БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Н. Н. НИКИТИН

РЕШЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

УЧПЕДГИЗ · 1950

БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Н. Н. НИКИТИН

РЕШЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЁРТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1950

ПРЕДИСЛОВИЕ К 1-му ИЗДАНИЮ

Книга о решении арифметических задач явилась результатом работы с учителями — корреспондентами Центрального научно-исследовательского института начальной школы и в частности с учителями школы имени Горького в Москве — Т. М. Прониной, Н. И. Жаровой, Т. И. Блиновой и Н. И. Усковой, работа которых подверглась особенно внимательному изучению и анализу.

Книга предназначена для начинающего учителя, поэтому некоторые места в ней изложены может быть слишком подробно.

Перечисленные и разобранные в ней задачи не исчерпывают всех видов задач, которые могут решаться в начальной школе. Арифметические задачи могут быть настолько разнообразны, что их трудно охватить полностью. Учитель может дополнить те задачи, которые даны в книге, используя имеющиеся задачники, данные социалистического строительства и свой опыт.

Май 1938 г.

1. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧ

Основная задача преподавания арифметики в начальной школе[1]) заключается в том, чтобы научить учащихся:

1) правильно, быстро и сознательно производить устно и письменно вычисления с отвлечёнными и именованными числами в объёме установленной программы;

2) самостоятельно решать задачи примерно в пределах тех трудностей, какие указаны в программе и в сборниках арифметических задач для начальной школы.

Задачи в начальной школе имеют значение и как средство для выяснения и усвоения основных математических понятий и как материал для развития математического мышления учащихся, уменья рассуждать, логически обосновывать свои суждения, применять вычислительные навыки к решению практических вопросов. Решение задач должно пронизывать весь курс математики, причём эта работа должна ставиться так, чтобы она требовала от учащихся размышления, сообразительности.

Если школа сравнительно удовлетворительно справляется с обучением счёту и вычислениям, то в области решения арифметических задач школа в своей массе находится пока на невысоком уровне.

Это подтверждается проверочными работами, которые в разное время проводились Министерством просвещения. Об этом говорят отзывы преподавателей математики средней школы, наконец, на это же указывают и сами преподаватели начальной школы.

Школа сравнительно мало уделяет внимания решению задач, отводя львиную долю учебного времени на усвоение техники вычислений.

Умение решать задачи, как уже было сказано, имеет огромное образовательное и воспитательное значение.

---

[1]) Под начальной школой здесь имеются в виду и младшие классы средней и неполной средней школы.

В арифметической задаче всегда имеется налицо то или иное конкретное жизненное содержание, тесная функциональная связь между величинами, включёнными в задачу. Выявление функциональной зависимости между данными задачи, выражение их через те или иные арифметические действия, получение новых данных, использование их для установления новых связей с данными задачи — всё это требует от учащихся большой и интересной мыслительной работы.

Более отчётливо можно себе представить разницу между числовым примером и задачей, если взять конкретные примеры.

Пусть мы имеем числовой пример

$$675:15+35-58$$

и арифметическую задачу:

«Пассажирский поезд прошёл за 17 час. 850 *км*, а товарный за 19 час. прошёл 798 *км*. На сколько километров в час быстрее шёл пассажирский поезд?»

В первом примере учащемуся даны числовые данные и в то же время показано, какие действия и в каком порядке следует выполнить над этими числовыми данными.

В задаче *также* имеются числовые данные, но *какие действия* следует произвести, *над какими числовыми данными, в каком порядке, как использовать вновь полученные данные, в каком случае следует считать решение задачи законченным,* иными словами, какое число даёт ответ на поставленный в задаче вопрос, — всё это предоставляется преодолеть самим учащимся или с помощью учителя, или вполне самостоятельно.

От учащегося требуется, чтобы он прежде всего понимал жизненное содержание задачи. В данном случае нужно понимать: что значит движение поезда, его скорость, затраченное время, пройденное расстояние. Надо знать, какая зависимость существует между величинами: скорость, время и пройденное расстояние; как, зная время и пройденное расстояние, найти скорость поезда; как найти разницу между двумя различными скоростями. Наконец, учащийся должен уметь производить вычисления над числами, данными в задаче, и теми числами, которые получаются в результате тех или иных действий.

Всё это, конечно, потребует от учащихся значительно больших усилий, чем при решении числового примера, где нужно только умение производить уже указанные арифметические действия над числовыми данными.

Естественно, что большинство учащихся в школе с решением числовых примеров справляется значительно быстрее и успешнее, чем с решением задач.

Интересные результаты получились в школе им. Горького (Москва), когда было подвергнуто проверке и сравнению, насколько быстро справляются различные учащиеся одного и того же класса с решением примеров и с решением задач.

Картина получилась такая: в то время, как при решении числовых примеров не получилось особенно большой разницы в отношении затраты времени у лучших и слабых учащихся, при решении же задач разница в затрате времени получилась огромная.

Вот некоторые показатели, полученные в IV классе школы.

Учащиеся получили задание выполнить на уроке ряд упражнений на все четыре действия с отвлечёнными числами.

За	25 мин.	закончили	работу	6	человек,	т. е.	20%	
»	26—28 »	»	»	16	»	»	53,4	»
»	30—31 »	»	»	7	»	»	23,4	»
»	40 »	»	»	1	»	»	3,3	»
				30	человек,	т. е.	100%	

Таким образом, основная масса 96,7% учащихся (29 из 30) выполнила работу в 25—31 мин. Расхождение всего на 6 мин. И только один ученик затратил на работу 40 мин.; при этом затрата времени у него только в 1,6 раза превышает затрату времени лучшего учащегося ($40:25=1,6$).

Совсем иная картина получилась при сравнении затраты времени учащимися на решение задач.

В том же IV классе было предложено решить четыре задачи, причём была обеспечена самостоятельность работы и текст задач был напечатан отдельно для каждого учащегося. Необходимо было только поставить номер задачи и записать решение без записи плана. Таким образом, подверглось учёту время, какое затрачивает учащийся на усвоение условия и самое решение задачи, без записи её условия и плана решения.

Данные получились следующие:

В 5	мин.	решили	все	4 задачи	6	человек,	т.	е.	20,0%
» 6	»	»	»	»	1	»	»	»	3,3 »
»10	»	»	»	»	7	»	»	»	23,4 »
»11	»	»	»	»	2	»	»	»	6,7 »
»12	»	»	»	»	2	»	»	»	6,7 »
»13	«	»	»	»	5	»	»	»	16,7 »
»14	»	»	»	»	1	»	»	»	3,3 »
»15	»	»	»	»	4	»	»	»	13,3 »
»18	»	»	»	»	1	»	»	»	3,3 »
»25	»	»	»	»	1	»	»	»	3,3 »
					30	человек,	т.	е.	100%

Как видно из таблицы, колебания в затрате времени здесь несравненно более значительны, чем при решении числовых примеров.

Наименьшее время и наибольшее время здесь колеблется от 5 до 25 мин., одни учащиеся затрачивают времени в 5 раз больше других, причём показатели разбросаны по всему промежутку времени и оссбенно резко бросаются в глаза индивидуальные особенности учащихся.

В то время как при решении примеров разница в диапазоне времени 96,7% учащихся (29 и 30 учащихся) колеблется в пределах всего лишь 6 мин. (31 мин.— 25 мин.), разница в диапазоне времени у различных учащихся при решении задач колеблется в пределе 20 мин. (25 мин.—5 мин.).

В некоторых классах расхождение во времени, которое было затрачено учащимися на решение одних и тех же задач, было ещё более значительным (от 4 до 35 мин.), при решении же примеров такого резкого расхождения не наблюдалось.

Всё это говорит о том, что решение задач для учащихся является делом значительно более сложным, чем решение числовых примеров, и не все учащиеся с одинаковой успешностью справляются с этой работой.

Это и понятно, потому что здесь ученики встречаются с целым рядом трудностей и многие учащиеся нуждаются здесь в помощи, в особом подходе, в дополнительных мероприятиях и разъяснениях как по самому содержанию задачи, так и по вскрытию зависимостей между данными и искомыми задачи.

В этой сложной работе особенно важное значение для учащихся имеет последовательность в расположении задач по степени трудности, полное понимание тех простейших элементов, из которых состоит задача, подбор целого ряда разнообразных подготовительных упражнений, помогающих освоению сложного процесса, каким является решение задачи.

Имеет большое значение и ясность самого содержания условия задачи, подбор иллюстраций, когда это нужно для чёткого понимания условия, продуманность в постановке вопросов, применение наиболее рациональных приёмов, связанных с решением задач, и т. д.

Иными словами, особенно важное значение, как и во всякой работе, будет иметь здесь прежде всего последовательность в преодолении трудностей, система, которая должна быть строго соблюдена при правильной постановке работы по решению задач.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

Говоря о системе в расположении задач, прежде всего следует остановиться на выяснении понятий «простые» и «составные» (сложные) задачи. Простой задачей в арифметике принято считать задачу, для решения которой нужно *произвести только одно* арифметическое действие. Например: «Путешественник прошёл в первый день 25 *км*, а во второй 17 *км*. Сколько километров прошёл путешественник за два дня?» Или: «Перо стоит 3 коп. Сколько стоят 5 перьев?»

В первой задаче 25 *км* и 17 *км* являются *данными* задачи, а путь, пройденный за два дня, является *искомым* числом. Во второй задаче *данными* являются 3 коп. и 5 перьев, а *искомым* числом будет стоимость 5 перьев.

Первая задача решается одним действием сложения:

$$25 \text{ км} + 17 \text{ км} = 42 \text{ км}.$$

Вторая задача решается умножением:

$$3 \text{ коп.} \times 5 = 15 \text{ коп.}$$

Составными задачами в арифметике принято считать задачи, для решения которых нужно произвести два или больше действий. Например: «Пенал стоит 30 коп., а книга на 20 коп. дороже. Сколько стоят книга и пенал вместе?» Для решения этой задачи уже необходимо выполнить два действия. Она состоит из двух простых задач. Первая простая задача: «Пенал стоит 30 коп., а книга на 20 коп. дороже. Сколько стоит книга?» Решение первой простой задачи: 30 коп. + 20 коп. = 50 коп. Вторая простая задача: «Пенал стоит 30 коп., а книга 50 коп. Сколько стоят книга и пенал вместе?» Решение этой задачи: 30 коп. + 50 коп. = 80 коп. Только решив первую простую задачу, мы получаем данные для решения второй простой задачи. Решив вторую простую задачу, мы ответили и на вопрос всей составной задачи.

Иногда задачи решаются тремя, четырьмя, пятью и более действиями, т. е. такая составная задача распадается на три, четыре, пять и т. д. простых задач. Последовательно решая эти простые задачи, мы в конце концов отвечаем на вопрос данной составной задачи.

Таким образом, всякая составная задача может быть решена лишь при том условии, если учащийся умеет сознательно решать простые задачи. Следовательно, прежде чем приступать к решению составных задач, следует предварительно научить учащихся решению простых задач. К рассмотрению их мы и перейдём.

3. ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ

Когда и как следует приступать к решению простых задач

Решение простых задач следует начать одновременно с первых шагов обучения учащихся производству арифметических действий над числами сначала первого, а затем второго десятка.

Покажем это на некоторых конкретных примерах. Положим, учащиеся изучают какой-нибудь раздел табличного сложения, например присчитывание двух:

$$1 + 2 =$$
$$2 + 2 =$$
$$3 + 2 =$$
$$4 + 2 =$$

и т. д.

Какой первый этап в изучении этого раздела? Учитель откладывает на полочке классной доски, положим, 3 кубика (или 3 шарика на классных счётах) и к ним прибавляет ещё 2 кубика (или на счётах придвигает к 3 шарикам 2 шарика).

Учитель: Сколько было у меня кубиков сначала?

Ученик: Было сначала 3 кубика.

Учитель: Сколько теперь стало кубиков?

Ученик: Стало 5 кубиков.

Учитель: Как мы получили 5 кубиков?

Ученик: К 3 кубикам прибавили 2 кубика и стало 5 кубиков.

То же самое учащиеся делают у себя на столах, используя имеющийся под руками дидактический материал (кубики, палочки) или зарисовывая в тетрадях кружочки, крестики:

○○○ ○○ ××× ××

На этих примерах, оперируя с определёнными *предметами* или изображениями предметов, учащиеся получают первое представление о действии сложения, *усваивают приём сложения* и запоминают полученный результат, связывая его с данными слагаемыми.

Второй этап. После непосредственного оперирования с предметами (или с их рисунками), которые ученик видит и осязает, *учитель переходит к задачам*, где самих предметов перед глазами уже нет, а ученик должен себе их представить, вообразить.

Например, учитель предлагает такую задачу: «Ваня сорвал с одной грядки 3 морковки и с другой ещё 2 морковки. Сколько всего морковок сорвал Ваня?» Или: «Петя поймал сначала 3 рыбки, а потом ещё 2. Сколько всего рыбок поймал Петя?» и т. д.

Учащиеся решают предложенные задачи на сложение с теми же числовыми данными.

Третий этап. Учитель спрашивает: «Сколько будет, если к 3 прибавить 2?» Иными словами, учащиеся переходят к отвлечённому счёту, где они уже оперируют с понятиями. Конкретное уже отступает на второй план, получается совершенно абстрактная операция над абстрактными числами.

Таким же образом идёт изучение других случаев сложения, вычитания, умножения, деления, и каждый раз учащийся начинает изучение вопроса с непосредственного опыта над видимыми и осязаемыми предметами или их изображениями и затем переходит к решению задач, где говорится о конкретных предметах и, наконец, к отвлечённому счёту.

В связи с такими, насколько возможно *ясными и простыми приёмами учащиеся получают первое понятие об арифметических действиях:* сложении, вычитании умножении и делении, и научаются применять их к решению простых задач.

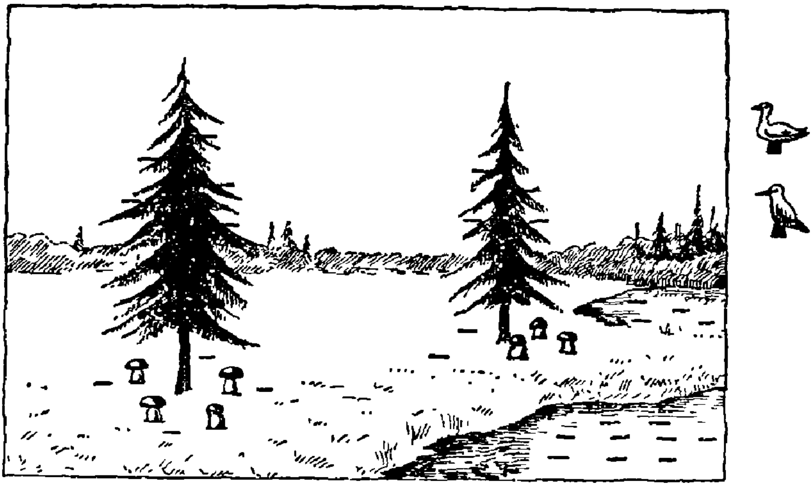


Рис. 1.

В некоторых школах для первоначального выяснения понятий арифметических действий прибегают к красочным плакатам. Например, перед учащимися на классной доске вывешивается плакат с изображением луга или леса (размеры примерно 100 *см* $\times$ 80 *см* в зависимости от размеров класса и количества учащихся).

На плакате сделаны прорезы, в которые можно вставить изображения птиц, грибов и т. д. (рис. 1).

Учитель читает: «Под одним деревом было 4 гриба (при этом вставляет в прорезы изображения грибов), а под другим деревом было 3 гриба (вставляет изображения 3 грибов). Сколько было грибов всего?»

Или: «На дереве сидело 6 птиц (вставляет в прорезы 6 изображений птиц), 2 птицы улетели (вынимает 2 изображения). Сколько птиц осталось на дереве?»

Такие пособия производят впечатление в первые дни пребывания учащихся в школе, когда изучается первый десяток, когда дети ещё нуждаются в особых приёмах для привлечения внимания. При изучении же действий в пределе 20, а тем более 100, пособия, подобные указанному, будут уже громоздкими, ненужными. Отнимая много времени у учителя на самое изготовление, они лишают его возможности заняться более ценной работой, а кроме того числа, превышающие десяток, уже не так легко обозримы, поэтому и самое пособие теряет свою педагогическую ценность.

Изучение действий в пределе 10, а затем в пределе второго десятка, сопровождаемое решением задач, даёт учащимся *первое понимание смысла арифметических действий*, однако здесь ещё не охватываются полностью все случаи применения четырёх арифметических действий, в которых отражалось бы всё разнообразие человеческой практики. Независимо от изучения арифметических действий простые задачи требуют самостоятельной работы с ними в определённой системе.

Рассмотрим, в какие формы могут выливаться простые задачи по отдельным арифметическим действиям. Разберём их в отдельности.

Сложение

Предположим, мы производим сложение двух чисел:

$$12+8=$$

Если мы в практике школы ограничимся только решением числовых примеров, то нам не удастся полностью вскрыть содержание этого действия. Вскроем мы это содержание только тогда, когда решим соответственно подобранные задачи.

Например: «В одном куске было 12 *м* материи, а в другом 8 *м*. Сколько всего метров материи в 2 кусках?» Здесь мы находим сумму двух чисел 12 *м* + 8 *м* = 20 *м*. Возьмём другую задачу: «В одном куске 12 *м* материи, а в другом на 8 *м* больше. Сколько метров будет во втором куске?» Здесь мы одно число увеличиваем на 8 единиц. Таким образом, в сложении имеется две разновидности задач: нахождение суммы и увеличение на несколько единиц. Эти задачи не одинаковы по своему содержанию, их надо разделять и изучать с учащимися поособому. Это обстоятельство нашло отражение и в программе: сначала в ней даны задачи на нахождение суммы и затем особо выделены задачи на увеличение на несколько единиц.

Вычитание

Вычитание исторически возникло значительно более разнообразными путями, чем сложение: оно возникло и независимо от сложения и как действие, обратное сложению. Отсюда сложнее и его логическая сторона.

Какие мы имеем здесь разновидности?

Предположим, нам нужно выполнить такое действие:

$$20 - 3 =$$

Для того чтобы вскрыть содержание вычитания, нам нужно решить несколько задач. Например: «Было 20 тетрадей, 3 тетради израсходовали; сколько осталось?» Это нахождение остатка, наиболее простой случай:

20 тетрадей — 3 тетради = 17 тетрадей.

Вторая задача: «В одном шкафу имеется 20 тетрадей, а в другом на 3 тетради меньше. Сколько тетрадей во втором шкафу?»

В этом случае конкретное содержание будет уже совершенно другое. Мы находим здесь не просто остаток, а уменьшаем число на несколько единиц.

Третья задача: «В одном шкафу 20 тетрадей, а в другом только 3. На сколько тетрадей в первом шкафу больше, чем во втором?» Здесь мы находим разницу, здесь налицо разностное сравнение.

Все три указанные задачи решаются одним и тем же действием, но конкретно содержание этих задач различно и требует иного подхода к их решению. В первом случае мы находим остаток, во втором — число уменьшаем на несколько единиц и в третьем — разностно сравниваем.

Задачи эти различной трудности. Нужно их давать в известной последовательности, начать с задач на нахождение остатка, затем дать задачи на уменьшение на несколько единиц, а задачи на разностное сравнение целесообразнее вводить несколько позднее.

Умножение

Умножение есть по существу то же сложение, только слагаемые здесь одинаковые. Содержание умножения поэтому близко подходит к содержанию сложения.

Предположим, нам нужно

$$5 \times 3 =$$

Какое содержание мы сюда можем вложить?

Можем взять такую задачу: «С 3 грядок я сорвал по 5 огурцов. Сколько я всего сорвал огурцов?» В этом случае мы находим сумму трёх одинаковых слагаемых (она здесь называется произведением).

$$5 \text{ огурцов} \times 3 = 15 \text{ огурцов.}$$

Мы можем построить задачу и таким образом: «С одной грядки я сорвал 5 огурцов, а с другой — в 3 раза больше. Сколько огурцов я снял со второй грядки?» Здесь уже другое содержание: увеличение в несколько раз.

Следовательно, умножение употребляется в двух случаях:

1) при нахождении суммы нескольких равных слагаемых, которая здесь называется произведением, и

2) при увеличении числа в несколько раз. Эти задачи решаются в том и другом случае совершенно одинаково: 5 огурцов $\times$ 3 = 15 огурцов, но по смыслу они различны.

Деление

Деление — наиболее сложное арифметическое действие, потому что и историческое происхождение его сложнее остальных действий. Ведь деление могло возникнуть совершенно самостоятельно. Так оно, несомненно, и было. Нужно было, например, респределить те или иные предметы питания, те или иные орудия; и весьма возможно, что деление развивалось совершенно самостоятельно, независимо от других действий. Могло возникнуть оно и как дальнейший этап в развитии вычитания. Например: сколько раз можно отнять от 20 по 4. $20-4-4-4-4-4=0$ (деление по содержанию). Деление развивалось и как действие, обратное умножению.

$$x \cdot 5 = 20, \quad x = 20:5 \quad \text{или} \quad 4 \cdot x = 20, \quad x = 20:4.$$

Таким образом, по своему происхождению деление возникло различными путями: и самостоятельно и как дальнейший этап в развитии вычитания и умножения. Отсюда сложнее и его логическая сторона. Поясним это конкретными примерами.

Пусть мы имеем числовой пример:

$$20:4=$$

Мы и здесь не вскроем, конечно, жизненного содержания этого действия, пока не решим ряд конкретных задач. Положим, 20 тетрадей нужно раздать поровну 4 ученикам. Сколько тетрадей получит каждый? Это (20 тетрадей : 4 = 5 тетрадей) — деление на равные части.

Решим вторую задачу: «Один мальчик купил 20 тетрадей, а другой — в 4 раза меньше. Сколько тетрадей купил второй мальчик?»

20 тетрадей : 4 = 5 тетрадей.

Здесь мы имеем уменьшение в несколько раз.

Третья задача — деление по содержанию, деление-измерение: «20 тетрадей учитель роздал учащимся и дал каждому по 4 тетради. Сколько учеников получили эти тетради?» Здесь 20 нужно разделить не на 4, а по 4; 20 тетрадей : 4 тетради = 5; 5 учеников получили тетради.

Наконец, возьмём такую задачу: «У одного ученика 20 тетрадей, а у другого 4. Во сколько раз у первого ученика больше тетрадей, чем у второго?» 20 тетрадей : 4 тетради = 5 (в 5 раз). Здесь мы имеем кратное сравнение.

Таким образом, деление применяется в таких случаях: 1) деление на равные части (сюда же относится нахождение одной части числа); 2) уменьшение в несколько раз (сводится к делению на равные части); 3) деление по содержанию; 4) кратное сравнение (сводится к делению по содержанию).

Особенно резко разделяются первые два случая от последующих двух случаев. Положим, нам нужно 6 разделить на 2 (на две равные части), мы будем иметь такой вид: ××× ×××, а 6 разделить по 2 такой: ×× ×× ×× (деление по содержанию).

Необходимо, чтобы в практике школы при решении задач термины соответствовали содержанию задачи.

Схематически распределение простых задач на четыре арифметических действия можно представить таким образом:

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
Нахождение суммы	Нахождение остатка	Нахождение суммы равных слагаемых	Деление на равные части (нахождение одной части)
Увеличение на несколько единиц	Уменьшение на несколько единиц	Увеличение в несколько раз	Уменьшение в несколько раз
	Разностное сравнение		Деление по содержанию
			Кратное сравнение

Изучаются простые задачи в основном на первом и втором году обучения. Задачи на увеличение и уменьшение в несколько раз, разностное и кратное сравнение, на деление по содержанию отнесены на второй год обучения. Но это не значит, что мы должны ограничиться изучением простых задач только в I и II классах; несомненно, простые задачи должны иметь место на третьем и четвёртом годах обучения, только здесь в задачах будут другие числовые данные: на первом году обучения мы берём небольшие числа, а в старших классах будем иметь дело с тысячами, миллионами, вводим именованные числа, дроби.

Простые задачи здесь будут непосредственно связаны с изучением техники выполнения действий. Например: С л о ж е н и е. 1) «Куплено $^1/_2$ *кг* конфет одного сорта и $^1/_4$ *кг* конфет другого сорта. Сколько килограммов конфет куплено всего?» (Нахождение суммы.)

2) «Кедровых орехов купили $^3/_4$ *кг*, а грецких на $^1/_2$ *кг* больше. Сколько килограммов купили грецких орехов?» (Увеличение на несколько единиц.)

Вычитание. 1) «От доски длиной в 4 *м* отрезали доску длиной в 2 *м* 50 *см*. Сколько метров доски осталось?» (Нахождение остатка.) 2) «Длина класса 8 *м*, а ширина класса на 1 *м* 50 *см* меньше. Какова ширина класса?» (Уменьшение на несколько единиц.) 3) «В одном куске осталось 15 *м* 60 *см* сукна, а в другом 13 *м* 75 *см*. На сколько больше сукна осталось в первом куске?» (Разностное сравнение.)

Умножение. «На 12 грузовиках увезли по 1250 кирпичей. Сколько всего кирпичей увезли на этих грузовиках?»

Деление. «Колхоз собрал в прошлом году 975 *ц* зерна, а в текущем 2925 *ц*. Во сколько раз больше зерна собрал колхоз в нынешнем году?» и т. д.

Простые задачи должны также иметь место и при проведении устного счёта.

Упражняться в решении простых задач, доводить до сознания учащихся содержание арифметических действий мы должны и на последующих годах обучения, чтобы учащиеся окончательно овладели ими и не допускали неправильного применения основных арифметических терминов.

Бывают случаи, когда ученики допускают такие неправильные выражения: «Увеличить на 5 раз» или «Увеличить в 5 единиц». Это является следствием недостаточного внимания к решению простых задач.

Задачи на увеличение и уменьшение и на разностное и кратное сравнение чисел

Не все простые задачи являются для учащихся одинаково доступными. Задачи на увеличение и уменьшение, а также на разностное и кратное сравнение, значительно труднее, чем задачи на нахождение суммы или остатка или задачи, где приходится делить число на равные части. Это следует учитывать при планировании работы и построении уроков, уделяя больше внимания наиболее трудным задачам.

Выяснение понятий: увеличить на несколько единиц, уменьшить на несколько единиц, увеличить в несколько раз, уменьшить в несколько раз, отчётливое понимание разностного и кратного сравнения, — может быть достигнуто лишь при условии, если решению такого рода простых задач будут предшествовать объяснения учителя на наглядных пособиях и непосредственные упражнения учащихся с дидактическим материалом.

Объяснения здесь должны быть предельно просты, кратки и доступны учащимся.

Разберём это на конкретных примерах.

Задачи на увеличение числа на несколько единиц

Учитель откладывает на первой проволоке классных счётов, например, 5 шариков. На другой проволоке откладывает также 5 шариков. Устанавливается, что шариков на обеих проволоках отложено поровну. Затем учитель прибавляет к 5 шарикам, находящимся на одной из проволок, 2 шарика. Где стало больше шариков? На сколько больше? Вызывается ученик к классным счётам.

Учитель: Отложи на одной проволоке 3 шарика. Отложи на второй проволоке столько шариков, чтобы их было на 2 больше, чем на первой проволоке.

Ученик откладывает на второй проволоке сначала 3 шарика, а затем ещё 2.

Ряд аналогичных упражнений учащиеся по указанию учителя выполняют на имеющемся у них дидактическом материале (кубики, палочки), делают зарисовки в тетрадях; например, в одной строчке ставится 3 крестика, а в другой на 1 крестик больше:

× × ×
× × × ×

После таких подготовительных упражнений учитель задаёт учащимся соответствующие задачи.

«Сын нашёл 8 грибов, а отец на 2 гриба больше. Сколько грибов нашёл отец?»

«Тетрадь стоит 10 коп., а ручка на 3 коп. дороже. Сколько стоит ручка?»

«Грядка под огурцами длиной в 8 *м*, а грядка под морковью на 2 *м* длиннее. Какова длина грядки под морковью?» и т. д.

Часть задач решается устно, часть с записью решения на классной доске и в ученических тетрадях.

Учащиеся сами пробуют составить такие задачи, где приходится увеличивать данное число на несколько единиц. Составленные учащимися задачи разбираются. После этого учащиеся решают самостоятельно аналогичные задачи из сборника по указанию учителя.

Задачи на уменьшение числа на несколько единиц

Учитель откладывает на двух проволоках классных счётов по одинаковому числу шариков, например, по 7. Учащиеся устанавливают, что на обеих проволоках шариков поровну.

Учитель отнимает от одной семёрки 2 шарика. Стало непоровну: на второй проволоке стало на 2 шарика меньше.

Вызывается к классным счётам ученик. По заданию учителя он откладывает на двух проволоках одинаковое число шариков, например по 10.

Учитель: Сделай так, чтобы на второй проволоке было на 4 шарика меньше, чем на первой. (На первой проволоке должно остаться то же число шариков.)

Ученик от 10 шариков на одной проволоке отнимает 4 шарика. На проволоках получается 10 и 6 шариков.

Ряд аналогичных упражнений учащиеся по заданию учителя выполняют на классных счётах, на кубиках, а затем на дидактическом материале, путём зарисовок в тетрадях, причём сначала откладывается или зарисовывается первое число, а затем сразу число, уменьшенное на заданное число единиц.

Такие подготовительные упражнения дают возможность перейти к сознательному решению задач на уменьшение на несколько единиц.

«Утром рыбак поймал 12 рыбок, а вечером на 3 рыбки меньше. Сколько рыбок он поймал вечером?»

«Длина класса 8 *м*, а ширина — на 2 *м* меньше. Сколько метров составляет ширина класса?»

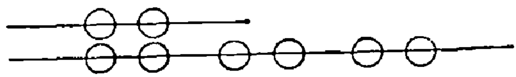
«Карандаш стоит 8 коп., а перо на 5 коп. дешевле. Сколько стоит перо?» и т. д.

Учащиеся затем сами составляют задачи на уменьшение на несколько единиц. Эти задачи разбираются с точки зрения правильности их построения, реальности данных. Затем учащиеся решают по указанию учителя самостоятельно такие задачи из сборника.

Полезно провести параллельное решение устных и письменных задач на увеличение и уменьшение заданного числа на несколько единиц и сопоставить эти задачи.

Задачи на увеличение числа в несколько раз

Учитель откладывает на одной проволоке классных счётов, например, 2 шарика, а на другой раздельно, по парам, 6 шариков. В случае отсутствия классных счётов то же самое можно сделать на кубиках, отложив их на полочках, приспособленных к классной доске. Можно это заменить простейшими рисунками на классной доске.



Учитель: Сколько шариков на верхней проволоке?

Ученик: 2 шарика.

Учитель: Сколько раз по 2 шарика на второй проволоке?

Ученик: 3 раза по 2 шарика.

Учитель: В таких случаях говорят: на второй проволоке мы отложили шариков в 3 раза больше, чем на первой.

Далее учитель откладывает на одной проволоке 2 шарика, а на другой предлагает учащимся отложить шариков в 2, 4, 5 раз больше, чем на первой проволоке.

Упражнения можно продолжить на дидактическом материале. Учащиеся, пользуясь имеющимися у них кубиками, палочками, откладывают сначала 3, 4, 5 предметов, а затем откладывают в 2, 3, 4 раза больше.

После этого учитель задаёт задачи на увеличение числа в несколько раз.

«Вчера я прочитал 4 страницы, а сегодня в 3 раза больше. Сколько страниц я прочитал сегодня?»

«Перо стоит 3 коп., а ручка в 5 раз дороже. Сколько стоит ручка?»

«В саду растут яблоня и берёза. Яблоня вышиной в 3 *м*, а берёза в 4 раза выше. Скольким метрам равна высота берёзы?»

«Глубина реки у берега 2 *м*, а на середине река в 3 раза глубже. Какова глубина в середине реки?»

Затем учащиеся в классе и дома сами составляют подобные задачи и по указанию учителя решают самостоятельно такие задачи из сборника.

В целях наиболее сознательного усвоения задач на увеличение на несколько единиц и в несколько раз безусловно необходимо сопоставлять соответствующим образом подобранные задачи и решать их с учащимися параллельно:

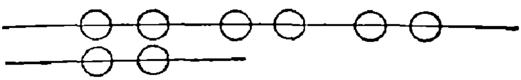
«Перо стоит 3 коп., а карандаш на 5 коп. дороже. Сколько стоит карандаш?»

«Перо стоит 3 коп., а цветной карандаш в 5 раз дороже. Сколько стоит цветной карандаш?»

Такое сопоставление задач особенно способствует отчётливому уяснению разницы между задачами того и другого вида. Делается обобщение. Увеличение числа на несколько единиц производится сложением, а увеличение в несколько раз — умножением.

Задачи на уменьшение числа в несколько раз

Учитель откладывает на счётах, например, 6 шариков, разбивает их на глазах учащихся на 3 равные части и на второй проволоке откладывает 2 шарика.



