С. И. ШОХОР-ТРОЦКИЙ

МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией
В. И. СИНАКЕВИЧА

ИЗДАНИЕ 5-е, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД

Цена 4 руб. переплет 75 коп.

Отв. редактор *В. Синакевич.*
Техн. редактор *О. Семенова-Тянь-Шанская.*
Корректоры *Н. Носилов* и *В. Острогский*

Книга сдана в набор 26/VIII 1935 г. Подписана к печати 17/XI 1935 г.
У-74. Учпедгиз 6878/л. Ленгорлит № 30935. Заказ № 2943.

Формат бумаги 62×94 см. Тираж 15 000 экз.
Изд. листов 21 1/2. Бум. листов 10 3/4 (160.280 зн. в 1 бум. листе). Авт. листов 28,73.

Бумага Окуловской ф-ки.

2-я типография „Печатный Двор" треста „Полиграфкнига". Ленинград. Гатчинская, 26.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

Настоящая книга С. И. Шохор-Троцкого является в *основном* переизданием его „Методики арифметики для учителей средних учебных заведений“, изданной в 1916 г. После этого автором была подготовлена к печати, но оставалась в рукописи, методика арифметики, объединявшая „Методику арифметики для учителей начальных школ“ и „Методику арифметики для учителей средних учебных заведений“. Первая часть этой рукописи в значительно сокращенном виде была издана уже посмертным изданием в 1924 г. под редакцией Ив. Н. Кавуна под названием: „Методика начального курса математики“.

Вторая часть рукописи не печаталась, но в некоторой степени использована в настоящей книге, главным образом во 2-й ее половине.

Некоторые вопросы вовсе исключены, например, задачи на учет векселей, смешение, значительно сокращены вопросы, касающиеся преобразований составных именованных чисел и т. п.

Во всех задачах старые русские меры заменены метрическими. Некоторые устаревшие по содержанию задачи исключены или заменены.

Трудно, конечно, ожидать, чтобы книга по методике, написанная 20 лет назад, *вполне* соответствовала современным программам по арифметике, в особенности программе какого-нибудь определенного класса. Тем не менее можно сказать, что материал данной книги соответствует V классу современной средней школы. Некоторые же главы „Повторительного отдела“ могут быть отнесены к 4-му году обучения.

В своих книгах по методике арифметики и во многих других своих работах С. И. Шохор-Троцкий высказывался против современных ему официальных программ и самого характера курса арифметики и выражал различного рода пожелания относительно их реформы. Многие из его пожеланий осуществились уже только после революции. Сюда относятся, например: 1) лабораторность преподавания; 2) вклинение геометрического и геодезического материала в арифметику; 3) введение буквенных выражений; 4) изъятие очень сложных, нежизненных задач; 5) отказ от всякого рода „правил“ для решения арифметических задач (например, „правило“ процентов, „цепное правило“, „правило смешения“) и т. п.

С другой стороны, с некоторыми установками автора нельзя согласиться. Так, например, автор считает, что решение сложных задач чисто арифметическими приемами не имеет ни практического ни образовательного значения. Он, наоборот, рекомендует решать такие задачи путем составления уравнений (см. гл. VIII). С этой *особенностью* методики Шохор-Троцкого нельзя согласиться, так как чисто арифметические способы решения *более* способствуют математическому развитию учащихся.

В заключение привожу характеристику С. И. Шохор-Троцкого как методиста, данную Ив. Н. Кавуном в предисловии к „Методике начального курса математики".

„Главное значение трудов С. И. Шохор-Троцкого заключается в той части их, которая касается обучения арифметике. При чтении их бросается в глаза одно, пожалуй, самое главное их качество, которое возвышает их над всем, что написано у нас по методике математики. Это — внимание к ребенку. Не техническая выучка была у него на первом плане, а воспитание. Поэтому он подходит к тому душевному фонду, которым обладает ребенок, чрезвычайно осторожно, бережно. Его методы обдуманы и рассчитаны на то, чтобы сберечь силы ребенка, пробудить в нем интерес и любознательность, поддержать самодеятельность и самостоятельность. В методах Шохор-Троцкого нет грубости, резкости, натиска, лаконичности. Он не распахивает пред учащимся дверь к истине настежь, а приоткрывает ее постепенно. Об одном и том же он говорит каждый раз несколько по-иному. Поэтому его сочинения иногда при поверхностном чтении производят невыгодное впечатление частыми повторениями и длиннотами. Но стоит вчитаться и вдуматься, чтобы оценить в них медлительную осторожность истинного педагога.

Шохор-Троцкий был, в отношении к старой школе вообще и к преподаванию математики в частности, в течение всей своей жизни радикальным реформатором. И те идеи, которые в настоящее время нами приняты в качестве совершенно очевидных предпосылок, ему приходилось обосновывать и оборонять.

В своих сочинениях он отстаивает, вернее сказать — настойчиво проводит, как он выражался, „методу целесообразных задач". Под этой методой он понимал построение курса на методически подобранных упражнениях, а не на объяснениях учителя и не на изучении текста учебника. Кроме того, он настаивает на необходимости наглядности, взаимной связи отделов математики и введения в обучение математике прикладных вопросов".

В. Синакевич.

ВВЕДЕНИЕ

РАЗДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КУРСА АРИФМЕТИКИ НА ОТДЕЛЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

§ 1. Необходимость повторительного отдела.

Полный курс практической арифметики, подлежащий усвоению в учебных заведениях, в которых проходится такой курс, естественным образом распадается на три отдела: повторительный, основной и дополнительный. Необходимость повторительного отдела доказывается тем соображением, что дети, приступающие к усвоению полного курса практической арифметики, большею частью не приведены к одному и тому же общему, притом достаточно высокому, уровню арифметических умений и познаний, который требуется от приступающих к этому усвоению. Они часто не только недостаточно владеют начальными арифметическими знаниями и навыками, но даже изустными вычислениями, основными арифметическими представлениями и т. п. Что же касается дополнительного отдела, то, конечно, объем его зависит не только от устройства данной школы, но и от состава класса этой школы и от арифметического развития учеников этого класса. В дополнительный отдел может входить все то, что относится до теоретических основ арифметики или до тех арифметических вычислений, которые прямого практического приложения в обыденной жизни не имеют. Сюда относятся, например: обоснование учения об общем наибольшем делителе, о наименьшем кратном числе и о периодических дробях, первоначальные понятия из алгебры, подробности метрической системы и т. п. [1]

Характер повторительного и основного отделов.

Повторительный и основной отделы, обнимающие собою всю практическую арифметику, должны отличаться и характером практическим. Главных отделов надо, как это выше замечено, различать три: 1) повторительный, в котором в известном, ниже разработанном, порядке как бы повторяется весь курс начальной арифметики; 2) основной, в который входит все остальное содержание арифметики, за вычетом того, что прямого отношения к практической арифметике не имеет, и 3) дополнительный, который достаточно охарактеризован выше.

Под начальной арифметикой в этой книге подразумевается арифметика приблизительно в том объеме, который практикуется в младших группах ФЗД и в начальной сельской школе. Повторительный курс арифметики

---

[1] После того, как метрическая система введена была в СССР, знакомить с ней учащихся необходимо, конечно, значительно раньше, и по программам НКП основные метрические меры входят уже в программу 1-го года обучения в начальной школе. Ввиду этого в настоящем издании „Методики“ „подробности метрической системы“ перенесены в „Повторительный отдел“. (*Прим. ред.*)

является как бы первым циклом арифметического знания, но в более систематической обработке, чем та, которая возможна в первые годы начальной школы и в первых классах школы средней.

§ 2. С чего не надо начинать повторения.

Вопрос о том, с чего начинать „повторение“ курса, принадлежит к числу важнейших для практического проведения курса арифметики в V классе средней школы. Не только от того, хорошо ли повторен первоначальный курс арифметики, но и от того, в каком порядке так называемое повторение приведено в классе в исполнение, зависят дальнейшие успехи учеников по предмету арифметики во всем последующем ходе обучения. Повторение это обыкновенно совершается по одному из планов: а) учитель может, увлекшись сравнительной стройностью курса, излагаемого в учебниках и руководствах по предмету арифметики, начать повторение прямо с введения, с определения того, что такое величина, число, единица, нумерация и т. д., и т. д., перейдя затем к определению того, что есть сложение, слагаемые, сумма, и к правилам о том, как сложение производится, и т. д., и т. д.; б) учитель может, предлагая ряд более или менее последовательно расположенных сложных арифметических и алгебраического характера задач, постараться на этом пути об уяснении себе и учащимся того, какие отделы арифметики наиболее нуждаются в повторении, и эти отделы повторить с помощью или без помощи учебника; в) он может предварительно наметить себе те отделы, которые по его прежним наблюдениям большею частью оказываются недостаточно хорошо усвоенными классом к началу учебного года. Но все эти способы повторения не всегда верно ведут к цели.

Повторение курса в той системе, которая предлагается в учебниках арифметики, предполагает прежде всего, что ученик с этой системой уже более или менее освоился, в то время как на самом деле, в подавляющем большинстве случаев, о ней в начальном курсе не дается ни малейшего представления. Кроме того, держась этого порядка повторения, учитель рискует обратить все повторение в упражнение, притом едва ли полезное, в исключительно словесном, опирающемся преимущественно на усилия памяти, выражении учениками тех или других арифметических учений. Этот способ повторения отличается отвлеченностью, для большинства учеников совершенно недоступной, и почти полной нецелесообразностью. Ученик в этом случае главное свое внимание будет обращать не на сущность дела, а на слова. Сверх того, подобное повторение, даже при самых благоприятных со стороны класса условиях, отнимает слишком много времени. — Второй способ проверки познаний учеников и подведения их под один уровень с помощью более или менее случайных сложных задач страдает другими недостатками. В нем, во-первых, все зависит от случайностей в подборе условий задач. Во-вторых, это — не повторение уже известного ученикам курса арифметики, а проверка умения их справляться с решением сложных арифметических задач, а в этом направлении подвести всех учеников под один общий уровень не представляется возможным в короткий срок. Наконец, в-третьих, подобрать такой ряд задач, на решении которых действительно можно было бы раскрыть все пробелы в познаниях каждого из учеников и эти пробелы восполнить, —

труд, далеко не посильный даже для опытного учителя. - Что касается третьего способа проверки познаний учеников и подведения их под один уровень, столь необходимый для дальнейших успешных классных занятий арифметикою, — способа, основанного почти исключительно на опыте учителя, то при применении этого способа никогда нельзя поручиться за то, что учитель натолкнется непременно на те же пробелы, которые он открывал ранее в прежних классах того же рода. Учитель, руководящийся при повторении курса только воспоминаниями о том, что дети обыкновенно производят то или иное действие не вполне сознательно или плохо разбираются в задачах того или другого типа, всегда рискует в каждом данном случае ошибиться. Эту ошибку он может поправить только впоследствии, заметив, что данный класс как-раз в производстве, например, действия деления обладает достаточным навыком, но зато совершенно не в состоянии разобраться в применении этого действия к превращению именованных чисел и т. д.

§ 3. Повторительный курс и его составные части.

Порядок повторения должен быть установлен следующий: раньше всего проверяется, умеют ли дети *производить* каждое из четырех действий, притом проверка идет вполне систематически; далее решаются сложные чисто-арифметические задачи [1], между прочим, и для того, чтобы классу дать посильную самостоятельную работу, разнообразящую те уроки, которые учитель должен будет посвятить носящим иногда теоретический характер отделам повторительного курса. Когда ученики достаточно подготовлены к решению соответствующих самостоятельных упражнений, учитель переходит к изменениям суммы, разности, произведения, частного и отношения в зависимости от изменения чисел, данных для производства того или иного действия. Затем, повторяются особенности, представляющиеся при действиях над составными именованными числами, относящиеся исключительно к расположению *вычислений* при производстве этих действий и при преобразованиях чисел этого рода. Здесь же восполняются пробелы в геометрических познаниях учеников, которые почти неизбежны в курсе начальной арифметики. Когда весь сырой арифметический материал, не выходящий за пределы арифметики целых чисел, таким образом приведен в порядок, можно обратиться уже к более отвлеченному материалу, обыкновенно находящему себе место в так называемых „введениях“ к учебникам арифметики. Порядок работы при повторении этого отдела арифметики и арифметических определений, как и порядок всей работы, будут рассмотрены ниже. Но здесь уместно только вспомнить, что начинать обучение какому бы то ни было предмету всегда надо с материала наглядного, конкретного, только постепенно переходя к более отвлеченному.

Следующая часть повторительного отдела посвящена начальному учению о дробях, как известно, в начальном курсе арифметики часто занимающему не всегда подобающее ему место и поэтому представляющему собою тот материал, от которого переход к основному отделу является наиболее естественным.

---

[1] Автор называет „*сложными* чисто-арифметическими“ задачами такие, для решения которых требуется два или более действий. (*Прим. ред.*)

§ 4. Составные части основного и дополнительного отделов.

Основной отдел распадается на следующие семь главных подотделов: а) изменение дробей, б) признаки делимости чисел, в) наименьшее кратное чисел, г) действия над дробями, д) так называемые тройные правила с относящимися сюда задачами, е) десятичные дроби, ж) некоторые начальные понятия из алгебры в связи с решением задач алгебраического характера.

В дополнительный отдел отнесены: способ последовательного деления для отыскания общего наибольшего делителя двух целых чисел, учение об этом последнем, учение о периодических десятичных дробях и т. п.

§ 5. Метода обучения.

Известно, что никакие лекции учителя и никакие его уверения и непродуманные учеником соображения и определения не могут убедить ученика в том, что чуждо его представлению, и привить сколько-нибудь прочно уму учеников те или иные научные точки зрения. Определения дети точно так же, как и взрослые, понимают только тогда, когда все понятия, входящие в состав определения, им известны, когда им известны цель определения и все соприкасающиеся с данным определением понятия и представления. А это-то чаще всего отсутствует в уме малолетнего. Всякая попытка учителя к изложению и объяснению тех случаев, которые требуют того или иного рассуждения, разбиваются на практике часто в прах о неумение большинства учеников сосредоточить на-долго свое внимание и об их неспособность понять умом то, что не прошло чрез их сознание в виде целого ряда однородных представлений. Правило, навязанное ученикам как бы насильно, не взирая на отсутствие у них потребности в этом правиле, конечно, также мало полезно. — Результатом этих соображений является следующее основное положение: *для развития у учащихся ясных представлений*, а *впоследствии* — и *точных арифметических понятий, соответствующие части курса арифметики должны быть построены на задачах, и притом — на задачах целесообразных*. Это соприкасается с вопросом о том, как назвать ту *методу*, которая разрабатывается в настоящем руководстве. Арифметические задачи вообще должны, при разумном обучении, быть не целью, а только *средством* обучения арифметике. С их помощью должно *вырабатывать* и *развивать* верные представления и точные понятия: о четырех действиях, об их смысле и цели, о наилучших способах их производства и т. п. Поэтому в большинстве случаев задача или подходящий частный пример должны быть исходною точкою преподавания арифметики.

Вот что говорит известный французский педагог Жан Масе об этом предмете: „Развитие человечества повторяется в каждом малолетнем... Первый, кому пришлось сделать вычисление, начал не с отвлеченных правил, излагаемых в учебниках. Он, очевидно, прежде всего должен был не потеряться при решении практических вопросов и задач, над которыми он мог одержать победу только пустив в дело все средства своего ума, и он занимался этим искусством вовсе не ради самого искусства. Заставлять ребенка начинать с отвлеченного правила и затем предлагать ему задачи — это значит итти наперекор ходу развития человеческого ума... Истинная метода состоит в том, чтобы ставить ребенка в условия, при которых ум человеческий начал изобретать арифметику, и сделать его свидетелем этого изобретения". — Такова *метода целесообразных задач*, точку зрения которой учитель должен себе усвоить, если он желает прибегать к задачам чаще для *выработки* арифметических представлений и понятий, чем для их *применения* к тем случаям, когда именно эти представления почти неприменимы, потому что они еще не выработаны. Метода эта названа „методою задач" потому, что задачи, в обширном смысле этого слова, являются *исходною точкою* во всякий момент обучения. Она названа методою *целесообразных* задач потому, что для каждой ступени, для каждого учения, для преодоления каждой трудности она предлагает ученикам не какие ни попало задачи данного отдела и не задачи ради самого разрешения их, а задачи, сообразованные с исключительною целью данного методического момента, с целью именно этого момента данного урока арифметики.

§ 6. Формы обучения.

Средствами для прямого воздействия учителя на учеников при обучении арифметике служат: а) живое слово учителя и б) работа учеников под непосредственным руководством учителя. Эти средства неразрывно связаны с формою обучения, т. е. с тем, в каком виде со стороны представляется воздействие учителя на учеников. В старину всеми учителями практиковалось такое обучение, при котором учитель только задавал уроки по учебнику и на следующем уроке проверял, насколько хорошо ученик усвоил себе текст учебника на память. Учитель был только экзаминатором и ревизором. Ныне эта форма обучения признается самой нецелесообразной и эта форма обучения совершенно оставлена. Поэтому различают только две формы обучения: а) *излагательную* (лекционную, монологическую, акроаматическую), и б) *вопросо-ответную* (катехизическую, эратематическую). Держась излагательной формы обучения, учитель может только *читать* лекции, заставлять учеников *повторять* за ним только-что сказанное, *диктовать* ученикам то, что они, по его мнению, должны усвоить, *показывать*, как что делается, и требовать от учеников подражания и т. п. Во всяком случае, при излагательной форме обучения *предполагается*, что ученик внимателен и понятлив, что он интересуется предметом преподавания; *требуется* же от него, чтобы он прежде всего воспринял предлагаемое ему учителем, а потом уже это усвоил себе и восполнил самостоятельным трудом. Держась вопросо-ответной формы обучения, учитель может предлагать вопросы для определения того, знает ли ученик то, что он, по мнению учителя, должен знать из *прежних* уроков (экзаменационная форма), может предлагать вопросы для того, чтобы *упражнять* учеников в усвоенном ими ранее (репетиционная форма), может предлагать вопросы для того, чтобы путем вопросов возбудить в сознании учеников на почве того, что уже есть в этом сознании, *новые* представления, *новые* понятия, познания и умения (изобретающая, эвристическая форма) и т. п. При этом не только учитель может спрашивать ученика, но и ученик —

учителя, и учитель с классом представляют одно целое, как бы стремящееся, хотя и под руководством учителя, к одной и той же цели. Вопросо-ответная форма признается ныне самою целесообразною формой обучения малолетних, так как она допускает наилучшее применение основных начал всякого разумного обучения. В школе эта форма обучения особенно необходима, так как только она допускает действительное участие всего класса: держась ее, учитель не предполагает внимания класса, а старается это внимание возбудить и поддержать. Он не предполагает ни особенной понятливости, ни интереса со стороны учеников, каковую понятливость он старается развить, а интерес — создать вопросами. При этом самостоятельная работа учеников над новым материалом совершается чаще всего тут же, в классе, а не отлагается на внеурочное время.

Но, к сожалению, возможно увлечение катехизической формой обучения, доходящее иногда до крайностей. Все искусство учителя иногда сводят к умению предлагать вопросы, упраздняя методу обучения и заменяя ее одной вопросо-ответной формой обучения, которая без методических целей является, конечно, формою без содержания. Учителю не надо *всегда* катехизировать: увлечение исключительно этой формой ведет за собою и крайнюю искусственность уроков и чрезмерную, притом часто невознаградимую, потерю времени. В арифметике есть не только частности, но даже целые статьи, при усвоении которых катехизация может быть только повторительною. Такова, например, статья о нумерации вместе с учением об употреблении цифр. Никакие вопросы, как бы разумно они поставлены ни были, не могут довести учащегося ни до начертания цифр, ни до нумерации, ни до обозначения обыкновенных или десятичных дробей, ни до способа нахождения наименьшего кратного числа и т. д. Так же мало катехизация применима к выработке способов расположения *письменных* вычислений, вообще к выработке *условных приемов арифметического вычисления*, к усвоению детьми таких фактов, что километр содержит 1 000 метров, а дециметр — 10 сантиметров, что частное иногда называется отношением, что сотни, десятки и единицы составляют *класс* единиц и т. п. Вообще катехизации иногда придается слишком большое значение, и вопросы, предлагаемые как бы с целью наведения, на самом деле только загромождают урок совершенно бесполезными подробностями и отнимают у школы столь драгоценное время, почти не двигая учащихся вперед.

Необходимость чередования форм обучения.

Ранее, чем приступать к катехизации, учащий должен, пользуясь своим естественным чутьем и не обращая внимания ни на какие педагогические рецепты, уяснить самому себе естественнейший, самый прямой путь уяснения учащемуся интересующего его в данную минуту учения. *Учащий не должен думать*, что окольные пути мышления детям всегда *доступнее прямого*. Он должен избегать сколько-нибудь продолжительного (долее полуминуты) изложения (лекционной формы). Всегда надо учеников *привлекать* к работе как по прямому пути, так и по путям косвенным. Отступления от прямого пути дозволительны, особенно тогда, когда они воспитывают мысль и речь учащихся. Но и в этом случае на отступление от прямого пути должно смотреть именно как на отступление, не возводя его в правило и стараясь достигнуть результата иными способами, не увлекаясь разговором, развивающим речь учителя и иногда убивающим самодеятельность детей. *Обучение*, вообще, *не допускает рабского применения только одной формы обучения*. Формы обучения поэтому должны чередоваться, и следование только одной из них вредно отзывается не только на самом содержании урока, но также и на образовательном его значении. За вопросами учителя должны следовать ответы класса, поправки учеников и учителя, повторение поправленного учениками, указания учителя, новые повторения, новые вопросы и т. д., и т. д.

Воздействие на воображение. В связи с формою обучения находится и вопрос о том, надо ли при обучении арифметике только развивать способность суждения и вкус к правильному умозаключению или же также прибегать к помощи и к работе воображения, фантазии, живого представления учеников? Надо помнить, что без участия и работы воображения учеников разумное обучение невозможно. Поэтому учащиеся должны во всех вопросах арифметического содержания ***возможно чаще пользоваться*** этой драгоценной своей способностью.

§ 7. Живое слово учителя.

Главнейшим средством обучения является, конечно, живое слово учителя. В старину ему придавалось очень небольшое значение, и тогда почти весь труд по усвоению учениками какого-либо знания возлагался на этих последних. Учитель задавал по книге „урок“ и только проверял, на сколько хорошо этот урок выучен на-память, верно ли решена задача и т. п. Впоследствии учителя стали преувеличивать значение своих „лекций“, т. е. того, что они сами связно излагали в классе, и стали требовать, чтобы ученики, не пользуясь учебными книгами, то же самое на следующем уроке излагали „своими словами“. Но лишь недавно стали живому слову учителя придавать то значение, какое ему придавать на самом деле можно: оно только должно поощрять и будить внимание учеников и направлять их работу в должную сторону. Лекциям же, т. е. непрерывному, в течение более или менее продолжительного промежутка времени, *изложению* какого-либо учения учителем, уже не придается,— не только для обучения малолетних, но даже для преподавания чего-либо и взрослым слушателям, — того значения, которое изложению придавалось ранее. Известно, что малолетнего, а иногда и взрослого, продолжительное изложение учителя очень немногому научает — по причине слишком большой работы внимания, требующейся от слушателя для усвоения излагаемого. Даже для взрослого слушателя возможно из лекции усвоить себе только весьма поверхностное и недостоверное знание того, что он выслушал. Эти слабые стороны излагательной формы преподавания однакоже нисколько не умаляют силы живого слова учителя, если оно сказано во-время и надлежащим образом, и катехизическая форма обучения тоже не мешает учителю пользоваться своим живым словом. Живое слово учителя только должно итти рука об руку с работою учеников. Разные приемы каждой из двух главнейших форм обучения должны чередоваться, и только в этом случае цели обучения могут быть достигнуты.

§ 8. Требования обеих форм обучения.

Из основных требований вопросо-ответной формы обучения учитель всякого предмета вообще и арифметики в частности должен всегда помнить следующие: а) вопрос должен отличаться краткостью, ясностью, целесообразностью, содержательностью и определенностью; б) с вопросами школьный учитель должен обращаться ко всему классу и затем уже из желающих отвечать на вопрос выбирать одного ученика, долженствующего отвечать; в) при этом ученики, не пожелавшие отвечать, отнюдь не должны быть забываемы учителем и оставляемы в покое, а, напротив, должны быть привлекаемы к дружной совместной классной работе; г) поучительным для учеников должен быть сделан как правильный, так и отчасти лишь правильный, а равно и вовсе неправильный ответ; д) отсутствие всякого ответа должно служить для учителя только поводом для самоисправления, для самоизучения и для лучшего изучения класса. Из основных требований, которые могут быть предъявляемы к *изложению* учителя, главнейшие сводятся: а) к простоте и содержательности изложения и б) к краткости: учитель должен стремиться к тому, чтобы его изложение длилось каждый раз не долее одной минуты, и во всяком случае меньше того количества времени, в течение которого малолетние могут быть деятельно-внимательны.

§ 9. Самостоятельные работы учеников.

Кроме живого слова учителя, средствами (не пособиями!) обучения арифметике служат: а) самостоятельные работы учеников в классе и б) задавание ученикам уроков на-дом. В начальной (особенно — сельской) школе задавание уроков на дом может, вследствие домашних условий учеников, быть практикуемо лишь в самой незначительной степени и то лишь с учениками старшего отделения, которые уже хорошо ознакомились с требованиями школы. Но увлекаться задаванием уроков на дом не следует также учителю низших классов среднего учебного заведения. Гораздо больше значение самостоятельных *классных* работ учеников: они являются большим подспорьем при обучении арифметике, если они строго предопределены и согласованы с методою обучения. Класс, которому предложена работа, должен прежде всего знать, как ему эту работу выполнить. Без этого ученики не только не научатся тому, чему их эта работа должна научить, но и приобретут себе много вредных привычек. Поэтому, прежде чем предоставить учеников самостоятельным занятиям, учитель должен убедиться в том, знают ли ученики, чего от них требуют, и научить их должному выполнению заданной работы.

§ 10. Порядок работы в классе.

Держась методы целесообразных задач и смешанной, однако же преимущественно катехизической, формы обучения, учитель должен соблюдать следующий порядок усвоения любого учения арифметики:

1) сначала должно ученикам предложить вполне целесообразные задачи, если нужно, то на наглядном пособии, наиболее подходящем для данной ступени, и работу для рук и глаз учеников над этими задачами; 2) затем — задачи из обыденной жизни и работу *воображения* учеников над этими

задачами, 3) далее — отвлеченные задачи (если в них есть надобность!) и работу для *суждения* учеников над этими задачами; 4) потом логический вывод из всей работы (если таковой есть) со стороны учеников, с поправками учеников и учителя, и вывод учителя; наконец, 5) должно закрепить вывод в представлении и разумении учеников и предложить ученикам упражнения в *словесной* формулировке добытых ими результатов работы. Только с учениками старших классов можно вообще опускать задачи на наглядных пособиях, если только в помощи этих последних нет прямой надобности.

