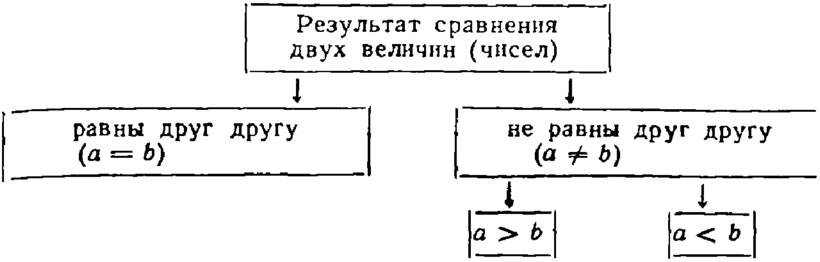
(Достаточно подставить в уравнение $y = ax + b$ координаты двух точек, так как уравнение $y = ax + b$ определяет прямую, а прямая определяется *двумя* точками.)

5. Об одновременном изучении линейных уравнений и линейных неравенств

Как известно, изучение уравнений и неравенств в школе проводится сейчас раздельно.

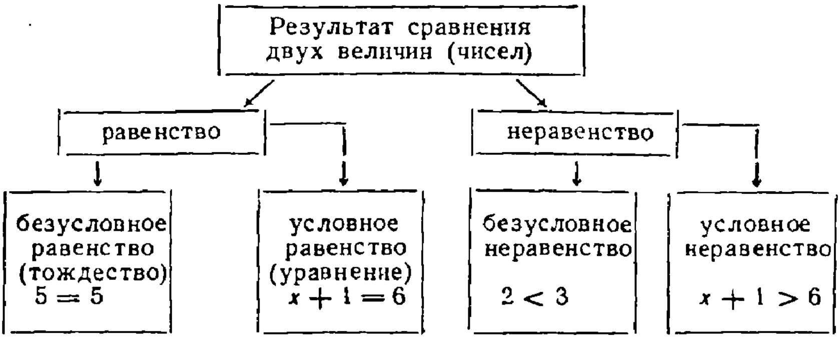
Проведенный нами эксперимент показывает возможность одновременного изучения этих вопросов.

Поскольку результат сравнения двух чисел, двух значений величины может быть выражен одним их двух суждений *равно* и *не равно* ($a = b$; $a \neq b$), то мы приходим к следующей схеме связей:



Полезно уже с первых уроков алгебры требовать, чтобы учащиеся приводили примеры равенств и двух видов неравенств ($5 = 5$; $5 \neq 7$; $5 < 7$; $7 > 5$).

Далее целесообразно рассмотреть следующую систему понятий:



Ученики легко осваиваются с противопоставлением неравенств и равенств, а также учатся различать условные и безусловные формы их (полезно требовать, чтобы они приводили свои примеры к каждому виду этих выражений).

Свойства равенства и неравенства выводятся *одновременно* следующим образом.

1. Если к обеим частям $\frac{\text{равенства}}{\text{неравенства}}$ прибавить одно и то же рациональное число, то его знак сохраняется.

$5 = 5$	$5 = 5$	$5 < 6$	$5 < 6$
$+3 \quad +3$	$-3 \quad -3$	$+3 \quad +3$	$-3 \quad -3$
$5+3 = 5+3$	$5-3 = 5-3$	$5+3 < 6+3$	$5-3 < 6-3$

2. Если обе части $\dfrac{\text{равенства}}{\text{неравенства}}$ умножить или разделить на одно и то же *положительное* число, то его знак сохраняется.

$$\begin{array}{c} 5 = 5 \\ \cdot 3 \quad \cdot 3 \\ \hline 5 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{c} 5 < 6 \\ \cdot 3 \quad \cdot 3 \\ \hline 5 \cdot 3 < 6 \cdot 3 \end{array}$$

3. Если обе части $\dfrac{\text{равенства}}{\text{неравенства}}$ умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то его знак $\dfrac{\text{сохраняется}}{\text{изменяется на противоположный}}$.

$$\begin{array}{c} +5 = +5 \\ \cdot (-3) \quad \cdot (-3) \\ \hline -5 \cdot 3 = -5 \cdot 3 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{c} 5 < 6 \\ \cdot (-3) \cdot (-3) \\ \hline -5 \cdot 3 > -6 \cdot 3 \end{array}$$

В дальнейшем выполняются упражнения в одновременном решении уравнений и неравенств I степени, причем вначале удобно уравнение преобразовать в неравенство одной лишь заменой знаков, и наоборот.

Пусть решено уравнение:

$$\begin{array}{rl} 3x - 5 = x + 9 & \text{(I)} \\ 3x - x = 9 + 5 & \text{(II)} \\ 2x = 14 & \text{(III)} \\ x = 7 & \text{(IV)} \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{rl} 3x - 5 > x + 9 & (1) \\ 3x - x > 9 + 5 & (2) \\ 2x > 14 & (3) \\ x > 7 & (4) \end{array}$$

Заменив в (I) знак равенства на знак больше (или меньше), получим неравенство (1), решаемое справа.

Вторая пара упражнений решается в другой последовательности: сначала решается неравенство, которое затем преобразуется в сопряженное уравнение.

При записи $\dfrac{\text{проверки}}{\text{контроля}}$ ответа $\dfrac{\text{уравнения}}{\text{неравенства}}$ удобно вычисления вести сразу в обеих частях исходного выражения, причем согласно логике процесса между частями выражения удобно писать знак вопроса; последний заменяется определенным знаком ($=$, $>$, $<$) лишь в конце вычислений:

$$-6x-4=-x+11$$
$$-6x+x=11+4$$
$$-5x=15$$
$$\frac{-5x}{-5}=\frac{15}{-5}$$
$$x=-3$$

Проверка ответа

$$-6\cdot(-3)-4\ \boxed{?}\ -(-3)+11$$
$$+18-4\ \boxed{?}\ +3+11$$

$14=14$, что и должно быть.

$$-6x-4<-x+11$$
$$-6x+x<11+4$$
$$-5x<15$$
$$\frac{-5x}{-5}>\frac{15}{-5}$$
$$x>-3$$

Контроль ответа

Пусть $x=-2>-3$

$$-6\cdot(-2)-4\ \boxed{?}\ -(-2)+11$$
$$+12-4\ \boxed{?}\ +4+11$$

$8<15$, что и должно быть.

После нескольких пар подобных упражнений решаются вперемежку и отдельные уравнения или неравенства.

В старших классах необходимо предлагать пары упражнений, решаемых существенно *разными* способами, четко выделив различие этих процессов:

$$\frac{5+x}{x}=4$$
$$5+x=4x$$
$$5=3x$$
$$x=\frac{5}{3}$$

Если данное уравнение удалось свести к линейному, то соответствующее неравенство решается посредством системы линейных неравенств (см. справа)

$$\frac{5+x}{x}>4$$
$$\frac{5+x}{x}-4>0$$
$$\frac{5+x-4x}{x}>0$$
$$\frac{5-3x}{x}>0$$

а) $\begin{cases}5-3x>0\\ x>0\end{cases}$

$$0<x<\frac{3}{5}$$

б) $\begin{cases}5-3x<0\\ x<0\end{cases}$

Противоречивая система.

Из сказанного выше вытекает необходимость изучения графика линейной функции в тесной связи с линейным уравнением и линейным неравенством. Построив график функции вида $y=ax+b$, обычно *ограничиваются* установлением абсциссы точки пересечения прямой с осью x-в (графическое решение линейного уравнения). Значительно выгоднее извлекать максимум информации из построенного графика, то есть устанавливать тут же и решение двух линейных неравенств: $y = ax + b \gtrless 0$.

Иначе говоря, исследованием линейной функции надо заниматься как составной частью упражнений по решению большинства линейных уравнений и неравенств.

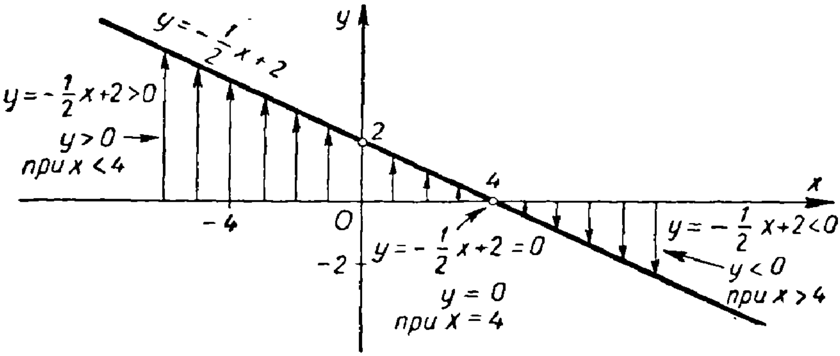


Рис. 19

На рисунке 19 показано, как следует толковать построение графика линейной функции $y = -\frac{1}{2}x + 2$ в качестве графического решения не только уравнения $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$, но и в качестве графического решения соответствующих этому уравнению двух неравенств:

$$-\frac{1}{2}x + 2 > 0 \qquad -\frac{1}{2}x + 2 < 0$$

Отметим, наконец, что ответ решенного неравенства содержит больше информации, чем ответ соответствующего ему уравнения.

Пусть решено неравенство $3x - 5 > x + 9$ и получен ответ: $x > 7$.

Этого уже достаточно, чтобы утверждать (без дополнительных выкладок!), что противоположное неравенство $3x - 5 < x + 9$ будет иметь решение $x < 7$, а соответствующее уравнение будет иметь корень $x = 7$.

Если же вначале решено уравнение $3x - 5 = x + 9$ (корень $x = 7$), то мы не имеем возможности судить конкретно о решении, например, неравенства $3x - 5 > x + 9$

без дополнительных преобразований (мы обладаем в этот момент лишь информацией, что решением будет одно из двух выражений: $x > 7$ или $x < 7$).

Дидактический вывод таков: следует вначале больше решать линейных неравенств с последующим преобразованием их в соответствующие уравнения, зная, что корень соответствующего уравнения затем находится автоматически.

6. О введении понятия *квадратное уравнение*

Ознакомление с новым понятием *квадратное уравнение* в учебниках (а вслед за учебником, конечно, и учителями) обычно проводится в дедуктивной форме.

Так, например, в учебнике А. Н. Барсукова изложение темы начинается сразу с *определения*:

«Уравнение, в котором левая часть — многочлен второй степени относительно неизвестного, а правая — нуль, называется уравнением второй степени или, короче, квадратным.

Другими словами, квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a — любое неравное нулю действительное число, а b и c — любые действительные числа» (Алгебра, ч. II, Учебник для 8—10 классов средней школы, Учпедгиз, 1957, стр. 102).

Однако более целесообразным представляется индуктивное введение этого понятия на основе *расширения* понятия «уравнение первой степени».

Ученикам известно, что замена числового тождества уравнением, не содержащим произведений неизвестных, приводит к уравнению первой степени:

Напишем произвольное числовое тождество:

$$20 - \boxed{3} \cdot 5 = 5$$

Пусть $x = 3$. Тогда $5 = x + 2$ и числовое тождество преобразуется в уравнение:

$$20 - 5x = x + 2$$

Уравнение первой степени имеет одно единственное решение: в самом деле, при решении составленного уравнения найдем, что корень равен 3, то есть числу заранее намеченному.

Далее учитель ставит *проблему*: что получится, если мы подобное преобразование числового тождества в уравнение выполним, используя *квадрат* числа?

Пусть $x = 3$; тогда $x^2 = 9$.

Напишем какое-нибудь числовое тождество, используя числа 3 и 9:

$$9 + 3 - 12 = 0$$
$$3^2 + 3 - 12 = 0$$

Произведя замену чисел соответствующими неизвестными, получим уравнение *второй* степени:

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

На вопрос, каков же будет корень нового уравнения, учащиеся отвечают: $x = 3$.

Однако единственный ли это корень?

Проверкой убеждаемся, что $x = -4$ тоже удовлетворяет составленному уравнению.

Ученикам есть чему удивиться: намечали одно число в качестве корня, а их оказалось два.

Так выясняется, что уравнение второй степени — *качественно иное* уравнение, чем известное им уравнение первой степени.

У учащихся возникает естественный вопрос: как же все-таки составить такое квадратное уравнение, которое имело бы не один намеченный корень, а два, хотя бы те же самые $x = 3$ и $x = -4$?

Напишем два уравнения первой степени, имеющие указанные корни:

$$x - 3 = 0$$
$$x + 4 = 0.$$

Задача выступает в новом свете: как же два линейных уравнения преобразовать в квадратное?

Перемножим в этих уравнениях отдельно левые и отдельно правые части:

$$(x - 3)(x + 4) = 0 \cdot 0.$$

Получим искомое уравнение второй степени:

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Затем учащиеся самостоятельно формулируют определение понятия *квадратное уравнение*.

Итак, целесообразно не начинать, а заканчивать этот урок определением квадратного уравнения, то есть идти не от анализа готового уравнения, а от синтеза его.

7. Составление уравнений, приводимых к квадратным

Выше мы рассматривали способ составления уравнений, обладающих различными свойствами, *по аналогии* с решенным уравнением; этот прием применим и в данном случае; выполнить это мы предоставляем читателю[1].

Здесь мы рассмотрим другой путь — составление уравнений методом неопределенных коэффициентов.

Пусть нужно составить уравнение с дробными членами с посторонним корнем $x = 2$

Напишем, например, такое уравнение с неопределенным коэффициентом во втором члене:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{A}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{x+1}.$$

Это уравнение приводится к виду:

$$x^2 + x + A = 3x - 6.$$

Найдем значение A при $x = 2$:

$$4 + 2 + A = 6 - 6; \quad A = -6.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{x^2-x-2} = \frac{3}{x+1} \tag{1}$$

Уравнение (1) имеет только один корень ($x = 0$); второе значение неизвестного ($x = 2$), получаемое при решении (1), не удовлетворяет этому уравнению.

Составим теперь уравнение, решение которого сводится к квадратному уравнению, причем *оба корня* его будут посторонними для исходного уравнения.

Пусть искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{(x+a)(x-2a)} + \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-2a} = 0.$$

Это уравнение приводится к форме:

$$x + A(x-2a) + B(x+a) = 0.$$

[1] См. [79].

I условие: $x_1 = +2a$.

$$2a + A\cdot 0 + B\cdot 3a = 0; \ \mathrm{B} = -\frac{2}{3}.$$

II условие: $x_2 = -a$

$$-a + A(-a-2a) + B\cdot 0 = 0; \ \mathrm{A} = -\frac{1}{3}.$$

Итак, уравнение

$$\frac{x}{(x+a)(x-2a)} - \frac{1}{3(x+a)} - \frac{2}{3(x-2a)} = 0 \qquad (2)$$

не имеет ни одного корня, так как оба значения неизвестных, полученные при его решении ($x_1 = 2a$; $x_2 = -a$), не удовлетворяют данному уравнению (2).

Существует много интересных упражнений, связанных с параметрическими уравнениями, приводимыми к квадратным уравнениям.

Среди задач по «Конкурсу выпускников», проводившемуся газетой «Комсомольская правда» (от 2/III 1963 г.) под руководством акад. А. Н. Колмогорова, предлагалось решить уравнение:

$$(x^2 - a)^2 - 6x + 4x + 2a = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

Один из способов решения этого уравнения заключается в том, что уравнение (I) сначала рассматривают как квадратное, но относительно параметров:

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$$

$$a^2 - 2(x^2 - 1)\cdot a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0$$

$$a_{1;2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 6x^2 - 4x}$$

$$a_{1;2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \qquad (\mathrm{II})$$

$$a_{1;2} = x^2 - 1 \pm (2x - 1) \qquad (\mathrm{III})$$

Таким образом, уравнение (I) распадается на 2 квадратных уравнения относительно x:

$$x^2 + 2x - a - 2 = 0 \qquad (\mathrm{IV})$$

$$x^2 - 2x - a = 0 \qquad (\mathrm{V})$$

Решив (IV) и (V), получим корни исходного уравнения:

$$x_{1;2} = -1 \pm \sqrt{a+3};$$

$$x_{3;4} = 1 \pm \sqrt{a+1}.$$

Ответ. Уравнение (I) имеет:

1. Четыре действительных корня x_1, x_2, x_3, x_4 при $-1 \leqslant \leqslant a$.

2. Два действительных корня x_1, x_2, при $-3 \leqslant a < < -1$.

3. Не имеет действительных корней при $a < -3$.

На занятиях в кружке интересно рассмотреть вопрос о составлении уравнения, подобного уравнению (I), решаемого тем же приемом.

Рассматривая этапы решения, мы видим, что для этого надо начинать с составления выражения вида (III), например:

$$b_{1;2} = x^2 + 2 \pm (3x - 1).$$

Далее записываем два квадратных уравнения с параметром b:

$$x^2 + 3x - b + 1 = 0$$
$$x^2 - 3x - b + 3 = 0$$

Перемножив левые части этих уравнений, получим уравнение четвертой степени:

$$x^4 - (5 + 2b)\,x^2 + 6x + b^2 - 4b + 3 = 0$$

или $(x^2 - b)^2 - 5x^2 + 6x - 4b + 3 = 0$ (I′)

Уравнение (I′) решается тем же приемом, что и уравнение (I).

8. Составление иррациональных уравнений, приводимых к квадратным

Работу по решению готовых иррациональных уравнений возможно и целесообразно на занятиях в кружке разнообразить заданиями по составлению небольшого числа основных видов иррациональных уравнений.

Пусть требуется составить уравнение вида

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = \sqrt{mx+n} \quad \text{(A) с корнями}$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = +1.$$

Обозначим радикалы с помощью новых переменных.

$$u = \sqrt{ax+b} \quad v = \sqrt{cx+d} \quad t = \sqrt{mx+n}$$

Имеем: $u + v = t$ (A′)

Выберем значения v, u, t так, чтобы соотношение (A′) удовлетворялось дважды при $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

Пусть $u_1 = 3 \quad v_1 = 2 \quad (t_1 = u_1 + v_1 = 5)$

$u_2 = 4 \quad v_2 = 0 \quad (t_2 = u_2 + v_2 = 4)$.

Для определения коэффициентов искомого уравнения достаточно решить системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} u_1^2 = ax_1 + b \\ u_2^2 = ax_2 + b \end{cases} \quad \begin{cases} v_1^2 = cx_1 + d \\ v_2^2 = cx_2 + d \end{cases} \quad \begin{cases} t_1^2 = mx_1 + n \\ t_2^2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Подставив значения x_1 и x_2, получим:

$$\begin{cases} 9 = 2a + b \\ 16 = a + b \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 2c + d \\ 0 = c + d \end{cases} \quad \begin{cases} 25 = 2m + n \\ 16 = m + n \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем:

$$a = -7 \quad c = 4 \quad m = 9$$
$$b = 23 \quad d = -4 \quad n = 7$$

Соответствующее уравнение, имеющее корни $x_1 = 2$, $x_2 = +1$, будет следующее:

$$\sqrt{23 - 7x} + \sqrt{4x - 4} = \sqrt{9x + 7} \qquad (A'')$$

Пусть теперь требуется составить уравнение вида (A) такое, чтобы решение его завершалось получением квадратного уравнения с корнями $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ и чтобы оба эти значения уже не удовлетворяли исходному уравнению (A).

Поступаем так:

1) Сначала составим уравнение (A''), имеющее это решение.

2) Составим *сопряженное* уравнение, например, такое:

$$\sqrt{23 - 7x} - \sqrt{4x - 4} = \sqrt{9x + 7} \qquad (A''')$$

Уравнение (A''') уже не имеет ни одного решения, ибо оба полученных при решении значения неизвестного ($x_1 = 2$, $x_2 = 1$) не удовлетворяют ему.

Осталось рассмотреть последний случай:

Как составить уравнение, например, вида (A) такое, чтобы решение его завершалось получением тех же значений неизвестного ($x_1 = 2$, $x_2 = 1$), но чтобы составленному уравнению удовлетворяло лишь одно значение, скажем, $x_1 = 2$?

Эта задача решается тем же приемом.

Так как второй корень, будучи посторонним для первого уравнения, удовлетворяет сопряженному, то необходимо составить *два* сопряженных уравнения:

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=\sqrt{mx+n} \quad (\text{корень } x_1=2)$$

$$\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}=\sqrt{mx+n} \quad (\text{корень } x_2=1).$$

Используем те же обозначения u, v, t.

Пусть $u_1=3 \quad v_1=2 \quad (t_1=u_1+v_1=5)$
$u_2=4 \quad v_2=1 \quad (t_2=u_2-v_2=3)$

Получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} 9=2a+b \\ 16=a+b \end{cases} \quad \begin{cases} 4=2c+d \\ 1=c+d \end{cases} \quad \begin{cases} 25=2m+n \\ 9=m+n \end{cases}$$

Решив их, найдем:

$$a=-7 \quad c=3 \quad m=16$$

$$b=23 \quad d=-2 \quad n=-7$$

Итак, уравнение $\sqrt{23-7x}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{16x-7}$ имеет корень $x_1=2$ ($x_2=1$ — посторонний); сопряженное уравнение $\sqrt{23-7x}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{16x-7}$ имеет корень $x_2=1$ ($x_1=2$ — посторонний).

Задача составления иррациональных уравнений, удовлетворяющих *любым условиям*, разрешена полностью, ибо с точки зрения синтеза возможны три случая таких уравнений:

1) уравнение имеет 2 корня;
2) уравнение имеет 1 корень;
3) уравнение не имеет ни одного корня.

Аналогично рассмотренному по заданным корням осуществляется составление иррациональных уравнений вида:

$$\sqrt{ax+b}\cdot\sqrt{cx+d}=mx+n$$

$$\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}=k.$$

Отметим, что в классификации квадратных уравнений, приведенной в книге С. Е. Ляпина и др. «Методика преподавания математики» (ч. II, стр. 72), допущены ошибки из-за того, что они совсем не рассматривают случай $b=0$ и не всегда рассматривают случай $c=0$.

В терминах необходимости и достаточности это означает:

1) *A является достаточным условием для существования B*;

2) *B является необходимым условием для существования A.*

Два последних суждения выражают содержание одной и той же теоремы $A \to B$.

В практике обучения принято называть суждение A *условием*, а суждение B — *заключением* теоремы.

Поэтому если речь идет о нахождении *условия* для выполнения некоторого *положения* B, то логично это понимать как требование найти *достаточные* условия для выполнения B, иначе говоря, как требование определить условие A в умозаключении $A \to B$ (по заключению B восстановить условие A).

Говоря по-другому, найденное положение A должно удовлетворять смысловому обороту:

если A, *то* B.

Однако в литературе часто встречается логически нечеткое словоупотребление, когда по точному смыслу вопроса требуется найти *достаточные* условия A для B ($A \to B$), а вместо этого процесс решения сводится к нахождению *необходимых* условий C для B ($B \to C$).

Сущность этой ошибки покажем на разборе примеров, взятых из методических пособий.

1) В книге «Задачи на доказательство по алгебре» И. В. Барановой и С. Е. Ляпина решена следующая задача:

«225. Найти условие, при котором в уравнении $x^2+px+q=0$ разность корней была бы равна a.

Решение. Обозначим корни данного уравнения через x_1 и x_2, тогда

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1x_2=q; \quad x_1-x_2=a$$

Из первого и третьего уравнений находим:

$$x_1=\frac{a-p}{2}; \quad x_2=\frac{-a-p}{2} \text{ и}$$

$$x_1x_2=\frac{p^2-a^2}{4}=q, \text{ то есть } a^2-p^2=-4q».$$

Авторы книги доказали лишь следующее:

Если $x_1-x_2=a$, то $a^2-p^2=-4q$; иначе говоря, они нашли *необходимое* условие для выполнения соотношения $x_1-x_2=a$.

Однако если придерживаться условия задачи, то требуется найти *достаточное* условие, *при котором* будет выполняться условие

$$x_1 - x_2 = a$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, следовало дополнительно доказать достаточность найденного условия.

Выполним это. «Известно: $a^2 - p^2 = -4q$; надо доказать

$$x_1 - x_2 = a».$$

По теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q$$

Подставим эти значения в соотношение, данное в условии:

$$a^2 - (-x_1 - x_2)^2 = -4x_1x_2$$
$$a^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$
$$a^2 = (x_1 - x_2)^2. \text{ Откуда имеем: } x_1 - x_2 = a$$
$$\text{или} \quad x_2 - x_1 = a$$

В данном случае условие ($a^2 - p^2 = -4$) оказалось и необходимым и достаточным, что случается, вообще говоря, не всегда.

Решение, данное авторами книги, соответствовало бы не указанной задаче, а следующей:

Разность корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна a. Найти соответствующую зависимость между числами p, q и a.

2) В той же книге И. В. Барановой и С. Е. Ляпина рассмотрена следующая задача:

«**224.** В уравнении $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1) \cdot x + 2 = 0$ найти значение для k, *при котором* отношение корней уравнения было бы равно 2.

Решение. В уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ отношение корней равно 2, значит, между коэффициентами уравнения существует зависимость: $2b^2 = 9ac$. Для данного уравнения эта зависимость примет вид:

$$\left.\begin{array}{l} 2(3k-1)^2 = 9(k^2 - 5k + 3)\,2, \text{ или} \\ (3k-1)^2 = 9(k^2 - 5k + 3) \end{array}\right. \qquad \text{(I)}$$

Решив уравнение (I), получим, что $k = \frac{2}{3}$».

Решение задачи авторами опять не завершено.

В терминах необходимости и достаточности это означает:

1) *A является достаточным условием для существования B*;

2) *B является необходимым условием для существования A.*

Два последних суждения выражают содержание одной и той же теоремы $A \to B$.

В практике обучения принято называть суждение A *условием*, а суждение B — *заключением* теоремы.

Поэтому если речь идет о нахождении *условия* для выполнения некоторого *положения* B, то логично это понимать как требование найти *достаточные* условия для выполнения B, иначе говоря, как требование определить условие A в умозаключении $A \to B$ (по заключению B восстановить условие A).

Говоря по-другому, найденное положение A должно удовлетворять смысловому обороту:

если A, *то* B.

Однако в литературе часто встречается логически нечеткое словоупотребление, когда по точному смыслу вопроса требуется найти *достаточные* условия A для B ($A \to B$), а вместо этого процесс решения сводится к нахождению *необходимых* условий C для B ($B \to C$).

Сущность этой ошибки покажем на разборе примеров, взятых из методических пособий.

1) В книге «Задачи на доказательство по алгебре» И. В. Барановой и С. Е. Ляпина решена следующая задача:

«225. Найти условие, при котором в уравнении $x^2+px+q=0$ разность корней была бы равна a.

Решение. Обозначим корни данного уравнения через x_1 и x_2, тогда

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1x_2=q; \quad x_1-x_2=a$$

Из первого и третьего уравнений находим:

$$x_1=\frac{a-p}{2}; \quad x_2=\frac{-a-p}{2} \text{ и}$$

$$x_1x_2=\frac{p^2-a^2}{4}=q, \text{ то есть } a^2-p^2=-4q».$$

Авторы книги доказали лишь следующее:

Если $x_1-x_2=a$, то $a^2-p^2=-4q$; иначе говоря, они нашли *необходимое* условие для выполнения соотношения $x_1-x_2=a$.

Однако если придерживаться условия задачи, то требуется найти *достаточное* условие, *при котором* будет выполняться условие

$$x_1 - x_2 = a$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, следовало дополнительно доказать достаточность найденного условия.

Выполним это. «Известно: $a^2 - p^2 = -4q$; надо доказать

$$x_1 - x_2 = a».$$

По теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1x_2 = q$$

Подставим эти значения в соотношение, данное в условии:

$$a^2 - (-x_1 - x_2)^2 = -4x_1x_2$$
$$a^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$
$$a^2 = (x_1 - x_2)^2. \text{ Откуда имеем: } x_1 - x_2 = a$$
$$\text{или} \quad x_2 - x_1 = a$$

В данном случае условие ($a^2 - p^2 = -4$) оказалось и необходимым и достаточным, что случается, вообще говоря, не всегда.

Решение, данное авторами книги, соответствовало бы не указанной задаче, а следующей:

Разность корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна a. Найти соответствующую зависимость между числами p, q и a.

2) В той же книге И. В. Барановой и С. Е. Ляпина рассмотрена следующая задача:

«**224.** В уравнении $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)\cdot x + 2 = 0$ найти значение для k, *при котором* отношение корней уравнения было бы равно 2.

Решение. В уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ отношение корней равно 2, значит, между коэффициентами уравнения существует зависимость: $2b^2 = 9ac$. Для данного уравнения эта зависимость примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &2(3k - 1)^2 = 9(k^2 - 5k + 3)\,2, \text{ или} \\ &(3k - 1)^2 = 9(k^2 - 5k + 3) \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Решив уравнение (I), получим, что $k = \frac{2}{3}$».

Решение задачи авторами опять не завершено.