Учитель: Во сколько раз меньше шариков на второй проволоке?

Ученик: В 3 раза.

Учитель откладывает на одной проволоке классных счётов 4, 6, 8, 10 шариков, а на нижней проволоке откладывает в 2 раза меньше. Искомое число находится путём деления на две равные части верхнего числа шариков.

Учащиеся откладывают по указанию учителя на своих партах сначала, например, 8 шариков, а затем отдельно откладывают шариков в 2 и 4 раза меньше.

Делают ряд других аналогичных упражнений.

После этого учитель задаёт ряд задач:

«Длина одной доски 8 *м*, другая доска в 2 раза короче. Какой длины вторая доска?»

«Брату 9 лет, а сестра в 3 раза моложе брата. Сколько лет сестре?»

«На одной площадке играют 12 мальчиков, на другой — в 4 раза меньше. Сколько мальчиков на второй площадке?»

Затем учащиеся сами составляют в классе и дома подобные задачи и решают по указанию учителя самостоятельно из сборника.

Большое значение для более сознательного усвоения приёмов уменьшения на несколько единиц и в несколько раз имеет сопоставление задач того и другого вида.

«В одном саду 12 яблонь, а в другом на 3 меньше. Сколько яблонь во втором саду?»

«В одном саду 12 яблонь, а в другом в 3 раза меньше. Сколько яблонь в другом саду?»

Учащиеся такие задачи решают параллельно. После сопоставления делают обобщение. Уменьшение числа на несколько единиц производится вычитанием, а уменьшение в несколько раз — делением.

Задачи на разностное сравнение

Задачи на разностное сравнение являются более трудными по сравнению с предшествующими задачами. Поэтому ознакомление учащихся с этим типом простых задач необходимо провести особенно тщательно и по возможности на разнообразном материале.

Работу можно было бы построить примерно таким образом. Учитель предлагает учащимся сравнить, на сколько стаканов больше воды в одном из двух сосудов. Предварительно учитель должен подготовить эти два сосуда и налить в них различное число стаканов воды. Предположим, что в одном сосуде (меньшем) будет налито 3 стакана воды, а в другом (большем) 5 стаканов.

Учащиеся измеряют количество воды в первом сосуде (насчитывают 3 стакана). Затем из другого сосуда сначала отливают также 3 стакана, после чего подсчитывают, сколько стаканов воды осталось в большем сосуде.

Задаётся вопрос: как узнали, на сколько больше стаканов воды было в большем сосуде? Из большего сосуда вылили столько стаканов, сколько стаканов воды было в меньшем сосуде.

Учащимся предлагается сравнить длину двух кусков шпагата. Положим, длина одного из них 5 *м*, длина другого 8 *м*. Вызванные учителем учащиеся измеряют длину того и другого куска шпагата, учитель записывает результаты измерения на доске.

Длина первого куска 5 *м*.
Длина второго куска 8 *м*.

Учитель: Как определить, на сколько метров второй кусок шпагата длиннее первого куска?

Ученик: Надо от большего куска в 8 *м* отрезать 5 *м* шпагата. Отмеряется и отрезается кусок в 5 *м*. Оставшийся кусок измеряется. Получают 3 *м*.

Учитель: Как узнали, на сколько метров длиннее второй кусок шпагата?

Ученик: От 8 *м* отрезали 5 *м*.

На доске фиксируется запись:

$$8\ м - 5\ м = 3\ м.$$

Второй кусок шпагата *длиннее* первого на 3 *м*. Первый кусок шпагата *короче* второго на 3 *м*.

Было бы целесообразно дать каждому учащемуся по две бумажные полоски и сантиметровую ленту [1]).

Учащиеся измеряют ту и другую полоску бумаги. Отмечают на большей полоске длину меньшей полоски и находят разницу.

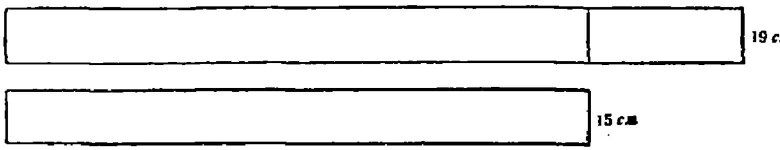


Рис. 2.

В тетрадях фиксируется соответствующая запись:

$$19\ см - 15\ см = 4\ см.$$

Первая полоска *длиннее* второй на 4 *см*.
Вторая полоска *короче* первой на 4 *см*.

---

[1]) Сантиметровая лента может быть заменена полоской миллиметровой бумаги или просто полосками из тетрадей, разлинованных в клетку, где две клетки по длине равны 1 *см*.

Предлагается учащимся измерить и сравнить длину и ширину ученической тетради, сравнивается рост учащихся и т. д.

Можно начать изучение разностного сравнения и на счётах.

Учитель откладывает на двух проволоках различное число шариков. Положим, на одной 4 шарика, на другой 7.

Учитель: Как узнать, сколько лишних шариков на второй проволоке?

Ученик: Надо от 7 шариков отнять столько шариков, сколько их на первой проволоке.

Учитель: На сколько же 7 шариков больше 4 шариков?

Ученик: На 3 шарика.

Учитель: На сколько 4 шарика меньше 7 шариков?

Ученик: На 3 шарика.

После таких упражнений на конкретном материале учащимся задаются задачи на разностное сравнение.

«В классе 20 мальчиков, а девочек 17. На сколько мальчиков больше, чем девочек?»

«Ботинки стоят 40 руб., а калоши 20 руб. На сколько рублей калоши дешевле ботинок?»

Необходимо также предложить учащимся самим составить подобные задачи. Условие этих задач разбирается в классе. Вносятся поправки, если задачи будут составлены неудачно. Некоторые правильно составленные задачи решаются совместно устно или на доске.

Затем учитель задаёт решить самостоятельно несколько задач из сборника.

Задачи на кратное сравнение

Задачи на кратное сравнение являются наиболее трудными задачами в одно действие.

Выяснение понятия о кратном сравнении также следует начать с непосредственного опыта, измерения. Можно использовать счёты, можно, так же, как и при выяснении разностного сравнения, предложить учащимся определить, во сколько раз больше воды налито в одном из двух сосудов.

Предварительно наливаются в один сосуд, например, 3 стакана воды, в другой 6 стаканов. Учащиеся под руководством учителя измеряют, сколько стаканов воды в меньшем сосуде, затем считают, сколько раз по такому количеству стаканов содержится во втором сосуде. Выясняется, что во втором сосуде воды было больше, чем в первом, в 2 раза.

Предлагается также учащимся в классе под руководством учителя сравнить, во сколько раз один кусок шпагата или ленты длиннее другого куска шпагата или ленты. Заранее учитель должен такие куски подготовить, и само собой разумеется, что отношение длин должно быть выражено целым числом. Например:

Длина	1	куска	6 *м*,	длина	другого	3 *м*
»	»	»	90 *см*	»	»	30 *см*
»	»	»	40 *см*	»	»	20 *см*

и т. д.

Учащиеся получают задание сравнить длину двух полосок бумаги, во сколько раз одна длиннее другой.

Работа завершается составлением таких же задач самими учащимися и решением самостоятельно задач из сборника.

Сопоставление задач на разностное и кратное сравнение

Крайне необходимо сопоставить на целесообразно подобранных задачах разностное и кратное сравнение. Такое сопоставление особенно ясно выявит учащимся разницу между этими видами сравнения и будет способствовать в дальнейшем вполне сознательному решению таких задач.

Примеры таких задач:

«В саду 80 яблонь и 20 груш. Во сколько раз больше яблонь, чем груш?»

«В саду 80 яблонь и 20 груш. На сколько больше яблонь, чем груш?»

Затем делается вывод: *На сколько единиц одно число* больше или меньше другого — *узнаётся вычитанием*; *во сколько раз одно* число больше или меньше другого — *узнаётся делением.*

Необходимо разнообразить термины при решении простых задач на увеличение и уменьшение на несколько единиц и в несколько раз и на разностное и кратное сравнение.

Нужно брать не только такие задачи, где приходится применять термины «больше» и «меньше», а и другие термины, которые расширяли бы содержание задач, например:

тяжелее — легче
длиннее — короче
дальше — ближе
шире — у́же
толще — тоньше
дороже — дешевле и т. д.

Это заставит брать задачи, связанные, например, с оценкой размеров различных предметов (шире — у́же; длиннее — короче).

Термины «быстрее» — «медленнее» будут вводить в практику школы задачи на оценку движения: пешеходов, лошадей, поездов, самолётов.

Такие термины, как «тяжелее» и «легче», будут связаны с задачами на вес. «Дороже» — «дешевле» вводят задачи на стоимость и т. д.

При этом условии содержание задач будет значительно разнообразнее и богаче, математические соотношения будут даны в самых разнообразных жизненных связях.

Простые задачи, сформулированные в косвенной форме

Рассмотренные выше простые задачи были сформулированы так, что самый текст задачи соответствует тому действию, при помощи которого решается задача.

Например: «Я прочитал в первый день 8 страниц, да во второй день 5 страниц. Сколько страниц я прочитал за два дня?»

Задача решается сложением (8 стр. + 5 стр. = 13 стр.), на сложение же указывает и текст задачи: «да во второй день прочитал 5 страниц...» Эти слова вызывают у учащихся мысль о применении в данном случае именно действия сложения.

Возьмём ещё пример. «Карандаш стоит 12 коп., а перо в 3 раза дешевле. Сколько стоит перо?» Здесь формулировка задачи: «а перо в 3 раза дешевле» вызывает у учащегося мысль о необходимости применить для решения задачи действие деление, при помощи которого и решается задача (12 коп. : 3 = 4 коп.).

Такие задачи, в которых нет расхождения между формулировкой условия и тем действием, при помощи которого решается задача, а, напротив, наблюдается полное соответствие, называются задачами, сформулированными в прямой форме.

Но нередко приходится иметь дело с задачами, в которых формулировка условия расходится с тем действием, при помощи которого решается задача.

Приведём несколько примеров.

«Я нашёл сначала несколько грибов, после этого нашёл ещё 7 грибов, и у меня всего стало 15 грибов. Сколько грибов я нашёл сначала?» Задача эта решается действием вычитания (15 гриб. — 7 гриб. = 8 гриб.). Между тем, условие сформулировано так, что оно вызывает мысль о применении сложения: «после этого я нашёл ещё 7 грибов».

Возьмём ещё задачу: «Мама дала мне денег на покупки. Я из них издержал 20 коп. и у меня осталось 30 коп. Сколько денег дала мне мама?»

Задача эта решается сложением (30 коп. + 20 коп. = = 50 коп.), тогда как условие сформулировано так, что напрашивается применение обратного действия, а именно вычитания: «из них я издержал 20 коп., и у меня осталось...»

Такие задачи называются задачами, выраженными в косвенной форме. Решение их вызывает у учащихся, конечно, больше затруднений, чем решение задач, данных в прямой форме.

Между тем, решение сложных задач очень часто приводит учащихся к решению простых задач, выраженных именно не в прямой, а в косвенной форме. Поэтому ясное понимание таких задач, умение безошибочно их решать является необходимым условием для сознательного решения сложных задач. Следовательно, решая с учащимися простые задачи, нельзя ограничиваться только задачами, заданными в прямой форме, а необходимо научить их решать и задачи, выраженные в косвенной форме.

Приведём параллельно с задачами, данными в прямой форме, соответствующие им косвенные задачи.

Простые задачи, выраженные в прямой форме	**Соответствующие им простые задачи, выраженные в косвенной форме**
Сложение	
1) На одной полянке я нашёл 10 грибов, на другой ещё 5 грибов. Сколько грибов я нашёл всего? (Нахождение суммы.)	1) На одной полянке я нашёл несколько грибов, *на другой нашёл ещё 5 грибов*. Всего у меня стало 15 грибов. Сколько грибов я нашёл на первой полянке? 15 грибов — 5 грибов = 10 грибов. Формулировка задачи наталкивает учащегося на сложение, а решается задача вычитанием.
2) Килограмм рыбы стоит 5 руб., килограмм мяса стоит на 3 руб. дороже. Сколько стоит 1 *кг* мяса? (Увеличение на несколько единиц.)	2) Килограмм мяса стоит 8 руб., при этом оно *на 3 руб. дороже 1 кг рыбы*. Сколько стоит 1 *кг* рыбы? 8 руб. — 3 руб. = 5 руб. Формулировка задачи соответствует сложению, а задача решается вычитанием.
Вычитание	
1) Ученик имел 20 коп., на покупку карандаша он издержал 12 коп. Сколько у него осталось денег? (Нахождение остатка.)	1) Ученик на карандаш израсходовал 8 коп. и *у него осталось 12 коп.* Сколько денег у него было? 8 коп. + 12 коп. = 20 коп. Формулировка «у него осталось 12 коп.» соответствует вычитанию, а решается задача сложением.
2) Брат купил 15 тетрадей, а сестра на 3 тетради меньше. Сколько тетрадей купила сестра?	2) Сестра купила 12 тетрадей, и это было *на 3 тетради меньше, чем купил брат*. Сколько тетрадей купил брат? 12 тетрадей + 3 тетради = = 15 тетрадей. Формулировка «на 3 тетради меньше» соответствует вычитанию, а решается задача сложением.

3) Ваня сорвал 20 яблок, а Лида 14. На сколько яблок больше сорвал Ваня?

3) Ваня сорвал 20 яблок, и при этом *на 4 яблока больше*, чем сестра. Сколько яблок сорвала сестра?

20 яблок — 4 яблока = 16 яблок.

Формулировка «на 4 яблока больше» соответствует действию сложения, а решается задача вычитанием.

Умножение

1) Ученик купил 5 перьев по 3 коп. Сколько он издержал денег?

1) Ученик *купил несколько перьев по 3 коп.* и издержал при этом 15 коп. Сколько он купил перьев?

15 коп.:3 коп. = 5.

Формулировка «несколько перьев по 3 коп.» соответствует умножению, а решается задача делением.

2) Один рабочий выработал за час 6 деталей, второй в 3 раза больше. Сколько деталей за час выработал второй рабочий?

2) Один рабочий выработал за час 18 деталей, и это было *в 3 раза больше*, чем выработал второй. Сколько деталей выработал за час второй рабочий?

18 деталей:3 = 6 деталей.

Формулировка «в 3 раза больше» соответствует умножению, а решается задача делением.

Деление

1) Мать разделила 3 детям 15 яблок поровну. Сколько яблок получил каждый из её детей?

1) *Мать разделила яблоки 3 детям* по 5 яблок каждому. Сколько яблок она разделила?

5 яблок $\times$ 3 = 15 яблок.

Формулировка «мать разделила трём детям» соответствует делению, а задача решается умножением.

2) В один кувшин вошло 12 *л* молока, в другой в 3 раза меньше. Сколько литров молока вошло во второй кувшин?

2) В один кувшин вошло 4 *л* молока, и это *в 3 раза меньше*, чем вошло в другой кувшин. Сколько литров молока вошло во второй кувшин?

4 *л* $\times$ 3 = 12 *л*.

Формулировка «в три раза меньше» соответствует делению, а задача решается умножением.

3) Мать собрала 14 *кг* ягод, а дочь 7 *кг*. Во сколько раз больше собрала ягод мать?

3) Мать собрала 14 *кг* ягод, и это *в 2 раза больше*, чем собрала дочь. Сколько килограммов ягод собрала дочь?

14 *кг*:2 = 7 *кг*.

Формулировка «в 2 раза больше» соответствует умножению, а задача решается делением.

Решение таких задач позволит учащимся в дальнейшем без особого затруднения решать и сложные задачи, в которые будут входить задачи, выраженные в косвенной форме. Наконец, и самое решение простых задач, выраженных в косвенной форме, развивает активное внимание учащихся и сознательное отношение к работе.

Зависимость между разнообразными величинами

Следует отметить, что решение задач, где устанавливается зависимость между величинами, может быть выполнено учащимися лишь при условии, если они имеют чёткое представление как о самих величинах (вес, путь, стоимость, время), так и о мерах, которыми эти величины измеряются: меры веса, меры длины, меры цены, меры времени.

Между тем у учащихся часто эти представления бывают крайне смутны.

Интересные результаты были получены в I классе школы им. Горького г. Москвы при опросе учащихся с целью выявления у них временных и пространственных представлений в начале учебного года.

На вопрос: «Сколько времени ты провёл летом на даче (или в деревне)?» — отдельные учащиеся давали самые неожиданные ответы. Например: два года — вместо трёх месяцев, один год — вместо четырёх месяцев, один год — вместо одного месяца.

Ещё более неожиданные ответы были получены, когда учащиеся должны были ответить на вопрос: «Как далеко ты жил от Москвы?»

Более или менее правильные ответы дали только 4 человека из 34. Некоторые учащиеся совсем не дали никакого ответа.

Очень часто у учащихся не наблюдается отчётливого представления о метре: они не могут показать его приблизительную длину; нет представления о килограмме, о литре и пр. Между тем, все эти меры необходимо очень ясно себе представлять при решении всякого рода задач. Поэтому, при изучении мер следует добиваться, чтобы учащиеся получали совершенно отчётливые представления об основных единицах измерения; следует практиковать учащихся в измерении и взвешивании, регулярно повторять, возобновлять в сознании ранее изученные меры.

При решении простых задач учащемуся всегда приходится находить по двум данным величинам третью величину, находящуюся в определённой зависимости от данных величин.

Например:

Зная скорость и время, находим пройденный путь.

Зная цену и количество, находим всю стоимость.

Зная заработок 1 рабочего и число рабочих, находим сумму, выданную всем рабочим.

Зная количество выработки 1 рабочего за час и число рабочих, находим выработку всех рабочих.

Зная заработок и расход, находим, какая сумма осталась.

Зная весь намеченный путь и пройденное расстояние, находим, сколько осталось пройти... и т. д.

Решая задачи, например, на скорость, время и пройденный путь, можно составить различные варианты, а именно:

1) Зная скорость и время, найти пройденный путь.

«Пешеход проходит в час 5 *км*. Сколько он пройдёт за 3 часа?»

2) Зная путь и скорость, найти время.

«Пешеход прошёл 15 *км*, проходя в час по 5 *км*. Сколько он шёл часов?»

3) Зная путь и время, найти скорость.

«Пешеход за 3 часа прошёл 15 *км*. Сколько километров он проходил в час?»

То же самое относится и к другим величинам.

Учащиеся должны уметь решать любую из указанных задач. Чаще всего в практике школы задачи носят однообразный характер; нет таких приёмов, когда одну и ту же зависимость учащиеся разбирали бы со всех сторон, рассматривая все возможные случаи.

Разнообразие задач, вытекающее из перестановки данных и искомого, вносят в работу элемент сознательности, позволяют уяснить её исчерпывающе, и если в дальнейшем при решении сложных задач эти зависимости встретятся учащимся, то любая комбинация их не вызовет никаких затруднений.

Составление простых задач самими учащимися

Большое значение для сознательного усвоения тех простейших зависимостей, какие встречаются в простых задачах, и умения решать эти задачи имеет самостоятельное составление учащимися задач, аналогичных тем, какие вместе с учителем решаются в классе. Когда ученики сами приступают к составлению задачи, они невольно усваивают структуру правильного построения задачи.

Они уясняют необходимость выделения условия задачи и вопроса; подбирают такие величины, которые находятся в определённой зависимости друг от друга. Так формулируют эти зависимости, что имеется возможность ответить на поставленный вопрос; выбирают такие числовые данные, которые соответствуют действительности. Вся эта работа требует от учащегося сознательного отношения, размышления, творчества, ответственности за высказанные суждения.

Несмотря на целый ряд трудностей, учащиеся успешно справляются с этой работой даже в I классе, интерес к решению задач и вообще к изучению арифметики сильно возрастает, повышается активность, быстрее развивается сообразительность, мысль становится более чёткой и ясной, формулировки и суждения становятся более убедительными и обоснованными.

Первые опыты по составлению задач не сразу удаются детям. Нехватает смелости, опыта, сообразительности, затем учащиеся быстро овладевают этим видом работы — она идёт очень успешно. Занятия по решению задач становятся особенно живыми и увлекательными.

Само собой разумеется, что работа эта требует от учителя умения подойти к детям, просто и толково разъяснить им смысл и характер новой работы.

Начать эту работу можно с того, что учащиеся формулируют вопрос к условию задачи, составленной учителем. Например, учитель читает учащимся: «У Бори было

12 коп., он издержал 4 коп.» Вопрос задачи предлагается сформулировать самим учащимся.

Такого рода упражнения имеют большое значение как подготовительные для решения в дальнейшем сложных задач синтетическим способом.

В самом деле, когда мы решаем какую-нибудь сложную задачу синтезом, мы всегда выделяем два каких-нибудь данных задачи и ставим к ним вопрос, которого в условии задачи нет.

Например, пусть мы решаем такую сложную задачу: «Колхозница продала на рынке 7 *л* молока по 1 руб. 50 коп. и 15 *кг* картофеля по 40 коп. Сколько она выручила денег?»

Учащиеся при решении этой задачи выделяют сначала два данных: 7 *л и* 1 руб. 50 коп. *и* формулируют вопрос, который может быть поставлен по этим двум данным, а именно: «Сколько стоит проданное молоко?»

Далее, выделив следующие данные: 15 *кг* и 40 коп., вновь формулируют вопрос: «Сколько стоит проданный картофель?» Затем, имея две суммы (вырученные за молоко и за картофель), к ним формулируется новый вопрос, который в итоге всего совпадает с вопросом задачи.

Следующим этапом в упражнениях по составлению задач может быть дополнение учащимися условия задачи недостающими данными. Например, учитель читает: «Нина купила карандаш за 12 коп. и ещё купила ручку. Сколько всего денег издержала Нина?»

Сначала такая задача приводит учащихся в недоумение. Им кажется, что учитель забыл назвать стоимость ручки. Но учитель вновь повторяет то же условие задачи. Тогда учащиеся заявляют, что эту задачу решить они *не могут, так как не сказано, сколько копеек стоит* ручка. Учитель дополняет задачу недостающим данным, и задача доводится до конца.

Учащимся может быть дана задача и без числовых данных. Например: «Нина купила карандаш и ручку. Сколько она издержала денег?» Если учащиеся перед такой задачей решали задачу с неполными данными, то они легко подметят и укажут недочёты в заданной задаче, и затем, когда эти данные будут названы, задача быстро решается.

Задачи с неполными числовыми данными и без числовых данных *приводят учащихся к выводу, что для* *решения всякой простой задачи нужно иметь обязательно два данных, а эта идея положена в основу аналитического способа решения сложных задач,* где всегда к поставленному вопросу требуется подобрать, исходя из условия задачи, именно два данных. (Подробно это будет разобрано в разделе «Решение составных задач».)

Следует отметить, что такая, несколько необычная, работа создаёт в классе особенный интерес, особенную настороженность. Уроки проходят чрезвычайно живо.

Об интересном опыте по составлению задач в I классе рассказывает учительница Чертовищенской школы Ивановской области Т. В. Архипова.

«...Теперь придумайте вы задачу.

Я смотрю на растерянные лица своих первоклассников. Мне немного смешно, смешно потому, что я предвидела, какое действие произведёт мой вопрос.

Один из учеников решается подать голос:

— Мы не умеем.

Другой поддерживает:

— Как её придумаешь?

Я умышленно создаю такое настроение. Мне нужно возбудить у своих малышей интерес к задаче, а его до сих пор нет, хотя прошло уже два месяца с начала учебного года.

— Вы не видите задач? Не можете придумать? Неужели? Да у нас в классе их сколько хочешь.

Дети удивлены. Они оглядываются сначала по сторонам, потом на меня. Всё, как раньше: класс, как класс, а может быть, учительница шутит?

А я уже увлеклась, хожу по классу и, дотрагиваясь до предметов, повторяю: «А вот задача, а вот задача, здесь тоже задача, да целых две».

Моё настроение передаётся детям. Прежняя скованность пропала, но, возбуждённые этой таинственностью, они не могут разрешить загадки.

Наконец, в момент, когда класс, по-моему, достаточно подготовлен, помогаю ребятам сделать «открытие».

— Ну, Боря, иди сюда! Сосчитай-ка вот эти парты.

Мальчик считает.

— А теперь вот в этом ряду.

— Хорошо. Сколько в этом ряду?

— 7.
— А в этом?
— 5.
Раздаются голоса.
— Ой, ну так, конечно, просто составить.
— Что?
— Задачу.
— Попробуйте.
Сразу поднимается несколько рук.
— Какая у тебя вышла задача, Петя?
— В одном ряду было 7 парт, а в другом 5. (Молчит.)
— И всё?
Дети: Нет, не всё. Теперь можно узнать сколько парт в обоих рядах.
— Конечно. Сколько же?
— 12.
— Вот вам и задача.
— Ещё одну помогу составить, а там сами придумывайте.
Беру в руку стопку тетрадей со стола. Вызываю одного из учеников и даю сосчитать.
— 17 тетрадей.
— А теперь из них отдай 6 штук дежурному, остальные убери в шкаф.
— Сейчас попробуем составить задачу. Сколько на столе было тетрадей?
— 17.
— Сколько отдал Витя дежурному?
— 6.
— Что можно узнать?
Дети: Сколько тетрадей осталось.
— Если вам придётся эту задачу дать товарищу, как её нужно рассказать?
Дети думают. Поднимают руки.
Клава рассказывает:
— На столе лежало 17 тетрадей, из них 6 отдали дежурному, остальные положили в шкаф. Сколько положили в шкаф?
— А вы говорили, задач нет!
В этот урок ребята не слышали звонка. Задачи появлялись со всех сторон, и они еле успевали их решать.

По дороге в столовую они то и дело кричали мне: «Татьяна Васильевна, вот ещё задача». Во время обеда обычно организованная детвора не могла сидеть спокойно. С какой-то жадностью они воспринимали окружающее, схватывали количества, превращая их в задачи.

Первый пыл, конечно, улёгся, но любовь и интерес к задаче остались до сих пор. Будучи второклассниками, они составляли такие задачи, что приходилось удивляться их сообразительности.

Конечно, я учитывала и то, что увлекаться успехом нельзя, что зародившийся интерес к задаче нужно закрепить. Для этого я делала всё возможное, и, нужно сказать, не безрезультатно.

Посещавшие наши уроки учителя особенно много высказывались об уменье детей быстро и сознательно решать задачи. Главное, ценно то, что детей, не понимающих задач, нет, а любят решать задачи поголовно все ученики моего класса».

Вы видите, как живо и увлекательно рассказывает Т. В. Архипова об одном уроке, на котором учащиеся в первый раз были поставлены перед заданием составить самостоятельную задачу.

Этот урок по обучению детей решению задач является наглядным примером тому, как можно самую обыкновенную, часто скучную, будничную работу сделать творческой, способной заинтересовать весь класс.

С успехом также проходят занятия, когда учащиеся составляют задачу по численному примеру. Например, пишется на доске такой пример:

$$8+5=$$

Ученики подбирают разнообразные задачи: «Я нашёл 8 грибов, а папа 5. Сколько грибов мы нашли вместе?» Или: «Я купил карандаш за 8 коп. и ручку за 5 коп. Сколько я всего издержал денег?»

В III и IV классах можно требовать, чтобы ученики на заданный пример составили задачи, различные по своему математическому содержанию; например, пишет на доске пример:

$$45\times 8=$$

Учащиеся составляют задачу:

1) «Поезд проходит в час 45 *км*. Сколько километров он пройдёт в 8 часов?»

2) «Поезд проходит в час 45 *км*, а самолёт движется в 8 раз быстрее. Сколько километров в час пролетает самолёт?» (Увеличение в несколько раз.)

То же самое можно сделать со сложением, вычитанием, делением.

Составление учащимися задач даёт очень большой эффект в работе по арифметике. Об этом будет сказано дальше.

Запись условия простой задачи

При решении простых задач можно условие задачи не записывать, так как это отнимает много времени. Можно допустить запись данных в тех случаях, когда решаются задачи нового типа или данные трудны для запоминания. Большинство простых задач должно решаться устно.

Применение иллюстрированных справочников при решении простых задач

Большую рационализацию в решение простых задач вносят иллюстрированные справочники, особенно в классе. Они избавляют учителя от излишнего повторения условия задачи, а также от записи данных на доске.

Делается это так. Учитель заранее приготовляет плакат с рисунками каких-нибудь предметов и обозначением при них цен (рис. 3).

Плакат для решения задач

Пользуясь им на уроке, можно решить быстро не 1—2, а 9—10 задач. Работа идёт живо, захватывает детей. Конкретный материал способствует сознательному его выполнению и усвоению. Плакат может служить материалом для простых задач (в одно действие) на сложение, вычитание, умножение и деление. Например:

Сложение (в пределе 10). Учитель, показывая на плакат, говорит: «Ученик купил перо и карандаш. Сколько он издержал денег?»

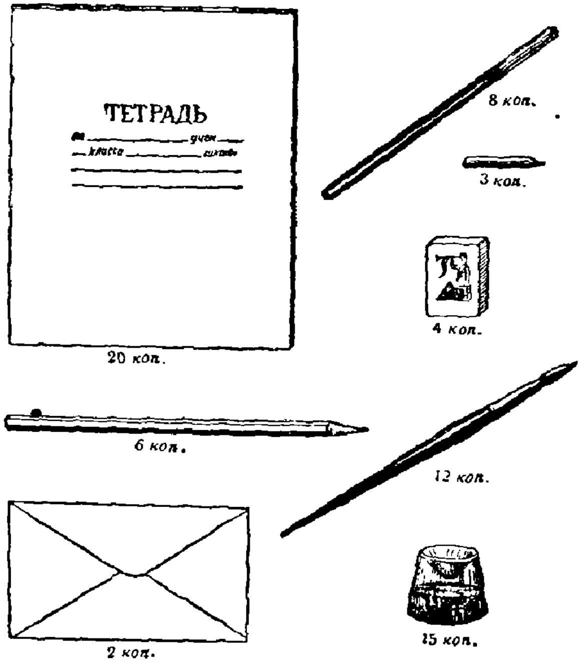


Рис. 3.

Вычитание. «У Вани было 10 коп. Он купил ручку. Сколько у него осталось денег?»

Умножение. «Вова купил 4 конверта. Сколько он израсходовал денег?»

Деление. «Коля за карандаш уплатил две одинаковые монеты. Какие это были монеты?» и т. д.

Такие же задачи в одно действие можно решать в пределе второго десятка. Например:

Сложение. «Сколько стоят карандаш и ручка?»

Вычитание. «У девочки было 20 коп. Она купила ручку. Сколько у неё осталось денег?»

Умножение. «Сколько стоят 2 карандаша? Сколько стоят 4 пера?»

Деление. «Сколько нужно иметь монет по 3 коп., чтобы купить чернильницу?» «Сколько можно купить конвертов на 20 коп.?» и т. д.

В дальнейшем можно этот же плакат использовать для решения составных задач самого разнообразного содержания. Например: «Брат купил ручку и перо, а сестра карандаш и резинку. Кто из них издержал денег больше и на сколько?»

Отсутствие необходимости записывать условие задачи сберегает массу времени. Конкретные образы покупаемых предметов делают задачу понятной и вполне доступной для учащихся.

Один плакат можно заменить другим, взяв предметы и цены применительно к уровню числовых представлений учащихся.

Эти же плакаты могут быть использованы во II классе на занятиях по устному счёту, при изучении табличного и внетабличного умножения и деления, при ознакомлении с разностным и кратным сравнением.

При составлении новых плакатов должна быть использована инициатива учащихся.

Самостоятельное решение простых задач учащимися из сборника

Учащиеся I класса ещё плохо читают. Самостоятельно разбирать связный текст в несколько предложений из книги учащиеся начинают лишь примерно в конце первого полугодия. С этого же момента можно приступить и к приучению их к самостоятельному решению задач из книги. Само собой разумеется, что эта работа для ученика I класса достаточно сложная и трудная, поэтому следует приучать учащихся к этой работе не спеша, постепенно преодолевая имеющиеся здесь трудности.

С другой стороны, следует отметить, что учащиеся выполняют эту работу с большим интересом наряду с решением числовых примеров. Самый характер заданной работы увлекает учащегося, и он с особенной любовью и серьёзностью приступает к её выполнению. Надо найти заданную задачу по указанному номеру, прочитать условие, разобраться в нём и, наконец, записать решение.

Вначале самостоятельное решение задач по сборнику следует организовать в классе и для первоначальных упражнений взять такую задачу, которая только что перед этим была решена всем классом устно.

Учащиеся читают по книге знакомую задачу, вспоминают, как она была решена, и оформляют решение в соответствующей записи.

Затем читается и разбирается условие новой задачи, а учащиеся решают её и записывают самостоятельно. Учитель даёт указания, как следует производить запись решения задачи, как записывать наименования. Чаще всего запись наименований начинают производить со II класса, но опыт работы в целом ряде школ показал, что учащиеся с успехом справляются с этой трудностью и в I классе, пользуясь сокращённой записью наименований, например, запись решения задач: «У Вани было 20 коп. Он издержал 15 коп. Сколько копеек у него осталось?» и «В одном классе у нас 10 пионеров, в другом 6. Сколько пионеров в обоих классах?» ученик оформляет так:

Задачи

№ 1. 20 коп. — 15 коп. = 5 коп.