Так называемая лабораторная метода обучения математике. В связи с тем, что указано в первом пункте этого параграфа (относительно работы учеников над наглядными пособиями) находится вопрос о так называемой лабораторной методе обучения математике вообще и арифметике в частности. Метода эта сводится к следующему: а) из простейших материалов и с помощью простейших инструментов ученики сами изготовляют те наглядные пособия, которые нужны и целесообразны на данной ступени обучения; б) они изготовляют чертежи и рисунки, иллюстрирующие данный вопрос, и модели единиц меры (длины, поверхностей, объемов и веса), которые поддаются изготовлению; в) они, пользуясь приемами ручного труда, сближают вопросы учебного предмета с жизнью, производят измерения, взвешивания и приучаются смотреть на ежедневные явления в мире величин и чисел с точки зрения математической.

Право так называемой лабораторной методы обучения математике на внимание вытекает из основных требований педагогической психологии, [1] сводящихся к необходимости: а) самодеятельности учащихся; б) производительной работы рук для умственного развития учащихся; в) конкретности учебного материала; г) ясных и верных представлений для возможности образования в уме учащихся точных понятий; д) постоянной связи между учением и жизнью и жизни с учением, и е) волевых импульсов в душевной жизни человека.

§ 11. Подготовка учителя к урокам.

Учитель должен перед каждым уроком отдать себе полный отчет в том, что он намерен делать с классом сам и что предоставить его самостоятельным упражнениям. Сообразно с этим, он должен к уроку подготовиться, не рассчитывая на то, что его всегда из затруднений выручат вдохновение и опыт.

Если он это сделает, на что потребуется вовсе не много времени, то, конечно, дело пойдет лучше, чем при отсутствии подготовки к уроку, и он не будет иметь оснований для угрызений совести по поводу малоуспешности своих занятий с учениками. В противном случае, т. е., если учитель готовиться к своим урокам почему-либо совсем не станет, ему часто будет неясна цель работы и упражнений, и поэтому легко может оказаться, что и он и учащиеся не только очень устанут от этой непланомерной работы, но даже прямо не достигнут должных результатов.

---

[1] О важности работы рук для умственного развития человека см. „Экспериментальную дидактику" В. А. Лая (под редакцией А. П. Нечаева), стр. 1—40.

§ 12. Дух обучения.

Но самое главное условие успеха занятий по предмету арифметики состоит в том, чтобы во все моменты обучения арифметике, на всех его ступенях, т. е. при обучении изустным и письменным вычислениям, при решении задач под руководством учителя и при самостоятельном выполнении письменных работ, при изучении текста учебника и при подготовке к этому изучению, учащийся был воспитываем в духе уважения и истинной любви к правде, в духе уважения к здравому смыслу, к сознательной работе и к доброй воле человека в преодолении препятствий на пути к знанию. Его должно воспитывать в духе уважения к истинному знанию, к искреннему и бескорыстному стремлению приобрести и применять его и к стремлению сохранить знание на всю жизнь. Без воспитания в детях *этого уважения* преподавание предметов, не соприкасающихся прямо с воспитанием, ограничивается лишь малоценною, с точки зрения истинных требований разумного воспитания, выучкою, дрессировкою и муштровкой детей в тех или иных особенных направлениях. А эта выучка далеко не всегда заслуживает сочувствия, являясь иногда лишь следствием недоразумения или временного увлечения. Школа должна стремиться к более несомненным, высоким, вечным, идеальным целям, которые недостижимы без воспитания детей в намеченном выше направлении. Такое воспитание может учителю удаться лишь в том случае, если он будет соблюдать истинные требования разумного обучения арифметике, требования: а) самодеятельности учащихся; б) конкретности, наглядности приемов обучения; в) простоты учебного материала; г) целесообразности упражнений учащихся в усвоенном ими и д) надлежащего духа обучения.

§ 13. Общее правило относительно употребления наглядных пособий.

Кроме того правила относительно употребления наглядных пособий при преподавании арифметики, по которому к каждому из них следует прибегать только в тех случаях, когда именно оно наиболее целесообразно достигает намеченной цели, надо соблюдать еще одно: *посредством наглядных пособий должно, в виду самой цели обучения арифметике, выяснять преимущественно действия над числами и способы их производства, а не результаты этих действий*. Благодаря наглядным пособиям и действиям, на самом деле производимым над ними, ученик должен получить представление *о действиях над величинами и числами*, о самом *смысле* действия, *о способе* его производства, *об основаниях*, по которым что-нибудь делается так, а не иначе, и т. п., а не о том только, что в результате получится такое-то число.

§ 14. Взаимное переплетение различных отделов.

Одним из важных принципов современной методики математики является возможность и целесообразность переплетения различных отделов математики или так называемые „вклинения“ материала одного отдела в материал другого. В педагогической литературе это переплетение известно под именем „сцепления“ (Verzahnung), устанавливаемого между различными отделами, а также „фузионизма“ в некоторых случаях. Так, например, при делении целых чисел уместно ознакомление с дробью, с делением конечной прямой линии пополам и на несколько одинаковых частей (хотя бы учащиеся не занимались геометрией). При перемножении дробей уместно нахождение площади прямоугольника, которого основание и высота выражены дробными числами. При нахождении отношения одной величины к другой или одного числа к другому можно обратиться к измерению одной конечной прямой другою. При нахождении общего наибольшего делителя можно воспользоваться нахождением общей меры двух конечных прямых линий по Евклидову способу. При решении задачи алгебраического характера составление уравнения часто вносит в задачу значительную ясность и конкретность и т. п.

§ 15. Главные условия дружной работы в классе.

Главные условия дружной работы в классе сводятся к следующим требованиям чисто-дидактического характера: 1) когда учитель что-либо пишет на классной доске (вычисление, формулу, условия задачи и т. п.), ученики должны то же самое заносить в свои классные (не домашние) тетради; 2) они должны, когда учитель вычисляет вслух (а вычислять у доски и учитель и ученики должны непременно вслух), следить за его вычислениями и, следя за его работой, заносить в тетради все, что он пишет, не опережая его и не отставая от него; 3) так же они должны себя вести, когда кто-либо из учащихся пишет на доске и только в случае ошибки пишущего на доске заявлять об этом немедленно поднятием руки, а если учитель не замечает поднятой руки, то заявлять об этом вслух; 4) если учитель почему-либо не желает, чтобы они за ним или за товарищем записывали в тетрадях то, что пишется на доске, то учитель о том предупреждает; 5) у каждого учащегося должна быть классная тетрадь и две домашних, из которых одна отдается учителю для проверки, а другая служит для следующей домашней работы; 6) как в классной, так и в домашних тетрадях должны быть отмечены — день, число месяца, месяц и год; 7) диктовать правило, определение или рассуждение того или иного содержания дозволительно только в самых крайних случаях, и то если в принятом учебнике нет того, что интересует учителя в данный момент обучения; 8) то, что ученики должны записать словами, словами же должно быть четко написано на доске, и записи учащихся должны быть тщательно проверены, а возможные описки или ошибки учителем предугаданы и предварительно устранены. [1]

---

[1] Относительно последнего пункта должно отметить, что, не соблюдая этого требования классной работы, учитель рискует встретить в тетради учащихся запись „в не прямой“ вместо „вне прямой“, или запись „разделится“ вместо „не разделится“ и т. п., не говоря уже об ошибках орфографических и в пунктуации.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ ОТДЕЛ

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ ОТВЛЕЧЕННЫМИ ЧИСЛАМИ.

§ 1. Цель повторительного отдела.

Цель повторительного отдела троякая: 1) привести в должную систему все арифметические представления, понятия, умения, познания и полезные логические навыки, вынесенные учениками из курса начальной арифметики; 2) привести всех учеников, для возможности дальнейших их успехов в арифметике, к одному, притом значительно более высокому, по сравнению с начальным курсом арифметики, уровню арифметического разумения, и 3) поспособствовать не только более полному уразумению учениками известных учений начальной арифметики, но и приобретению ими должного навыка в более или менее связном и определительном изложении этих, хотя и известных им, но иногда довольно трудно поддающихся точной и наиболее понятной формулировке, учений. Для малолетнего уметь что-нибудь делать и понимать, почему это так делается, далеко не одно и то же. Понимать, почему что-либо так, а не иначе, делается, и сказать, как это делается и почему это так делается — это опять вещи различные. Умение говорить и высказывать даже самые обычные свои мысли находится не только в зависимости от личных особенностей учащегося, но и от большего или меньшего навыка в этом деле, т. е. в деле употребления своей речи. Далее, сказать что-либо учителю наизусть и при этом отдать себе самому полный отчет в сказанном — это для многих учеников тоже вещи разные. Бывает так, что ученик сам себе отдает отчет в совершаемом им, но рассказать, что он делает, он почему-либо не в состоянии. В этом случае описание совершающегося во внутреннем мире учащегося подавляется содержанием переживаемого. В другом случае ученик в состоянии связно и, повидимому, вполне толково ответить на вопрос учителя, но сам себе, тем не менее, не отдает полного отчета в том, что он говорит. Опытные учителя знают, что не вполне сознательно, хотя с внешней стороны вполне удовлетворительно, иногда отвечают даже ученики прилежные. Они стараются ответить как-раз то, что нужно и как-раз теми словами, которые наиболее отвечают требованиям учителя. Но ценность такого ответа иногда весьма незначительна.

Отличие методического повторения от повторения по учебнику.

Повторительный отдел наиболее целесообразно начинать не с отвлеченностей, а с самого конкретного материала. Таковым являются способы производства действий. Важно проверить, умеют ли дети верно и быстро производить четыре действия, а если умеют, то насколько сознательно, и насколько ученики понимают удобства, выгоды и приемы того или иного способа производства действия. Прежде чем убедиться в том, знают ли дети, что такое отвлеченное или именованное число, или как числа обозначаются, что называется сложением, суммою, прежде чем убедиться в том, умеют ли дети формулировать каждое из встречающихся в арифметике определений и правил производства действий, гораздо лучше убедиться в том, умеют ли дети то или другое действие *производить*, и проверить, насколько *сознательно* они их производят. В учебниках арифметики, для большего удобства изложения и для удовлетворения некоторым логическим требованиям, обыкновенно раньше всего в так называемых введениях даются определения различных арифметических и даже математических понятий (к числу последних принадлежат, например, понятия о величине, о числе, об измерении). Затем уже даются в каждой статье о том или другом действии сначала определения действия, далее определения чисел, данных для действия, и результатов их, и только в конце-концов излагаются правила производства того или другого действия. Иначе должно поставить дело не только в курсе начальной арифметики, но и при повторении этого курса учащимися практической арифметики в полном ее объеме. В уме учеников, приступающих к систематическому курсу арифметики, уже имеются налицо все поименованные выше представления и понятия. Но начинать повторение курса арифметики с соответствующих этим представлениям научных понятий по меньшей мере нецелесообразно, как в том убеждает и практика. Для малолетних, даже при повторении, менее всего занимательно начинать это повторение с отвлеченностей. К тому же не у всех учеников упорядочен сырой материал тех верных арифметических представлений, на почве которых, как на прочном основании, только и можно возвести здание отвлеченных арифметических определений и понятий. „Представления без соответствующих понятий слепы, — говорит великий философ Кант, — понятия без представлений бессодержательны“. Ученикам прежде всего надо обогатить свое сознание конкретным содержанием и упорядочить свои арифметические представления о четырех действиях, дабы от них уже обратиться к относящимся сюда отвлеченным понятиям, определениям и правилам.

§ 2. Первые вопросы учителя.

Не надо делать никаких вступительных введений. Не надо предупреждать о том, что „мы“ станем повторять арифметику. Учитель может приступить к изустным вычислениям. Он может начать с ряда вопросов, относящихся к сложению однозначных чисел: сколько будет 2 да 4, 7 да 5, 8 да 7 и т. д., а затем спросить, как дети складывают эти числа: изустно или письменно и почему именно изустно. При этом ученики вспомнят, и поймут, что они производят сложение таких чисел непременно изустно, и что производить его письменно, т. е. подписывать 4 под 2, подводить черту, ставить в надлежащем месте знак сложения и затем уже приступать к сложению, по меньшей мере, неразумно. Они поймут, что такое записывание и знак сложения ничего не изменяют в способе производства сложения. Они поймут, что в конце концов все-таки надо только *сказать* — „восемь да четыре — двенадцать“, что эти двенадцать, конечно, можно записать под горизонтальною чертою, но от этого производство действия не станет письменным (см. стр. 28). Можно начать и с нумерации, но начать с нумерации двухзначных чисел, перейти к нумерации чисел трехзначных и т. д. Но это менее занимательно, чем вопросы о производстве действий.

Точно так же дети должны уяснить себе, что они изустно прибавляют однозначное число ко всякому двухзначному, и что два двухзначных числа хотя и можно сложить письменно, но следует складывать изустно. Как ни бедны содержанием эти вопросы, но они все-таки приводят в систему и в порядок одно из необходимейших познаний и умений, лежащих в основе сложения, а тем самым — и в основе остальных арифметических действий. Они вносят спокойное и разумное, освещенное верною мыслью, отношение к одному из случаев производства сложения. Они создают в сознании учеников уверенность в том, что „все это“ очень легко и просто, разумно и удобно. Сначала идут скромные упражнения в сложении только двух однозначных чисел, затем — в сложении нескольких однозначных чисел, далее — в прибавлении однозначных чисел к двухзначным, в сложении круглых десятков и в сложении всяких двух двухзначных чисел. В этом последнем упражнении ученики должны убедиться, что есть такие вычисления, которые можно делать и изустно и письменно, но которые лучше производить изустно. Далее уже идет сложение трехзначных и нескольких двухзначных чисел.

Интересно, как справятся ученики, например, с такой задачей: Дано 4 столбца по 8 трехзначных или четырехзначных чисел в каждом столбце. Требуется найти суммы чисел, находящихся в одной и той же строке, затем суммы чисел, находящихся в одном столбце. По тому, справятся ли ученики с требованиями задачи или нет, учитель в состоянии судить и о мере их разумения и об их способности ко внимательному исполнению требований задачи. Такое же значение имеют и такие задачи: найти сумму чисел, занимающих третье и шестое место в первом столбце и места — пятое, седьмое и четвертое в последнем столбце и т. п.

Упражнения этого рода предназначены исключительно для введения учеников, уже обладающих познаниями из области первоначальной арифметики, — в интересы арифметики практической. Благодаря этим упражнениям, ученики свыкаются с мыслью, что они кое-что знают, что кое над чем надо еще подумать, что даже известное им наводит их на мысли, которые ранее им не приходили в голову, и т. д.

Когда это достигнуто, можно перейти к надлежащей формулировке „правила“ сложения двух однозначных, двухзначного с однозначным, двух двухзначных и к правилу сложения нескольких двухзначных и двух или более многозначных чисел. Но, кроме того, нужны и такие упражнения, которые служат к выяснению той услуги (чтобы не сказать — того благодеяния), которую письменное производство сложения многозначных чисел по „правилу“ оказывает вычисляющему. Для этого можно предложить следующие вопросы: что это значит „присчитать единицы одного числа к другому“, легко ли их присчитывать по одной, что такое сумма двух чисел, что такое сложение, слагаемые и какие свойства слагаемых? Цель этих вопросов — сначала навести учеников на мысли о том, что сложение не только заменяет счет и присчитывание, но избавляет от множества трудностей и ошибок, и что для успешного производства сложения необходимо знание наизусть так называемой таблицы сложения. Далее, эти вопросы приводят учеников к составлению сначала собственных, а затем — благодаря поправкам товарищей и учителя, — более точных определений.

Самостоятельных упражнений в так называемой „теории“, конечно, предложено быть не может, за исключением только одного, а именно — рекомендуемого некоторыми авторами по предмету методики арифметики — самостоятельного *письменного* изложения учениками определений и правил. Но это упражнение не может быть признано целесообразным, так как оно может послужить только к списыванию работ у товарищей или из книги или ко внушению ученикам представления о том, будто они в состоянии изложить письменно, притом более или менее удовлетворительно, то или иное учение арифметики. На самом же деле ученики в состоянии только либо написать выученное наизусть правило, либо же списать его из тетради ближайшего соседа или из книги, и то не вполне удовлетворительно. Насколько трудно действительно самостоятельное письменное изложение того или другого учения не только для учеников, но даже для взрослых, можно судить уже по одному тому, что вполне удовлетворительных учебников по тому или по иному предмету вовсе не много, и что большинство составителей учебников непременно пользуется при составлении своих книжек трудами других авторов. Мало того — можно самому отлично „знать“ арифметику и быть в состоянии преподавать этот предмет согласно с требованиями учебника, но при этом не быть в состоянии ни составить свой собственный, ни написать в этой области что-либо, отличающееся от изложенного в других учебниках. Требовать подобной работы невозможно не только от учеников, но даже и от учителей. В лучшем случае она приведет учеников к сознанию, что необходимо выучить наизусть, слово в слово, текст учебника. А тогда вся работа учеников сведется, в наилучшем случае, только к тому, что учитель определит, кто из учеников выучил текст учебника наизусть.

§ 3. Сложение.

Обратившись к теории сложения, надо достигнуть того, чтобы ученики постигли трудность, а иногда даже прямо невозможность отыскания суммы двух чисел счетом и присчитыванием. Трудность эта иногда, при слагаемых значительной величины, так велика, что делает подобный счет почти невозможным. Выяснение того, что подобный счет требует конкретных пособий (бобов, камешков и т. п.), взятых в количестве, равном числу единиц второго слагаемого (так как в противном случае мы легко забыли бы, сколько мы единиц уже присчитали), — не представляет трудностей. Дети должны не только понять, что есть вопросы, требующие сложения (это они поняли еще в первые года обучения), но также сообразить, что мало одного только знания — какое действие требуется совершить в данном случае, а нужно и умение производить это действие наиболее разумным образом, притом верно и более или менее быстро. Когда они это сознали как следует, то можно с ними добраться до того определения суммы двух чисел, по которому *суммою* двух чисел называется *то число, которое можно получить*, присчитав все единицы второго числа к первому числу. Потом можно добраться с ними, положив в основу выводов ряд целесообразных задач, до определения *действия* сложения, слагаемых, до значения, при сложении, таблицы сложения, до рассмотрения различных случаев применения этого действия и т. п.

Форма определений вообще. Учитель, однако, не вправе забывать следующих, крайне важных в методическом отношении, взглядов на определения: а) определений не должно давать в готовом виде: они должны быть выводимы самими учениками из примеров и с помощью товарищей и учителя; б) окончательную форму определению может придать учитель, который должен постараться о том, чтобы ученики к ней приблизились, благодаря классной работе, и чтобы окончательная форма определения была более или менее согласна с установленною в учебнике; в) определение не должно быть даваемо непременно в такой форме: „сложением называется действие“ и т. д. или „суммою называется число“ и т. д., „слагаемым называется число“ и т. д.; согласно современным требованиям логики, этим определениям можно придать и такую форму: „*сложить два числа*, или одно число с другим, значит найти“ и т. д., „если у нас есть два числа и требуется найти третье, в котором“ и т. д., „то это третье число называется суммою“ и т. п. Этот последний пункт важен с методической и логической точки зрения при обучении не только арифметике, но и другим предметам. Ныне можно считать неосновательным то требование некоторых учителей, по которому каждое определение должно иметь непременно такую форму: „именем существительным называется“, „умножением называется“, „млекопитающим называется животное, которое“ и т. п. Учитель, не признающий других форм определения, кроме сейчас приведенной, затрудняет усвоение их детьми, которым отглагольные имена существительные и вообще слишком книжные обороты речи чужды. Он жертвует сущностью дела ради достижения никому не нужной округленности и призрачной точности определений. По поводу этой особенности обычных определений известный философ, Герман Лотце, высказывает в своем сочинении по предмету логики следующие, весьма важные для всякого учителя, мысли: „Необразованный человек, к великому огорчению лиц, занимающихся логикой, определяет „болезнь“ следующим, известным своею неуклюжестью, образом: „болезнь — это если кто-нибудь нездоров“. Такое определение, конечно, нуждается в исправлении, но это исправление однакоже заключается вовсе не в том, чего столь упрямо требует логика... Мы имеем полное право определять болезнь, исходя и из имени прилагательного: *болен* человек в том случае, если отправления его организма неправильны и если эта неправильность переходит известные границы... Никакой пользы не приносят стремления к определению всяких понятий непременно с помощью имени существительного (*болезнью* называется и т. д.)... Обычная форма определений напротив страдает именно тем недостатком, что, благодаря ей, мы слишком сильно привыкаем принимать за нечто самостоятельное как-раз то, что представляет собою не что иное, как только некоторое качество или состояние какого-нибудь другого предмета, без которого это качество, состояние или свойство само по себе вовсе и не существует“.

Разнообразие задач, требующих сложения. Очень полезно, ранее окончательной отделки определения, показать ученикам, что цель действия сложения — одна и та же, как бы различны, с точки зрения своего смысла, ни были задачи: „У одного мальчика 13 коп., а у другого 29; сколько денег у обоих? — У третьего мальчика 13 коп., а у четвертого на 29 копеек больше. Сколько денег у четвертого мальчика?" Одинаковы ли последние две задачи? Конечно, не одинаковы. В первой требуется узнать, сколько денег у двух мальчиков вместе, во второй же мы отыскиваем не сколько у третьего и четвертого мальчиков денег вместе, а сколько денег у одного четвертого. В первой мы как бы присчитываем к копейкам первого копейки второго. Во второй же мы деньги третьего мальчика оставляем в покое, а рассуждаем так: у четвертого на 29 коп. больше, чем у третьего; это значит, что у него есть тоже (свои) 13 коп. да еще 29 коп. Между теми 13 коп., которые есть у третьего мальчика, и 13 коп., к которым мы прибавляем, при решении второй задачи, еще 29, есть та разница, что одни принадлежат одному, а другие — другому мальчику. Но в обоих случаях мы делаем сложение: в первом мы прибавляем как бы к деньгам первого мальчика деньги второго, во втором же к одной части денег второго прибавляем другую часть его же денег. Это полезно (но, конечно, по возможности просто) разъяснить учащимся. Или возьмем такие задачи: „Из амбара взято 45 центнеров ржи; осталось 27; сколько было ржи в этом амбаре?" — „В одном колхозе 445 *га* земли; при этом известно, что в нем на 160 *га* меньше, чем в другом колхозе. Сколько гектар земли во втором колхозе?" В первой совершено действие вычитания, а для решения задачи надо совершить сложение, во второй говорится „меньше", а надо отыскать сумму. Если ученик только выучил определение сложения, но не постиг сущности этого дела, то ничего не достигнуто. При усвоении определения сложения непременно надо достигнуть того, чтобы ученики постигли цель сложения, пользу и даже необходимость для сложения чисел знания таблицы сложения, пользу правила сложения, отличие изустного сложения от сложения на счетах и сложения письменного, значение арабских цифр при письменном производстве сложения и т. п.

Происхождение сложения.

Ученикам необходимо уяснить себе самое *происхождение сложения*, как некоего нового действия, *отличающегося* от присчитывания к одному числу всех единиц второго, к полученному результату — всех единиц третьего и т. п. Предположим, что нам требуется узнать, сколько получится всех единиц, если к числу 5 381 присоединить все единицы числа 3 485. Для разрешения этого вопроса мы могли бы поступить двояким образом: а) Взять 3 485 зерен, камешков или других каких-либо предметов (для чего потребовалось бы взять таких предметов, конечно, не более и не менее, а ровно 3 485 штук). Сложив эти предметы в одну кучку, мы должны из этой кучки сначала взять один предмет, отложить его в сторону, представить себе, что этот предмет присчитан к 5 381 предмету, которых хотя и нет на-лицо, но которые тем не менее могут существовать в нашем воображении, и произнести вслух: „пять тысяч триста восемьдесят два", взять еще один предмет из нашей кучки, положить туда же, куда мы положили первый предмет, и сказать: 5 383, взять еще один предмет, его равным образом отложить в сторону и сказать: 5 384, и поступать таким образом до тех пор, пока все предметы, взятые нами из первоначальной кучи, не будут исчерпаны, т. е. пока к числу 5 381 не будут присчитаны все единицы числа 3 485. Взятая нами куча в 3 485 предметов сослужила бы нам ту службу, что мы, присчитывая к данному числу только одну единицу, к полученному — еще одну, ко вновь полученному —

еще одну и т. д., могли бы быть вполне уверены, что нами не взято при этом ни одной лишней единицы, и что ни одна из подлежащих прибавлению единиц нами не забыта. Кроме того, благодаря этой куче предметов, нам не приходилось бы беспокоиться о том, сколько единиц второго числа нами уже присоединено и сколько нам еще остается присоединить. Ибо в продолжение всего промежутка времени, в течение которого мы занимались бы этим присчитыванием, пред нами лежали бы две кучи, в одной из которых находились бы уже присчитанные, а в другой — еще не присчитанные предметы. б) То же действие присчитывания мы могли бы совершить, записывая следующие два столбца чисел, из которых второй столбец заключает в себе числа, получаемые после последовательного присчитывания одной единицы к 5 381, к полученному числу — еще одной единицы, ко вновь полученному — еще одной единицы и т. д. А первый столбец представляет собою ряд чисел, из которых каждое выражает, сколько осталось еще присчитать к числу, стоящему рядом с ним направо, и из которых последнее число представляет собою одну единицу:

3 485	5 381
3 484	5 382
3 483	5 383
3 482	5 384
3 481	5 385
3 480	
. . . .	

Неудобства присчитывания. Из этих двух способов отыскания, по данным двум числам, их суммы, т. е. числа, содержащего в себе столько единиц, сколько их содержится в обоих данных числах вместе, каждый требует затраты весьма большого количества времени. Эта затрата гораздо больше, чем это может показаться непосвященному с первого взгляда. Второй способ имеет перед первым то преимущество, что не допускает такого количества обмолвок, какое неизбежно при изустном подсчете всех единиц. Кроме того, у него есть еще то преимущество, что, пользуясь им, мы во всякий момент можем прервать работу на некоторое время с тем, чтобы по прошествии этого времени снова возобновить ее. Зато второй способ допускает возможность описок. Но как тот, так и другой способы в высшей степени утомительны, и применение их к случаям, когда даны значительные слагаемые, прямо невозможно. Если считать, что при втором способе отыскания суммы двух чисел (в нашем примере) для записи двух чисел требуется только полминуты, то для выполнения всей работы потребуется слишком 28 часов.