Чтобы ответить на вопрос задачи 224, следует еще проверить, действительно ли при $k=\frac{2}{3}$ отношение корней будет равно 2. (Этим самым будет установлена достаточность условия.)

В самом деле, при $k=\frac{2}{3}$ имеем:

$$\left(\frac{1}{9}-\frac{10}{3}+3\right)x^2+x+2=0$$

$$\frac{1}{9}x^2+x+2=0$$

$$x^2+9x+18=0; \qquad x_{1;2}=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{72}{4}}$$

$$x_{1;2}=-\frac{9}{2}\pm\frac{3}{2}; \quad x_1=-6; \quad x_2=-3$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{-6}{-3}=2$$

Теперь, наконец, можно утверждать, что решение задачи 224 закончено.

3) В журнале «Математика в школе» (1960 год, № 1, стр. 66) помещена статья А. Г. Бекназаряна «Об одном виде устных упражнений на квадратные уравнения». В этой статье доказывается следующее любопытное свойство квадратного уравнения:

«Если $a+b+c=0$, то один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен единице ($x_1=1$), другой корень равен отношению коэффициентов ($x_2=\frac{c}{a}$). Доказать это просто. Положив $x_1=1$, получим $ax_1{}^2+bx_1+c=a+$ $+b+c=0$;

$$x_1x_2=x_2=\frac{c}{a}»$$

Приведенное доказательство *неверно*, ибо в нем доказывается не то предложение, которое следует доказать, а ему обратное.

Доказательство должно быть таким:
дано $ax^2+bx+c=0$ (I). По условию $a+b+c=0$. (II) Из (II) определим c ($c=-a-b$) и подставим в (I).

$$a(x^2-1)+b(x-1)=0$$

$$(x-1)(ax+a+b)=0$$

Отсюда имеем: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{-a-b}{a} = \frac{c}{a}$.

10. О решении уравнений с исследованием

Решение параметрических уравнений целесообразно в отдельных случаях *доводить до конца*, то есть завершать исследованием. С этой целью полезно показать ученикам всю градацию усложнения задания, исходя из простейших форм уравнения.

1. Пусть дано уравнение

$$2(a-3x) = 3(x-a) \qquad \text{(I)}$$

Ответ. $x = \frac{5a}{9}$ (I′)

Уравнение (I) не имеет знаменателя и поэтому нет *исходных* ограничений для параметра a.

В выражении для корня уравнения (I′) параметр содержится только в числителе, поэтому нет и *дополнительных* ограничений, накладываемых на параметр.

2. Усложним уравнение (I) так, чтобы появились исходные ограничения, связанные со структурой уравнения. Для этого достаточно уравнение задать в форме:

$$\frac{2}{x-a} = \frac{3}{a-3x} \qquad \text{(II)}$$

Знаменатели уравнения (II) не могут равняться нулю. Поэтому исходные ограничения будут следующие:

$$x - a \neq 0, \quad \text{или } x \neq a \qquad \text{(A)}$$

$$a - 3x \neq 0 \quad \text{или } x \neq \frac{a}{3} \qquad \text{(B)}$$

Ответ. $x = \frac{5a}{9}$ (II′) при ограничениях (A) и (B). В ограничениях (A) и (B) связаны значения неизвестного и параметра.

Надо же исследование уравнения доводить до получения ограничений, наложенных *только на параметры*.

Чтобы добиться этого, надо значение корня $x = \frac{5a}{9}$ подставить в исходные ограничения (A) и (B).

Имеем: $x \neq a$ (A)

Тогда $\frac{5a}{9} \neq a$.

Отсюда $a \neq 0$.

То же самое получим из второго ограничения: $x \neq \frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} \neq \frac{5a}{9}$; $a \neq 0$.

Таким образом, вместо двух *«предварительных ограничений»* (A) и (B) имеем одно *«конкретное ограничение»* $a \neq 0$ (A′).

Ответ. $x = \frac{5a}{9}$ при $a \neq 0$.

3. Усложним уравнение (II), так, чтобы, кроме исходных ограничений (A) и (B), появилось дополнительное ограничение (C).

Для этого уравнение (II) заменим таким уравнением (III), чтобы в выражении для корня параметр a попадал в знаменатель.

Пусть мы составили следующее уравнение:

$$\frac{2}{x-a} = \frac{3+a}{a-3x} \qquad \text{(III)}$$

Ответ. $x = \frac{a^2+5a}{a+9}$. (III′)

Для уравнения (III) существуют те же *«предварительные* ограничения» (A) и (B).

Кроме того, из формы выражения для корня (III′) получаем *дополнительное* ограничение: $a+9 \neq 0$; $a \neq -9$ (C)

Затем предварительные ограничения (A) и (B) приведем к конкретным ограничениям.

Имеем: $x \neq a$. (A)

Тогда: $\frac{a^2+5a}{a+9} \neq a$; $a^2+5a \neq a^2+9a$; $a \neq 0$.

То же самое получаем из ограничения (B).

Итак, окончательно:

Уравнение (III) имеет корень (III′) при $a \neq -9$ (C) и $a \neq 0$ (A′).

При изучении квадратных уравнений в VIII классе достаточно ограничиваться исследованием уравнений с одним параметром, например, таких:

1. $2x^2 - 6ax + 10 = 0$

2. $x^2 - 8x + c = 0$

В методической литературе иногда встречаются неточности при изложении вопроса о решении уравнений с исследованием.

В книге К. С. Богушевского и К. П. Сикорского «Методические указания к преподаванию алгебры и геометрии в VIII классе» (Учпедгиз, 1958) рассматривается решение следующего уравнения:

$$\frac{2a+m}{a+x} - \frac{2a-m}{a-x} = \frac{2a}{m}$$

Ответ. $x_{1,2} = m \pm a$.

Далее авторы книги пишут следующее:

При решении этого уравнения «недостаточно указать, что решение производится при условии $x \neq \pm a$ и $m \neq 0$. Решение уравнения приводит к $x = m \pm a$.

Подстановка этих корней в общий знаменатель $m(a + x)(a - x)$ дает *дополнительное условие*: $m \neq \pm 2a$» (подчеркнуто мною. — *П. Э.*)

Отметим следующие неточности в этом указании:

1) Условия $x \neq a$; (A) $x \neq -a$ (B) являются по нашей терминологии *предварительными* ограничениями, наложенными по существу не на параметр a, а на значения корня (значения неизвестного x).

Подставив в эти неравенства корни $x_1 = m + a$; $x_2 = m - a$, мы получаем не *дополнительные ограничения*, как считают авторы книги, а конкретизацию тех же ограничений, а именно:

при подстановке x_1 в (A) получаем ограничение $m \neq 0$ (C);
при подстановке x_2 в (A) получаем $m \neq 2a$ (A′);
при подстановке x_1 в (B) получаем $m \neq -2a$ (B′);
при подстановке x_2 в (B) получаем $m \neq 0$ (C).

Таким образом, ограничения $m \neq 2a$ (A′), $m \neq -2a$ (B′) являются лишь иным выражением тех же ограничений (A) и (B), и связывающих между собой не x и a, а сами параметры m и a.

Понятно также, что значение корня правильнее подставлять не в общий знаменатель $m(a+x)(a-x)$, а в предварительные ограничения (A) и (В).

Приводим полный ответ к этому уравнению, который не дан в упоминавшейся книге.

1. При $m \neq 2a$, $m \neq -2a$, $m \neq 0$ уравнение имеет два корня $x_1 = m + a$; $x_2 = m - a$.

2. При $m \neq 0$, $m = 2a$ уравнение имеет один корень $x_1 = m + a = 3a$.

3. При $m \neq 0$, $m = -2a$ уравнение имеет один корень $x_2 = m - a = -3a$.

4. При $m = 0$ уравнение не имеет ни одного корня.

Чтобы учащиеся поняли различие этих частных случаев, уместно иногда предложить им подобрать параметры, соответствующие этим случаям, например:

1. Пусть $m = 2$, $a = 3$. Имеем уравнение $\frac{8}{3+x} - \frac{4}{3-x} = 3$; корни: $x_1 = 5$; $x_2 = -1$.

Здесь корни вычислены без решения исходного уравнения по общему выражению корней ($x_1 = m + a$; $x_2 = m - a$).

2. Пусть $m = 2$; $a = 1$, тогда $\frac{4}{1+x} = 1$ имеет один корень $x_1 = 3$.

При этих значениях параметра исходное уравнение вырождается и корень x_2 выпадает.

11. Составление системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными

Как известно, систему двух уравнений, одно из которых — второй степени, а другое — первой степени, всегда можно решить элементарно, например, подстановкой значения одного неизвестного, определенного из линейного уравнения, в другое.

Рассмотрим обратную задачу о составлении системы, имеющей определенные решения.

Пусть требуется составить систему вида:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ mx + ny + k = 0 \end{cases}$$ так, чтобы она имела решение $x_1 = -2$, $y_1 = +1$.

Чтобы выполнить это задание, достаточно написать два числовых тождества с учетом значений неизвестных при *произвольных* коэффициентах:

$$\begin{cases}(-2)^2+2\cdot(-2)\cdot(+1)+0(+1)^2+0\cdot(-2)+3\cdot(+1)=3\\ 3\cdot(-2)+2(+1)=-4\end{cases}$$

Далее преобразуем систему тождеств в систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2+2\cdot xy+3y=3\\ 3x+2y=-4\end{cases}$$

Решив составленную систему, получим намеченное решение ($x_1=-2$, $y_1=+1$) и, кроме того, второе решение, которое нами не было намечено заранее.

Поскольку первое решение системы было выбрано в поле рациональных чисел, то и второе решение должно состоять также из рациональных чисел.

Пусть решена следующая система уравнений:

$$\begin{cases}(x-2)(y-3)=1\\ \dfrac{x-2}{y-3}=1\end{cases}$$

Ответ. (3; 4) и (1; 2).

Затем ученикам можно предложить составить систему того же вида, причем одно из ее решений должно быть (5; 6.)

Учащиеся конструируют по аналогии два числовых тождества:

$$\begin{cases}\left(\boxed{5}-3\right)\left(\boxed{6}-2\right)=8\\ \dfrac{\boxed{6}-2}{\boxed{5}-3}=2\end{cases}$$

Затем пишут соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-3)(y-2)=8\\ \dfrac{y-2}{x-3}=2\end{cases}$$

Решив составленную систему, ученики убеждаются в том, что действительно *одним* из решений системы оказывается намеченная пара чисел (5; 6).

Кроме того, находится второе решение (1; —2), которое мы заранее не намечали.

Для составления системы двух уравнений с двумя неизвестными можно также воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим задачу в общей постановке:

Составить систему уравнений вида

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ mx + ny + k = 0, \end{cases}$$ такую, чтобы она имела решения $(-2, +1)$ и $(-1, 4)$.

Составляемая система должна удовлетворять двум условиям — иметь два данных решения.

Первое уравнение имеет 6 коэффициентов (6 параметров), а второе — 3 параметра.

Поэтому следует произвольно наметить значения 4 параметров для первого уравнения $(6 - 2 = 4)$ и 1 параметра для второго уравнения $(3 - 2 = 1)$.

Пусть $a = 0$, $d = 3$, $e = 0$, $f = 1$ и $k = -2$.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} bxy + cy^2 + 3x = -1 \\ px + ky = 2 \end{cases}$$

Для определения коэффициентов b и c первого уравнения составим систему, подставляя значения двух решений:

$$\begin{cases} b\cdot(-2)\cdot(+1) + c\cdot(+1)^2 + 3\cdot(-2) = -1 \\ b\cdot(-1)\cdot(+4) + c\cdot(+4)^2 + 3\cdot(-1) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{39}{14} \\ c = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

Так же найдем значения коэффициентов p и k:

$$\begin{cases} p\cdot(-2) + k(+1) = 2 \\ p\cdot(-1) + k(+4) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = -\frac{6}{7} \\ k = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Итак, искомая система следующая:

$$-\frac{39}{14}xy - \frac{4}{7}y^2 + 3x = -1$$

$$-\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y = 2$$

или окончательно:

$$\begin{cases} 39xy + 8y^2 - 42x = 14 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$$

Последняя система имеет заданные решения $(-2; +1)$ и $(-1; 4)$.

12. Составление симметрических систем уравнений второй степени

Алгебраическое выражение называется симметрическим относительно x и y, если числовые значения его не меняются от перестановки x и y.

Таковы, например, выражения: $x + y$;

$$x^2 + y^2; \quad 3x - 2xy = 3y; \quad \frac{x+1}{2y} + \frac{y+1}{2x} \text{ и др.}$$

Уравнения вида $F(x, y) = a$, где a — параметр, назовем симметрическим, если левая часть его представляет симметрическое выражение относительно x и y.

Систему, состоящую из симметрических уравнений, назовем также симметрической.

В школьном курсе алгебры решается значительное число симметрических систем.

Пусть учащиеся решили симметрическую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8} \\ x + y = 12 \end{cases}$$ и получили ответ: (8; 4) и (4; 8).

Можно им предложить составить систему такого же вида, но чтобы решениями были, скажем, пары чисел: (6; 3) и (3; 6).

Сначала составим два числовых тождества

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} \\ 6 + 3 = 9 \end{cases}$$

Заменив числа 6 и 3 буквами x и y, получаем симметрическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Решения симметрической системы тоже *симметричны* (то есть соответствуют координатам точек, симметричных относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов).

Циклично-симметрической назовем систему двух уравнений, одно из которых получается из другого при помощи перестановки неизвестных x и y.

Общий вид циклично-симметрической системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными таков:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=M \\ ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=M \end{cases} \qquad (I)$$

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ M \text{ — параметры}).$$

Циклично-симметрические системы двух уравнений второй степени решаются очень просто и поэтому они должны занять свое место в школьных упражнениях по алгебре.

Для решения системы (I) вычтем одно уравнение из другого.

$$a(x-y)(x+y)-c(x-y)(y+x)+d(x-y)-e(x-y)=0$$

Все слагаемые имеют общий множитель $(x-y)$ и поэтому

$$(x-y)[a(x+y)-c(y+x)+d-e]=0$$

$$(x-y)[(a-c)(x+y)+d-e]=0$$

Решив каждое из линейных уравнений $x-y=0$ и $(a-c)(x+y)+d-e=0$ совместно с одним из уравнений системы (I), мы найдем *четыре* решения исходной системы.

Уравнения циклично-симметрической системы соответствуют взаимно обратным функциям.

График обратной функции, как известно, получается из графика прямой функции путем поворота чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла.

Поэтому рассматриваемые системы очень просто решаются не только аналитически, но и графически.

Как легко видеть, два решения (из четырех) системы (I) состоят из равных значений неизвестных ($x_1=y_1$; $x_2=y_2$).

Составим систему вида (I), имеющую решением, например, $x_1=y_1=-2$.

Напишем произвольное числовое выражение и, подсчитав его значение, превратим в тождество:

$$2\cdot(-2)^2-3(-2)\cdot(-2)+4\cdot(-2)-(-2)=-10$$

Легко написать теперь искомую систему:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 4x - y = -10 \\ 2y^2 - 3xy + 4y - x = -10 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Решение. Вычтем второе уравнение из первого:

$$2(x-y)(x+y) + 5(x-y) = 0$$

$$(x-y)(2x+2y+5) = 0$$

Решение системы (II) сводится к решению двух систем уравнений.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 4x - y = -10 \end{cases} \text{(IIа)} \quad \begin{cases} 2x + 2y + 5 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 4x - y = 0 \end{cases} \text{(IIб)}$$

Ответ. (5,5) и (—2, —2); $\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right)$ и

$$\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{4}; \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right). \quad \text{(III)}$$

13. Составление системы уравнений второй степени, левые части которых однородны относительно x и y

Рассмотрим вопрос о составлении системы двух уравнений второй степени, левые части которых являются однородными выражениями относительно x и y (то есть таких, у которых в левой части имеются члены лишь вида ax^2, bx^2, cxy, а в правой части — постоянные числа).

Сначала пронаблюдаем, какой последовательностью операций решается такая система.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 & \text{(Iа)} \\ xy + y^2 = 4 & \text{(Iб)} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Умножив обе части уравнения (Iа) на (— 2) и сложив их с соответствующими частями уравнения (Iб), получим:

$$3y^2 - 2x^2 + 5xy = 0 \quad \text{(II)}$$

Поделим обе части на xy ($x \neq 0$ и $y \neq 0$).

$$3 \cdot \frac{y}{x} - 2\frac{x}{y} + 5 = 0 \quad \text{(III)}$$

Решив уравнение (III) посредством подстановки $\frac{y}{x} = z$, найдем следующие четыре решения: (+ 3, + 1); (— 3,

-1); $(+\sqrt{2}, +2\sqrt{2})$ и $(-2, -2\sqrt{2})$, то есть корням уравнений с однородной левой частью соответствуют координаты точек, симметричных относительно начала координат.

Теперь рассмотрим, как же составить систему однородных уравнений второй степени с заранее намеченными *четырьмя* корнями.

Для этого проведем преобразования в обратном порядке.

Пусть корнями составляемой системы должны быть следующие пары чисел: $(\pm 2, \pm 1)$ и $(\pm 4, \pm 3)$.

Пусть первое уравнение будет $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, где a, b, c, d — постоянные числа.

Это уравнение должно иметь два решения: (2, 1) и (4, 3).

Если оно имеет решения (2, 1) и (4, 3), то, как следствие этого, оно будет иметь также решения $(-2; -1)$ и $(-4, -3)$.

По указанным двум условиям надо определить четыре коэффициента a, b, c, d.

Соответственно два из них мы сможем наметить произвольно. Пусть $c = 1$; $d = 4$, тогда

$$\begin{cases} a\cdot 2^2 + b\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1^2 = 4 \\ a\cdot 4^2 + b\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 3^2 = 4 \end{cases}$$

Из этой системы определяем: $a = \frac{23}{8}$, $b = \frac{-17}{4}$.

Итак, искомое уравнение

$$\frac{23}{8}x^2 - \frac{17}{4}xy + y^2 = 4, \quad \text{или}$$

$$23x^2 - 34xy + 8y^2 = 32 \quad (1\text{ а})$$

Для наших целей необходимо составить еще одно уравнение вида $a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1$ с иными, чем уравнение (Iа), коэффициентами, но с теми же корнями.

Итак, пусть $c_1 = 2$; $d_1 = 3$:

$$\begin{cases} a_1\cdot 4 + b_1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 3 \\ a_1\cdot 16 + b_1\cdot 12 + 2\cdot 9 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a_1 + 2b_1 = 1 \\ 16a_1 + 12b_1 = -15 \end{cases}$$

Отсюда определяем коэффициенты: $a_1 = \frac{21}{8}$; $b_1 = -\frac{19}{4}$.

Второе уравнение системы будет следующее:

$$\frac{21}{8}x^2 - \frac{19}{4}xy + 2y^2 = 3, \quad \text{или}$$

$$21x^2 - 38xy + 16y^2 = 24 \qquad \text{(I б)}$$

Итак, система уравнений

$$\begin{cases} 23x^2 - 34xy + 8y^2 = 32 \\ 21x^2 - 38xy + 16y^2 = 24 \end{cases} \text{имеет}$$

заданные корни $(\pm 2, \pm 1)$ и $(\pm 4, \pm 3)$.

14. О разложении квадратного трехчлена на множители

Обычно учителя знакомят с этой темой учеников в дедуктивной форме: дан некоторый трехчлен, надо его разложить на множители, для чего следует произвести такие-то преобразования. При таком порядке изложения для учащихся остается неясным вопрос: как впервые *догадались* идти именно этим путем?

Вместо этого целесообразно показать ученикам весь процесс, начав с составления таких выражений. В результате последующего анализа и *обращения* этого процесса учащиеся *сами* находят способ разложения квадратного трехчлена на множители.

Предлагаемая методика выглядит так.

1. Учитель предлагает ученикам разложить на множители разность квадратов двух чисел, например:

$$y^2 - 16 = (y - 4)\ (y + 4). \qquad \text{(I)}$$

2. Далее он предлагает произвести *эксперимент*: что получится, если выполнить замену переменных, скажем, y через $x - 3$? $(\ldots = \overleftarrow{(x - 3)^2 - 16 = [(x - 3) - 4]} \times$ $\times \overrightarrow{[(x - 3) + 4]} = \ldots)$

Из тождества (I) получаем цепь тождественно равных выражений, для чего тождество (I) развертываем влево (находим исходный квадратный трехчлен) и развертываем вправо (находим его множители):

$$\overleftarrow{x^2 - 6x - 7 = (x^2 - 6x + 9) - 16 = (x-3)^2 - 16} =$$
$$= [(x - 3) - 4] \times [(x - 3) + 4] = \overrightarrow{(x - 7)(x + 1)} \qquad \text{(II)}$$

Затем учитель ставит проблему: в каком порядке следовало бы вести преобразования, чтобы разложить квадратный трехчлен, например, $x^2 - 6x - 7$ на множители: $(x - 7)$ и $(x - 1)$?

Наблюдая цепь преобразований выражения (II) *слева направо*, учащиеся могут теперь сами найти алгоритм разложения квадратного трехчлена на множители.

Сравнивая исходное выражение $(x^2 - 6x - 7)$ со вторым $(x^2 - 6x + 9) - 16$, они подметят, что при выделении первой суммы $(x^2 - 6x + 9)$ член с неизвестным в первой степени переносится в нее без изменения.

Зачем нужна эта сумма? Ответ находится в третьем выражении $(x - 3)^2 - 16$: мы выделяем такой трехчлен $x^2 - 6x + 9$, который является квадратом двучлена $(x - 3)^2$; к тому же в третьем выражении, кроме $(x - 3)^2$, имеется лишь свободный член; поэтому ясно, что при переходе от первого выражения ко второму надо член с неизвестным в первой степени $(6x)$ представить как *удвоенное произведение*: $6x = 2 \cdot 3x$.

Анализируем далее: как при переходе от первого выражения ко второму появился член -16? Нетрудно заметить, что к числу (-7), имевшемуся в исходном выражении, прибавили число (-9), *компенсирующее* число $(+9)$, оказавшееся в выделенном трехчлене $x^2 - 6x + 9$.

С этим замечанием учитель переписывает преобразования более подробно, вводя новую промежуточную форму:

$$x^2-6x-7=(x^2-2\cdot 3x+3^2)-3^2-7=(x-3)^2-16=(x-3)^2-4^2.$$

После того как будет сформулировано правило для разложения квадратного трехчлена, предлагается применить это правило к новому выражению, например:

$$x^2 - 8x + 15 = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 15 = (x - 4)^2 - 1 =$$
$$= [(x - 4) - 1]\cdot[(x - 4) + 1] = (x - 5)(x - 3).$$

Упражнения по разложению квадратного трехчлена посредством выделения полного квадрата весьма полезны для изучения последующего материала (построение графика квадратного трехчлена и его исследования).

15. Задачи, решаемые на основании свойств квадратного трехчлена

При решении многих задач, как алгебраических, так и геометрических, приходится определять наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена.

Пусть дан квадратный трехчлен $y = -x^2 + 10x - 17$.

Требуется определить: при каком значении x данный трехчлен достигает максимума?

Для решения задачи преобразуем квадратный трехчлен, выделив из него полный квадрат[1]:

$$y = -x^2 + 10x - 17 = -(x^2 - 2\cdot5\cdot x + 25) + 25 - 17 =$$
$$= -[(x-5)^2 - 8] = 8 - (x-5)^2$$
$$y = 8 - (x-5)^2.$$

Правая часть представлена в виде разности, причем уменьшаемое (8) — постоянное число, вычитаемое $(x-5)^2$ — переменная величина, y — разность.

Разность будет наибольшей, если вычитаемое — наименьшее, то есть равно нулю. Имеем при $x - 5 = 0$ $(x = 5)$; $y_{max} = 8 - 0 = 8$.

Итак, $y_{max} = 8$ при $x = 5$.

Рассмотрим обратную задачу: пусть требуется *составить* какую-нибудь квадратичную функцию, которая, скажем, имеет минимум $(y_{min} = 10)$ в точке $x = 3$.

Искомая функция будет следующая:

$$y = 10 + (x-3)^2 = x^2 - 6x + 19.$$

Функция $y = 10 - (x-3)^2 = -x^2 + 6x + 1$ имела бы в той же точке $x = 3$ максимум, равный 10 $(y_{max} = 10)$.

Интересно отметить, что метод определения экстремума квадратного трехчлена возможно применить при решении *обобщенной* задачи об определении экстремумов многочлена второй степени от нескольких переменных.

Пусть дана функция от двух переменных

$$z = F(x, y) = x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x + 6y + 10.$$

Требуется найти такие значения x и y, чтобы функция при этих значениях достигала минимума или максимума.

---

[1] Эту задачу можно решить с помощью метода неопределенных коэффициентов: $-x^2 + 10x - 17 = -(x+k)^2 + p$; $-x^2 + 10x - 17 = x^2 - 2kx + (p - k^2)$; приравняем коэффициенты: $10 = -2k$; $\boxed{k = -5}$ $-17 = p - k^2$; $-17 = p - 25$; $\boxed{p = 8;}$ Итак, имеем: $-x^2 + 10x - 17 = 8 - (x-5)^2$.

Методом решения этой задачи является, как и прежде способ выделения полного квадрата.

Лучше всего для этого воспользоваться методом неопределенных коэффициентов:

$$z = x^2 + 5y^2 + 2xy - 2x + 6y + 10 = (x + ay + b)^2 + (cy + d)^2 + e$$

Раскрыв скобки в правой части, имеем:

$$z = x^2 + (a^2 + c^2)\, y^2 + 2axy + 2bx + (2ab + 2cd)\, y + b^2 + d^2 + e$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых переменных, получим:

$$\begin{array}{llll} a^2 + c^2 = 5 & (\mathrm{I}) & 2ab + 2cd = 6 & (\mathrm{IV}) \\ 2a = 2 & (\mathrm{II}) & b^2 + d^2 + e = 10 & (\mathrm{V}) \\ 2b = -2 & (\mathrm{III}) & & \end{array}$$

Из (II) и (III) найдем: $a = 1$, $b = -1$.
Из (I) определим c : $1 + c^2 = 5$; $c_1 = -2$; $c_2 = +2$.
Из (IV) находим: $-2 + 2cd = 6$; $cd = 4$; $d = -2$; $d_2 = 2$.
Из (V) имеем: $1 + 4 + e = 10$; $e = 5$.

Итак, получили следующее соотношение:

$$z = x^2 + 5y^2 + 2xy - 2x + 6y + 10 = (x + y - 1)^2 + (2y + 2)^2 + 5$$

Данная функция представлена в виде суммы двух квадратов и постоянного числа.

Поэтому *наименьшее* значение функции, равное 5, достигается тогда, когда оба квадрата будут равны нулю:

$$\begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем: при $y = -1$, $x = 2$ функция достигает минимума, равного 5.

Задачу можно решить и вторым способом, представив второй член в виде $(c_1x + d_1)^2$:

$$z = x^2 + 5y^2 + 2xy - 2x + 6y + 10 =$$

$$= (x + ay + b_1)^2 + (c_1 x + d_1^2 + e_1) \text{ и т. д.}$$

Легко решается и обратная задача по составлению некоторого многочлена от двух переменных второй степени, имеющего экстремум в определенной точке (например, максимум, равный 10 при $x = 1$, $y = -3$).

Используя данные значения, составим произвольную систему двух линейных уравнений, имеющую решением данные значения неизвестных:

$$\begin{cases} \boxed{1} - 1 = 0 \\ 2 \cdot \boxed{1} - \boxed{-3} - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

Искомый многочлен будет следующий:

$$z = 10 - (2x - y - 5)^2 - (x - 1)^2 = -5x^2 - y^2 + 4xy + \\ + 22x - 10y - 16.$$

Многочлен $10 + (2x - y - 5)^2 + (x - 1)^2 = 5x^2 + y^2 - 4xy - 22x + 10y + 16$ будет иметь в той же точке (1; 3) *минимум*, равный также 10. (Предлагаем читателю обобщить обе данные задачи на многочлен второй степени от n переменных и найти аналогичное рассмотренному элементарное решение вопроса.)

16. Построение графика квадратного трехчлена

В существующих учебниках алгебры при объяснении способа построения графиков функций (в том числе и графика квадратного трехчлена) применяется метод рассуждения, который мы назовем *прямым*.

Сущность этого метода, как известно, сводится к следующему:

1. Трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ преобразуют в $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

2. Составляют *таблицу* значений координат нескольких точек.

3. Посредством сравнения значений координат (то есть в основном *индуктивным* путем (устанавливается, что график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ можно получить, передвинув график функции $y = x^2$ в направлении оси абсцисс на $\left(\frac{b}{2a}\right)$ единиц и в направлении оси ординат на $\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ единиц.

При этом методе приходится тратить много времени на построение трех одинаковых кривых; а именно:

1) параболы $y = ax^2$;

2) затем параболы, смещенной в направлении оси абсцисс;

3) и, наконец, той же параболы, смещенной в направлении оси ординат.