№ 2. 10 пионеров + 6 пионеров = 16 пионеров.

После упражнений в чтении условия и в записи решения уже решённой устно задачи, после самостоятельного решения задачи, условие которой предварительно разобрано в классе, учитель даёт учащимся самим прочитать условие новой задачи и записать её решение. Тем учащимся, которые будут испытывать затруднение, учитель оказывает необходимую помощь.

После решения такой задачи производится разбор проделанной работы. Кто-либо из учащихся по вызову учителя читает условие задачи и рассказывает, как он её решил. Ошибки, допущенные отдельными учащимися, тут же исправляются.

После ряда таких упражнений, учащиеся получают задание решить задачу или две самостоятельно по книге дома. И в этом случае лучше сначала задать такие задачи, которые предварительно были устно решены в классе, а затем можно задавать и совершенно новые задачи.

Целесообразно при этом дать детям некоторые указания, как следует приступать к решению задачи.

Сводятся они примерно к следующему:

1. Внимательно прочитай условие задачи. Если она будет не сразу понятна, прочитай ещё раз.

2. Подумай, как нужно её решить, и реши её сначала в уме.

3. Запиши решение в тетрадь.

Такие указания очень помогают учащимся, дисциплинируют их работу, вносят в неё порядок.

Беседуя с родителями учащихся I класса о том, как дети работают дома по арифметике, приходилось почти всегда слышать от них, что дети с большой охотой выполняют задания учителя, когда они толково разъяснены и доступны детям.

Привожу дословно один разговор с матерью о её ребёнке, который учился в I классе.

— После прогулки сын садится за стол и с серьёзным видом принимается за работу. Раскрывает задачник, что-то отыскивает в нём, читает, откидывается назад, размышляет, снова читает задачу, наконец, старательно пишет в тетради.

Затем обращается к матери со словами:

— Мама, послушай, так ли я сделал? Я сначала прочитал условие задачи. Потом я подумал и решил её в уме. Потом записал решение в тетради.

Когда ученик получил одобрение матери, он спокойно и уверенно приступил к продолжению своей работы.

Такая систематическая работа над простыми задачами даёт положительные результаты уже в I классе. Учащиеся вполне сознательно решают простые задачи, предлагаемые учителем, быстро и интересно составляют сами разнообразнейшие задачи, очень неплохо начинают справляться с самостоятельным решением задач по книге и, наконец, успешно приступают к решению сложных задач.

И здесь с учащимися можно добиться сравнительно высоких показателей. Всё дело в учителе, в его правильно организованной, настойчивой, продуманной и систематической работе.

4. СОСТАВНЫЕ (СЛОЖНЫЕ) ЗАДАЧИ

Составными задачами, как уже было сказано, называются такие задачи, которые решаются не одним, а двумя или более действиями.

Каждая сложная задача при своём решении разбивается на ряд простых задач, последовательное решение которых приводит к ответу на поставленный в ней вопрос.

Само собой разумеется, что решение сложных задач представляет собой значительно большие трудности и может протекать успешно лишь при условии систематической предварительной работы учащихся над простыми задачами.

При переходе к решению составных задач учащиеся должны уметь правильно выделять данные, на основании которых можно было бы найти новые числа, которые в свою очередь, будучи сопоставлены с другими данными или числами, полученными от других простых задач, дали бы возможность последовательно составлять новые и новые простые задачи до тех пор, пока не будет получен ответ на вопрос задачи.

Какие условия необходимо соблюдать при переходе к решению сложных задач?

Первым условием должна быть строго продуманная система в расположении задач. Затем успех зависит от выполнения целого ряда других методических требований, относящихся к содержанию задачи, приёмам решения, рациональной записи условия задачи и решения, организации планомерной самостоятельной работы учащихся по решению и составлению задач, умению проверить полученный результат. Начнём с самого важного — с системы в расположении задач.

Система в расположении составных задач по степени возрастающей трудности

Составные задачи, решаемые в начальной школе, можно разбить на следующие основные группы.

Одни задачи не требуют особых приёмов для своего решения.

Для решения таких задач достаточно владеть техникой вычислений, понимать зависимости между основными величинами (количество, цена, стоимость; скорость, время, пройденный путь и т. д.), сознательно владеть основными арифметическими понятиями (увеличить, уменьшить на несколько единиц или в несколько раз, найти разницу между числами, узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого), уметь решать простые задачи.

Этого рода составные задачи можно было бы назвать собственно арифметическими.

Другие же задачи для своего решения требуют большей сообразительности, знания особых приёмов: предположения, уравнивания величин, замены их, исключения и т. д. Эти задачи чаще всего легко решаются алгебраически посредством уравнений. Тем не менее, и при изучении арифметики они представляют большую педагогическую ценность, так как развивают у учащихся сообразительность, пробуждают особый интерес к математике, дают пищу для пытливого ума учащихся. Эти задачи в арифметике называются типовыми задачами.

Кроме того, в программе начальной школы имеются ещё задачи: на вычисление времени, на дроби, на проценты и геометрические задачи.

Решение составных задач следует начать с задач собственно арифметических.

Собственно арифметические составные (сложные) задачи

Собственно арифметические задачи можно разбить на задачи с прямым ходом решения (иногда их называют «приведёнными», или «прозрачными») и с обратным ходом решения («неприведённые», или «непрозрачные»).

Приведём в качестве образцов задачи того и другого вида.

Задачи с прямым ходом решения	Задачи с обратным ходом решения
1) На костюм куплено 3 *м* сукна по 78 руб. и 6 *м* подкладки по 16 руб. за метр. Сколько стоит вся купленная материя?	2) На костюм купили несколько метров сукна по 78 руб. за метр и 6 *м* подкладки по 16 руб. За всю материю заплатили 330 руб. Сколько метров куплено сукна?
3) Пассажирский поезд прошёл 540 *км* за 9 час., а товарный поезд 360 *км* за 12 час. Во сколько раз быстрее шёл пассажирский поезд?	4) Пассажирский поезд прошёл некоторое расстояние за 9 час., а товарный поезд прошёл 360 *км* за 12 час. Сколько километров прошёл пассажирский поезд, если он шёл быстрее товарного в 2 раза?
5) Колхоз с одного поля собрал 630 *ц* картофеля, а с другого на 120 *ц* больше. Пятую часть собранного картофеля колхоз продал по 30 руб. за центнер. Сколько денег выручил колхоз?	6) Колхоз с одного поля собрал 630 *ц* картофеля, а с другого на 120 *ц* больше. Часть картофеля колхоз продал по 30 руб. за центнер и выручил от этой продажи 8280 руб. Какую часть собранного картофеля продал колхоз?

Рассмотрим детальнее приведённые выше задачи. В первой задаче ход решения находится очень легко, так как порядок действий совпадает с расположением числовых данных. В условии сказано: «Куплено 3 *м* сукна по 78 руб.». Это даёт учащемуся возможность без особого труда сообразить, что здесь следует найти стоимость всего сукна умножением:

$$78 \text{ руб.} \times 3 = 234 \text{ руб.}$$

Далее в условии сказано: «...и 6 *м* подкладки по 16 руб.». Эта формулировка помогает учащемуся легко найти стоимость всей подкладки.

$$16 \text{ руб.} \times 6 = 96 \text{ руб.}$$

Вопрос задачи: «*Сколько стоит вся купленная материя?*» — очень прозрачно указывает на то, что полученные произведения надо сложить:

$$234 \text{ руб.} + 96 \text{ руб.} = 330 \text{ руб.}$$

Иное представляет собой вторая задача. В ней порядок действий не совпадает с расположением числовых данных. В начале условия говорится о покупке сукна на костюм, но количество его не указано. Найдя стоимость подкладки (16 руб. $\times$ 6 = 96 руб.), учащийся должен из общей суммы, затраченной на всю материю, вычесть стоимость подкладки 330 руб. — 96 руб. = 234 руб. и *затем снова вернуться к началу задачи*. Полученное число 234 руб. ему нужно сопоставить с ценой метра сукна, после чего ученик и получает ответ на вопрос задачи.

Из сопоставления этих задач отчётливо видно, что решение их для учащихся представляет различную трудность.

То же самое можно сказать о третьей задаче и четвёртой, а также пятой и шестой. В третьей задаче и в пятой действия располагаются в том порядке, как излагается само условие задачи, в четвёртой же задаче и в шестой учащийся, выполнив некоторые действия над данными, помещёнными в середине условия задачи или в конце, должен снова вернуться к началу задачи.

Конечно, вторые задачи труднее, чем первые. В то время как в задачах, помещённых в левой колонке, самый ход решения задачи совпадает с характером её изложения, иными словами, самое условие ведёт учащегося, задачи, помещённые в правой колонке, требуют от учащегося значительно большей вдумчивости; надо очень внимательно вчитаться в условие их, чтобы правильно наметить действия и их порядок, так как полного совпадения между порядком изложения условия и самим ходом решения задачи здесь не наблюдается.

Учащиеся почти безошибочно решают задачи первого рода, а при решении задач второго рода число ошибок и неправильных решений заметно увеличивается.

Начинать решение составных задач, очевидно, следует с задач первого рода, а затем уже, по мере того как учащиеся овладеют ими, следует переходить к задачам с обратным ходом решения. Это тем более необходимо, что учащимся предстоит здесь целый ряд трудностей. Для преодоления этих трудностей нужно развить в учащихся:

1) умение слушать, понимать, записывать содержание задачи;

2) умение составить план решения задачи и записать самое решение;

3) умение обосновать (объяснить) каждое действие;

4) умение проверить правильность полученного ответа.

Если самое решение составных задач с прямым ходом не представляет для учащегося особых трудностей, то усвоение целого ряда приёмов, связанных с решением составной задачи с обратным ходом, для учащегося является делом довольно сложным.

Поэтому решение наиболее лёгких составных задач, каковыми являются задачи с прямым ходом решения, следует использовать для усвоения учащимися тех приёмов, с которыми связано решение всякой задачи, а затем, когда учащиеся освоятся с задачами, ход решения которых совпадает с изложением условия, следует перейти к решению составных задач с обратным ходом решения.

Как познакомить учащихся с составной (сложной) задачей

С составными задачами учащиеся знакомятся ещё в I классе. Эту работу можно построить таким образом.

Учитель читает учащимся, например, такую задачу:

«Ваня сорвал с одной грядки 6 морковок, с другой 4. Сколько морковок сорвал Ваня?»

Учащиеся решают задачу:

6 морковок + 4 морковки = 10 морковок.

Далее учитель продолжает: «Из них мама положила в суп 8 морковок. Сколько морковок осталось?»

Задача решается:

10 морковок — 8 морковок = 2 морковки.

Учитель: Сколько задач мы решили?

Ученик: Две.

Учитель: Читай первую задачу.

Ученик: (читает).

Учитель: Прочитай вторую задачу.

Ученик: (читает).

Учитель: Кто составит из этих двух задач одну задачу?

При помощи учителя учащиеся составляют одну составную задачу.

«Ваня сорвал с одной гряды 6 морковок, а с другой 4 морковки. Из них мама положила в суп 8 морковок. Сколько морковок осталось?»

Учитель: Решим эту задачу. Что сначала мы узнаем?

Ученик: Сколько всего морковок сорвал Ваня?

6 морковок + 4 морковки = 10 морковок.

Учитель: Что потом мы узнаем?

Ученик: Сколько морковок осталось?

10 морковок — 8 морковок = 2 морковки.

Учитель: Новую задачу, которую мы составили из двух задач, решили двумя действиями.

Учитель подбирает ещё ряд простых задач, из которых составляет составные задачи в два действия. После таких предварительных упражнений можно перейти к решению составных задач в два действия.

Какой недочёт вначале чаще всего обнаруживается при решении составных задач учащимися I класса?

Этот недочёт заключается в том, что учащиеся сразу называют ответ задачи, опуская первое действие, нужное для решения первой простой задачи. Например, решая задачу: «У ученика было 4 монеты по 3 коп. Он купил тетрадь за 10 коп. Сколько у него денег осталось?» Ученики сразу отвечают: «2 коп.» — «Как вы узнали?» — спрашивает учитель.

Ученик: От 12 коп. отнял 10 коп., получилось 2 коп.

В этих случаях необходимо выяснить, что 12 коп. не значатся в условии задачи. Учитель выясняет, как учащиеся получили 12 коп.: 4 монеты по 3 коп. составят 12 коп.

Учитель: Значит, что же сначала нам нужно было узнать?

Ученик: Сколько копеек составляют 4 монеты по 3 коп.

Учитель: Как же это узнать?

Ученик: Надо 3 коп. умножить на 4. Получим 12 коп.

Учитель: А дальше?

Ученик: А дальше нужно узнать, сколько денег у ученика осталось.

Учитель: Как же это узнаем?

Ученик: От 12 коп. нужно отнять 10 коп. и будет 2 коп.

На доске фиксируется соответствующая запись:

1) 3 коп. $\times$ 4 = 12 коп.
2) 12 коп. — 10 коп. = 2 коп.

Учитель: Сколько же действий нам пришлось выполнить, чтобы решить нашу задачу?

Ученики: Два действия.

Таким образом учащиеся постепенно научатся последовательно разбивать условие составной задачи на простые задачи и выполнять все нужные для решения действия.

Затем число действий в задачах постепенно увеличивается, и во II классе учащиеся уже справляются с задачами в три-четыре действия, а в III и IV классах — в пять-шесть действий. Постепенно вводятся задачи, в которых порядок решения не совпадает с изложением условия задачи, вводятся термины «увеличить», «уменьшить на несколько единиц», «в несколько раз», «разностное и кратное сравнение».

Но для успешного решения задач с большим количеством действий нужно соблюдать целый ряд условий. К рассмотрению их и перейдём.

Как доводить учащихся до отчётливого понимания условия задачи

Наблюдения за учащимися на уроках арифметики в целом ряде школ показали, что учащиеся при первом чтении условия составной задачи чаще всего запоминают только повествовательную часть задачи; числовая же сторона задачи не усваивается большинством учащихся.

Когда предлагалось учащимся повторить условие задачи сразу после однократного прочтения его учителем, то почти всегда учащиеся, правильно передавая сюжет задачи, затруднялись в повторении числовых данных и просили их повторить.

Нередко только после двух- и трёхкратного чтения условия задачи или записи на доске числовых данных учащийся правильно повторяет условие составной задачи и в части повествовательной и в части числовых данных.

Экспериментально-психологические исследования показали то же самое:

Текстовая часть задачи требует одного типа внимания, в то время как числа требуют другого типа внимания. При первом чтении учащийся числам отдаёт случайное внимание, взглядывая на них только мельком, чтобы уловить их общий смысл и значение, не разбираясь в деталях. Он схватывает самую суть задачи, намечает действия, которые необходимы для решения, но достаточного знания чисел он не получает. При вторичном чтении, когда смысл задачи усвоен, он обращает внимание на числовую часть и обобщает их со смыслом словесного текста.

Всё это следует иметь в виду при решении арифметических задач.

Нередко учащиеся не могут решить задачи и теряют к ней интерес только потому, что не понимают условия. Первое требование при решении задач поэтому сводится к тому, чтобы не было ни одного учащегося в классе, который бы не понимал смысла и содержания задачи.

Только при соблюдении этого условия мы можем рассчитывать на то, что учащиеся с интересом и сознательно примутся за работу.

Какими же путями достигается усвоение условия задачи? Прежде всего учитель должен сам внимательно проанализировать условие задачи, намеченной к решению, и выяснить, нет ли в ней таких понятий, которые детям или мало знакомы, или совсем неизвестны и могут повести к неверным представлениям, а иногда и к искажению смысла задачи. Например, учащиеся иногда не понимают слов «деталь», «трудодень», «припёк» и т. д.

Если налицо имеются непонятные слова и обороты речи, следует прежде всего разъяснить их действительный смысл и значение.

После того как учитель получил уверенность в том, что задача будет понята детьми, что в ней нет незнакомых детям понятий, следует, добившись полного внимания класса, прочесть задачу вслух чётко, громко, выразительно.

При составных задачах желательно условие задачи прочесть ещё раз, чётко записывая в процессе чтения данные на доске.

Чрезвычайно желательно, чтобы учитель читал условие задачи не по книге, а по *памяти*. Это повышает внимание класса и значительно влияет на качество понимания и усвоения задачи.

Запись условия задачи

Когда задача берётся из задачника, имеющегося у учеников, или задача заключает в себе немного данных (два-три) и притом выраженных небольшими числами, условие можно совсем не записывать.

При большом же количестве данных запись необходима.

Лучше всего условие задачи записать на доске при втором чтении условия задачи учителем, как об этом было указано выше. Запись должна быть чёткой, ясной.

Следует также записывать на доске условие задачи и с небольшим количеством данных в том случае, если задача трудна для решения и требует большего напряжения со стороны учащихся, или когда мы имеем дело с большими числовыми данными.

Лучше всего производить запись не полностью, а кратко. Полная запись отнимает много времени, вследствие чего урок арифметики зачастую превращается в урок письма и переписывания.

Пусть решается в классе такая задача: «Колхоз с одного поля собрал 630 *ц* картофеля, а с другого на 120 *ц* больше. Пятую часть собранного картофеля колхоз продал по 30 руб. за центнер. Сколько денег выручил колхоз?»

Запись на классной доске может иметь такой вид:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1-е п.} — 630\ \textit{ц} \\ \text{2-е п.} — \text{на } 120\ \textit{ц}\ \text{б.}\end{array}\right\} \frac{1}{5} — \text{по 30 руб. за центнер.}$$

Сколько денег выручил колхоз?

Или ещё задача: «За 48 *м* сукна мастерская заплатила 3120 руб. Сколько метров такого сукна можно было бы купить на 5200 руб.?»

Запись: 48 *м* — 3120 руб.
? — 5200 руб.

Такая запись подчёркивает зависимости между данными задачи и занимает значительно меньше места, чем полная запись. Но можно записывать данные и в строчку.

В I и отчасти во II классах целесообразнее запись условия задачи на доске делать самому учителю, в III же и в IV классах следует поручать выполнение записи на доске и учащимся. Они должны сами обдумать наиболее удобное расположение данных.

При самостоятельном решении задач по задачнику в целях сбережения времени переписывать в тетрадь условие задачи не следует: достаточно поставить номер задачи. Исключение может быть сделано лишь для трудных задач и с большим количеством числовых данных.

Усвоение условия задачи учащимися

Усвоение условия задачи следует понимать не как буквальное заучивание его, а доведение до полного понимания учащихся содержания задачи и уяснения тех зависимостей, какие даны в задаче.

Усвоение условия задачи может проводиться различно.

После прочтения условия задачи учителем и записи на доске данных, учитель задаёт учащимся такие вопросы:

Учитель: Сколько центнеров картофеля собрали с первого поля?

Ученик: С первого поля собрали 630 *ц* картофеля.

Учитель: Сколько центнеров картофеля собрали со второго поля?

Ученик: На 120 *ц* больше.

Учитель: Какую часть собранного картофеля колхоз продал?

Ученик: Продал пятую часть.

Учитель: По какой цене?

Ученик: По 30 руб. за центнер.

Учитель: Что спрашивается в задаче?

Ученик: Сколько рублей выручил колхоз?

Дело сводится к тому, что учитель задаёт вопросы таким образом, что ответ на них ученик находит в условии задачи.

В практике школы применяется и другая форма повторения условия задачи. Сводится она к следующему:

Учитель: Что обозначает число 630 *ц*?

Ученик: 630 *ц* картофеля собрал колхоз с первого поля.

Учитель: Что обозначает 120 *ц*?

Ученик: На 120 *ц* больше сняли картофеля со второго поля, чем с первого.

Учитель: Что обозначает $^1/_5$ часть?

Ученик: $^1/_5$ часть собранного картофеля колхоз продал.

Учитель: Что обозначает число 30 руб.?

Ученик: По 30 руб. за центнер продан картофель.

Учитель: Что спрашивается в задаче?

Первый приём повторения задачи легче для учащихся, его можно проводить в I и II классах, второй приём требует от учащихся большей самостоятельности, его можно рекомендовать в III и IV классах.

После такого повторения условия задачи предлагается кому-либо из учащихся повторить условие задачи целиком.

Таким образом усвоение условия задачи обеспечивается следующими приёмами:

1) Чтение условия задачи учителем и разъяснение непонятных слов и выражений.

2) Повторное чтение условия задачи учителем и краткая, но чёткая запись на доске данных задачи.

3) Повторение условия задачи учащимся по вопросам.

4) Связное повторение условия задачи учащимся целиком.

Само собой разумеется, что в зависимости от размера задачи и сложности её условия эти приёмы могут изменяться, а именно: в том случае, если задача трудна, необходимо повторить условие задачи несколько раз, в случае же если задача не трудна, можно учителю прочесть её вслух один раз и не заставлять несколько раз учащихся повторять условие задачи по частям, а повторить его целиком.

Когда есть уверенность в том, что условие задачи понято всеми учащимися, можно приступать к решению задачи.

Как решать составные (сложные) задачи

После того как учащимися понято условие задачи, следует перейти к разбору задачи. Разбор этот может производиться двумя способами: синтетическим или аналитическим. Рассмотрим в отдельности тот и другой способ на конкретной задаче.

Задача. «Пассажирский поезд прошёл за 12 час. 720 *км*, а товарный за 15 час. 450 *км*. Во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного?»

Разбор задачи синтетическим способом

В задаче имеются следующие данные: 12 час., 720 *км*, 15 час., 450 *км*.

Ученик должен выделить те данные, которые по смыслу задачи непосредственно связаны между собой. Он соображает, какие данные следует взять из условия задачи, чтобы на основе их найти новые данные, являющиеся функцией этих данных.

В нашей задаче такими данными являются время, затраченное каждым поездом, и пройденное им расстояние.

Используя эти данные, учащийся (соединяя их) может вычислить скорость движения каждого поезда, а затем сравнить эти скорости.

Покажем на этом примере, как может пойти разбор задачи.

Учитель: Что сказано про пассажирский поезд?

Ученик: Пассажирский поезд прошёл за 12 час. 720 *км*.

Учитель: Что можем узнать по этим данным?

Ученик: Сколько километров проходил пассажирский поезд за 1 час.

Учитель: Как это можно узнать?

Ученик: Нужно 720 *км* разделить на 12, потому что за час он пройдёт в 12 раз меньше, чем за 12 час.

Учитель: Что сказано в задаче про товарный поезд?

Ученик: Товарный поезд прошёл за 15 час. 450 *км*.

Учитель: Что можно узнать по этим данным?

Ученик: Сколько километров в час проходил товарный поезд.

Учитель: Как это можно узнать?

Ученик: Нужно 450 *км* разделить на 15, так как за час он пройдёт в 15 раз меньше, чем за 15 час.

Учитель: Сколько километров в час проходил пассажирский поезд?

Ученик: Пассажирский поезд проходил за час 60 *км*.

Учитель: Сколько километров в час проходил товарный поезд?

Ученик: Товарный поезд проходил за час 30 *км*.

Учитель: Что можно узнать по этим данным?

Ученик: Во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного.

Учитель: Как это узнать?

Ученик: Нужно 60 *км* разделить на 30 *км* или, иначе, узнать, сколько раз в 60 *км* содержится по 30 *км*.

Такие вспомогательные вопрсcы допустимы в самом начале (в I, II классах), когда учащиеся ещё недостаточно владеют тем логическим процессом, который связан с решением составной задачи, а в дальнейшем эти вопросы будут уже излишними. Они будут делать процесс решения задачи очень громоздким.

Учитель ограничивается краткими вопросами: «Что нужно узнать?» «Как это узнать?» «Почему? (Рассуждай!)»

Покажем это на той же задаче.

Учитель: Что нужно узнать сначала?

Ученик: Сколько километров в час проходит пассажирский поезд.

Учитель: Как это узнать?

Ученик: Нужно 720 *км* разделить на 12.

Учитель: Почему? (Рассуждай!)

Ученик: Потому что за 12 час. поезд прошёл 720 *км*, а за 1 час он пройдёт в 12 раз меньше.

После этого учитель задаёт снова вопросы.

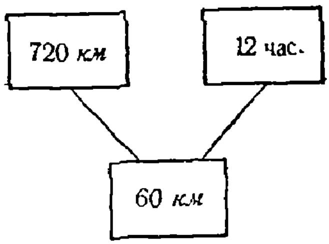
Учитель: Что дальше нужно узнать?

Ученик: Сколько километров в час проходил товарный поезд.

Учитель: Как это узнать?

Ученик: Нужно 450 *км* разделить на 15.

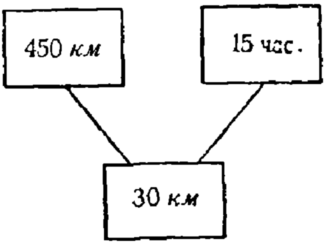
Учитель: Почему? (Рассуждай!) и т. д.



Таким образом, эти три вопроса — «что?» «как?» и «почему?» — направляют и организуют мысль и суждения учащихся.

Схематически этот процесс можно было бы изобразить так:

Определив скорость движения пассажирского поезда, ученик должен выделить другие данные из условия задачи, которые дали бы ему возможность найти новый результат как функцию этих данных:

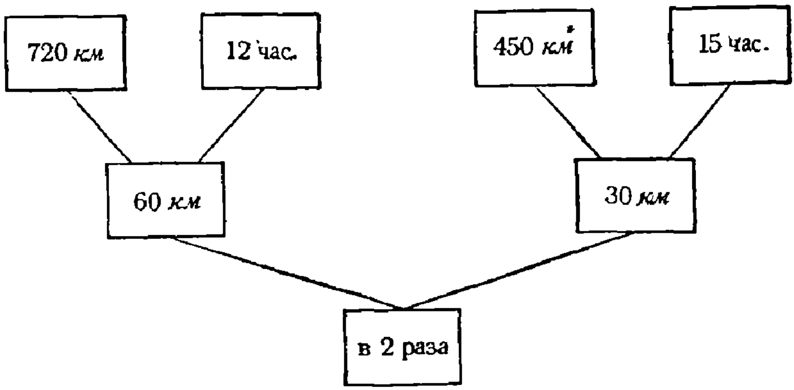


$$450\ км : 15 = 30\ км.$$

В данном случае это будет скорость движения товарного поезда.

Получив новые данные, выражающие скорости движения пассажирского и товарного поездов, ученик находит новое данное, показывающее, во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного:

$$60\ км : 30\ км = 2.$$



Такова схема, которая в законченном виде графически отображает процесс, происходящий в сознании учащихся, когда они при разборе задачи пользуются синтетическим способом.

Как начинать разбор задач синтетическим способом

Не все учащиеся сразу овладевают умением решать составные задачи. Выделение простой задачи из данной составной является для учащихся сначала делом большой трудности, поэтому учителю необходимо продумать ряд вспомогательных упражнений и вопросов, которые бы дали возможность уяснить учащимся, особенно слабым, весь логический процесс, связанный с решением составной задачи.

Первым и необходимым условием для решения составных задач является, как уже было сказано, понимание учащимися простых задач (в одно действие), умение правильно установить зависимость между величинами, правильно выбрать арифметическое действие для ответа на вопрос задачи. Вот почему в самом начале необходимо уделять большое внимание простым задачам.

Могут быть и специальные предварительные упражнения, помогающие решению составных задач синтетическим способом. Так как решение составной задачи сводится к тому, чтобы из данной составной задачи выделить два данных и *к ним сформулировать вопрос* (например, в задаче дано, что пассажирский поезд прошёл 720 *км* за 12 час.), то от учащихся требуется именно это умение. Поэтому предварительными упражнениями здесь могут быть задачи без вопроса. Учитель читает условие задачи, а учащиеся соображают, что можно узнать по этим данным, и формулируют вопрос.

Например: «Пароход шёл 5 час. по 18 *км*».

Учащиеся ставят вопрос: «Сколько километров прошёл пароход?»

«Букварь стоит 60 коп., а задачник 40 коп.».

Ученики могут поставить разные вопросы к этой задаче: «Сколько стоят букварь и задачник вместе?» «На сколько копеек букварь дороже задачника?» «На сколько копеек задачник дешевле букваря?» и т. д.

При несложных и кратких вопросах учителя, задаваемых не спеша, предоставляется полный простор для мысли учащегося, работа идёт быстро, чётко, планово.

Составление плана решения задачи

Начиная решение задач синтетическим способом с постепенного выявления каждого действия и последовательной записи решения, следует перейти к такому приёму, *когда учащиеся* после усвоения условия задачи *рассказывают весь план решения задачи.*

Применительно к вышеприведённой задаче это бы вылилось в такую форму.

Учитель: Расскажи план решения задачи.

Ученик: Сначала нужно узнать, сколько километров в час проходил пассажирский поезд. В задаче сказано, что он за 12 час. прошёл 720 *км*. За час он пройдёт не 720 *км*, а в 12 раз меньше. Значит, нам нужно 720 *км* разделить на 12.

Потом надо узнать, сколько километров в час проходил товарный поезд. В задаче сказано, что он за 15 час. прошёл 450 *км*. За час он пройдёт не 450 *км*, а в 15 раз меньше. Значит, нам нужно 450 *км* разделить на 15.

Наконец, нам нужно узнать, во сколько раз быстрее шёл пассажирский поезд. Мы узнали скорость пассажирского поезда и товарного.

Чтобы узнать, во сколько раз быстрее шёл пассажирский поезд, нужно скорость пассажирского поезда разделить на скорость товарного поезда.

В итоге следует приучить учащихся формулировать план в общем виде, что особенно важно.

Например, для вышеприведённой задачи план мог бы быть изложен таким образом.

Ученик: Сначала мы узнаем, сколько километров в час проходил пассажирский поезд. Для этого всё пройденное им расстояние разделим на количество часов. Получим скорость пассажирского поезда за 1 час.

Потом мы узнаем скорость товарного поезда. Для этого мы пройденное им расстояние разделим на количество часов.

Затем узнаём, во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного. Для этого скорость пассажирского поезда разделим на скорость товарного поезда.

При решении задач необходимо добиваться, чтобы учащиеся выделяли необходимые данные не случайно, а вполне сознательно и умели бы обосновывать, почему они применили то, а не другое действие. В этом и заключается особая ценность решения задач.

Ученик приучается правильно вскрывать зависимости между данными в задаче величинами, правильно строить свои суждения и аргументировать их.

Однако, несмотря на планомерную работу по решению задач синтетическим способом, учащиеся нередко на вопрос учителя «что нужно узнать?» говорят совершенно не то, что требуется по смыслу условия задачи.

Например, решая приведённую выше задачу, учащиеся отвечают: «Надо узнать, на сколько километров больше прошёл товарный поезд». Действительно, это *узнать можно* (750 *км*—450 *км* = 300 *км*), но *не нужно* для решения задачи.

Или: «На́ сколько часов дольше был в пути товарный поезд, чем пассажирский?» Это тоже *можно узнать* (15 час. — 12 час. = 3 часа), но для решения задачи это действие *не нужно*.

На такие ложные пути учащиеся попадают вследствие того, что не представляют себе ясно вопроса задачи и тех путей, которые ведут к разрешению этого главного вопроса задачи. Избежать таких ложных путей можно только при условии, если учащиеся будут развивать способность решать задачу на основе анализа задачи; тогда мысль их пойдёт не ощупью, не случайными путями, а сознательно, и лишние, ненужные для решения задачи действия тогда не будут иметь места.

Перейдём к рассмотрению вопроса, что значит анализировать задачу или разбирать её аналитическим способом.

Аналитический способ разбора составных (сложных) задач

Аналитический способ разбора задач сводится к тому, что исходным моментом является вопрос задачи. Если мы обратимся к условию приведённой выше задачи, то исходным моментом будет вопрос: «Во сколько раз быстрее шёл пассажирский поезд?»

Учитель: Можно ли сразу ответить на вопрос задачи?

Ученик: Нет. Мы не знаем, сколько километров в час проходил пассажирский поезд и сколько километров в час проходил товарный поезд.

Учитель: Что нужно знать по смыслу задачи для того, чтобы узнать, сколько километров в час проходил пассажирский поезд?

Ученик: Надо знать, какое расстояние прошёл пассажирский поезд и за сколько часов.

Учитель: Что сказано про пассажирский поезд в условии задачи?

Ученик: Пассажирский поезд прошёл 720 *км* за 12 час.

Учитель: Что нужно знать для того, чтобы узнать, сколько километров в час проходил товарный поезд?

Ученик: Какое расстояние прошёл товарный поезд и за сколько часов.