Услуги памяти и таблица сложения. Если бы для человека не было возможно запомнить так называемую таблицу сложения и приобрести навык в быстром прибавлении любого однозначного числа к любому другому, то он, конечно, был бы принужден отыскивать сумму двух чисел одним из выше рассмотренных способов или же с помощью какой-либо вычислительной машины в роде, например, русских торговых счетов. Только благодаря памяти человек может запомнить, сколько: 2 да 1, 3 да 1 и т. д., 2 да 2, 3 да 2, 4 да 2 и т. д., т. е. может заучить, чему равна сумма любых двух однозначных чисел. Благодаря некоторому, хотя и довольно значительному, количеству упражнений, он может научиться быстрому нахождению суммы любого двухзначного числа с однозначными, хотя бы при этом получился еще один десяток сверх десятков первого слагаемого (27 да 8, 34 да 7 и т. д.). Поэтому он может заменить сравнительно медленное и утомительное присчитывание отдельных единиц второго слагаемого к первому тем, чрезвычайно быстро производимым, действием, которое называется сложением чисел. Это действие сводится к тому, что: а) сначала быстро находят (не с помощью присчитывания, а благодаря словесной памяти) суммы отдельных единиц первого разряда данных чисел, затем — всех отдельных единиц второго разряда этих чисел, далее — всех отдельных единиц третьего разряда и т. д., и б) от этих отдельных сумм мы в состоянии перейти к окончательной сумме, в которой каждое из слагаемых содержит в себе некоторое, совершенно определенное, непременно меньшее десяти, число единиц некоторого определенного разряда. В нашем примере, после того как будут присчитаны все единицы второго числа, т. е. к 3 485, к первому, т. е. к 5 381, а также от истинного сложения этих двух чисел, получится одно и то же новое число, которое равно 8 866.

Обычное определение сложения. В некоторых распространенных учебниках арифметики говорится, что сложением двух или нескольких чисел называется то действие, посредством которого узнают, сколько всего единиц содержится во всех данных числах. Но это лишь постольку справедливо, поскольку число всех единиц, содержащихся в данных числах, обыкновенно действительно отыскивается с помощью сложения. Это объяснение или, вернее, указание того смысла, в котором употребляется слово „сложение“, не может считаться *логически верным* определением этого действия. Это только фактически верное указание относительно того действия, которое обыкновенно называется сложением; настолько же верное, насколько верно то указание, что чернильницею обыкновенно называют сосуд, в который наливают чернила, а писчей бумагой — то, из чего шьют тетради и т. п. Но в этих указаниях нет истинного определения того или другого понятия, так как определение должно содержать в себе указание, с помощью которого можно было бы как-нибудь отличить один предмет от других. В определении должны быть выражены все видовые отличия данного понятия от понятий того же рода. То действие, которое мы называем сложением, представляет собою одно из *многих* действий, которые имеют целью отыскание суммы. Но отличительным признаком для сложения натуральных чисел является то средство, которое употребляется для достижения этой цели. Этим средством является таблица сложения, так как без нее сложение, как действие, отличное от присчитывания или от другого механического отыскания суммы, не существует. Пользоваться этим средством, т. е. таблицею сложения, можно при сложении только благодаря тому свойству суммы чисел, по которому величина суммы не зависит от того порядка, в каком совершается соединение единиц данных чисел в одно. Действительно, — при сложении мы, вместо данных двух слагаемых (8 367 и 3 459), из которых каждое представляет в свою очередь сумму некоторых слагаемых (8 367, например, равно сумме 8 тысяч, 3 сотен, 6 десятков и 7 единиц), берем другие слагаемые: 16 единиц, 11 десятков, 7 сотен и 11 тысяч и из них составляем новую сумму — 11 826.

Понятие о сумме. Принимая все это во внимание, а также в виду того важного педагогического начала, по которому ученики должны сознательно относиться к усваиваемому ими учебному материалу, они должны, если к тому представляется малейшая возможность, понимать цель своей работы и, так сказать, „присутствовать при изобретении арифметики“ (см. § 5 введения), а не только послушно и беспрекословно воспринимать предлагаемый им в учебном предмете готовый материал. В основу учения о сложении надо положить понятие о сумме двух чисел: суммою двух чисел называется именно то число, которое *можно* получить, присчитав все единицы второго числа к первому. Хотя сумму можно найти также и иначе, но для *понятия о сумме* это совершенно безразлично. Говоря иначе: для определения этого понятия совершенно безразлично, какой прием мы употребим в данном случае для отыскания суммы. В одном случае мы можем *присчитывать* единицы одного числа к другому по пальцам, например, для вычисления, сколько будет 5 да 3. В другом — мы можем составить сначала *десяток*, а потом уже к полученному десятку присоединить оставшиеся единицы второго числа, например, при отыскании суммы 8 да 7. В третьем — мы можем, благодаря тому, что *помним*, сколько будет 8 да 8, вычислить, что 8 да 7 меньше 16-ти на 1 единицу. В четвертом — мы для отыскания суммы таких чисел как 99 да 98 можем рассчитать, сколько будет 100 да 100, и из полученных таким образом двухсот единиц отнять один десяток, а к оставшемуся числу прибавить 7 единиц и т. д. Понятие о сумме во всех этих случаях не меняется. Сумма всегда остается тем числом, которое *можно* получить, присчитав все единицы одного числа к другому, и которого величина и смысл определяются именно присчитыванием, а не тем способом вычисления, который мы употребили в данном случае для его отыскания. Понятие же о сумме нескольких чисел можно построить уже на понятии о сумме двух из них, т. е. на понятии, ранее уже определенном и вполне известном.

Действие. Когда понятие о сумме двух и нескольких чисел таким образом установлено, необходимо приблизиться к изобретению сложения, как действия, только заменяющего собою присчитывание. Первым шагом в этом направлении должно быть уразумение того закона, по которому величина суммы данных чисел не зависит от порядка этих чисел, т. е. закона перестановительного, и того закона, по которому величина суммы не зависит от порядка сложения, т. е. закона сочетательного. Если бы эта величина изменялась с изменением порядка слагаемых или сложения, то мы не имели бы никакого права складывать хотя бы 27 с 35 таким образом, как мы это делаем (т. е., сложив сначала 20 и 30, затем 7 и 5 и, наконец, сложив 50 и 12). Равным образом мы не имели бы права делать сложение и иным способом (например, сложив 27 с 30, затем полученное — с 5) и вообще каким бы то ни было способом, отличающимся от последовательного присчитывания всех единиц числа 35 к 27 единицам первого числа. Вот почему, тотчас же после определения понятия о сумме, должно усвоить основные законы, которым подчиняется сумма двух или нескольких чисел. Но, с другой стороны, ни одного из этих законов еще недостаточно для возникновения действия сложения во всей его силе и удобоприменимости. Эти законы дают нам только *возможность* заменить одни слагаемые другими, почему-либо для нас более удобными. Но если бы память наша не была в состоянии навсегда сохранить те равенства, которые составляют содержание так называемой „таблицы сложения", и если бы мы, далее, не были в состоянии приобрести навык в *быстром* сложении любого числа с однозначным, то действие сложения, по меньшей мере, не могло бы совершаться так же быстро, верно и твердо, как мы его производим в настоящее время. Человек в данном случае, может быть, изобрел бы какую-нибудь машину для вычисления суммы (такие машины к тому же изобретены), но действия *сложения* в том смысле, который придается этому слову, не существовало бы. Вот почему тотчас же после того, как выяснены те законы, по которым величина суммы не зависит от порядка и от способа соединения слагаемых, должно выдвинуть на первый план то, *что* прежде всего необходимо знать наизусть и в *чем* надобно, для сложения, приобрести достаточный навык. Для сложения необходимо знать так называемую таблицу сложения, т. е. знать наизусть, как велика сумма любых двух однозначных чисел, и не затрудняться в быстром нахождении суммы любого числа с однозначным. Что таблицу сложения надо знать раньше, чем дано определение самого действия сложения, в том нет ничего предосудительного. Для того, чтобы знать таблицу сложения, вовсе нет никакой надобности знать точное определение „сложения двух или нескольких чисел". Человек, знающий, сколько будет 2 да 1, 2 да 2, 2 да 3 и т. д. вплоть до сумм 10 да 9, 10 да 10, уже знает таблицу сложения, хотя бы он и не был в состоянии определить, что называется сложением, и хотя бы он никогда в жизни не слыхал слова „сложение".

Таблицей сложения называется только совокупность целого ряда известных равенств, и знание таблицы сложения наизусть является только неизбежно-необходимым условием для производства арифметического сложения всяких чисел.

Определение сложения. Когда средство для более быстрого, чем присчитывание единиц, нахождения суммы чисел оценено, можно составить и самое определение сложения. Наиболее простою и наиболее соответствующею сущности дела формою определения сложения надо считать следующую: „Сложить какие бы то ни было целые числа значит отыскать сумму этих чисел, пользуясь только таблицею сложения".

§ 4. Сложение многочисленных слагаемых.

Полезно обратить внимание на наиболее целесообразный способ сложения чисел в случае, когда их более десяти, отличающийся от обычно практикуемого и излагаемого в учебниках способа сложения многочисленных слагаемых. Наилучший способ состоит в том, что сначала складывают только все отдельные единицы первого разряда, полученное записывают сполна в стороне, затем складывают все отдельные десятки и полученную сумму тоже надлежащим образом записывают под первой суммой, потом складывают все отдельные сотни и полученное число также надлежащим образом подписывают и т. д. до тех пор, пока не будут исчерпаны таким образом все разряды данных слагаемых. Тогда остается только сложить записанные после всего этого частные суммы. В ниже-приведенном примере сложение начато с единиц высшего разряда (что, конечно, все равно):

4 979	
2 749	
4 897	75 000 . . . сумма всех отдельных тысяч,
6 989	8 400 . . . » » » сотен;
7 698	880 . . . » » » десятков;
9 634	88 . . . » » » единиц;
8 964	
6 789	84 368 . . . окончательная сумма.
4 497	
9 489	
7 896	
9 787	

Кто несколько раз попробует сделать сложение подобным образом, тот при многочисленных слагаемых откажется в пользу этого способа от всех остальных. Этот способ производства сложения многочисленных слагаемых представляет следующие удобства: а) когда произведено сложение всех единиц одного разряда, можно прервать работу, не боясь, что ее придется начинать всю сначала; б) если у лица, вычисляющего искомую сумму, закралось сомнение в том, верно ли он вычислил сумму единиц какого-либо разряда, он может, не начиная всей работы сначала, проверить только верность сомнительного результата. Все те лица, которым приходится делать большие вычисления над многочисленными слагаемыми, должны предпочитать этот способ производства вычисления даже вычислению на счетах. Всякая ошибка легче разыскивается при этом способе вычисления, чем при вычислении на счетах или при том способе сложения, который сводится к нахождению сначала суммы нескольких слагаемых, затем — суммы других из числа остальных слагаемых и т. д., и наконец — к нахождению общей суммы.

§ 5. Поверка сложения.

Что касается так называемой поверки сложения, то нельзя не признать, что, как и всякая поверка, поверка сложения требует, чтобы было еще раз произведено то же или иное действие. Но при производстве действия во второй раз опять может вкрасться та же или иная ошибка. Поэтому ученикам не следует думать, что если при проверке действия получен удовлетворительный результат, то действие произведено верно. Можно утверждать только одно, а именно, что для поверки сложения можно произвести это действие еще раз в том же или ином порядке, и что если оба раза сложение произведено верно, то полученные суммы будут одинаковы. Но нельзя утверждать, что если в обоих случаях получилась *одна и та же сумма*, то сложение произведено верно. Можно только допустить некоторую *вероятность* того, что сложение, действительно, совершено верно, если оба раза получился одинаковый результат. Но насколько велика эта вероятность — сказать нельзя. Чаще всего производящий вычисление и сделавший какую-либо ошибку ту же ошибку повторяет и при вторичном производстве того же действия, — в особенности, если это действие произведено в том же порядке. В случае же, если оно произведено в другом порядке и получился результат, не согласный с прежним, то ошибка могла быть сделана именно во второй раз, а не в первый. Поэтому особенно полагаться на поверку действия не следует, и это ученики ясно понимают. При этом им можно, кроме того, внушить сознание, что действие следует по возможности производить прежде всего так, чтобы оно в проверке не нуждалось, т. е. со всей рачительностью и со всем тем вниманием, со всею тою сознательностью и аккуратностью в работе, которые являются существеннейшими условиями всякого правильного вычисления. Никакая „поверка" не гарантирует верности результата.

§ 6. Повторение вычитания.

Что касается повторения всего, относящегося до вычитания, то его можно начинать так же, как начинается повторение сложения, а именно с повторения вычитания однозначных чисел из однозначных. Далее могут пойти упражнения в вычитании однозначного числа из двухзначного и разные случаи вычитания двухзначного числа из двухзначного же. Цель этих упражнений — убедиться в том, что некоторые из поименованных только-что случаев вычитания необходимо делать изустно, а остальные делать письменно было бы прямо неразумно. Далее надо сопоставить: вычитание однозначного числа из трехзначного и вычитание двухзначного или трехзначного из трехзначного же. Из этого сопоставления ученики должны вынести убеждение в том, что вычитание последнего рода, а равно и вычитание многозначных чисел из многозначных же, вообще надобно делать письменно. Если бы при этом оказались какие-либо пробелы в познаниях всего класса или даже только некоторых учеников, относящиеся либо до производства действия, либо же до быстроты его и сознательности, то, конечно, итти далее было бы неблагоразумно. Дабы более освоившиеся с курсом ученики не скучали, надобно и их привлекать к работе над повторением и в особенности над поправками в классной, под руководством учителя, работы отставших. Путем таких упражнений и благодаря самостоятельным работам всех учеников в этом направлении, пробелы в умении учеников производить первые два действия над числами будут вполне и своевременно устранены. Сообразно с охарактеризованным повторением действия вычитания, должны быть составлены и самостоятельные работы. В этих работах изустные вычисления предшествуют письменным и требуют от учеников уразумения сущности дела, а не только следования правилам. Даже в примерах на письменное производство сложения и вычитания ученик должен разыскать те случаи, когда ему не для чего производить действия, следуя только правилу. Таковы, например, следующие задания:

$$\begin{array}{r} 5\,356 \\ +\,2\,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,654 \\ -\,2\,354 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11\,676 \\ +\,9\,999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35\,662 \\ -\,9\,999 \end{array} \quad \text{и т. п.}$$

Изустное и письменное вычисление. На этой ступени курса весьма уместны такие упражнения, которые дали бы возможность учащимся вполне уяснить себе, в чем разница между способами письменного и изустного вычисления сумм и разностей. Та же разница, впрочем, существует между арифметическим письменным и арифметическим изустным способами вычисления вообще. Автору этой книги довелось быть на одном уроке, где одна из учениц дала весьма интересную, хотя и детскую, характеристику разницы между изустным и письменным способами вычисления. Характеристика эта гласила приблизительно так: „когда мы вычисляем изустно, то мы все говорим да говорим, а потом сразу пишем, сколько получилось; а когда делаем письменное вычисление, то немножко поговорим, записываем одну цифру, потом опять немножко поговорим и опять записываем цифру и т. д.“ Учащиеся должны понять, что при изустном вычислении во всяком случае мы вычисляем весь результат, не останавливаясь на отдельных *цифрах* результата, а при письменном все дело сводится именно к последовательному отысканию именно этих цифр. Жюль Таннери в своей объемистой книге по арифметике смотрит на сложение многозначных чисел как на *задачу* следующего содержания: дано несколько чисел, записанных цифрами по десятичной системе счисления, а требуется написать их сумму по той же системе счисления [1]. Если смотреть на сложение многозначных слагаемых с этой точки зрения, то для характеристики письменного способа сложения надо было бы добавить, что при этом требуется каждую цифру суммы отыскивать отдельно с помощью таблицы сложения, притом начиная с единиц низшего разряда и постепенно переходя к единицам разрядов высших. При таком взгляде на дело введенный покойным А. И. Гольденбергом термин „полуписьменные вычисления“ оказывается излишним и нецелесообразным. При этом полуписьменным названо такое вычисление, при котором данные числа и их результаты записываются, а вычисления делаются изустно. Такие вычисления надо считать изустными. То обстоятельство, что данные числа и результаты записаны, не делают *вычисления* ни письменным, ни полуписьменным: *вычисление* производится при этом либо изустно, либо письменно. Запись данных чисел только помогает изустному вычислению, для письменного же она необходима.

Вычитание и его происхождение.

Есть взгляд на вычитание, по которому вычесть число значит *отнять* его от уменьшаемого и по которому это действие является действием самостоятельным. Он лишь постольку удобен для практики, поскольку он согласен со способом письменного производства этого действия над многозначными числами и поскольку взгляд этот дает возможность отличить действие вычитания от других арифметических действий. Но это согласие не идет далее самого общего указания на производство действия, — указания, логически недостаточного. Если мы на подобие того, как поступили в предыдущем параграфе, пожелаем исследовать самое происхождение этого действия, то мы придем к следующим выводам. Пусть требуется отнять, т. е. отделить, от 5 437-ми единиц 2 789 единиц, а потом *узнать, сколько осталось единиц после этого* (это последнее требование, конечно, крайне важно). Мы можем поступить следующим образом: а) Взявши 5 437 каких-нибудь предметов (зерен, камешков, палочек), — для этого придется долго-долго и аккуратно считать, пока

[1] Tannery, Leçons d'arithmétique théorique et pratique. — Таннери придает такое большое значение охарактеризованному выше взгляду на сложение, что считает себя обязанным в подстрочном примечании отметить следующее: „я обязан г. де Пеллие (Pellieux), профессору лицея Генриха IV, этой наиболее ясной формулировкой задачи“.

не насчитаем этого числа предметов, — и, отложив потом один из этих предметов в сторону, произнести слово „один“, взяв еще предмет, сказать слово „два“, взяв еще предмет, сказать слово „три“ и т. д., пока не доберемся до предмета, при отделении которого мы произнесли слова „две тысячи семьсот восемьдесят девять“. Тогда у нас получатся две кучки, из коих в одной, в отделенной, 2 789 предметов, а в другой — остальное. Когда это будет сделано, мы должны будем еще сосчитать, сколько предметов в этой последней кучке, и лишь тогда задача наша будет решена. б) Мы можем того же результата добиться и письменно, записывая в первый столбец то, что дано и что остается после вычитания единицы, а в другой — то, что уже вычтено; например, так:

5 437	—
5 436	1
5 435	2
5 434	3
5 433	4
5 432	5

В конце концов наступит момент, когда во втором столбце появится число 2 789, а в первом рядом с ним — число 2 648; это последнее число и есть число оставшихся единиц. Не надо думать, что для выполнения этой работы надобно знать обычный письменный способ производства действия. Даже в самых неудобных случаях, например, в случае, когда в остатке получилось 5 000 единиц, для вычитания одной единицы требуется не умение раздроблять единицу высшего разряда в единицы разряда низшего, а только основательное знание нумерации и счета. Ибо, если кто не знает, какое число предшествует (в ряде натуральных чисел) пяти тысячам, тот не знает счета и закона составления натуральных чисел. Можно, конечно, найти разность данных чисел и с помощью какого-либо вычислительного прибора, например, с помощью торговых счетов. Но вычисления с помощью вычислительных машин и приборов в счет не идут. Они с учениями *арифметики*, как с учениями об *изустном и письменном* вычислении сумм, разностей, произведений и частных, не должны быть смешиваемы.

Определение вычитания.

Как бы то ни было, из всего вышеизложенного видно, что не отсчитывание единиц, не собственно отнимание от данного числа некоторого числа его единиц имеют в виду, когда говорят о *вычитании*, как о некотором арифметическом *действии*. По крайней мере, не отнимание, в истинном значении этого слова, есть цель вычитания. Это только один из приемов его производства. В виду всех этих соображений, то определение вычитания, по которому вычесть значит отнять, по меньшей мере не исчерпывает понятия об этом действии, как таковом, ибо оно придумано именно для того, чтобы вопрос о числе, *остающемся* после отделения некоторого числа единиц от данного числа их, решался не с помощью отнимания, отделения единиц, а с помощью особенной таблицы равенств, которую можно назвать „таблицею вычитания“ или с помощью сложения („австрийский“ способ) [1]. Полезно предложить ученикам разнообразные упражнения на вычитание. При этом важна та точка зрения, что так

---

[1] Об „австрийском“ способе вычитания см., например, у И. Попова „Арифметика“. Учебник для средней школы, стр. 21—22 (изд. 1933 г.). Подробнее об этом способе и его методической разработке см. у С. И. Шохор-Троцкого „Методика начального курса математики“, ч. 1, стр. 144—146 (изд. 1924 г.) или у Е. С. Березанской „Методика арифметики“, стр. 39—41 (изд. 1934 г.). *(Прим. ред.)*

называемое уменьшаемое число всегда представляет собою только сумму двух чисел, из коих одно, называемое вычитаемым, известно, а другое неизвестно, и что отыскание этого неизвестного числа и представляет собою истинную цель вычитания. Но средством для достижения этой цели в арифметике должна служить только таблица вычитания или же сложения.

Сложение и вычитание как математические действия.

Сложение в математике, как известно, определяется для разных величин различно: для конечных прямых, для векторов, для сил, для натуральных чисел, для чисел, из которых одно равно нулю, для чисел, из которых одно положительное, а другое — отрицательное, для чисел отрицательных, дробных, комплексных, иррациональных. Каковы бы ни были величины или числа a, b и c, определение действия сложения должно быть так построено, чтобы оно было целесообразно и чтобы для него были справедливы законы:

перестановительный: $a+b=b+a$
и сочетательный: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Вычитание же для всех возможных случаев следует определять как действие обратное сложению, т. е. как действие, цель которого отыскание одного слагаемого по данной сумме его с другим, данным, слагаемым.

Но в арифметике *натуральных* чисел, в состав определений сложения и вычитания, должно входить и указание на *средство* выполнения действия, и одного указания цели того или иного действия недостаточно, ибо без указания средства, с помощью коего искомая сумма или разность может быть найдена, определение это страдает слишком большой общностью.

Совокупность определений.

Ход развития определений, относящихся до вычитания, приблизительно следующий: пусть даны два числа, из которых одно больше другого, например, 8 и 5; существует такое третье число, притом только одно такое третье число (3), которое надо прибавить к меньшему, чтобы получить бо̀льшее. Третье число, которое надо прибавить к меньшему из данных двух чисел для того, чтобы получить большее, называется *разностью* между бо̀льшим и меньшим числами. Необходимо знать так называемую *таблиц вычитания*, т. е. знать наизусть, как велики разности между любыми двумя однозначными числами, между десятком и любым однозначным числом, а также как велика разность между любым числом второго десятка и однозначным числом, если разность эта менее десяти. *Вычесть* одно число из другого значит отыскать их разность, пользуясь только таблицей вычитания. Бо̀льшее из данных чисел называется *уменьшаемым*, меньшее — *вычитаемым*, а разность иногда называется также *остатком*.

Если ученики не знают, что такое разность двух чисел, они не могут иметь истинного понятия о цели действия вычитания. Если же они только и знают, что именно называется разностью двух чисел, но еще не знают таблицы вычитания, то они знают только то, отыскание чего составляет цель действия, но еще не знают средства к достижению этой цели. Более того: если они знают, что такое разность, и даже знают таблицу вычитания, то они, даже будучи в состоянии производить это действие, все-таки еще точного понятия о действии не имеют. Это точное понятие сводится к тому, что вычесть одно число из другого значит отыскать их разность, пользуясь *только* таблицею вычитания или же сложением.

Приложения вычитания. Некоторого внимания заслуживают также соображения относительно приложений вычитания к случаям двоякого рода. Известно, что есть такие задачи, по самому смыслу которых требуется вычислить, сколько *останется*, если от данного числа единиц на самом деле надобно отделить некоторое число их. И в этом случае в результате получается остаток в полном смысле этого слова. Но бывают и такие случаи, когда дано не одно только число, от которого надо отделить *некоторое число его же единиц*, а два различных числа (у одного мальчика было 17 орехов, а у другого — 9 орехов), и требуется узнать, на сколько в одном из этих двух чисел больше единиц, чем в другом. Это вовсе не значит, что единицы второго числа (в нашем примере орехи 2-го мальчика) надо отнять, отделить от первого числа (от орехов 1-го мальчика). В этом случае надо вычислить следующее: в одном числе столько же единиц, сколько их во втором, но в первом, сверх того, есть еще некоторое число единиц (у первого мальчика тоже 9 орехов и еще некоторое количество их). Требуется же при этом узнать, сколько именно, сверх известного числа единиц, *равного* некоторому данному, содержится еще единиц в другом из данных чисел. Это приводит к тому, что действие вычитания прилагается к случаям двоякого рода: а) когда требуется отыскать число, которое останется, если от данного числа отделить (отнять, отбросить, отсчитать) некоторое число *его же* единиц: при этом получается *остаток*; и б) когда требуется узнать — на сколько единиц одно из данных чисел больше или меньше другого: при этом получается разность этих двух чисел. Но на уменьшаемое, тем не менее, всегда можно смотреть как на сумму двух чисел, из которых одно (вычитаемое) известно, а другое (разность или остаток) неизвестно. Различия в случаях обоего рода замалчивать не следует. Надобно довести учеников до полного уразумения того, что как в том случае, когда от числа требуется прямо отбросить некоторое число *его* единиц, так и в том, когда от числа требуется лишь отделить столько единиц, сколько их в *другом* данном числе, на уменьшаемое можно смотреть, как на сумму двух чисел, из которых одно известно, а другое требуется еще найти. Вычитание и его производство, при условии уразумения учениками вышеприведенных определений, стоят по отношению друг к другу в теснейшей связи. Меньше связь понятия о действии и о способе его производства при том определении, когда вычитание определяется как действие, посредством которого одно число „отнимают" от другого. Да и что это значит „отнять"?

§ 7. Повторение умножения.

Подобным же образом может пойти повторение умножения. Оно начинается с укрепления в сознании учеников того начала арифметики, по которому любое действие над двумя однозначными числами должно совершаться непременно изустно. Далее можно перейти к тому, что умножение двухзначного числа на однозначное тоже следует делать изустно, хотя, конечно, его в некоторых случаях можно делать и письменно. Надо убедить учащегося в том, что правила относительно того, как делать умножение однозначного числа на однозначное же, нет, и что правила для умножения двухзначного числа на однозначное устанавливать не следует. Он должен понять, что в некоторых случаях не для чего делать умножение двухзначного числа на однозначное непременно письменно, т. е. начиная с единиц низшего разряда, например: 16×4, 26×2, 29×5... и т. д. В некоторых же случаях можно делать вычисления и письменно, например, 6 раз 87, 8 раз 74 и т. д. Но и их можно производить изустно, Ученик не должен быть рабом правил, созданных для случаев, не поддающихся быстрому изустному вычислению.