Кроме того, при этом способе приходится составлять таблицу значений функции для каждого нового случая; общий прием построения графика здесь появляется лишь в конце изучения темы.

Как показывает практика, более целесообразным оказывается другой метод, который можно назвать методом переноса осей координат. Построение графика квадратного трехчлена этим методом состоит из следующих этапов:

1. Дан квадратный трехчлен:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

2. Преобразуем формулу, выделяя полный квадрат:

$$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left[\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$y = a\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\cdot\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

$$y = a\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{2}$$

3. Переносим свободный член в левую часть:

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\cdot\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \tag{3}$$

4. Вводим замену переменных:

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = \overline{x} \\ y - \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \overline{y} \end{cases} \tag{4}$$

5. Переписываем уравнение (2) в новых переменных:

$$\overline{y} = a\overline{x}^2 \tag{5}$$

6. Находим координаты точки $\overline{O}$ (начала новой системы координат $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$ относительно прежней системы XOY).

Точка $\overline{O}$ в системе $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$ имеет нулевые координаты: $\overline{O}$ $(\overline{x} = 0;\ \overline{y} = 0)$

Подставим эти значения в формулы (4):

$$\overline{O}\begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}=0 \\ y-\dfrac{4ac-b^2}{4a}=0 \end{cases}$$

Решив уравнения, получим координаты точки $\overline{O}$ в основной системе координат:

$$\overline{O}\left(x=-\frac{b}{2a};\quad y=\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \tag{6}$$

7. Строим основную систему координат XOY.

8. Находим точку $\overline{O}$ (начало новой системы координат по (6)).

9. Строим *вспомогательную* систему координат $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$ ($\overline{O}\overline{X} \parallel OX$; $\overline{O}\overline{Y} \parallel OY$).

10. Во вспомогательной системе координат строим по (5) график функции $\overline{y}=a\overline{x}^2$.

Таким образом, построение графика любого квадратного трехчлена сводится к построению параболы по формуле нормального (канонического) вида:

$$\overline{y}=a\overline{x}^3$$

По точкам, на основе составления таблицы, строится *только* парабола вида $\overline{y}=a\overline{x}^2$; все остальные операции приведенного алгоритма заучиваются и выполняются в неизменной последовательности.

Рассмотрим пример:

1) Пусть требуется построить график квадратного трехчлена:

$$y=3x^2+3x+2 \tag{I}$$

2) Преобразуем это уравнение:

$$y=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \tag{II}$$

3) Перепишем его следующим образом:

$$y-\frac{5}{4}=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{III}$$

4) Произведем замену переменных:

$$y-\frac{5}{4}=\overline{y};\ x+\frac{1}{2}=\overline{x} \tag{IV}$$

5) Наконец, имеем для вспомогательной системы координат уравнение[1]: $\bar{y} = 3\bar{x}^2$ (рис. 20)

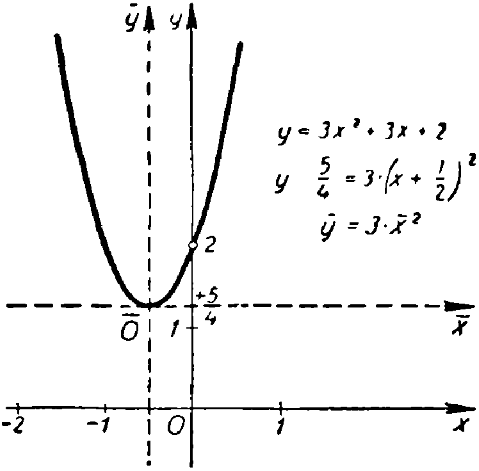


Рис. 20

Построение графика осуществляется дальше так:

6) Находим координаты точки $\bar{O}$ в основной системе *координат*, для чего подставляем в (IV) $\bar{y} = \bar{x} = 0$:

$$\bar{O}\begin{cases} y - \frac{5}{4} = 0 \\ x + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \bar{O}\left(y = \frac{5}{4};\ x = -\frac{1}{2}\right)$$

7) Строим вспомогательную систему координат $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$.

8) Во вспомогательной системе координат строим график функции

$$\bar{y} = 3\,\bar{x}^2 \qquad \text{(V)}$$

Разумеется, в ходе упражнений этот развернутый процесс свертывается; так, в конце обучения учащиеся без труда переходят сразу от формы (III) $y - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$

[1] Уравнение (I) можно привести к каноническому виду методом неопределенных коэффициентов: $\bar{O}(p;\ q)$; $y - q = a\,(x - p)^2$; $y = a(x - p)^2 + q$; $y = ax^2 - 2apx + (p^2 + q)$; $a = 3$; $-2ap = 3$; $p^2 + q = 2$. Дальнейшее ясно.

к записи уравнения во вспомогательной системе координат $\bar{y} = 3\bar{x}^2$; координаты точки $\bar{O}$ (начала вспомогательной системы) находятся также в уме: для этого *мысленно* приравниваем нулю левую и правую часть выражения (III) и находим сразу: $\bar{O}\left(-\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right)$.

В психологическом отношении нахождение координат точки $\bar{O}$ сводится к ассоциации: в каждой части выражения (III) взять свободный член $\rightarrow$ изменить знак перед ним.

Схематически данная ассоциация имеет структуру: «вижу $X + \frac{1}{2} \rightarrow$ абсцисса точки $\bar{O}$ будет $\left(-\frac{1}{2}\right)$; вижу $y - \frac{5}{4} \rightarrow$ордината точки $\bar{O}$ будет $\left(+\frac{5}{4}\right)$ ».

При этом методе сразу рассматривается построение графика квадратного трехчлена для общего случая.

Построение графиков в так называемых частных случаях осуществляется тем же приемом.

Требуется построить график следующей функции: $y = -0{,}5x^2 + 3$ (I) (рис. 21).

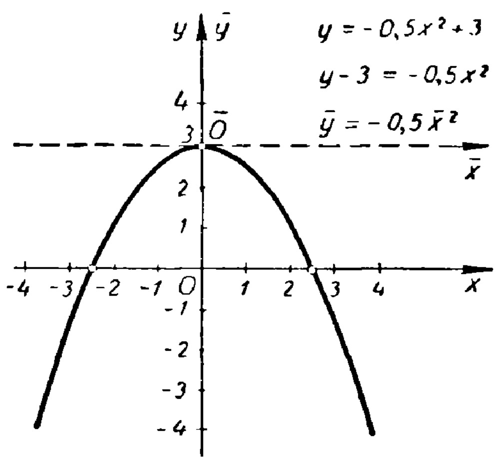


Рис. 21

Перепишем его так: $y - 3 = -0{,}5x^2$. (2)

Введем новые переменные: $y - 3 = \bar{y}$; $x = \bar{x}$. (3)

Перепишем уравнение (2): $\bar{y} = -0{,}5\bar{x}^2$. (4)

Строим основную систему координат XOY.

Строим точку $\overline{O}$ $(y - 3 = 0;\ x = 0)$ или $\overline{O}$ $(y = 3;\ x = 0)$.

Строим вспомогательную систему координат $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$, в которой строим параболу по формуле (4).

Рассмотрим еще один частный случай.

Пусть требуется построить график функции: $y = \overline{x}^2 - 5x + 6{,}25$ (I) (рис. 22)

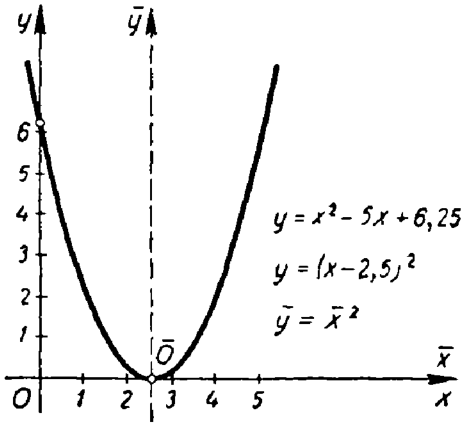


Рис. 22

Преобразуем уравнение $y = (x - 2{,}5)^2$. (II)

Введем новые переменные: $x - 2{,}5 = \overline{X}$; $y = \overline{Y}$. (III)

Тогда уравнение (II) перепишется так: $\overline{y} = \overline{x}^2$. (IV)

Построение графика функции (I) осуществляем следующим образом:

Сначала строим основную систему координат XOY; затем находим по (IV) координаты точки $\overline{O}$:

$$\begin{cases} x - 2{,}5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{или } \overline{O}\,(x = 2{,}5;\ y = 0)$$

В системе $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$ строим график функции $\overline{y} = \overline{x}^2$. (IV)

Изложенный способ построения графика имеет следующие преимущества перед традиционным:

а) При пользовании этим способом отпадает необходимость пользоваться сравнением табличных значений двух функций, то есть нестрогим и потому мало убедительным индуктивным приемом; для этого способа характерна *доказательность* рассуждений: достаточно научиться строить график функций, заданных нормальным (каноническим) уравнением, чтобы затем уметь строить смещенные графики функций, данных общим уравнением.

б) Описанный способ обладает *общностью*: однажды рассмотренный, он по аналогии переносится на случай построения графиков любых других элементарных функций, рассматриваемых в школе.

в) Пусть квадратный трехчлен записан в форме $y = 2(x+3)^2 + 4$. Если строить график этой функции общепринятым сейчас способом, то мы должны в соответствии с числом $+4$ перенести график $y = 2x^2$ (по оси координат) *вверх* на четыре единицы, а затем в соответствии с числом $+3$ перенести график еще раз *влево* на 3 единицы.

Таким образом, со знаком *плюс* ассоциируются два направления: *вверх* и *влево*; второй перенос вступает в психологическом плане в *противоречие* с обычными представлениями: ведь левее располагаются на числовой оси числа, имеющие *меньшую* величину, и потому направление *влево* не связывается со знаком *плюс*. Из-за этого противоречия ученикам трудно бывает запомнить правила переноса графика и зачастую ошибки при построении графиков допускаются *именно* поэтому даже учениками старших классов.

В предлагаемой методике построения графиков этот недочет преодолен: положение начала вспомогательной системы координат определяется посредством решения уравнений, в которых правые части приравнены нулю, то есть единым приемом. После этого проявляются единообразные ассоциации: со знаком (+) связан перенос осей координат *вправо* и *вверх*, со знаком (—) связан перенос их влево и *вниз*.

г) Аналитическая сторона предлагаемого способа сводится к замене переменных. Замена переменных является одним из важнейших математических методов. Он известен ученикам уже из курса алгебры VII класса (таким приемом решаются некоторые системы уравнений). С заменой переменных связано геометрическое преобразование — параллельный перенос осей координат, которое широко используется в геометрии.

д) В рассматриваемом способе построения графика используется перенос осей координат — *прямых* линий, что осуществляется гораздо проще, чем перенос *кривых* при традиционном способе построения.

е) Построение смещенных парабол при существующем способе связано с серьезными практическими трудностями: например, невозможно при этом пользоваться осью симметрии графика и поэтому нахождение двух симметричных опорных точек требует раздельного вычисления координат этих точек; при пользовании вспомогательной системой координат используется симметрия графика и поэтому вычислительная работа сводится к минимуму; при этом удается также широко пользоваться шаблонами.

ж) При существующем индуктивном методе обучения построению графика тратится много времени на подготовительные этапы (частные случаи); на построение графика общего вида остается мало времени.

В частности, этим, видимо, и объясняется то, почему в современных учебниках и методических пособиях ограничиваются графическим решением систем уравнений, соответствующих *только простейшим* положениям кривых относительно осей координат.

При пользовании методом переноса осей координат удается решать графически более сложные упражнения, так как основной материал удается пройти за меньшее время.

17. Пропедевтика приема преобразования координат

В связи со сказанным выше в плане пропедевтики метода переноса осей полезно решать две взаимно обратные задачи.

1. Прямая задача. Дана система координат XOY. Построить вспомогательную систему координат $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$, зная координаты точки $\bar{O}$ $\left(x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{5}{4}\right)$ (рис. 20).

Решение. Переносим ось ординат OY *влево* на $\frac{1}{2}$ единицы, а ось абсцисс OX *вверх* на $\frac{5}{4}$ единицы.

Перенесенные оси в новом положении образуют систему координат $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$.

При решении таких задач вместо обычных оборотов речи *восставим перпендикуляры* или *проводим прямую, параллельную такой-то оси*, и т. п. следует намеренно пользоваться терминами *переносим ось абсцисс (ординат) на столько-то единиц.*

Решая такие задачи, учащиеся замечают, что знаки координат точки $\bar{O}$, начала вспомогательной системы координат $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$, *совпадают* с направлениями переноса осей основной системы координат XOY: минус → вниз; влево; плюс → вверх, вправо.

2. *Обратная задача.* Дана вспомогательная система координат $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$. Координаты точки $\bar{O}$ в основной системе координат XOY *должны быть* следующие: $X = -\frac{1}{2}$ $Y = \frac{5}{4}$.

Построить основную систему координат XOY согласно этому условию.

Решение. Точка $\bar{O}$ находится на расстоянии $\frac{1}{2}$ единицы *левее* оси ординат OY $(x = -\frac{1}{2})$; значит, и наоборот: ось ординат OY находится *правее* точки $\bar{O}$ на расстоянии единицы.

Поэтому перенесем ось $\bar{O}\bar{Y}$ *вправо* на $\frac{1}{2}$ единицы.

Точка $\bar{O}$ находится на расстоянии в $\frac{5}{4}$ единицы *выше* оси абсцисс OX; следовательно, ось абсцисс OX находится *ниже* точки $\bar{O}$ на расстоянии $\frac{5}{4}$ единицы. Поэтому перенесем ось $\bar{O}\bar{X}$ *вниз* на $\frac{5}{4}$ единицы.

Перенесенные оси в новом положении образуют основную систему координат XOY.

(Ученики замечают, что при решении обратной задачи знаки координат точки $\bar{O}$ *противоположны* направлениям переноса осей.)

18. Исследование квадратного трехчлена

Овладение алгоритмом построения графика квадратного трехчлена методом переноса осей координат облегчает исследование квадратного трехчлена.

Так, например, определение координат точки $\bar{O}$ (начала вспомогательной системы $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$) относительно основной системы координат XOY означает в то же самое время и нахождение экстремума функции (наибольшего или наименьшего ее значения).

Вначале исследования трехчлена проводится по построенному графику в качестве необходимого элемента решения задачи по построению графика, в качестве завершающего этапа процесса решения.

Впоследствии, конечно, решаются задачи на исследование квадратного трехчлена и без *точного* построения самого графика.

Учащиеся должны помнить следующее двучленное суждение: если в квадратном трехчлене $y = ax^2 + bx + c$ коэффициент при первом члене $\frac{\text{положителен}}{\text{отрицателен}}$, то ветвь параболы направлена $\frac{\text{вверх}}{\text{вниз}}$, и соответственно функция имеет $\frac{\text{минимум}}{\text{максимум}}$.

Иначе говоря:

при $a > 0$ существует наименьшее значение функции ($y_{\min}$);
при $a < 0$ существует наибольшее значение функции ($y_{\max}$).

Пусть дана функция $y = 3x^2 + 3x + 2$. (I) (рис. 20).

Так как $a = 3 > 0$, то существует $y_{\min}$.

Дальше трехчлен преобразуем, как обычно, так:

$$y = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \qquad \text{(II)}$$

$$y - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \text{(III)}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = \bar{x} = 0 \\ y - \frac{5}{4} = \bar{y} = 0 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

$$\bar{O}\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

Итак, при $x = -\frac{1}{2}$ существует $y_{\min} = \frac{5}{4}$ (VI)

После достаточной тренировки ученики будут перерабатывать часть информации в уме и сразу от записи (III) и даже (II) переходить к записи (VI).

При исследовании квадратного трехчлена по его графику удобно воспользоваться сравнением положений графика в вспомогательной системе координат $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$ и в основной системе XOY.

Результаты сравнения удобно фиксировать параллельно (рис. 20):

$$Y = 3x^2 + 3x + 2$$

Таблица 11

	Система координат	
	вспомогательная $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$	основная $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$
Уравнение	$\overline{y} = 3\overline{x}^2$	$y - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
Функция монотонно убывает при	$\overline{x} < 0$	$x < -\frac{1}{2}$ $\left(x + \frac{1}{2} < 0;\ x < -\frac{1}{2}\right)$
Функция монотонно возрастает при	$0 < \overline{x}$	$-\frac{1}{2} < x$ $\left(x + \frac{1}{2} > 0;\ x > -\frac{1}{2}\right)$
Функция достигает минимума в точке с координатами (вершина параболы)	$\begin{cases} \overline{x} = 0 \\ \overline{y} = 0 \end{cases}$	$x = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} = 0;\ x = -\frac{1}{2}\right)$
Функция		$y = \frac{5}{4}\left(y - \frac{5}{4} = 0;\ y = \frac{5}{4}\right)$
	Не имеет максимума	Не имеет максимума
Функция не ограничена	Сверху	Сверху
Функция ограничена снизу	$\overline{y} > 0$	$y > \frac{5}{4}$
График функции симметричен относительно	Прямой $\overline{x} = 0$; (оси ординат $\overline{o}\overline{v}$)	Прямой $x = -\frac{1}{2}$
Функция	Четная $3\overline{x}^2 = 3(-\overline{x})^2$	Ни четная, ни нечетная

	Система координат	
	вспомогательная $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$	основная XOY
Значение функции стремится к $+\infty$	При $\overline{x}\to\infty$ При $\overline{x}\to-\infty$	При $x\to\infty$ При $x\to-\infty$
Значение функции	Стремится к 0 При $\overline{x}\to 0$	Стремится к $\frac{5}{4}$ при $x\to-\frac{1}{2}$
Область определения функции	$\overline{x}$ — любое действительное число	x — любое действительное число
Область значений функции	$\overline{y}>0$	$y>\frac{4}{5}$
Функция	Непериодическая	Непериодическая
Нули квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ (корни квадратного уравнения $x^2+bx+c=0$)	Отсутствуют	Отсутствуют

Здесь проведено исследование в наиболее общей форме, применимой в старших классах. В VIII классе достаточно ограничиться лишь простейшими из этих пунктов.

Изложенный выше метод построения графика функции переносом осей координат применим при построении графиков и других элементарных функций, данных в общем виде.

Рассмотрим несколько примеров.

Показательная функция

$$y=8\cdot 2^x+5$$
$$y=2^3\cdot 2^x+5$$
$$y-5=2^{x+3}$$
$$x-3=\overline{x}$$
$$y-5=\overline{y}$$
$$\overline{y}=2^{\overline{x}}$$

Логарифмическая функция

$$y=\log_2(x-3)+5$$
$$y-5=\log_2(x-3)$$
$$\begin{cases}x-3=\overline{x}\\ y-5=\overline{y}\end{cases}$$
$$\overline{y}=\log_2\overline{x}$$

Дальнейшее ясно.

Дробно-линейная функция	Тригонометрическая функция
$y = \frac{5x - 11}{x - 3}$	$y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$
$y = \frac{5(x-3)+4}{x-3}$	$y - 2 = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$y = 5 + \frac{4}{x-3}$	$\begin{cases} y - 2 = \bar{y} \\ x - \frac{\pi}{4} = \bar{x} \end{cases}$
$y - 5 = \frac{4}{x-3}$	$\bar{y} = \operatorname{tg}\bar{x}$
$\begin{cases} y - 5 = \bar{y} \\ x - 3 = \bar{x} \end{cases}$	
$\bar{y} = \frac{4}{\bar{x}}$	

Дальнейшие этапы построения графиков очевидны.

19. Об одновременном изучении уравнения и неравенства второй степени

В существующей практике обучения неравенства второй степени в средней школе изучают значительно позже уравнений второй степени[1].

Однако уравнения и неравенства второй степени возможно и целесообразно рассматривать одновременно на *основе графика квадратного трехчлена*. Здесь дидактически выгодно решать совместно два неравенства второй степени ($ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$) и соответствующее им квадратное уравнение ($ax^2 + bx + c = 0$), которые в совокупности характеризуют квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$.

Отметим также следующее обстоятельство: решение неравенства второй степени на основе графических представлений является более *общим* методом, чем аналитиче-

[1] Поучительно отметить, что в специальном психологическом эксперименте было обнаружено, что даже первоклассники способны усваивать одновременно понятия *равенство* и *неравенство* при одновременном изучении превращения одного в другое (см.: В. В. Давыдов, Опыт введения элементов алгебры в начальной школе, «Советская педагогика», 1962, № 8.)

ское решение его на основе сведе́ния к системе линейных неравенств.

Пусть, например, требуется решить неравенство $3x^2 + 3x + 2 > 0$. Попытаемся разложить левую часть на множители:

Разложить левую часть на множители невозможно, так как дискриминант уравнения $3x^2 + 3x + 2 = 0$ отрицателен; значит, решить это неравенство посредством системы линейных уравнений невозможно. (см. рис. 20).

Решение можно выполнить следующим рассуждением (качественно): дискриминант отрицателен → нет (действительных) корней → парабола не пересекает оси иксов; в квадратном трехчлене $y = 3x^2 + 3x + 2$ первый коэффициент положителен → ветвь параболы направлена вверх; если парабола не пересекает оси иксов и ветвь ее неограниченно уходит вверх, → то значения квадратного трехчлена всюду положительны (то есть вершина параболы будет выше оси абсцисс).

Итак, решением неравенств $3x^2 + 3x + 2 > 0$ является любое действительное число $(-\infty < x < \infty)$.

Целесообразно сразу обратить внимание на то, что соответствующее уравнение $3x^2 + 3x - 2 = 0$ и противоположное неравенство $3x^2 + 3x - 2 < 0$ не имеют решений, ибо все точки числовой оси выражают решения первого неравенства.

Решим еще одно неравенство:

$$-x^2 - 3x + 4 < 0 \qquad \text{(I)}$$

Заменим его равносильным неравенством:

$$x^2 + 3x - 4 > 0$$

Составим соответствующий квадратный трехчлен

$$y = x^2 + 3x - 4$$

$a > 0$; значит, ветвь параболы направлена вверх.

Решаем соответствующее квадратное уравнение:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -4$$

Строим схематически параболу, проходящую через эти две точки, с ветвью, направленной вверх (со временем ученики приучаются довольно легко представлять в воображении соответствующую кривую) (рис. 23).

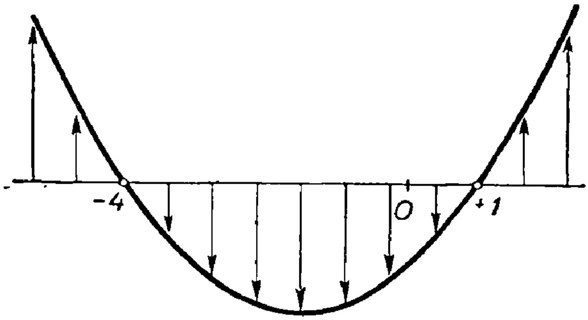


Рис. 23

Итак, $y = x^2 + 3x - 4 > 0$ при $-\infty < x < -4$ и $1 < x < +\infty$ или $-x^2 - 3x + 4 < 0$ при $-4 < x < 1$.

После решения этого неравенства, как следствие, *автоматически* получаем решения противоположного неравенства.

$-x^2 - 3x + 4 > 0$; решением его будут оставшиеся промежутки числовой оси: пусть требуется решить графически неравенство $x^2 - x - 6 \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$

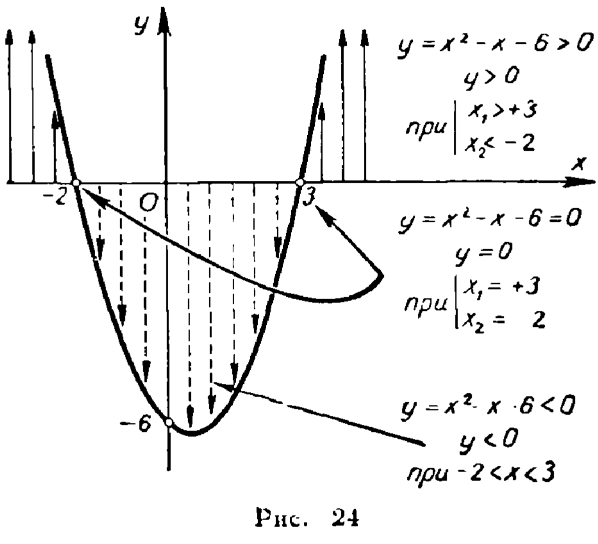


Рис. 24

Далее строим параболу $\overline{y} = \overline{x}^2$ в системе координат $\overline{X}\,\overline{O}\,\overline{Y}$, в которой вершина параболы совпадает с началом координат $O\left(x = \frac{1}{2};\quad y = -\frac{25}{4}\right)$.

Определяем корни уравнения по графику: $x_1 = +3$; $x_2 = -2$.

Определяем решения неравенства по графику (рис. 24).

$y = x^2 - x - 6 > 0$ при $x_1 > +3$, $x_2 < -2$,

$y = x^2 - x - 6 < 0$ на оставшемся интервале числовой оси, а именно на промежутке $-2 < x < +3$.

Решение (II способ)

Вместо совокупности неравенств и уравнения $x^2 - x - 6 \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} 0$ можно решить графически следующее задание: $x^2 \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} x + 6$.

Иначе говоря, строим параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 6$.

Тогда графическое решение сводится к выяснению взаимного расположения частей кривой и прямой (рис. 25).

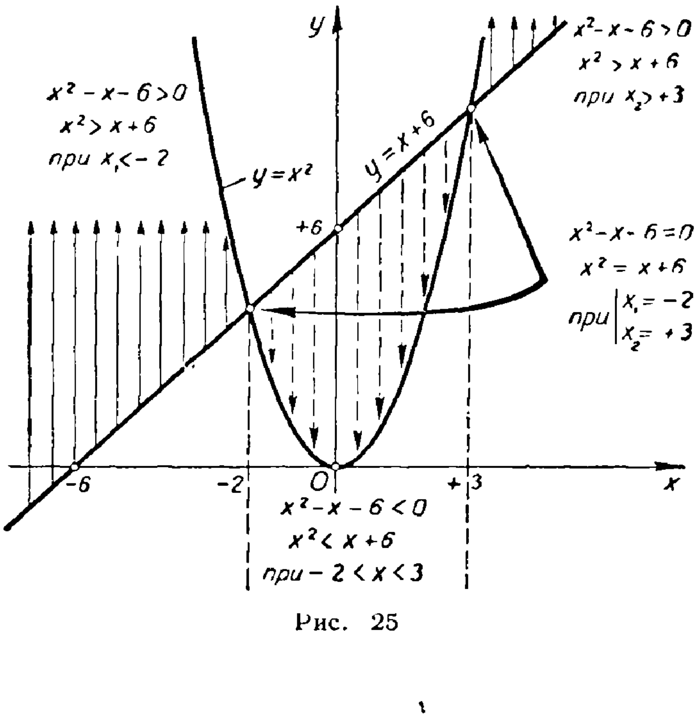


Рис. 25

Итак, на основе знаний о квадратном трехчлене и квадратном уравнении можно решить *любое* неравенство второй степени, *не обращаясь к системе линейных неравенств.*

Это позволяет объединить изучение неравенства второй степени с квадратным трехчленом в одной теме, что с психологической точки зрения не только целесообразно, но и необходимо, так как при этом достигается завершенность цикла системы упражнений и целостность восприятия.

20. О преобразованиях квадратных трехчленов и их графиков

При выполнении графических упражнений, содержащих квадратный трехчлен, полезно ознакомить учащихся с отражением графика относительно осей координат, то есть с построением графика, симметричного данному относительно оси, и соответствующим аналитическим преобразованием функции.

1. *Отражение от оси ординат*

Пусть дана функция $y = f(x)$. (I)

Если каждой точке A с координатами (a, b) функции (I) соответствует точка A_1 с координатами $(-a, b)$ функции (II), то вторая функция будет выражаться уравнением: $y = f(-x)$ (II). Графики функций (I) и (II) будут симметричны относительно оси ординат.

Пусть дан квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$. (Ia)

Чтобы получить уравнение функции (IIa), график которой симметричен графику функции (Ia) относительно оси ординат, надо в выражении (Ia) всюду вместо x записать $(-x)$; $y = a(-x)^2 + b(-x) + c$, или $y = ax^2 - bx + c$. (IIa)

На рисунке 26 показано построение графика функции $y = 2x^2 - 8x + 12$ и симметричного ему относительно оси OY графика функции $y = 2x^2 + 8x + 12$ — отражением первого графика от оси ординат.

2. *Отражение от оси абсцисс*

Пусть дана функция $y = \varphi(x)$. (III)

Если каждой точке B с координатами (a, b) первой функции (III) соответствует точка B_1 функции (IV) с координатами $(a, -b)$, то функция (IV) будет выражаться уравнением $-y = \varphi(x)$ или $y = -\varphi(x)$. (IV)

Графики функций (III) и (IV) будут симметричны относительно оси абсцисс.