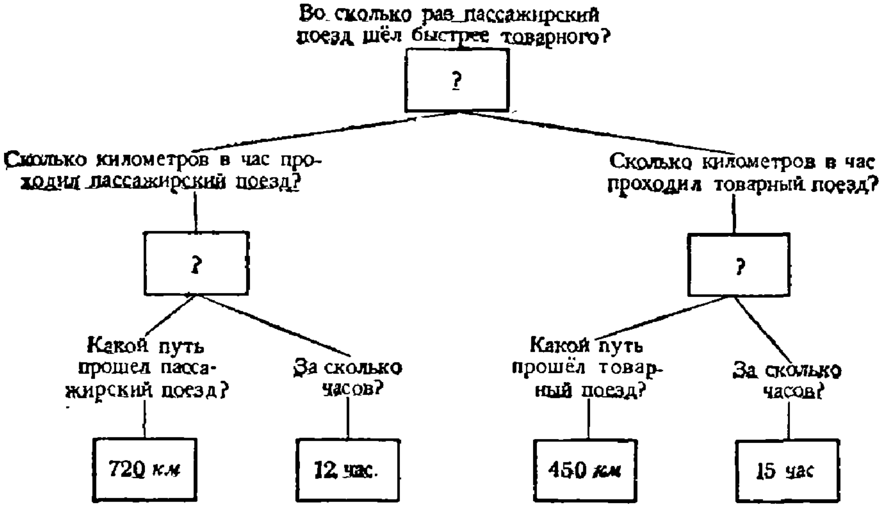
Учитель: Что сказано в условии задачи про товарный поезд?

Ученик: Товарный поезд прошёл 450 *км* за 15 час.

Учитель: Какой же будет план решения задачи?

Ученик: Сначала нужно узнать, сколько километров в час проходил пассажирский поезд. Для этого 720 *км* : 12 = 60 *км*. Потом нужно узнать, сколько километров в час проходил товарный поезд. Для этого 450 *км*:15 = 30 *км*. Наконец, нужно узнать, во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного. Для этого 60 *км*:30 *км* = 2.

Схематически этот логический процесс, который происходит в сознании учащегося, можно было представить таким образом:



Решение задачи

1) Сколько километров в час проходил пассажирский поезд?

$$720\ км : 12 = 60\ км.$$

2) Сколько километров в час проходил товарный поезд?

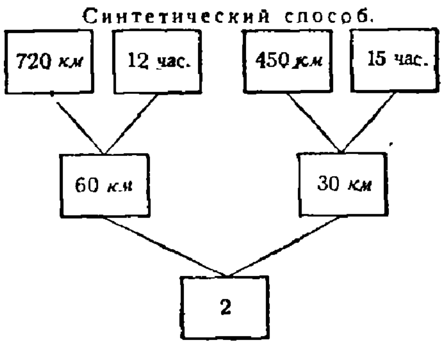
$$450\ км : 15 = 30\ км.$$

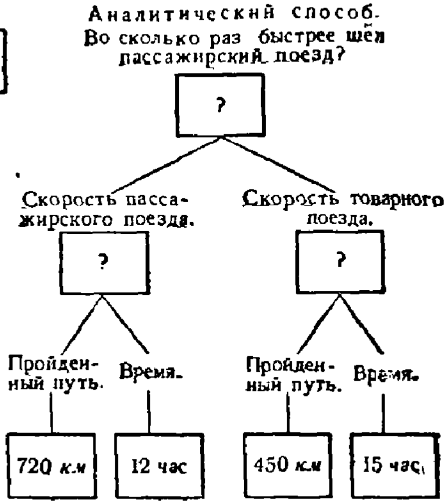
3) Во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного?

$$60\ км : 30\ км = 2\ (в\ 2\ раза).$$

Таким образом, разбирая задачу аналитическим способом, мы начинаем с вопроса задачи, затем, постепенно расчленяя вопросы, доходим до числовых данных, имеющихся в условии задачи, и, наконец, составляем план и решаем задачу так же, как это делаем, когда решаем её синтетическим способом.

Если мы сравним оба процесса, характеризующие разбор задачи синтетическим способом и аналитическим, то увидим, что каждый из них является лишь обратным по отношению к другому. Это хорошо видно на сопоставлении схем хода рассуждений при разборе задачи тем и другим способом.





Сопоставление синтетического и аналитического способов разбора задачи

В аналитическом способе разбора задачи явно выступают два процесса: собственно аналитический, когда мы, начиная от вопроса задачи, постепенно доходим до данных задачи, и синтетический, когда мы, исходя из этих данных, находим новые числа и, наконец, отвечаем на вопрос задачи. Таким образом, этот способ правильнее было бы назвать аналитико-синтетическим, так как он начинается с анализа и завершается синтезом.

Посмотрим, что происходит, когда мы разбираем задачу синтетическим способом. Здесь нет анализа в явном виде, мы сразу после усвоения условия задачи начинаем выделять нужные нам числовые данные, решаем одну простую задачу за другой и, наконец, отвечаем на вопрос задачи.

Значит ли это, что здесь анализ вообще отсутствует? Несомненно, это не так. Хотя при разборе задачи мы и не берём за исходный момент последний вопрос задачи, тем не менее учащийся задачу внутренне анализирует, только этот процесс протекает интуитивно, он словесно не выявляется.

В том случае, когда учащийся правильно намечает план решения задачи, не сбиваясь с хода решения, не стремясь выполнить лишних, ненужных по ходу решения задачи действий, мы можем утверждать, что он понимает путь, ведущий к разрешению вопроса задачи, что он интуитивно её проанализировал.

Когда же учащийся при решении сложной задачи сбивается с правильного хода решения, стремится выполнить лишние и ненужные действия, например в указанной выше задаче узнаёт, на сколько километров больше прошёл пассажирский поезд (720 *км* — 450 *км*) или на сколько часов дольше был в пути товарный поезд (15 час. — 12 час.), мы имеем дело с отсутствием этого интуитивного анализа задачи.

Иными словами, и при разборе задачи и составлении плана синтетическим способом анализ также имеет место, только он не выявлен, он протекает интуитивно. Если этот процесс анализа имеет место, то составление плана решения задачи идёт правильным путём, если нет этого процесса, учащийся допускает ошибки, выполняет ненужные действия.

Таким образом, анализ и синтез в процессе решения задачи любым способом взаимно переплетаются, взаимно дополняют друг друга.

Иначе и быть не может, так как анализ и синтез это две стороны единого познавательного процесса.

Поскольку анализ и синтез взаимно дополняют друг друга, следует, очевидно, и в процессе решения задач с учащимися фиксировать внимание учащихся на том и другом процессе.

Эту работу можно начинать ещё с I класса.

Аналитический способ разбора задач в I классе

В I классе учащиеся уже решают составные задачи, преимущественно в 2 действия. И здесь можно, решая задачу, фиксировать внимание учащихся на вопросе задачи, исходя из которого ставить вопрос: «А что для этого нужно сначала знать?» Покажем это на конкретной задаче.

Пусть дана такая задача: «Брат нашёл 12 грибов, сестра 8. Домой они принесли 15 грибов, остальные выбросили. Сколько грибов они выбросили?»

Учитель: Что спрашивается в задаче?

Ученик: Сколько грибов выбросили?

Учитель: Можно ли это узнать сразу?

Ученик: Нет, нельзя.

Учитель: Почему?

Ученик: Мы не знаем, сколько грибов нашли брат и сестра вместе.

Учитель: А как это узнать? и т. д.

Во втором полугодии учебного года учащиеся I класса уже способны при помощи учителя анализировать такого рода задачи.

Но особенно большое значение для успешного решения составных задач в дальнейшем имеют подготовительные упражнения, заключающиеся в решении простых задач с неполными данными, о чём было уже сказано в отделе простых задач.

«Ученик купил карандаш за 8 коп. и ручку. Сколько он издержал денег?»

«Мама купила 12 *м* ситца. Она сшила сыну рубашку. Сколько метров ситца у неё осталось?»

Разбирая эти задачи, учащиеся усваивают чрезвычайно важное для решения задачи аналитическим способом положение, что для решения любой простой задачи нужно иметь всегда два данных (по крайней мере), чтобы, произведя над ними какое-либо арифметическое действие, ответить на вопрос задачи.

Это же положение подкрепляется решением задач без числовых данных, например: «Ученик купил карандаш и ручку. Сколько он издержал денег?»

Разбор задач аналитическим способом во II классе

Во II классе решаются задачи с бо́льшим числом действий, с бо́льшими числовыми данными.

Учащиеся II класса уже в состоянии связно и толково сделать устный анализ нетрудной задачи в два-три действия, а затем рассказать и план её решения.

Ниже приводится выдержка из стенограммы одного урока по решению задач во II классе школы им. М. Горького.

Решалась задача следующего содержания: «Лыжник в первый день шёл 4 часа по 9 *км*, во второй день 5 часов по 7 *км*. Сколько километров прошёл лыжник за два дня?»

Ученик: В задаче спрашивается, сколько километров прошёл лыжник в два дня. Этого сразу нельзя узнать, потому что мы не знаем, сколько он прошёл в первый и во второй день в отдельности. Но узнать это можно.

Про первый день известно, что он шёл 4 часа по 9 *км* в час, а во второй день 5 часов по 7 *км* в час. Сначала нужно узнать, сколько километров прошёл лыжник в первый день: 9 *км* надо взять 4 раза, получится 36 *км*. Столько километров лыжник прошёл в первый день. Теперь нужно узнать, сколько километров лыжник прошёл во второй день. 7 *км* нужно взять 5 раз, получится 35 *км*. Столько километров лыжник прошёл во второй день. Теперь мы знаем, сколько километров лыжник прошёл в первый и во второй день в отдельности. Теперь можно узнать, сколько километров прошёл лыжник в 2 дня. Для этого к 36 *км*, которые лыжник прошёл в первый день, нужно прибавить 35 *км*, которые лыжник прошёл во второй день, — получится 71 *км*. Столько километров прошёл лыжник за 2 дня.

Таким же образом на этом уроке решается вторая задача: «Пассажирский поезд шёл 2 часа по 45 *км*, а товарный 3 часа по 32 *км*. Который поезд прошёл больше и на сколько?»

Приводим решение этой задачи. После повторения условия задачи учитель обращается к классу.

Учитель: Скажите, какой же вопрос задачи?

Ученик: Который поезд прошёл больше и на сколько?

Учитель: Теперь подумайте, можем ли сразу ответить на этот вопрос?

Ученик: Мы не можем.

Учитель: А чего мы не знаем для решения этого вопроса?

Ученик: Не знаем, сколько прошёл пассажирский и сколько товарный поезд.

Учитель: А как это можно узнать?

Ученик: 45 *км* взять два раза, получится 90 *км*. Столько километров прошёл за два часа пассажирский поезд.

Учитель: И ещё что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи?

Ученик: Сколько километров прошёл товарный поезд?

Учитель: Как это узнать?

Ученик: 32 *км* взять три раза, потому что в каждый час он проходил 32 *км*, а он шёл не 1 час, а 3 часа, получится 96 *км*.

Учитель: Узнали, сколько всего прошёл пассажирский поезд и сколько всего прошёл товарный поезд. Теперь можно ответить на вопрос задачи?

Ученик: Можно.

Учитель: Как это сделать?

Ученик: Надо от 96 *км* отнять 90 *км*, и тогда мы узнаем, на сколько километров больше прошёл товарный поезд.

Учитель: Сколько же вопросов в нашей задаче?

Ученик: Три.

Учитель: Напомни нам все их.

Ученик: Первый вопрос: сколько километров прошёл пассажирский поезд за 2 часа?

Второй вопрос: сколько километров прошёл товарный поезд за 3 часа?

Третий вопрос: который поезд прошёл больше и на сколько?

Учитель: Хорошо. Вспомнили все наши три вопроса. Как же решается эта задача, начиная от вопроса нашей задачи?

Ученик: Вопрос задачи: который поезд прошёл больше и на сколько? Сразу узнать этого нельзя. Мы ещё не знаем, сколько прошёл пассажирский поезд и товарный в отдельности.

Известно, что пассажирский поезд шёл 2 часа по 45 *км* в час. Надо 45 *км* взять 2 раза, получится 90 *км*. Столько километров прошёл пассажирский поезд. Теперь нужно узнать, сколько километров прошёл товарный поезд. Тут известно, что он шёл 3 часа по 32 *км* в час. Раз он проходил в час 32 *км*, значит, в 3 часа он прошёл больше в 3 раза. Нужно 32 *км* взять три раза, получится 96 *км*. Теперь мы знаем, сколько прошли пассажирский поезд и товарный в отдельности, и можем узнать, который поезд прошёл больше и на сколько. Для этого нужно от 96 *км* отнять 90 *км* и получится 6 *км*. Значит, на 6 *км* прошёл товарный поезд больше, чем пассажирский.

Аналитический способ разбора задач в III и IV классах

Если во II классе учащиеся могут справиться с устным анализом нетрудных задач в два-три действия, то в III и IV классах можно перейти к анализу более сложных задач и к письменной фиксации анализа небольшого числа задач.

Приведём пример такой записи. Возьмём условие разобранной ранее задачи: «Пассажирский поезд прошёл за 12 час. 720 *км*, а товарный за 15 час. 450 *км*. Во сколько раз пассажирский поезд шёл быстрее товарного?»

Запись в тетрадях могла бы носить такой характер:

Разбор решения задачи от вопроса задачи

Во сколько раз быстрее шёл пассажирский поезд? ?	1. Сколько километров в час проходил пассажирский поезд? ?	1. Сколько километров прошёл всего пассажирский поезд? 720 *км*. 2. Сколько часов он шёл? 12 час.
	2. Сколько километров проходил товарный поезд? ?	1. Сколько километров прошёл всего товарный поезд? 450 *км*. 2. Сколько часов он шёл? 15 час.

Решение задачи

1) 720 *км*:12 = 60 *км*.
2) 450 *км*:15 = 30 *км*.
3) 60 *км*:30 *км* = 2 (в 2 раза).

В дополнение к устному разбору задачи, который должен проводиться в большинстве случаев, такая запись аналитического разбора хотя бы нескольких задач (3—5 задач) поможет учащимся более наглядно и отчётливо уяснить смысл анализа, где к каждому вопросу нужно уметь подобрать из условия задачи непременно два данных.

Решение задач аналитическим способом только вначале кажется несколько трудным, но затем учащиеся быстро усваивают основную идею анализа, и решение задач с обоснованием плана не вызывает особых затруднений. У учащихся развивается вкус к более углублённой математической работе, повышается общая математическая культура.

Нередко приходится слышать, что анализ труден для учащихся начальной школы; между тем, наблюдения над учащимися в процессе их работы показали, что умелое применение анализа делает работу учащихся более осмысленной, способствует повышению интереса к занятиям; решение задач становится увлекательным даже для тех учащихся, которые ранее не интересовались арифметикой, а иногда даже тяготились ею.

Запись плана и решения задачи

Большое значение при решении задач имеет рациональная запись как плана решения задачи, так и самого решения. Запись эта может производиться различно. Покажем это на примере какой-нибудь задачи.

Например: «Школа наметила купить 196 *куб. м* еловых дров по 8 руб. 25 коп. за 1 *куб. м*, но четвёртую часть дров ей пришлось заменить берёзовыми, кубометр которых стоит 12 руб. 75 коп. Сколько уплатила школа за все дрова?»

Запись плана может предшествовать решению задачи, тогда план принимает такой вид:

План решения задачи

1) Сколько кубометров было куплено берёзовых дров?
2) Сколько кубометров было куплено еловых дров?
3) Сколько уплачено за берёзовые дрова?
4) Сколько уплачено за еловые дрова?
5) Сколько уплатила школа за все купленные дрова?

Решение задачи

1) 196 *куб. м*:4 = 49 *куб. м.*
2) 196 *куб. м* — 49 *куб. м.* = 147 *куб. м.*
3) 12 руб. 75 коп. × 49 = 624 руб. 75 коп.

$$\begin{array}{r} \times\,1275 \\ 49 \\ \hline 11475 \\ 5100 \\ \hline 62475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\,825 \\ 147 \\ \hline 5775 \\ 3300 \\ 825 \\ \hline 121275 \end{array}$$

4) 8 руб. 25 коп. × 147 = 1212 руб. 75 коп.
5) 624 руб. 75 коп. + 1212 руб. 75 коп. = = 1837 руб. 50 коп.

Ответ: 1837 руб. 50 коп.

План может идти параллельно с решением задачи, тогда после каждого вопроса плана следует выполнение соответствующего действия.

В этом случае решение задачи принимает такой вид:

Решение задачи

1) Сколько кубометров было куплено берёзовых дров?

196 *куб. м*:4 = 49 *куб. м.*

2) Сколько кубометров было куплено еловых дров?

196 *куб. м.* — 49 *куб. м.* = 147 *куб. м.*

3) Сколько уплачено за берёзовые дрова?

12 руб. 75 коп. × 49 = 624 руб. 75 коп.

$$\begin{array}{r} \times\,1275 \\ 49 \\ \hline 11475 \\ 5100 \\ \hline 62475 \end{array}$$

4) Сколько уплачено за еловые дрова?
8 руб. 25 коп. × 147 = 1212 руб. 75 коп.

$$\begin{array}{r} \times\,825 \\ 147 \\ \hline 5775 \\ 3300 \\ 825 \\ \hline 121275 \end{array}$$

5) Сколько уплатила школа за все купленные дрова? 624 руб. 75 коп. + 1212 руб. 75 коп. = 1837 руб. 50 коп.

Ответ: 1837 руб. 50 коп.

Иногда предпочитают не писать вопросов впереди каждого действия, а пишут пояснение к каждому действию, тогда запись принимает такой вид:

Решение задачи

1) 196 *куб. м* : 4 = 49 *куб. м* куплено берёзовых дров.

2) 196 *куб. м* — 49 *куб. м* = 147 *куб. м* куплено еловых дров.

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \times \quad 49 \\ \hline 11475 \\ 5100 \\ \hline 62475 \end{array}$$

3) 12 руб. 75 коп. × 49 = 624 руб. 75 коп. уплачено за берёзовые дрова.

4) 8 руб. 25 коп. × 147 = 1212 руб. 75 коп. уплачено за еловые дрова.

$$\begin{array}{r} 825 \\ \times 147 \\ \hline 5775 \\ 3300 \\ 825 \\ \hline 121275 \end{array}$$

5) 624 руб. 75 коп. + 1212 руб. 75 коп. = 1837 руб. 50 коп. уплатила школа за все купленные дрова.

Встаёт вопрос, какую запись было бы целесообразнее применять при решении задач.

В практике целого ряда школ наиболее часто употребляется второй вид записи, когда план и решение выполняются параллельно и после каждого вопроса следует выполнение действия.

1) Сколько кубометров было куплено берёзовых дров?

196 *куб. м* : 4 = 49 *куб. м.*

2) Сколько кубометров было куплено еловых дров?

196 *куб. м* — 49 *куб. м* = 147 *куб. м.*

3) Сколько уплачено за берёзовые дрова?

12 руб. 75 коп. $\times$ 49 = 624 руб. 75 коп.

4) Сколько уплачено за еловые дрова?

8 руб. 25 коп. $\times$ 147 = 1212 руб. 75 коп.

5) Сколько уплатила школа за все купленные дрова?
624 руб. 75 коп. + 1212 руб. 75 коп. = 1837 руб. 50 коп.

Ответ: 1837 руб. 50 коп.

В этом случае каждое действие выполняется наиболее сознательно, так как ему предшествует чётко сформулированный вопрос.

В IV классе можно практиковать первый вид записи, когда план предшествует решению задачи.

Нередко (и совершенно правильно) учитель ставит вопрос, следует ли каждую задачу, решаемую в классе или дома, сопровождать записью плана или можно иногда ограничиваться просто записью решения без плана (или пояснений).

Следует отметить, что письменная фиксация вопросов (или пояснений) имеет большое значение в смысле выработки у учащихся кратких и ясных формулировок. К тем фразам, которые учащийся записывает, он всегда относится с большей ответственностью и продуманностью; но, с другой стороны, запись вопросов в каждой задаче отнимает много времени, лишая учащихся возможности решить большее количество разнообразных задач. Нередко вопросы не являются новыми, учащийся уже не раз их чётко формулировал и записывал в своей тетради, поэтому было бы правильно писать вопросы (или пояснения) не в каждой задаче.

В практике целого ряда школ наметилась такая примерная норма. В среднем из 4—5 задач только одна записывается с вопросами, а остальные задачи записываются без вопросов. В задачах, которые для учащихся по приёму решения являются новыми, вопросы, как правило, записываются, а в задачах, которые не являются для них уже новыми, вопросы не записываются.

Если в старших классах учащиеся за год решают 500—600 задач, то из них с вопросами записываются 100—150 задач, и этого вполне достаточно для того, чтобы учащиеся получили навык чётко формулировать вопросы и грамотно записывать их в тетрадях.

Основные умения, связанные с решением всякой задачи, как-то: 1) умение кратко записывать условие; 2) умение расчленить составную задачу на простые и решить её с обоснованием каждого действия, пользуясь синтетическим или аналитическим способом; 3) умение рационально записать условие задачи — всё это усваивается учащимися при решении собственно арифметических задач, которые для своего решения не требуют знания особых приёмов. Когда этой необходимой и обязательной частью работы, связанной с решением задач, *учащиеся овладеют*, тогда можно *постепенно, наряду с решением собственно арифметических задач*, уже приступить к решению и более трудных задач, требующих особой сообразительности, особого приёма, к решению так называемых типовых задач.

Они должны вводиться постепенно в зависимости от трудности их решения. Некоторые из типовых задач уже могут иметь место в работе II класса. Большинство же их решается в III и IV классах.

5. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

В практике советской школы решаются типовые задачи:

1) решаемые способом приведения к единице,
2) решаемые способом отношений,
3) на сложное тройное правило,
4) на пропорциональное деление,
5) на нахождение двух или трёх чисел по данной их сумме и разности,
6) на нахождение двух или трёх чисел по данной их сумме или разности и кратному отношению,

7) на совместную работу и на движение,
8) на исключение одного неизвестного,
9) на замену одного неизвестного,
10) на уравнивание данных,
11) на предположение,
12) на нахождение среднего арифметического,
13) на зависимость между компонентами действий,
14) с противоположно направленными величинами,
15) задачи, в которых комбинируются различные типы [1]).

Кроме указанных типов задач, решаются задачи на вычисление времени, дроби, проценты и геометрические задачи.

Таким образом, учащийся должен осмыслить целый ряд разнообразных зависимостей между разными величинами, усвоить целый ряд новых терминов, новых приёмов. Всё это дело далеко не лёгкое, и если в расположении этого материала не будет системы, постепенного перехода от простого к более сложному, если каждый этап работы не будет до конца осознан учащимися, то работа будет не только мало продуктивной, но и может создать скуку, убьёт интерес учащихся к работе.

Работа же глубоко продуманная, построенная по принципу доступности и постепенного преодоления трудностей, создаёт у учащихся ясность в понимании разбираемых зависимостей, уверенность в своих силах и пробуждает творчество самих учащихся. Даже для слабых учеников уроки по арифметике в школе и самостоятельные занятия дома будут источником живейшего интереса и удовольствия. Может быть здесь удастся заложить такой интерес к занятию математикой, что у некоторых учащихся он определит их склонности к математике и точным наукам на всю их последующую жизнь.

---

[1]) Приведённая здесь классификация задач по типам имеет ряд недочётов: одни задачи выделены по приёмам решения (приведение к единице, пропорциональное деление и т. д.), другие по содержанию (задачи на движение).

Классификация эта приведена несмотря на указанные недочёты в силу того, что она широко принята в учебной литературе и в практике школ.

Задачи на уравнивание данных и на предположение в настоящее время для начальной школы не обязательны.

Нужно лишь в работе избегать трафарета, шаблона, а всё время иметь в виду возможность проявлений учащимися своего посильного и радостного творчества.

Наряду с типовыми задачами необходимо решать и собственно арифметические нетиповые задачи. Они могут быть построены таким образом, что потребуют от учащихся большой мыслительной работы, правильного понимания основных математических понятий — увеличения и уменьшения на несколько единиц и в несколько раз, разностное и кратное сравнение.

Приведём несколько таких задач.

«153 *м* ситца стоят 468 руб., а 125 *м* сукна 8500 руб. Во сколько раз 15 *м* сукна дороже 17 *м* ситца?»

«В двух кусках было 47 *м* одинаковой ткани. Когда от первого куска продали на сумму 32 руб. 40 коп., а от второго на сумму 59 руб. 40 коп., то в обоих кусках осталось по 15 *м*. Сколько метров ткани было до продажи в каждом куске?»

«Швейная артель купила кусок сукна за 1224 руб. по 25 руб. 50 коп. за метр. Из этого сукна сшили 7 пальто и несколько детских костюмов. На каждое пальто пошло по 3 *м* 20 *см* сукна, а на детский костюм на 1 *м* 60 *см* меньше. Сколько детских костюмов сшила артель?»

«Школа заказала 96 парт по 64 руб. и 35 столов по 48 руб. Фабрика доставила 72 парты, а остальные деньги пошли на столы. Сколько столов доставила фабрика?»

«На моторной лодке сделали в два конца 35 *км* 360 *м*. По течению лодка двигалась со скоростью 340 *м* в минуту, а против течения вдвое медленнее. Сколько времени лодка была в пути?»

«Велосипед, фотоаппарат и радиоприёмник стоят вместе 1065 руб. Велосипед и радиоприёмник стоят вместе 710 руб., фотоаппарат и радиоприёмник стоят 775 руб. Сколько стоит каждая вещь в отдельности?»

Перейдём к рассмотрению отдельных типовых задач и методов решения их в школе.

Задачи, решаемые способом приведения к единице

Эти задачи являются наиболее доступными учащимся. Они по существу не представляют чего-либо особенно отличного от тех задач и тех зависимостей между величинами, с которыми учащиеся могли ознакомиться при решении простых и составных собственно арифметических задач.

В качестве примера приведём конкретные задачи.

1) «Для 45 лошадей нужно иметь в день 540 *кг* сена. Сколько килограммов сена потребуется в день для 70 лошадей?»

2) «Для 45 лошадей нужно иметь в день 540 *кг* сена. Сколько лошадей можно прокормить в день, если запас сена составляет 720 *кг*?»

3) «Самолёт пролетел за 4 часа 1400 *км*. Сколько он может пролететь за 9 лётных часов?»

4) «Самолёт пролетел за 4 часа 1400 *км*. Сколько лётных часов ему потребуется для того, чтобы пролететь 2450 *км*?»

Как видно из приведённых выше задач, они несколько отличаются одна от другой. Вторая и четвёртая задачи называются иногда задачами, которые решаются способом обратного приведения к единице. Следует познакомить учащихся с задачами того и другого вида.

Рассмотрим решение первой задачи. Лучше всего её разобрать аналитическим способом. После усвоения условия задачи учитель ставит такой вопрос:

Учитель: Что спрашивается в задаче?

Ученик: Сколько килограммов сена потребуется в день для 70 лошадей.

Учитель: Что нужно знать для того, чтобы ответить на вопрос задачи?

Ученик: Сколько килограммов сена нужно в день для одной лошади.

Учитель: Какие данные есть для этого в условии задачи?

Ученик: Для 45 лошадей в день нужно иметь 540 *кг*.

Учитель: Как же узнать, сколько килограммов сена нужно в день для одной лошади?

Ученик: Нужно 540 *кг* разделить на 45, так как, если для 45 лошадей нужно 540 *кг*, то для одной лошади нужно в 45 раз меньше.

Учитель: Какой же будет план решения задачи?

Ученик: Сначала нужно узнать, сколько килограммов сена нужно для одной лошади в день. Для этого нужно 540 *кг* разделить на 45, а затем полученное число умножить на 70.

Решение задачи с планом записывается на доске и в ученических тетрадях.

1) Сколько килограммов сена в день нужно одной лошади?

$$540 \text{ кг} : 45 = 12 \text{ кг}.$$

2) Сколько килограммов сена нужно в день для 70 лошадей?

$$12 \text{ кг} \cdot 70 = 840 \text{ кг}.$$

Аналогично решаются и остальные задачи; только в задачах второй и четвёртой рассуждения будут несколько иными.

Чтобы узнать, какое количество лошадей можно прокормить в день, если запас сена составляет 720 *кг*, надо знать, сколько сена требуется в день для одной лошади, как и в первой задаче; а чтобы затем ответить на вопрос задачи, нужно узнать, сколько раз в 720 *кг* содержится по 12 *кг*.

Решение задачи будет записано так:

1) Сколько килограммов сена в день нужно одной лошади?

$$540 \text{ кг} : 45 = 12 \text{ кг}.$$

2) Сколько лошадей можно прокормить в день, если запас сена составляет 720 *кг*?

$$720 \text{ кг} : 12 \text{ кг} = 60.$$

Ответ: 60 лошадей.

Задачи на приведение к единице решаются уже во II классе, но с небольшими числовыми данными.

В этом случае способ решения задачи, не осложнённой большими числами и построенной на более близком материале, доступнее учащимся. Эти задачи будут подготовительной ступенью к решению задач с большими числовыми данными и более сложных задач, например: «Сколько сена нужно заготовить на месяц для 38 лошадей и 45 коров, если на день требуется для 8 лошадей 96 *кг*, а для 15 коров 120 *кг* сена?»

«Один печник за 5 час. уложил 1450 кирпичей, а другой — за 4 часа 1420 кирпичей. Который из них укладывает за час больше кирпичей и на сколько?»

Большое значение имеет также самостоятельное составление учащимися таких задач. Если учащийся сумеет правильно подобрать данные, толково и грамотно сформулировать самое условие задачи, это уже является гарантией и понимания и сознательного отношения к такого рода зависимостям между величинами.

После ряда задач, решённых учащимися на приведение к единице, после упражнений их в самостоятельном составлении таких задач целесообразно сделать обобщение и сформулировать его применительно к уровню развития учащихся.

Обобщение решения указанных выше задач можно было бы провести примерно таким образом:

Учитель: Не заметили ли вы какого-нибудь сходства в решении всех этих задач?

Ученик: Да. Сходство есть. Сначала мы узнавали:

Сколько корма нужно в 1 день.

Сколько кирпичей укладывали за 1 час.

Сколько километров пролетает самолёт в 1 час и т. д.

Учитель: Да. В этих задачах мы приводим к одному или, как говорят, приводим к одной единице, поэтому будем называть такие задачи задачами на приведение к единице.

Такое обобщение, сделанное учащимися и в случае необходимости выправленное учителем, как бы подводит итог работе, проделанной учащимися, помогает находить, устанавливать аналогию в однородных явлениях, выделять это общее и кратко его формулировать.

Эти качества для общего развития учащихся и для дальнейшего изучения математики имеют большое значение.

Таким образом, система при решении задач, в которых учащиеся встречаются с новыми для них способами решения, может быть примерно такой:

1) Решение задач с небольшими числовыми данными и на близком для понимания учащихся жизненном материале, когда условие задачи не усложнено большим количеством данных.

2) Составление учащимися устных задач данного типа.

3) Решение с учителем в классе задач, несколько усложнённых дополнительными условиями и большими числовыми данными.

4) Самостоятельное решение учащимися таких задач.

5) Обобщение.

Задачи, решаемые способом отношений

Рассмотрим такую задачу: «На лугу накосили 360 *ц* травы. При сушке из 15 *ц* травы получилось по 4 *ц* сена. Всё сено свезли на подводах по 3 *ц* на каждой. На скольких подводах перевезли всё сено?»

Наиболее трудным моментом здесь будет для учащихся нахождение количества центнеров сена, какое должно получиться из 360 *ц* травы.

Если бы 15 *ц* делились на 4 нацело, можно было бы узнать, сколько центнеров травы нужно для того, чтобы получить 1 *ц* сена. Но 15 на 4 нацело не делится.

Можно разделить 15 *ц* на 4, если центнеры раздробим в килограммы; тогда получится 15 *ц*:4 = 3*ц* 75 *кг*. Но для решения задачи дальше нужно будет и 360 *ц* раздробить в килограммы, поэтому решение задачи становится громоздким. Нельзя ли эту задачу решить более рациональным способом?

Бывают и такие задачи, где раздробления сделать нельзя и учащиеся вообще будут не в состоянии решить задачи, если не овладеют особым методом для решения таких задач. Приведём несколько таких задач.

«12 стульев стоят 275 руб. Сколько будут стоить 48 таких стульев?»

«12 стульев стоят 275 руб. Сколько таких стульев можно купить на 1375 руб.?»

«За 3 часа рабочий сделал 125 деталей. Сколько таких деталей он может сделать за 6 час. работы?»

«За 3 часа рабочий сделал 125 деталей. Сколько времени потребуется для того, чтобы сделать 375 деталей?» и т. д.

Эти задачи нельзя решить приведением к единице (без применения дробей), так как 275 не делится на 12, как не делится и 125 на 3.

Как же решаются такие задачи?

Прежде чем решать усложнённые задачи или задачи с большими числовыми данными, целесообразно начать, как и решение задач на приведение к единице, ознакомление учащихся с этими задачами на задачах с небольшими числовыми данными, которые можно решить устно и в которых способ решения вырисовывается особенно отчётливо.