Ученик не должен быть рабом правил, но правила должны быть в полном его распоряжении. Цель соответствующих упражнений и задач состоит в привитии ученикам навыка в самостоятельной работе над умножением однозначных и двухзначных чисел на однозначные числа. При этом должно обращать внимание и на такие вычисления, которые могут быть произведены так же, как их производят взрослые люди, делающие разные денежные расчеты, т. е. сообразно с особенностями данных чисел. Например: „1 *кг* сахара стоит 7 руб. 50 коп. Сколько надо заплатить за 6 *кг*?“ 6 *кг* по 7 руб. стоили бы 42 руб., да еще надо взять 6 раз по полтиннику — 3 руб. Всего 42 руб. + 3 руб. = 45 руб. и т. п.

Среди самостоятельных упражнений могут встречаться и случаи, когда один из сомножителей равен нулю. Значение их, конечно, второстепенно, если иметь в виду только арифметику: если *множимое* — нуль, то, конечно, ученики ничего в произведении, кроме нуля, писать не будут, и в этом случае ошибки с их стороны почти невозможны. Множителем же нуль в арифметике, строго говоря, никогда не бывает. Но тем не менее, хотя бы только для полноты и во избежание возможной со стороны ученика ошибки, следует ему привыкнуть к мысли, что если множитель — нуль, то произведение тоже равно нулю. Впоследствии, если дети будут учиться алгебре, случаи, когда множитель равен нулю, вполне возможны и почти неизбежны.

Вообще умножение многозначного числа со многими значащими цифрами на однозначное производят письменно. При этом представляется один вопрос, касающийся исключительно записи множимого, множителя и произведения. Если множитель подписан под множимое, если с левой стороны множителя поставлен знак умножения, а полученная запись подчеркнута, то, конечно, вопроса о том, как записывать произведение, быть не может. Но подписывать множитель непременно под множимое нет никакого разумного основания. Гораздо лучше, как это принято в других отраслях математики, записывать множитель рядом со множимым, отделив одну запись от другой знаком умножения и поставив после записи множителя знак равенства ($738 \times 6 = 4\,428$). Тогда вопрос о записи в этом случае сводится к тому, на каком расстоянии от знака равенства записать первую, низшего разряда, цифру произведения, ибо можно нечаянно записать ее или слишком близко от знака равенства (так что не хватит места для остальных двух или даже трех цифр произведения), или же слишком далеко (так что запись не будет достаточно красива). Если мы пишем на бумаге, разлинованной квадратиками, и каждая цифра, а также знак, занимает отдельный квадратик, то достаточно взглянуть на высшую цифру множимого. Если она от умножения на множитель даст двухзначное число, то надо взять для записи произведения одною цифрою больше, чем сколько цифр во множимом. Если же в нашем распоряжении доска или нелинованная бумага, то место, оставляемое для записи произведения, должно либо равняться тому месту, какое занимают все цифры множимого, либо же быть больше этого места на столько, сколько необходимо для того, чтобы можно было поставить еще одну (высшую) цифру произведения. Внимание со стороны ученика к величине места, оставляемого после знака равенства для записи произведения, окажет весьма значительную услугу не только внешнему изяществу записи, но и развитию большей сознательности в деле производства умножения на однозначное число. А в таком случае надо признать, что настаивать на обычной на уроках арифметики записи множителя под множимым нет оснований.

Умножение на 10.

Перейдя к умножению на 10, следует обратить внимание на одно обстоятельство. Знание только правила, благодаря которому мы быстро обозначаем произведение из любого числа на 10, недостаточно для учеников, повторяющих курс начальной арифметики. Необходимо, чтобы ученики уразумели, откуда взялось то правило, по которому для отыскания произведения любого числа на 10 достаточно переписать множимое и к этой записи присоединить с правой ее стороны один нуль. Обычный способ выяснения логического основания этого правила состоит в том, что от умножения единицы на 10 получается десяток, от умножения же десятка на 10 — сотня, а от умножения сотни на 10 — тысяча и т. д. Но это объяснение слишком отвлеченно и следует ему предпочитать иное, основанное на том, что умножение на 10 может быть производимо совершенно так же, как умножение на однозначное число. Дело в том, что произведение любого однозначного числа на 10 нам известно из таблицы умножения. Поэтому при умножении, например, 738 на 10 можно вычислять и так: десятью-восемь 80, нуль пишу, восемь в уме; десятью-три 30, да 8 — тридцать восемь, 8 пишу, три в уме; десятью-семь 70, да 3 — семьдесят три. В виду того, что цифру тысяч полезно отделить от цифры сотен промежутком, равным месту, занимаемому одною цифрою, то расчет места, необходимого для записи произведения многозначного числа на 10 или на однозначное число, усложняется тем, получаются ли от умножения единицы нового класса или же нет. Так, например, при умножении двухзначного числа на 10 не получится тысяч, и поэтому для записи произведения потребуется только место для трех цифр. При умножении же трехзначного числа на 10 потребуется место для четырех цифр и место для одного промежутка между цифрою тысяч и цифрою сотен, т. е. всего места потребуется для пяти цифр. При умножении четырехзначного числа на 10 получится пять цифр и один промежуток между цифрами тысяч и цифрою сотен. При умножении же шестизначного числа на 10 понадобится место для семи цифр и для двух промежутков, одного — между цифрою миллионов и цифрою сотен тысяч, и другого — между цифрою тысяч и цифрою сотен. Место, нужное для записи произведения многозначного числа на десять, ученик не только может верно рассчитывать, но и слегка наметить. Поставив точку на месте, например, миллионов, надо отступить от этой точки на некоторое расстояние для промежутка, отделить приблизительно, на-глаз, место для трех цифр класса тысяч, отступить опять для нового промежутка вправо, затем — отделить место для трех цифр класса единиц, и тогда только начинать умножение. Времени на это затрачивается, даже вначале, очень мало. Но такое поведение ученика при письменном производстве действия настолько упорядочивает эту работу, что жалеть о нескольких секундах затраченного таким образом времени решительно нет никакого основания.

Умножение чисел на 10, на 100, на 1 000 и т. д. лежит, как известно, в самой основе учения об умножении многозначных чисел на многозначные. А поэтому затрата некоторого количества времени на это умножение не только полезна, но даже прямо необходима с точки зрения методической. Она служит для лучшего внедрения в уме учеников сознания (которое впоследствии еще больше окрепнет), что умножение на одну единицу высшего разряда крайне важно. Надо при этом обратить внимание и на то, что при умножении какого угодно многозначного числа на 100, 1 000 и вообще на какую-либо единицу высшего разряда можно производство этого умножения основывать на том, что умножить на 100 можно и так: умножив множимое на 10, полученное произведение помножить опять на 10, а умножить на 1 000 можно, помножив данное число на 100, а полученное — на 10 и т. д. Здесь, а не при изучении или повторении нумерации, уместно разрешение учениками вопросов о том, сколько единиц в 376 десятках, в 174 сотнях или в 276 десятках тысяч и т. п.

Дабы не стеснять учеников правилами умножения многозначных чисел и рабским применением правил к частным случаям, следует ученикам показать и те случаи, когда умножение совершается с помощью изустного расчета. Например, пусть требуется 27 помножить на 30; известно, что 30 раз 30 — девятьсот, а 30 раз 3 — девяносто; стало быть, из девятисот надо вычесть 90, получится 810.

Учащиеся должны уяснить себе разные способы расположения записей при производстве умножения, а именно следующие:

а)	б)	в)	г)	и, наконец,
864	864	864	864	д) 864 × 347 299 808
× 347	× 347	× 347	× 347	
259200	6048	6048	2592	2592
34560	34560	3456	3456	3456
6048	259200	2592	6048	6048
299808	299808	299808	299808	

Если множитель подписан под записью множимого, то цифры обоих чисел ближе друг к другу, чем в случае, когда обе записи помещены в одну строку. Одни считают, что это обстоятельство говорит в пользу подписывания одной записи под другую. Но это — вопрос не разрешенный: что лучше. С точки зрения современной методики арифметики, на письменное производство умножения надо смотреть только как на некоторую задачу, подлежащую по возможности разрешению с помощью рассуждения и *краткой* записи в виде отдельных строчек. Поэтому следует предпочтение отдать записи, приведенной под буквою *д*. Главнейшие удобства этой записи сводятся к следующему: 1) к надлежащему употреблению знака равенства; 2) к возможности, при объяснении способа письменного производства действия, исходить из цифр множителя, решающих вопрос о том, единицы какого разряда обозначаются первым, вторым и вообще каждым из частных произведений; 3) к возможности записывания множимого поближе к левому краю доски или бумаги, что, при обычном способе производства умножения, начинающемся умножением на низший разряд множителя, неудобно, так как при этом может не хватить места для записи остальных частных произведений, и 4) к большему согласию самого производства умножения с прямым смыслом этого действия. Действительно, когда нам говорят, что 864 надо помножить на 347, то гораздо естественнее считать, что сначала надо взять множимое слагаемым 300 раз, затем то же множимое — еще 40 раз и, наконец, его же — еще 7 раз, а не наоборот: сначала взять его слагаемым 7 раз, потом — 40 раз и, наконец, — 300 раз.

То соображение, будто при предлагаемом выше расположении вычислений труднее справиться со случаем, когда среди цифр множителя есть нули, конечно, не выдерживает критики. Приписать ли нуль к только-что записанному произведению или же начать следующую запись с нуля с правой стороны — это, конечно, одинаково легко и одинаково трудно. Действительно, ежели требуется помножить 8 367 на 2 006, то с точки зрения логической безразлично, как записать:

8367 × 2006 =	или так:	8367 × 2 006 =
16734000		50202
50202		16734000

или, наконец, (но только при аккуратной записи!) так:

```
8367 × 2006 =
 16734
    50202
```

Когда письменные обозначения множимого и множителя оканчиваются нулями, то нулей зачеркивать не надо, и письменное расположение вычислений может иметь такой вид:

```
173000 × 2400 = 415 200 000
     346
      69200000
```

Еще один пункт расположения записи письменного производства умножения многозначного числа на многозначное заслуживает внимания. Множимое и множитель, во избежание недостаточного внешнего изящества записи, следует записывать без промежутков между цифрами различных классов. Только в окончательном результате, для большей вразумительности записи окончательного произведения, можно эти промежутки принять во внимание.

Самостоятельные работы учеников, относящиеся до этой ступени повторения, должны, по возможности, оттенить значение умножения на 10, на 100 и вообще на единицу высшего разряда, а также зависимость производства умножения многозначных чисел на многозначные же от умножения на однозначное число единиц разных разрядов. Так, например, умножению 76 на 30 предшествует умножение 76 на 10. Равным образом умножению 876 на однозначное число десятков предшествует умножение 876 на 10 и т. д., а умножению 729 на 647 и другим умножениям того же типа предшествуют умножения на 600, на 40 и на 7 в отдельности. Кроме того, нужны также упражнения, повидимому, требующие производства нескольких действий, но могущие быть выполненными чуть не изустно. Например, если требуется вычислить, сколько получится по совершении следующих действий: $827 \times 3 + 827 \times 2 + 827 \times 5$, то отнюдь не следует, без всякого внимания к составу этой суммы, на самом деле производить все эти действия. Надо только воспользоваться своим зрением и сообразить, что в этом случае мы имеем дело со сложением десяти одинаковых слагаемых, из коих каждое равняется 827. Надо детей приучать к применению непосредственного здравого смысла в вычислении и к вниманию, с которым надо относиться к числам, данным для производства действия. Это, конечно, входит в число требований, которым должен удовлетворять весь повторительный отдел арифметики.

Когда производство действия умножения разработано во всех частностях, можно обратиться и к повторению правил умножения и к терминологии этого действия. Само собою разумеется, при выработке определений надо помнить, что действия умножения натуральных чисел не существовало бы, если бы в нашем распоряжении не было так называемой таблицы умножения, и если бы мы не были в состоянии производить письменно сложение многозначных чисел.

Определения. Что касается ряда определений и законов, относящихся к действию умножения, то здесь наблюдается то же самое несоответствие между обычными определениями умножения и истинною сущностью этого действия Дело в том, что умножение не есть сложение, а только заменяет собою это последнее действие, притом лишь в тех особенных случаях, когда слагаемые равны между собою. Замена эта возможна лишь благодаря услугам так называемой таблицы умножения, особенно полезной тогда, когда слагаемых более или менее значительное количество.

Что значит взять число слагаемым? *Взять* какое-нибудь данное число *слагаемым* семь раз значит найти такую сумму, в которой каждое слагаемое равно данному числу, и таких слагаемых взято семь, или же: взять 27 слагаемым пять раз значит сделать сложение: $27 + 27 + 27 + 27 + 27$ и т. п.

Настоятельной надобности в непременно общем определении значения слов „взять число слагаемым несколько раз“ при этом нет. Общее определение к тому же слишком громоздко, а нового представления к имеющимся в уме учеников оно не добавляет.

Произведение. *Произведением* одного числа на другое называется сумма, которую можно получить, взяв первое из них слагаемым столько раз, сколько единиц во втором.

Таблица умножения. Необходимо знать так называемую *таблицу умножения*, т. е. знать на память, вернее — наизусть, как велико произведение любого числа первого десятка на число, которое больше единицы, но не больше десяти.

Что значит умножить одно число на другое? *Умножить* одно число на другое значит отыскать произведение первого числа на второе, пользуясь только таблицею умножения. Первое число (слагаемое) называется *множимым*, а второе (число слагаемых) — *множителем*.

Здесь же должно выяснить, как понимать слово „умножение“, когда множитель равен единице и когда он равен нулю.

Свойство произведения. Далее должно выяснить, что произведение величины своей не изменяет, если множимое принять за множитель, а множитель — за множимое. Так, например, $7 \times 8 = 8 \times 7$; точно так же $8 \times 235 = 235 \times 8$ и т. п. Множимое и множитель, как известно, только поэтому и называются *сомножителями*, а произведение одного числа на другое называют произведением обоих чисел.

Действие умножения в математике. Аналогичное тому, что относится к сложению, как *математическому* действию, справедливо относительно действия умножения, как математического действия. (Ср. стр. 30 этой книги.)

Термин „умножить", как таковой, должен быть для каждого отдельного случая, отличающегося от случая перемножения двух натуральных чисел, точно установлен. Он должен быть установлен даже для случая, когда множителем является единица, особенно же — когда множителем являются нуль, дробь, когда сомножители или один из них — числа положительные или отрицательные, когда сомножителями являются конечные прямые, векторы, когда множимым является скорость равномерного движения, а множителем — промежуток времени, когда множимое представляет собою площадь, а множитель — длину и т. п. Все эти определения должны быть целесообразно построены, т. е. так, чтобы для всех случаев были справедливы законы:[1]

$$\text{переместительный: } a \cdot b = b \cdot a,$$
$$\text{сочетательный: } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
$$\text{и распределительный: } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Множитель единица или нуль. Отдельные определения умножения на нуль и на единицу необходимы потому, что эти случаи не могут быть подведены под определение умножения на натуральное число, отличающееся от единицы. Определения эти, как известно, гласят так: если множитель равен нулю, то произведение равно нулю, а если множитель равен одной единице, то произведение равно множимому. Только при таких определениях сохраняют свою справедливость основные законы умножения. Что $0 \cdot 7 = 0$ и что $1 \cdot 7 = 7$ вытекает из того, что $0 \cdot 7$ обозначает сумму семи слагаемых, из которых каждое равно нулю, а $1 \cdot 7$ равно сумме семи слагаемых, из которых каждое равно одной единице. Но из определения умножения на натуральное число, отличающееся от единицы и из последних двух формул, нельзя *путем рассуждений вывести*, какое значение надо придавать выражениям: „семь помножить на нуль" и „семь помножить на одну единицу". Это можно установить только отдельными определениями, построенными так, чтобы основные законы умножения сохранили свою силу.

Что значит перемножить несколько чисел? Надо условиться также относительно того, что *произведением нескольких чисел* называется число, которое получится, если произведение первых двух чисел помножить на третье, полученное произведение — на четвертое число и т. д. до последнего включительно. *Перемножить* несколько чисел значит отыскать их произведение. Произведение нескольких чисел

[1] Законы эти известны также под соответственными именами: переместительный (коммутативный), сочетательный (ассоциативный) и распределительный (дистрибутивный).

по величине своей не зависит от порядка их и от порядка их перемножения. Числа, произведение которых требуется найти, тоже носят общее название сомножителей.

Происхождение умножения. Если бы мы пожелали на подобие того, как это сделано относительно сложения и вычитания, уяснить себе происхождение умножения, то для этого могли бы взять хотя бы следующий пример. Пусть требуется найти произведение 864×537. Если бы мы вздумали пользоваться только сложением, нам следовало бы записать в один столбец 537 слагаемых, из которых каждое равно 864. На производство этого сложения потребовалось бы около трех часов, при самом умеренном и прямо невыполнимом на практике расчете. Действие умножения и имеет целью избавить нас при вычислении сумм равных между собою слагаемых от непосредственного сложения этих слагаемых. Такое сложение в случае многозначного множимого и многозначного множителя может оказаться практически прямо невыполнимым по той причине, что оно потребовало бы неимоверного количества труда и времени. В основу определений должно положить установление смысла слов „взять слагаемым некоторое число раз“ и, далее, определить произведение, как ту сумму, которую *можно* получить, взяв первое из данных чисел слагаемым столько раз, сколько в другом единиц. Но это определение произведения вовсе не предрешает вопроса о том, как именно *надобно* находить эту сумму и каким еще действием, кроме сложения, произведение двух чисел может быть найдено. Равным образом это понятие о произведении еще не содержит в себе и понятия об умножении и потому от этого понятия совершенно не зависит. Но для того, чтобы умножение одного натурального числа на другое было возможно, т. е. для того, чтобы мы могли находить сумму равных между собою слагаемых не с помощью одного лишь сложения, надо обладать некоторым особенным средством для отыскания произведений значительного числа более или менее значительных слагаемых. Отыскание произведения — цель умножения. Средством же для достижения этой цели, без помощи непосредственного сложения данных равных между собою слагаемых, является так называемая „таблица умножения“.

Услуги памяти и таблицы умножения. Если бы память человека была так слаба, что не была бы в состоянии, после некоторого упражнения, сохранить навсегда в своей власти таблицу умножения чисел первого десятка и если бы она, память, кроме того, не была в состоянии снабдить человека навыком (достаточным для того) в прибавлении однозначного числа к двухзначному, то умножение, как некоторое самостоятельное действие, отличающееся от сложения, никогда не было бы изобретено. Вопрос о сумме некоторого числа одинаковых слагаемых потребовал бы для своего разрешения непременно либо применения непосредственного сложения, либо же употребления некоторой особенной арифметической машины (такие машины, впрочем, есть), и действие отыскания произведения совершалось бы, вследствие этого, совсем не так, как мы его совершаем ныне.

Вот почему, тотчас же после определения произведения двух чисел, должны итти указания на необходимость знания так называемой таблицы умножения, а затем уже — определение самого умножения; далее — условия относительно записи множимого, множителя, произведения и т. д.

Некоторого внимания заслуживает определение произведения нескольких чисел и, конечно, также тот закон, по которому величина произведения не зависит ни от порядка сомножителей, ни от порядка производства перемножений.

Услуги арабских цифр и десятичной системы. Должно, кроме того, добавить, что письменное производство умножения в случае, если числа обозначены не с помощью арабских цифр по десятичной системе, а с помощью цифр другого рода, например, римских или церковно-славянских, гораздо затруднительнее, чем производство действия над числами, обозначенными с помощью арабских цифр. Трудность эта зависит не только от того, что мы к арабским цифрам привыкли, а также и от того, что получение произведения многозначного числа на однозначное и произведения многозначного числа, обозначенного арабскими цифрами, на 10, 100 и т. д., значительно легче, чем в случае, ежели числа обозначены римскими или другими, не арабскими, цифрами. Это последнее обстоятельство, поэтому, может и должно внушить нам особенное удивление пред размерами того великого благодеяния, которое человеку оказали арабские цифры и десятичная система счисления. Перед этим изобретением преклонялся, как известно, такой великий математик, как Лаплас. [1]

Поверка. Относительно поверки умножения справедливо то же, что выше сказано о поверке сложения и вычитания: безусловно достоверной поверки не существует и для умножения. В случае, если по вторичном умножении получился тот же результат, что и прежде, мы можем только с некоторою вероятностью утверждать, что действие произведено верно. Ручательством же за верность полученного раз результата могут служить только привычка к правильному вычислению, совершаемому с полным разумением и серьезностью, и некоторая внутренняя уверенность вычисляющего в том, что он не имеет права, не должен допускать, а потому и не допустил, ошибок в вычислении.

Перемена порядка сомножителей. К закону, по которому произведение двух сомножителей не зависит от порядка их, приходится возвращаться много раз в течение всего курса. Но при усвоении детьми точного понятия об умножении, особенного внимания заслуживает этот закон также потому, что здесь представляется полная возможность твердо установить и укрепить ту привычку учеников, ими раньше уже, конечно, приобретенную, благодаря которой они должны множитель всегда считать по существу его отвлеченным числом. Если бы нам, например, дано было равенство $5 \times 8 = 8 \times 5$, то, сделав в первой части этого равенства множимое именованным числом, мы должны будем утверждать, что данное нам равенство свидетельствует о существовании

---

[1] Лаплас (умер в 1827 г.) говорит о значении этого изобретения в следующих восторженных выражениях: „Мысль обозначения чисел помощью десяти знаков, основанного на безусловном и местном значении цифр, так проста, что только по этой причине мы забываем, — какого она достойна удивления. Но именно эта простота и та легкость, которою ей обязано арифметическое вычисление, делают арифметическую систему индусов одним из полезнейших изобретений. Насколько трудно было изобретение этой системы, — можно судить по тому, что ее не могли изобрести ни Архимед, ни Аполлоний Пергейский, принадлежащие к числу величайших людей древности". Все значение этого великого изобретения постигается только при производстве действий.

бесконечного ряда других равенств: 5 руб. $\times$ 8 все равно, что 8 руб. $\times$ 5; 5 дней $\times$ 8 все равно, что 8 дней $\times$ 5 и т. д.[1]

Учение о независимости величины арифметического произведения от порядка сомножителей надо ставить не на почву доказательства, а на почву наглядных представлений, и разрабатывать его с помощью воздействия на воображение учеников. Пусть требуется 8 руб. взять 5 раз слагаемым, т. е. 8 руб. умножить на 5; если вместо того, чтобы сложить 8 р. + 8 р. + 8 р. + 8 р. + 8 р. от каждого слагаемого возьмем 1 руб. и сложим эти рубли, то получим 1 р. + 1 р. + 1 р. + 1 р. + 1 р., т. е. 5 р. Осталось же у нас 7 р. + 7 р. + 7 р. + 7 р. + 7 р.

Возьмем от этих слагаемых опять по одному рублю из каждого и сложим эти слагаемые, опять получим: 1 р. + 1 р. + 1 р. + 1 р. + 1 р. т. е. 5 р. и т. д. Остальное ясно. Еще лучше, если множимое или множитель взяты более значительные, и если таким образом вся работа еще больше опирается на работу воображения.

§ 8. Логические трудности деления.

Из всех четырех арифметических действий деление представляет собою, как известно, наибольшие трудности как логические, так и технические. Из логических трудностей вспомним следующие. Пока мы имеем дело с такими случаями, когда делимое равно произведению делителя на некоторое число, до тех пор самая цель деления легко может быть определена. В случае же, если делимое не представляет собою такого произведения, является уже необходимость другого определения деления. Действительно, сказать, что разделить 15 на 4 значит найти третье число, которое надо помножить на 4 или на которое надо помножить 4, чтобы получить 15, — не логично (пока мы говорим о натуральных числах, а ведь только такие числа мы имеем в виду), так как такого третьего натурального числа нет.[2] Вторая логическая трудность сводится к дво-

[1] Смысл умножения именованного числа на число того же или иного наименования может быть установлен только впоследствии и требует особенного внимания в геометрии и механике, о чем речь впереди.

[2] Чистым недоразумением является стремление учебников арифметики и некоторых учителей этого предмета к составлению, даже в области арифметики целых чисел, столь общих определений, которые были бы пригодны для всех возможных случаев, какие могут встретиться в арифметике. Не говоря уже о том, что для учеников такие общие определения бесполезны, они и не всегда возможны. При одном и том же делителе (например, при делителе, равном трем единицам) деление имеет разный смысл, смотря по тому, будет ли делимое равно 15, 37, 2 или нулю. В первом случае требуется найти число, которое надо помножить на 3 или на которое надо помножить 3, чтобы получить 15; в последнем случае частное уже не представляет собою числа в истинном смысле этого слова. Во втором—из целого ряда чисел, произведение которых на 3 единицы менее 37, мы выбираем число 12, произведение которого на 3 менее 37, но которое обладает тем свойством, что ежели его увеличить на одну единицу, мы получим число 13, произведение которого на 3 более 37. Наконец, в третьем случае (когда делимое менее делителя) частное полагают равным нулю, считая, что $0 \cdot 3$ равно нулю, и стало-быть менее делимого, а $1 \cdot 3 = 3$, т. е. более делимого. Все это в одно определение, конечно, включить можно, но затруднительно, и особенных выгод подобная формулировка определения в себе не содержала бы, если бы даже его и составили. То же справедливо и для определений других действий, где есть частные случаи, подходящие под общие определения лишь с бо̀льшими или меньшими обобщениями.

якому смыслу, который часто приходится придавать слову „деление". А именно: делить можно не только на известное, но и на неизвестное число одинаковых частей. Когда мы делим на известное число одинаковых частей, нам неизвестна каждая часть; когда же мы делим на известные части, нам неизвестно число их. Дальнейшая трудность заключается в обобщении обоих случаев под одно общее понятие деления. А такое обобщение возможно сделать только на почве отвлеченных чисел. Конечно, не с этих логических трудностей надо начинать прохождение и повторение труднейшего во всех отношениях арифметического действия.

§ 9. Технические трудности деления.

Что касается технических трудностей, то их в действии деления встречается очень много. Если ставить дело обучения делению на те точки зрения, на которых оно обыкновенно зиждется, то повторению деления, строго говоря, не скоро будет конец, так как в этом действии дети, как это показывает и практика, в большинстве случаев далеко не скоро достигают достаточного совершенства. Повторение деления, в виду этих соображений, распадается на несколько ступеней: а) деление двухзначного числа на однозначное, когда частное — однозначное число; б) деление двухзначного числа на однозначное, когда частное — тоже двухзначное число (73 : 2; 84 : 5 и т. п.); в) когда в письменных обозначениях делимого и частного одно и то же число цифр (делитель — однозначное число); г) делитель — однозначное число, а в частном одной цифрой меньше, чем в делимом; д) делитель — 10; е) делитель — одна единица высшего разряда; ж) делитель — однозначное число единиц высшего разряда; з) делитель — закруглимое многозначное число; и) делитель — незакруглимое многозначное число.