Пусть дан квадратный трехчлен: $y = ax^2 + bx + c$. (III a)

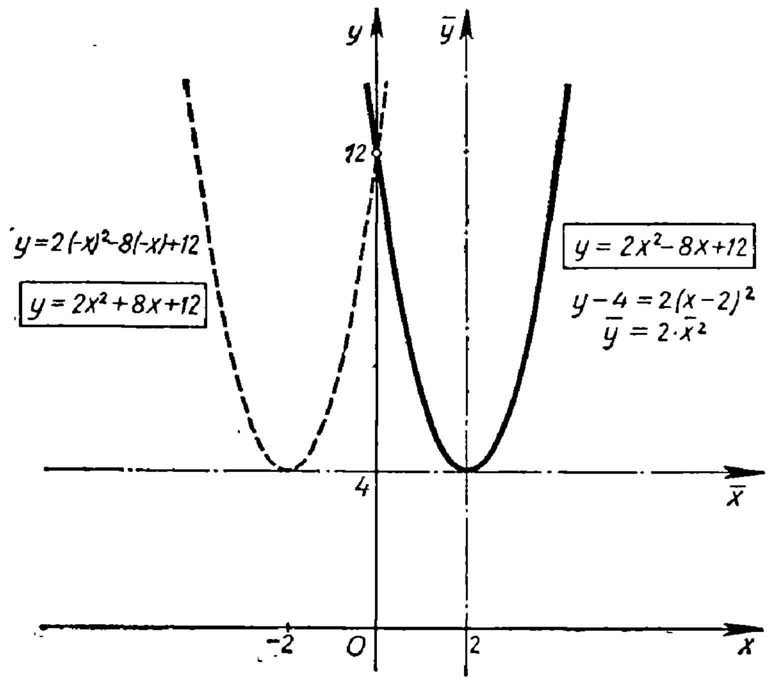


Рис. 26

Чтобы получить уравнение функции (IV a), график которой симметричен графику функции (IIIa) относительно оси абсцисс, надо в выражении (IIIa) число (y) заменить числом $(-y)$:

$$-y = ax^2 + bx + c, \text{ или } y = -ax^2 - bx - c. \quad \text{(IV a)}$$

На рисунке 27 показано построение графика функции $y = 2x^2 + 4x - 1$ и симметричного ему относительно оси OX графика функции $y = -2x^2 - 4x + 1$.

Такие же преобразования полезно выполнять и с линейной функцией: графики функций $y = 2x - 6$ и $y = -2x - 6$ будут симметричны относительно оси OY, а графики функций $y = 2x - 6$ и $y = -2x + 6$ будут симметричны относительно оси OX (рис. 28).

Отметим, что рассмотренные преобразования функций могут быть использованы при упражнениях и с другими функциями, например:

а) пары функций, графики которых симметричны относительно оси OY:

$$y = 2^x \text{ и } y = 2^{-x};\ y = \sin x \text{ и } y = \sin(-x) = -\sin x;$$

$$y = \log_3 x \text{ и } y = \log_3(-x);\ y = \frac{4}{x} \text{ и } y = -\frac{4}{x} \text{ и т. п.;}$$

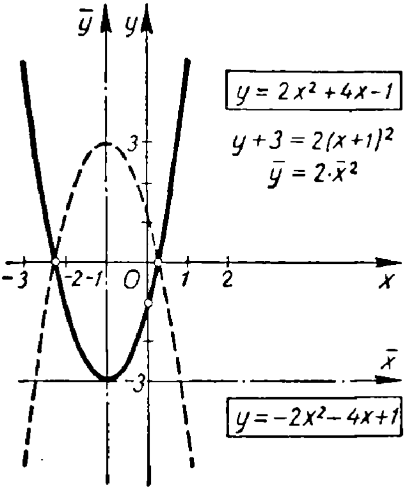


Рис. 27

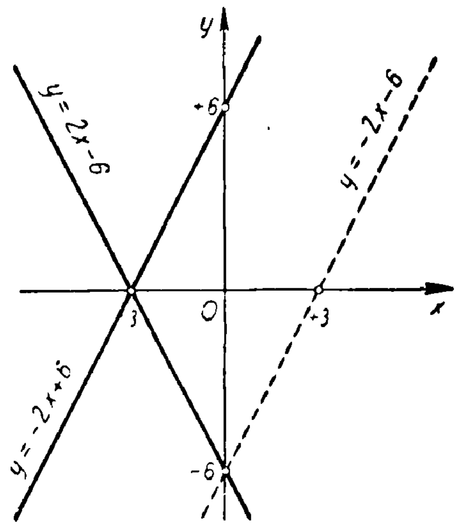


Рис. 28

б) пары функций, графики которых симметричны относительно оси OX:

$$y = 2^x \text{ и } y = -2^x;\ y = \operatorname{tg} x \text{ и } y = -\operatorname{tg} x$$

$$y = \log_3 x \text{ и } y = -\log_3 x;\ y = x^3 \text{ и } y = -x^3 \text{ и т. п.}$$

Если построен график исходной функции, то для построения симметричного ему графика достаточно перегнуть чертеж вдоль той или иной оси координат и скопировать линию с одной половины листа на другую.

21. О введении понятия *обратная функция*

Своевременное введение понятия *обратная функция* позволяет расширить комплекс упражнений новыми разновидностями их, что значительно содействует математическому развитию учащихся.

Вводим следующее определение.

Две функции называются взаимно обратными, если каждой точке A (a, b) графика первой функции соответствует точка A_1 $(b; a)$ графика второй функции.

Согласно введенному определению, по данному уравнению прямой функции составляется уравнение обратной функции следующим образом:

1. Дана прямая функция $y = f(x)$. (I)

2. Производим замену ролями неизвестных и получаем выражение $x = f(y)$. (II)

Если исходить из того, что y — является функцией, а x — аргументом, то выражение (II) представляет обратную функцию в *неявной* форме.

3. Решив уравнение (II) относительно y (при необходимости введя новый символ), мы получим уравнение, выражающее обратную функцию в *явной* форме:

$$y = \varphi(x)$$

Приведем примеры.

Таблица 12

Прямая функция	Обратная функция в неявной форме	Обратная функция в явной форме
$y = ax + b$	$x = ay + b$	$y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
$y = x^3$	$x = y^3$	$y = \sqrt[3]{x}$, или $y = x^{\frac{1}{3}}$
$y = a^x$	$x = a^y$	$y = \log_a x$
$y = \cos x$	$x = \cos y$	$y = \arccos x$

Докажем основную теорему о свойстве взаимно обратных функций.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис.29).

Доказательство

Согласно определению взаимно обратных функций, для каждой точки A (a, b) первой функции существует точка A_1 (b, a) второй функции.

Поэтому достаточно доказать, что *каждая* такая пара точек A и A_1 симметрична относительно биссектрисы I и

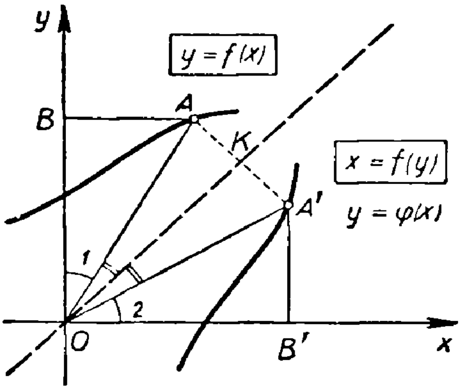


Рис. 29

III координатных углов (то есть относительно прямой OK).

Пусть точка A первой функции имеет координаты: $x = BA = a$; $y = OB = b$.

Построим соответствующую ей точку второй функции с координатами $x_1 = OB = OB' = b$ и $y_1 = BA = B'A' = a$.

$\triangle OBA = \triangle OB'A'$ как прямоугольные треугольники с равными катетами; значит, $\angle 1 = \angle 2$; $OA = OA'$.

По построению $\angle YOK = \angle XOK = 45°$; отняв от них по равному углу $\angle 1 = \angle 2$, имеем: $\angle KOA = \angle KOA'$.

Стало быть, OK есть биссектриса угла при вершине равнобедренного $\triangle AOA'$, иначе говоря, точки A и A' симметричны относительно прямой OK, что и требовалось доказать.

(Если точка A берется в других координатных углах, доказательство ведется аналогично.)

Таким образом, если *построен* график прямой функции, то график обратной функции получается посредством отражения графика прямой функции от биссектрисы первого координатного угла (для чего достаточно перегнуть чертеж по этой биссектрисе и скопировать линию с одной половины листа на другую).

График обратной функции удобно строить на том же чертеже, что и график прямой функции; таблицу координат точек удобно строить при этом *одну* для обеих функций, но с двумя входами.

Пусть, например, строятся графики двух взаимно обратных функций $y = x^2$ и $y = \pm\sqrt{x}$ (рис. 30).

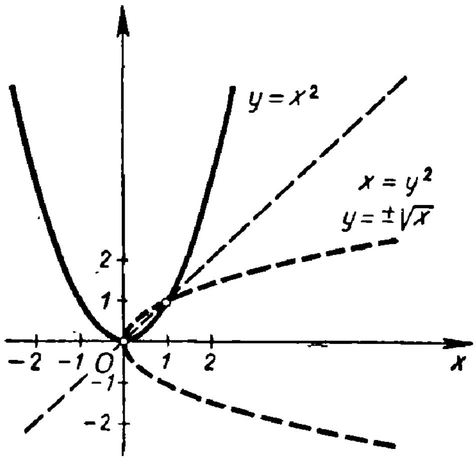


Рис. 30

Общая таблица координат точек для построения этих графиков будет выглядеть так:

Таблица 13

Прямая функция						
x	± 2	$\pm\frac{3}{2}$	± 1	$\pm\frac{1}{2}$	0	$y=\pm\sqrt{x}$
$y = x^2$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	x
						Обратная функция

Для построения графиков взаимно обратных функций $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ (рис. 31) составляется следующая таблица.

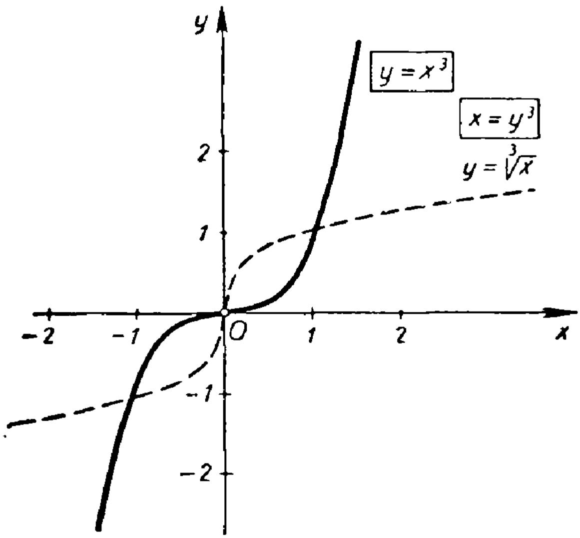


Рис. 31

Таблица 14

Прямая функция	→							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$y = x^{\frac{1}{3}}$
$y = x^3$	-27	-8	-1	0	1	8	27	x
	←							Обратная функция

Понятие *обратная функция* может быть введено уже при изучении линейной функции, так как основная теорема о свойствах взаимно обратных функций доказывается лишь на основе равенства треугольников.

Пусть построена прямая $y = 0,5\,x - 2$. (I)

Составим уравнение обратной функции в два этапа:

1) поменяем в уравнении (I) местами переменные x и y: $x = 0{,}5\ y - 2$. (II)

2) Решим уравнение (II) относительно Y: $y = 2x + 4$. (III)

Уравнения (I) и (III) выражают взаимно обратные линейные функции; их графики изображены на рисунке 32.

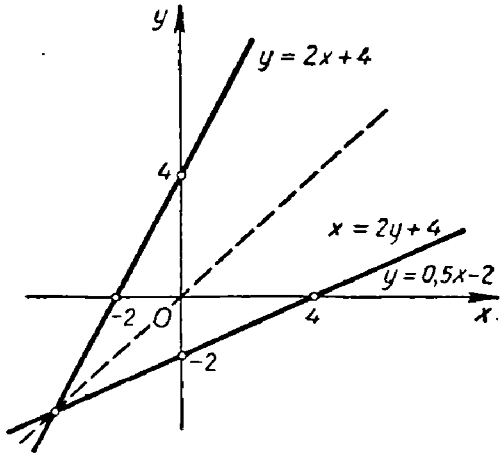


Рис. 32

Точка пересечения прямых (I) и (III) дает решение симметричной системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 0{,}5x - 2 \\ x = 0{,}5y - 2 \end{cases}$$ Решение. $x_1 = -4$; $y_1 = -4$.

Пусть дана функция $y = \frac{1}{2}x^2$. (I)

Составим обратную функцию, для чего:

1. Напишем сначала уравнение обратной функции в неявной форме: $x = \frac{1}{2}y^2$. (II)

2. Решим уравнение (II) относительно y: $y = \pm\sqrt{2x}$. (III)

Функции (I) и (III) являются взаимно обратными; их графиками являются параболы, симметричные друг другу относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 33).

Точки пересечения графиков (I) и (III) дают решения симметрической системы уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} x^2 \\ x = \frac{1}{2} y^2 \end{cases} \quad \text{Решение} \quad \begin{cases} x_1 = 0; \quad y_1 = 0 \\ x_2 = 2; \quad y_2 = 2 \end{cases}$$

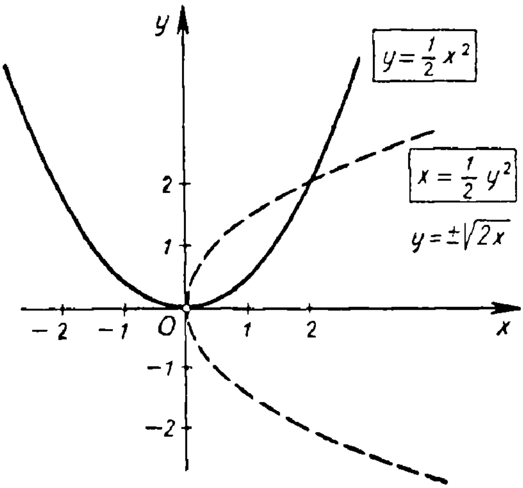


Рис. 33

Рассмотрим общий случай.

$$y = 2x^2 + 4x - 1 \qquad \text{(I) или}$$

$$y + 3 = 2(x + 1)^2 \qquad \text{(I a)}$$

Составим уравнение обратной функции, для чего:

1. Напишем его уравнение в неявной форме

$$x = 2y^2 + 4y - 1 \qquad \text{(II) или}$$

$$x + 3 = 2(y + 1)^2 \qquad \text{(II a)}$$

2. Решим уравнение (II) относительно y (для чего предварительно уравнение (II) преобразуем к виду (IIa).

Далее имеем последовательно:

$$\frac{x + 3}{2} = (y + 1)^2 \qquad \text{(II б)}$$

$$y+1=\pm\sqrt{\frac{x+3}{2}} \qquad \text{(II в)}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1 \qquad \text{(II г)}$$

Таким образом, уравнения (I) и (IIг) являются взаимно обратными функциями, выраженными в явной форме.

Чтобы построить график (IIг), достаточно отразить график функции (I) от биссектрисы первого координатного угла (рис. 34).

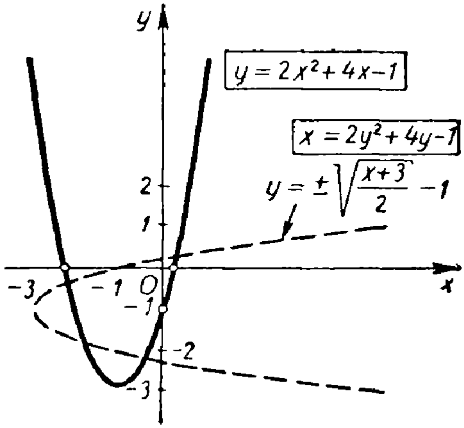


Рис. 34

Точки пересечения двух парабол дают решения симметрической системы уравнений второй степени

$$\begin{cases} y=2x^2+4x-1 \\ x=2y^2+4y-1 \end{cases}$$

Так как такие системы разрешаются аналитически, то решения, полученные графически, могут быть *проверены* аналитическим решением.

22. Составление уравнений парабол

Нередко в школе изучение графиков квадратного трехчлена сводят в основном к построению графиков по точкам, координаты которых вычисляются по заданному уравнению.

Но для развития логического мышления учеников весьма полезно сочетать упражнения на построение графиков по заданным уравнениям со структурно обратными упражнениями (по составлению уравнений, удовлетворяющих определенным условиям).

Рассмотрим некоторые разновидности таких упражнений.

1. *Составить уравнение параболы* $y = mx^2 + nx + \kappa$, *проходящей через точки* (2, 3), (4, 3) и (3, 5).

Если мы подставим координаты трех точек в соответствующее параметрическое уравнение, то получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными относительно искомых параметров. Получается следующая система:

$$\begin{cases} 3 = m\cdot 4 + n\cdot 2 + k \\ 3 = m\cdot 16 + n\cdot 4 + k \\ 5 = m\cdot 9 + n\cdot 3 + k \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $m = -2$; $n = 12$, $k = -13$.

Искомое уравнение: $y = -2x^2 + 12x - 13$.

2. *Парабола, симметричная относительно оси* y, *проходит через точки* A (2, 1), B (5, 3). *Найти уравнение кривой.*

Решение проверить.

Это же задание в более легкой формулировке выглядит так: *Парабола* $y = ax^2 + b$ *проходит через точки* A (2, 1), B (5, 3). *Найти ее уравнение.*

Решение

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + b \\ \\ y_2 = ax_2^2 + b \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = a\cdot 4 + b \\ \\ 3 = a\cdot 25 + b \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = \dfrac{2}{21} \\ \\ b = \dfrac{13}{21} \end{matrix}$$

Итак, искомое уравнение следующее:

$$y = \frac{2}{21}x^2 + \frac{13}{21}$$

3. *Найти уравнение параболы* $y = ax^2$, *проходящей через точку* $(-3, 3)$

Решение. Подставим в уравнение параболы значения $x = -3$, $y = 3$.

Получим: $3 = a(-3)^2$; $a = \frac{1}{3}$.

Искомое уравнение: $y = \frac{1}{3}x^2$.

В предыдущих упражнениях на составление функций мы рассматривали лишь *аналитическую* сторону вопроса. Во многих случаях целесообразно не ограничиваться составлением уравнения, а завершать упражнение построением графика полученной функции.

Полезно изредка предлагать составить систему уравнений второй степени, используя в условии задания *геометрические* термины.

4. *Написать уравнения параболы* $ax^2 + y = b$ *и прямой* $cx + y = d$, *пересекающихся в точках* A (3, 4) и B(— 4, 5)

Решение

Требуется составить систему уравнений $\begin{cases} ax^2 + y = b \\ cx + y = d, \end{cases}$

имеющую решения $x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $x_2 = -4$, $y_2 = 5$

Выполнение упражнения сводится к определению коэффициентов a и b первого уравнения по двум ее корням:

$$\begin{cases} a \cdot 9 + 4 = b \\ a \cdot 16 + 5 = b \end{cases}$$

и коэффициентов c и d второго уравнения по тем же двум ее корням:

$$\begin{cases} c \cdot 3 + 4 = d \\ c \cdot (-4) + 5 = d \end{cases}$$

Искомая система:

$$\begin{cases} x^2 - 7y = -19 \\ x + 7y = 31 \end{cases}$$

Найденная система проверяется подстановкой в нее корней, либо решается графически.

23. Составление уравнений, удовлетворяющих заданным графикам

Большинство упражнений, связанных с графиками функций, обычно сводится к построению графика функции по заданному уравнению.

Полезно иногда это упражнение преобразовать в обратное, предлагая по заданному *графику* функции составить ее уравнение, иначе говоря, перейти от графического задания функции к аналитическому заданию.

Пусть дан график некоторой функции на рисунке 35. Требуется определить уравнение этой функции.

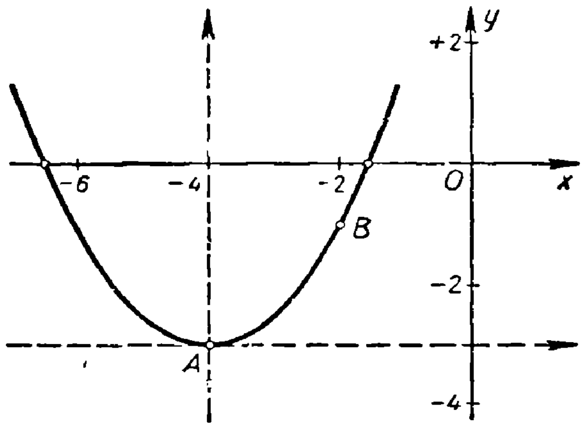


Рис. 35

Чтобы решить эту задачу, ученик сначала определяет (предположительно) *вид кривой* (параболы); далее записывает уравнение параболы в *общем виде*: $y = ax^2 + bx + c$ (I); для определения коэффициентов a, b, c необходимо решить систему трех уравнений первой степени, получаемую при подстановке в (I) координат каких-либо трех точек.

Однако проще поступить так: напишем уравнение параболы в таком виде:

$$y + k = a(x + p)^2 \qquad \text{(II)}$$

Координаты вершины параболы мы можем определить по графику: $A\,(-4, -3)$.

Отсюда имеем: $p = +4$, $k = +3$.

Подставив эти значения в уравнение (II), имеем:

$$y + 3 = a(x + 4)^2.$$

Для определения коэффициента a достаточно подставить координаты еще одной точки параболы (отличающейся от вершины параболы).

По графику выбираем, скажем, точку $B\,(-2,\ -1)$ и подставим ее координаты в уравнение (II);

$$-1+3=a(-2+4)^2$$

$$2+a\cdot 4 \quad a=\frac{1}{2}.$$

Имеем уравнение: $y+3=\frac{1}{2}(x+4)^2$.

Раскрыв скобки, имеем: $y=0{,}5x^2+4x-5$ $(a=0{,}5;\ b=4;\ c=\ -5)$.

Таким образом, вместо трех точек мы обошлись двумя точками: вершина параболы является как бы *двойной* точкой для уравнения (I).

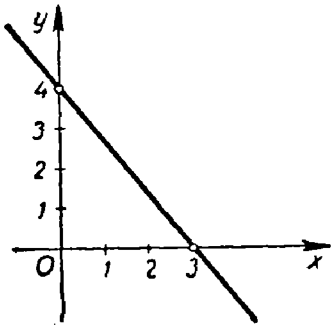


Рис. 36

4. *На рисунке 36 изображена прямая. Найти ее уравнение.*

Решение

Напишем уравнение прямой в общем виде: $ax+by+c=0$. (VI)

Определим по графику координаты двух точек прямой и подставим в уравнение (VI); в качестве этих точек удобнее взять точки пересечения прямой с осями координат: $A\,(0;\ 4)$ и $B\,(3;\ 0)$.

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 4=c \\ a\cdot 3+b\cdot 0=0 \end{cases}$$

Откуда находим: $b=\frac{c}{4}$; $a=\frac{c}{3}$.

Подставим эти значения в (VI): $\frac{cx}{3}+\frac{cy}{4}+c=0$.

Разделив обе части уравнения на c, получим: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1=0$.

Искомое уравнение следующее:

$$4x+3y+12=0 \quad (a=4;\ b=3;\ c=12).$$

24. Геометрическое построение графиков элементарных функций

Построение графиков функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = a^x$ чаще всего выполняют *только аналитически*, то есть положения опорных точек на координатной плоскости определяют по *вычисленным* координатам. (В то же время графики основных тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ обычно строят *геометрически*.)

Между тем *геометрическое* построение графиков и геометрическое преобразование построенных графиков выполняется быстрее и точнее, чем с помощью вычислений.

Важно также учитывать большую познавательную ценность и политехническую направленность этих упражнений, развивающих навыки работы с чертежными инструментами.

Геометрически можно строить графики всех основных функций, изучаемых в школе: $y = x^2$, $y = \frac{a}{x}$; $y = x^3$; $y = a^x$ (графики обратных им функций $y = \pm x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = \log x$ строятся отражением графиков прямых функций от биссектрисы первого координатного угла).

Выполнение этих упражнений основано на построении четвертого пропорционального отрезка к трем данным отрезкам; поэтому этот материал хорошо связать и с изучением геометрии.

Приводимый ниже материал в основном может быть использован на уроках алгебры при изучении соответствующих функций, часть материала может быть дана в качестве иллюстрации алгебраического метода решения геометрических задач (например, построение парабол).

В статье У. С. Давыдова «О графических методах в алгебре» («Математика в школе», 1956, № 6) дается иное построение параболы, чем предлагаемое нами; недостатком способа У. С. Давыдова является то, что для построения каждой точки параболы приходится строить *пары параллельных* прямых, направления которых не совпадают с линиями координатной сетки.

В предлагаемом ниже способе построения параболы, как и вообще во всех построениях, рассматриваемых в данном параграфе, мы обходимся всегда только осями координат (или линиями, параллельными им); кроме того, проводим отдельные прямые, проходящие через две определенных точки плоскости.

В статье Н. А. Курицына «О построении графика квадратной функции» (журнал «Математика в школе», 1959, № 6) описывается способ построения параболы с помощью угольника.

Мы же обходимся в большинстве описанных построений только одной линейкой (в предположении, что график строится на клетчатой или миллиметровой бумаге).

Построение графиков функции $y = x^2$ и $y = ax^2$

Пусть требуется построить геометрически график квадратичной функции $y = x^2$.

Иначе говоря, надо построить график произведения функций $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$, где $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = x$.

Последовательность построения любой точки параболы такова:

1. Сначала строим график прямой $y = x$ (рис. 37).

2. Построим прямую $1E$, параллельную оси ординат, на расстоянии в 1 единицу от начала координат (кроме определения таким образом единичного отрезка, больше никакие деления не откладываются на осях координат).

3. В произвольной точке A оси OX восставим перпендикуляр AA_1 до пересечения с прямой $y = x$ в точке A_1.

4. Точку A_1 проектируем на прямую $1E$ в точку A_2.

5. Проводим OA_2 до пересечения с прямой AA_1 в точке A_3.

Точка A_3 — искомая точка параболы с абсциссой $OA = x$.

В самом деле, $\triangle OA_2 1 \backsim \triangle OA_3A$, откуда следует: $\frac{O1}{1A_2} = \frac{OA}{AA_3}$, но $O1 = 1$.

$1A_2 = AA_1 = OA = x$. Значит,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{AA_3}; \; AA_3 = x^2, \text{ то есть } y = x^2.$$

Соединив плавной линией (лекалом) несколько точек параболы, полученных указанным образом, мы построим правую ветвь параболы; левую ее ветвь строим отражением правой ветви относительно оси OY. (На чертеже показано построение еще одной точки параболы B_3.)

Пусть требуется *построить параболу* $y = \frac{2}{3}x^2$.

Представим функцию $y = \frac{2}{3}x^2$ в виде произведения двух функций $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$, где $f_1(x) = \frac{2}{3}x$, $f_2(x) = x$.

Последовательность построения любой точки параболы $y = \frac{2}{3}x^2$ такова:

1. Сначала построим график прямой $y = \frac{2}{3}x$ (рис. 38).

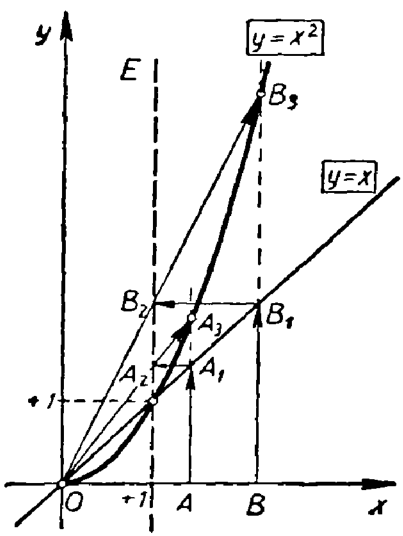


Рис. 37

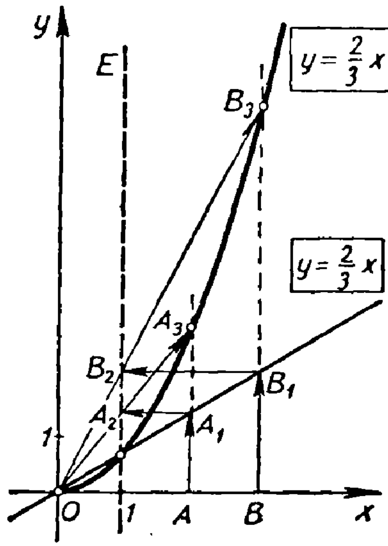


Рис. 38

Проводим $IE \parallel OY$ на расстоянии в 1 единицу от оси ординат.