Например: «В мастерской на 3 пальто пошло 10 *м* сукна. Сколько метров сукна пойдёт на 6 таких пальто?» На этой задаче значительно легче учащимся установить зависимость между величинами. Они легко установят зависимость между данными задачами: «6 пальто в 2 раза больше 3 пальто, значит, и материи пойдёт в 2 раза больше».

Для большей ясности задачу можно наглядно проиллюстрировать.

Производится разбор приёма, посредством которого решили задачу.

Учитель: Можно ли было узнать, сколько метров сукна шло на 1 пальто?

Ученик: Нет.

Учитель: Почему?

Ученик: Потому что 10 не делится на 3.

Учитель: Что же мы могли узнать?

Ученик: Мы могли узнать, во сколько раз 6 пальто больше 3 пальто.

Учитель: Как же мы это узнали?

Ученик: 6 пальто разделить на 3 пальто, будет 2.

Учитель: Дальше что мы узнали?

Ученик: Сколько метров материи пошло на 6 пальто.

Учитель: Как это мы узнали?

Ученик: 10 метров умножили на 2.

Учитель: Почему?

Ученик: Потому что пальто сшили в 2 раза больше, значит, и сукна должно пойти в 2 раза больше.

Условие задачи продолжается: «А сколько сукна пойдёт на 9 таких пальто? На 12, на 15 пальто?» и т. д.

Решаются устно ещё подобные задачи: «10 пуговиц стоят 25 коп. Сколько стоят 20 таких пуговиц? 30 пуговиц?»

В подтверждение того, что учащиеся поняли условие задачи, предлагается учащимся самим составить подобные задачи. Условия их разбираются. Отмечаются недочёты в отдельных задачах, вносятся в них исправления;

часть задач, предложенных учащимися, решается всем классом.

После этого можно перейти к задачам усложнённым, например, таким: «В мастерской было заготовлено 350 *м* чёрной материи и 475 *м* синей. Из 10 *м* чёрной материи выходило 3 костюма, а из 25 *м* синей — 7 костюмов. Сколько всего костюмов мастерская может сшить из этой материи?»

Решение таких задач уже не будет ставить учащихся в тупик. Они установят аналогию с только что решёнными задачами и сумеют в этой сложной задаче выделить новую трудность и самостоятельно её разрешить.

При такой работе учащиеся всё время активны, трудности увеличиваются, но и сами дети растут. Даже для слабых учащихся, которых непреодолимые трудности обычно подавляют, угнетают, лишают желания работать, неясного, туманного нет, работа становится посильной, интересной и увлекательной.

Несколько труднее сделать здесь обобщение, так как формулировка «способ кратных отношений» для учащихся недоступна, поэтому в этих задачах можно ограничиться такой формулировкой: «Для решения этих задач мы сравнивали, во сколько раз одно данное число больше другого данного числа».

Задачи на сложное тройное правило

Задачи на сложное тройное правило, поставленные после решения и составления учащимися задач на простое тройное правило путём приведения к единице, не представляют для учащихся особой трудности. Идея приведения к единице уже усвоена учащимися, а двукратное приведение к единице не является чем-либо новым.

Рассмотрим какую-нибудь конкретную задачу этого типа.

«35 тракторов в 6 дней вспахали 1890 *га* пашни. Сколько гектаров могут вспахать 60 таких же тракторов в течение 15 дней?»

Запись условия на доске может быть выполнена таким образом:

35 тракторов	в 6 дней	вспахали	1890 *га*
60 »	в 15 дней	»	?

Рассуждения могут быть построены примерно таким образом.

Учитель: Что нужно знать для того, чтобы вычислить, сколько гектаров могут вспахать 60 тракторов в 15 дней?

Ученик: Надо знать, сколько гектаров может вспахать трактор в день.

Учитель: А как это узнать из условия задачи?

Ученик: Так как в условии задачи сказано, что 35 тракторов в 6 дней вспахали 1890 *га*, то один трактор вспашет за те же 6 дней в 35 раз меньше, а в один день ещё в 6 раз меньше.

Учитель: Какой же будет план решения задачи?

Ученик: Сначала нужно узнать, сколько гектаров вспашет 1 трактор в 6 дней, для этого нужно 1890 *га*: 35. Потом нужно узнать, сколько гектаров вспашет 1 трактор за 1 день, для этого полученное число нужно разделить на 6. Потом нужно узнать, сколько гектаров вспашет 1 трактор за 15 дней, для этого дневную норму вспашки трактора умножить на 15. Наконец, нужно узнать, сколько гектаров вспашут за эти 15 дней 60 тракторов.

Запись решения на доске и в ученических тетрадях будет иметь такой вид.

Решение задачи

1) Сколько гектаров вспашет 1 трактор в 6 дней?

$$1890 \text{ }га:35=54 \text{ }га.$$

2) Сколько гектаров вспашет 1 трактор в 1 день?

$$54 \text{ }га:6=9 \text{ }га.$$

3) Сколько гектаров вспашет 1 трактор за 15 дней?

$$9 \text{ }га\times 15=135 \text{ }га.$$

4) Сколько гектаров вспашут 60 тракторов за 15 дней?

$$135 \text{ }га\times 60=8100 \text{ }га.$$

Почти всякая сложная арифметическая задача может иметь несколько решений. Особенно легко это показать учащимся на задачах на сложное тройное правило. Приведём несколько решений этой задачи.

Второе решение задачи

1) Сколько гектаров вспашут 35 тракторов за 1 день?

$$1890\ га : 6 = 315\ га.$$

2) Сколько гектаров вспашет 1 трактор в 1 день?

$$315\ га : 35 = 9\ га.$$

3) Сколько гектаров вспашут 60 тракторов в 1 день?

$$9\ га \times 60 = 540\ га.$$

4) Сколько гектаров вспашут 60 тракторов в 15 дней?

$$540\ га \times 15 = 8100\ га.$$

Третье решение задачи

1) Сколько гектаров вспашет 1 трактор в 6 дней?

$$1890\ га : 35 = 54\ га.$$

2) Сколько гектаров вспашут 60 тракторов в 6 дней?

$$54\ га \times 60 = 3240\ га.$$

3) Сколько гектаров вспашут 60 тракторов в 1 день?

$$3240\ га : 6 = 540\ га.$$

4) Сколько гектаров вспашут 60 тракторов в 15 дней?

$$540\ га \times 15 = 8100\ га.$$

Помимо приведённых решений учащиеся могут указать ещё другие решения. Творчество учащихся в этом направлении следует поддерживать как в данном случае, так и при решении задач иного типа.

Как и при решении задач, разобранных выше, помимо решения задач, данных учителем или взятых из сборника, необходимо, чтобы сами учащиеся составляли такие задачи.

В случае затруднений учащихся при решении задач на сложное тройное правило можно начать с задач упрощённых, постепенно переходя от них к задачам более трудным.

Порядок решения задач может быть примерно таким:

а) «На 15 лошадей в течение 6 дней израсходовали 900 *кг* сена. Сколько килограммов сена расходовали в день на одну лошадь?»

(Задача решается всего лишь двумя действиями.)

б) «На 15 лошадей в течение 6 дней израсходовали 900 *кг* сена. Сколько сена по этой норме потребуется в 1 день на 20 лошадей?»

«На 15 лошадей в течение 6 дней израсходовали 900 *кг* сена. Сколько сена по этой норме потребуется одной лошади на 20 дней?»

(Эти две задачи решаются тремя действиями.)

в) Наконец, может быть дана задача вида:

«На 15 лошадей в течение 6 дней израсходовали 900 *кг* сена. Сколько сена потребуется 12 лошадям на 30 дней?»

(Задача решается четырьмя действиями.)

Задачи на нахождение двух или трёх чисел по данной их сумме и разности

Задачи на нахождение двух или трёх чисел по данной их сумме и разности являются для учащихся довольно трудными задачами. Они легче решаются алгебраически с помощью уравнений, решение же арифметическим способом не сразу даётся всем учащимся.

Разберём конкретную задачу.

«Завод за два месяца выпустил 385 600 кирпичей, при этом за второй месяц на 95 400 кирпичей больше, чем за первый. Сколько кирпичей выпустил завод за первый месяц и второй в отдельности?»

Алгебраически эта задача решается просто.

Если мы обозначим число кирпичей, выпущенных за первый месяц, через x, то число кирпичей, выпущенных за второй месяц, составит $x+95\,400$.

Тогда общее количество кирпичей, выпущенных за два месяца, составит

$$x+x+95\,400=385\,600,$$

откуда

$$x+x=385\,600-95\,400,$$
$$2x=290\,200,$$
$$x=145\,100.$$

Следовательно, за первый месяц завод выпустил 145 100 кирпичей, а за второй месяц 145 100 + 95 400 = = 240 500 кирпичей.

Сложнее обстоит дело, когда мы решаем задачу арифметически. Здесь нам нужно предположить, что во второй месяц завод выпустил столько же, сколько он в действительности выпустил за первый месяц.

Но в этом случае и общее количество выработки кирпичей за два месяца уменьшится на 95 400 кирпичей. 385 600 кирпичей — 95 400 кирпичей = 290 200 кирпичей.

Это количество кирпичей следует разделить на две равные части:

290 200 кирпичей : 2 = 145 100 кирпичей.

Такое количество кирпичей было выработано заводом в первый месяц. Отсюда легко узнать, сколько кирпичей выработал завод во второй месяц:
145 100 кирпичей + 95 400 кирпичей = 240 500 кирпичей.

Проверка:

$$\begin{array}{r l} & 145\,100 \text{ кирпичей} \\ + & 240\,500 \quad » \\ \hline & 385\,600 \text{ кирпичей выработано за два месяца.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r l} & 240\,500 \text{ кирпичей} \\ - & 145\,100 \quad » \\ \hline & 95\,400 \text{ кирпичей.} \end{array}$$

На 95 400 кирпичей завод выработал больше во второй месяц, чем в первый.

Полученные данные удовлетворяют условию задачи. Значит, задача решена верно.

Можно эту задачу решить и иначе. Допустить, что в первый месяц завод выпустил столько же кирпичей, сколько он действительно выпустил во второй месяц.

В этом случае общее количество кирпичей за два месяца увеличится на 95 400 кирпичей. Задача будет решаться таким образом.

1) 385 600 кирпичей + 95 400 кирпичей = 481 000 кирпичей.

2) 481 000 кирпичей : 2 = 240 500 кирпичей выпущено заводом за второй месяц.

3) 240 500 кирпичей — 95 400 кирпичей = 145 100 кирпичей выпущено заводом за первый месяц.

Чаще всего этого рода задачи осложняются целым рядом дополнительных условий и данных. Например:

1) «Созхоз собрал пшеницу с 345 *га* по 18 *ц* и с 234 *га* по 19 *ц*. Весь собранный урожай рассортировали, и лучшего семенного зерна оказалось на 950 *ц* больше, чем зерна второго сорта. Сколько зерна каждого сорта в отдельности получил совхоз?»

2) «Колхоз собрал в своём саду 35 400 лимонов. Первого сорта лимонов оказалось на 1 200 штук больше, чем второго. Лимоны первого сорта уложили в ящики по 20 штук, а лимоны второго сорта — по 25 штук. Сколько ящиков понадобилось колхозу для упаковки этих лимонов?»

3) «Путешественник проехал 3840 *км* на лошадях, на пароходе и по железной дороге. На пароходе он проехал на 220 *км* больше, чем на лошадях, а по железной дороге на 680 *км* больше, чем на пароходе. Сколько километров он проехал в отдельности на лошадях, на пароходе и по железной дороге?»

В первой задаче предварительно нужно подсчитать урожай, полученный с двух земельных участков, а уже потом делить его на две части, из которых одна больше другой на 950 *ц*; во второй задаче сначала нужно 35 400 разделить на две неравные части, а потом полученные данные использовать для того, чтобы узнать количество ящиков; в третьей задаче нужно число разделить на три неравные части.

Само собой разумеется, что здесь должна быть постепенность в преодолении трудностей, и прежде всего учащиеся должны осознать способ решения, который лежит в основе решения задач на нахождение двух чисел по данной их сумме и разности.

Очень часто учащиеся при решении такого рода задач вместо того, чтобы от суммы отнять (или прибавить) излишек, а потом делить на два, сначала делят на два, а потом к полученному частному прибавляют (или отнимают) избыток. Например, приведённую выше задачу решают таким образом:

1) 385 600 кирпичей : 2 = 192 800 кирпичей.

2) 192 800 кирпичей + 95 400 кирпичей = 288 200 кирпичей.

Если проверим решение, то получим, что завод за два месяца выпустил 192 800 кирпичей + 288 200 кирпичей = = 481 000 кирпичей, а не 385 600 кирпичей, как сказано в условии задачи.

Не проверяя всего полученного результата, учащиеся и не вскрывают допущенных ошибок. Здесь, конечно, обнаруживается полное непонимание учащимися зависимостей, положенных в основу условия задачи.

Для того чтобы решение выполнялось сознательно, необходимо предварительно выяснить приём решения на конкретном материале.

Работу можно было бы построить примерно таким образом.

Учащиеся получают, например, по 15 кубиков, палочек или каких-нибудь других наглядных пособий (для начала лучше брать нечётное число).

Предлагается учащимся эти 15 кубиков разделить на *две неравные части* так, чтобы в правой части было на 3 кубика больше, чем в левой.

Учащиеся выполняют это задание. Получается в левой части 6 кубиков, а в правой 9 кубиков.

Учитель: Как вы разделили 15 кубиков?

Ученик: Не поровну. В правой части на 3 кубика больше.

Учитель: Сколько кубиков нужно отнять от правой части, чтобы стало поровну?

Ученик: 3 кубика.

Учитель: А сколько кубиков тогда будет в обеих частях, в правой и левой вместе?

Ученик: 12 кубиков.

Учитель: А отдельно в каждой части?

Ученик: По 6 кубиков.

Учитель: Сколько кубиков будет в правой части, если обратно прибавим 3 кубика?

Ученик: В правой части будет 9 кубиков.

Далее предлагается учащимся те же 15 кубиков разделить на две неравные части так, чтобы в правой части было на 5, на 7, на 9 и т. д. кубиков больше, чем в левой части. Каждый раз производится анализ того, что выполняют учащиеся.

Многочисленные наблюдения на уроках над учащимися II, III и даже IV классов показали, что вначале большинство учащихся очень неуверенно, путём многих проб, подчас ошибочных, находят нужный результат. Почти не наблюдалось случаев, когда бы учащиеся сразу отнимали излишек, а затем оставшиеся кубики делили на две равные части. Следует отметить, что работа всегда протекала в обстановке большого интереса и оживления учащихся.

После двух-трёх конкретных задач сначала отдельные учащиеся, а потом и подавляющее большинство, наконец, начинают пользоваться рациональным приёмом решения заданной задачи.

Производится запись решения задачи:

15 кубиков — 3 кубика = 12 кубиков.
12 кубиков : 2 = 6 кубиков.
6 кубиков + 3 кубика = 9 кубиков.

Производится и сокращённая запись, которая в своём существе отражает процесс решения задачи:

$$(15 - 3) : 2 = 6 \text{ (кубиков).}$$
6 кубиков + 3 кубика = 9 кубиков.

После того как учащиеся на дидактическом материале освоятся с идеей нахождения двух чисел по данной их сумме и разности, можно перейти к решению устных задач с небольшими числовыми данными; решение некоторых из них можно зафиксировать на классной доске.

Например: «Поезд за 2 часа прошёл 90 *км*. Во второй час он прошёл на 10 *км* больше, чем в первый. Сколько километров он прошёл за первый и за второй час в отдельности?»

«Пенал и чернильница стоят 1 руб. 50 коп.; пенал на 30 коп. дороже чернильницы. Сколько стоит пенал и сколько стоит чернильница?»

Когда решение устных задач покажет, что учащиеся сознательно и быстро справляются с задачами, необходимо предложить учащимся самим составить подобные задачи. Некоторые из этих задач решаются коллективно всем классом, неудачно составленные задачи исправляются.

После этого делается обобщение.

Учитель: На сколько частей нам приходилось делить число в решаемых нами задачах?

Ученик: На две части.

Учитель: На какие две части?

Ученик: На две неравные части.

Учитель: Что нам было дано в этих задачах, кроме суммы двух чисел?

Ученик: Кроме суммы двух чисел, нам была дана их разность, или на сколько одно число больше другого.

Учитель: Как же мы назовём задачи этого вида?

Ученик: Задачи, в которых мы находили два числа по данной их сумме и разности.

После таких предварительных упражнений можно перейти к решению задач, где будут даны большие числовые данные или где условие задачи будет осложнено дополнительными данными.

Начинать решение задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности можно во II классе после прочного усвоения разностного сравнения чисел, в III классе можно решать эти задачи уже в осложнённом виде, а в IV классе следует усложнить задачи нахождением трёх чисел.

Если первый этап работы будет выполнен продуманно и учащиеся освоятся с основной идеей этих задач, то решение усложнённых задач не будет вызывать особых затруднений.

В школьной практике часто возникают затруднения с формулировкой первого вопроса при решении таких задач. Разберём конкретную задачу и сформулируем к ней вопросы.

«В школе 1355 учащихся. Мальчиков на 75 человек больше, чем девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек в школе?»

Решение задачи

1) Сколько было бы всего учащихся в школе, если бы мальчиков было столько же, сколько было девочек?

1355 учащихся — 75 учащихся = 1280 учащихся.

2) Сколько было в школе девочек?

1280 учащихся : 2 = 640 учащихся-девочек.

3) Сколько в школе мальчиков?

640 учащихся + 75 учащихся = 715 учащихся-мальчиков.

Целесообразно запись решения задачи делать более краткой и сводить к двум вопросам. В этом случае формулировка первого вопроса отпадает, и решение задачи принимает такой вид.

Решение задачи

1) Сколько девочек училось в школе?

(1355 учащихся — 75 учащихся) : 2 = 640 учащихся девочек).

2) Сколько мальчиков училось в школе?

640 учащихся + 75 учащихся = 715 учащихся (мальчиков).

Следует познакомить учащихся и с другим способом решения, когда меньшее число приравнивается к большему. Тогда сумма будет не уменьшаться, а увеличиваться, и решение будет иметь такой вид:

1) Сколько было бы всего учащихся в школе, если бы девочек было столько же, сколько было мальчиков?

1355 учащихся + 75 учащихся = 1430 учащихся.

2) Сколько было в школе мальчиков?

1430 учащихся : 2 = 715 учащихся-мальчиков.

3) Сколько было в школе девочек?

715 учащихся — 75 учащихся = 640 учащихся-девочек.

Следует также поставить перед учащимися вопрос, как можно решить указанную задачу иначе. Вместо того чтобы в третьем действии прибавлять или отнимать разницу, можно от суммы отнять полученное число, тогда последнее действие в задаче будет не 715 учащихся — 75 учащихся, а 1355 учащихся — 715 учащихся = 640 учащихся-девочек.

Каждый раз необходимо проверять полученный при решении задачи результат — равна ли сумма полученных чисел заданной сумме, а разность их указанной в задаче разности.

Задачи на нахождение двух или трёх чисел по данной их сумме или разности и кратному отношению

Задачи на нахождение чисел по сумме или разности и кратному отношению также относятся к числу задач, не сразу дающихся учащимся. Способ решения этих задач также следует сначала раскрыть на конкретных задачах с использованием дидактического материала. Построение работы и система упражнений могут быть такими же, как и при решении задач на нахождение чисел по сумме и разности.

Учащиеся получают на руки по несколько кубиков. Лучше всего брать число, имеющее большое число делителей, например 12. (Вместо кубиков можно взять другие пособия.) Предлагается учащимся разделить эти 12 кубиков *на две* части так, чтобы одна из них (положим, правая) была в два раза больше другой.

Так же как и при нахождении чисел по сумме и разности учащиеся путём проб, подчас нерациональных, подыскивают нужные данные. Наблюдения показали, что учащиеся в этих задачах затрудняются даже больше, чем при решении задач, где даны сумма и разность. Нередко получается неверный результат. Приходится возвращаться к условию задачи, вспоминать, что сказано о соотношении чисел (одно число в два раза больше другого).

Наконец, число учащихся, получивших правильный результат, постепенно увеличивается и подавляющее большинство учащихся даёт правильный ответ.

Налево лежит 4 кубика, направо 8.

Проделанная работа анализируется.

Учитель: Сколько кубиков в левой части?

Ученик: Четыре.

Учитель: Сколько кубиков в правой части?

Ученик: Восемь.

Учитель: Во сколько раз в правой части больше, чем в левой?

Ученик: В два раза.

Учитель: Покажите это.

Учащиеся разбивают 8 кубиков по 4.

Учитель: На сколько же равных частей мы разделили 12 кубиков?

Ученик: На 3 равные части, из них одна часть налево и две такие же части направо.

Учитель: Запишем это (на классной доске фиксируется запись):

1 часть + 2 части = 3 части.

Учитель: Сколько же кубиков приходится на одну часть?

Ученик: На одну часть приходится 4 кубика, потому что если 12 разделить на 3 равные части, то получится 4 (на доске фиксируется запись):

12 кубиков : 3 = 4 кубика.

Учитель: Сколько кубиков в левой части? А сколько раз по 4 кубика в правой части?

Ученик: В правой части два раза по 4 кубика.

Учитель: Запишем и это (на доске фиксируется запись):

4 кубика × 2 = 8 кубиков.

Так на сколько же равных частей мы делили 12 кубиков?

Ученик: На 3 равные части.

Учитель: Почему на 3 равные части?

Ученик: Потому что налево одна часть, да направо две такие же части, так как в условии сказано, что в правой части должно быть в два раза больше, чем в левой.

Таким же образом решается ряд других задач.

Делится 12 кубиков на две части так, чтобы в правой части было в 3 раза, в 5 раз больше, чем в левой, и каждый раз полученный результат проверяется, проделанная работа анализируется.

После таких упражнений следует перейти к составлению учащимися подобных задач самостоятельно.

Например, разделить 8 кубиков на две части так, чтобы одна была больше другой в 3 раза. Учащиеся по вызову учителя рассказывают классу содержание задачи и как они её решали. Происходит проверка.

Составление задач учащимися здесь имеет особенно важное значение. Здесь нельзя брать произвольно соотношение, между искомыми величинами, необходимо, чтобы данная сумма делилась не на число, показывающее, во сколько раз одно число должно быть больше другого, а на число, увеличенное на единицу.

Самый подбор данных имеет уже большое значение для ещё более полного осознания приёма решения таких задач.

Составленные учащимися задачи решаются, полученные результаты проверяются. Решение некоторых задач фиксируется на доске.

Запись на доске может быть несколько сокращена, первое и второе действия можно объединить. Такая запись помимо экономии имеет ту ценность, что она особенно отчётливо подчёркивает приём решения задачи:

12 кубиков:(1 + 2) = 4 кубика.
4 кубика × 2 = 8 кубиков.

Постепенно задачи усложняются, в условие вводятся дополнительные данные. Например:

«Самолёт пролетел за два дня 3600 *км*, причём во второй день он пролетел в 2 раза больше, чем в первый. В первый день он летел со скоростью 240 *км* в час, а во второй — со скоростью 300 *км* в час. Сколько часов был самолёт в воздухе за эти два дня?»

Решение задачи

1) На сколько равных частей нужно разделить 3600 *км*?

1 часть + 2 части = 3 части.

2) Сколько километров пролетел самолёт в первый день?

3600 *км*:3 = 1200 *км*.

3) Сколько километров пролетел самолёт во второй день?

3600 *км* — 1200 *км* = 2400 *км*
(или 1200 *км* × 2 = 2400 *км*).

4) Сколько часов был в воздухе самолёт в первый день?

$$1200\ км : 240\ км = 5\ (час.).$$

5) Сколько часов был в воздухе самолёт во второй день?

$$2400\ км : 300\ км = 8\ (час.).$$

6) Сколько часов самолёт был в воздухе за эти два дня?

5 час. + 8 час. = 13 час.

Решение задач на деление на нахождение двух чисел по их сумме и кратному отношению целесообразнее всего поставить в III классе, хотя такие задачи с небольшими числовыми данными и при условии применения наглядности (как это было показано на кубиках) можно было бы поставить уже во II классе после прочного усвоения учащимися увеличения и уменьшения числа в несколько раз и кратного сравнения.

В IV классе можно перейти к решению более сложных задач, когда приходится делить уже не на две, а на три части (а иногда и больше), кратно неравные. Например:

«В трёх шкафах лежит 810 книг. Во втором шкафу в 2 раза больше, чем в первом шкафу, а в третьем в 3 раза больше, чем во втором. Сколько книг в каждом шкафу?»

«На лесной двор привезли 25 вагонов дров по 18 *куб. м* и 30 вагонов по 19 *куб. м*. Ольховых дров было в 3 раза больше, чем берёзовых, а еловых — в 2 раза больше, чем берёзовых. Сколько было в отдельности берёзовых, еловых и ольховых дров?»

Обобщение при решении этих задач может быть сделано таким образом: «В этих задачах нам была дана сумма чисел и во сколько раз одно число больше другого».

Иногда в задачах даётся не сумма двух чисел и их кратное отношение, а разность двух чисел и их кратное отношение.

Например: «В первом мешке было рису больше, чем во втором, в 3 раза и в то же время на 24 *кг* больше, чем во втором. Сколько рису было в каждом мешке?»

Если допустить, что во втором мешке рис составляет 1 часть, то в первом мешке будет 3 таких части. Значит, на 2 части больше. На эти две части и приходятся 24 *кг*. Следовательно, на одну часть приходится 12 *кг*. То-есть во втором мешке было 12 *кг*. А так как в первом мешке было в 3 раза больше, то в нём будет 36 *кг*.

Решение примет такой вид:

1) 3 ч. — 1 ч. = 2 ч. составляют 24 *кг*.

2) 24 *кг* : 2 = 12 *кг* рису было во втором мешке.

3) 12 *кг* $\times$ 3 = 36 *кг* рису было в первом мешке

(или 12 *кг* + 24 *кг* = 36 *кг*).

Решение таких задач вначале следует сопровождать графическим оформлением.

Задачи на движение (совместная работа)

В задачах на движение говорится о движении поездов, пешеходов, самолётов и т. д., которые или движутся навстречу друг другу, или догоняют друг друга. Например:

«От колхоза до станции 36 *км*. Одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Один из них проходит в час 4 *км*, другой 5 *км*. Через сколько часов они встретятся?»

«Из колхоза на станцию вышел пешеход, который проходил в час по 5 *км*. Через 4 часа после его выхода за ним выехал велосипедист, который проезжал в час по 15 *км*. Через сколько часов он догонит пешехода?»

Нередко эти задачи осложняются дополнительными данными. Например, спрашивается, на каком расстоянии от колхоза или станции произойдёт встреча, или в условие задачи вводятся данные о времени. Например, условие читается так: «В 8 час. утра из колхоза вышел пешеход на станцию, расстояние до которой 36 *км*. Он проходил 4 *км* в час. Одновременно со станции вышел ему навстречу другой пешеход, который проходил в час по 5 *км*. В котором часу они встретятся?»

«В 8 час. утра из колхоза вышел на железнодорожную станцию пешеход, который проходил по 5 *км* в час. Через 4 часа после его выхода за ним вдогонку выехал велосипедист, который в час проезжал по 15 *км*.

В котором часу он нагонит пешехода и на каком расстоянии от колхоза?»

Иногда один пешеход выходит ранее другого, так что сначала приходится подсчитать путь, пройденный им до выхода второго пешехода, и т. д.

В этих задачах для учащихся две новые трудности. С одной стороны, идея одновременного движения, с другой стороны, здесь требуются некоторые пространственные представления.

Когда при решении задачи мы узнаём (например в первой задаче), сколько километров прошли два пешехода за один час (4 *км*+5 *км*=9 *км*), нередко учащиеся на вопрос о том, за какое время 2 пешехода прошли эти 9 *км*, отвечают, что за 2 часа, так как каждый пешеход шёл по часу. Учащиеся очень часто затрудняются также определить, в каком месте произойдёт встреча.

Необходимо к преодолению этих трудностей подводить учащихся постепенно на задачах, более близких им.

Совместная работа будет понята учащимися, если вместо задач на встречу дать задачи примерно такого рода.

«Колхозник заготовил для лошади и коровы 2000 *кг* сена. На сколько дней хватит этого сена, если в день для лошади нужно 16 *кг* сена, а для коровы 9 *кг*?»

«Для завода срочно потребовалось 120 деталей. На одном станке за час вырабатывают 18 таких деталей, а на другом 22 детали. Через сколько часов будут готовы нужные детали?» Можно усложнить задачу таким вопросом: «Сколько деталей сделает каждый станок в отдельности?»

После решения таких задач, в которых идея совместной работы будет легко понята учащимися, можно перейти к решению задач на встречу, подобных тем, какие были указаны в начале этой главы.

Для ясности целесообразно иллюстрировать задачу соответствующим рисунком на классной доске (рис. 4):

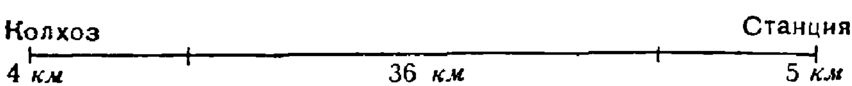


Рис. 4.

или изобразить её в лицах: отметить на двух противоположных концах классной комнаты условно конечные пункты и выделить двух учащихся, которые изображают пешеходов.

Постепенно задачи усложняются, вводится новый вопрос: «На каком расстоянии от колхоза и от станции встречаются пешеходы?» Искомый пункт условно изображается на чертеже. Решение задачи принимает такой вид:

1) Сколько километров за час проходят оба пешехода вместе?

$$4 \text{ км} + 5 \text{ км} = 9 \text{ км}.$$

2) Через сколько часов пешеходы встретятся?

$$36 \text{ км} : 9 \text{ км} = 4 \text{ (часа)}.$$

3) На каком расстоянии от колхоза?

$$4 \text{ км} \times 4 = 16 \text{ км}.$$

4) На каком расстоянии от станции?

$$36 \text{ км} - 16 \text{ км} = 20 \text{ км}$$
$$(\text{или } 5 \text{ км} \times 4 = 20 \text{ км}).$$

Затем вводятся задачи, где будет указано время начала движения, и, наконец, задачи могут быть усложнены тем, что начало движения происходит в разное время. Например:

«От Москвы до Архангельска 1400 *км*. В 9 час. утра из Москвы вылетел по направлению к Архангельску самолёт, который летел со скоростью 200 *км* в час. Через 2 часа навстречу ему вылетел самолёт из Архангельска, который летел со скоростью 300 *км* в час. В котором часу они встретятся и на каком расстоянии от Москвы?»

Задачу для ясности необходимо иллюстрировать рисунком (рис. 5).

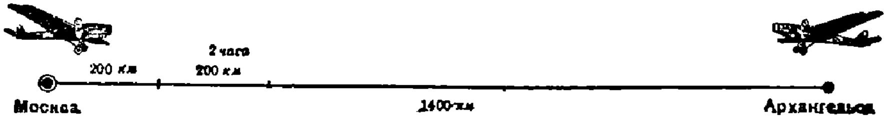


Рис. 5.

Решение такой задачи, где вводится лишь одна новая трудность, а основная идея таких задач уже усвоена, будет вполне доступно для учащихся.

Здесь необходимо сначала узнать, какое расстояние пролетит первый самолёт за 2 часа:

$$200\ \text{км} \times 2 = 400\ \text{км}$$

и какое расстояние будет между самолётами в момент вылета самолёта из Архангельска:

$$1\,400\ \text{км} - 400\ \text{км} = 1000\ \text{км}.$$

А дальше решение пойдёт уже известным для учащихся путём.

Также постепенно следует подводить учащихся к пониманию таких задач на движение, где приходится не встречаться, а догонять друг друга, как например, в задаче:

«Из колхоза на станцию вышел пешеход, который проходил в час 5 *км*. Через 4 часа после его выхода за ним вдогонку выехал велосипедист, который проезжал в час по 15 *км*. Через сколько часов он догонит пешехода?»

Для уяснения смысла этой задачи полезно составить такую таблицу:

Время	На каком расстоянии от колхоза будет		Расстояние между пешеходом и велосипедистом
	пешеход	велосипедист	
Через 1 час	5 *км*	—	—
„ 2 часа	10 „	—	—
„ 3 „	15 „	—	—
„ 4 „	20 „	0	20 *км*
„ 5 час.	25 „	15 *км*	10 „
„ 6 „	30 „	30 „	0 „

Из таблицы видно, что расстояние между пешеходом и велосипедистом постепенно уменьшается. Сначала между ними было 20 *км*, затем 10 *км*, и, наконец, оно стало равным нулю, т. е. велосипедист догнал пешехода.

Выясняется, почему расстояние между ними уменьшается. (Потому что велосипедист движется быстрее.)