Только тогда, когда все возможные случаи, представляющие собою какую-либо техническую особенность при делении, таким образом подробно разработаны и учениками усвоены, можно перейти к способам деления многозначного числа на многозначное — притом непременно к таким способам, из которых каждый относился бы к данному частному случаю.

Чем лучше ученики знают способ производства деления двухзначного числа на однозначное в случаях, дающих в результате число двухзначное, и чем лучше они умеют находить однозначное частное при разделении многозначного числа на такое многозначное, которое даст однозначное частное, тем, конечно, легче им будет преодолеть остальные трудности деления. Поэтому на указанные случаи должно обратить особенное внимание. Дело в том, что дети должны научиться такому изустному разделению двухзначного числа на однозначное, которое сводится к более или менее непосредственной помощи данных таблицы умножения. Часто они, будучи в состоянии разделить довольно большое двухзначное число, например 72, на другое крупное число, например, на 8 или на 9, сильно затрудняются не только изустно, но даже *письменно* разделить небольшое, сравнительно, число, например, 28 или 34, на другое небольшое число, например, на 2 или 45 и 48 на 3 и т. д. К этим случаям дети иногда не умеют прилагать изустного приема деления (а строго-письменный в этом случае вовсе не целесообразен). Поэтому прежде всего должно повторить разделение двухзначного числа на однозначное, дающее в результате более десяти единиц.

Деление двухзначного на однозначное число при двухзначном частном должно производиться: 1) изустно и 2) без записи частных произведений. А именно так: пусть требуется найти $57 \lfloor 3$; в таком случае учащийся должен рассчитать, что 30 единиц, по разделении на 3 части, дадут 10, а остальные 27, по разделении на 3, дадут 9; итого получится 19. Другой пример: $96 \lfloor 4$; здесь учащийся должен сначала разделить 80 на 4 части, а потом 16 на 4 части. Приучать учеников к многописанию в этом случае вредно, а потому в высшей степени нецелесообразно и самому писать, и детям дозволять записи вроде следующих:

$$\begin{array}{r|l} 57 & \underline{3} = 19 \\ -3 & \\ \hline 27 & \\ -27 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r|l} 96 & \underline{4} = 24 \\ -8 & \\ \hline 16 & \\ -16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Должно при этом помнить, что в книгах наших строго различаются два вида деления: деление на известное *число* одинаковых частей и деление на известные одинаковые *части*.

Для первого действия принят знак $\lfloor$; для второго — двоеточие.

Ставить в случаях, когда остаток равен нулю, кавычки, как это делают очень многие, не следует. Этот знак в математике значения не имеет и почему-то только в арифметике укоренился. (Но этот недостаток записи, конечно, менее существенен, чем вообще недостатки подробной записи). Кроме делимого, делителя, частного, остатка, если последний имеется, и знаков действия и равенства, ничего более в этом случае писать не должно. Если деление дает остаток, то это записывают так:

$$78 \,|\, \underline{4} = 19 \text{ (ост. 2).}$$

При этом не надо говорить, что 4 в *семи содержится один раз*, а надо говорить так: 4 *десятка* разделить на 4 одинаковые части, получим 1 десяток в частном; неразделенных останется 38 единиц; 36 разделим на 4 одинаковые части, в частном получим еще 9 отдельных единиц и т. п. Когда приходится делать кратное сравнение:

$$78 : 4 = 19 \text{ (ост. 2)},$$

то сначала тоже не надо говорить так, как сказано выше (4 в семи), а надо говорить: четыре единицы в четырех *десятках*, или в сорока единицах, содержится десяток раз и т. д.

Далее может итти деление трехзначного и многозначного чисел на однозначное, когда число цифр в делимом и частном одно и то же. Основной прием и основная мысль письменного производства деления в случае многозначного делимого — то же, что и в случае делимого двухзначного, дающего при разделении на данный делитель двухзначное же частное. Расположение вычислений в случае деления многозначного числа на однозначное должно быть по возможности просто, — без записи остатков и частных произведений. Например, вычисление 8 785 | 5 должно быть сделано изустно: 5 000 разделим на 5 частей, получим 1 000; останутся неразделенные 3 тысячи; обратим их в сотни (разменяем на сотни); получится 30 сотен да еще 7 сотен, будет 37 сотен; разделим 35 сотен на 5 частей, получим 7 сотен и т. д. — все изустно! И записывать надо только *частные*. Но, в крайнем случае, можно записывать деление и по следующему образцу:

8785 | 5 = 1 757
37
28
35

Записывать же все частные произведения не следует ни в каком случае, т. е. не следует выполнять вычисление так:

8785 | 5 = 1 757
— 5
37
— 35
28
— 25
35
— 35
0

ибо подобное вычисление представляет образчик того многописания и того рабского следования одному правилу без исключений, которые делают из арифметики предмет, еще так недавно наводивший на учеников тоску и скуку. Крайне вредно при всяком делении следовать правилам, рассчитанным исключительно на потребности человека, производящего деление на многозначное число, у которого цифры единиц низших разрядов не нули. Единственное, что дозволительно и часто даже полезно, это — снабжение цифры частного начальной буквой имени записываемого разряда, например: 1 т. 7 с. 5 д. 7 е. Но и эти буквы излишни сами по себе и важны лишь в методическом отношении, каковой важности вовсе не представляет записывание частных произведений, напротив, затемняющее сущность дела.

§ 10. Деление на 10, 100, 1000 и т. д.

Во главе учения о производстве деления многозначных чисел, кроме деления на однозначное число, стоит, конечно, вполне сознательное и последовательное производство деления на одну единицу всякого высшего разряда: на 10, на 100, на 1 000 и т. п. Как умножение на одну единицу высшего разряда занимает важнейшее место в учении о производстве умножения многозначных чисел, так деление на одну единицу высшего разряда занимает первое место в учении о производстве деления многозначных чисел. При делении на 10, на 100, на 1 000 и т. д. тоже важно не правило относительно всех цифр частного, а самый *способ получения этих цифр*. Даже более того: при делении на единицы высших разрядов знание учениками только правила относительно *всех* цифр частного может прямо повредить дальнейшему курсу. Надо, чтобы ученики понимали, что для разделения 8 356 на 10 одинаковых частей надо сначала определить число целых *сотен*, которое получится от разделения 83 сотен на 10 одинаковых частей, потом — число целых *десятков*, которое получится от разделения 35 десятков на 10 одинаковых частей, и наконец — число целых *единиц первого разряда*, которое получится от разделения 56 единиц этого разряда на 10 одинаковых частей. Сначала надо брать делимые, делящиеся нацело без остатка на 10, потом — делимые, дающие остаток. При этом записывать частные произведения из 10 на цифру частного не следует.

Можно рассуждать, например, так: 8 тысяч разделить на 10 одинаковых частей, тысяч не получится; 8 тысяч обратим в сотни, тогда получим 80 сотен; 80 сотен разделим на 10 одинаковых частей, получим в каждой части 8 сотен и т. д. Вначале можно писать 8 сотен, 3 десятка, 7 единиц, но впоследствии и это надо устранить. Точно так же надо поступать при делении на 100, на 1 000 и т. д.

Кратное сравнение с десятком, сотнею. Когда делается кратное сравнение с единицею высшего разряда, приходится говорить иначе: 8 тысяч *содержат* один десяток менее тысячи раз, обратим 8 тысяч в сотни; 8 тысяч все равно, что 80 сотен, а 80 сотен — все равно, что 800 десятков (это потребует большого труда как от учителя, так и от учеников); 800 десятков содержат один десяток 800 раз, или 8 сотен раз и т. д. Как ни преисполнена трудностей занимающая нас ступень, но ее содержание должно быть учениками усвоено вполне. Исключительно от настойчивости в требованиях учителя по отношению к *изложению* способа вычисления частного (при разделении числа на 10, 100, 1 000 и т. д. одинаковых частей) и отношения данных чисел к 10, к 100, к 1 000 и т. д. (при кратном сравнении) зависят *всецело* успехи учеников в дальнейших ступенях обучения.

Делитель однозначное число единиц высшего разряда. Когда дети проработали вполне сознательно и усвоили себе вполне твердо намеченное выше, можно перейти к делению на однозначное число единиц высшего (сначала второго) разряда. Подходить к этому делению надо исподволь, примерно, следующим образом: Когда надо разделить яблоко на 4 одинаковые части, можно разделить его сначала пополам, а потом полученное — пополам[1]... Когда надо разрезать конец веревки на 6 одинаковых частей, то можно его сначала разрезать пополам, а потом полученное — на 3 одинаковых части (наглядно)... Если надо разрезать лист бумаги на 20 одинаковых частей, то можно сначала разрезать его пополам, а потом полученное — на 10 одинаковых частей, или сначала на 10 одинаковых частей, а потом полученное — пополам... Разделить 60 на 20 одинаковых частей! (Сначала на 10 равных частей, получим 6, полученное — пополам!) 120 на 20! 140 на 20! и т. д.

Потом можно перейти к случаям, когда в частном должно получиться двухзначное или многозначное число, каждую цифру которого надо определять отдельно:

$$720\underline{|20};\quad \underline{21}0\underline{|20};\quad 350\underline{|20};\quad 520\underline{|20};\quad 840\underline{|30}\text{ и т. д.}$$

При этом рассуждать можно, например, так: 7 сотен разделить на 20 частей, в каждой части сотен не будет; обратим 7 сотен в десятки, получим 70 десятков да еще 2 десятка, всего 72 десятка. Их надо разделить на 20 частей; разделим сначала на 10 частей, получим *целых* 7 десятков; последние разделим пополам, получим целых десятков 3 в каждой части; в 20 частях будет 60 десятков; останется неразделен-

[1] Просим читателя раз навсегда заметить, что многоточия в тексте урока означают здесь и ниже необходимость при проведении урока также проверки того, насколько ученики усвоили себе смысл работы и, главным образом, повторения сказанного учениками.

ных десятков 12 и т. д. Только настойчивое упражнение в делении на 20, 30, 40, 50 и т. д., на 200, 300, 400 и т. д., и настойчивое же повторение всего этого может привести учащегося к должным результатам в делении многозначных чисел. При этом записывать на занимающей нас ступени произведение из делителя на цифру частного нет никакой надобности. Вначале рядом с цифрою частного можно поставить сокращенное наименование разряда; но потом это наименование может быть опускаемо. От *многочисленности* упражнений в этом направлении и от *настойчивости* учителя зависят быстрота и все *дальнейшие* успехи детей в производстве деления.

Кратное сравнение с однозначным числом единиц высшего разряда.

Некоторые затруднения встречаются при кратном сравнении числа с однозначным числом единиц высшего разряда. Пусть требуется узнать, сколько раз 30 содержится в 73 565. При этом можно рассуждать так (несколько иначе, чем при делении на известное число частей): в 7 десятках тысяч 30 единиц не содержится ни одного десятка тысяч раз; обратим 7 десятков тысяч в тысячи и прибавим еще 3 тысячи, получим 73 тысячи; в 30 *тысячах* 30 единиц содержатся одну тысячу раз, а в 60 *тысячах* 30 единиц содержатся две тысячи раз и т. д. Из изложенного очевидно, что в этом случае удобнее заменять кратное сравнение делением на известное число равных частей. К этой ступени сильно тяготеют упражнения детей в решении вопросов о том, сколько всех десятков, сотен, тысяч и т. д. содержится в данном многозначном числе, — вопросов, освещающих десятичную нумерацию новым светом. Обыкновенно вопросам этим отводится место среди упражнений, клонящихся к лучшему усвоению нумерации. Но это, очевидно, не вполне целесообразно без достаточного понимания учениками деления.

§ 11. Закруглимый делитель.

Далее идет деление на закруглимые делители, каковыми надо считать такие, вторая цифра которых, считая от левой руки к правой, больше 6 или же меньше 4. К числу закруглимых поэтому принадлежат, например, числа: 37, 48, 59, 672, 483, 296, которые по порядку близки к числам: 40, 50, 60, 700, 500, 300, и числа 21, 32, 53, 729, 626, 819, которые близки к числам: 20, 30, 50, 700, 600, 800. Такие же числа, как 35, 46, 54, 341, 452, 268, принадлежат к классу чисел незакруглимых. Раньше всего должно быть усвоено и повторено на особенно многочисленных упражнениях деление на *закруглимый* делитель. Дабы деление на закруглимое число можно было свести к делению на число круглое, следует обратиться к примеру, действующему на воображение учеников. Надо внушить им, что, задаваясь цифрою частного, мы тотчас же и *проверяем, рассчитываем, вычисляем*, пригодна ли для нас найденная нами, сначала только наугад, цифра частного.

Понятие о закруглимом числе.

До способа деления на известное закруглимое число одинаковых частей ученики должны добраться благодаря своим самостоятельным работам. Выяснение понятия о закруглимом числе может быть, в случае надобности, поведено так: „Если у меня 21 руб., я могу сказать, что у меня *слишком* 20 руб.; если у меня 19 руб., я могу сказать, что у меня без малого

20 руб. Числа 31 и 32 близки к 30; 41 и 42 — близки к 40; 28 и 29 близки к 30; 38 и 39 близки к 40... — У меня 59 руб. Много ли мне не хватает до шестидесяти?.. Шестьдесят — *круглое* число; пятьдесят, сорок, двадцать — тоже? — Скажите-ка какое-нибудь круглое число!.. — У меня 49 коп., *закруглить!* — У одного человека 68 коп., закруглить! Сколько будет? — 11 и 12 близки к какому числу? 21 и 22 — к какому? — 41 и 42 — к какому? 58 и 59 — к какому?" и т. д.

§ 12. Разница записей.

В случаях деления на однозначное число и на единицу высшего разряда должно записывать только делимое, делитель, частное и остаток (если остаток есть), а частные произведения последовательных цифр частного на делитель не должно записывать. Эти частные произведения можно записывать при делении на однозначное число единиц высшего разряда и особенно полезно записывать при делении на закруглимое число. Это, строго говоря, первый случай, когда ученики совершают производство деления в полном смысле этого слова *письменно*. Здесь же должно обратить внимание на случай получения нулей среди цифр частного. Опасаться того, что дети не заметят и не усвоят себе самого секрета деления, сводящегося к разделению первой цифры или первых двух цифр делимого на первую или на увеличенную единицею первую цифру делителя, не следует. Практика показывает, что дети вспоминают и уясняют себе этот секрет, притом с наибольшею для себя пользою, именно тогда, когда о нем им ничего не говорят. Важно, чтобы ученик мог *уверенно* добраться до того, что для разделения, например, 623 на 79 надо 62 разделить на 8 *потому-то* и *потому-то*, а знает ли он секрет этого деления — неважно: при сознательном отношении к делу он сам его откроет. Само собою разумеется, что о том, что такое-то число *содержится* в таком-то числе столько-то раз, речь может итти сначала только при кратном сравнении, а не при делении на известное число одинаковых частей.

§ 13. Нахождение однозначного частного.

Нахождение однозначного частного при делении, конечно, играет крайне важную роль. Оно получается при делении однозначного числа на однозначное же; этот случай не представляет затруднений для учащихся. Если двухзначное делимое менее удесятеренного делителя и если, при этом, первая цифра делимого обозначает число меньшее, чем однозначный делитель, то частное отыскивается тоже без особенных затруднений. Другое дело — случай однозначного частного при многозначном делимом и многозначном же делителе. При круглом или закругленном делителе дело сводится к разделению первой или первых двух цифр делимого на первую цифру делителя (истинного или закругленного). Этот навык дается не сразу. Еще затруднительнее случай незакруглимого многозначного делителя (см. § 14). Все дело в том, чтобы учащиеся научились *планомерно* задаваться верною цифрою частного, не производя при этом излишних вычислений и излишних помарок.

При делении двухзначного числа на двухзначное же прямо необходимо внимание к свободному творчеству учащегося. Одни частные он обязан взвешивать „на-глаз“ (98 на 52, 62 на 31 и т. д.). В других случаях (87 на 23, 97 на 28 и т. п.) он должен быстро взвесить удвоенный или утроенный делитель. Однозначные же частные, получаемые при разделении одного многозначного на другое (5 267 на 642 и т. п.), надо выполнять, применяя одно или два закругления делителя.

§ 14. Незакруглимый делитель.

Деление на незакруглимое число завершает эту статью. Известно, что при делении на такое число необходимо приучить детей к двум изустным пробам (например, при делении на 45 — к изустной пробе разделения на 40 и к изустной пробе деления на 50) и к отысканию частного, лежащего между пробными частными, но в то же время *наиболее вероятного* в данном случае. Важно только, чтобы учитель, сам не торопясь, приучал и учащегося к неторопливому, спокойному и особенно сознательному производству интересующего нас действия. При этом бывают следующие случаи: а) пробные частные, найденные нами с помощью двух закруглений, равны между собою (при делении 475 на 85, мы, деля 475 на 80, получаем в частном 5, и деля на 90, получаем тоже 5); б) из двух пробных частных одно больше другого только на одну единицу (при делении 356 на 45 мы, деля делимое на 40, получаем в первом пробном частном 8, а деля его на 50, получаем во втором частном — 7); в) из двух пробных частных одно более другого на две единицы (при делении 156 на 25 мы, деля делимое на 20, получаем в первом пробном частном 7, а деля на 30, во втором — 5); наконец, г) из двух пробных частных одно значительно больше другого (при делении 217 на 24 мы, деля делимое на 20, получаем в первом пробном частном 10, а деля на 30, во втором — 7). — Умение сразу, более или менее верно, „задаваться“ цифрою частного дается практикою. Но верное, если так можно выразиться, взвешивание этой цифры с помощью не угадывания только, а также сознательного выбора подходящей цифры, все-таки может быть скоро приобретено учениками. Для достижения этого учитель не должен дозволять им только механически производить действие деления. Он должен требовать, чтобы они различали эти случаи: а) если оба пробных частных — одно и то же число, то они должны смело принять это число за истинное частное; б) если разность между пробными частными — одна единица, то они должны за истинное частное принять меньшее из частных; в) если одно пробное частное более другого на две единицы, то ученики должны принять за истинное частное то число, которое заключается между пробными частными; г) если между пробными частными заключается два числа, то из этих двух лучше брать меньшее; наконец, д) если между пробными частными заключается несколько целых чисел, то надо взять среднее между ними, и из двух средних — меньшее. Пусть дан пример: 17 753 разделить на 36.

17 753 | 36 = 4 с. 9 д. 3 ед.

Рассуждать можно, примерно, следующим образом: один десяток тысяч разделить на 36 равных частей, — десятков тысяч в каждой части не получится. 17 тысяч разделить на 36 равных частей, тысяч в частном также не получится. 177 сотен разделить на 36 равных частей, получатся сотни. Сколько? Если 177 разделить на 30 частей, то в каждой части получится целых сотен 5; если же 177 сотен разделить на 40 равных частей, то получатся 4 сотни. Возьмем поэтому 4 сотни в частном и т. д. При этом в некоторых случаях могут получиться две пробные цифры, отличающиеся более, чем на одну единицу. Например, в нашем примере 335 десятков, разделенные на 30 частей, дадут 11 целых десятков в каждой части, а 335 десятков, разделенные на 40 частей, дадут только 8 целых десятков в каждой части. А между числами 8 и 11 два числа, из которых мы, конечно, возьмем 9. — При этом только вначале полезно отмечать начальной буквой название разряда, получаемого в частном. Знаков же вычитания писать не для чего: необходимость вычитания здесь очевидна.

Упражнения при незакруглимом делителе.

Упражнений в делении на незакруглимое число должно проработать много с тем, чтобы впоследствии никогда уж не возвращаться к началу и чтобы ученикам дать в руки прием и верный, и сознательно ведущий к цели. Задач с условиями на этой ступени не требуется, так как они только замедлили бы усвоение учениками самого способа производства деления и преодоление этой трудности. — Деление чисел на известные одинаковые части, которые выражены незакруглимым числом (т. е. кратное сравнение многозначных чисел с незакруглимыми многозначными числами), новых трудностей не содержит. Требуется только иначе понимать цифры частного: при делении на известное число одинаковых частей ищут, сколько единиц данного разряда заключается в *каждой части*, при кратном же сравнении надобно каждый раз отыскивать, — сколько тысяч *раз*, сколько сотен *раз* и т. д. делитель *содержится* в делимом. Если деление на известное число одинаковых частей детьми усвоено, и если материал предыдущих ступеней разрабатывался и с точки зрения кратного сравнения чисел, то применение выше намеченного производства деления к случаям кратного сравнения не будет заключать в себе ничего непреодолимо трудного.

§ 15. Упражнения в применении деления.

Кроме вышерассмотренных случаев деления, существуют и такие когда ученик должен, если он не желает слишком медленно вычислять посвободнее воспользоваться своим арифметическим соображением, сметливостью. Достаточно обратить внимание на случаи деления 52 на 26, 64 на 16, 84 на 21, 96 на 12, 72 на 24, 51 на 17, 57 на 19, 68 на 17 и т. п., чтобы убедиться в справедливости сказанного. Необходимо убедить учащихся, что иногда не только дозволительно, но даже следует как бы угадать частное с тем, чтобы потом изустно рассчитать, подходящую ли мы взяли цифру. Например, 58 разделить на 19; если закруглить 19, получим в частном 2; а если прямо взять в частном 3 (рискнуть!), да изустно рассчитать, сколько будет 3-жды 19, то получим верное частное. При этом ученики могут определить только наибольшее значение цифры частного, каковому определению их и должно научить ранее проработки остальных упражнений этой ступени на примерах деления двухзначного числа на двухзначное же. Если учащегося не будут смущать остатки, то учитель может число примеров произвольно увеличить без всякого труда. Советуем при проработке упражнений этого рода иметь в виду весьма полезную для этой цели таблицу следующих двухзначных и трехзначных чисел, делящихся на двухзначные же и представляющих собою случаи, в которых закругление делителя либо невозможно, либо недостаточно быстро ведет к цели:

51	17 × 3	98	49 × 2	121	11 × 11
52	13 × 4	102	17 × 6	123	41 × 3
57	19 × 3	104	13 × 8	129	43 × 3
68	17 × 4	111	37 × 3	133	19 × 7
76	19 × 4	112	16 × 7	136	17 × 8
78	13 × 6	114	19 × 6	138	23 × 6
87	29 × 3	116	29 × 4	141	47 × 3
91	13 × 7	117	13 × 9	143	13 × 11
92	23 × 4	119	17 × 7	147	49 × 3

§ 16. Очевидные цифры частного.

В тех случаях, *где частное очевидно, ученику надо этим пользоваться.* Для примера разделим 412 356 на 251; при этом рассуждаем так: 412 | 251 *очевидно* 1: остается 161; 1 613 | 200 будет 8, а 1 613 | 300 будет 5; 8 много, 5 мало, можно взять или 6 или 7. Беру 6, останется 107; хорошо! Продолжаю: 1 075 | 251, *всматриваюсь:* 1 075 | 251, *очевидно,* 4, и т. д. — Если ученики научены только рабски пользоваться правилами, то такой выучке сочувствовать нельзя, и деление для них всегда будет трудно. Правило в этом случае не помогает делу и помочь не в состоянии, да и выразить это правило словами чрезвычайно трудно.

§ 17. Последние цифры делимого и делителя — нули.

На этой же ступени следует обратить внимание на деление чисел, при котором письменные обозначения делимого и делителя оканчиваются нулями. Обыкновенно принято эти случаи выделять из числа всех остальных. Но такое выделение может быть терпимо только в том случае, когда делимое делится нацело без остатка на делитель. Тогда полное сокращение нулей вполне дозволительно, так как значительно сокращает письменное производство действия. Непозволительно зато подобное сокращение, когда у того, кто производит действие (деления на части или кратного сравнения), нет уверенности в делимости делимого на делитель, и когда он не намерен частное изобразить в виде целого с дробью. Так как это и не может быть вполне выяснено учащемуся, то, конечно, такое *письменное* сокращение (не на время только, а навсегда) нулей не должно обращаться в привычку учащихся, как это часто, к сожалению, замечается. Для определения же *приблизительного* частного *изустное* сокращение необходимо, и это учащийся понять в состоянии, тем более, что до этой ступени он уже давно приучился смотреть преимущественно только на первую цифру делителя. Чтобы показать учащимся, что нулей нельзя отбрасывать, можно взять пример: 170 яблок раздать 70 мальчикам; каждый мальчик получит по 2 яблока, но останется нерозданных целых 30 яблок. Если же в делимом и делителе откинуть нули, то в частном тоже получится 2, но остаток будет три, а не тридцать. В этом-то и заключается причина, по которой *механическое* сокращение нулей на этой ступени совершенно неуместно.

§ 18. Терминология деления.

На последнем месте должна стоять терминология деления, притом по возможности близкая к *сущности дела*. Особенного внимания заслуживает такая постановка этой терминологии, при которой сначала развиваются истинные представления о том, что собственно называют частным в разных случаях, представляющихся при разделении целого числа на другое. Например: 1) Когда делимое больше делителя и равняется произведению из делителя на некоторое число, то за частное принимают, как известно, это последнее число. 2) Когда делимое равно делителю, то за частное принимают одну единицу. 3) Когда делимое больше делителя, но не представляет собою произведения делителя на некоторое целое число, то существует ряд целых чисел, произведение которых на делитель меньше делимого, и из этих чисел наибольшее в этом случае считается за частное. 4) Когда делимое меньше делителя, за частное принимается нуль, а остатком в этом случае является число, равное делимому. 5) Когда делимое равно нулю, а делитель от нуля отличается, то за частное принимают нуль, и в этом случае, как и в случаях 1-м и 2-м, говорят, что деление совершилось нацело, без остатка. Важно при этом и то, что нуль никогда не бывает делителем: таких *задач* не бывает.[1] — Когда определено значение частного в разных случаях, можно перейти к определению деления, делимого, делителя и остатка и к полной характеристике двух видов деления. Далее возникает вопрос о том, какими рассуждениями можно свести, в случае отвлеченных чисел и в случае чисел именованных, один вид деления к другому.

§ 19. Существуют ли два действия обратные умножению?