2. В произвольной точке A оси OX восставим перпендикуляр AA_1 до пересечения с прямой $y = \frac{2}{3}x$ в точке A_1.

3. Точку A_1 проектируем на прямую IE в точку A_2.

4. Проводим OA_2 до пересечения с прямой AA_1 в точке A_3. Точка A_3 — искомая точка параболы с абсциссой $OA = x$.

Доказательство проводится так же, как и в предыдущей задаче.

Построение графиков функций $y = x^3$ и $y = ax^3$. Пусть требуется *построить график функции* $y = x^3$. Представим эту функцию как произведение двух функций:

$$y = f_1(x) \cdot f_2(x), \text{ где } f_1(x) = x^2 \text{ и } f_2(x) = x$$

Если построена парабола $y = x^2$, то дальнейшие построения проводятся в следующей последовательности (рис. 39).

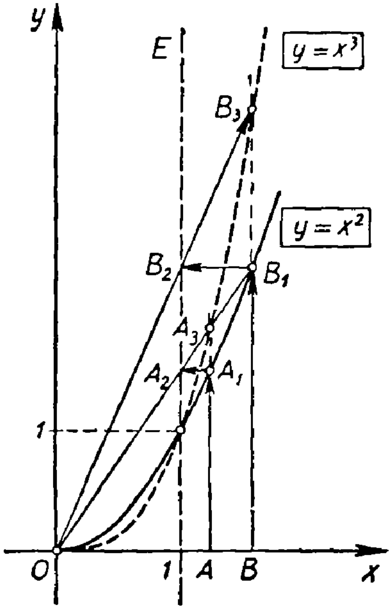


Рис. 39

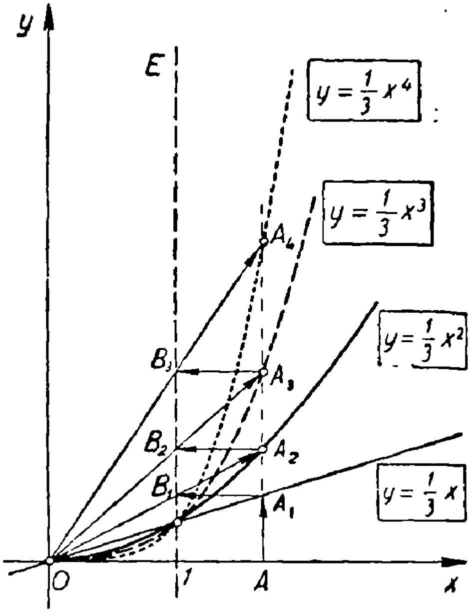


Рис. 40

1. Пусть $OA = x$; проведем $AA_1 \perp OX$ до пересечения в точке A_1 с параболой $y = x^2$.

2. Проводим $A_1A_2 \parallel OX$ до пересечения с прямой $1E$ в точке A_2.

3. Проводим OA_2 до пересечения с прямой AA_1 в точке A_3. Точка A_3 является точкой кубической параболы $y = x^3$ с абсциссой $x = OA$.

Существует иной способ построения графика функции $y = ax^3$ на основе только графика прямой $y = ax$.

Пусть требуется *построить график кубической параболы* $y = \frac{1}{3} x^3$ (рис. 40).

1. Сначала построим график прямой $y = \frac{1}{3}x$.

2. В произвольной точке A оси абсцисс восстановим к ней перпендикуляр: $AA_1 \perp OX$ до пересечения с прямой $y = \frac{1}{3}x$ в точке A_1.

3. Проведем $A_1B_1 \parallel OX$ до пересечения с прямой $1E$ в точке B_1. Точка $A_2 = OB_1 \times AA_1$ есть точка[1] параболы $y = \frac{1}{3}x^2$.

4. Проведем $A_2B_2 \parallel OX$ до пересечения с прямой $1E$ в точке B_2.

5. Точка $A_3 = OB_2 \times AA_1$ есть точка параболы $y = \frac{1}{3}x^3$ (при $OA = x$).

Легко далее видеть, что, продолжая эту операцию, можно в принципе строить графики степенных функций, показателем которых являются любые целые положительные числа: $y = ax^4$, $y = ax^5$, $y = ax^6$ и т. п.[2]

После небольшой практики в геометрическом построении ученики научаются находить точки графика (A_2, A_3 и т. д.) при помощи приложения линейки, не *проводя* вспомогательных прямых (если построения выполняются на бумаге с квадратной сеткой).

Например, для определения положения точки A_3 достаточно провести воображаемые прямые AA_1, A_1B_1, OB_1, A_2B_2, OB_2; причем прямые AA_1, A_1B_1, A_2B_2 совпадают с линиями координатной сетки, следовательно, линейка будет необходима лишь для *визирования* направлений OB_1, OB_2.

Построение графика функции $y = \frac{a}{x}$

Пусть требуется *построить график функции* $y = \frac{3}{x}$ (рис. 41).

Построим систему координат XOY; далее построим прямую $1E$ (параллельную оси абсцисс, на расстоянии от нее

---

[1] $\times$ — знак пересечения прямых.

[2] На этом основано геометрическое построение графика показательной и логарифмической функции; для построения графика $y = 2^x$ находим, например, построением последовательно точки $(1; 2^1)$; $(2; 2^2)$; $(3; 2^3)$; $(4; 2^4)$ и т. д.

в 1 единицу) и прямую MN (параллельную оси ординат, на расстоянии от нее в 3 единицы; $a = 3$).

Пусть мы желаем построить точку графика с абсциссой $x = OA$.

1. Проведем $AA_1 \parallel OX$.
2. Найдем точку $A_1 = AA_1 \times 1E$.
3. Найдем далее точку $A_2 = OA_1 \times MN$.
4. Проведем $A_2A_3 \parallel OX$.

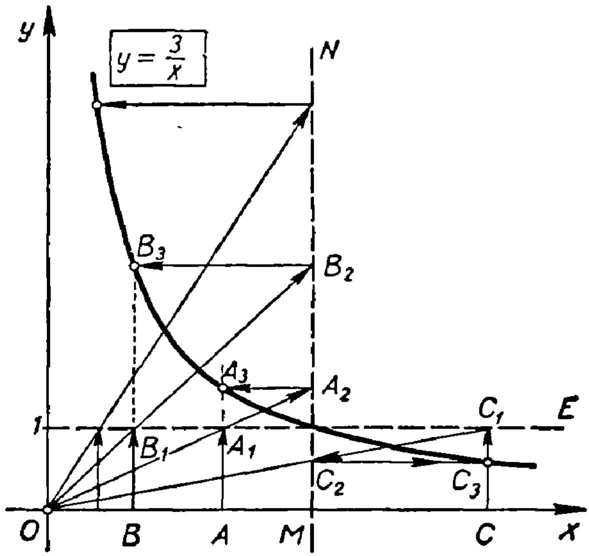


Рис. 41

Точка $A_3 = A_2A_3 \times AA_1$ является точкой гиперболы $y = \frac{3}{x}$ с абсциссой $x = OA$.

В самом деле: $\triangle OAA_1 \backsim \triangle OMA_2$; откуда имеем: $\frac{AA_1}{A_2M} = \frac{OA}{OM}$; $\frac{1}{x} = \frac{A_2M}{3}$; $A_2M = \frac{3}{x}$, что и требовалось доказать. На чертеже дано еще построение точек гиперболы B_3C_3 соответственно с абсциссой $x = OB$, $x = OC$.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

1. О недостатках в методике решения задач

В литературе, посвященной методике обучения решению задач, часто встречается недочет, связанный с тем, что четко не различают понятия: задача и уравнение (посредством которого эта задача решается); корень уравнения и ответ к задаче[1].

Приведем характерный пример.

В книге проф. В. Л. Гончарова «Начальная алгебра» (изд. АПН РСФСР, 1955, стр. 147) приводится проверка решения следующей задачи:

«Я задумал число. Отнял от него 28, остаток разделил на 3, потом прибавил 120 и полученную сумму умножил на 20. Получился результат 10 000. Какое число я задумал?»

Уравнение: $20\left(\frac{x-28}{3}+120\right)=10\,000.$

Ответ. $x = 1168.$

Проверка по уравнению:

$$20\left(\frac{1168-28}{3}+120\right)=10\,000.$$

Проверка по условию задачи.

Я задумал число 1168. Отняв 28, получил 1140. Разделив на 3, получил 380. Прибавив 120, получил 500. Умножив на 20, получил в результате 10 000».

В этой задаче не видно своеобразия *двух форм* проверки. В изложении автора и та и другая форма одинаково возможны для проверки решения задачи. В действительности они логически далеко неравноценны. Отсутствие четкого выделения вопроса о проверке решения именно *задачи* — есть одна из причин часто встречающейся в практике обучения подмены проверки решения задачи проверкой решения *уравнения*.

---

[1]Для краткости изложения в данной главе мы рассматриваем несложные по числовым данным задачи.

Для учителя не составит труда самостоятельно конструировать аналогичные задачи, используя последние показатели экономики нашего хозяйства, местный материал и т. п.

Такой нестрогий подход к проверке решения задачи далеко не единичен среди методистов.

П. А. Буданцев и Г. М. Щипакин[1] также не разграничивают проверку решения уравнения и проверку решения задачи. Разбирая процесс *решения задачи* методом составления уравнений, они называют этот этап «проверкой найденных *решений уравнения*» и помещают его между *решением уравнения* и записью ответа к задаче.

Такая практика не содействует пониманию того, что *корень* имеет отношение *к уравнению*, а условию задачи должен соответствовать ответ задачи.

Правильным представляется такой подход, когда при решении задачи должна идти речь *прежде всего о задаче, о соответствии ответа условию задачи*; уравнение здесь должно выступать как вспомогательный аппарат для решения основного вопроса, подобно тому как при решении примера с алгебраическими дробями вспомогательным аппаратом служат тождественные преобразования многочленов.

Проверка ответа к задаче включает в себя и проверку корня уравнения, ибо правильный ответ возможен лишь при правильно составленном и правильно решенном уравнении; обратное же неверно, так как при *правильно решенном* (но неправильно составленном!) уравнении *ответ* к задаче уже будет *неверен*. Значит, проверка по уравнению не может быть равноценна проверке по условиям задачи и потому неправомерно вести речь об этих способах, как о равновозможных. С указанным недочетом связан и второй недочет, который заключается в преждевременной проверке решения, когда ее осуществляют сразу же после решения уравнения, еще до получения ответа к задаче.

Таково, например, изложение вопроса в книге Т. Н. Денисовой и В. С. Георгиевской «Планы уроков по алгебре в VII классе».

Приведем это место:

«Два завода должны были выпустить по плану 360 станков в месяц. Первый завод выполнил план на 112%, а второй — на 110%, и поэтому оба завода выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод отдельно?»

Уравнение. $1{,}1\,(360 - x) - 1{,}12x = 400;$

$$x = 200.$$

[1] П. А. Буданцев и Г. М. Щипакин, Квадратные и иррациональные уравнения, Учпедгиз, М., 1956, стр. 41.

«П р о в е р к а. По плану первый завод должен выпустить 200 станков, а второй 360 — 200 = 160 (станков). В действительности первый завод выполнил план на 112% и выпустил 200 · 1,12 =224 (станка), а второй завод выполнил план на 110% и выпустил 160 · 1,1 = 176 (станков). *Всего за месяц они выпустили 224 + 176 = 400 станков, что соответствует условию задачи.* Первый завод сверх плана выпустил 224 — 200 = 24 (станка), а второй завод сверх плана выпустил 176 — 160 = 16 (станков).

О т в е т. Первый завод сверх плана выпустил 24 станка. Второй завод сверх плана выпустил 16 станков».

Таким образом, под рубрикой «Проверка» здесь излагается решение самой задачи, ибо числа 24 и 16, представляющие ответ к задаче, получены в конце этапа *проверки* и не были известны до нее. (Здесь к проверке относится лишь одна подчеркнутая нами фраза о выпуске 400 станков в месяц; если опустить эту фразу, то останется продолжение решения задачи, а не проверка ответа).

Такое чередование этапов решения и проверки ответа не оправдано ни логически, ни методически, ибо проверка означает, прежде всего, *проверку найденного ответа.* А если речь идет о проверке решения задачи, пока ответ на вопрос задачи не получен (пусть пока и в плане вероятности), то, собственно, и проверять-то нечего!

В связи с этим представляется целесообразным употреблять вместо термина *проверка решения* термин *проверка ответа.*

В решении рассматриваемой выше задачи проверка начинается сразу после получения *корня* уравнения, и дальше следует фактически *не проверка ответа к задаче, а проверка корня уравнения*; последовательность действий 360 — — 200 = 160; 160 · 1,1 = 176; 200 · 1,12 = 224; 224 + + 176 = 400 показывает, что вся проверка ограничена рамками соотношений решенного уравнения:

$$1{,}1\,(360 - x) + 1{,}12x = 400.$$

Назвав этап «проверки» в изложении авторов «Планов...» — его настоящим именем — *решением задачи,* и проведя проверку после получения ответа, в решение задачи мы включим новые *познавательные* моменты, ибо проверка будет сводиться теперь к использованию зависимостей, *обратных* тем, которые были использованы в процессе решения.

Проведем такую *проверку ответа*:

Два завода должны были выпустить вместе 200 + 160 = = 360 станков. (В решении было использовано *вычитание* 360 — 200 = 160; здесь же появилось *обратное действие, сложение*.)

По условию первый завод выполнил план на 112%. Так ли у нас? План — 200 станков, выполнено — 224. Найдем, сколько процентов составляет 224 от 200. $\frac{224}{200} = 1{,}12 = 112\%$.

Аналогично: $\frac{176}{160} = 1{,}1 = 110\%$.

(Если в решении задачи находили *процент от числа*, то при проверке находим *процентное отношение* чисел.)

Оба завода выпустили за месяц вместе 224 + 176 = 400 станков, что и должно быть согласно условию задачи.

2. Проверка ответа задачи

а) *Проверка ответа задачи по ее условию.*

Проверка ответа задачи, решенной алгебраическим способом, не отличается от проверки арифметической задачи, если иметь в виду наиболее простую форму проверки — проверку по условию задачи.

Задача. *По плану в цехе завода нужно изготовить за 26 рабочих дней определенное количество деталей. Улучшив технику производства, в цехе стали изготовлять ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану, и поэтому за 24 дня работы рабочие цеха выполнили плановое задание и изготовили 200 деталей сверх плана. Сколько деталей изготовили в цехе за 24 рабочих дня?*

Решение

I. В цехе должны изготовлять по x деталей в день. Тогда за 26 дней цех может выпустить 26 x деталей. Но фактически рабочие цеха перевыполняли дневную норму на 50 деталей, то есть в день выпускалось $(x + 50)$ деталей. За 24 рабочих дня было выпущено $(x + 50) \cdot 24$ деталей.

II. По условию это количество деталей было больше планового на 200 штук. Составим уравнение:

$$(x + 50) \cdot 24 = 26x + 200.$$

III. $24x + 1200 = 26x + 200$; $1000 = 2x$; $x = 500$.

500 деталей в один день — таков был план цеха.

IV. Ответ. $(500 + 50) \cdot 24 = 13\,200$ деталей изготовлено цехом за 24 рабочих дня.

V. Проверка. Цех завода должен был изготовить $500 \cdot 26 = 13\,000$ деталей. Сверх плана изготовлено: $(500 + 50) \cdot 24 - 13\,000 = 13\,200 - 13\,000 = 200$ деталей, что соответствует условию. Значит, задача решена правильно.

В V пункте выполнена проверка *ответа задачи по ее условию*, а не проверка *корня уравнения*.

Отметим, что, во-первых, корень уравнения не всегда дает ответ на вопрос задачи; во-вторых, уравнение может быть составлено неверно (II пункт), а формально решено правильно (III пункт). Проверка корня подстановкой его в уравнение ошибки в решении задачи не обнаружит. Проверка же ответа по условию задачи установит наличие ошибки.

б) *Проверка ответа задачи решением обратной задачи*

Проверка решения задачи может быть выполнена путем составления и решения обратной задачи. При этом получаются различные по степени трудности задачи.

Так обратные задачи, в которых искомыми выступают величины «50 деталей», «200 деталей», «24 дня», «26 дней», все разрешимы арифметически, что можно легко видеть из соответствующих уравнений:

к задаче 1 (прямая): $24(x + 50) = 26 \cdot x + 200$;
к задаче 2: $(500 + y) \cdot 24 = 26 \cdot 500 + 200$;
к задаче 3: $(500 + 50) \cdot 24 = 26 \cdot 500 + P$;
к задаче 4: $(500 + 50) \cdot A = 26 \cdot 500 + 200$;
к задаче 5: $(500 + 50) \cdot 24 = B \cdot 500 + 200$.

Условие последней обратной задачи следующее: *по плану определенное число дней, в цехе должны изготовлять по 500 деталей в день. Улучшив технику производства, рабочие цеха стали изготовлять в день на 50 деталей больше, чем полагалось, и за 24 дня изготовили на 200 деталей больше всего планового задания. На сколько дней рассчитан план цеха?*

Решение этих обратных задач для семиклассника трудности не составляет; само по себе составление таких задач и их решение, вызывая изменение известного хода умозаключений, имеет несомненное значение для развития математического мышления учащихся.

Между тем некоторые методисты недооценивают значения обратных задач; например, Б. И. Крельштейн рекомендует ограничиваться при проверке ответа задач в алгебре лишь простейшей ее формой, то есть лишь по условию задачи.

Проверка ответа по условию не идентична другим приемам проверки: процесс проверки по условию нельзя считать вполне равноценным процессу решения одной определенной задачи, хотя бы потому, что при этом последняя явно не конструируется, не *становится* специально *предметом мышления*.

Между тем решение обратной задачи более простыми средствами (например, в рассматриваемом случае обратные задачи оказываются нетиповыми, «обычными арифметическими») выполняет роль рационального *повторения*, закрепления ранее изученного в естественной связи с новым материалом.

Важно поэтому упражнять учащихся в различных приемах проверки, для чего задание следует предлагать не в общей форме *проверить ответ*, а конкретизировать:

1. Проверьте ответ задачи так, чтобы убедиться, что действительно цех изготовлял в день 50 деталей сверх нормы (задача 2).

2. Для проверки составьте обратную задачу путем исключения числа «26 дней» и решите ее (задача 5) и т. д.

Необходимо подчеркнуть, что при проверке ответа надо стремиться к возможно большему использованию устных рассуждений: обратная задача формулируется учеником устно, при решении ее записывается лишь последовательность действий и т. п.

Подробную запись проверки уместно требовать от учеников при выполнении контрольных работ.

в) *Проверка ответа посредством решения той же задачи другим способом*

Для проверки алгебраического решения задачи можно использовать решение той же задачи вторым способом: таковым может быть или снова алгебраический способ или в некоторых случаях арифметический способ решения.

Решение задачи несколькими способами (например, в алгебре—путем замены неизвестных), как правило, гораздо полезнее, чем решение новой задачи того же типа.

Задачи, решаемые алгебраическим способом, имеют много общего с задачами, решаемыми в курсе арифметики.

Во-первых, любое арифметическое решение задачи можно свести к алгебраическому решению посредством составления уравнения.

Во-вторых, так называемые типовые задачи, входившие в традиционные курсы арифметики, имеют ярко выраженную алгебраическую природу.

Анализ *арифметического* решения этих задач показывает, что оно сводится, собственно, к тем же алгебраическим приемам («риторическая алгебра»), например, *прием уравнивания* есть не что иное, как метод решения системы уравнений алгебраическим сложением.

В-третьих, задачи, решаемые только алгебраическим способом, также находятся в теснейшей связи с обычными арифметическими задачами: алгебраическое решение есть собственно обобщение арифметического решения.

Например, составление задачи, обратной арифметической задаче, иногда приводит к задаче, решаемой составлением уравнения или системы уравнений.

Рассмотрим арифметическое решение приведенной выше задачи:

За 24 дня рабочие цеха изготовили сверх 24-дневного плана $50 \cdot 24 = 1200$ (деталей); но за это же время они превысили 26-дневный план на 200 деталей. Таким образом, 1200 деталей слагаются из этих 200 деталей и еще двух дневных норм ($26 - 24 = 2$). Значит, две дневные нормы составляют $1\,200 - 200 = 1000$ (деталей).

Дневная норма равна $1000 : 2 = 500$ (деталей). В день изготавливали $500 + 50$ (деталей). За 24 рабочих дня изготовили $550 \cdot 24 = 13\,200$ (деталей). Дальнейшее ясно.

Арифметическое решение данной задачи для большинства семиклассников оказалось, по нашим наблюдениям, более трудным, чем алгебраическое.

Встречается и противоположное явление, а именно стремление решать задачи обязательно с помощью уравнений, что иногда усложняет процесс решения.

Рассмотрим пример.

В книжке Н. Н. Николаевой «Уравнения первой степени с одним неизвестным» (Учпедгиз, 1955, стр. 36) решается алгебраическим способом следующая задача:

Если числитель дроби уменьшить в 3 раза, а к знаменателю прибавить 3, то получится $\frac{1}{8}$. Найти эту дробь. Ответ. $\frac{3}{5}$.

Для проверки составляется обратная задача: *Дана дробь* $\frac{3}{5}$. *Какое число надо прибавить к ее знаменателю, чтобы, уменьшив числитель в 3 раза, получить дробь* $\frac{1}{8}$?

Далее автор дает алгебраическое решение обратной задачи: «Выполним проверку с помощью схемы. Пусть к знаменателю надо прибавить y единиц.

Таблица 15

Члены дроби	Числитель	Знаменатель
Данная	3	5
Полученная	$3 : 3 = 1$	$5 + y$

Уравнение $\frac{1}{5+y} = \frac{1}{8}$; $5 + y = 8$; $y = 3$.

Устанавливается, что к 5 следует прибавить 3, что соответствует условию задачи».

Однако последнюю задачу проще решить арифметически («с конца»), что также могло бы считаться проверкой ответа:

Окончательное значение дроби $\frac{1}{8}$; до уменьшения числителя дроби в 3 раза эта дробь была равна $\frac{3}{8}$; а до прибавления к знаменателю дроби числа, исходная дробь была равна

$$\frac{3}{8-3} = \frac{3}{5}.$$

Нередко встречается мнение, что при обучении решению задач успех определяется в *основном* количеством решенных задач и разнообразием форм работы, связанных с этапами решения; отсюда делают вывод, что якобы проверка ответа имеет несущественное значение[1].

На самом же деле проверка ответа представляет необходимую часть процесса решения, без которой не может быть достигнуто глубокое понимание задачи.

[1] В статье Д. Ф. Изаак утверждалось, что проверкой решения тригонометрических уравнений вообще не стоит заниматься («Математика в школе», 1955, № 1).

Иногда бывает целесообразно ограничиться подробным решением задачи с краткой проверкой (или даже без проверки), а в других случаях не менее поучительно специально заниматься развернутой проверкой. Проверяя ответ, ученик учится решать задачу!

3. Прием сравнения при решении задач алгебраическим способом

При обучении решению задач алгебраическим методом с первых шагов необходимо осуществлять комплексный подход к задаче, сравнивать взаимосвязанные способы решения, что способствует развитию математического мышления.

Выражение зависимости между величинами задачи в разных формах одинаково важно на всех ступенях обучения.

А. Н. Боголюбов[1] обнаружил, что первоклассники не усваивают взаимосвязи понятий *старше — моложе*, *выше — ниже* и т. д., если ограничиваться набором задач, в котором эти задачи встречаются вне связи друг с другом.

Полезным оказалось одновременное решение двух взаимосвязанных задач. Например:

а. *Сестре* 15 *лет, а брату* 10 *лет. Кто из них старше, на сколько лет старше?*

б. *Сестре* 15 *лет, а брату* 10 *лет. Кто из них моложе и на сколько лет?*

Психологическая причина ошибок, заключающихся в подмене одного уравнения сопряженным ему, например вместо уравнения $24(x+50)-200=26x$ составляется *сопряженное* уравнение $24(x+50)+200=26x$, сходна с причиной непонимания первоклассниками двойственности понятия *старше — моложе*.

Чтобы избежать подобных ошибок, работу над алгебраическими задачами полезно начинать с простейших упражнений по выражению связей между величинами и обязательно — двумя способами.

Так, в пропедевтическом цикле упражнений VI класса уместны вопросы:

---

[1] А. Н. Боголюбов. Работа над словом при решении задач в арифметике в начальной школе. Пути повышения успеваемости по математике, «Психолого-педагогические исследования учителей». Сборник статей, под ред. Н. А. Менчинской, Учпедгиз, М., 1955, стр. 20.

1. *Брат старше сестры на 5 лет. Выразить в двух видах эту зависимость с помощью неизвестных.*

Ответ. I. Брату x лет;
сестре $x - 5$ лет.
II. Сестре y лет;
брату $y + 5$ лет.

2. *В совхозе земли в 1,6 раза больше, чем в колхозе. Выразить эту зависимость в двух видах.*

Ответ. I. В совхозе x *га* земли;
в колхозе $\frac{x}{1,6}$ *га* земли.
II. В колхозе y *га* земли;
в совхозе $1,6\ y$ *га* земли.

3. *Производительность труда опытного рабочего составляет 250% от производительности труда ученика. Выразить эту зависимость в двух формах.*

Решение. $250\% = 2,5$.

I. Опытный рабочий сделал x деталей.
Ученик сделал $\frac{x}{2,5}$ деталей.

II. Ученик сделал y деталей.
Опытный рабочий — $2,5\ y$ деталей.

4. *Заработок сына составил* $\frac{5}{7}$ *заработка отца. Выразить эту зависимость с помощью неизвестных, затем проверить на числах.*

Ответ. I. Отец заработал x рублей;
сын заработал $\frac{5}{7}$ от x, то есть $\frac{5}{7}\ x$ руб.
II. Сын заработал y руб.;
Отец заработал $y : \frac{5}{7} = \frac{7}{5}y$ (то есть больше сына, что и должно быть).

Проверка. Пусть заработок сына составляет 100 руб. Тогда заработок отца равен $100 \cdot \frac{7}{5} = 140$ руб.

В самом деле $\frac{100}{140} = \frac{5}{7}$.

Последний вопрос, как и предшествующие, надо предлагать в разных вариантах, привлекая другие термины и грамматические обороты, например:

4а. *Отношение заработка сына к заработку отца равно* $\frac{5}{7}$.

46. Заработок отца составляет $\frac{7}{5}$ заработка сына и т. д.

В алгебре наряду с предыдущими способами сравнения величин используется также связывание двух значений посредством указания их *суммы*. Поэтому целесообразно тренировать учащихся и в применении суммы для символического изображения зависимости.

5. *В классе было всего 35 учеников. Обозначить число мальчиков и число девочек двумя способами.*

Ответ. I) В классе было x мальчиков и $(35 - x)$ девочек.

II) В классе было y девочек и $(35 - y)$ мальчиков.

Выше были рассмотрены упражнения по замене сравнения, выраженного словами, символическим выражением его результата.

Эту форму упражнений целесообразно дополнить структурно противоположной формой, когда ученик заменяет символическое выражение зависимости словесным.

Пример 1. Учитель пишет на доске:

«Сыну — x лет; отцу — $6x$ лет».

Как выразить в словах (не употребляя буквы x) зависимость между возрастом сына и отца?

Ответ. Отец старше сына в 6 раз (или сын моложе отца в 6 раз).

Пример 2. «В колхозе было засеяно x *га* кукурузой, а в совхозе $\frac{1}{3}x$ *га*».

Как выразить эту мысль, не употребляя буквы x?

Ответ. Площадь, занятая кукурузой в совхозе, составляет $\frac{1}{3}$ площади, занятой кукурузой в колхозе.

Для уяснения сущности записи сравнения величин алгебраическим методом полезно показать ученикам процесс составления уравнения при решении задачи.

Учитель проводит примерно следующую беседу:

— Сейчас вы увидете, как составляется задача, решаемая алгебраическим методом. Слушайте внимательно, так как дома вы будете сами *составлять* и *решать* подобную задачу.

Для колхозного клуба купили баян, пианино и скрипку. Скажите мне приблизительно цены этих музыкальных инструментов.

После обсуждения на доске и в тетрадях записываются столбиком цены и помечаются несколько способов выражения зависимостей между ними.

	I способ	II способ	III способ
Скрипка 60 руб.	$(x-80)$ руб.	y руб.	$\left(\frac{z}{4}-80\right)$ руб.
Баян 140 руб.	x руб.	$(y+80)$ руб.	$\frac{z}{4}$ руб.
Пианино 560 руб.	$4x$ руб.	$(y+80)\cdot 4$ руб.	z руб.
Всего: 760 руб.	760 руб.	760 руб.	760 руб.

Далее учитель говорит:

— Чтобы составить задачу, надо указать общую стоимость покупки, а цены отдельных предметов дать в *скрытом* виде, то есть выразить посредством сравнения.