На сколько километров в час оно уменьшается? На 10 *км*, так как пешеход движется со скоростью 5 *км* в час, а велосипедист со скоростью 15 *км*; 15 *км*—5 *км* = = 10 *км*.

Исходя из этого, намечается план и решение задачи.

1) На каком расстоянии от колхоза будет пешеход в момент выезда велосипедиста?

$$5 \text{ км} \times 4 = 20 \text{ км}.$$

2) На сколько километроз в час нагоняет пешехода велосипедист?

$$15 \text{ км} - 5 \text{ км} = 10 \text{ км}.$$

3) Через сколько часов велосипедист догонит пешехода?

$$20 \text{ км} : 10 \text{ км} = 2 \text{ (часа)}.$$

Пониманию смысла задачи будет также способствовать иллюстрация на классной доске, которая в соответствующем масштабе будет воспроизводить движение пешехода и велосипедиста (рис. 6).

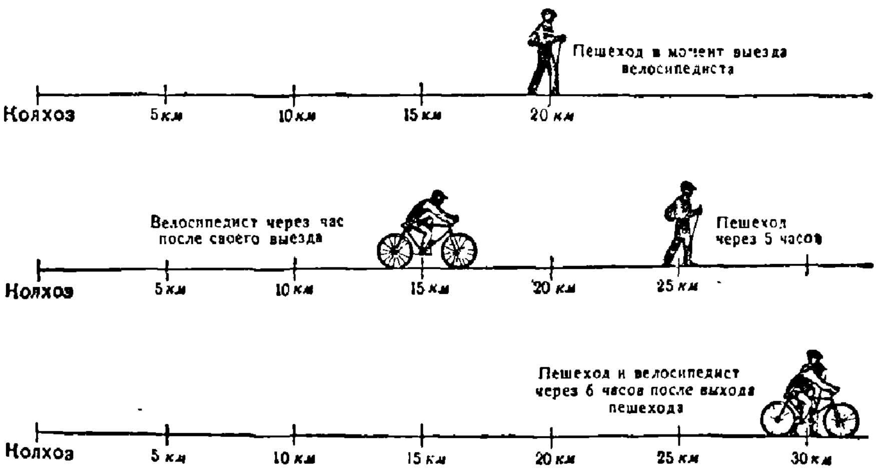


Рис. 6

Понимание задач на движение закрепляется самостоятельным решением и составлением аналогичных задач самими учащимися. Делается обобщение: это задачи на движение, на совместную работу.

Задачи на пропорциональное деление

Примером таких задач могут быть следующие:

«Трое рабочих получили 540 руб. Первый работал 12 дней, второй 15 дней, третий 18 дней. Сколько рублей должен получить каждый?» (Работа расценивается одинаково у всех рабочих.)

Здесь следует выяснить, что заработок рабочих должен быть различным, так как работали они разное время. Больше получит тот, кто проработал большее число дней, меньше — тот, кто работал меньше. Необходимо знать, во сколько рублей расценивается 1 рабочий день. Для этого следует сосчитать, сколько всего рабочих дней выработали все три рабочих, и определить расценку одного дня. Решение примет такой вид:

1) Сколько рабочих дней выработали все три рабочих?

$$12 \text{ дней} + 15 \text{ дней} + 18 \text{ дней} = 45 \text{ дней}.$$

2) Сколько рублей приходится за один рабочий день?

$$540 \text{ руб.} : 45 = 12 \text{ руб.}$$

3) Сколько рублей должен получить первый рабочий?

$$12 \text{ руб.} \times 12 = 144 \text{ руб.}$$

4) Сколько рублей должен получить второй рабочий?

$$12 \text{ руб.} \times 15 = 180 \text{ руб.}$$

5) Сколько рублей должен получить третий рабочий?

$$12 \text{ руб.} \times 18 = 216 \text{ руб.}$$

Проверка:

$$\begin{array}{rl} & 144 \text{ руб.} \\ + & 180 \;\;\text{„} \\ & 216 \;\;\text{„} \\ \hline & 540 \text{ руб.} \end{array}$$

Задачи могут быть осложнены бо́льшим числом данных. Например:

«Один рабочий работал 2 дня по 7 час., а другой 3 дня по 6 час. За работу они получили 96 руб. Сколько рублей должен получить каждый?» Здесь уже заработок приходится делить в зависимости от двух величин: от числа проработанных дней и продолжительности рабочего дня. Необходимо задачу упростить и свести к виду первой задачи.

Это достигается тем, что мы предварительно узнаём, сколько часов работал каждый рабочий:

$$7 \text{ час.} \times 2 = 14 \text{ час.}$$
$$6 \text{ час.} \times 3 = 18 \text{ час.}$$

Следовательно, решение сводится к тому, что общий заработок 96 руб. мы делим пропорционально 14 и 18, что учащиеся уже умеют выполнять.

Следует оговорить, что в этих задачах рабочие одной категории и оплачиваются одинаково.

Задачи на исключение одного неизвестного

Задачи на исключение одного неизвестного могут быть двух родов. Например:

«30 *м* сукна и 25 *м* ткани стоят 1925 руб., а 36 *м* сукна и 25 *м* ткани стоят 2285 руб. Сколько стоят 1 *м* сукна и 1 *м* ткани в отдельности?»

«5 *куб. м* берёзовых дров и 4 *куб. м* осиновых стоят 150 руб., а 3 *куб. м* берёзовых и 6 *куб. м* осиновых стоят 144 руб. Сколько стоят 1 *куб. м* берёзовых и 1 *куб. м* осиновых дров в отдельности?»

В первой задаче следует обратить внимание учащихся на то, что разница в стоимости (2285 руб. — 1925 руб. = 360 руб.) объясняется тем, что во втором случае куплено на 6 *м* сукна больше, чем в первом случае.

Отсюда можно найти стоимость 1 *м* сукна (360 руб. : 6 = 60 руб.), а значит, и 1 *м* ткани.

Другое дело во второй задаче. Здесь в обоих случаях число кубометров берёзовых и осиновых дров различно. Решить такую задачу сразу учащиеся не смогут. Если же сначала решить несколько задач первого вида, то учащихся легко навести на мысль, что новую задачу можно свести к тому же виду, что и первая задача, т. е. сделать так, чтобы число кубометров или берёзовых дров, или осиновых было одинаково.

Задача принимает такой вид: «15 *куб. м* берёзовых дров и 12 *куб. м* осиновых стоят 450 руб., 6 *куб. м* берёзовых дров и 12 *куб. м* осиновых стоят 288 руб. Сколько стоит 1 *куб. м* берёзовых дров и 1 *куб. м* осиновых в отдельности?»

Первая покупка увеличена в 3 раза, а значит, увеличится в 3 раза и её стоимость: вторая покупка и её стоимость увеличены в 2 раза. Число кубометров осиновых дров в обоих случаях одинаково, т. е. задача сведена к виду первой задачи, в которой учащиеся уже смогут самостоятельно разобраться.

Можно было бы предложить учащимся уравнять число кубометров берёзовых дров. Тогда разбираемая задача приняла бы такой вид:

«15 *куб. м* берёзовых дров и 12 *куб. м* осиновых стоят 450 руб., 15 *куб. м* берёзовых дров и 30 *куб. м* осиновых стоят 720 руб.». В этом случае первая покупка и её стоимость увеличены в 3 раза, а вторая покупка и её стоимость увеличены в 5 раз. Число кубометров берёзовых дров стало одинаковым. Задача также свелась к виду первой задачи, к исключению одного неизвестного.

В случае затруднений учащихся при решении такого рода задач в качестве подготовительных задач можно решить устно задачи такого вида:

«В первый раз купили 15 стульев, а во второй раз 24 таких же стула и заплатили на 180 руб. больше, чем в первый раз. Сколько рублей стоил один стул?»

Задача решается двумя действиями, она облегчает учащимся переход к более трудным задачам этого типа.

Задачи на замену одного неизвестного

Приведём несколько задач этого типа:

1) «12 ручек и 15 карандашей стоят 2 руб. 40 коп. Карандаш стоит на 2 коп. дешевле ручки. Сколько стоят в отдельности ручка и карандаш?» (*Дана разница в стоимости ручки и карандаша.*)

2) 3 *м* сукна и 5 *м* подкладки стоят 255 руб.; 1 *м* сукна стоит в 4 раза дороже 1 *м* подкладки. Сколько стоят в отдельности 1 *м* сукна и 1 *м* подкладки?» (Дано, во сколько раз сукно дороже подкладки.)

3) «Колхозу надо заготовить 1720 *ц* сена и 2400 *ц* яровой соломы. Соломы оказалось только 1800 *ц*. Сколько потребуется ему заготовить сена, если 3 *ц* соломы заменяют 2 *ц* сена?» (Приходится применять *способ кратных отношений*.)

Во всех этих задачах приходится заменять одну величину другой. В первой задаче следует заменить или ручки карандашами, или карандаши ручками, во второй — допустить, что куплена подкладка вместо сукна, в третьей — солому приходится заменять сеном.

Начинать решение таких задач следует с применения наглядных пособий, при этом числовые данные следует брать небольшие.

Приведём несколько таких задач, которые могли бы быть подготовительными к решению усложнённых задач и задач с большими числовыми данными.

Учитель кладёт на планку доски 3 карандаша и 2 ручки. Читает условие задачи:

«3 карандаша и 2 ручки стоят 60 коп. Ручка дороже карандаша на 5 коп. Сколько стоят ручка и карандаш в отдельности?»

Одна ручка заменяется карандашом, а на доске фиксируется запись: 60 коп. — 5 коп., так как карандаш стоит на 5 коп. дешевле ручки.

Затем другая ручка заменяется карандашом, и на доске запись соответственно дополняется: 60 коп. — — 5 коп. — 5 коп. = 50 коп.

На планке доски вместо 3 карандашей и двух ручек получается 5 карандашей, стоимость же их составляет вместо прежних 60 коп. только 50 коп.

Теперь представляется возможным определить стоимость одного карандаша, а затем и одной ручки. Карандаш будет стоить 10 коп., а ручка 15 коп. Производится проверка решения.

Стоимость 3 карандашей:	10 коп. $\times$ 3 = 30 коп.
Стоимость 2 ручек:	15 коп. $\times$ 2 = 30 коп.
Стоимость всей покупки:	30 коп. + 30 коп. = 60 коп.

Решение данной задачи можно повести и иначе, а именно: не ручки заменять карандашами, а, наоборот, — карандаши ручками. Тогда стоимость покупки будет увеличиваться при каждой замене на 5 коп. и составит 60 коп. + 5 коп. + 5 коп. + 5 коп. = 75 коп.

На планке доски будет 5 ручек. Стоимость их 75 коп., значит, одна ручка будет стоить 15 коп.; тогда стоимость карандаша составит: 15 коп. — 5 коп. = = 10 коп.

Также на наглядных пособиях выясняется решение задач и других видов.

Например, учитель ставит на планке классной доски 5 ученических тетрадей и 2 книжки для чтения. Читает условие задачи: «5 тетрадей и 2 книжки стоят 1 руб. 10 коп. Книжка стоит в 3 раза дороже тетради. Сколько стоят в отдельности книжка и тетрадь?»

Каждая книжка заменяется 3 тетрадями. На планке доски получается 11 тетрадей. Отсюда легко определить стоимость одной тетради, а затем и одной книжки.

«Ученик купил 4 ручки и 5 карандашей и заплатил 88 коп. Две ручки стоят столько же, сколько стоят 3 карандаша. Сколько стоят в отдельности ручка и карандаш?»

Так же, как и в предыдущих задачах, производится замена одних предметов другими. Здесь можно заменить ручки карандашами. Снимаются 2 ручки, а вместо них ставятся 3 карандаша. Затем снимаются ещё 2 ручки и вместо них ставятся 3 новых карандаша. Получается всего 11 карандашей. Следовательно, стоимость одного карандаша составит 8 коп., а стоимость ручки 8 коп. $\times$ 3 : 2 = 12 коп.

Разобрав таким образом несколько устных задач, можно перейти к решению задач с бо́льшими числовыми данными. Например:

«На прокорм 145 лошадей и 320 коров колхоз должен заготовить на зиму 12 030 *ц* сена. Сколько центнеров сена идёт в зиму на прокорм коровы и лошади в отдельности, если на прокорм лошади требуется сена на 6 *ц* больше, чем на прокорм коровы?»

Запись решения примет такой вид.

Решение задачи

1) На сколько меньше сена нужно 145 коровам, чем 145 лошадям?

$$6\ ц \times 145 = 870\ ц.$$

2) Сколько центнеров сена потребовалось бы колхозу, если бы 145 лошадей заменить коровами?

$$12\,030\ ц - 870\ ц = 11\,160\ ц.$$

3) Сколько всего коров было бы тогда в колхозе?

$$145 \text{ коров} + 320 \text{ коров} = 465 \text{ коров}.$$

4) Сколько центнеров сена нужно одной корове на зиму?

$$\begin{array}{r|l} 11160\ ц & 465 \\ \underline{-\ 930} & \overline{24\ ц} \\ 1860 & \\ \underline{-\ 1860} & \\ 0 & \end{array}$$

5) Сколько центнеров сена на зиму нужно одной лошади?

$$24\ ц + 6\ ц = 30\ ц.$$

Проверка решения:

$$30\ ц \times 145 = 4350\ ц$$

$$\begin{array}{r} \times\ 24\ ц \\ 320 \\ \hline 48 \\ 72 \\ \hline 7\,680\ ц \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 4350\ ц \\ 7680\ ц \\ \hline 12030\ ц \end{array}$$

Задача решена верно.

После работы с учителем учащиеся самостоятельно решают и составляют подобные задачи, а затем делают обобщение: «В этих задачах мы заменяли одно неизвестное другим».

Задачи на предположение (смешение второго рода)

В некоторых задачах, рассмотренных выше, уже приходилось при решении прибегать к предположению, например в задачах на нахождение чисел по их сумме и разности, на приведение к единице, но есть ещё ряд задач, которые также решаются предположением, например задачи, называемые иногда задачами на смешение второго рода. Приведём одну из таких задач.

«Отправлено почтой всего 10 заказных и простых писем и уплачено за пересылку их 7 руб. 60 коп. Сколько отправлено заказных и простых писем в отдельности, если отправка заказного письма стоила 1 руб., а отправка простого 40 коп.?»

Эти задачи для IV класса. Алгебраическим путём они решаются очень просто, арифметически же решить их значительно труднее.

Перед учащимися здесь можно было бы поставить такой вопрос: «Сколько стоила бы отправка всех писем, если бы мы допустили, что все письма были простые?» Легко определить, что стоимость отправки этих писем будет составлять 4 руб. (40 коп. $\times$ 10 = 4 руб.).

Получается разница с действительной стоимостью отправки в 3 руб. 60 коп. Необходимо выяснить, почему получилась такая разница. «На сколько копеек уменьшится стоимость отправки писем, если заменить одно заказное письмо простым? Как это узнать?»

Если разница в стоимости отправки одного заказного письма и одного простого равна 60 коп., а вся разница в стоимости отправки писем равна 3 руб. 60 коп., то отсюда уже легко определить, сколько было заказных писем. Заказных писем столько, сколько раз в 3 руб. 60 коп. содержится по 60 коп. 3 руб. 60 коп. : 60 коп. = 6 (писем заказных), а отсюда уже легко узнать, сколько было простых писем: 10 писем — 6 писем = 4 письма.

Решение задачи примет такой вид:

1) Сколько стоила бы отправка 10 простых писем?

40 коп. $\times$ 10 = 4 руб.

2) На сколько уменьшилась стоимость отправки писем?

7 руб. 60 коп. — 4 руб. = 3 руб. 60 коп.

3) На сколько меньше стоит отправка простого письма, чем заказного?

1 руб. — 40 коп. = 60 коп.

4) Сколько было отправлено заказных писем?

3 руб. 60 коп.:60 коп. = 6 (писем).

5) Сколько было отправлено простых писем?

10 пис. — 6 пис. = 4 письма.

Ответ: заказных писем 6, простых 4.

Проверка решения задачи.
Всего писем: 6 писем + 4 письма = 10 писем.
Стоимость отправки заказных писем:

1 руб. $\times$ 6 = 6 руб.

Стоимость отправки простых писем:

40 коп. $\times$ 4 = 1 руб. 60 коп.

Вся стоимость отправки писем:

6 руб. + 1 руб. 60 коп. = 7 руб. 60 коп.

Следовательно, задача решена верно.

Полезно провести и другое решение, а именно: допустить, что все письма были заказные. Тогда решение примет такой вид:

1) 1 руб. $\times$ 10 = 10 руб.
2) 10 руб. — 7 руб. 60 коп. = 2 руб. 40 коп.
3) 1 руб. — 40 коп. = 60 коп.
4) 2 руб. 40 коп.:60 коп. = 4 (простых письма).
5) 10 писем — 4 письма = 6 писем (заказных).

Если учащиеся будут испытывать затруднения при решении таких задач, можно начать с задач с меньшими числовыми данными и, кроме того, прибегнуть к иллюстрации задачи рисунками на классной доске. Вот, например, такая задача:

«Купили всего 5 штук апельсинов, по 2 руб. и по 1 руб. 50 коп. Уплатили за них 9 руб. Сколько было куплено апельсинов по той и другой цене?»

Предположим, что все апельсины стоили по 1 руб. 50 коп.

Замена одного апельсина увеличивает стоимость на 50 коп. Рисунок 7 ясно показывает, что нужно заменить 3 апельсина более дорогими апельсинами, чтобы стоимость была равна 9 руб. Решение записывается так:

1) 1 руб. 50 коп. $\times$ 5 = 7 руб. 50 коп.
2) 9 руб. — 7 руб. 50 коп. = 1 руб. 50 коп.
3) 2 руб. — 1 руб. 50 коп. = 50 коп.

4) 1 руб. 50 **коп.:**50 **коп.**=3 **(апельсина по 2 руб).**

5) 5 апельсинов—3 апельсина=2 апельсина (по 1 руб. 50 коп.).

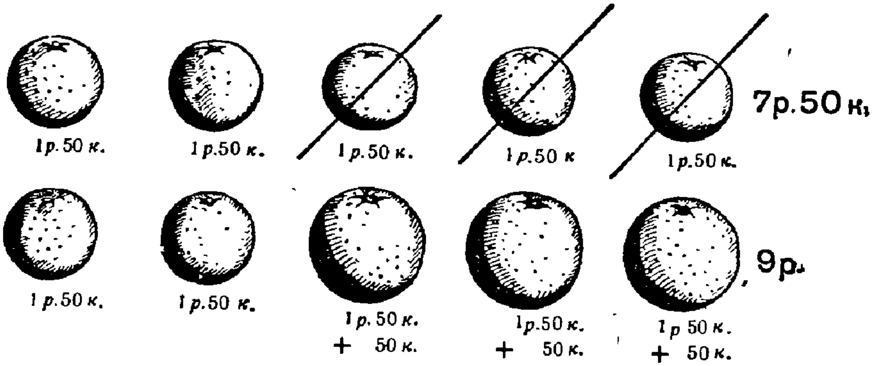


Рис. 7.

В связи с тем, что задачи на предположение вначале являются для учащихся довольно трудными, — в качестве подготовительных упражнений можно рекомендовать решение устных задач такого, например, вида:

а) «У мальчика было несколько монет по 15 коп. На сколько больше у него будет денег, если одну 15-копеечную монету заменить 20-копеечной монетой?»

Если заменить две монеты, три и т. д.?

б) «У мальчика было несколько монет по 15 коп. Несколько этих монет заменили 20-копеечными. Сколько монет заменили, если денег у него стало больше на 10 коп.? на 15 коп.? на 20 коп.? и т. д.

Задачи на уравнивание данных

К задачам на предположение можно также отнести задачи на уравнивание данных. Примером таких задач может быть следующая задача:

«25 стульев и 10 столов стоят 1100 руб. Сколько стоит каждый стул и каждый стол в отдельности, если стул и стол вместе стоят 80 руб.?»

Если стул и стол стоят вместе 80 руб., то легко определить, сколько стоят 2 стула и 2 стола, 3 стула и 3 стола и т. д., т. е. нетрудно найти стоимость равного количества стульев и столов.

Ставится перед учащимися вопрос, не можем ли мы узнать, сколько стоят 10 стульев и 10 столов, и решение принимает такой вид:

1) Сколько стоят 10 стульев и 10 столов?

$$80\ \text{руб.} \times 10 = 800\ \text{руб.}$$

2) На сколько меньше, по нашему предположению, куплено стульев?

$$25\ \text{стульев} - 10\ \text{стульев} = 15\ \text{стульев.}$$

3) Сколько стоят 15 стульев?

$$1100\ \text{руб.} - 800\ \text{руб.} = 300\ \text{руб.}$$

4) Сколько стоит стул? 300 руб. : 15 = 20 руб.

5) Сколько стоит стол? 80 руб. — 20 руб. = 60 руб.

Необходимо решение проверить.

Проверка решения:

$$60\ \text{руб.} + 20\ \text{руб.} = 80\ \text{руб.}$$
$$60\ \text{руб.} \times 10 = 600\ \text{руб.}$$
$$20\ \text{руб.} \times 25 = 500\ \text{руб.}$$
$$600\ \text{руб.} + 500\ \text{руб.} = 1100\ \text{руб.}$$

Задача решена верно.

В случае затруднений при решении такого рода задач, можно и в данном случае начать с задач с небольшими числовыми данными, которые могут быть иллюстрированы рисунками. Например:

«5 карандашей и 2 ручки стоят 80 коп. 1 карандаш и 1 ручка стоят 25 коп. Сколько стоит карандаш и ручка в отдельности?»

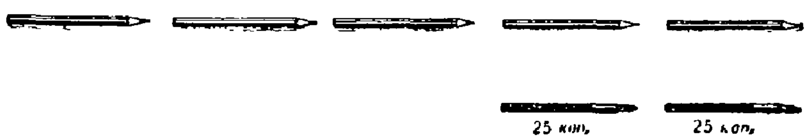


Рис. 8.

На рисунке 8 ясно видно, что 2 пары карандашей и ручек стоят 50 коп.

Следовательно, на 3 карандаша остаётся 30 коп. Отсюда уже легко узнать стоимость карандаша, а затем ручки.

Осмыслив ход решения таких задач на маленьких числах, учащиеся смогут справиться с более трудными задачами, где и числовые данные будут больше и, кроме того, могут быть введены дополнительные условия.

Задачи на нахождение среднего арифметического

Понятие о среднем арифметическом следует выяснить на простых и доступных учащимся задачах.

«С одного гектара собрали 14 *ц*, с другого 18 *ц* пшеницы. Сколько центнеров урожая пришлось бы на 1 *га*, если бы урожай был одинаков?»

$$(18\ ц + 14\ ц) : 2 = 16\ ц.$$

«Рабочий сделал в первый час 23 детали, во второй час 25 деталей, в третий час 30 деталей. Сколько деталей пришлось бы у него на 1 час, если бы выработка у него была всё время одинакова?»

(23 детали + 25 деталей + 30 деталей) : 3 = 26 деталей.

«Поезд прошёл в 1 час 54 *км*, во второй 61 *км*, в третий 59 *км*. По скольку километров в час должен был проходить поезд, чтобы пройти то же расстояние в 3 часа при одинаковой скорости?»

$$(54\ км + 61\ км + 59\ км) : 3 = 58\ км.$$

После ряда таких задач учащимся разъясняется, что 16 *ц* называют средним урожаем, 26 деталей — средней выработкой, 58 *км* — средней скоростью и т. д.

Затем можно перейти к более сложным задачам. Например:

«Колхоз с первого поля в 7 *га* собрал 145 *ц* пшеницы; со второго поля в 8 *га* собрал 185 *ц*. Каков средний урожай пшеницы с 1 *га*?»

Решение задачи

1) Как велик весь урожай?

$$145\ ц + 185\ ц = 330\ ц.$$

2) Сколько гектаров земли было в двух полях?

$$7\ \textit{га} + 8\ \textit{га} = 15\ \textit{га}.$$

3) Каков средний урожай пшеницы с 1 *га*?

$$330\ \textit{ц} : 15 = 22\ \textit{ц}.$$

Задачи на зависимость между компонентами и результатом в арифметических действиях

Зависимость между компонентами в арифметических действиях учащиеся использовали уже в целом ряде задач, разобранных выше. Например, в задачах на нахождение чисел по их сумме и разности мы, предполагая, что обе части равны меньшей (большей), соответственно уменьшали (увеличивали) и сумму.

То же самое в задачах на замену одного неизвестного. В задаче: «3 карандаша и 2 ручки стоят 60 коп. Ручка дороже карандаша на 5 коп. Сколько стоит ручка и карандаш в отдельности?» — заменяя ручки карандашами или наоборот, мы изменяли одно слагаемое, от этого соответственно изменялась и общая стоимость покупки.

Подобная зависимость имела место и в других задачах. Но независимо от этого в начальной школе следует поставить и специальные задачи на зависимость компонентов в действиях.

Примером таких задач может быть следующая задача.

«На двух кирпичных заводах было 456 500 кирпичей. Когда первый завод сделал ещё 38 400 кирпичей, а второй продал 98 700 кирпичей, то на обоих заводах кирпичей стало поровну. Сколько кирпичей было вначале на том и другом заводе?»

В этой задаче общая сумма изменяется два раза, сначала увеличивается на 38 400, а затем уменьшается на 98 700, в зависимости от изменения слагаемых.

Сразу для учащихся такая задача будет трудна, не все учащиеся с одинаковым успехом могут справиться с её решением. Поэтому и здесь целесообразно подобрать задачи несколько упрощённые, которые подготовили бы учащихся к решению более трудных задач. Приведём несколько таких задач.

1) «Отец и сын нашли 17 грибов; когда сын нашёл ещё 3 гриба, то у них стало поровну. Сколько грибов вначале нашёл отец и сколько сын?»

2) «Отец и сын нашли 19 грибов; когда отец выбросил 5 грибов, то у них стало поровну. Сколько грибов вначале нашёл отец и сколько сын?»

3) «Отец и сын нашли 25 грибов; когда отец нашёл ещё 3 гриба, а сын 6 грибов, то у них стало поровну. Сколько грибов вначале нашёл отец и сколько сын?»

4) Отец и сын нашли 27 грибов; когда отец выбросил 2 гриба, а сын 9 грибов, то у них грибов стало поровну. Сколько грибов вначале нашёл отец и сколько сын?»

5) «Отец и сын нашли 28 грибов; когда отец ещё нашёл 3 гриба, а сын выбросил 7 грибов, то у них стало поровну. Сколько грибов вначале нашёл отец и сколько сын?»

Каждая из этих задач представляет собой некоторую особенность.

В 1-й задаче только одно слагаемое увеличивается на несколько единиц.

Во 2-й задаче только одно слагаемое уменьшается на несколько единиц.

В 3-й задаче увеличиваются оба слагаемых.

В 4-й задаче уменьшаются оба слагаемых.

В 5-й задаче одно слагаемое увеличивается, другое уменьшается.

Любая из них может быть легко и быстро решена учащимися в уме; вместе с тем, они помогают учащимся понять и осмыслить приём решения таких задач и дают возможность вполне сознательно и активно приступить к решению сложной задачи, подобной той, которая приведена в начале этой статьи.

Решение её примет такой вид:

1) 456 500 кирп. + 38 400 кирп. = 494 900 кирпичей стало на обоих заводах, когда первый завод сделал ещё 38 400 кирпичей.

2) 494 900 кирп. — 98 700 кирп. = 396 200 кирп. стало на обоих заводах, когда после этого второй завод продал 98 700 кирпичей.

3) 396 200 кирп. : 2 = 198 100 кирп. По столько кирпичей стало на каждом заводе.

4) 198 100 кирп. — 38 400 кирп. = 159 700 кирп. было на первом заводе.

5) 198 100 кирп. + 98 700 кирп. = 296 800 кирп. было на втором заводе.

Правильность решения следует установить проверкой. Могут быть и другие способы решения этой задачи, например:

1) 98 700 кирп. — 38 400 кирп. = 60 300 кирп.
2) 456 500 кирп. — 60 300 кирп. = 396 200 кирп.
3) 396 200 кирп. : 2 = 198 100 кирп.
4) 198 100 кирп. — 38 400 кирп. = 159 700 кирп.
5) 456 500 кирп. — 159 700 кирп. = 296 800 кирп.

Задачи на зависимость между компонентами арифметических действий могут быть и такого рода, когда от изменения компонентов результат действия не меняется. Приведём пример такой задачи:

«В двух кассах было 1820 руб. Когда из первой кассы переложили во вторую 180 руб., то в обеих кассах денег стало поровну. Сколько денег было в каждой кассе?»

Учащиеся должны сообразить, что от перекладывания денег из одной кассы в другую общая сумма останется та же. Одно слагаемое здесь уменьшается на несколько единиц, а другое увеличивается на столько же единиц, следовательно сумма не изменится. Теоретическое обобщение этой зависимости делается в IV классе, однако конкретные задачи, дающие возможность учащимся постепенно накопить материал для этого обобщения, решаются уже со II класса. В случае затруднений в понимании такого рода задач следует начать ознакомление с ними при небольших числовых данных, при этом использовать наглядные пособия. Например, положить на двух полочках 20 кубиков так, чтобы на одной полочке было 11 кубиков, а на другой 9. Затем один кубик переложить с первой на вторую полку. Общее количество кубиков осталось то же, а на каждой полке стало поровну. На каждой полке стало по 10 кубиков (20 куб. : 2 = 10 куб.). Чтобы вернуться к первоначальному числу кубиков на каждой полке, следует:

1) 10 куб. + 1 куб. = 11 куб. Столько кубиков было на первой полке.

2) 10 куб. — 1 куб. = 9 куб. Столько кубиков было на второй полке.

(Ответ на второй вопрос задачи может быть получен и иначе, а именно: 20 куб. — 11 куб. = 9 куб.).

Аналогичные задачи могут быть очень разнообразны: разложить перья в две коробки, разложить тетради в две стопки, положить некоторую сумму денег в два кармана и т. д. Подбор данных здесь не составит труда. Важно лишь, чтобы общая сумма была чётным числом.

Такие конкретные задачи дадут возможность учащимся овладеть методом решения подобных задач и в том случае, если в задаче будут большие числовые данные, как, например, приведённая выше.

Решение её примет такой вид:

1) 1820 руб. : 2 = 910 руб.

2) 910 руб. + 180 руб. = 1090 руб.

3) 910 руб. — 180 руб. = 730 руб.

или 1820 руб. — 1090 руб. = 730 руб.

Задачи с противоположно направленными величинами

Хотя в программах нет прямого указания на такие задачи, однако они встречаются как среди устных задач, так и среди задач для письменного решения. Приводим образцы таких задач.

«В двух ящиках яблок было поровну. На сколько больше стало яблок в первом ящике, когда в него переложили из второго ящика 40 яблок?»

Учащиеся склонны дать такой ответ: «В первом ящике стало на 40 яблок больше, чем во втором».

Они часто не принимают во внимание того, что здесь разница произошла, во-первых, потому, что из второго ящика убавили 40 яблок, а во-вторых, потому, что в первом ящике число яблок увеличилось на 40. Вследствие этого в первом ящике стало больше на 80 яблок, а не на 40.

На 40 яблок стало бы больше в том случае, если бы взяли из второго ящика 40 яблок и не положили их в первый.

Понимание этой зависимости не всегда становится ясным для учащихся. Поэтому и здесь следует начать с задач на каком-нибудь наглядном материале. Например, дать двум учащимся по 10 кубиков и взять у одного из них 2 кубика и передать их второму.

У первого мальчика стало 8 кубиков (10 куб. — — 2 куб. = 8 куб.).

У второго мальчика стало 12 кубиков (10 куб. + + 2 куб. = 12 куб.). Разница равна 4 кубикам (12 куб. — — 8 куб. = 4 куб.).

На сколько кубиков стало больше у второго мальчика, когда у первого мальчика взяли 2 кубика? (На 2 кубика.) А на сколько кубиков стало больше у второго мальчика, когда мы эти 2 кубика дали второму мальчику? (На 4 кубика.)

Полезно, чтобы учащиеся и сами составляли такие задачи, это особенно способствует сознательному усвоению новой для них зависимости между величинами противоположно направленными.

Задачи могут быть и такого рода: «У брата на 10 руб. больше, чем у сестры. На сколько рублей будет больше у брата, если сестра даст ему 2 рубля?» Ответ: «У брата будет на 14 руб. больше, чем у сестры». Если бы у них было поровну, то у брата стало бы больше на 4 руб., но, так как у брата и до того было больше, чем у сестры, на 10 руб., то у него будет больше, чем у сестры, на 14 руб.

Могут быть задачи и обратного порядка: «Когда брат дал сестре 5 руб., то у них денег стало поровну. На сколько больше было денег у брата?» Ответ: «На 10 руб.».

«Когда брат дал сестре 3 руб., то у него стало на 20 руб. больше, чем у сестры. На сколько рублей у брата было больше, чем у сестры?» Ответ: «На 26 руб.».