Всякое прямое действие над двумя числами (сложение, умножение и возвышение в степень) допускает возможность построения действия, обратного ему. С другой стороны, во всяком действии одно число является тем числом, над которым совершается действие — пассивным числом, „операндом“, а другое — числом „активным“, „оператором“. Первое слагаемое, множимое и основание степени — пассивные числа. Второе слагаемое, множитель и показатель степени — числа активные. Как для области натуральных чисел, так и для чисел именованных и конкретных, сложение, в виду перестановительного закона, которому оно всецело подчиняется, дает только одно действие: вычитание. Возьмем ли мы отвлеченные числа 7 и 4, или 7 *кг* и 4 *кг*, 7 стульев и 4 стула, у нас получится, что $7+4=4+7$, $7\ кг+4\ кг=11\ кг$ и 7 ст. + 4 ст. = 11 ст. Поэтому, какие бы числа (именованные, отвлеченные или конкретные) мы ни взяли, лишь бы единицы слагаемых были

---

[1] Условное употребление таких обозначений, в которых нуль является делителем или знаменателем обыкновенной дроби, вообще недопустимо, пока не будет точно установлен смысл подобных обозначений. В арифметике они совершенно недопустимы.

однородны, безразлично, напишем ли мы: $x+a=S$ или же напишем: $a+x=S$.

Буква x во всех этих случаях (случай „комплексного" числа в роде 7 столов + 4 дома при этом исключен, потому что неизвестно значение этого комплексного числа) обозначает *одно* и *то же число*. При умножении же дело усложняется: множимое и множитель могут быть оба отвлеченными, множимое может быть именованным, а множитель — отвлеченным, и оба числа (при известных условиях и соответствующих определениях) могут быть именованными или даже конкретными. В случае отвлеченных чисел $7 \times 4 = 4 \times 7$. В случае же именованного или конкретного множимого и отвлеченного множителя

$$7\ \textit{кг} \times 4 = 4\ \textit{кг} \times 7 \text{ и } 7 \text{ ст.} \times 4 = 4 \text{ ст.} \times 7,$$

т. е. перестановка сомножителей требует также и перемещения наименования на первое место и исключения наименования при числе, которое делается множителем. Если же оба данные для перемножения числа снабжены наименованиями, то возможны два случая: 1) Либо оба сомножителя — именованные числа одного и того же наименования, — если, конечно, умножение в этом случае имеет определенный смысл, как например:

$$7\ \textit{м} \times 4\ \textit{м} = 4\ \textit{м} \times 7\ \textit{м} = 28\ \textit{м}^2.$$

2) Либо наименования различны, если, конечно, как и в предыдущем случае, перемножение таких именованных чисел имеет определенный смысл, как например:

$$7\ \textit{кг} \times 4\ \textit{м} = 4\ \textit{кг} \times 7\ \textit{м} = 28\ \textit{кгм}.$$

В виду всего вышеизложенного, при *отвлеченных* численных значениях букв a и x,

$$a \cdot x = x \cdot a = p,$$

буква x требует только одного действия для отыскания ее значения. В случаях же, когда число a именованное, а число x отвлеченное, и когда число a — именованное число одного наименования, а число x — именованное число другого наименования, в этих двух случаях действие, с помощью которого отыскивается значение x, может иметь двоякую цель. В этих случаях, если x обозначает множитель, то отыскивается именно множитель, а не множимое; если x обозначает множимое, то отыскивается именно множимое, а не множитель.

Особенно важно *различать* двоякий смысл деления в начальном и практическом курсах арифметики. Невозможно примириться ради мнимой и ничем не оправдываемой общности с недомыслием учащихся, которое при этом неизбежно. Оно выражается в смешении ими понятий: а) частного и отношения, б) частей, из которых состоит делимое, и числа этих частей, в) отыскания числа долей делимого и отыскания величины каждой из долей, на которые разделено делимое, наконец, г) именованного частного и отвлеченного отношения. Такое смешение понятий психологически почти неизбежно, если обоим случаям деления, без всякой подготовки, дается общее определение действия, цель которого — отыскать один сомножитель по другому сомножителю и произведению обоих сомножителей.[1]

§ 20. Происхождение деления.

Чтобы постигнуть, в чем именно состоит действие деления одного отвлеченного числа на другое, ученикам надо уяснить себе следующее: Пусть дано какое-нибудь число, например, 26 381 и другое число, например, 217. Тогда можно себе предложить следующие четыре вопроса: 1) *существует ли* такое третье число, на которое надо помножить 217 для того, чтобы получить 26 381? 2) если такое число существует, то как его *вычислить*? 3) если оно не существует, то *существует ли* такое число, которое надо помножить на 217 для того, чтобы получить число меньшее, чем 26 381 и которое, кроме того, обладает тем свойством, что если взять число большее чем оно, на одну единицу, и это последнее число помножить на 217, то получится больше, чем 26 381? и 4) как *вычислить* в этом последнем случае интересующее нас число? Для решения этих вопросов есть два способа: а) Если бы мы захотели искомое число отыскать с помощью умножения, то нам пришлось бы 217 сначала помножить на 2, потом 217 помножить на 3, потом 217 помножить на 4 и т. д., до тех пор, пока мы, наконец, не добрались бы до такого произведения, которое равно 26 381, или же до таких двух произведений, из которых одно меньше, чем 26 381, а другое больше, чем это последнее число. Таким образом мы нашли бы интересующее нас число: оно было бы равно — в первом случае последнему множителю, а во втором — предпоследнему множителю. б) Мы могли бы узнать, сколько раз 217 содержится в 26 381, и иначе, вычтя 217, из 26 381, могли бы из остатка снова вычесть 217, из нового остатка — опять вычесть 217 и т. д. до тех пор, пока у нас получится остаток меньший, чем 217; затем, сосчитав, сколько раз мы сделали вычитание, по этому судить о том, сколько раз надо 217 взять слагаемым, чтобы получить 26 381 или число, меньшее, чем 26 381 на некоторое число, меньшее, чем 217. Но первый способ вычисления искомого числа в высшей степени утомителен и требует от нас многократного производства действия умножения на некоторый ряд последовательно возрастающих на одну единицу чисел. Второй же способ требует многократного производства вычитания, на которое также пришлось бы потратить очень много труда и времени. Полезно, если ученики часть своего досуга употребят на подобные вычисления, для того, чтобы убедиться в полной неприменимости указанных выше и им подобных способов вычисления.

§ 21. Частное или отношение.

Искомое отвлеченное число, каким бы образом его ни вычислили, называется либо частным, либо отношением большего из данных чисел к меньшему, и отыскание этого частного или отношения представ-

[1] Ср.: „Арифметика“ К. Фербер (перев. Бема и Струве, стр. 27) и „Методика начального курса математики“ С. И. Шохор-Троцкого, ч. 1 (изд. 1924 г., стр. 80—81).

ляет собою цель того действия, которое известно под именем деления. Средством же к достижению этой цели является так называемая таблица деления, т. е. ряд равенств, в первой части которых выражено требование разделения однозначных чисел на однозначные же и разделения тех двухзначных чисел на однозначные, которые в частном дают числа также однозначные, а во второй — результаты деления.

§ 22. Связь обоих видов деления.

Хотя связь обоих видов деления очевидна, но учителю может понадобиться менее отвлеченная, а более опирающаяся на воображение учеников, предварительная проработка этого же учения. Тогда он может держаться, например, следующей формы проработки. Пусть здесь у меня лежит 1 015 спичек (хорошо, если пачка „спичек" действительно есть у учителя под руками) и пусть все спички разложены в кучки по 35 спичек в каждой; сколько получится таких кучек, я не знаю... — Возьму из каждой кучки одну спичку и составлю новую кучку, которую отложу в сторону; в этой новой кучке столько спичек, сколько раньше было кучек по 35 спичек в каждой. В прежних кучках теперь — по 34 спички в каждой; беру из каждой по одной спичке и составляю опять новую кучку по стольку спичек в каждой, сколько всех прежних кучек. Эту новую кучку опять откладываю отдельно в сторону; тогда в каждой старой кучке осталось по 33 спички. Продолжаю это еще и еще раз и так долго это проделываю, покуда не исчерпаю всех спичек. Тогда я получу 35 новых кучек, а в каждой из них столько спичек, сколько раньше было всего кучек... Это значит: если мне надо узнать, сколько можно из 1 015 спичек составить кучек по 35 спичек в каждой кучке, то я могу 1 015 спичек разделить на 35 равных кучек, и сколько спичек в каждой из этих новых кучек, столько же кучек по 35 спичек в каждой можно составить из 1 015 спичек. Уразумение возможности замены кратного сравнения делением на известное число одинаковых частей, как это очевидно из вышеприведенного рассуждения, гораздо труднее, чем это может казаться с точки зрения теоретической. Для этого уразумения общее определение недостаточно: нужна работа над конкретными примерами и работа воображения. Относительно проверки деления распространяться не для чего: все сказанное ранее о так называемой „проверке" остальных трех арифметических действий в такой же мере относится и к проверке действия деления.

§ 23. Особенности деления, как действия.

Как действие вычитания определяется в зависимости от сложения, так действие деления ставится в связь с действием умножения. Но в этом последнем случае есть две особенности, которые требуют внимания с точки зрения логической. Пока не введено понятие о дроби, как частном или отношении, общее определение деления требует осторожности (см. §§ 8 и 18 настоящей главы). Ибо в случаях, когда делимое меньше делителя или вообще не равно произведению делителя на некоторое целое частное, нельзя говорить, что разделить одно целое число на другое значит найти третье целое число, от умножения которого на второе получится первое: такого третьего целого числа нет в этих случаях. Не надо забывать, что в этих случаях определение справедливо лишь при том условии, если построено понятие о дроби, как частном и о дроби, как отношении, и установлено умножение дроби на целое число и целого числа на дробь.[1]

Другую особенность деления вообще представляет возможность истолкования деления некоторых именованных чисел на другие именованные, притом с ним разнородные. Но эта особенность принадлежит к числу тех, которым не место в повторительном курсе практической арифметики. О ней речь — ниже.

§ 24. Место понятия о долях и именованных числах в повторительном отделе.

Понятий о долях (сначала о половинах, четвертях, восьмых) избегать не следует. Что делитель (в случае деления на известные части), и что частное (в случае деления на известное число равных частей) иногда составляют долю делимого, учащиеся должны понимать уже на первых ступенях обучения. Ибо не нормально такое положение дела, при котором ученики, деля 15 на 5 одинаковых частей, не знают, что 3 составляет одну пятую долю числа 15, и при котором ученики, деля 15 единиц на равные части по 5 единиц в каждой, не знают, что 5 единиц в этом случае составляют одну треть 15 единиц. Что касается именованных чисел, то так называемые раздробление и превращение именованных чисел должны в повторительном курсе рассматриваться, как задачи, в случае раздробления простого именованного числа, требующие одного действия умножения, в случае же раздробления составного именованного числа, — требующие применения двух действий (сложения и умножения), а в случае превращения именованного числа — требующие применения деления. Само собою разумеется, что ни особенные способы расположения вычислений, ни терминология занимающих нас преобразований не только не обязательны, но даже прямо не желательны в повторительном курсе.

---

[1] Не только в случае так называемой „невыполнимости“ деления на буквах, но и в случае разделения многочлена (вернее: целой относительно данных букв функции) на другой многочлен приходится с этим обстоятельством считаться. Ибо, например, разделить одну целую, относительно буквы x, функцию $F(x)$ на другую целую, относительно той же буквы x, функцию $f(x)$ не всегда значит найти третью, тоже целую, относительно буквы x, функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую тождеству

$$F(x)=f(x)\cdot\varphi(x).$$

Ибо: если такой целой функции $\varphi(x)$ нет, то разделить $F(x)$ на $f(x)$ значит найти такую целую, относительно буквы x, функцию $\varphi(x)$ и такую целую, относительно буквы x, функцию $R(x)$, чтобы существовало тождество

$$F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)+R(x),$$

где $R(x)$ — такая целая функция, в которой показатель наивысшего члена меньше показателя наивысшего члена функции $f(x)$. При этом интересующие нас целые относительно буквы x, функции $\varphi(x)$ и $R(x)$ могут быть вычислены с помощью того способа, который связан с расположением функции $F(x)$ и $f(x)$ непременно по убывающим степеням буквы x.

§ 25. Буквенные обозначения в арифметике.

В повторительный курс вполне возможно внести буквенные обозначения и вычисление численных величин простейших буквенных выражений, уместных на той или иной ступени. Не надо думать, что тогда это будет уже не арифметика, а алгебра. Тот взгляд, что только в алгебре уместны буквенные обозначения, в настоящее время принадлежит уже к числу крайне устарелых. Пусть наступил момент, когда возможно формулировать перестановительный закон сложения двух слагаемых, по которому

$$7+2=2+7;\quad 26+33=33+26 \text{ и т. д.}$$

Тогда можно перейти к полным обозначениям:

любое число + другое любое число = второму числу + первое, затем к сокращениям:

л. ч. + др. л. ч. = 2-му ч. + 1-ое,

далее — к такому обозначению $a+b=b+a$.

То же относится к закону сочетательному с тою разницей, что здесь можно будет пропустить первый способ обозначения и что придется познакомить с употреблением скобок в этом *частном* случае. Аналогичное справедливо и для умножения. Но особенно большие услуги оказывают буквенные обозначения при составлении и решении примитивных алгебраических уравнений:

$$x+7=15 \text{ и } 7+x=15,$$

устанавливающих, притом в высшей степени наглядно и прозрачно, теснейшую связь между вычитанием и сложением, а также примитивных уравнений: $x \cdot 7=35$ и $7 \cdot x=35$, из которых первое приводит к разделению 35 на 7 равных частей, второе — к кратному сравнению 35 единиц с 7 единицами, т. е. к делению на известные части. Эти уравнения и им подобные ставят задачи на деление в теснейшую связь с умножением. Остальные примитивные уравнения вида

$$x-a=b,\ a-x=b,\ x:a=b \text{ и } a:x=b$$

тоже весьма поучительны и вполне доступны учащимся.

Благодаря упражнениям над подобными уравнениями, учащиеся приобретают (пользуясь буквенными обозначениями) более конкретные представления о взаимности между тремя числами, если над двумя из них совершено некоторое арифметическое действие, а третье должно быть результатом этого или другого действия. Случаи первого рода:

$$7+5=x;\ 7-2=z;\ 8\cdot 4=y \text{ и т. п.}$$

Случаи второго рода:

$$7+x=15;\quad 7\cdot x=63;\quad x\cdot 7=63;\quad 63:x=3 \text{ и т. п.}$$

§ 26. Геометрический и лабораторный элементы в арифметике.

Что касается геометрического материала, уместного в повторительном курсе арифметики, то он особенно полезен в следующих местах этого курса:

1) При ознакомлении учащихся со следующими единицами меры длины: сантиметром, дециметром и метром. Ученики должны из бумажных лент собственноручно, с масштабами в руках, изготовить ленты длиною в сантиметр, дециметр и метр. Бумажную ленту длиною в один метр они должны разделить, с помощью сгибания, на части длиною в дециметр и т. п. Результатом этой работы будет более конкретное знакомство с метрическими единицами мер длины.

2) При ознакомлении учащихся с квадратным сантиметром и дециметром путем сгибания бумаги и с помощью чертежных инструментов (линейки, чертежного наугольника и масштаба). При этом они знакомятся с терминами: „прямой угол", „перпендикуляр", „квадрат", „площадь", „квадратный метр", „квадратный дециметр" и т. д.

3) Научившись вычерчивать „сетку" (развертку) куба, ученики ознакомливаются с терминами „куб", „кубический метр" и т. п. и могут изготовлять из картона модели кубов вообще, и кубов, объемы которых называются „кубическим дециметром", „кубическим сантиметром" и т. п.

4) При переходе к делению чисел полезно научить учащихся разделению конечной прямой, с помощью деревянного или сложенного из бумаги угла и линейки, на несколько одинаковых частей. При этом ученики приобретают весьма отчетливые представления о долях целого, прямо необходимые для надлежащего уразумения самого смысла разделения числа на известное число одинаковых частей. Они узнают, что ни величина угла, ни величина отрезка, откладываемого на вспомогательных прямых, не имеет значения при разделении данной конечной прямой на равные между собою части. Далее, учащиеся лучше уразумевают разделение конечной прямой на части, равные данному отрезку, а также уразумевают измерение конечной прямой, а это помогает лучшему уразумению деления числа на известные нам части, т. е. так называемые „деления по содержанию", вернее: сравнения в кратном отношении, кратного сравнения или отыскания отношения одного числа к другому. [1]

5) При усвоении некоторых данных таблицы умножения наизусть (7×9, 6×9, 7×8 и т. п.) полезно изготовление той части так называемой Пифагоровой таблицы, которая поможет учащемуся усвоить себе, путем не одних словесных упражнений, эти и другие данные; эта работа над Пифагоровой таблицей окажет услугу также при выработке понятия о площади прямоугольника.

§ 27. Изустные и письменные вычисления.

При вычислениях всякого рода должно научить учащихся сознательному отношению к тому, что подлежит вычислению. У них не должно быть пристрастия ни к одному из способов вычисления. Они должны одно вычислять письменно, другое — изустно, смотря по тому, что удобнее и целесообразнее. Но особенно на это важно обратить внимание в повторительной части курса. Доказывать в этом месте важность

[1] См. „Методику начального курса математики" С. И. Шохор-Троцкого, ч. 1 (издание 1924 г., стр. 85). *(Прим. ред.)*.

изустных арифметических вычислений, конечно, не для чего. К сожалению, не только учащиеся, но часто и учителя забывают, что изустные вычисления всему в арифметике помогают, и что верные изустные вычисления — лучшее ручательство за верность вычислений письменных.

Позволяем себе привести следующие мнения некоторых авторитетов в области методики арифметики, живших еще в XVIII в.:

„Не задерживайте своих учеников на определениях (арифметики, именованного числа, числа отвлеченного, арифметического действия и т. п.), а напротив, поскорее приступите к упражнениям в счете. Не показывайте им, как надо решить предложенный вопрос, а напротив, дайте им самим поработать над вопросом. Упражняйте их на таких примерах, которые имеют какое-либо отношение к ремеслу и роду занятий их родителей. Не мучайте детей большими числами и не двигайте учеников вперед, пока они не усвоили предыдущего. Пусть в вашем распоряжении всегда имеются предметы, над которыми ученики могли бы совершать свои расчеты, и всегда предпочитайте такие вычисления вычислениям умственным и на доске". (Оверберг, XVIII в).

„Изустные вычисления тем хороши, что приучают детей заниматься тем, чем в настоящую минуту надо заниматься и не уподобляться при решении задач мотыльку, перелетающему с одного цветка на другой". (Бирман, XVIII в.)

„Наши ученики не нуждаются в педантическом и шарлатанском аппарате обычных учебников арифметики, во всех этих громадных задачах, многословных правилах и определениях и т. п. Они нуждаются не в научной арифметике и не в искусственных вычислениях, а только во власти над такими вычислениями, в которых они будут нуждаться и которые они будут в состоянии применить в своей жизни. Для игры в арифметику у нас нет времени... Пора бросить вычисления над десятизначными числами, умножения и деления десятизначных чисел на пяти- и шестизначные и т. п." (Петр Вильом, XVIII в.).

„Если кто приобрел в применении четырех действий должный навык, то он приобрел навык в вычислении и более ни в чем не нуждается. Поэтому совершенно бесполезно задерживать его на примерах, относящихся до всяких товаров, до вычисления веса упаковки, до сложных процентов, до скидок и учетов, до сравнения денежных единиц разных стран, до сложных расчетов о прибылях и убытках и т. п." (Базедов, 1723—1790).

„Многолетний опыт убеждает в том, что только те ученики умеют хорошо вычислять письменно, которых учили также вычислению изустному". (Келер, XVIII в.).

„Прежде чем поощрять детей к болтовне о тысячах и миллионах, учеников надо научить вычислению над числами первой сотни". (Бусее, XVIII в.).

§ 28. Сложные чисто-арифметические задачи.

Когда четыре действия над числами учениками усвоены настолько хорошо, что производство действий уже нисколько не затрудняет учащихся, можно перейти к решению ими чисто-арифметических задач, но притом более или менее сложных. Но преувеличивать значение решения слишком сложных задач не следует ни в каком случае. Задачи, подлежащие основательной проработке, не должны содержать более четырех или пяти условий. Вредно не то, что большинство учеников довольно равнодушно относится к слишком сложным задачам, а некоторые из учеников затрачивают слишком много непосильного для них труда при так называемом „распутывании" задач. С этими неприглядными сторонами решения слишком сложных чисто-арифметических задач можно было бы примириться, если бы их решение было целесообразным с практической, либо с воспитательной, либо же с образовательной точек зрения. Вредно, главным образом, то, что затрата значительного количества времени на решение таких задач не оправдывается и не окупается ни слабым влиянием их на умственное развитие учеников, ни ничтожными их приобретениями в области арифметики.

Решение учениками слишком сложных и запутанных задач, конечно, с обучением арифметике, как таковой, имеет очень мало общего. Не следует переносить центр тяжести обучения арифметике из области применения четырех действий к случаям, встречающимся в жизни, в область числовых вопросов, как будто бы нарочно для затруднения учеников придуманных и запутанных. Ибо истинная цель обучения арифметике — троякая: а) практическая — дети должны научиться сознательному, верному, быстрому и изящному производству четырех действий над числами и верному применению их к решению простых и не слишком сложных задач; б) образовательная — ученики должны, благодаря своим занятиям арифметикою, приобрести те полезные познания и точные понятия, которые могут и должны быть приобретены при достижении ими практической цели их занятий этим предметом, и в) воспитательная — ученики на чисто-арифметическом, а не постороннем материале должны приобрести те логические и технические навыки, которые достижимы при обучении этому предмету, как таковому. Искать образовательных и воспитательных влияний на учащихся арифметике непременно в задачах запутанных и трудных не представляется ни целесообразным, ни даже благоразумным.

§ 29. Наименование чисел.

Можно ли снабжать записи чисел, подлежащих действию, наименованиями, или надо записывать действия только над отвлеченными числами? Наиболее веское возвражение против снабжения записей чисел наименованиями состоит в том, что арифметические действия, строго говоря, совершаются только над отвлеченными числами. Но этот взгляд для занимающего нас, практического, курса арифметики не представляется заслуживающим особенного сочувствия. Кроме того, надо отметить, что математика вообще не отвергает действий над величинами (над векторами, силами, ускорениями, скоростями, площадями и т. д.). Запись числа, благодаря освобождению ее от наименования, конечно, выигрывает в изяществе, но в ответе строчки все-таки надобно проставлять наименование, так как это только облегчает дальнейшую работу и часто необходимо с логической точки зрения. Но, во всяком случае, записывание наименования должно быть подчинено и здравому смыслу и требованиям смысла производимого действия. Так, при умножении множитель, а делитель при производстве деления на известное число частей и отношение при производстве кратного сравнения, т. е. деления на известные части, не могут быть, по самому существу дела, снабжаемы никаким наименованием. Эти числа принадлежат к разряду существенно-отвлеченных. Равным образом не надо допускать, чтобы дети говорили, что, например, надобно помножить рубли на килограммы или копейки на метры. Но, во избежание слишком сложного способа выражения (т. е., надобно помножить стоимость метра сукна на число метров, или вес куля ржи на число кулей и т. п.), гораздо лучше требовать от детей не отвлеченной формулировки подобных действий, а прямого указания на то, что в данном случае надо, например, 3 руб. 50 коп. помножить на 15, или 9 *кг* помножить на 26 и т. д. Каждый урок арифметики несомненно должен быть в то же время уроком родного языка. Но изощрение детей в употреблении подобных вышеприведенным, искусственных и для них слишком книжных, отвлеченных выражений выходит далеко за пределы целей обучения арифметике. Это изощрение выходит за пределы возможных, в отношении точности речи, требований курса арифметики практической. Снабжение слагаемых и суммы, уменьшаемого, вычитаемого и остатка наименованиями не содержит в себе ничего предосудительного.

Повторяем: действие над отвлеченными числами изящнее, а потому и запись без наименования изящнее. Но придавать этому слишком большое значение не следует. Но с тем большей осторожностью надо в начальном курсе относиться к наименованию, когда этого наименования ни писать, ни даже произносить не целесообразно. Мы говорим о тех обмолвках, которые дозволяют себе ученики, говоря, что надо рубли помножить на метры, или рубли разделить на кули и т. д. Единственный случай, когда прямо необходимо называть наименование делителя, представляется тогда, когда и делимое, и делитель — именованные числа. А именно: если требуется разделить данное именованное число на известные части, из которых каждая равна другому именованному числу, то не только *можно сказать*, что 8 руб. требуется разделить на 40 коп., но необходимо это и *записать* так: 8 р. : 40 к. = 20.

В механике длину пути делят на продолжительность промежутка времени и скорость равномерного движения обозначают дробью, числителем которой служит именованное число, выраженное в единицах длины, а знаменателем служит именованное число, выраженное в единицах времени. Все дело в условии, и можно *условиться* писать так, а не иначе. [1] Но, не установивши этого условия, не следует говорить, что 300 *км* надо разделить на 6 часов.

---

[1] В некоторых отраслях высшей математики символические обозначения гораздо чаще встречаются, чем в арифметике, и там не возбуждается никаких сомнений в дозволительности этих обозначений. Например, неизящное, с точки зрения школьно-арифметической, дробное обозначение с именованными числителем и знаменателем

$$\frac{1\ \text{метр}}{1\ \text{секунда}}$$

принято для обозначения скорости, с которою движется равномерно движущаяся точка, проходящая в одну секунду путь, длиною в один метр. Таких обозначений в высших отраслях математики много.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ИЗМЕНЕНИЯ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО.

§ 1. Значение учения об изменениях.

Учения об изменениях суммы, разности, произведения и частного принадлежат, строго говоря, к числу учений, в которых не особенно нуждается практическая арифметика. Те случаи изменения результатов действия в зависимости от данных чисел, которые могут встречаться в жизни, требуют, для своего разрешения, применения только здравого смысла. Всякий человек, хотя бы и не усвоивший себе учения об этих изменениях в том виде, как оно излагается в учебниках арифметики, в состоянии справиться с подобными вопросами. Таков, например, вопрос о том, сколько лишнего я переплатил при покупке стольких-то метров сукна, если с меня взяли за метр дороже, чем следует, на 1 руб., или на 1 руб. 25 коп. Теоретическое же значение этого отдела в арифметике также не очень велико. От полного решения некоторых вопросов (например, об изменении частного в зависимости от *всевозможных* изменений делимого и делителя) не только арифметика целых, но даже арифметика дробных чисел отказывается. Даже она не затрагивает вопроса о том, что случится, хотя бы даже не с целым, а с дробным частным, от увеличения делимого на несколько и от (одновременного с этим увеличением) уменьшения делителя на столько же или на другое число единиц. К тому же, полное разрешение всех вопросов об изменении искомых чисел в зависимости от данных поддается только алгебраической обработке. Глава эта в курсе практической арифметики является наследием тех времен, когда в учебники арифметики включались многие учения, уместные только в алгебре, например: теория пропорций, теория непрерывных дробей и т. п.