Останавливаемся на одном из вариантов, например: пусть баян стоит x руб. ($x = 140$). Сопоставим стоимость баяна со стоимостью скрипки посредством *разностного* сравнения. Тогда скрипка будет дешевле баяна на 80 руб. $(140 - 60 = 80)$.

Далее стоимость баяна сравним со стоимостью пианино для разнообразия другим способом (кратным сравнением): баян дешевле пианино в 4 раза [560 : 140 = 4 (раза)].

С помощью учеников учитель формулирует условие составленной задачи.

Для колхозного клуба купили баян, пианино и скрипку на общую сумму в 760 руб. Скрипка дешевле баяна на 80 руб, а баян дешевле пианино в 4 раза. Определить стоимость каждого музыкального инструмента.

Записав символическое выражение условия задачи, проводим решение.

$$(x - 80) + x + 4x = 760$$
$$x - 80 + x + 4x = 760$$
$$6x = 840$$
$$x = 140 \text{ и т. д.}$$

При выполнении таких пропедевтических упражнений важно составить и решить несколько задач по одному сюжету.

II з а д а ч а. *Пусть скрипка стоит y рублей. Тогда баян будет стоить $y + 80$ рублей, а пианино в 4 раза дороже баяна и поэтому будет стоить $(y + 80)\cdot 4$ руб.*

Эту схему записываем рядом с предыдущей.

Уравнение: $y + (y + 80) + (y + 80)\cdot 4 = 760$.

Условие составленной задачи рассказывают ученики.

III з а д а ч а. *Пусть пианино стоит z рублей. Тогда баян будет стоить $\frac{z}{4}$ рублей, так как он дешевле пианино в 4 раза. Скрипка будет стоить $\left(\frac{z}{4} - 80\right)$ рублей.*

Уравнение: $z + \frac{z}{4} + \left(\frac{z}{4} - 80\right) = 760$.

В приведенных упражнениях запись соотношений между величинами в символической форме начинается *не с неизвестных* величин, как бывает обычно, а с известных, заранее намеченных чисел.

Это обстоятельство помогает ученикам абстрагировать зависимости (перейти от соотношения $140 - 80 = 60$, через $140 - 80 = x$ к соотношению $140 = x + 80$, где $(x + 80)$ — стоимость баяна).

Решение рассмотренной выше задачи основано на суммировании исходных величин $(60 + 140 + 560 = 760)$.

Можно составить и другие задачи так, чтобы решение их основывалось на использовании разностного сравнения и кратного сравнения.

Для краткости изложения воспользуемся предыдущей задачей.

Пусть выбранные числа и способы сравнения их друг с другом остаются прежними.

Разностное сравнение

Скрипка 60 руб.	$x-80$	$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ 200	$560 - 200 = 360$
Баян 140 руб.	x		$4x - [x + (x + 80)] = 360$
Пианино 560 руб.	$4x$	560	

В приведенной схеме кратко изображена последовательность операций при составлении задачи.

З а д а ч а . *Для колхозного клуба купили скрипку, баян и пианино. Скрипка на 80 рублей дешевле баяна, а пианино в 4 раза дороже баяна. Известно также, что пианино дороже скрипки и баяна, вместе взятых, на 360 рублей.*

Сколько стоит каждый музыкальный инструмент в отдельности? Уравнение: $4x - [x + (x + 80)] = 360$.

К р а т н о е с р а в н е н и е.

Так как $\frac{560}{200} = 2{,}8$, то имеем задачу, которая отличается от предшествующей задачи лишь фразой:

«...известно, что пианино дороже скрипки и баяна, вместе взятых, в 2,8 раза».

Уравнение: $4x = [x + (x + 80)]\cdot 2{,}8$.

С у м м и р о в а н и е

Наряду с кратным и разностным сравнением для связывания величин можно использовать суммирование:

Скрипка и баян стоят вместе $60 + 140 = 200$ (руб.). Если в условие ввести число 200, тогда одна из задач будет выглядеть так:

Скрипка	60 руб.	200 руб.	x
Баян	140 руб.		$200-x$
Пианино	560 руб.	560 руб.	$4(200-x)$

З а д а ч а . *Для колхозного клуба купили скрипку, баян и пианино за 760 руб. Скрипка и баян стоят вместе 200 руб., а пианино в 4 раза дороже баяна. Определить стоимость каждого инструмента в отдельности.*

Уравнение $x + (200 - x) + 4(200 - x) = 760$.

На практике мы убедились, что составление таких простейших разновидностей задач вполне доступно уже шестиклассникам; такая работа является хорошей подготовкой к составлению и решению задач в VII — VIII классах.

Цель научить ученика различным формам выражения одного и того же условия должна быть в поле внимания учителя на всех этапах работы при решении задач.

После упражнений в применении взаимосвязанных способов сравнения величин ученикам легче решать более сложные задачи.

При решении сложных задач также следует упражняться в сравнении различных способов решения одной и той же задачи, в сопоставлении структур соответствующих уравнений и процессов проверки ответов.

Вернемся снова к условию рассмотренной выше задачи о выпуске деталей.

На экзаменационной работе в VII классе ученики выполнили решение этой задачи в следующих вариантах:

I. В цехе должны были по плану выпускать в день x деталей; решение сводится к уравнению $24(x + 50) - 26x = 200$.

II. В цехе изготовляли ежедневно p деталей; решение сводится к уравнению $24p - 26(p - 50) = 200$.

III. В цехе изготовили всего y деталей; соответствующее уравнение:

$$\frac{y}{24} - \frac{y - 200}{26} = 50$$

IV. Рабочие цеха должны были изготовить k деталей; уравнение следующее:

$$\frac{k + 200}{24} - \frac{k}{26} = 50$$

При обучении все еще мало уделяют внимания анализу решения, сравнению различных решений.

Учащийся нередко хорошо представляет лишь свой способ решения и не знает других возможных.

Поэтому необходимо предлагать им по возможности решать одну и ту же задачу несколькими способами.

После самостоятельной работы на решение задач следует выписать на доске все возможные уравнения, полученные разными учениками.

Предлагая задачи для решения двумя способами, иногда надо намечать, какие величины считать неизвестными при том или ином способе решения, а не предоставлять этот шаг случайному выбору ученика.

Например, в случае рассматриваемой задачи можно потребовать:

Решить задачу, обозначив через y количество деталей, которое намечено планом. Проверить ответ, решив задачу вторым способом, обозначив через K количество деталей, фактически выпущенных в цехе!

Процесс решения сводится к составлению уравнения

$$\frac{y + 200}{24} - \frac{y}{26} = 50$$

Процесс проверки сводится к составлению уравнения:

$$\frac{k}{24} - \frac{k - 200}{26} = 50$$

На уроке в целях экономии времени удобно предложить половине учеников класса решать задачу одним способом, а другой половине — вторым способом; тогда ученики взаимно контролируют решения друг друга.

Анализируя решение задачи, важно обращать внимание на структуру различных записей уравнения при *одном* и том же способе решения.

Пусть для решения той же задачи составлено уравнение:

$$\frac{y}{24} - \frac{y-200}{26} = 50 \qquad \text{(I)}$$

(Здесь основное неизвестное — количество выпущенных деталей.)

Выясняется вопрос: какова соответствующая зависимость величин, выражаемая данным уравнением? Каков смысл этого уравнения? Рассматриваются другие способы записи этой же зависимости:

$$\frac{y}{24} - 50 = \frac{y-200}{26} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{y-200}{26} + 50 = \frac{y}{24} \qquad \text{(III)}$$

При решении этой задачи обязательно обратить внимание учащихся на существование *трех форм* выражения зависимостей между данными величинами (указанные три уравнения выражают одно суждение: в *день изготавливали на* 50 *деталей больше нормы*).

Не обязательно, конечно, чтобы все три уравнения были составлены каждым учеником (хотя и это целесообразно); достаточно сравнить решения разных учеников и выяснить сходство и отличие составленных ими уравнений и соответствующих способов решения.

Некоторые учителя при алгебраическом решении задач считают необходимым обозначать буквой *меньшую* из двух сравниваемых неизвестных величин и настойчиво рекомендуют это ученикам[1].

Если всегда следовать этому совету, то ученики научатся оперировать прямым действием — сложением, намеренно избегая обратного действия — вычитания; говоря иначе, из двух равноценных способов решения они будут хорошо знать и применять лишь один.

---

[1] К. П. Сикорский, О составлении уравнений по условиям задач, «Математика в школе», 1954 , № 1, стр. 42.

И. Г. Польский, Составление уравнений по условиям задач. Сборник «Решение задач в средней школе», изд. АПН РСФСР, 1952, стр. 119.

Такое ограничение может иметь далеко идущие нежелательные последствия, а именно ученики будут упражняться лишь в одностороннем исследовании явлений и не будут рассматривать их с разных точек зрения.

Сравнение способов решения осуществляется естественнее всего на одной задаче, то есть при условиях, когда изменяется один существенный признак рассматриваемого понятия, а именно способ решения (при неизменности сюжета и числовых данных задачи).

Если же не проводить сравнения, то обобщение приемов решения задач, систематизация задач, уяснение их существенных признаков предоставляется стихии.

При решении *разных* задач (даже задач одного и того же типа, но с различными сюжетами и числовыми данными), основное внимание обычно обращают на получение ответа (и принято добавлять: *наиболее кратким путем*).

Однако учитель будет поступать правильно, если *некоторые* задачи будет решать вместе с учениками и длинным и кратким способами с тем, чтобы сравнить их и выяснить, почему второй способ оказался короче, проще первого.

Рассмотренное выше решение сводится к составлению уравнения, имеющего три члена (например, в последнем случае эти члены суть $\frac{y-200}{24}$, 50, $\frac{y}{24}$).

Сравним два способа решения задачи, которой соответствует уравнение, содержащее больше чисел.

В школьном зале поставлены скамейки. Если на каждую скамью посадить по 6 учеников, то не хватит 4 скамеек, если же на каждую скамью посадить по 7 учеников, то 6 скамеек останутся свободными. Сколько скамеек было поставлено в зале?

Первое решение. В зале было x скамеек. В первом случае на них разместилось бы $6x$ учеников, но тогда не хватало бы 4 скамеек, то есть $6 \cdot 4 = 24$ ученика останутся без места; всего было $(6x + 24)$ ученика.

Во втором случае занято $x - 6$ скамеек, то есть всего учеников было $7(x - 6)$ человек. Так как и в первом и во втором случаях число учеников осталось постоянным, то оба выражения соединим знаком равенства и получим уравнение $6x + 24 = 7(x - 6)$, из которого найдем $x = 66$.

Ответ. Было поставлено в зале 66 скамеек.

Для проверки решения можно предложить решить ту же задачу при другом неизвестном.

Пусть было всего y учеников.

Тогда в первом случае требовалось бы $\frac{y}{6}$ скамеек, фактически же было в зале $\frac{y}{6} - 4$ скамеек. Во втором случае требовалось $\frac{y}{7}$ скамеек, да еще свободными оставались 6 скамеек, то есть в зале было $\frac{y}{7} + 6$ скамеек.

Составляем уравнение:

$$\frac{y}{6} - 4 = \frac{y}{7} + 6; \ y = 420$$

О т в е т . Было поставлено в зале 66 скамеек.

Табличная форма записи решения задач

Математическое содержание большинства задач, решаемых в школе, таково, что в них дважды сравниваются («связываются») числовые значения нескольких величин.

Во многих случаях поэтому как при решении этих задач, так и при проверке их удобно пользоваться табличной формой записи, которая короче и нагляднее обычной записи с объяснением: зрительное восприятие определенного расположения чисел в таблице дает *дополнительную информацию*, облегчающую процесс решения.

Рассмотрим задачу:

Ателье уплатило за шелк на 200 *рублей больше, чем за сукно.* 1 *м шелка стоил* 6 *рублей,* 1 *м сукна* — 10 *рублей. Сколько метров шелка и сукна в отдельности купило ателье, если всего куплено* 76 *метров?*

Схема решения этой задачи.

Таблица 16

Материал	Цена в рублях	Количество в *м*	Стоимость в рублях
Шелк	6	$\frac{x}{6}$	x
Сукно	10	$\frac{x-200}{10}$	$x-200$

У р а в н е н и е $\frac{x}{6} + \frac{x - 200}{10} = 76$; $x = 360$.

О т в е т. 60 *м*, 16 *м*.

Для проверки решения воспользуемся той же схемой, причем находим последовательно сначала стоимость отдельно шелка и сукна, затем количество купленной материи и, наконец, сколько всего куплено материи.

Таблица 17

Материал	Цена в рублях	Количество в *м*	Стоимость в рублях
Шелк	6	$\frac{360}{6} = 60$	360
Сукно	10	$\frac{360 - 200}{10} = 16$	360 — 200

Всего нужно $60 + 16 = 76$ (*м*) материи.

Разумеется, можно обойтись устной проверкой, пользуясь схемой решения как ориентиром рассуждений и вычислений, выполняемых при проверке. Однако табличная форма записи облегчает сравнение решения и процесса проверки ответа.

4. О составлении задач по заданному уравнению

Программа и задачник предусматривают оправдавший себя на практике принцип параллельного рассмотрения некоторых вопросов. Так, например, решение уравнений сопровождается решением задач, приводящих к аналогичным уравнениям; решение уравнений с числовыми коэффициентами сочетается с решением несложных параметрических уравнений.

Однако нередко целую серию уроков алгебры посвящают решению одних только уравнений, не связывая их с задачами. Однообразие такой работы убивает живую мысль ученика, форма начинает довлеть над содержанием и ценные навыки решения задач алгебраическим методом начинают тускнеть и забываться.

Повышению интереса учащихся к учебе содействует устное придумывание ими сюжетов и ситуаций к заданным уравнениям или системам уравнений.

Пусть дано задание — решить уравнение $8x - 3 = 5x + 6$.

Предъявим дополнительное требование — составить задачу, решение которой, приводится к решению этого уравнения.

Вот задача, составленная по этому уравнению учениками коллективно:

В колхозе одно звено пропалывало в день 8 га овощей, а другое звено — 5 га. За одно и то же число дней первое звено перевыполнило план прополки на 3 га, а второе не успело прополоть 6 га. Сколько дней работали эти звенья на прополке?

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

Соответствующая задача:

В семье две сестры и один брат. По скольку тетрадей купил каждый из них, если сестры купили тетрадей поровну и притом две сестры купили всего тетрадей на 2 штуки больше, чем брат, а трое вместе купили 10 тетрадей.

В задачнике П. А. Ларичева задачи для решения с помощью составления уравнений часто предлагаются парами, на одну и ту же функциональную зависимость. Этот прием облегчает ученикам обобщать и переносить метод решения одной задачи на другую.

Принцип дублирования целесообразно использовать также и для уяснения учениками связей, существующих между текстовой задачей и ее уравнением. Поэтому было бы удобно и методически оправдано располагать в задачнике под одним общим номером два упражнения, первое из которых было бы задачей, а второе — заданием составить и решить сходную задачу, удовлетворяющую определенным требованиям.

Например, задача № 758 (Задачник по алгебре П. А. Ларичева, ч. I, Учпедгиз, 1964 г.): *В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а во второй элеватор привезли 350 т зерна, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну.*

Сколько тонн зерна было первоначально в каждом элеваторе? Решение. $2x - 750 = x + 350$.

Эту задачу можно было бы дублировать заданием:

2) Составить задачу, решаемую уравнением $3x - 100 =$

$x + 250$. (Здесь изменены лишь числа при сохранении структуры уравнения.)

Ученик составляет задачу, при сохранении того же сюжета, но с иными числами, например, такую:

В одном элеваторе зерна было в 3 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 100 т зерна, а во второй привезли 250 т зерна, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько тонн зерна было первоначально в каждом элеваторе?

Могут быть и иные варианты задания, скажем, следующие:

3) Составь задачу с другим сюжетом (не про элеваторы) так, чтобы она решалась посредством уравнения

$$3x - 400 = x - 50.$$

Ответ проверь по условию задачи.

(Здесь изменяется уже содержание задачи: если в задаче № 758 в одной части уравнения была разность, а в другой — сумма, то в задаче 3) в обеих частях соответствующего уравнения использованы *разности*.)

Ученик может составить следующую задачу:

В одной бригаде площадь земли, занятая пшеницей, в 3 раза больше, чем в другой. Когда в первой бригаде убрали урожай с 400 га, а во второй бригаде — с 50 га, то в обеих бригадах осталась неубранной одинаковая площадь посева.

Сколько пшеницы надо было убрать в каждой бригаде?

Наконец, возможен и четвертый вариант задания, когда в обеих частях уравнения используется действие сложения:

4) Составь задачу с другим сюжетом так, чтобы она решалась при помощи уравнения

$$2x + 300 = 4x + 100, \text{ или уравнения}$$

$$300 + 6x = 180 + 8x.$$

К последнему уравнению может быть составлена следующая задача:

Один рабочий изготовил 300 деталей, а другой — 180. Когда первый выполнил еще 6 норм, а второй 8 таких же норм, то оба изготовили равное число деталей.

Сколько нужно изготовить деталей по норме?

Рассматривая процессы решения и составления задачи, мы видим, что *сочетание* двух процессов позволяет прямую связь преобразовать в обратную и обратную в прямую.

5. Составление задач по аналогии с решенной

Пропедевтически рассматривается решение уравнений и задач, приводящихся к ним уже при изучении первых разделов алгебры.

Даже на первом этапе полезно сочетать решение задач с составлением их.

Приведем несколько примеров.

Сложение и вычитание одночленов

Пусть решена задача:

Сумма углов треугольника равна 180°. *Величины углов относятся как числа* 3, 4 *и* 5. *Найти углы треугольника.*

Решение

$$3x + 4x + 5x = 180°.$$

После решения этой задачи учитель предлагает составить аналогичную задачу, скажем, о сумме углов четырехугольника.

Ученик составляет примерно следующую задачу:

Сумма углов четырехугольника равна 360°. *Величины углов относятся как* 3, 4, 5 *и* 6. *Найти углы четырехугольника.*

Решение.

$$3x + 4x + 5x + 6x = 360°.$$

Ответ. 60°, 80°, 100°, 120°.

Следует иметь в виду, что при составлении задач по аналогии иногда может случиться, что формально вычисленный ответ не будет иметь реального смысла.

Поэтому учащиеся должны проверять ответы, найденные при решении составленных ими задач.

Так, например, если при составлении предыдущей задачи было намечено, чтобы углы четырехугольника относились как числа 3, 4, 5, 12, то последний угол окажется равным 180°, чего быть не может, ибо многоугольника с углом, равным 180°, не существует.

Сложение и вычитание многочленов

Пусть решена задача:

В трех школах 1300 *учеников. Во второй школе вдвое больше учеников, чем в первой, а в третьей на* 100 *меньше, чем во второй.*

Сколько учеников в каждой школе?

Решение.

$$x + 2x + (2x - 100) = 1300.$$

Далее учитель предлагает составить аналогичную задачу, скажем, про жителей трех деревень.

Следует пояснить, что составление задачи с произвольными уравнениями не всегда приводит к цели.

Так, например, задача, сводящаяся к уравнению

$$x + 3x + (3x - 100) = 1200,$$

не имеет решения $\left(x = 185\frac{5}{7}\right)$, если по смыслу условия задачи x должен быть целым числом (например, количество рабочих или учеников, количество парт и т. п.).

Поэтому надо показать иную, более целесообразную последовательность логических операций при составлении задачи, когда этот процесс начинается с заранее намечаемого *числового тождества.*

Нам надо составить задачу, сводящуюся к уравнению вида

$$x + 2x + (2x - 100) = 1300.$$

Пусть $y = 400$.

Напишем числовое тождество, памятуя, что в уравнении речь пойдет о числе учащихся в школах:

$$400 + 3 \cdot 400 + (3 \cdot 400 - 300) = 2500.$$

Данное числовое тождество заменим уравнением:

$$y + 3y + (3y - 300) = 2500.$$

И, наконец, придумываем к этому уравнению соответствующее условие задачи, например:

В поселке имеются три школы. Во второй школе учеников в 3 раза больше, чем в первой, а в третьей школе на 300 учеников меньше, чем во второй. В трех школах всего учатся 2500 учеников.

Сколько учеников в каждой школе?

Ответ. 400, 1200, 900.

Формулы сокращенного умножения

Пусть решена задача:

Каждую сторону квадрата увеличили на 2 м, отчего площадь квадрата увеличилась на 56 кв. м. Чему была равна сторона площадки вначале?

Р е ш е н и е.

$$(x+2)^2 - x^2 = 56; \quad x^2 + 4x + 4 - x^2 = 56;$$

$$4x = 52; \quad x = 13.$$

Учитель может предложить учащимся составить подобную, но видоизмененную задачу, указав, что в решенной задаче использовано *увеличение* площади квадрата, а надо составить задачу, в которой должно быть использовано *уменьшение* площади в зависимости от *уменьшения* стороны квадрата. Такое задание ученик выполняет в три приема:

1. Намечает сторону квадрата (пусть $y = 30$ *м*) и допускает, что сторону следует уменьшить на 7 *м*.

Составляет тождество: $30^2 - (30 - 7)^2 = 371$.

2. Преобразует его в уравнение: $y^2 - (y - 7)^2 = 371$.

3. Устно формулирует условие задачи:

Каждую сторону квадрата уменьшили на 7 м, отчего площадь квадрата уменьшилась на 371 кв. м. Какова была сторона квадрата вначале?

Алгебраические дроби

Пусть решена задача:

Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт B. Первый проезжает в час 15 км, второй — 12 км и поэтому первый приехал в пункт B на 1,5 часа раньше второго.

Найти расстояние от A до B.

Р е ш е н и е.

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 1,5; \quad x = 90.$$

Составляя аналогичную задачу, учащимся удобнее идти тем же путем в три этапа:

1. Выбрать знаменателями дробей, скажем, числа 10 и 12. Выбрать число, кратное 10 и 12, например 180.

Составить числовое тождество: $\frac{180}{10} - \frac{180}{12} = 3$.

2. Заменить в тождестве число 180 буквой x, преобразовав тождество в уравнение: $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = 3$.

3. Придумать соответствующее условие, например: *по плану бригада должна обрабатывать в день 10 га посевов. Фактически она обрабатывала в день 12 га и поэтому выполнила плановое задание на 3 дня раньше срока.*

Определить площадь посевов.

Приведем пример более сложной задачи, которая также решается с помощью уравнения с дробными членами.

Пусть решена задача.

Сумма окружностей переднего и заднего колес экипажа равна 5 м. Одно из них на протяжении 90 м делает столько же оборотов, сколько другое на протяжении 60 м.

Найти окружность каждого колеса.

Решение.

$$\frac{90}{x} = \frac{60}{5 - x}; \quad x = 3.$$

Ответ. 3 *м* и 2 *м*.

Составление аналогичной задачи ученик выполняет следующим образом:

1. Выбирает ситуацию.

Пусть, например, задача будет составлена на сравнение количеств купленной материи.

Подбирает цену шелковой и цену шерстяной материи возможно ближе к истинным: 1 *м* шелковой ткани стоит 8 руб., 1 *м* шерстяной материи стоит 12 руб.

Пусть для мастерской куплено по 100 *м* материи того и другого сорта и заплачено $8 \cdot 100 = 800$ руб.; $12 \quad 100 = 1200$ руб.

Составляет далее равенство из двух дробей (то есть приравнивает количества купленной материи): $\frac{800}{8} = \frac{1200}{12}$.

2. Заменяет числовое тождество уравнением, причем здесь возможны различные варианты замены.

а) Следуя решенной задаче, можно за неизвестное x принять 8 ($x = 8$), тогда $12 = 20 - 8 = 20 - x$.

Получается уравнение: $\frac{800}{x} = \frac{1200}{20-x}$.

б) Приняв за y цену шерстяной материи $y = 12$, получим иное уравнение: $\frac{800}{20 - y} = \frac{1200}{y}$.

В обоих случаях задача имеет одно условие:
1 м шерстяной и 1 м шелковой материи стоят вместе 20 руб. Зная, что на 800 руб. можно купить столько же метров шелковой материи, сколько можно купить шерстяной материи на 1200 руб. определить цену шерстяной и шелковой материи.

6. Преобразование задачи, решенной посредством системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Покажем, как можно преобразовать задачу на составление *системы* уравнений в другую задачу, исходя из анализа конструкции решенной задачи — № 1393 (задачник П. А. Ларичева, ч. I, 1964 г.):

На платформу были погружены дубовые и сосновые шпалы, всего 300 шпал. Известно, что все дубовые шпалы весили на 1 т меньше, чем все сосновые. Определить, сколько было дубовых и сосновых шпал отдельно, если каждая дубовая шпала весила 46 кг, а каждая сосновая 28 кг.

Решение. Было x дубовых, y сосновых шпал. Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 28y - 46x = 10\,000 \end{cases}$$

Ответ. 100 дубовых; 200 сосновых шпал.

Проверку решения запишем кратко в виде двух равенств:

$$200 + 100 = 300$$
$$28 \cdot 200 - 46 \cdot 100 = 1000$$

Какие же иные варианты задач можно составить по этому сюжету? Сколько всего этих вариантов? Анализируем структуру задачи по *форме* уравнений, составленных по ее условию. В первой строке взята *сумма* всех шпал, а во второй строке взята *разность весов* шпал двух сортов. Какими способами можно изменить условие задачи, *не изменяя* сюжета и данных чисел?

Учащиеся выясняют, что можно, например, вместо суммы всех шпал взять *разность* числа сосновых и дубовых шпал, а вместо *разности* весов взять *сумму* весов.

Так как для изменения условия задачи достаточно *одной* вариации, то можно получить четыре разновидности задачи, структуры которых будут следующие:

$$\left.\begin{array}{l}\text{сумма количеств шпал } 200 + 100 = 300;\\ \text{разность значений веса } 28 \cdot 200 - 46 \cdot 100 = 1000;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{сумма количеств шпал } 200 + 100 = 300;\\ \text{сумма значений веса } 28 \cdot 200 + 46 \cdot 100 = 10\,200;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{разность количеств шпал } 200 - 100 = 100;\\ \text{разность значений веса } 28 \cdot 200 - 46 \cdot 100 = 1000;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{разность количеств шпал } 200 - 100 = 100;\\ \text{сумма значений веса } 28 \cdot 200 + 46 \cdot 100 = 10\,200.\end{array}\right\}$$

Например, задача (4) будет иметь следующее условие:

На платформу было погружено дубовых шпал на 100 *штук меньше, чем сосновых.*

Известно, что все шпалы весили 10,2 *т.*

Определить, сколько было дубовых и сосновых шпал в отдельности, если каждая дубовая шпала весила 46 *кг, а каждая сосновая* 28 *кг?*

Система уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 100 \\ 28y + 46x = 10\,200 \end{cases}$$

Все четыре задачи имеют общую структуру: в них известны *вес одной дубовой шпалы* и *вес одной сосновой шпалы*, искомыми являются *количество шпал* каждого сорта в отдельности.

Другая группа из 4-х задач возникает тогда, когда вместо *двух* неизвестных *количеств* шпал будут искомыми вес дубовой шпалы и вес сосновой шпалы.

Если в условии задачи 1) была дана *сумма количеств* шпал, то по аналогии в условии задач I) и II) укажем, сколько весили вместе 1 дубовая и 1 сосновая шпалы; а в условии задач III) и IV) укажем, на сколько дубовая шпала тяжелее сосновой.

Например, задача II) будет выглядеть так:

На платформу были погружены 100 *дубовых и* 200 *сосновых шпал, причем общий вес шпал составлял* 10,2 *тонны.*

Одна сосновая шпала и одна дубовая шпала весят вместе 74 *кг. Определить, сколько весила одна дубовая и одна сосновая шпала в отдельности?*

Решение. $a + b = 74$; $200a + 100b = 10\,200$.

Одним из неразработанных вопросов методики математики до сих пор продолжает оставаться классификация алгебраических задач, хотя ею занимались многие методисты[1].

И. Альтшуллер предлагал разбивать задачи на следующие восемь групп («Математика в школе», 1940, № 2):

1. Задачи без конкретного содержания (нахождение неизвестного компонента; двух чисел по их сумме и разности и т. п.).
2. Проценты.
3. Задачи на сложение.
4. Движение.
5. Изменение членов дроби (отношения).
6. Обратные величины (например, задачи на бассейны).
7. Числа и цифры.
8. Смешанный отдел.

Такое *тематическое* распределение задач не решает вопроса о расположении их в порядке возрастающей трудности: одинаковые по степени трудности задачи попадают в разные группы и различные по трудности задачи попадают в одну группу.

Наиболее обоснованной и полно разработанной является классификация, предложенная А. Н. Барсуковым.

Он разбил задачи на две большие группы: задачи пропедевтического цикла и задачи основного цикла (речь идет о задачах, решаемых посредством уравнений первой степени).