Решение приведённых выше задач даст возможность без особого труда решить и такую задачу: «Брат говорит сестре: «Дай мне одно яблоко, и у нас будет поровну», а сестра говорит брату: «Нет, ты дай мне яблоко, и тогда у меня будет вдвое больше, чем у тебя».

Сколько яблок было у брата и сестры в отдельности?» (Аналогичная задача имеется в одном из задачников для начальной школы.)

Учащиеся в большинстве случаев решали её как задачу-смекалку, путём подбора числовых данных. Между тем разобранные выше задачи дают метод и для решения этой задачи. В самом деле, легко понять, что у сестры было на 2 яблока больше, чем у брата, так как в условии задачи сказано, что если она даст яблоко брату, то у них будет поровну. Если же брат даст сестре яблоко, то у сестры будет больше, чем у брата, уже не на 2 яблока, а на 4. С другой стороны, в условии задачи сказано, что в этом случае у сестры будет в 2 раза больше, чем у брата, то-есть у брата будет 1 часть, а у сестры 2 таких части. Разность в частях будет равна 2 ч. — 1 ч. = 1 ч. На эту часть приходится 4 яблока. Следовательно, у брата стало 4 яблока, а у сестры стало 8 яблок. Отсюда следует, что у брата было 4 ябл. + 1 ябл. = 5 ябл., а у сестры 8 ябл. — 1 ябл. = = 7 ябл.

Проверкой следует установить правильность решения.

Смешанные задачи

Число задач, отличающихся методами решения, конечно, может быть увеличено. Но если бы учащиеся сознательно справились с указанными выше задачами, и это было бы большим достижением.

В результате решения простых и сложных задач разнообразных типов учащиеся переходят к решению сложных комбинированных задач.

Приведём в качестве образца несколько таких задач.

а) «Колхоз собрал с первого поля 530 *ц* пшеницы, со второго — на 390 *ц* больше. Всю собранную пшеницу он поместил в 3 амбара. Во второй амбар положили в 3 раза больше, чем в первый, а в третий — в два раза больше, чем во второй. Сколько центнеров положили в каждый амбар?»

Решение задачи

1) 530 *ц* + 390 *ц* = 920 *ц*.
2) 530 *ц* + 920 *ц* = 1450 *ц*.

3) 1 часть $+$ 3 части $+$ 6 частей $=$ 10 частей.
4) 1450 *ц* : 10 $=$ 145 *ц*.
5) 145 *ц* $\times$ 3 $=$ 435 *ц*.
6) 435 *ц* $\times$ 2 $=$ 870 *ц*.

б) «Отец и сын заработали вместе 1450 руб. Сын заработал на 490 руб. меньше отца и на полученные деньги купил костюм и сапоги. За костюм он заплатил в 2 раза больше, чем за сапоги. Сколько стоят костюм и сапоги в отдельности?»

Решение задачи

1) (1450 руб. — 490 руб.) : 2 $=$ 480 руб.
2) 480 руб. : (1 $+$ 2) $=$ 160 руб.
3) 160 руб. $\times$ 2 $=$ 320 руб.

в) «Путешественник сначала проехал по железной дороге и на пароходе 720 *км*. Когда он проехал на пароходе ещё 180 *км*, то оказалось, что по железной дороге он проехал в 3 раза больше, чем на пароходе. Сколько километров он проехал вначале по железной дороге и сколько на пароходе?»

Решение задачи

1) (720 *км* $+$ 180 *км*) : (1 $+$ 3) $=$ 225 *км*.
2) 225 *км* — 180 *км* $=$ 45 *км*.
3) 720 *км* — 45 *км* $=$ 675 *км*.

г) «Магазин купил 950 *кг* белых грибов и 645 *кг* красных. При сушке из 25 *кг* белых грибов получилось 3 *кг* и из 15 *кг* красных — 2 *кг* сухих грибов. Сколько всего сухих грибов заготовил магазин?»

Решение задачи

1) 950 *кг* : 25 *кг* $=$ 38.
2) 3 *кг* $\times$ 38 $=$ 114 *кг*.
3) 645 *кг* : 15 *кг* $=$ 43.
4) 2 *кг* $\times$ 43 $=$ 86 *кг*.
5) 114 *кг* $+$ 86 *кг* $=$ 200 *кг*.

д) «На двух полках было 87 книг. Когда с нижней полки переложили на верхнюю 5 книг, то на верхней полке книг стало в 2 раза больше, чем на нижней. Сколько книг было на каждой полке?»

Решение задачи

1) 1 ч. + 2 ч. = 3 ч.
2) 87 кн. : 3 = 29 книг.
3) 29 кн. + 5 кн. = 34 книги.
4) 87 кн. — 34 кн. = 53 книги.

Проверка решения

1) 34 кн. — 5 кн. = 29 книг.
2) 53 кн. + 5 кн. = 58 книг.
3) 58 кн. : 29 кн. = 2.
4) 29 кн. + 58 кн. = 87 книг.

е) «В двух кассах было 1200 рублей. Когда первая касса получила ещё 340 руб., а вторая выдала 250 руб., то в первой кассе стало на 570 руб. больше, чем во второй.

Сколько денег было вначале в каждой кассе?»

Решение задачи

1) 1200 руб. + 340 руб. = 1540 руб.
2) 1540 руб. — 250 руб. = 1290 руб.
3) 1290 руб. — 570 руб. = 720 руб.
4) 720 руб. : 2 = 360 руб.
5) 360 руб. + 250 руб. = 610 руб.
6) 1200 руб. — 610 руб. = 590 руб.

Ответ:

В первой кассе было 590 руб.
Во второй кассе было 610 руб.

Смысл всех подготовительных упражнений при решении сложных задач сводится к тому, чтобы на простых и доступных примерах помочь учащимся, особенно слабым, до конца понять способ, которым может быть решена та или иная сложная задача.

Вместо того, чтобы подводить учащихся к решению задачи путём больших усилий, целого ряда наводящих вопросов, непосредственной помощи учителя, — следует так поставить работу, чтобы трудность была расчленена на составные части, посильные для учащихся, с одной стороны, и с другой — чтобы новый способ был раскрыт учащимися со всей ясностью и отчётливостью. Наблюдения за учащимися в целом ряде школ показали, что такое построение работы создаёт у учащихся атмосферу уверенности, ясности. Даже слабые учащиеся начинают проявлять особый интерес к занятиям арифметикой и начинают постепенно справляться всё с бо́льшими и бо́льшими трудностями.

Чем дальше, тем меньше они нуждаются в помощи; появляются инициатива, сметливость, и в итоге учащиеся начинают овладевать и такими заданиями, которые связаны с решением комбинированных задач, заключающих в себе разнообразные трудности.

6. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Задачи на вычисление времени разбиваются на следующие три основных типа:

а) Найти продолжительность события, когда указаны начало его и конец.

б) Найти время окончания события, если указаны начало его и продолжительность.

в) Найти время начала события, если указаны продолжительность события и время его окончания.

Кроме того, все эти задачи могут быть в пределах: а) суток, б) одного года, в) ряда лет.

Таким образом, в окончательном виде получается 9 различных комбинаций, так как в пределах каждого из указанных периодов могут быть все три типа задач. Разберём все эти задачи в отдельности.

Задачи на вычисление времени в пределах суток

(или в пределах двух смежных суток)

а) Определение продолжительности события.

1. «Поезд вышел со станции в 9 час. 30 мин. утра, а на следующую станцию пришёл в 11 час. 45 мин. Сколько времени шёл поезд?»

2. «Занятия в школе начались в 8 час. 30 мин. утра, а закончились в 1 час. 15 мин. Сколько времени продолжались занятия?»

3. «Гроза началась в 10 час. 50 мин. вечера и закончилась в 1 час. 20 мин. ночи. Сколько времени продолжалась гроза?»

В 1-й задаче событие протекало в первой половине суток. Решается задача одним действием:

11 час. 45 мин. — 9 час. 30 мин. = 2 часа 15 мин.

Во 2-й задаче событие началось до полудня, а закончилось после полудня. Решение может быть выполнено двояко.

Первое решение

1) Сколько времени прошло от начала школьных занятий до полудня?

12 час. — 8 час. 30 мин. = 3 часа 30 мин.

2) Сколько времени продолжались занятия?

3 часа 30 мин. + 1 час 15 мин. = 4 часа 45 мин.

Второе решение

1) Сколько часов от начала суток прошло до 1 часа 15 мин?

12 час. + 1 час 15 мин. = 13 час. 15 мин.

2) Сколько времени продолжались занятия?

13 час. 15 мин. — 8 час. 30 мин. = 4 часа 45 мин.

В 3-й задаче событие началось в одни сутки, а закончилось после полуночи.

Решение задачи

1) Сколько времени прошло от начала грозы до полуночи?

12 час. — 10 час. 50 мин. = 1 час. 10 мин.

2) Сколько времени продолжалась гроза?

1 час 10 мин. + 1 час 20 мин. = 2 часа 30 мин.

В этой задаче условие может быть сформулировано и так: «Гроза началась в 22 часа 50 мин. и закончилась в 1 час 20 мин. Сколько времени продолжалась гроза?» (Имеется в виду, что она закончилась на следующие сутки.)

Тогда решение будет иметь такой вид:

24 часа — 22 часа 50 мин. = 1 час 10 мин.

1 час 10 мин. + 1 час 20 мин. = 2 часа 30 мин.

Учащиеся должны уметь решать задачи, подобные приведённой выше, тем и другим способом, так как иногда в жизни подсчёт времени производится от полуночи (например железнодорожное время), а иногда сутки делятся на полусутки, и счёт идёт сначала от полуночи до полудня, а затем от полудня до полуночи.

В качестве наглядного пособия необходимо иметь в школе или стенные часы, или их модель. Желательно иметь на циферблате оба обозначения времени.

б) Определение конца события, когда указаны начало и продолжительность его.

Те же самые задачи могут быть изложены таким образом.

1. «Поезд вышел со станции в 9 час. 30 мин. утра и до следующей станции шёл 2 часа 15 мин. Когда он пришёл на следующую станцию?»

Решение задачи

9 час. 30 мин. + 2 часа 15 мин. = 11 час. 45 мин.

2. «Занятия в школе начались в 8 час. 30 мин. утра и продолжались 4 часа 45 мин. В котором часу они закончились?»

Решение задачи

1) 8 час. 30 мин. + 4 часа 45 мин. = 13 час. 15 мин.
2) 13 час. 15 мин. — 12 час. = 1 час 15 мин.

3. «Гроза началась в 10 час. 50 мин. вечера и продолжалась 2 часа 30 мин. В котором часу она закончилась?»

Решение задачи

1) 12 час. — 10 час. 50 мин. = 1 час 10 мин.
2) 2 часа 30 мин. — 1 час 10 мин. = 1 час 20 мин.

Если в условии задачи будет сказано, что гроза началась в 22 часа 50 мин., то решение примет такой вид:

1) 24 часа — 22 часа 50 мин. = 1 час 10 мин.

2) 2 часа 30 мин. — 1 час 10 мин. = 1 час 20 мин.

в) Определение начала события, когда дана продолжительность события и его конец.

1. «Поезд шёл от первой станции до второй 2 часа 15 мин. и пришёл на вторую станцию в 11 час. 45 мин. дня. Когда он вышел с первой станции?»

Решение задачи

11 час. 45 мин. — 2 часа 15 мин. = 9 час. 30 мин.

2. «Занятия в школе продолжались 4 часа 45 мин. и закончились в 1 час 15 мин. пополудни. Когда начались занятия?»

Первое решение

1) 12 час. + 1 час 15 мин. = 13 час. 15 мин.

2) 13 час. 15 мин. — 4 часа 45 мин. = 8 час. 30 мин.

Второе решение

1) 4 часа 45 мин. — 1 час 15 мин. = 3 часа 30 мин.

2) 12 час. — 3 часа 30 мин. = 8 час. 30 мин.

3. «Гроза продолжалась 2 часа 30 мин. и закончилась в 1 час 20 мин. утра. Когда она началась?»

Решение задачи

1) 2 часа 30 мин. — 1 час 20 мин. = 1 час 10 мин.

2) 12 час. — 1 час 10 мин. = 10 час. 50 мин. (вечера).

Сначала необходимо записывать план и решение задачи, затем можно ограничиваться только записью решения без плана и, наконец, большинство задач следует решать устно, записывая на классной доске лишь данные задачи.

Задачи на вычисление времени в пределах года

а) Определение продолжительности события.

1. «Письмо было отправлено 5 января, а пришло по назначению 21 января. Сколько времени шло письмо?»

2. «Пароход вышел из Горького в Астрахань 25 июня, а вернулся обратно 7 июля. Сколько времени он был в пути?»

3. «Река освободилась ото льда 13 апреля и снова покрылась льдом 5 ноября. Сколько времени река была безо льда?»

В первой задаче событие протекало в течение одного и того же месяца. Задача решается одним действием:

21 день — 5 дней = 16 дней.

Во второй задаче событие началось в одном месяце, а закончилось в следующем.

Решается задача двумя действиями:

30 дней — 25 дней = 5 дней (в июне 30 дней),
5 дней + 7 дней = 12 дней.

Можно и так решить:

30 дней — 24 дня = 6 дней,
6 дней + 6 дней = 12 дней.

В первом случае 25 июня в счёт не идёт, а 7 июля идёт в счёт, а во втором случае наоборот.

В третьей задаче событие захватывает несколько месяцев. Решение может быть выполнено различно.

Первый способ

1) Сколько дней река была свободна ото льда в апреле?

30 дней — 12 дней = 18 дней.

2) Сколько дней река была свободна ото льда?

Апрель	18	дней
Май	31	день
Июнь	30	дней
Июль	31	день
Август	31	день
Сентябрь	30	дней
Октябрь	31	день
Ноябрь	4	дня

Всего 206 дней

В этом случае 13 апреля идёт в счёт дней, когда река была свободна ото льда (следовательно, в апреле река подо льдом была 12 дней), а 5 ноября уже река считается подо льдом, поэтому число дней в ноябре, когда река была свободной ото льда, принимается за 4.

Кроме того, подсчитываются дни каждого месяца.

Второй способ

1) Сколько дней река была свободной ото льда в апреле?

30 дней — 12 дней = 18 дней.

2) Сколько месяцев и дней река была свободна ото льда? Апрель 18 дней, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь — полностью, ноябрь 4 дня.

Всего 6 месяцев 22 дня.

Третий способ

1) Сколько полных месяцев и дней прошло от начала года до вскрытия реки (т. е. до 13 апреля)?

3 месяца 12 дней.

2) Сколько полных месяцев и дней прошло от начала года до того момента, когда река покрылась льдом (т. е. до 5 ноября)?

10 месяцев 4 дня.

3) Сколько времени река была свободна ото льда?

10 месяцев 4 дня (Занимаем десятый месяц — октябрь, в котором 31 день.)
— 3 месяца 12 дней
6 месяцев 23 дня.

Встаёт вопрос, каким способом целесообразнее решать эти задачи. Учащиеся должны знать все 3 способа.

В том случае, когда спрашивается, *сколько дней* река была свободна ото льда, естественно пользоваться первым способом.

Когда спрашивается *сколько месяцев и дней* река была подо льдом, целесообразнее пользоваться вторым способом.

Третий способ является переходным к тем задачам, когда событие происходит в течение ряда лет.

Следует обратить внимание на то, что в ответах получается расхождение.

Первый способ даёт — 206 дней.		
Второй „ „ — 6 месяцев 22 дня = 202 дня		если считать месяцы равными 30 дням.
Третий „ „ — 6 месяцев 23 дня = 203 дня		

Эта разница происходит вследствие того, что в первом случае берётся фактическое число дней в каждом месяце.

Во втором случае, считая все месяцы по 30 дней, мы теряем по одному дню в мае, июле, августе и октябре.

В третьем случае теряем по одному дню в мае, июле и августе.

Таким образом, наиболее точным оказывается первый приём.

Перед решением задач на вычисление времени в пределах года необходимо познакомить учащихся с числом дней в каждом месяце, а также с понятиями високосный и невисокосный год.

В классе должна быть вывешена таблица, а учащиеся должны её записать себе в тетрадь.

Число дней в каждом месяце

1. Январь	31 день		6. Июнь	30 дней	
2. Февраль	28 дней, если год невисокосный,		7. Июль	31 день	
	29 дней, если год високосный		8. Август	31 день	
			9. Сентябрь	30 дней	
			10. Октябрь	31 день	
3. Март	31 день		11. Ноябрь	30 дней	
4. Апрель	30 дней		12. Декабрь	31 день	
5. Май	31 день				

б) Определение конца события, когда указаны начало и продолжительность его.

Новые задачи составим из тех же трёх задач.

1. «Письмо было отправлено 5 января, а пришло по назначению через 16 дней. Когда оно было получено?»

Решение задачи

5 дней + 16 дней = 21 день.

Ответ: 21 января.

2. «Пароход вышел из Горького в Астрахань 25 июня и вернулся обратно через 12 дней. Когда он вернулся обратно в Горький?»

Решение задачи

30 дней — 25 дней = 5 дней.
12 дней — 5 дней = 7 дней.

Ответ: 7 июля.

3. «Река освободилась ото льда 13 апреля и была свободной ото льда 6 месяцев 23 дня. Когда она снова покрылась льдом?»

Решение задачи

1) Сколько месяцев и дней прошло от начала года до того момента, когда река освободилась ото льда?

3 месяца 12 дней.

2) Сколько месяцев и дней прошло от начала года до того момента, когда река снова покрылась льдом?

+ 3 месяца	12 дней	
6 месяцев	23 дня	
9 месяцев	35 дней	
10 месяцев	4 дня	(На 10-й месяц — октябрь — необходимо выделить 31 день.)

Ответ: 5 ноября.

в) Определение начала события, когда указаны продолжительность и конец события.

1. «Письмо было получено 21 января, а было в пути 16 дней. Когда оно было отправлено?»

Решение задачи

21 день — 16 дней = 5 дней.

Ответ: 5 января.

2. «Пароход вернулся в Горький из Астрахани 7 июля и был в пути 12 дней. Когда он вышел из Горького?»

Решение задачи

12 дней — 7 дней = 5 дней.
30 дней — 5 дней = 25 дней.

Ответ: 25 июня.

3. «Река была свободна ото льда 6 месяцев 23 дня и вновь покрылась льдом 5 ноября. Когда она освободилась ото льда?»

− 10 месяцев	4 дня
6 »	23 »
3 месяца	12 дней

(Занимаем 10-й месяц — октябрь — 31 день.)

Ответ: 13 апреля.

Задачи на вычисление времени в пределах нескольких лет

а) Вычисление продолжительности события.

«Ваня родился 19 февраля 1926 года. Сегодня 5 апреля 1938 года. Сколько ему лет, месяцев и дней?»

Решение задачи

1) Сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 19 февраля 1926 года?

1925 лет 1 месяц 18 дней.

2) Сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 5 апреля 1938 года?

1937 лет 3 месяца 4 дня.

3) Сколько Ване лет, месяцев и дней?

$$\begin{array}{lrlrl} - & 1937 & \text{лет} & 3 & \text{месяца } 4 \text{ дня} \\ & 1925 & \text{„} & 1 & \text{месяц } 18 \text{ дней} \\ \hline & 12 & \text{лет} & 1 & \text{месяц } 17 \text{ дней.} \end{array}$$

Здесь мы занимаем третий месяц, т. е. март. В марте 31 день. Поэтому 18 дней приходится вычитать из 35 дней.

При решении первых задач учащиеся формулируют устно и записывают все 3 вопроса, а в дальнейшем можно ограничиться только последним вопросом.

б) Вычисление конца события.

«Ваня родился 19 февраля 1926 года. Когда ему было 12 лет 1 месяц 17 дней?»

$$\begin{array}{lrlrlrl} + & 1925 & \text{лет} & 1 & \text{месяц} & 18 & \text{дней} \\ & 12 & \text{„} & 1 & \text{„} & 17 & \text{„} \\ \hline & 1937 & \text{лет} & 2 & \text{месяца} & 35 & \text{дней} \\ \hline & 1937 & \text{лет} & 3 & \text{месяца} & 4 & \text{дня.} \end{array}$$

(Для 3-го месяца, т. е. для марта, необходимо отсчитать 31 день.)

Ответ: 5 апреля 1938 года.

Прошло полных 1937 лет от начала летосчисления, значит, событие будет в 1938 году. В этом году прошло 3 полных месяца, значит, событие будет в четвёртом месяце, т. е. в апреле. В апреле прошло полных 4 дня, следовательно, событие будет 5 апреля.

в) Вычисление начала события.

«Возраст Вани — 12 лет 1 месяц 17 дней. Сегодня 5 апреля 1938 года. Когда родился Ваня?»

$$\begin{array}{lrlrlrl} - & 1937 & \text{лет} & 3 & \text{месяца} & 4 & \text{дня} \\ & 12 & \text{„} & 1 & \text{месяц} & 17 & \text{дней} \\ \hline & 1925 & \text{лет} & 1 & \text{месяц} & 18 & \text{дней.} \end{array}$$

(Занимаем 3-й месяц, т. е. март, в котором 31 день.)

Ответ: 19 февраля 1926 года.

Прошло полных 1925 лет от начала летосчисления, значит, событие было в 1926 году. В этом году прошёл 1 полный месяц, значит, событие произошло во втором месяце, т. е. в феврале.

В феврале прошло полных 18 дней, следовательно, событие произошло 19 февраля.

7. ЗАДАЧИ НА ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

В начальной школе по новой программе Министерства просвещения изучаются только сложение и вычитание простейших обыкновенных дробей [1]).

При изучении дробей необходимо ввести простые задачи на:

а) нахождение суммы,
б) увеличение на данное число,
в) нахождение остатка,
г) уменьшение на данное число,
д) на разностное сравнение,
е) на увеличение в несколько раз,
ж) на уменьшение в несколько раз.

Приведём в качестве образца несколько таких задач.

а) Нахождение суммы.

1. «На отделку платья пошло два куска ленты, один в $^3/_5$ *м*, другой в $^1/_{10}$ *м*. Сколько всего ленты пошло на отделку платья?»

2. «Мама наварила сначала 5,4 *кг* варенья, а потом 4,6 *кг*. Сколько всего варенья наварила мама?»

б) Увеличение на данное число.

1. «Ширина окна $^7/_8$ *м*, высота на $^1/_2$ *м* больше. Какой вышины окно?»

2. «Одна доска длиною в 3,52 *м*, а другая на 2,14 *м* длиннее. Какой длины вторая доска?»

в) Нахождение остатка.

1. «От доски длиною в 4,55 *м* отпилили доску в 1,25 *м*. Какой длины осталась доска?»

2. «От 1 *кг* мяса $^2/_5$ *кг* положили в суп, остальное употребили на жаркое. Сколько мяса пошло на жаркое?»

г) Уменьшение на данное число.

1. «Одна рыба весила 3,5 *кг*, другая на 1,2 *кг* меньше. Сколько весила вторая рыба?»

2. «Длина комнаты $5^3/_8$ *м*, ширина меньше длины на $1^1/_4$ *м*. Какова ширина комнаты?»

---

[1]) Десятичные дроби в настоящее время для начальной школы необязательны.

д) Разностное сравнение.

1. «Одна рыба весила 3,54 *кг*, другая 2,12 *кг*. На сколько первая рыба весила больше второй?»

2. «В одном куске было $15\frac{1}{2}$ *м* сукна, в другом $13\frac{3}{4}$ *м*. На сколько больше сукна было в первом куске?»

е) Увеличение в несколько раз.

«Пешеход прошёл за час 4,5 *км*, а велосипедист проехал за час в 3 раза больше. Сколько километров проехал за час велосипедист?»

ж) Уменьшение в несколько раз.

«На мужской костюм пошло 3,5 *м* сукна, а на дамский в 2 раза меньше. Сколько метров сукна пошло на дамский костюм?»

Такого рода простые задачи могут решаться как устно, так и письменно.

Так как над десятичными дробями можно производить все 4 арифметические действия, то с применением десятичных дробей следует решать все *виды составных* задач, какие решаются с целыми числами, при одном лишь условии, чтобы задача не приводила к умножению или делению на десятичную дробь.

Приведём несколько таких задач.

1. «От доски длиною в 8,5 *м* отрезали сначала 2,15 *м*, а потом на 1,13 *м* больше, чем в первый раз. Какой длины получился остаток от доски?»

2. «В семье отец и два сына. Младшему сыну на костюм нужно 2,1 *м* сукна, старшему на 0,5 *м* больше, а отцу на 1,4 *м* меньше, чем обоим сыновьям вместе. Сколько сукна нужно купить на костюмы отцу и обоим сыновьям?»

3. «В одном куске было 20,48 *кг* масла, а в другом 18,75 *кг*. От первого куска продали 14,32 *кг*, а от второго 13,6 *кг*. В котором куске осталось масла больше и на сколько?»

4. «В двух мешках 82,5 *кг* муки. В первом мешке в 2 раза больше, чем во втором. Сколько муки в каждом мешке?»

5. «Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу. Один проходил в час 4,8 *км*, другой 4,6 *км*. На каком расстоянии они были друг от друга, если встретились через 3 часа после выхода?»

Задачи на нахождение части от целого числа и на нахождение целого числа по данной его части

Приведённые выше задачи не отличаются (кроме числовых данных) от задач, которые решались учащимися в связи с изучением целых чисел.

Что же касается задач на нахождение части от целого числа и целого числа по данной его части, то эти задачи являются специфическими задачами на дроби. Необходимо решение этих задач проводить на наглядном материале и в определённой системе.

Очень часто эти задачи недостаточно отчётливо понимаются не только учениками III и IV классов начальной школы, но и учениками старших классов средней школы.

Нахождение части от целого числа

Нахождение части от целого числа следует изучать в такой системе: сначала нахождение одной части от числа, а затем нахождение нескольких частей:

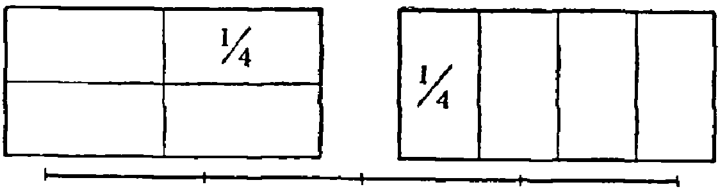


Рис. 9.

Прежде чем находить одну часть *от числа,* необходимо находить заданную *часть от какого-нибудь предмета или фигуры.* Например: найти $^1/_4$ прямоугольника, шнура и т. д. (рис. 9).

После нахождения $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_8$ и т. д. от конкретных предметов или фигур следует перейти к нахождению части от числа, постепенно усложняя условие задачи. Приведём несколько таких задач.

1. «Найти $^1/_5$ от 20».

$$20:5=4.$$

2. «От ленты в 80 *см* отрезали $^1/_4$ часть. Сколько сантиметров ленты осталось?»

1) 80 *см*:4 = 20 *см*; 2) 80 *см* — 20 *см* = 60 *см*.

3. «В книге 240 задач. Ученики за первую четверть учебного года решили $^{1}/_{5}$ всех задач, а за вторую четверть $^{1}/_{3}$ оставшихся задач. Сколько ещё нерешённых задач осталось в задачнике?»

Решение задачи

1) 240 задач : 5 = 48 задач.
2) 240 задач — 48 задач = 192 задачи.
3) 192 задачи : 3 = 64 задачи.
4) 192 задачи — 64 задачи = 128 задач.

После того как учащиеся совершенно свободно будут справляться с задачами на нахождение одной части от целого числа, можно перейти к задачам на нахождение нескольких частей от числа.

Решение таких задач следует также сопровождать иллюстрациями и вначале брать небольшие числовые данные, а затем постепенно увеличивать и числовые данные и количество действий.

Разберём несколько задач такого рода.

1. «От доски длиною в 10 *м* отрезали $^{3}/_{5}$ её длины. Какой длины отрезали доску?»

В произвольном масштабе на классной доске и в ученических тетрадях чертится доска (рис. 10):

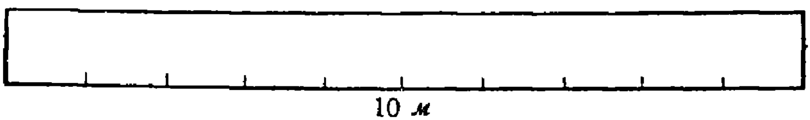


Рис. 10.

Затем она делится на 5 равных частей, вычисляется длина сначала каждой части, а потом 3 частей (рис. 11):

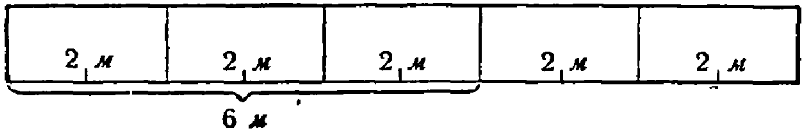


Рис. 11.

Решение задачи

1) Сколько метров составляет $^1/_5$ часть доски?

$$10 \text{ м}:5=2 \text{ м}.$$

2) Сколько метров составляют $^3/_5$ доски?

$$2 \text{ м}\times 3=6 \text{ м}.$$

2. «Между двумя пристанями 48 *км*. Пароход прошел $^5/_8$ этого расстояния. Сколько километров он прошёл от первой пристани?»

Решение задачи

1) 48 *км*:8 = 6 *км*.
2) 6 *км* × 5 = 30 *км*.

3. «В магазине было 450 *кг* сахару. В первый день продали $^2/_5$ запаса, а во второй день $^7/_{10}$ оставшегося сахара. Сколько килограммов сахару осталось в магазине?»

Решение задачи

1) 450 *кг*:5 = 90 *кг*.
2) 90 *кг* × 2 = 180 *кг*.
3) 450 *кг* — 180 *кг* = 270 *кг*.
4) 270 *кг*:10 = 27 *кг*.
5) 27 *кг* × 7 = 189 *кг*.
6) 270 *кг* — 189 *кг* = 81 *кг*.

Нахождение целого числа по данной его части

Нахождение целого числа по данной его части также следует начинать с нахождения числа по *одной* его части, а затем перейти к нахождению числа по *нескольким* частям. В том и другом случае следует задачи иллюстрировать чертежами.

Покажем это на нескольких задачах.

1. «Четверть куска сукна составляет 5 *м*. Как велик весь кусок?» (рис. 12).

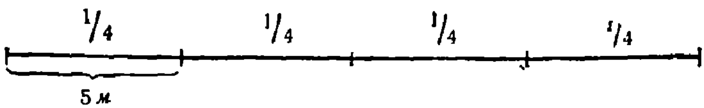


Рис. 12.

$$5 \text{ м}\times 4=20 \text{ м}.$$

2. «Колхоз вспахал в первый день 12 *га*, и это составляет $^1/_4$ всего поля. Как велико всё поле?» (рис. 13).

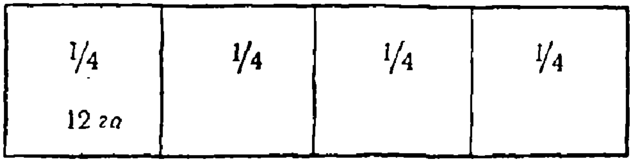


Рис. 13.

$$12\ \textit{га} \times 4 = 48\ \textit{га}.$$

После того как учащиеся усвоят нахождение числа по одной его части, можно перейти к решению задач на нахождение целого числа по нескольким его частям. Первые задачи следует брать с небольшими числовыми данными и иллюстрировать чертежами.

Приведём в качестве образца несколько таких задач.

1. «Мастер отметил отпилить от доски 6 *м*. Это составляет $^3/_5$ длины всей доски. Как велика длина этой доски?» (рис. 14).

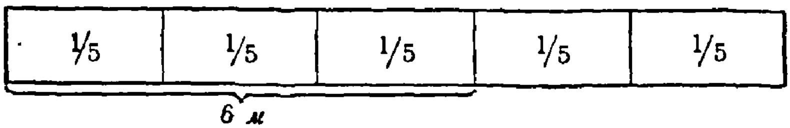


Рис. 14.

Решение задачи

1) Сколько составляет $^1/_5$ длины всей доски?

$$6\ \textit{м} : 3 = 2\ \textit{м}.$$

2) Сколько метров составляет длина всей доски?

$$2\ \textit{м} \times 5 = 10\ \textit{м}.$$

2. «Дети засадили $^2/_3$ своего огорода, и это составляло 8 *а*. Как велик весь школьный огород?» (рис. 15).

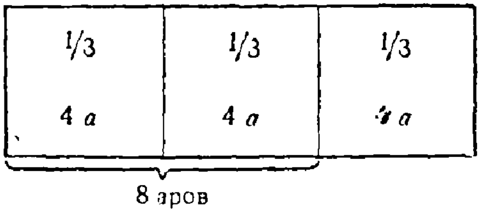


Рис. 15.

Решение задачи

1) $8\ a : 2 = 4\ a$.
2) $4\ a \times 3 = 12\ a$.