§ 2. Изменение суммы.

Учение об изменении суммы в зависимости от изменения слагаемых должно быть поставлено, как это вытекает из самого существа дела, на почву совершенно наглядных представлений. Это учение, согласно „методе целесообразных задач“, начинать надо с решения нескольких простых задач, в которых одно из слагаемых изменяется не более, чем на одну единицу. Затем ученики переходят к изменению суммы нескольких слагаемых в зависимости от прибавления к некоторым из чисел и отнимания (от других из них) тех или иных новых чисел. В том же духе можно разработать случаи неизменяемости суммы. Учителю необходимо обратить внимание на то, что не с первого же шага при прохождении этого учения можно с учениками прибегать к отвлеченным примерам и к отвлеченным же правилам. В этом случае, как и во многих других, важно даже не самое правило, а тот путь, по которому ученик должен пойти, чтобы это правило выработать и чтобы добиться складного, практически применимого и толкового его выражения. Не надо также сразу вводить выражения „увеличить одно из слагаемых на столько-то единиц", „уменьшить слагаемое на столько-то единиц", так как эти выражения придают слишком отвлеченный характер всему учению. Полезно ставить вопрос так, что сначала были даны такие-то числа, а потом, вместо одного из них, почему-то было взято другое, которое больше или меньше прежнего, смотря по надобности. Такая постановка вопроса придает учению более конкретный характер и сильнее действует на воображение учеников. Важно не то, что одно из слагаемых увеличено или уменьшено, а то, что взято совсем другое слагаемое. С математической точки зрения все учение об изменении суммы сводится к сочетательному закону: если

$$a+b=s$$

то

$$(a+c)+b=(a+b)+c=s+c$$

и

$$a+(b+c)=(a+b)+c=s+c.$$

Случаи быстрого нахождения суммы. Практические применения, которые можно извлечь из занимающих нас учений, состоят в сознательном и изящном способе производства четырех действий над целыми числами. Сюда относятся те случаи, когда, вместо рабского следования правилу письменного производства сложения над многозначными числами, можно прибегнуть к изустному отысканию суммы, не требующему никаких отдельных записей и правил. К таким случаям принадлежит прибавление таких чисел, как 99, 98, 97 и т. п., 999, 998, 397 и т. п., 9 999, 6 998, 8 997 и т. д., т. е. прибавление одного или нескольких чисел, которые близки к единице или нескольким единицам какого-либо разряда. В этих случаях сложение сводится к замене в одном из слагаемых двух или нескольких цифр другими, очень легко находимыми без помощи правила сложения. Например, для нижеследующих сложений не требуется ничего, кроме уразумения того обстоятельства, что мы, вместо того, чтобы прибавить некоторое число к другому, можем прибавить некоторое большее число к первому, с тем, чтобы от суммы отнять излишне прибавленные единицы. Как, например, прибавить к 428 число 9 изустно? (428 да 10 будет 438, долой один, — 437.) — На чем это основано? (На том, что, прибавив, вместо девяти, 10, мы получили сумму на одну единицу большую.) — Как прибавить 99 к 386 изустно? (386 да 100 будет 486, долой один, — 485.) Прибавить к 836 число 98 изустно (836 да 100 будет 936, долой два — 934.) — Разумно ли делать в таких случаях сложение по правилу письменного производства, т. е. начинать сложение с единиц низшего разряда? (Нет, не разумно.) — Как прибавить к 372 число 299 изустно? (372 да 300 будет 672, долой один, — 671.) И т. д. — Из только-что приведенного примера ясно, что сюда же относятся случаи сложения, когда одно из слагаемых незначительно отличается от однозначного числа единиц какого-либо высшего разряда, например, когда одно из слагаемых 299, 199, 498 и т. п., а также те случаи, когда мы можем пользоваться не правилом письменного сложения многозначных чисел, а прямым усмотрением внутреннего устройства числа. Например, когда к 345 надо прибавить 48, то, заметив, что 48 больше 45 только на 3 единицы, мы сейчас же можем написать, что искомая сумма 393, потому что $45+45=90$ и т. п.

Но для полной плодотворности этого учения, повторяем, необходимо его поставить на почву самых наглядных представлений, примерно, следующего характера: У двух мальчиков в руках орехи; в левой руке у каждого по 7 штук, в правой же у одного — 11 штук, у другого — 16; у кого из них больше и на сколько? — Два ученика должны сделать сложение: одному задано сложить 563 с 272, а другому — тоже 563, но с 273; у кого получится большая сумма? — Необходимо ли для решения этого вопроса сделать оба сложения? — Если требуется сложить два слагаемых и если, вместо одного из них, взять число большее, чем оно, на одну единицу, какая получится сумма? (Бо̀льшая, чем истинная сумма, на одну единицу.) — А если вместо одного из слагаемых взять число, бо̀льшее, чем оно, на несколько единиц, то какая получится сумма? — Если одно слагаемое *увеличить* на одну единицу, что случится с суммой? Если одно слагаемое увеличить на две единицы, что случится с суммою? — А если одно слагаемое увеличить на 17 единиц, что случится с суммою? — А если одно из слагаемых уменьшить на одну, на две, на несколько единиц?... — А если из слагаемых каждое увеличить на некоторое число? (Сумма увеличится на сумму прибавленных чисел.) — А если из слагаемых каждое уменьшить на некоторое число?.. — У мальчика в одном кармане 17 орехов, а в другом — 14; если он из первого кармана возьмет несколько орехов и положит их в другой, станет ли у него всех орехов больше или меньше, чем было прежде? (У него орехов будет столько же, сколько прежде.) — А если кто-нибудь другой из своих орехов положит ему в один карман десять штук, а из другого его кармана вынет десять штук, станет ли у нашего мальчика больше орехов, чем прежде, или меньше? (Нет, у него будет после этого столько же орехов, сколько было раньше.) — Если от одного слагаемого отнять несколько единиц и эти единицы прибавить к другому слагаемому, что случится с суммою? (Не изменится.) — А если одно из слагаемых увеличить на некоторое число, а другое слагаемое в то же время уменьшить на то же самое число, что случится с суммою? — Если одно из слагаемых *предварительно* увеличить на некоторое число, а другое — уменьшить на какое-нибудь другое число, изменится ли сумма? (Изменится.) — Как изменится? (Если мы к одному слагаемому прибавили число, большее того, которое мы от другого отняли, то сумма данных чисел увеличится, — в противном случае — уменьшится, — на разность между числами, из которых мы одно прибавили к одному слагаемому, а другое — вычли из другого).

Доказательств и утонченных рассуждений, основанных на определениях слагаемого, суммы и сложения, на этой ступени не надо. Это — слишком сильное средство для достижения весьма незначительных результатов. Неизменяемость суммы двух слагаемых тоже не нуждается в особенно тонких рассуждениях. Но, при непременном желании учителя поставить дело на почву отвлеченностей, это может быть выяснено с помощью трех строчек:

1) $256 + 315 = 571$, первоначальная сумма;
2) $268 + 315 = 583$, вторая сумма;
3) $268 + 303 = 571$, третья сумма.

Но вторая сумма больше первой на 12 единиц, т. е. мы ее увеличили, так как мы увеличили первое слагаемое; третья же сумма должна быть меньше второй на 12 единиц, потому что... и т. д. Стало-быть, мы первоначальную сумму сначала увеличили, а полученное на столько же уменьшили, — в конце концов и должна была получиться первоначальная сумма. Но стоит сравнить этот прием „объяснения" с целесообразною задачею о мальчике, перекладывающем орехи из одного кармана в другой (см. выше), чтобы убедиться в преимуществе конкретного примера пред отвлеченностями.

§ 3. Изменение разности.

На почву полной конкретности можно поставить также и учение об изменениях разности в зависимости от изменения уменьшаемого или вычитаемого и при одновременном изменении обоих на одно и то же или на разные числа. Прибегать к логическому рассуждению, основанному на определениях сложения и вычитания, и в этом случае не для чего. Это было бы даже прямо неуместным применением средства, слишком сильного для достижения данной цели, применением, которое отличалось бы опять-таки ненужною в этом случае и чуждою ученическим интересам диалектическою тонкостью. Всякому здравомыслящему ученику совершенно ясно, что если у него в одном случае мало перьев, и он из них кому-либо должен отдать некоторое число, а в другом случае у него у самого больше перьев, а должен он отдать столько же, то во втором случае у него останется перьев больше, чем в первом. Столь же ясно ему, что если у него в одном случае известное количество перьев и ему нужно некоторое число их отдать другому ученику, а в другом случае у него столько же перьев, сколько в первом, а отдать ему приходится больше, то у него в этом последнем случае останется меньше перьев. На почве подобных наглядных представлений учение об изменении разности или остатка поддается и скорой и интересной для учеников проработке. Только случаи одновременного изменения данных чисел при сложении и при вычитании могут потребовать некоторого разъяснения на примерах простейшего содержания. Всякая же иная проработка содержит в себе скрытые буквенные преобразования, а потому для учащихся более или менее недоступна. Иная проработка возможна именно с помощью буквенных преобразований и рассуждений такого рода: если

$$a + b = s,$$

то

$$(a + c) + (b - c) = s,$$

потому что

$$(a + c) + (b - c) = a + c + b - c = a + b.$$

Другой пример: если

$$a - b = d \text{ и если } c > e,$$

то

$$(a + c) - (b + e) = d + c - e,$$

потому что

$$(a + c) - (b + e) = a + c - b - e,$$

но

$$a + c - b - e = (a - b) + (c - e) = d + (c - e)$$

и т. п. Но подобные упражнения уместны не в том повторительном курсе арифметики, который чуждается, а в курсе арифметики, не чуждающемся буквенных преобразований.

Вероятно, наиболее целесообразно такое разъяснение, когда оно поставлено на почву конкретных целесообразных задач. Например: У мальчика 17 листов бумаги, он решил поделиться с товарищем: дать товарищу 9 листов, а остальные оставить себе; сколько у него после этого осталось бы? (8 листов.) Но отец, узнав об этом намерении сына, дал ему еще 3 листа бумаги для того, чтобы сын мог больше отдать товарищу, и мальчик действительно дал не 9, а на 3 листа больше, т. е. 12 листов; сколько у него осталось? (8 листов.) — Столько же, сколько он предполагал оставить себе до получения 3-х листов бумаги от отца? (Столько же.) — Отчего бы это могло случиться? (Оттого, что мальчик отдал товарищу и всю добавленную ему отцом бумагу.) — Двум мальчикам надо было сделать вычитание: одному надо было вычесть 2 358 из 7 569, а другому — 2 558 из 7 769; у кого из них получилась большая разность? (У обоих получилась одинаковая.) — Если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличить на одно и то же число, то как изменится от этого разность? (Не изменится.) — Если уменьшаемое и вычитаемое одновременно уменьшить на одно и то же число, то...? И т. п. — Но того же результата можно, хотя и труднее, добиться с помощью трех строчек, выражающих последовательные изменения результата. Пусть, например, дан случай:

1) $529 - 415 = 114$; первоначальная разность;
2) $530 - 415 = 115$; разность увеличилась на одну единицу;
3) $530 - 416 = 114$; вторая разность уменьшилась на единицу.

Применение учения об изменении разности в зависимости от данных чисел к производству вычитания некоторых многозначных чисел совершенно подобно тому же применению учения об изменении суммы к производству сложения тех же чисел. Это применение совершается (главным образом при вычитании чисел, близких к одной единице высшего разряда или к любому однозначному числу единиц высшего разряда) настолько просто, что не пользоваться им в тех случаях, когда оно встречается, по меньшей мере, неблагоразумно.

Как, например, вычесть изустно из 786 число 99? (Вычесть 100, а к полученному прибавить 1)... Почему можно таким образом вычесть 99?... Как изустно вычесть 998?... Как вычесть 299? 498? и т. д. Самые излюбленные некоторыми учителями примеры на письменное производство вычитания, когда письменное обозначение уменьшаемого содержит чередующиеся нули и единицы, а письменное обозначение вычитаемого содержит одни девятки, как раз надо вычислять не письменно. Если же их так вычислять, то именно для того, чтобы показать всю невыгоду этого способа вычисления в данном случае. Например, при разумном вычитании числа 999 999 из числа 1 101 010 надо рассуждать так: вычтем целый миллион, получим 101 010; но эта разность меньше искомой на одну единицу; стало быть, искомая разность 101 011.

Достойно внимания, что изменения суммы и разности можно хорошо изучить с учениками совершенно независимо от определений действий сложения и вычитания, опираясь лишь на *представления* учеников об этих действиях, на их непосредственное усмотрение, на интуицию.

§ 4. Изменения произведений.

Совсем иначе, чем учения об изменениях суммы и разности, должны быть поставлены учения об изменениях произведения. Дело в том, что умножение представляет собою действие, которое само по себе не отличается наглядностью и которое, если к нему применить требования наглядности, должно быть сведено к своему первоисточнику, а именно к сложению. Вследствие этого постановка учений об изменениях произведения в зависимости от всех изменений данных чисел заслуживает большого внимания и к терминологии этого действия и к внутреннему смыслу его. Самое производство умножения, помимо того, что оно основано на таблице умножения, содержит в своих промежуточных приемах много технических трудностей и особенностей. Охватить одним воображением даже только то изменение, которое получится в произведении двух чисел, если одно из них изменить, часто для учеников невозможно. Вот почему учение об изменениях произведения надо начинать с повторения определения умножения. Затем переходим к решению вопроса: что сделается с суммою каких угодно, хотя бы разных слагаемых, если каждое из них увеличить в несколько раз. Соответствующий ряд упражнений над увеличением множимого в несколько раз должен, следуя методе целесообразных задач, привести (но непременно на основании определения умножения, как *сложения* равных слагаемых, которое, впрочем, совершается на основании таблицы умножения) к раскрытию изменения произведения в зависимости от увеличения множимого в несколько раз. При этом полезно исходить опять-таки не из термина „увеличить в несколько раз", а из случая, когда вместо данного множимого берем другое, большее прежнего в два в три, в несколько раз. Точно так же и при увеличении множителя в несколько раз надо начинать с повторения и укрепления в сознании учеников того значения, которое придается множителю. При умножении множитель, согласно этому значению, обозначает, сколько именно раз надобно взять множимое слагаемым в данном случае. Если число слагаемых увеличивается, то и сумма увеличивается, — это ученику понятно. Но ему может показаться не вполне ясным тот факт, что если слагаемые равны между собою и если слагаемых в одном случае взято вдвое, втрое, во сколько угодно раз больше чем в другом, то и сумма в этом случае будет не только больше, но именно во столько же раз больше. Только с помощью целесообразных задач, притом более или менее многочисленных, можно добиться от учеников такого понимания закона изменения произведений, которое достаточно близко к вполне сознательному и почти конкретному представлению истинного положения вещей.

Упражнения эти должны отличаться от отвлеченной постановки вопросов более или менее значительно, сводясь к следующему: что значит помножить одно число на другое? (Это значит — взять первое из них слагаемым столько раз, сколько в другом единиц, но пользуясь при вычислениях так называемою таблицею умножения.) Если каждое слагаемое увеличить вдвое, что сделается с суммою?.. — Например:

$$7 + 6 + 4 + 5 + 11 = 33;$$
$$14 + 12 + 8 + 10 + 22 = \text{ ? и т. п.;}$$

или, например:

$$\begin{aligned}7+7+7+7 &= 28;\\ 14+14+14+14 &= ?\\ 9+9+9+9+9 &= 45;\\ 18+18+18+18+18 &= ?\\ 27+27+27+27+27 &= ?\end{aligned}$$

Если каждое слагаемое увеличить в несколько раз, тогда что случится с суммою? — А если множимое увеличивают в два раза, что это значит? (Это значит, что каждое из слагаемых увеличено в два раза.) — Почему? (Потому что множимое есть слагаемое.) — Примеры:

$$231 \times 5 = 1\,155; \qquad 462 \times 5 = 2\,310,$$

причем 462 вдвое более, чем 231. — Одному мальчику надо помножить 378 на 253; у другого же множимое в 7 раз более, чем у первого, а множитель тот же; который мальчик должен получить большее произведение и во сколько раз большее? Если множимое взять в несколько раз большее, а множитель оставить без изменения, то какое получится произведение? (Если перемножить два числа, а потом множимое взять новое, в несколько раз большее, множитель же оставить без изменения и снова произвести умножение, то произведение получится во столько же раз большее, чем первоначальное, во сколько раз большее множимое мы взяли вместо первоначального, или, короче: если множимое увеличить в несколько раз, а множитель оставить без изменения, то произведение увеличится во столько же раз.)

Чрезвычайно важно, чтобы ученики понимали, что сначала надо „*перемножить* два числа, а потом взять новое множимое, в несколько раз большее, множитель же оставить без перемены и *снова* произвести умножение". Пусть они впоследствии обращаются к более краткой формулировке правила. Это важно потому, что в краткой формулировке слишком бегло намечены те изменения и действия, которые на самом деле производятся и которые должны быть принимаемы во внимание при составлении правила. Такой же, приблизительно, порядок упражнений с помощью целесообразных задач полезно соблюдать и при увеличении множителя в несколько раз. С математической точки зрения, все учение об изменениях произведения сводится к законам сочетательному и распределительному, согласно которым можно установить, что если

$$a \cdot b = p,$$

то

$$\begin{aligned}&1)\ (a \cdot c) \cdot b = (a \cdot b) \cdot c = p \cdot c,\\ &2)\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = p \cdot c\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&3)\ (a + c) \cdot b = ab + cb = p + c \cdot b,\\ &4)\ a \cdot (b + c) = ab + ac = p + ac.\end{aligned}$$

При этом в первых двух тождествах умножение на c можно заменить делением на c.

Что *обозначает*, что выражает, что „показывает" множитель? (Множитель обозначает, сколько раз надо взять слагаемым множимое.) — Если вместо данного множителя поставить другой, вдвое больший, — что это будет обозначать? (Это будет обозначать, что слагаемых надо взять вдвое более.) — Какая после этого получится сумма? (Вдвое большая.)

$$7+7+7=21; \quad 7+7+7+7+7+7=42.$$

Мы можем смотреть на это так:

$$7+7+7=21; \quad 7+7+7+7+7+7=21+21\ldots \text{ и т. п.}$$

Один мальчик должен помножить 317 на 37, а другой должен помножить тоже 317, но не на 37, а на число в 7 раз большее, т. е. на 259. Кто из них получит большее произведение и во сколько раз большее?.. Если множитель взять в несколько раз больший, а множимое оставить без изменения, то какое получится произведение? (Если перемножить два числа, а потом множитель взять в несколько раз больший, множимое же оставить без изменения, и снова помножить множимое, но на новый множитель, то произведение получится во столько же раз большее, чем первоначальное, во сколько раз больший множитель мы взяли вместо первоначального множителя, или короче, если множитель увеличить в несколько раз, а множимое оставить без перемены, то произведение увеличится во столько же раз.) — Всегда ли можно целое число уменьшить в несколько раз, чтобы притом получилось снова целое число? (Нет, не всегда.) Например? — Есть ли такие числа, которые можно уменьшить лишь во столько раз, сколько единиц в этом числе?.. — 5 можно уменьшить только в 5 раз, 17 только в 17 раз, 23 только в 23 раза... — Если множимое уменьшить в несколько раз, то..?

$$20\times 3=60; \quad 10\times 3=30; \quad 5\times 3=15.$$

Почему во втором и в третьем случаях получается меньше? Потому что

$$20\times 3=20+20+20, \text{ — каждое слагаемое } 20;$$
$$10\times 3=10+10+10, \text{ — каждое слагаемое } 10;$$
наконец $$5\times 3=5+5+5, \text{ — каждое слагаемое } 5.$$

А если множитель уменьшить, множимое же оставить без перемены то?.. — Например, $17\times 30=510$; $17\times 15=255$; $17\times 10=170$ и т. д.

Почему во втором и в третьем случаях получаются меньшие произведения? (Потому что в первом случае 17 взято *тридцать* раз слагаемым, а во втором оно взято всего *пятнадцать* раз, т. е. одинаковых слагаемых вдвое меньше, и т. д.) Если бы этих упражнений оказалось недостаточно, то можно обратиться к ряду равенств такого вида:

$$\begin{aligned}
7+7+7+7+7+7 &= 42 \text{ (6 раз 7)};\\
7+7+7 &= \text{? (3 раза 7)};\\
9+9+9+9+9+9+9+9 &= 72 \text{ (8 раз 9)};\\
9+9+9+9 &= \text{? (4 раза 9)};\\
4+4+4+4+4+4+4+4+4 &= 36 \text{ (9 раз 4)};\\
4+4+4 &= \text{? (3 раза 4)}.
\end{aligned}$$

Можно обратиться также к ряду равенств, где меньшее количество слагаемых записано раньше, а большее — потом.

Во всяком случае обращаться к общему выражению правила следует лишь тогда, когда предварительно ученики научились это правило выражать для частных случаев. Т. е. не надо требовать, чтобы ученики сразу выражали известное и многословное правило относительно того, во сколько раз произведение увеличивается, если мы множитель увеличим в некоторое число раз. Необходимо, чтобы ученики сначала уразумели и научились выражать, что если множимое увеличить в 2 раза, а множитель оставить тот же самый, то произведение увеличивается тоже в 2 раза; если же множитель увеличить в 2 раза, а множимое оставить без изменения, то произведение тоже увеличится в 2 раза и т. п. Равным образом ученики могут для начала и в рассуждениях своих, рассматривая, например, два произведения 17×30 и 17×15, говорить не так: „второе произведение в два раза меньше, потому что множитель в нем в два раза меньше", а просто так: „второе произведение в 2 раз меньше потому, что в нем взято *пятнадцать* раз по 17, а в первом взято *тридцать* раз по 17", с ударениями на словах пятнадцать и тридцать.

§ 5. Одновременное изменение сомножителей.

Весьма значительные трудности приходится преодолевать учителю и ученикам при усвоении последними закона изменения произведения в зависимости от одновременного увеличения множимого и множителя в одно и то же или в различное число раз. Обыкновенно практикуемые в этих случаях рассуждения не только страдают неясностями, но даже не всегда удовлетворительны в логическом смысле. Говорят часто так: множимое мы увеличили в 5 раз, а множитель — в 3 раза, а *потому* произведение увеличилось в 15 раз. При этом „рассуждения" ведутся иногда так: множимое увеличили в 5 раз, от этого произведение увеличилось тоже в 5 раз; множитель увеличили в 3 раза, от этого произведение увеличилось в 3 раза, а *потому* и т. д. Учащийся при этом приучается считать доказательством такое рассуждение, которое не имеет ничего общего с доказательством. Сверх того, он часто не может отказаться от вывода такого рода: произведение увеличилось в 5 раз и оно же увеличилось в 3 раза; почему же оно увеличилось не в 8 раз ($5 + 3 = 8$), а в 15 раз? Надобно поставить вопрос не об одновременном увеличении сомножителей, а о *последовательном* их изменении: сначала *множимое* взяли большее, а потом уже большее множимое помножили на новый, увеличенный в несколько раз, множитель. С точки зрения сочетательного закона дело представляется просто: если $a \cdot b = s$, то $(a \cdot c) \cdot (b \cdot d)$ будет равно $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$, т. е. $s \cdot (c \cdot d)$.

Так называемое одновременное увеличение сомножителей в одно и то же или в разное число раз можно поставить на следующие точки зрения: одному мальчику надо было помножить 317 на 28, а у другого множимое в пять раз больше, чем 317, множитель же в четыре раза более, чем 28, т. е. второму надо было умножить 1 585 на 112; который был должен получить большее произведение? (Второй.) — Во сколько раз большее? — Множимое у 2-го больше в пять раз, чем у 1-го, а множитель — в четыре раза; во сколько раз большее произведение получится у 2-го? (Обычный, но не верный ответ: в девять раз большее.) — Рассудим это так (писать при этом на доске только цифры!):

$317 \times 28 = 8\,876$, — произведение, которое должно получиться у 1-го мальчика.

Предположим, что у нас есть еще 3-й мальчик, и пусть он возьмет множимое такой же величины, какое было у 2-го, т. е. большее, чем у первого мальчика, в 5 раз, а множитель такой же величины, какой был у первого мальчика. Так как $317 \times 5 = 1\,585$, то $1\,585 \times 28 = 44\,380$, и произведение у 3-го мальчика в 5 раз больше, чем произведение, полученное первым мальчиком. — Теперь возьмем тот случай, какой у нас есть на-лицо, случай 2-го мальчика, — ему надо помножить 1 585 не на 28, а на число вчетверо большее, т. е. на 112, и он получит $1\,585 \times 112 = 177\,520$, — произведение, которое получил второй мальчик...

У нас теперь записано на доске:

$$317 \times 28 = 8\,876;$$
$$1\,585 \times 112 = 177\,520;$$
$$1\,585 \times 28 = 44\,380.$$

Повторите это с самого начала! — Первому мальчику надо было помножить? Второму?.. Третьему?.. — К доске!.. и т. д. — Теперь отвечайте: первое произведение?.. второе?.. третье?.. (Первое — 8 876, второе — 177 520, третье — 44 380.) — Которое больше: третье или первое? — Во сколько раз? — Почему?.. Которое произведение больше: второе или третье? Во сколько раз? Почему?.. — А во сколько раз второе больше первого?.. (Второе содержит таких чисел, как третье, *четыре*, но каждое третье содержит в себе таких чисел, как первое, *пять*. Стало-быть, второе содержит в себе таких чисел, как первое, 20, т. е. четыре раза 5.)

Это упражнение на тех же, а затем на иных числах надо повторить несколько раз по возможности так, чтобы все ученики побывали у доски: сначала двое-трое из сильных, затем средние, затем опять двое-трое сильных, затем слабые. Учитель, повторяем, не должен думать, что можно, как это обыкновенно делается, обойтись *рассуждением* такого рода: от того, что множимое увеличилось в 5 раз, произведение увеличилось тоже в 5 раз, а от того, что множитель увеличился в 4 раза, произведение должно было увеличиться в 4 раза. Весь вопрос именно в том и состоит, *какое произведение* должно было увеличиться в 4 раза. Беда в том, что из такого рассуждения дети, как указано выше, делают вывод, что произведение увеличится в 9, а не в 20 раз. Правило, если ученикам необходимо его усвоить, может гласить так (несмотря на кажущуюся многословность правила, оно, при выразительном чтении его, отмеченном курсивами, усваивается с пользой преимущественно для развития речи учеников): „Если множимое увеличить в *несколько* раз и множитель *тоже* увеличить во *столько* же или в *иное* число раз, то произведение увеличится во *столько* раз, сколько единиц заключается в *произведении двух чисел*, из которых одно выражает — во сколько раз увеличили *множимое*, а другое — во сколько раз увеличили *множитель*“. Те же упражнения и правило должны быть проработаны для случая, когда каждый из сомножителей уменьшают в несколько раз. Учитель не должен придавать особенно большого значения общим правилам: не в них сила и не в них образовательное влияние арифметики на учеников. Целесообразнее правило выражать по возможности в связи с числами, а не в виде отвлеченном, — тем более, что отвлеченное правило не только затруднительно, но, в придачу, чаще всего и практически бесполезно. Оно, как это легко видеть, страдает неизбежным многословием. Только класс, особенно даровитый и склонный к подобным число-словесным упражнениям в составлении сложных правил, может извлечь некоторую пользу из работы над составлением этого правила для своей речи. Достаточно, если ученики умеют *разбираться* в случаях подобного рода и никогда не ошибаются относительно истинного изменения произведения в том или другом частном случае.