Он распределяет задачи первой группы соответственно различным разделам тождественных преобразований на сложение и вычитание одночленов и многочленов, на умножение и деление одночленов и многочленов, на алгебраические дроби и т. д. Задачи основной группы делит по виду уравнения, к которому сводится решение задачи. Уравнения эти следующие:

---

[1] История вопроса о классификации алгебраических задач достаточно подробно изложена в книге А. Н. Барсукова «Уравнения первой степени в средней школе». Пособие для учителей, Учпедгиз, М., 1948.

1. $x+a=b$; $ax=b$; $\frac{x}{a}=b$; $\frac{a}{x}=b$

2. $ax+b=cx+d$

3. $ax+b=m(cx+d)$ и $ax+b=m(cx+d)+r$

4. $ax+b=m[c(s-x)+d]$

5. $ax+b(s-x)=c$

6. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=\frac{1}{b}$

7. $\frac{a}{x}=\frac{b}{c-x}$.

Эта классификация помогает учителю подбирать задачи в определенной последовательности.

В классификации А. Н. Барсукова достигнуто возрастание трудности задач от первой группы к последней.

Следует подчеркнуть правильную идею этой классификации — считать основой классификации уравнение, то есть функциональное содержание задачи.

Однако классификация, предложенная А. Н. Барсуковым, имеет следующие недостатки:

1) в основу ее положена аналитическая сторона работы над задачами — составление уравнения;

2) в силу этой односторонности данная классификация не охватывает многих разновидностей задач;

3) неясны пути *перехода* от одного вида задач к другому (иначе говоря, не дан ответ на вопрос: чем отличается одно уравнение от другого?).

Более удачна классификация задач на основе способа сравнения величин.

Понятие *способ сравнения величин* является первичным по отношению к понятию *уравнение*, которое является производным от первого понятия.

Задачи, решаемые с помощью линейных и квадратных уравнений, можно разделить на две группы:

А) задачи, в которых используются разные значения *одной и той же* величины (например, значения веса или значения расстояния);

Б) задачи, в которых используются тройки взаимосвязанных *различных* величин (например, в задаче используется связь между ценой, количеством товара и стоимостью)

А) *Задачи, в которых используются значения одной и той же величины*

Покажем преимущество предлагаемого подхода на примере составления задач, исходя из какой-либо простой ситуации (для краткости используем лишь *один сюжет, и один набор числовых значений*; при обучении варьируются, конечно, и сюжеты задач и математическое содержание их).

1. *В одном мешке было* 50 *кг муки, в другом* — 75 *кг муки. Из первого мешка взяли* 20 *кг, из второго* — 15 *кг. Осталось в них соответственно* $50 - 20 = 30$ и $75 - 15 = 60$ *(килограммов) муки.*

Запишем эти зависимости в следующей таблице:

Таблица 18

	Первоначальное количество в *кг*	Изменение в *кг*	Оставшееся количество в *кг*
Первый мешок	50	—20	30
Второй мешок	75	—15	60

Выясняем наличие трех значений, которые сокращенно обозначим так:

первоначальное количество (1);
изменение количества (2);
оставшееся количество (3).

Для составления задачи на уравнение первой степени надо *сравнить* каким-либо способом два значения из указанных трех.

Таких комбинаций насчитывается всего три, которые обозначим так:

Первая подгруппа: сравнивают первоначальное количество и оставшееся количество (1, 3).

Вторая подгруппа: сравнивают первоначальное количество и изменение (1, 2).

Третья подгруппа: сравнивают оставшееся количество и изменение (2, 3).

Но два значения величины можно *связать* одним из следующих четырех приемов:

(Р) — разностное сравнение
(больше на ...; меньше на ...);

(К) — кратное сравнение
(больше, меньше в... раз);
(П) — процентное отношение
(составляет...%);
(Ч) — часть от числа.

Кроме того, специфическая особенность этих задач, заключающаяся в том, что все величины, используемые в задаче, *однородны*, позволяет использовать для увеличения числа вариаций задач новый способ выражения неизвестных — суммирование величин в каждой из трех подгрупп.

Итак, имеем пятый способ выражения связи между величинами:

(С) — суммирование двух значений величины.

Сравнение с помощью процентного отношения и с помощью понятия *часть от числа* являются частными случаями кратного сравнения.

Следовательно, существенно *различных* оказывается всего три способа связи однородных величин: посредством вычитания (Р); посредством деления (К, П, Ч), посредством сложения (С).

Целесообразно различать все *пять способов связывания величин.*

Суммирование значений двух величин есть лишь эквивалент сравнения, но не сравнение величин в собственном смысле слова. Поэтому более правильным было бы употреблять термин *способы связывания величин.*

Способ сравнения будет тогда частным случаем способа связывания величин.

Однако в курсе арифметики для классификации задач можно обойтись лишь сравнением величин[1].

Если указанные три способа связывания величин сочетать по два, то получим *девять* разновидностей задач внутри каждой подгруппы. Если же учитывать пять способов связывания величин, то число разновидностей задач дойдет до 25.

Уяснение этой схемы связей однородных величин облегчает работу по составлению задач.

Пусть мы решили сравнить первоначальные количества кратным сравнением и оставшиеся количества разностным

---

[1] Смотри нашу статью «К вопросу о содержании и систематизации арифметических задач» («Математика в школе», 1958, № 5) и [76].

сравнением, для этого находим:

$$75\ кг : 50\ кг = 1\frac{1}{2}\ \text{(раза)};\quad 60\ кг - 30\ кг = 30\ кг$$

В условии составляемой задачи должны быть использованы вместо четырех значений величин соответствующие два результата их сравнения (в данном случае вместо чисел 75 *кг*, 50 *кг*, 60 *кг*, 30 *кг* берем два выражения: в $1\frac{1}{2}$ раза, на 30 *кг*).

Кроме того, в условии задачи должны быть использованы оба значения величины, не включенной в сравнение (20 *кг*, 15 *кг*).

Итак, можем составить следующую задачу:

В первом мешке было муки в $1\frac{1}{2}$ *раза меньше, чем во втором. Когда из первого мешка взяли* 20 *кг, а из второго* 15 *кг, то во втором оказалось муки на* 30 *кг больше, чем в первом. Сколько муки было первоначально в каждом мешке?*

Уравнение $(x - 20) + 30 = \left(1\frac{1}{2}x - 15\right)$.

Составленную задачу обозначим символически так: «КбР», что означает: значения первоначального количества связаны кратным сравнением (буква «К» стоит на *первом* месте); числа второго столбца остались *без изменения* (буква «б» стоит на втором месте); значения оставшегося количества связаны разностным сравнением (буква «Р» стоит на *третьем* месте).

Сравнивая первоначальные количества разностным сравнением, оставшиеся количества — кратным, имеем:

$$75\ кг - 50\ кг = 25\ кг;\quad 60\ кг : 30\ кг = 2\ \text{(раза)}$$

Соответствующая задача вида: «РбК»:

В первом мешке было муки на 25 *кг меньше, чем во втором. Когда из первого мешка взяли* 20 *кг, а из второго —* 15 *кг, то во втором оказалось муки в* 2 *раза больше, чем в первом.*

Сколько муки было первоначально в каждом мешке?

Уравнение $(y - 20) \cdot 2 = y + 25 - 15$.

Оставив один элемент задачи неизменным (например, кратное сравнение значений первой величины), мы можем изменять *способы связывания* значений третьей величины.

Получим следующие виды задач:

КбК, КбП, КбР, КбС, КбЧ.

Аналогично можем обозначить все виды задач первой подгруппы:

РбР	РбК	РбП	РбЧ	РбС
ПбР	ПбК	ПбП	ПбЧ	ПбС
ЧбР	ЧбК	ЧбП	ЧбЧ	ЧбС
СбР	СбК	СбП	СбЧ	СбС

Аналогично можно обозначить задачи двух других подгрупп. Из них составим в качестве примера лишь несколько задач.

Сравним, например, изменения двух количеств (20 и 15) и *оставшиеся количества* (30 и 60), причем первые два числа сравним, применяя понятие *часть от числа* $\left(\frac{15\ кг}{20\ кг} = \frac{3}{4}\right)$; два значения последней величины сравним посредством разности (60 *кг*—30 *кг* = 30 *кг*). Получим задачу типа: «бКР».

В одном мешке было 50 кг муки, а в другом — 75 кг муки. Количество муки, отсыпанной из второго мешка, составило $\frac{3}{4}$ количества муки, отсыпанной из первого мешка. После этого в первом мешке осталось на 30 кг муки меньше, чем во втором.

Сколько муки было отсыпано из каждого мешка?

Уравнение $(50 - x) + 30 = 75 - \frac{3}{4}x$.

Данная задача (как и многие из последующих) легче решается с помощью системы двух уравнений, нежели одним уравнением. Поэтому в дальнейшем мы будем приводить и соответствующее уравнение с одним неизвестным и одну из возможных систем уравнений с двумя неизвестными, посредством которой решается задача.

Так, предыдущая задача сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{3}{4}p \\ (50 - p) + 30 = 75 - k \end{cases}$$

В составляемых нами задачах требовалось определить пару значений одной из двух величин. (Оба значения третьей величины используются в условии задачи.)

Однако при сохранении вида задачи искомыми можно сделать два сравниваемых значения второй величины.

Например, в последней задаче «бКР» вместо того, чтобы находить ответ на вопрос «Сколько килограммов муки было отсыпано из каждого мешка?», можно рассматривать вопрос:

«Сколько килограммов муки *осталось* в каждом мешке?»

Решение.

В первом мешке осталось x *кг*, во втором мешке $(x + 30)$ *кг* муки.

Следовательно, из первого мешка отсыпали $50 - x$, а из второго $75 - x - 30 = 45 - x$ *кг*.

Получаем согласно условию уравнение: $(50 - x) \cdot \frac{3}{4} = (45 - x)$.

Задачу можно решить с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} p = k + 30 \\ (50 - k) \cdot \frac{3}{4} = 75 - p \end{cases}$$

Составим задачу из второй подгруппы. Для этого например, сравним *изменения* кратным сравнением $\left(\frac{20 \text{ кг}}{15 \text{ кг}} = \frac{4}{3}\right)$, а первоначальные количества — посредством процентного отношения $\left(\frac{75 \text{ кг}}{50 \text{ кг}} = \frac{3}{2} = 150\%\right)$.

Соответствующая задача вида «ПбК» выглядит так:

Количество муки, имевшейся во втором мешке, составляло 150% *муки, имевшейся в первом мешке. Когда отсыпали из первого мешка в* $\frac{4}{3}$ *раза больше муки, чем из второго, то в первом мешке осталось* 30 *кг, а во втором* 60 *кг.*

Сколько муки было отсыпано из каждого мешка?

Решение задачи сводится к составлению и решению уравнения $(x + 30) \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}x + 60$, или системы уравнений:

$$\begin{cases} k = \frac{4}{3} p \\ (30 + k) \cdot \frac{3}{2} = 60 + p \end{cases}$$

Если в последней задаче вопрос был бы иной («Сколько муки было первоначально в каждом мешке?»), то, считая основными неизвестными эти величины, получим следующее уравнение: $b - 30 = \left(\frac{3}{2} b - 60\right) \cdot \frac{4}{3}$.

Второй способ приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} k = \dfrac{3}{2}p \\ p - 30 = \dfrac{4}{3}(k - 60) \end{cases}$$

Выше мы исходили из ситуации, когда оба изменения были отрицательными («*отсыпали* из обоих мешков»).

Разнообразие задач увеличится, если использовать две другие возможности изменения величин:

2. Одна величина уменьшается, а другая — увеличивается.

3. Обе величины увеличиваются.

Пусть исходная ситуация, на основе которой будем составлять задачи, выражена в виде таблицы 19.

Таблица 19

	Первоначальное количество в *кг*	Изменение в *кг*	Оставшееся количество в *кг*
Первый мешок	50	+10	60
Второй мешок	75	—45	30

Используя кратное сравнение двух значений первой величины (75 : 50 = 1,5) и разностное сравнение двух значений третьей величины (60 — 30 = 30), получим задачу вида «КбР».

В первом ящике было в $1\frac{1}{2}$ *раза меньше яблок, чем во втором. В первый ящик добавили* 10 *кг яблок, а из второго отсыпали* 45 *кг яблок. После этого в первом ящике стало яблок на* 30 *кг больше, чем во втором.*

Сколько килограммов яблок было первоначально в каждом ящике?

Уравнение $x + 10 = \left(\frac{3}{2}x - 45\right) + 30.$

$$\begin{cases} k = \dfrac{3}{2}p \\ p + 10 = (k - 45) + 30 \end{cases}$$

Составим обратную по структуре задачу вида «РбК», в которой используется разностное сравнение значений первой величины (75 *кг* — 50 *кг*=25 *кг*) и кратное сравнение значений третьей величины (60 *кг* : 30 *кг* = 2 (раза)).

Получим задачу.

В одном ящике было на 25 *кг яблок меньше, чем в другом. Когда в первый ящик добавили* 10 *кг, а из второго взяли* 45 *кг, в первом ящике стало яблок в* 2 *раза больше, чем во втором.*

Сколько килограммов яблок было первоначально в каждом ящике?

Уравнение $x + 10 = 2\ (x + 25 - 45)$.

Система уравнений $\begin{cases} k = p - 25 \\ k + 10 = (p - 45) \cdot 2 \end{cases}$

Пусть далее исходная ситуация, на основе которой будем составлять задачи, выражается схемой (таблица 16).

Таблица 20

	Первоначальное количество в *т*	Изменение в *т*	Оставшееся количество в *т*
Первый склад	60	+90	150
Второй склад	30	+270	300

Используем процентное отношение двух значений первой величины (60 : 30 = 2 = 200%) и разностное сравнение двух значений второй величины (270 — 90 = 180).

Получается задача вида «ПРб».

Количество угля, имевшегося на первом складе, составляет 200% *количества угля, имевшегося на втором складе. Когда привезли на первый склад на* 180 *т меньше, чем на второй, то на первом складе оказалось* 150 *т, а на втором —* 300 *т.*

Узнать, сколько угля привезли на каждый склад.

Уравнение $150 - x = [300 - (x + 180)] \cdot 2$.

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = p - 180 \\ 150 - k = (300 - p) \cdot 2 \end{cases}$$

Сравнивая первоначальные количества посредством разностного сравнения (60 *т* — 30 *т* = 30 *т*), а изменения —

посредством процентного отношения (270 *т* : 90 *т* = 3 = = 300%), получим задачу вида «РПб».

На первом складе было угля на 30 т больше, чем на втором складе. Когда на второй склад привезли столько угля, что он составил 300% от угля, привезенного на первый склад, то на первом оказалось 150 т угля, а на втором оказалось 300 т угля.

Сколько тонн угля привезли на каждый склад?

Уравнение $150 - x = (300 - 3x) + 30$.

Система уравнений.

$$\begin{cases} k = p + 30 \\ (150 - k) \cdot 3 = 300 - p \end{cases}$$

Следует отметить, что имеются различные возможности для увеличения числа вариаций, являющихся частными случаями по отношению к расмотренным выше типам, а именно:

а) Значения двух величин могут быть равными (было в двух мешках поровну, отгрузили поровну, стало поровну и т. п.)

б) Одно из изменений этих значений может быть нулевым, то есть соответствующее количество не изменяется.

В логическом плане эти оттенки имеют характерные особенности и поэтому они увеличивают число вариантов задач.

Мы рассмотрели исчерпывающим образом классификацию большой совокупности задач, решаемых по теме «Уравнения первой степени».

Структура этих задач состоит из 6 чисел, из которых два числа даются в условии, а четыре значения представлены *в скрытом виде* — результатами попарного сравнения.

Вне данной совокупности задач остаются более простые задачи (задачи пропедевтического цикла), в которых также используются одноименные величины.

Анализ задачника П. А. Ларичева показывает, что в нем нет большинства рассмотренных выше разновидностей задач.

Например, в нем почти отсутствуют задачи из второй и третьей подгрупп по нашей классификации.

Стало быть, в практике обучения мало используется возможная градация возрастания трудности задач и достаточное разнообразие по логическому содержанию задач.

Б) Задачи, в которых используются значения трех различных взаимосвязанных величин

Аналогично классификации задач, в которых используются значения одной и той же величины, можно выполнить классификацию второй совокупности алгебраических задач, в которых используются тройки *различных* величин.

Эти величины являются величинами, связанными прямо пропорциональной зависимостью, например: скорость (v), время (t) и пройденный путь (s); цена, количество товара и стоимость; производительность, время и объем работы; норма расхода горючего, время движения транспорта (или расстояние) и количество горючего; удельный вес, объем тела и вес тела; урожайность, площадь посева и валовой сбор; пропускная способность трубы, время и количество перемещенного вещества; грузоподъемность одной машины, количество машин и вес перевезенного груза; удельная теплоемкость, количество вещества и количество теплоты; удельная теплота плавления (парообразования), количество вещества и количество теплоты; теплоемкость, разница температур и количество теплоты; плотность жидкости, глубина погружения и давление; сила тока, время и количество электричества; сила тока, сопротивление участка цепи и падение напряжения на этом участке; напряжение одной батареи, количество таких батарей и общее напряжение при последовательном соединении их; сила, расстояние и работа; мощность, время и работа, теплотворность, количество топлива и количество теплоты; сила, длина плеча и момент силы[1].

Эти тройки величин однотипны по математической зависимости между ними.

Для краткости обозначим первые величины (скорость, цена, производительность и т. п.) — буквой v; вторые величины (время, количество товара и т. п.) — буквой t; третьи величины (пройденный путь, стоимость, объем работы и т. п. — буквой s).

В предыдущем случае тройки величин были связаны с помощью действий первой ступени $A \pm B = C$, а в рас-

---

[1] Отметим, что в задачниках используется значительно меньше физических величин, чем это можно было сделать. Большинство из приведенных здесь зависимостей по действующим программам курса физики известны ученикам уже в VII классе.

сматриваемом случае величины связываются посредством действий второй ступени.

1) $v \cdot t = s$

2) $\frac{s}{v} = t$

3) $\frac{s}{t} = v$

Последние две связи являются следствиями первой. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь одну форму связи

$$v \cdot t = s$$

Выберем какую-нибудь простую ситуацию, например следующую:

Велосипедист ехал 6 *часов, проезжая в час по* 15 *км, всего проехал* 90 *км. Пешеход шел* 8 *часов, проходил в час* 5 *км, всего прошел* 40 *км.*

Запишем эти соотношения в виде двух равенств:

$$15 \cdot 6 = 90$$

$$5 \cdot 8 = 40$$

Для составления задач, решаемых посредством уравнений, необходимо, как это было подробно показано выше, сравнить (связать) два значения из трех (четыре числа из шести).

Аналогично рассмотренному выше необходимо различать следующие три подгруппы задач:

первая подгруппа: сравнивают первую величину и третью величину (I, III) (например, скорость и путь);

вторая подгруппа: сравнивают вторую величину и третью величину (II, III) (например, время и путь);

третья подгруппа: сравнивают первую величину и вторую величину (I, II) (например, скорость и время).

Как будет показано ниже, среди задач последней подгруппы содержатся задачи, решаемые квадратным уравнением; задачи первых двух подгрупп решаются уравнениями первой степени.

Внутри каждой подгруппы задачи различаются по виду связи между числами, подобно изложенному выше.

Для упрощения изложения рассмотрение видовых понятий *процентное отношение*, *кратное сравнение*, *часть от числа* заменим одним родовым понятием *кратное сравнение*.

Тогда разновидности задач какой-либо подгруппы (например, II, III) можно обозначить так:

бРР	бРК	бРС
бКР	$\boxed{\text{бКК}}$	бКС
бСР	бСК	бСС

Из этих 9 задач сочетанию «бКК» соответствует неопределенная задача и ее следует исключить из рассмотрения.

Итак, существуют 8 разновидностей задач, в которых используются тройки разнородных величин, решаемых аппаратом линейных уравнений.

Составим несколько задач, пользуясь приведенной классификацией.

1. Два значения второй величины заменим кратным сравнением $\left(8\ ч : 6\ ч = \frac{4}{3}\right)$ и соответствующие значения третьей величины — разностным сравнением (90 *км* — — 40 *км* = 50 *км*).

Получаем задачу вида «бКР».

Велосипедист был в пути в $\frac{4}{3}$ *раза меньше времени, чем пешеход. Скорость велосипедиста* 15 *км/ч, скорость пешехода* 5 *км/ч. Сколько времени был каждый из них в пути, если путь велосипедиста на* 50 *км больше пути пешехода?* Уравнение $15 \cdot x - 5 \cdot \frac{4}{3}x = 50$.

Система уравнений.

$$\begin{cases} k = \frac{4}{3}p \\ 15p - 5k = 50 \end{cases}$$

2. Составим задачу вида «бРК», для этого найдем: 8 *ч* — —6 *ч* = 2 *ч*; $\frac{90\ км}{40\ км} = 2{,}25$ (раза).

Велосипедист был в пути на 2 *часа меньше пешехода. Скорость велосипедиста* 15 *км/ч, скорость пешехода* 5 *км/ч. Сколько времени был каждый из них в пути, если велосипедист прошел расстояние в* 2,25 *раза большее, чем пешеход?* Уравнение $15 \cdot x = 5 \cdot (x + 2) \cdot 2{,}25$.

Система уравнений:

$$\begin{cases} k = p + 2 \\ 15p = 5 \cdot k \cdot 2{,}25 \end{cases}$$

3. Составим задачу вида «бКС», для чего найдем $\frac{6ч}{8ч} = \frac{3}{4}$; 90 *км* + 40 *км* = 130 *км*.

Условие задачи следующее:

Велосипедист и пешеход движутся навстречу друг другу. До встречи велосипедист был в пути $\frac{3}{4}$ того времени, сколько шел до встречи пешеход. Скорость велосипедиста равна 15 км/ч, пешехода 5 км/ч. Узнать, сколько километров прошел каждый из них, если расстояние между пунктами, из которых они вышли, равно 130 км.

Уравнение $15 \cdot \frac{3}{4} x + 5 \cdot x = 130$.

Система уравнений

$$\begin{cases} k = \frac{3}{4} \quad p \\ 15 \cdot k + 5p = 130 \end{cases}$$

4. Для составления задачи «бСК» определяем: 6 *ч*+8 *ч*= = 14 *ч*, $\frac{90\ км}{40\ км} = 2{,}25 = 225\%$.

Получим задачу:

Путешественник ехал сначала на велосипеде, потом шел пешком; всего он был в пути 14 ч, причем на велосипеде он проехал расстояние в $2\frac{1}{4}$ раза большее, чем прошел пешком.

Определить, сколько километров он проехал на велосипеде и сколько прошел пешком, если скорость движения на велосипеде равна 15 км/ч, а скорость пешехода — 5 км/ч.

Уравнение $15 \cdot x = 5\,(14 - x) \cdot 2\frac{1}{4}$.

Система уравнений:

$$\begin{cases} k + p = 14 \\ 15k = 5p \cdot 2\frac{1}{4} \end{cases}$$

Задачи из второй подгруппы составим, используя зависимость между ценой, количеством товара и стоимостью:

Пусть куплено 12 м шелка по 6 руб. за метр, всего на 72 руб. и 15 м сукна по 10 руб за метр — всего на 150 руб.

Запишем сокращенно условие в форме двух тождеств:

$$\begin{cases} 6 \cdot 12 = 72 \\ 10 \cdot 15 = 150 \end{cases}$$

5. Составим задачу вида «СбР», для чего находим: 6 руб. + 10 руб. = 16 руб.; 150 руб. — 72 руб. = 78 руб. Имеем следующую задачу:

1 м шелка и 1 м сукна стоят вместе 16 руб. За 15 м сукна уплатили на 78 руб. больше, чем за 12 м шелка. Определить цену 1 м шелка и 1 м сукна.

Уравнение $15x - 12(16 - x) = 78$.

Система уравнений

$$\begin{cases} k + p = 16 \\ 15k - 12p = 78 \end{cases}$$

Если бы в качестве неизвестных были взяты иные числа (стоимость шелка и сукна в отдельности), то задача решалась бы посредством уравнения (или системы уравнений) с дробными членами.

Уравнение $\frac{y}{12} + \frac{y + 78}{15} = 16$.

Система уравнений:

$$\begin{cases} a - b = 78 \\ \frac{a}{15} + \frac{b}{12} = 16 \end{cases}$$

6. Составим задачу вида «СбС», для чего находим суммы двух значений первой и третьей величин: 10 руб. + 6 руб. = 16 руб.; 72 руб. + 150 руб. = 222 руб.

Имеем следующую задачу:

1 м шелка и 1 м сукна стоят вместе 16 руб. За 12 м шелка и 15 м сукна всего уплатили 222 руб. Найти цену 1 м шелка и цену 1 м сукна.

Уравнение $x \cdot 12 + (16 - x) 15 = 222$

Система уравнений:

$$\begin{cases} k + p = 16 \\ 12k + 15p = 222 \end{cases}$$

При другом выборе основных неизвестных получили бы следующее уравнение с дробными членами:

$$\frac{y}{12} + \frac{222 - y}{15} = 16$$

Задачу в этом случае также можно было бы решить с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} a+b=222 \\ \dfrac{a}{12}+\dfrac{b}{15}=16 \end{cases}$$

8. Классификация алгебраических задач, приводящих к квадратным уравнениям

Если классификация арифметических и алгебраических задач, приводящих к линейным уравнениям, в какой-то мере служила предметом обсуждения методистов, то классификация задач, приводящих к квадратным уравнениям, в литературе почти не затрагивалась.

В большинстве задач на квадратное уравнение используются тройки величин, связанных прямо пропорциональной зависимостью.

Все разновидности задач, решаемых посредством квадратных уравнений, содержатся среди задач третьей подгруппы, в которых связываются значения первой и второй величин (за исключением небольшого количества задач, в которых используются специальные соотношения, например теорема Пифагора).

Выберем какую-либо простую ситуацию:

Колхоз засеял пшеницей 2000 га, средняя урожайность с гектара составила 18 ц; колхоз собрал всего 36 000 ц зерна.

Совхоз засеял пшеницей 1200 га, средняя урожайность составила 24 ц с гектара, общий сбор зерна в совхозе равен 28 800 ц.

Запишем эти соотношения в виде двух равенств:

$$18 \cdot 2000 = 36\,000$$

$$24 \cdot 1200 = 28\,800$$

Составим задачу вида «КРб», то есть используем числа

$$\frac{18ц}{24ц}=\frac{3}{4};\ 2000\ га - 1200\ га = 800\ га$$

Условие задачи будет следующее:

Площадь, занятая пшеницей в колхозе, была на 800 га больше площади, занятой пшеницей в совхозе. Средняя *урожайность пшеницы с гектара в колхозе составляла $\frac{3}{4}$ средней урожайности в совхозе.*

Определить среднюю урожайность пшеницы в колхозе и совхозе, если общий сбор пшеницы в колхозе составил 36 000 ц, а в совхозе 28 800 ц.

Решение[1]

Пусть *у га* — площадь, занятая пшеницей в совхозе.

Уравнение $\frac{36\,000}{y+800} = \frac{3}{4} \cdot \frac{28\,800}{y}$.

Мы выяснили, что данная задача решается посредством уравнения первой степени ($4y \cdot 36\,000 = 3 \cdot 28\,800 \cdot (y + 800)$).

Нетрудно также установить, что все задачи, в символическом обозначении которых встречается кратное сравнение («К»), решаются посредством уравнения первой степени; таковыми будут, кроме рассмотренной задачи «РКб», еще и следующие: СКб, КРб, КСб.

Таким образом, к 16 ранее установленным разновидностям необходимо добавить еще 4. Следовательно, существует всего 20 видов задач, выражающих связь между тремя разнородными величинами, которые решаются с помощью линейных уравнений.

Только четыре вида задач этой группы решаются посредством квадратного уравнения: РРб, РСб, СРб, ССб.

Задача «РСб».

Площадь, занятая под пшеницей в колхозе, была на 800 га больше площади, занятой под пшеницей в совхозе. Сумма среднего урожая пшеницы с 1 га в колхозе и с 1 га в совхозе составляет 42 ц.

Определить, какова была урожайность пшеницы в совхозе и колхозе в отдельности, если всего в колхозе собрали 36 000 ц, а в совхозе — 28 800 ц.

---

[1] В этой и последующих задачах мы ограничиваемся лишь составлением уравнения. Хотя задача составлена исходя из одной совокупности исходных данных, в некоторых случаях, кроме намеченного заранее ответа, получаются вторые ответы (подробнее об этом сказано дальше).

Решение

I способ. Урожайность пшеницы в совхозе составила x *ц*. Уравнение $\frac{28\,800}{x} - \frac{36\,000}{42 - x} = 800$.

II способ. Площадь, засеянная пшеницей в совхозе, составляет y *га*.

Уравнение $\frac{28\,800}{y} + \frac{36\,000}{y + 800} = 42$.