Сопоставление задач на нахождение части числа и на нахождение целого числа по данной его части

Задачи на нахождение части числа и на нахождение целого числа по данной его части часто смешиваются учащимися, поэтому здесь необходимо решить достаточное число задач устно и письменно.

После решения ряда задач возрастающей трудности того и другого типа следует сопоставить эти задачи и подчеркнуть их разницу.

Например:

1) «Найти $^1/_5$ часть от 20».
   «Найти $^3/_5$ от 30».
2) «$^1/_5$ числа равна 20. Чему равно всё число?»
   «$^3/_5$ числа равны 30. Чему равно всё число?»

В первом случае мы находим часть числа, поэтому *искомое число меньше данного числа.*

Во втором случае находим по данной части числа всё число, *поэтому искомое число больше заданной его части.*

Большую роль в деле осмысленного усвоения задач того и другого типа играет самостоятельное составление учащимися задач по заданию учителя и на нахождение части числа и на нахождение целого числа по его части.

Если учащиеся не путают, а правильно составляют указанные задачи, то это является вернейшим залогом сознательного и прочного усвоения их учащимися, т. е. заложен хороший фундамент для дальнейшей работы, когда учащиеся, изучая систематический курс дробей, будут находить результат или умножением, или делением на дробь.

Сочетание задач на нахождение части числа и на нахождение числа по данной его части с задачами на целые числа

Когда учащиеся усвоят решение задач на нахождение части числа и по части целого, можно усложнять эти задачи дополнительными данными и зависимостями из области целых чисел. Примерами таких задач могут служить следующие:

1) «Путешественник проехал всего 3600 *км*. Из них $^5/_8$ пути он проехал по железной дороге, а остальной путь на пароходе. По железной дороге он проезжал в день в среднем по 750 *км*, а на пароходе по 270 *км*. Сколько дней он был в пути?»

2) «Колхоз засеял 6750 *га*. $^3/_5$ этого количества он засеял рожью, а остальное пшеницей. Урожай ржи получился по 15 *ц* с гектара, а урожай пшеницы по 18 *ц*. Чего собрал больше колхоз — пшеницы или ржи, и на сколько больше?»

3) «В саду посадили 620 тополей, а лип на 170 больше. Сколько деревьев ещё нужно посадить в саду, если посаженные деревья составляют $^3/_8$ того количества деревьев, какое нужно посадить в саду?»

8. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

Задачи на проценты имеют большое значение в том отношении, что они сближают преподавание арифметики с жизнью. Учащиеся ежедневно сталкиваются с процентами в своей школьной жизни — процент успеваемости, процент посещаемости; с процентами они постоянно сталкиваются при чтении газет. Сознательное решение задач на проценты имеет большое значение в работе школы.

Задачи на проценты бывают трёх типов:

1) нахождение данного числа процентов от числа,

2) нахождение числа по данному проценту,

3) нахождение процентного отношения между числами.

В программе начальной школы указаны только задачи первого типа, но и задачи второго и третьего типов не представляют особой трудности, так как те элементы, из которых состоят эти задачи, и метод их решения уже известны учащимся из практики решения задач на целые числа и на дроби.

Поэтому все эти задачи вполне доступны учащимся начальной школы.

Разберём их в отдельности.

Задачи на нахождение данного числа процентов от числа

Приведём задачи этого типа.

1. «На заводе 2700 рабочих; 1% общего числа рабочих поехали на курорт. Сколько рабочих поехало на курорт?»

2. «На заводе 3600 рабочих и подростков. Подростки составляют 15% общего числа рабочих. Сколько на заводе подростков?»

В первой задаче требуется найти 1% от числа, иначе — одну сотую от 2700. С задачами такого рода учащиеся встречались в разделе дробей, когда решали задачи на нахождение одной части от числа. Решается задача одним действием:

2700 рабочих : 100 = 27 рабочих.

Вторая задача несколько сложнее, но и она не является для учащихся совершенно новой. В ней нужно найти 15%, или, иначе, 15 сотых. Эта задача также сходна с теми задачами, которые решались учащимися в разделе дробей, а именно — с задачами на нахождение нескольких частей от числа.

Решается она двумя действиями.

Решение задачи

1) Сколько составит 1% от общего числа рабочих?

3600 рабочих : 100 = 36 рабочих.

2) Сколько на заводе подростков?

36 рабочих × 15 = 540 рабочих (подростков).

Задачи на нахождение числа по данному проценту

«Завод выпустил 2400 станков, и это составляет 80% плана. Сколько станков должен был выпустить завод по плану?»

Задача эта сводится к известным уже учащимся задачам на нахождение числа по данной его части.

Решение задачи

1) Сколько составляет 1% плана?

2400 станков : 80 = 30 станков.

2) Сколько станков должен был выпустить завод по плану?

30 станков × 100 = 3000 станков.

Задачи на нахождение процентного отношения между числами

«Завод должен был выпустить по плану 3000 станков, а выпустил 3600 станков. Какой процент составляет выполнение плана?»

В этой задаче решение сводится к вычислению 1% от плана и к делению по содержанию.

Если весь план составляет 3000 станков, то 1% составит

3000 станков : 100 = 30 станков.

Завод выпустил 3600 станков; это составит столько процентов, сколько раз 30 содержится в 3600:

3600 станков : 30 станков = 120 (процентов).

Таким образом, все эти задачи вполне доступны для учащихся начальной школы, решение их не представляет чего-либо нового для учащихся.

При решении этих задач необходимо лишь данные брать таким образом, чтобы при нахождении 1% в частном получалось целое число.

Само собой разумеется, что необходимо предварительно познакомить учащихся с понятием о проценте.

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Геометрические задачи в начальной школе могут быть связаны с вычислением периметра и отдельных сторон квадрата, прямоугольника и треугольника, а также с вычислением площади квадрата и прямоугольника и объёма куба и прямоугольного параллелепипеда Рассмотрим эти задачи в отдельности.

Периметр квадрата, прямоугольника, треугольника

Вначале необходимо иллюстрировать задачи чертежами.

Прямоугольник

1. «Длина прямоугольного участка 250 *м*, ширина 150 *м*. Чему равна длина всех сторон?»

Рис. 16.

2. «Сумма всех сторон прямоугольника составляет 120 *см*. Длина его больше ширины на 18 *см*. Чему равны длина прямоугольника и его ширина?»

Решение задачи

$$120 \text{ см} : 2 = 60 \text{ см}.$$

$(60 \text{ см} - 18 \text{ см}) : 2 = 21 \text{ см}$ — ширина прямоугольника.
$21 \text{ см} + 18 \text{ см} = 39 \text{ см}$ — длина прямоугольника.
Проверка:

$$(39 \text{ см} \times 2) + (21 \text{ см} \times 2) = 120 \text{ см}.$$

Треугольник

3. «Длина одной стороны треугольника равна 15 *см*, длина другой стороны на 5 *см* больше первой, длина третьей стороны на 7 *см* меньше второй стороны. Чему равна сумма всех сторон?»

4. «Сумма всех сторон треугольника равна 92 *см*. Основание равно 35 *см*. Одна боковая сторона больше другой на 7 *см*. Найти длину этих сторон».

Решение задачи

$$92 \text{ см} - 35 \text{ см} = 57 \text{ см},$$
$$(57 \text{ см} - 7 \text{ см}) : 2 = 25 \text{ см},$$
$$25 \text{ см} + 7 \text{ см} = 32 \text{ см}.$$

Проверка:

$$35\ см + 25\ см + 32\ см = 92\ см.$$

Для вычисления периметра и отдельных сторон треугольника могут быть использованы для самостоятельной работы учащихся таблицы, например, такого рода.

Заполни таблицу:

Длина 1-й боковой стороны равнобедренного треугольника	Длина 2-й боковой стороны равнобедренного треугольника	Длина основания	Сумма всех сторон
25,0 *см*	25,0 *см*	14,0 *см*	64,0 *см*
18,0 „	—	20,0 „	—
32,0 „	—	—	100,0 „
—	—	40,0 „	96,0 „
18,4 „	—	20,8 „	—
13,5 „	—	—	40,0 „ и т. д.

Все указанные выше задачи служат средством повторения различных задач, решаемых в связи с целыми и дробными числами. Они легко могут быть составлены на уроке самим учителем или учащимися. Большинство их может быть использовано для проведения устного счёта.

Задачи на вычисление площади прямоугольника и квадрата

К решению задач на измерение площади прямоугольника (и квадрата) учащиеся приступают после того, как они на конкретном материале познакомятся с признаками и свойствами прямоугольника и квадрата, а также с основными квадратными единицами: *кв. см*, *кв. дм*, *кв. м* и мерами земельных площадей: аром и гектаром.

Необходимым условием при решении арифметических задач на измерение площадей является правильная запись наименований при вычислениях.

Хотя в курсах методик, а также в специальной брошюре профессора И. Н. Кавуна «Арифметические записи в начальной школе», даны по этому вопросу определённые указания, но в подавляющем большинстве школ запись вычислений при решении задач производится неправильно.

Например, при решении задачи такого содержания: «Длина комнаты 6 *м*, ширина 5 *м*. Вычислить площадь этой комнаты» в ученических тетрадях встречаются записи:

1) $6 \times 5 = 30$ *кв. м.*

2) 6 *м* $\times 5 = 30$ *кв. м.*

3) 6 *м* $\times 5$ *м* $= 30$ *кв. м.*

Первая и вторая записи по существу неправильны. Произведение отвлечённых чисел не может быть именованным числом (первая запись).

Если 6 линейных метров взять 5 раз, в произведении получится 30 линейных метров, а не квадратных (вторая запись).

Наконец, третья запись математически совершенно правильна, но она не отражает того процесса, который происходит в сознании ученика, когда он приступает к выполнению действия, не соответствует тому опыту и тем рассуждениям, которые предшествуют выполнению действия.

В средней школе ученик получает понятия о размерности. В связи с курсом физики ему приходится оперировать с довольно сложными наименованиями:

$$40 \text{ км} : 8 \text{ час.} = 5 \frac{\text{км}}{\text{час}}; \quad 5 \frac{\text{км}}{\text{час}} \times 8 \text{ час.} = 40 \text{ км};$$

$$40 \text{ км} : 5 \frac{\text{км}}{\text{час}} = 8 \text{ час. и т. д.}$$

Поэтому здесь совершенно естественна такая запись, как 6 *м* $\times 5$ *м* $= 30$ *кв. м.*

Но в практике начальной школы такая запись приводит ученика к целому ряду противоречий. Прежде всего он привык к тому, что множимое и произведение должны иметь одно и то же наименование («что умножаю, то и получаю»).

Далее множитель в понимании ученика начальной школы всегда число отвлечённое. Например, для того чтобы узнать, сколько стоит 6 *кг* сахару по 4 руб., он должен записать:

$$4 \text{ руб.} \times 6 =, \text{ а не } 4 \text{ руб.} \times 6 \textit{ кг} = .$$

Наиболее посильной для возраста и понимания ученика начальной школы будет запись, соответствующая тем рассуждениям, которые сопровождают решение задачи и предшествуют записи.

Возьмём конкретную задачу: «Длина комнаты 6 *м*, ширина 5 *м*. Вычислить площадь пола этой комнаты».

Учитель ставит вопрос: «Что значит измерить площадь пола комнаты?»

Ученик: Это значит, сосчитать (вычислить), сколько квадратных метров содержится (или укладывается) в площади пола.

Учитель: Как же это сосчитать?

Ученик: Нужно число квадратных метров, которое уложится в один ряд по длине комнаты, умножить на число рядов.

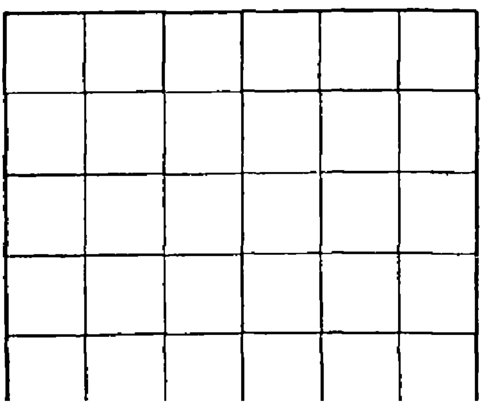
Учитель: Сколько же квадратных метров уложится в один ряд по длине комнаты?

Ученик: 6 *кв. м*, так как длина комнаты 6 *м*.

Учитель: А сколько же будет таких рядов?

Ученик: 5 рядов, так как ширина комнаты 5 *м*.

Далее следует запись: 6 *кв. м.* + 6 *кв. м* + 6 *кв. м.* + + 6 *кв. м.* + 6 *кв. м* = 30 *кв. м*; 6 *кв. м* × 5 = 30 *кв. м.*



Вначале необходимо решение задач сопровождать чертежами (рис. 17), а затем это будет уже излишним, как излишней будет и первая длинная запись сложением; ученик сразу будет писать 6 *кв. м* $\times$ 5 = 30 *кв. м*, формулируя соответствующие рассуждения.

Иногда возникают сомнения, возможно ли допускать такое несоответствие с той записью, которая будет в дальнейшем практиковаться в средней школе.

Такая постановка вопроса может быть лишь в том случае, если мы будем стоять на почве чисто формальной логики, а не диалектической.

Нужно понять, что тот приём, который доступен и естественен для ученика начальной школы, может быть совершенно непригодным для более старшего возраста, и наоборот.

Вопрос о допустимости и целесообразности записи вида: 6 *кв. м* $\times$ 5 = 30 *кв. м* в начальной школе должен быть разрешён безусловно в положительном смысле.

Соответственно с этим разрешается и характер записи при решении обратных задач. Например:

«Площадь пола комнаты 40 *кв. м*. Длина комнаты 8 *м*. Вычислить ширину комнаты». Или:

«Площадь пола комнаты 40 *кв. м*, ширина комнаты 5 *м*. Вычислить длину комнаты».

Первая задача решается таким образом:

В один ряд по длине комнаты укладывается 8 *кв. м*. Всего в площади пола 40 *кв. м*. Следовательно, рядов будет столько, сколько раз в 40 *кв. м* содержится по 8 *кв. м*.

40 *кв. м* : 8 *кв. м* = 5.

По ширине комнаты уложилось 5 рядов, ширина каждого из них 1 *м*, отсюда ширина комнаты 5 *м*.

Окончательная запись:

Решение задачи

Сколько рядов по 8 *кв. м* **уложилось в площади пола?**

40 *кв. м* : 8 *кв. м* = 5.

Ответ: ширина комнаты 5 *м*.

Решение второй задачи проводится таким образом:

В площади пола 40 *кв. м*, ширина комнаты 5 *м*, следовательно, по длине пола 5 одинаковых рядов, т. е. в каждом ряду укладывается 40 *кв. м* : 5 = 8 *кв. м*.

А раз в один ряд по длине уложилось 8 *кв. м*, следовательно, длина класса 8 *м*.

Запись решения примет такой вид.

Решение задачи

Сколько квадратных метров укладывается в один ряд по длине комнаты?

40 *кв. м* : 5 = 8 *кв. м*.

Ответ: длина комнаты 8 *м*.

Здесь следует добиваться, чтобы учащиеся отчётливо понимали разницу между квадратным метром и линейным метром и в то же время понимали соответствие между ними: сколько метров составляет длина комнаты, столько квадратных метров уложится в один ряд по длине комнаты, сколько метров в ширине комнаты, столько будет рядов, и наоборот.

После решения простых задач на вычисление площади следует перейти к сложным задачам, где вычисление площади усложняется дополнительными условиями.

Приводим несколько таких задач.

1. «Механический цех имеет в длину 65 *м*, в ширину 24 *м*. Сколько станков можно поставить в этом цехе, если для каждого станка требуется 6 *кв. м*, а для проходов нужно оставить 120 *кв. м*?»

Ответ: 240 станков.

2. «Длина поля 750 *м*, ширина 360 *м*. Сколько потребуется семян ржи для этого поля, если на один гектар нужно 1 *ц* 20 *кг* семян?»

Ответ: 32 *ц* 40 *кг*.

3. «Длина поля 625 *м*; ширина 480 *м*; $^3/_5$ поля засеяно рожью, $^3/_4$ оставшегося поля — пшеницей, остальная часть поля засеяна гречихой. Сколько гектаров засеяно рожью, пшеницей и гречихой в отдельности?»

Ответ: 18 *га*, 9 *га*, 3 *га*.

4. Длина сада 850 *м*, ширина 600 *м*. Сад занят грушами и яблонями, причём площадь, занятая грушами, в 2 раза меньше площади, занятой яблонями. Сколько гектаров занято грушами и сколько гектаров яблонями?»

Ответ: 17 *га* и 34 *га*.

Задачи на вычисление объёма прямоугольного параллелепипеда и куба

Прежде чем решать задачи на вычисление объёма прямоугольного параллелепипеда (и куба) необходимо познакомить учащихся с признаками и свойствами куба и прямоугольного параллелепипеда, а также с кубическими мерами: *куб. см*, *куб. дм* и *куб. м*.

При решении задач на вычисление объёмов, так же как и при вычислении площадей, следует особое внимание обратить на правильность записи действий.

В ученических записях при решении, например, такой задачи: «Длина комнаты 8 *м*, ширина 6 *м*, высота 4 *м*. Вычислить объём комнаты» — часто встречаются записи:

1) $8 \times 6 \times 4 = 192$ *куб. м*.
2) 8 *м* $\times 6 \times 4 = 192$ *куб. м*.
3) 8 *м* $\times 6$ *м* $\times 4$ *м* $= 192$ *куб. м*.

Первые записи неправильны, последняя применяется в средней школе, когда учащиеся ознакомятся с размерностью.

В начальной школе следует прибегать к такой записи, которая соответствовала бы опыту и рассуждениям учащихся при вычислении объёма.

Приведём эти рассуждения применительно к предыдущей задаче.

Учитель: Что значит, измерить объём комнаты?

Ученик: Это значит, надо сосчитать (вычислить), сколько в её объёме содержится кубометров.

Учитель: Как же это сосчитать?

Ученик: В один ряд на полу по длине уложится 8 *куб. м*, так как длина комнаты 8 *м*; таких рядов на полу будет 6, так как ширина комнаты 6 *м*. Таким образом, на полу в один слой уложится всего: 8 *куб. м* $\times 6 = 48$ *куб. м*. Это не заполнит всей комнаты. Таких слоёв (этажей) по 48 *куб. м* в объёме всей комнаты будет 4, так как высота комнаты 4 *м*. Объём комнаты будет равен:

$$48 \text{ куб. м} \times 4 = 192 \text{ куб. м}.$$

В дальнейшем эта запись может быть сокращена и будет иметь такой вид:

$$8 \text{ куб. м} \times 6 \times 4 = 192 \text{ куб. м}.$$

Задачи на вычисление объёма могут быть усложнены дополнительными условиями и данными.

Приведём образцы таких задач.

1. «Длина класса 9 *м*, ширина 6 *м*, высота 4 *м*.

В этом классе занимается 36 человек. Сколько кубических метров воздуха приходится на каждого?»

Ответ: 6 *куб. м*.

2. «Нужно разобрать и отвезти кирпичную стену длиной в 24 *м*, шириной в 1 *м*, высотой в 5 *м*. Каждый кубометр кирпичной кладки весит 3 *т*. Сколько раз придётся съездить шеститонному грузовому автомобилю, чтобы отвезти весь материал разобранной стены?»

Ответ: 60 раз.

3. «Длина стального бруса 8 *м*, ширина 10 *см*, толщина 4 *см*. Сколько весит этот брус, если кубический сантиметр стали весит 7 *г*?»

Решение задачи

$$8 \text{ м} = 800 \text{ см}.$$

$$800 \text{ куб. см} \times 10 \times 4 = 32\,000 \text{ куб. см}.$$

$$7 \text{ г} \times 32\,000 = 224\,000 \text{ г} = 224 \text{ кг} = 2{,}24 \text{ ц}.$$

4. «Колхоз решил выкопать пруд длиной в 50 *м*, шириной в 24 *м*, глубиной в 2 *м*. Сколько подвод потребуется, чтобы отвезти землю, которую придётся выбросить для устройства пруда, если для того, чтобы отвезти 1 *куб. м* земли, нужно 6 подвод?»

Обратные задачи на вычисление объёмов решаются по тому же принципу, как и обратные задачи на площади.

Приведём несколько таких задач.

1. «Объём комнаты 216 *куб. м*, длина комнаты 9 *м*, ширина 6 *м*. Вычислить высоту комнаты».

Решение задачи

1) Сколько кубометров уложится в один слой на площади пола?

9 *куб. м* $\times$ 6 = 54 *куб. м*.

2) Сколько метров составляет высота комнаты?

216 *куб. м* : 54 *куб. м* = 4.

Ответ: 4 *м*.

2. «Объём комнаты 216 *куб. м*, длина комнаты 9 *м*, высота 4 *м*. Вычислить ширину комнаты».

Решение задачи

1) Сколько кубометров уложится в один слой на площади пола?

216 *куб. м* : 4 = 54 *куб. м*.

2) Сколько метров составляет ширина комнаты?

54 *куб. м.* : 9 *куб. м* = 6.

Ответ: 6 *м*.

3. «Объём комнаты 216 *куб. м*, ширина комнаты 6 *м*, высота 4 *м*. Вычислить длину комнаты».

Решение задачи

1) Сколько кубометров уложится в один слой на площади пола?

216 *куб. м* : 4 = 54 *куб. м*.

2) Сколько кубометров уложится в один ряд по длине комнаты?

54 *куб. м* : 6 = 9 *куб. м*.

Ответ: длина комнаты 9 *м*.

10. СОСТАВЛЕНИЕ СМЕТ, РАСЧЁТОВ, РАБОТА ПО СПРАВОЧНИКАМ

В задачу школы входит не только дать развитие учащимся и научить их производству вычислений, но и вооружить их некоторыми умениями в практической жизни. В частности, в жизни приходится часто иметь дело с составлением и проверкой счетов и смет.

Учащиеся должны быть ознакомлены с техникой их составления, должны уметь проверить правильность итогов.

Приводим несколько образцов таких работ:

Счёт школе от писчебумажного магазина

№ п п	Наименование товаров	Количество	Цена		Сумма	
			Руб.	Коп.	Руб.	Коп.
1	Тетрадей	250	—	10	25	—
2	Карандашей	320	—	12	38	40
3	Ручек	240	—	8	19	20
4	Перьев	240	—	3	7	20
5	Красок	120	—	7	8	40
	Всего . . .	—	—	—	—	—

Проверить счёт и подсчитать общую стоимость.

СПРАВОЧНИК ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ СМЕТ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Расход кормов на содержание лошадей, коров и мелкого скота

№ п, п	Наименование скота	Нужно кормов на год				
		сена	овса	отрубей или жмыха	яровой соломы	сочных кормов
1	Рабочая лошадь	30 *ц*	8 *ц*	—	—	—
2	Молодая нерабочая лошадь	20 „	5 „	—	—	—
3	Корова	20 „	—	5 *ц*	6 *ц*	12 *ц*
4	Молодняк	6 „	—	2 „	4 „	—
5	Овца	3 „	—	—	1 „	—
6	Свинья	—	—	5 „	—	20 „

Составить смету, сколько потребуется кормов для колхоза, который имеет:

рабочих лошадей	120
молодых нерабочих лошадей	48
коров взрослых	235
молодняка	168

Составить смету, сколько потребуется кормов для мелкого скота, если в колхозе имеется:

овец	540
свиней	65 и т. д.

Использование справочников, счетов, смет на уроке, самостоятельное составление их на местном материале, собирание данных для справочников даёт возможность сблизить преподавание арифметики с жизнью, сделав его живым и интересным, и приучит учащихся правильно оценивать жизненные явления.

Опыт работы в этом направлении в целом ряде школ дал весьма положительные результаты. Учащиеся (особенно III и IV классов) с большим интересом и настойчивостью собирали различные данные в газетах, в книгах; беседовали с родителями о нормах выработки на заводе, о зарплате, о стоимости тех или иных материалов, материй, продуктов, об успехах нашего социалистического строительства.

Немало хлопот доставляли дети и учителю, спрашивая его о самых разнообразных вещах: с какой скоростью двигаются поезда, автомобили, летают самолёты; сколько они расходуют горючего; сколько можно увезти груза на подводе, на грузовике, в товарном вагоне и т. д.

Ответить сразу на эти вопросы было иногда трудно, но работа эта пробуждала интересы детей, приучала их сознательнее оценивать действительность, и математика из учебного предмета в глазах учеников делалась важным, необходимым орудием в жизни.

Это повышало интерес, задачи и вычисления становились осмысленными, повышалась ответственность за точность и правильность результатов при вычислениях.

11. ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В практике школы очень редко производится проверка правильности полученного ответа. Между тем проверка очень часто обнаруживает ошибку, допущенную или в ходе решения задачи, или в вычислениях. Наконец, проверка способствует более глубокому пониманию и содержания задачи и метода её решения, развивает в учащихся критическое отношение к своей работе, повышает сознательность.

Нередко учащиеся, решая, например, задачу на нахождение чисел по их сумме и разности, вместо того чтобы вычесть (или прибавить) излишек и потом уже делить остаток пополам, сразу всю сумму делят на две равные части, а потом к полученному частному прибавляют излишек. Например, задача: «Стол и кресло стоят 310 руб., стол дороже кресла на 60 руб. Сколько стоит стол и кресло в отдельности?» — решается так:

310 руб.:2 = 155 руб. (стоит кресло).

155 руб. + 60 руб. = 215 руб. (стоит стол).

Если бы учащиеся были приучены производить проверку правильности полученных результатов, то ошибка была бы сразу обнаружена. В условии сказано, что стул и кресло стоят вместе 310 руб., а если взять полученные ответы, то получится 155 руб. + 215 руб. = 370 руб. вместо 310 руб.

Часто встречаются ошибки и в задачах на нахождение чисел по их сумме и кратному отношению.

Например, задачу: «В двух кусках было 72 *м* сукна. Во втором больше, чем в первом в 3 раза. Сколько метров сукна было в каждом куске?» — решают так:

72 *м*:3 = 24 *м* (длина первого куска).

72 *м* — 24 *м* = 48 *м* (длина второго куска).

Если бы была проведена проверка полученных ответов, то ошибка сейчас же была бы обнаружена, хотя в сумме полученные данные и дают 72 *м* (24 *м* + 48 *м* = 72 *м*), но если сравнить длину обоих кусков, то окажется, что второй кусок длиннее первого только в два раза (48 *м*:24 *м* = 2), а не в три раза, как это должно быть по условию задачи.

Ошибки встречаются у учащихся при решении самых разнообразных задач.

Приведём в качестве образца ещё проверку одной сложной задачи.

«Колхозники, муж и жена, заработали 520 трудодней. Муж получил 2504 *кг* пшеницы, а жена 1656 *кг*. Сколько трудодней имел муж и сколько жена?»

Решение задачи

$$1)\ \begin{array}{r} 2504\ \textit{кг} \\ +\,1656\ \text{"} \\ \hline 4160\ \textit{кг} \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r|l} 4160\ \textit{кг} & 520 \\ \cline{2-2} \underline{4160\ \text{"}} & 8\ \textit{кг} \end{array}$$

3) 2504 *кг*:8 *кг* = 313 (дней), 4) 1656 *кг*:8 *кг* = = 27 (дней).

Ответ: 313 трудодней имел муж, 27 трудодней имела жена.

Проверка: 313 дней + 27 дней = 340 дней.

Проверка показала, что всего муж и жена по полученному решению заработали 340 трудодней, между тем, в условии задачи сказано, что они заработали 520 трудодней. В чём же дело? Где ошибка?

Ошибка оказывается в четвёртом действии; деля 1656 на 8, ученик допустил ошибку: вместо 207, получил 27.

Следует 1656 *кг*:8 *кг* = 207 (дней), а получено 1656 *кг*:8 *кг* = 27 (дней).

Если ученик не приучен к проверке, ошибка могла бы остаться незамеченной.

Проверку правильности решения задачи лучше всего производить устно, прибегая к письменной проверке лишь в случае получения больших чисел.

12. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Самостоятельная работа по математике имеет чрезвычайно большое значение как *для прочности усвоения математических знаний*, так и *для развития математического мышления учащихся.* Только в самостоятельной работе учащийся *получает истинное понимание математической теории и приучается применять её* к разрешению тех или иных задач учебного и прикладного (практического) характера.

При проведении контрольных работ после изучения того или иного раздела программы или в конце четверти учебного года, во время переводных, а потом выпускных испытаний — учащийся должен *совершенно самостоятельно* разобраться в задании и ответственно разрешить те вопросы, которые будут ему предложены учителем в целях проверки, насколько прочно и сознательно усвоены им те или иные математические знания.

Для учащихся старших классов средней школы способность самостоятельно работать имеет решающее значение.

Наконец, в самой жизни человек только в тех случаях будет полноценным участником социалистического строительства, если в состоянии будет проявить творчество и инициативу, сумеет самостоятельно пополнять свои знания и полноценно применять их в своей практической деятельности.

Отсюда огромное значение имеет такая постановка учебной работы в школе, которая способствовала бы развитию инициативы и творчества у учащихся, умению самостоятельно работать, пополнять свои знания и развивать поставленные жизнью задачи.

Какое же место занимает самостоятельная работа по математике в школе?

Чаще всего самостоятельной работе уделяется очень слабое внимание, что является одной из причин плохого выполнения учащимися проверочных работ, которые почти всегда выполняются значительно хуже, чем работы, которые проводятся учащимися под руководством учителя в классе.

К выполнению самостоятельной работы учащихся следует приучать постепенно и систематически, начиная с I класса. Само собой разумеется, что для самостоятельной работы следует давать учащимся такой материал, который предварительно толково разъяснён учителем.

Место самостоятельной работы в процессе решения тех или иных задач подчёркивалось неоднократно в предшествующих главах в связи с конкретными задачами.

Здесь следует ещё остановиться на выделении различных стадий самостоятельной работы учащихся; следует показать, как от работ, где требуется сравнительно небольшая доля самостоятельности, постепенно следует переходить к работам, требующим всё большей и большей самостоятельности.

В целом ряде школ проводилась следующая система в приучении учащихся к самостоятельной работе.

1. Учащиеся в классе или дома самостоятельно записывали в свои тетради решение задачи, которая предварительно была разобрана и решена в классе с записью на классной доске (но не была записана в тетрадях).

В этом случае от учащихся не требуется большой самостоятельности: задача решена, объяснена, записана. Ученику остаётся только воспроизвести то, что было сделано в классе при его участии.

Бывают случаи, что и такую работу учащиеся не в состоянии выполнить безошибочно. В этом случае учителю следует проанализировать свою работу: правильно ли он строит свою работу, понимают ли учащиеся его объяснения, принимают ли участие в работе все учащиеся в классе, нет ли поспешности в объяснениях, усвоен ли предшествующий материал, нет ли излишней поспешности в работе.

2. Второй стадией самостоятельной работы учащихся является решение задачи, когда разобрано условие и составлен план его решения.

Само же решение на доске не записывается, не производится оно и устно, а учащиеся выполняют его самостоятельно или в классе, или дома.

3. Третьей стадией является самостоятельное составление учащимися и плана решения задачи и само решение задачи. С учителем в классе производится только разбор задачи, условие которой в начале читается учителем, а затем читается самими учащимися по сборнику задач.

4. Наконец, четвёртой стадией самостоятельной работы является самостоятельное решение задачи по номеру, указанному из сборника задач, или по условию задачи, написанному учителем на классной доске.

Постепенное нарастание трудностей, преодоление их по частям делают работу для учащихся посильной. Результативность работы даёт им удовлетворение. Постепенно развивается вкус к самостоятельному преодолению трудностей, желание выполнить работу самому без помощи учителя или товарища.

Совершенно отпадает характерное для многих школ списывание. Даже к помощи учителя дети стараются обращаться лишь в крайнем случае.

«Подождите, я подумаю, может быть, сам сделаю»,— нередко приходилось слышать учителю даже от сравнительно слабых учащихся, когда учитель спрашивал, нет ли затруднений, не нужна ли помощь.

Постепенно от работы полусамостоятельной, когда учитель даёт предварительные указания, оказывает в нужных случаях помощь в процессе работы, ученик переходит к совершенно самостоятельной работе.

Наблюдения за учащимися во время занятий показали, что это даёт им огромное удовлетворение.

Удельный вес самостоятельной работы по решению задач, как и при изучении других разделов программы, должен постепенно возрастать.

В практике школы им. Горького это выразилось такими данными:

Классы	Решено в классе	Решено самостоятельно дома
I	83%	17%
II	73 „	27 „
III	62 „	38 „
IV	47 „	53 „

В то время как в I классе самостоятельно решённые задачи составляли около $^1/_6$ всего числа решённых задач, в IV классе они составляли больше половины.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *В. С. Капустина* Техн. редактор *М. Д. Петрова*

А00349. Подписано к печати 15/III 1950 г. Печатных листов 9½
Учётно-изд. л. 7,13 Тираж 100 тыс. экз. Зак. 1276
Цена без переплёта 2 р. 20 к.

Первая Образцовая типография им. А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.