Задача «СРб».

Пшеницей в колхозе и совхозе засеяно всего 3200 га. Урожайность в колхозе оказалась ниже урожайности в совхозе на 6 ц с гектара.

Узнать, сколько гектаров было занято пшеницей в колхозе и совхозе в отдельности, если общий сбор пшеницы в колхозе составил 36 000 ц, а в совхозе 28 800 ц.

Решение

I способ. В совхозе засеяно пшеницей x *га*.

Уравнение $\frac{28\,800}{x} - \frac{36\,000}{3200 - x} = 6$.

II способ. В совхозе с 1 *га* убирали в среднем по y *ц* пшеницы.

Уравнение $\frac{36\,000}{y} + \frac{28\,800}{y + 6} = 3200$.

Задача вида: «ССб».

Пшеницей в колхозе и совхозе засеяно всего 3200 гектаров. Сумма среднего урожая пшеницы с 1 га в колхозе и урожая с 1 га в совхозе составляет 42 ц.

В колхозе собрали 36 000 ц, а в совхозе 28 800 ц.

Сколько центнеров пшеницы собрали с одного гектара в колхозе и совхозе в отдельности?

Решение

I способ. В колхозе урожайность равна x *ц* с 1 *га*

Уравнение $\frac{36\,000}{x} + \frac{28\,800}{42 - x} = 3200$.

II способ. В колхозе было засеяно пшеницей y *га*.

Уравнение: $\frac{36\,000}{y} + \frac{28\,800}{3200 - y} = 42.$

Основные подгруппы задач, приводящих к квадратным уравнениям, удобно обозначить следующими терминами: *разность — разность, разность — сумма, сумма — разность, сумма — сумма.*

Из этих подгрупп задач вторая и третья подгруппы в сущности не отличаются друг от друга: форма уравнений для задач обоих видов одинакова.

9. Некоторые вопросы составления задач, приводящих к квадратным уравнениям

а) *Составление задач по аналогии*

Мы рассмотрели выше классификацию основных видов задач, приводящих к квадратным уравнениям, в которых используются прямо пропорциональные величины.

Однако в школьных задачниках предлагаются задачи и более простые.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Длина прямоугольника на* 10 *м больше ширины. Найти длину и ширину прямоугольника, если площадь его равна* 119 *кв. м.*

Решение. $x(x + 10) = 119.$

Ученик может составить аналогичную задачу, рассуждая так:

1) составим числовое тождество:

$$27 \cdot 23 = 621$$

2) Преобразуем тождество в уравнение, для чего одно из чисел сделаем неизвестным.

Пусть $27 = y$, тогда $23 = 27 - 4 = y - 4$.

Имеем: $y(y - 4) = 621$.

3) Соответственно составленному уравнению формулируем условие задачи.

Основание параллелограмма на 4 *м длиннее его высоты. Определить основание и высоту параллелограмма, если площадь его равна* 621 *кв. м.*

II. Пусть решена задача:

Некоторое двузначное число, умноженное на сумму его цифр, дает 567. *Найти это число, зная, что цифра его десятков на* 3 *превосходит цифру единиц.*

Решение

Пусть искомое число имеет x десятков и $(x - 3)$ единиц. Имеем уравнение: $(10x + x - 3) \cdot (x + x - 3) = 567$. Откуда имеем $x = 6$. Искомое число 63.

Составим аналогичную задачу, но используем вместо суммы цифр разность цифр числа.

1. Пусть искомым числом будет 93.

Помножим это число на разность его цифр:

$$(90 + 3)\ (9 - 3) = 552$$

2. Пусть неизвестным будет цифра единиц $x = 3$.

Тогда число десятков в 3 раза больше числа единиц (вместо разностного сравнения цифр используем кратное сравнение их).

Получили уравнение: $(30\,x + x)\ (3x - x) = 552$.

3. Формулируем соответствующую задачу:

Некоторое двузначное число, умноженное на разность его цифр, дает 552. Найти это число, зная, что цифра его десятков в 3 раза превосходит цифру единиц.

б) *Преобразование задачи, приводящей к квадратному уравнению, в задачу, решаемую линейным уравнением (и обратно).*

Задача может иметь различное содержание в зависимости от того, какие взаимосвязанные величины используются в ней.

Например, возьмем задачу:

Имеются два колеса. Окружность большего колеса длиннее окружности меньшего колеса на 1 м. Определить окружности колес, зная, что большее колесо на расстоянии 64 м сделало на 6 оборотов больше, чем меньшее на расстоянии 30 м:

Решив эту задачу, мы найдем *два* решения:

4 *м* и 3 *м*; $2\frac{2}{3}$ *м* и $1\frac{2}{3}$ *м*.

Примечательно то, что из исходного тождества можно получить задачу, решаемую посредством уравнения первой степени. Для этого достаточно было бы, оставив знаменатели известными, сравнить числители.

1. Пусть $64 = y$, тогда $30 = y - 34$.

Получаем следующее уравнение: $\frac{y}{4} - \frac{y - 34}{3} = 6$. (II)

2. Соответствующая задача будет такова:

Имеются два колеса. Окружность большего колеса равна 4 м, окружность меньшего колеса 3 м. Определить, на каком расстоянии большее колесо сделает на 6 оборотов меньше, чем второе колесо на расстоянии, меньшем расстояния, пройденного первым колесом, на 34 метра.

Решив эту задачу, мы найдем один *ответ*: $x = 64$ *м*.

Таким образом, получается следующее соответствие: задаче, решаемой посредством уравнения первой степени (II) и имеющей одно решение ($x = 64$), соответствует задача, решаемая посредством уравнения второй степени, имеющая, вообще говоря, два решения (4 и $2\frac{2}{3}$).

Отсюда вывод:

При решении задач в разделе «Квадратные уравнения» следует иногда *преобразовывать* задачу, приводящую к линейному уравнению, в задачу, решаемую посредством квадратного уравнения и наоборот.

в) *Составление задач, имеющих два решения*

В задачнике П. А. Ларичева среди задач, решаемых с помощью квадратного уравнения (изд. 10, № 430—529) *нет задач*, имеющих два решения, удовлетворяющих условиям.

Раздел «Система уравнений второй степени» (изд. 10, № 639—667) содержит только две задачи (№ 653, 656), которые имеют по два решения.

Представляет интерес найти способ составления задач, имеющих два решения, удовлетворяющие условию[1].

Выше была рассмотрена задача, решаемая уравнением:

$$\frac{64}{x} - \frac{30}{x-1} = 6 \qquad \text{(I)}$$

Этой задаче удовлетворяли два решения: 4 *м* и 3 *м*; $2\frac{2}{3}$ *м* и $1\frac{2}{3}$ *м*.

---

[1] Примечательно, что в задачниках К. С. Барыбина, П. С. Моденова, К. У. Шахно содержится только по одной задаче с двумя решениями (см.: С. М. Чуканцов, Решение задач, приводящих к квадратным уравнениям в средней общеобразовательной школе с политехническим обучением, «Ученые записки Калужского госпединститута», 1958, вып. V).

Проанализируем, как решалось это уравнение:

$$64x - 64 - 30x = 6x^2 - 6x \qquad \text{(II)}$$

$$6x^2 - 40x + 64 = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$3x^2 - 20x + 32 = 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$(x - 4)\left(x - \frac{8}{3}\right) = 0 \qquad \text{(V)}$$

1) Пусть, например, требуется составить задачу, которая должна иметь два значения неизвестной величины $x_1 = 15$, $x_2 = 10$; иначе говоря, решение задачи должно сводиться к уравнению

$$(x - 15)(x - 10) = 0 \qquad (\text{V}_1)$$

$$x^2 - 25x + 150 = 0 \qquad (\text{IV}_1)$$

Пусть искомое уравнение имеет вначале вид:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+k} = p; \text{ при } k = -5 \text{ имеем уравнение}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-5} = p \qquad (\text{I}_1)$$

$$ax - 5a + bx = px^2 - 5px.$$

$$px^2 - (5p + a + b)x + 5a = 0 \qquad (\text{II}_1)$$

Приравнивая коэффициенты уравнения (IV_1) и (II_1), получим:

$$p = 1;\ a = 30;\ -(5\cdot 1 + 30 + b) = -25$$

Откуда $b = -10$. Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{30}{x} - \frac{10}{x-5} = 1 \qquad (\text{I}_1)$$

Для составления задачи мы можем обе части данного уравнения умножить на какое-либо число, например на 4:

$$\frac{120}{x} - \frac{40}{x-5} = 4 \qquad (\text{I}_2)$$

Соответствующая задача:

Через одну трубу в минуту поступает на 5 гл воды меньше, чем через другую. Определить пропускную способность каждой трубы, зная, что через первую трубу 120 гл воды вливаются за время, большее на 4 мин, чем время, за которое через вторую трубу вливается 40 гл воды.

Ответ. 10 *гл* и 5 *гл*; 15 *гл* и 10 *гл*. (IV_1)

2. Составим еще одну задачу к уравнению.

Наблюдая соотношение между параметрами исходного уравнения $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+k}=p$, замечаем, что значение p можно заранее принять равным 1, а в качестве параметра k удобнее взять делитель числа 150.

Пусть, например, $k=+6$.

Имеем: $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+6}=1$ (I_2)

$$ax+6a+bx=x^2+6x;\quad x^2+(6-a-b)x-6a=0$$

Приравнивая коэффициенты этого уравнения коэффициентам уравнения $x^2-25x+150=0$ (IV_1), находим: $-6a=150$, $a=-25$; $6+25-b=-25$; $b=56$.

Получаем следующее уравнение:

$$-\frac{25}{x}+\frac{56}{x+6}=1$$

Помножив обе части уравнения на произвольное число, например на 8, перепишем его так:

$$\frac{448}{x+6}-\frac{200}{6}=8$$

Условие соответствующей задачи может быть, например, таким:

Два груза весом 448 г и 200 г расположены на горизонтальной плоскости. Площадь опоры первого груза на 6 $см^2$ больше площади опоры второго груза. Определить площадь опоры каждого груза, если давление первого груза на 8$\frac{Г}{см^2}$ больше давления второго груза.

О т в е т. 16 $см^2$ и 10 $см^2$; 21 $см^2$ и 15 $см^2$.

В задачниках по алгебре обычно отсутствуют задачи, при решении которых отрицательный корень соответствующего уравнения имел бы реальный смысл; поэтому среди учеников распространена привычка, не раздумывая, отбрасывать отрицательные решения, будто бы как не имеющие смысла.

Составим задачу, в которой имеет смысл и отрицательный и положительный корни соответствующего уравнения.

Пусть задача должна приводиться к уравнению $(x-3)(x+4)=0$ или к уравнению $x^2+x-12=0$. (А)

Пусть вначале по условию задачи должно получаться уравнение вида:

$$\frac{a}{m+x}+\frac{b}{m-x}=c \qquad (Б)$$

$$am-ax+bm+bx=cm^2-cx^2$$

$$cx^2+(b-a)x+am+bm-cm^2=0 \qquad (В)$$

Приравнивая коэффициенты уравнений (А) и (В), имеем:

$$c=1; \; b-a=+1; \; m(a+b-cm)=-12$$

Наметим произвольное значение m, например, равным 12; тогда из последнего уравнения получим: $12\cdot(a+b-1\cdot 12)=-12$; $a+b=11$; но $b=a+1$ и поэтому $2a+1=11$; $a=5$; $b=6$.

Итак, уравнение выглядит так:

$$\frac{5}{12+x}+\frac{6}{12-x}=1 \qquad (Б)$$

Последнее уравнение можно видоизменить, умножив обе его части, например, на 4:

$$\frac{20}{12+x}+\frac{24}{12-x}=4 \qquad (Б_1)$$

Сформулируем задачу, соответствующую уравнению ($Б_1$):

Пароход прошел по реке 20 км в одном направлении и затем 24 км в противоположном направлении, затратив на весь путь 4 ч. (Время, затраченное на остановки, исключается.)

Собственная скорость парохода 12 км/ч.

Определить скорость течения реки.

Решение уравнения к задаче завершается получением двух корней: $x_1=3$, $x_2=-4$.

Оба корня имеют реальный смысл: положительный корень соответствует тому случаю, когда вначале направление движения парохода совпадает с направлением течения реки (в этом случае скорость течения реки — 3 *км/ч*); отрицательный корень соответствует тому случаю, когда на первом этапе направления движения парохода и течения реки — противоположны (в этом случае скорость течения реки — 4 *км/ч*).

Такие задачи, в которых оба значения *направленной* величины (в данном случае, скорости) имеют реальный смысл, весьма поучительны для учащихся.

Отметим, что в условии задачи числа 20 *км* и 24 *км* можно поменять местами.

Тогда уравнение будет иметь вид: $\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4$, причем оно приведется к уравнению $(x+3)(x-4)=0$.

Корни $x_1=-3$ и $x_2=+4$ также оба будут удовлетворять условиям задачи.

10. Составление задач, приводящих к системе уравнений второй степени

При составлении задач, решаемых посредством системы уравнений второй степени, ученики могут, видоизменяя форму уравнений, получать новые задачи. Покажем это на одном примере.

На 420 рублей можно купить материи первого сорта на 7 м меньше, чем второго сорта на ту же сумму. Если бы цена материи первого сорта была бы снижена на 2 рубля, а цена материи второго сорта была бы снижена на 18 руб. за метр, то первого сорта было бы куплено на 5 м меньше, чем второго.

Указать цену материи первого и второго сорта в отдельности.

Решение. $$\frac{420}{x}-\frac{420}{y}=7 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{420}{x-2}-\frac{420}{y-18}=5$$

Ответ. 30 руб.; 60 руб.

После решения этой задачи ученики могут преобразованием исходной задачи получить новые задачи, соответствующие системам, полученным из системы (I) вариацией знаков членов левой части:

$$\begin{cases} \frac{420}{x}+\frac{420}{y}=21 \\ \frac{420}{x-2}-\frac{420}{y-18}=5 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{cases} \frac{420}{x}+\frac{420}{y}=21 \\ \frac{420}{x-2}+\frac{420}{y-18}=25 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

$$\begin{cases} \frac{420}{x}-\frac{420}{y}=7 \\ \frac{420}{x-2}+\frac{420}{y-18}=25 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Условие последней задачи можно составить так:

Если на покупку материи каждого сорта затратить по 420 руб., то первого сорта можно купить на 7 м меньше, чем второго.

Если бы цена материи первого сорта была снижена на 2 рубля, а цена материи второго сорта была бы снижена на 18 рублей, то всего было бы куплено при тех же затратах 25 метров.

Определить цену каждого сорта материи.

Кроме составления задач посредством варьирования знаков в уравнениях (то есть преобразования задач), возможно составлять задачи и по аналогии с решенными.

Пусть дана задача:

Среднее арифметическое двух чисел равно 29, а среднее геометрическое равно 21. Найти эти числа.

Решение. $\frac{x+y}{2}=29$

$\sqrt{xy}=21.$ Ответ. 9 и 49.

Легко составить подобную задачу, *наметив* заранее ответ:

Пусть $x=25$, $y=1$.

Имеем: $\frac{25+1}{2}=13;$ $25\cdot 1=25.$

Далее ученики составляют систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=13 \\ \sqrt{xy}=5, \end{cases}$

формулируют условие соответствующей задачи и решают составленную задачу.

Пусть еще дана задача:

По круговой дорожке длиной 660 м движутся два конькобежца навстречу друг другу и сходятся через каждую минуту.

Найти скорость каждого из них, если первый пробегает окружность на 22 сек скорее второго.

Решение. $\begin{cases} \dfrac{660}{x+y} = 60 \\ \dfrac{660}{x} - \dfrac{660}{y} = 22 \end{cases}$

Ответ. 6 *м/сек*; 5 *м/сек*.

Нетрудно составить аналогичную задачу.

Составим систему числовых тождеств:

$$\begin{cases} \dfrac{546}{7+6} = 42 \\ \dfrac{546}{7} - \dfrac{546}{6} = 13 \end{cases}$$

Затем преобразуем систему тождеств в систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{546}{x+y} = 42 \\ \dfrac{546}{x} - \dfrac{546}{y} = 13. \end{cases}$$

а по системе составим условие задачи.

* * *

Проведенная нами классификация задач на основе применения понятия *способ сравнения чисел* помогает учителю разобраться в совокупности задач и связях между ними; при необходимости учитель может составить сам недостающие в школьном задачнике разновидности задач.

Большинство из описанных приемов составления задач, как показывает наша практика, вполне доступно для учеников.

Чтобы облегчить составление задач учащимися, надо повесить в классе справочную таблицу разнообразных величин: скоростей, цен, удельных весов, географических и биологических данных и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ленин, Философские тетради, Госполитиздат, 1936.

2. В. И. Ленин, Сочинения, изд. 4, т. 32, Госполитиздат, 1950.

3. В. И. Ленин, Собрание сочинений, изд. 4, т. 5.

4. Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1964.

5. М. Н. Алексеев, Диалектика форм мышления, изд. Московского университета, 1959.

6. П. К. Анохин, Новые данные об особенностях афферентного аппарата условного рефлекса. Материалы совещания по психологии, изд. АПН РСФСР, М., 1957.

7. П. К. Анохин, Опережающее отражение действительности, «Вопросы философии», 1962, № 7.

8. Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская, Психология усвоения знаний в школе, изд. АПН РСФСР, М., 1959.

9. Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская, Психология учения, «Психологическая наука в СССР», т. II, изд. АПН РСФСР, М., 1960.

10. В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе. Учебник для педагогических институтов, Учпедгиз, М., 1954.

11. Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, Физматгиз, М., 1960.

12. А. А. Вайман, Шумеро-Вавилонская математика, Издательство восточной литературы, М., 1961.

13. А. Д. Виноградова, Понимание и усвоение школьниками IV — VI классов математической функциональной зависимости. Кандидатская диссертация (рукопись), 1953.

14. Р. Вудвортс, Экспериментальная психология, Издательство иностранной литературы, М., 1950.

15. И. А. Гибш, Алгебра. Пособие для учителей, Учпедгиз, М., 1960.

16. С. Голдман, Теория информации, Издательство иностранной литературы, М., 1957.

17. И. П. Гурский, Функции и построение графиков, Учпедгиз, М., 1960.

18. Л. В. Занков и Н. В. Кузнецова, Из опыта обучения арифметике в I классе, Учпедгиз, М., 1961.

19. Л. В. Занков, О предмете и методах дидактических исследований, изд. АПН РСФСР, М., 1962.

20. Д. Ф. Изаак, По поводу статьи И. И. Смирнова «Тригонометрические уравнения в школьном курсе», «Математика в школе», 1955, № 1.

21. Г. Н. Ильина, О проявлении угасательного и дифференцированного торможения в реакции обратного знака, «Психологические особенности высшей нервной деятельности человека», изд. АПН РСФСР, М., 1959.

22. Е. Н. Кабанова-Меллер, Психология формирования знаний и навыков у школьников, изд. АПН РСФСР, М., 1962.

23. З. И. Калмыкова, Психологический анализ формирования понятия о типе задачи, «Известия АПН», 1947, № 12.

24. Г. Д. Кириллова, О воспитании у школьников самостоятельности, «Советская педагогика», 1961, № 1.

25. А. И. Китов и Н. А. Криницкий, Электронные вычислительные машины, изд. АН СССР, М., 1958.

26. Колесникова, Пути повышения знаний учащихся по арифметике, «Народное образование», 1962, № 1.

27. В. П. Колпачев, Роль установления двусторонних связей в усвоении географического материала, «Вопросы психологии», 1957, № 4.

28. А. Н. Колмогоров, О профессии математика, изд. 3, дополненное, изд. Московского университета, 1959.

29. А. Н. Колмогоров, Кибернетика, т. 51, изд. БСЭ.

30. Г. С. Костюк, Вопросы психологии мышления, «Психологическая наука в СССР», т. 1, изд. АПН РСФСР, М., 1959.

31. А. Я. Котов, Система и методы изучения табличного умножения и деления, Учпедгиз, М., 1958.

32. Дж. Кристиан, Понимание принципа на основании обобщения отношения, «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 3.

33. Н. К. Крупская, Сочинения, т. IV.

34. В. А. Крутецкий, а) О математических способностях у школьников, «Вопросы психологии личности», Учпедгиз, М., 1960; б) Опыт анализа способностей к усвоению математики у школьников, «Вопросы психологии», 1959, № 1.

35. Л. Н. Ланда, а) Опыт применения математической логики и теории информации к некоторым проблемам обучения, «Вопросы психологии», 1962, № 2; б) О некоторых недостатках умственной деятельности учащихся, затрудняющих самостоятельное решение задач, «Известия АПН РСФСР», 1961, № 115.

36. В. Латышев, Руководство к преподаванию арифметики, 1896.

37. А. Н. Леонтьев, Проблемы развития психики, изд. АПН РСФСР, М., 1959.

38. А. И. Маркушевич, Математические знания молодежи, «Математика в школе», 1961, № 1.

39. Н. А. Менчинская, Психология обучения арифметике, Учпедгиз, М., 1955.

40. «Межвузовская конференция по диалектической логике», «Научные доклады высшей школы», Философские науки, 1960, № 2.

41. Э. И. Моносзон, Методика и результаты изучения знаний учащихся, «Советская педагогика», 1962, № 9.

42. М. Ф. Морозов, Воспитание самостоятельности мысли школьников в учебной работе, Учпедгиз, 1959.

43. Л. А. Мухлынина, Приемы работы по арифметике в третьем классе (Из опыта работы заслуженной учительницы РСФСР О. П. Евладовой), г. Молотов, 1956.

44. П. Новиков, Учите мыслить, «Учительская газета» от 6. VII 1960 г.

45. «Организация урока в передовых школах Липецкой области». Сборник статей, Липецкое книжное издательство, 1962.

46. И. П. Павлов, Полное собрание сочинений, т. III, ч. 2, 1951.

47. И. П. Павлов, Полное собрание сочинений, т. IV, 1951.

48. «Павловские среды», т. II, М.—Л. 1949.

49. Передовые статьи в «Учительской газете»: «Съезды учителей», 24. XII 1959 г.; «Математика нужна всем», 2. III 1961 г.

50. Я. И. Петров, К вопросу о формировании понятий «больше-меньше на столько-то» у первоклассника, «Ученые записки Новозыбковского госпединститута», 1953.

51. А. В. Петровский, Беседы о психологии, Учпедгиз, М., 1962.

52. Жан Пиаже, Структуры математические и операторные структуры мышления, «Преподавание математики». Сборник статей. Перевод с французского А. И. Фетисова. Учпедгиз, М., 1960.

53. А. М. Полевщикова, Пути повышения сознательности в работе над умножением в III классе школы, «Вопросы обучения», «Ученые записки» Ленинградского госпединститута имени Герцена, т. 142, 1957.

54. А. С. Пчелко, а) Методика преподавания арифметики, Учпедгиз, М., 1952.

б) Актуальные вопросы преподавания арифметики, «Начальная школа», 1963, № 3.

55. В. В. Рассохин и Н. А. Целинский, Неполное изображение в ортогональных проекциях, Учпедгиз, М., 1960.

56. «Рекомендации XIX Международной конференции Министерством народного просвещения, относящиеся к преподаванию математики в средних школах, «Математическое просвещение», 1957, № 1.

57. С. Л. Рубинштейн, О мышлении и путях его исследования, изд. АН СССР, 1958.

58. В. Н. Русанов, Формирование математических понятий в средней школе. Кандидатская диссертация (рукопись), 1953.

59. К. А. Рыбников, История математики, изд. Московского университета, 1960.

60. Ю. А. Самарин, Очерки психологии ума, изд. АПН РСФСР, М., 1962.

61. Е. Сапарина, Кибернетика внутри нас, изд. «Молодая гвардия», М., 1962.

62. А. Д. Семушин, И. А. Гибш, А. И. Фетисов, Развитие логического мышления в процессе преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, М., 1958.

63. А. А. Смирнов, Развитие памяти, «Психологическая наука в СССР», т. I, изд. АПН РСФСР, 1959.

64. Л. Н. Толстой, Педагогические сочинения, Учпедгиз, М., 1948.

65. С. И. Туманов, Элементарная алгебра. Пособие для самообразования, Учпедгиз, М., 1960.

66. А. Я. Хинчин, О формализме в школьном преподавании математики, «Известия АПН РСФСР, 1946, вып. 4.

67. Н. Г. Чеботарев, Математическая автобиография, «Успехи математических наук», т. IV (27), 1948.

68. Я. Ф. Чекмарев, Методика преподавания арифметики в 5 и 6 классах, Учпедгиз, 1962.

69. Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия, Учпедгиз, М., 1956.

70. М. И. Шапиро, Использование материала по сельскому хозяйству на уроках математики, «Математика в школе», 1960, № 2.

71. М. Н. Шардаков, К вопросу о развитии причинного мышления у школьника, «Известия АПН РСФСР», 1948, № 47.

72. Л. В. Шеншев, Мышление в процессе усвоения математики и иностранного языка, «Вопросы психологии», 1960, № 4.

73. П. А. Шеварев, Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника, изд. АПН РСФСР, 1959.

74. П. М. Эрдниев, Проверка решения как необходимый элемент обучения математике, «Математика в школе», 1953, № 4, и 1955, № 4; «Начальная школа», 1953, № 10.

75. Его же, Развитие навыков самоконтроля при обучении математике, Учпедгиз, М., 1957.

76. Его же, Обратная задача в курсе арифметики начальной школы, «Начальная школа», 1960, № 6.

77. Его же, Об изучении тождественных преобразований в VI—VII классах, «Математика в школе,» 1960, № 1.

78. Его же, К вопросу об активизации преподавания предметов физико-математического цикла, «Советская педагогика», 1957, № 8.

79. Его же, а) Составление уравнений как творческая форма работы учащихся, «Математика в школе», 1961, № 1.
б) Об одновременном изучении некоторых вопросов математики «Математика в школе», 1963, № 4.

80. Его же, Сравнение и обобщение при обучении математике, Учпедгиз, М., 1960.

81. Его же, а) О научных основах построения упражнений по предметам физико-математического цикла, «Советская педагогика», 1962, № 7;

б) Кибернетические понятия и проблемы дидактики, «Советская педагогика», 1963, № 11.

82. Его же, Обучать математике активно, творчески, экономно, «Народное образование», 1962, № 9.

83. Его же, О прямых и обратных связях, возникающих при обучении химии», «Химия в школе», 1962, № 4.

84. К изучению взаимно обратных явлений и понятий, «Физика в школе», 1962, № 5.

85. Его же, О роли прямых и обратных связей при обучении математике, «Вопросы психологии», 1962, № 6.

86. Его же, а) Об изучении задач с пропорциональными величинами в начальной школе, «Начальная школа», 1963, № 3.

б) Об изучении сложения и вычитания в I классе, «Начальная школа», 1963, № 9.

б) О путях перестройки обучения арифметике в начальной школе, «Начальная школа, 1963, № 12.
87. П. М. Эрднив, Видеть практические потребности школы, «Вестник высшей школы», 1963, № 1.
88. Его же, Об использовании приема противопоставления на уроках русского языка (Некоторые замечания о структуре упражнений). Сб. «Из опыта работы по русскому языку в восьмилетней школе» Учпедгиз, М., 1963.
89. Дж. Юнг, Как преподавать математику, 1912.
90. В. Л. Ярощук, Роль осознания типовых признаков при решении арифметических задач определенного типа, «Вопросы психологии», 1959, № 1.
91. Kusch, Mathematik für Schule und Beruf, Teil 1, Arithmetik, Girardet, Essen, 1958.
92. H. E. Parr, School mathematics, Part 1, London, 1952.
93. Lehrbuch der Mathematik, Für die qrundschule, 5 Schuljahr, Berlin, Leipzig, 1950.
94. Rene Iollq, L'Arithmétique au cours élémentaire, Paris, 1952.
95. Aritmetika pro 6 ročnik, Praha, 1960.
96. Algebrai feladotok 1 kötet, Budapest, 1959.
97. Culegere de probleme si exercitii de Aritmetika, pentra klasse V, VI, Bucarest, 1955.
98. A. M. Rusiecki, A. A. Zarzecki, Aritmetika, I, Warszawa, 1953.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III

Глава III. **Задачи в курсе алгебры**

Пюрвя Мучкаевич Эрдниев

МЕТОДИКА УПРАЖНЕНИЙ ПО АРИФМЕТИКЕ
И АЛГЕБРЕ

Редактор *А. А. Свечников*
Художник *Галадский*
Художественный редактор *А. В. Сафонов*
Технический редактор *В. Ф. Егорова*
Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 1/X 1964 г. Подписано к печати 18 III 1965 г.
$84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 10,25 (17,22). Уч.-изд. л. 15,26
Тираж 48 000 экз. Пл. 1965 г. № 239. А00106. Заказ № 168.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, г. Саратов, ул Чернышевского, 59.

Цена без переплета 41 коп., переплет 10 коп.