Случай одновременного увеличения одного из сомножителей в некоторое число раз и уменьшения другого из них в то же или в иное число раз представляет для учеников также не мало трудностей как в смысле логическом, так и в смысле ясного уразумения самого положения дела. Не подлежит сомнению, что ученики без особенного труда выучат на память правило и даже рассуждения, относящиеся до этого случая. Легко сказать: „от увеличения множимого в пять раз произведение должно увеличиться во столько же раз, а от уменьшения множителя в 5 раз произведение должно уменьшиться во столько же раз: стало-быть, произведение в одно и то же время (?) должно увеличиться и уменьшиться в одно и то же число раз, а потому оно останется без перемены". Но сказать это еще не значит постигнуть истинное положение дела и истинную причину этого положения. В этом правиле либо надо разобраться в результате одновременного действия двух причин (что не только для умов незрелых часто весьма затруднительно), либо же отбросить рассуждение об одном произведении, будто бы претерпевающем одновременное увеличение и уменьшение в одно и то же число раз, и обратиться к истинному положению вещей.

Оно может быть сведено к следующему: даны два сомножителя 27 и 10; запишем их... — Пусть даны другие два сомножителя, из которых один вдвое более 27, а второй тоже равен 10, т. е. 54 и 10; запишем и их... — Пусть даны еще два сомножителя: один 54, а другой 5, т. е.?.. — Когда все будет записано, получим:

$$27 \times 10 = 270;$$
$$54 \times 10 = 540;$$
$$54 \times 5 = ?$$

Второе произведение больше первого в два раза, а третье — меньше второго в два раза; дело обстоит так: мы сначала увеличили некоторое число вдвое, а потом *полученное число* (произведение) уменьшили вдвое: от этого должно было бы получиться то же число, что было раньше.

Все дело именно в том и состоит, что мы рассматриваем не сразу новое произведение, а стараемся проследить, чрез посредство вспомогательного случая, какие должно претерпеть изменения сначала одно, а потом — другое произведение, полученное как бы из первого. Прием введения вспомогательной величины в математике употребляется довольно часто, и только в арифметике к нему почему-то не прибегают даже в тех случаях, когда без него обойтись довольно трудно. [1]

[1] Из области геометрии вспомним случай отыскивания отношения площади одного прямоугольника к площади другого, у которого основание и высота отличаются от основания и высоты первого. Для вывода этого отношения прибегают к вспомогательному прямоугольнику, высота которого равна высоте одного, а основание — основанию другого из данных прямоугольников. Подобный же

Законы рассмотренных выше „изменений" произведения представляют, к сожалению, очень мало применений к производству вычислений над числами. Гораздо более ценно освещение этих законов с точки зрения сочетательного закона умножения. Оно лучше формулируется с помощью буквенных обозначений, которые в арифметике вполне уместны.

Только умножение чисел на 25 и на 125 еще допускает применение упомянутых законов. Так, например, помня, что $25 \times 4 = 100$, можно быстро вычислить, что $25 \times 64 = 1\,600$, либо исходя из того, что 25×64 меньше, чем 6 400, в 4 раза, либо исходя из того, что это произведение должно быть больше, чем 100, в 16 раз.

Еще меньше применений имеет закон изменения произведения в тех случая, когда один сомножитель увеличен (или уменьшен) в некоторое число раз, а другой уменьшен (или увеличен) в некоторое другое, кратное. число раз. Рассуждениями отвлеченными здесь многого тоже не достигнуть.

Поэтому лучше всего начинать с ряда задач и вопросов такого рода: „Если множимое увеличить в 15 раз, а множитель уменьшить в 3 раза, то?.. — Если множимое увеличить в 3 раза, а множитель уменьшить в 12 раз, то?.. — Если множимое уменьшить в 16 раз, а множитель увеличить в 4 раза, то?.. — Если множимое уменьшить в 4 раза, а множитель увеличить в 20 раз, то?.." — и т. д. — Примеры в этом случае следует располагать в четыре строчки, обращаясь раньше всего к уменьшению в несколько раз:

$17 \times 12 = 204$; первоначальное произведение;
$17 \times 4 = 68$; в 3 раза меньше, чем первоначальное;
$51 \times 4 = 204$; опять первоначальное;
$255 \times 4 = 1\,020$; в 5 раз большее, чем первоначальное,

при чем 255 в 15 раз больше, чем 17 (почему — легко убедиться из строчек), а 4 в 3 раза меньше, чем 12; или: пусть множимое уменьшено в 20 раз, а множитель увеличен в 4 раза:

$160 \times 7 = 1\,120$; первоначальное произведение;
$8 \times 7 = 56$; меньше первоначального в 20 раз;
$8 \times 140 = 1\,120$; снова первоначальное произведение;
$8 \times 28 = 224$; в пять раз меньше первого.

§ 6. Увеличение одного из сомножителей на некоторое число.

Гораздо важнее для производства умножения некоторых многозначных чисел на некоторые другие оказывается усвоение учениками законов изменения произведения в тех случаях, когда множимое или множитель увеличиваются или уменьшаются на некоторое число. Эти законы обыкновенно в учебниках арифметики не излагаются. Они основаны на распределительном законе умножения относительно сложения, по которому: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $a \cdot (b + c) = ab + ac$. Начинать усвоение относящихся сюда законов можно со случая, когда взят множитель на одну единицу больший, а затем — когда множитель взят на несколько единиц больший первоначального множителя. Потом можно

прием употребляется для нахождения отношения объема одного прямоугольного параллелепипеда к объему другого, отличающегося от первого своими измерениями. В арифметике же к вспомогательным величинам прибегают при решении задач на сложное тройное правило с помощью пропорций, и можно прибегать также в рассмотренных выше случаях.

перейти к случаю, когда множимое взято на одну единицу большее или меньшее, и, наконец, можно обратиться к случаям, когда взято множимое на несколько единиц большее. Это учение получает широкое применение при умножении чисел на 9, 99, 999, 98, 998, 97, 997 и т. д., а также при умножении на числа, близкие к какому-либо однозначному числу единиц высшего разряда: на 298, на 396 и т. д. Более того, можно утверждать, что умножение почти на все *двухзначные* числа допускает те или иные упрощения в зависимости от только что рассмотренных и нижеприведенных случаев пользования внутренним составом множимого или множителя.

Подготовка к этим упражнениям может быть поведена в следующем направлении: Если множитель взять на одну единицу больше прежнего, что сделается с произведением? (К произведению прибавится еще одно множимое.) — Почему? (Ответ должен основываться на том, что *значит* умножить одно число на другое.) — Если множитель увеличить на две, на три, на несколько единиц, что сделается с произведением? (К нему прибавится столько множимых, сколько единиц прибавлено к множителю.) — Если множимое увеличить на одну единицу, то к произведению прибавится столько таких же единиц, сколько отвлеченных единиц во множителе... — Пример: метр сатина стоит 4 руб.; что заплачено за 9 *м*? — А если бы метр сатина стоил 5 руб., то было бы заплачено за 9 *м* на 9 руб. больше. — Если ко множимому прибавить несколько единиц, то к произведению прибавится это число единиц, помноженное на множитель... — Если множитель уменьшить на одну единицу, то?.. — Если множитель уменьшить на несколько единиц, то?.. Если множимое уменьшить на одну единицу, то?.. — Если множимое уменьшить на несколько единиц, то?.. — И т. д.

Если для учеников будет затруднительно сразу отвечать на эти вопросы, то можно предварительно обратиться к целесообразным задачам или вычислениям; например, требуется сделать ряд умножений:

27×16, 27×17, 27×18 и т. д.;
27×15, 27×14, 27×13 и т. д.;

или же:

27×16, 28×16, 29×16 и т. д.;
26×16, 25×16, 24×16 и т. д.

Весь вопрос в том — нельзя ли, не делая умножений, определить — на сколько каждое из произведений больше или меньше другого из них?

Сокращения при отыскании некоторых произведений.

Затем можно перейти к ряду вопросов, относящихся к сокращенному нахождению произведения некоторых чисел: как умножить 276 на 9? девятью 6 — пятьдесят четыре, 4 пишу, 5 в уме, и т. д.) — Но можно и иначе: помножим на 10, а из полученного вычтем 276... — Почему?.. — Как помножить 276 на 99?.. — Можно и так: помножить на 100, а из полученного вычесть 276. Почему?.. — Как помножить 387 на 98?.. — Можно и так: помножить 387 на 100, а из полученного вычесть дважды взятое 387. — Что скорее поведет к цели? — Где меньше поводов к ошибкам: при умножении на 9, или же при вычитании?.. — Что удобнее?

Располагать вычисления можно так;

$787 \times 9 =$	$637 \times 99 =$	$267 \times 98 =$
7 870[1]	63 700[1]	26 700[1]
— 787	— 637	— 534

Как помножить 78 на 25? . . — Можно и так: 78 помножить на 100 и вычислить четверть полученного. . . — Что скорее поведет к цели? — Где больше умножений? — Легко ли разделить число на 4? — Как помножить 789 на 75? . . — Можно и так: 789 помножить на 100, а из полученного числа вычесть четверть этого последнего числа. . . — Почему? (потому что 75 составляет 3/4 сотни); или: надо было взять 789 слагаемым 75 раз; мы взяли его слагаемым 100 раз, т. е. лишних 25 раз, и этот излишек составляет одну четверть сто раз взятого множимого. — Как умножить число на 15? . . — Можно и так: к удесятеренному множимому прибавить половину удесятеренного множимого. — Как помножить на 125?. . — Можно и так: к сто раз повторенному множимому прибавить четверть полученного числа. — Как помножить число на 175? . . — Можно и так: от двести раз повторенного множимого отнять восьмую долю полученного числа. . . — Как помножить число на 225? (К двести раз повторенному множимому прибавить? . .) — Как помножить число на 375? . . (Намек: 75 составляют какую долю трехсот?) — Как помножить число на 525? (Умножить на 600 и из полученного вычесть восьмую долю полученного.) — Как помножить число на 328? (Помножить на 8, полученное на 40, и оба произведения сложить.) — Как помножить число на 246? ($240 = 6 \times 40$!) — Как — на 568? ($560 = 8 \times 70$.) — Как помножить на 369? ($360 = 9 \times 40$.) — На 426, на 427, на 486, на 459, на 567, на 639, на 637, на 729, на 366, на 357? И т. п.

Располагать вычисления можно следующим образом:

$79 \times 25 =$	
7 900 : 4	(Этой строки можно и не писать.)
$794 \times 125 =$	
79 400	
+ 19 850	(четверть первого числа, вычисляем без записей.)
$794 \times 75 =$	
79 400	
— 19 850	(то же!)
$794 \times 225 =$	
158 800	(200 раз 794)
+ 19 850	(восьмая доля первого числа, вычисляемая без записей!)
$794 \times 175 =$	
158 800	
— 19 850	(разница только в последнем действии.)
$794 \times 375 =$	
238 200	(300 раз 794)
+ 59 550	(четверть этого числа.)
$794 \times 287 =$	
5 558	(7 раз 794)
+ 222 320	(40 раз 5 558.)

[1] Эти нули можно *мысленно* присоединить к множимому, тогда сокращение работы получится еще более значительное.

Полезно, для сокращения вычислений, научиться быстрому умножению на 11, причем располагать вычисление следует хотя бы так:

$$\frac{794 \times 11 =}{794} \;;$$

тогда складывать надо цифры, подписанные под множимым, с цифрами множимого.

Из этого очень большие выгоды можно извлечь при умножении на 275, так как $275 = 11 \times 25$, а потому располагать это вычисление можно так:

$$\begin{array}{r} 794 \times 275 = \\ \hline 19\,850 \text{ (25 раз 794)} \\ +\,198\,500 \text{ (250 раз 794).} \end{array}$$

Если вышерассмотренные случаи не только показаны, но и усвоены, и если ученики, вместе с учителем, всегда будут пользоваться упрощениями, то цель более или менее подробного изучения законов этих изменений произведения достигнута. Но, помимо этого, указанные случаи важны и в других двух отношениях: а) благодаря им ученики лучше уясняют себе состав произведения из слагаемых и тем самым приобретают бо́льшую власть над умножением и его особенностями, и б) благодаря им ученики вообще приучаются к более сознательному производству четырех действий, пользуясь не только тем действием, которое требуется по самому смыслу вопроса, но и теми, которые вытекают из более глубокого проникновения в сущность этого вопроса.

Приводим некоторые записи и некоторые способы нахождения произведений в следующих частных случаях:

а) Множитель — двухзначное число, одна из цифр которого — единица:

$$\begin{array}{l} 876 \times 17 = 14\,892\text{[1]} \\ \hline 6132 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 876 \times 71 = 62\,196\text{[2]} \\ \hline 6132 \end{array}$$

б) Множитель — двухзначное число, представляющее собою разность между некоторым числом десятков и таким же числом единиц, например: $18 = 20 - 2$; $27 = 30 - 3$; $45 = 50 - 5$; $54 = 60 - 6$; $63 = 70 - 7$; $72 = 80 - 8$.

$$\begin{array}{ll} 876 \times 27 = 23\,652 & \\ \hline 26280 \ldots\ldots\ldots & \text{произведение множимого на } 30; \\ -\,2628 \ldots\ldots\ldots & \text{» \quad » \quad » } \; 3. \end{array}$$

При этом два умножения заменяются одним.

в) Умножение заменяется делением:

$$\begin{array}{l} 376 \times 5 = 1880 \\ \hline 3760 : 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 379 \times 50 = 18\,950 \\ \hline 37900 : 2 \end{array}$$

г) Умножение на двухзначное число, одна цифра которого более другой на одну единицу:

[1] Произведение из 876 на 10 не записано, и за запись этого произведения принята запись множимого, мысленно снабженная нулем вместо знака умножения.

[2] Произведение множимого на 1 не записано, и за запись этого произведения принята запись множимого.

893 × 56 = 50 008

44650 .... произведения на 50
4465 .... „ „ 5
893 .... „ „ 1

367 × 67 = 24 589

22020 .... произведения на 60
2202 .... „ „ 6
367 .... „ „ 1

837 × 43 = 35 991

2511 .... произведения на 3
25110 .... „ „ 30
8370 .... „ „ 10

639 × 65 = 41 535

3195 .... произведения на 5
31950 .... „ „ 50
6390 .... „ „ 10

Само собою разумеется, что чем больше ученикам предоставляется свободы в разумном выполнении подобных вычислений, тем лучшие результаты достигаются при обучении детей изящному производству действий.

Ученики прежде всего должны освоиться с умножением на 5, 25, 75, 175, 225, 375, 45, 450. Для того, чтобы достигнуть упрощения при умножении на эти числа, ученики всегда должны принимать во внимание, что 25 — четверть сотни, 75 — три четверти одной сотни или 1/4 трех сотен; что 500 — половина тысячи, а 50 — половина сотни и т. д. Благодаря этому вниманию они всегда вместо того, чтобы помножить 79 на 25, что потребует двух частных произведений, разделят 7900 на 4, что изустно делается очень легко и просто. Для умножения какого-нибудь числа на 125 можно переписать множимое, снабдить его двумя нулями, что будет 100 раз повторенное множимое, а к полученному прибавить четверть этого числа, каковую четверть можно вычислить без всяких посторонних записей. Для того чтобы помножить какое-нибудь число на 75, можно переписать множимое, снабдить его двумя нулями справа, вычислить (тоже без всяких посторонних записей) одну четверть полученного числа и эту четверть вычесть из сто раз повторенного множимого. Для того, чтобы какое-нибудь число помножить на 225 или 175, можно множимое помножить на 200 и, вычислив восьмую долю полученного числа, прибавить или отнять ее от 200 раз взятого множимого, смотря по тому, какое из этих двух действий нам нужно. Для умножения числа на 375 можно множимое помножить на 300 и к полученному прибавить одну четверть полученного произведения. Для того, чтобы помножить число на 1125, можно его помножить только на 1000 и к полученному числу прибавить одну восьмую этого числа, так как 125 составляют восьмую долю тысячи. Для того, чтобы число помножить на 875, можно число помножить на 1000 и из полученного вычесть восьмую долю этого последнего. Для того, чтобы помножить на 450, можно помножить на 500 и из полулученного вычесть десятую долю полученного произведения.

Иногда упрощения подобного рода могут быть практикуемы и для чисел, близких к только что рассмотренным множителям, но удобно это только в случаях, когда приходится делать одни деления и сложения. Например, для умножения числа на 378 можно помножить его на 300, к полученному прибавить 1/4 полученного и утроенное множимое, которое отличается от первого частного произведения только отсутствием двух нулей на месте единиц и десятков. Не безынтересно сокращение, которого можно достигнуть при умножении на 11 и которое сводится к два раза сделанной записи множимого, из которых одна отодвинута направо или налево от другой на одну цифру. Это сокращение само по себе очевидно, но особенную важность оно приобретает, если им пользоваться для умножения на 275, принимая во внимание что $275 = 11 \times 25$, т. е. производя это умножение следующим образом: сначала умножаем число на 11, к полученному результату приписываем два нуля и это число делим на 4, каковой результат легко достигается без всяких посторонних записей и представляет собою окончательное произведение.

Некоторого внимания заслуживает также тот особенный случай умножения чисел на трехзначный множитель, когда высшие две цифры множимого вместе обозначают число кратное цифре единиц, т. е. равное произведению единиц данного числа на некоторое однозначное число. Таковы, например, числа 123, где $12 = 3 \times 4$, или 124, где $12 = 4 \times 3$, а также 147, где $14 = 7 \times 2$, или 153, где $15 = 3 \times 5$, или, наконец, 164, где $16 = 4 \times 4$, 168, где $16 = 8 \times 2$: 189, где $18 = 9 \times 2$; 217, где $21 = 7 \times 3$, и т. д. В особенности большие сокращения это допускает в тех случаях, когда все три цифры различны, например, при умножении на 486, где $48 = 6 \times 8$, на 639, где $63 = 7 \times 9$, на 729, где $72 = 9 \times 8$, и т. п. Способ производства действия умножения в подобных случаях очень прост. Надо записать произведение множимого на единицы множителя (см. выше, стр. 73), под единицами этого частного произведения поставить нуль, а рядом слева надлежащим образом подписать произведение из первого частного произведения на недостающий сомножитель. Так, например, при умножении на 486 мы можем умножить данное число на 6, полученное же частное произведение помножим на 80, притом, конечно, не делая никаких лишних записей, а только записав нуль под первой цифрой первого частного произведения и записывая надлежащим образом под остальными цифрами этого частного произведения — произведение его на 8.

Сообщение особенных способов вычисления преследует две цели: 1) ученики, действительно, приобретают власть над изящным вычислением произведения, 2) благодаря этим упражнениям ученики более полно и самостоятельно овладевают искусством вычисления, не подчиняясь исключительно правилам, а пользуясь своим здравым смыслом.

§ 7. Необходимость постоянного внимания к сокращенным вычислениям.

Все разработанные выше и другие сокращения в вычислениях лишь в том случае могут принести ученикам пользу, если и ученики, и учитель впоследствии не забывают различных приемов вычисления и не смотрят на них, как на нечто обязательное только на данной и вовсе не обязательное на остальных ступенях обучения. Только при таком неуклонном внимании ко всему пройденному и повторенному возможно ожидать от так называемого повторительного отдела той пользы, какую он принести в состоянии. В противном случае почти весь повторительный отдел, как в том убеждает и практика, ни к чему хорошему не ведет и очень скоро надоедает ученикам повторением скучнейших правил и бесплоднейших определений.

§ 8. Бесплодность учения об изменении частного.

Учение об изменениях целого частного страдает в арифметике неизбежною неполнотою и почти полным отсутствием приложений, пока мы находимся в области целых отвлеченных чисел. Эти изменения должны быть рассматриваемы отдельно для каждого из следующих случаев: а) когда делимое делится нацело без остатка и когда деление это совершается без остатка также после изменения одного или обоих данных чисел, и б) когда делимое с самого начала не делилось на делитель нацело без остатка и когда измененное делимое не делится на данный делитель, или данное делимое не делится на измененный делитель. Правила для этих изменений должно составлять с большою осторожностью. Так, например, если делимое не делится нацело без остатка на делитель (например 25 : 3), то нельзя сказать, что целое частное от увеличения делимого в 10 раз увеличится тоже ровно в 10 раз. Большинство правил должно относиться к случаям, наиболее часто встречающимся. Невозможно, например, для целых чисел составить правила для случая, когда делимое увеличено в несколько раз, а делитель тоже увеличен, но в некоторое другое число раз. Этот случай требует иногда весьма хороших знаний из области учения о дробях. При составлении правил надо иметь в виду только случаи, при которых делимое делится на делитель нацело без остатка. Но из этого не следует, чтобы от учеников скрывалась трудность составления общих правил. Опираться при изучении изменений частного на определение деления также не следует. Это создало бы только большую совокупность соображений, носящих слишком отвлеченный характер. Правила должны гласить примерно так: если делимое делится нацело без остатка на делитель и если делимое увеличить в несколько раз, то частное увеличится во столько же раз; если делимое делится на делитель нацело без остатка, если делимое уменьшить в несколько раз и если после этого делимое тоже разделится на делитель нацело без остатка, то частное уменьшится во столько же раз и т. п.

Требуется выполнить деление на известное число одинаковых частей $20\,\underline{|2}$, $40\,\underline{|2}$, $60\,\underline{|2}$. — Какие частные больше? — Во сколько раз второе частное больше первого? — Во сколько раз 3-е частное больше 1-го? — Почему? (Делимое — целое, делитель — число одинаковых частей, частное — часть; целое больше, *деление совершается без остатка*, и каждая часть должна быть во столько же раз больше первого частного.) — Возьмем примеры:

$$21\,\underline{|2},\ 42\,\underline{|2},\ 63\,\underline{|2},\ 84\,\underline{|2}.$$

Первое частное 10 (остаток 1), второе 21 — не ровно вдвое больше, третье 31 (остаток 1) — не ровно втрое больше, четвертое частное 42, — не ровно в четыре раза больше, чем первое частное (10)... — Если делимое *делится на делитель нацело без остатка*, и если делимое увеличить в несколько раз, то частное увеличится *ровно* во столько же раз. — Почему? (Делимое — целое, делитель — число равных частей, а частное — часть; если целое больше вдвое, то и часть должна быть вдвое больше.) — Если делимое *делится на делитель без остатка* *нацело*, если делимое уменьшить в несколько раз, и *если после этого* делимое все-таки разделится на делитель нацело без остатка, то частное тоже уменьшится ровно во столько же раз... [1] — Если делимое делится на делитель *без остатка нацело*, если делитель увеличить в несколько раз и если *после этого* делимое тоже будет делиться на делитель без остатка нацело, то частное уменьшится *ровно* во столько же раз, во сколько раз увеличили делитель... — Нужно ли добавлять, что оба раза делимое делится на делитель без остатка нацело? (Нужно.) — Пример:

48 |6 = 8 (без остатка); 48 |18 = 2, остаток 12.

Второе частное меньше первого не в 3 раза, а в 4, и, кроме того, получился остаток... — Другой пример:

40 |4 = 10; 40 |12 = 3, остаток 4.

Второе частное меньше первого не ровно в 3 раза... — Третий пример:

50 |3 = 16, остаток 2; 50 |9 = 5, остаток 5.

В этом случае второе частное не ровно втрое меньше первого...— Какое правило?..— Надо ли добавлять, что оба раза деление происходит нацело без остатка? — Если делимое делится на делитель *нацело без остатка* и если делитель уменьшить в несколько раз, то частное увеличится *ровно* во столько же раз... — Почему? (Потому что делимое — целое, делитель — число одинаковых частей, а частное — часть и т. д.) — Нужно ли здесь добавлять, что делимое должно делиться на новый делитель также нацело без остатка? (Нет, не нужно, ибо если делимое делится на 12 одинаковых частей нацело без остатка, то оно делится также на 2, на 3, на 4, на 6 частей.)... — Проверьте-ка это на примерах!.. — Если делимое и делитель увеличить в одно и то же число раз, то частное *во всяком* случае не изменится... — А остаток? (Изменится.)... — Придумать пример!..

Делимое 47, делитель 8; увеличим делимое в десять раз, — какое будет частное? (Надо рассчитать!) — Отчего нельзя сказать не рассчитывая? (Оттого, что излишек сорока семи над сорока единицами, которые на 8 делятся нацело без остатка, после умножения на 10 *повлияет* на частное:

47 |8 = 5, остаток 7; 470 |8 = 58, остаток 6.

Второе частное не ровно в 10 раз больше первого... — Примеры:

27 |5, 54 |5, 81 |5, 108 |5 и т. п.

Делимое 200; делитель 50; увеличить делитель в 3 раза; какое будет частное? (Не ровно втрое меньшее.)... — И т. д.

Цель всех этих упражнений — приучить детей к необходимой осторожности в вопросах об изменениях частного. Эти вопросы вполне разрешаются только на основании некоторых учений о дробях.

---

[1] Добавочные условия, отмеченные курсивом, прямо *необходимы*, и эта необходимость должна быть понята также учениками.

Прибавление числа к делимому. Мало внимания, к сожалению, обращается на те изменения частного, которые оно может претерпеть, благодаря увеличению или уменьшению делимого на некоторое число. А эти изменения как раз весьма поучительны и имеют в жизни и при вычислениях наибольшие применения. Ввести учеников в эти интересы можно, примерно, следующим образом: Если к делимому прибавить какое-либо число, то что случится с (целым) частным? (Неизвестно — может измениться, а может и не измениться.) — Примеры:

$$20 \,|\underline{5} = 4;\quad 21 \,|\underline{5} = 4,\ \text{остаток } 1;\quad 22 \,|\underline{5} = 4,\ \text{остаток } 2.$$
$$25 \,|\underline{5} = 5;\quad 30 \,|\underline{5} = 6;\quad 35 \,|\underline{5} = 7.$$

Если от делимого отнять какое-либо число, что случится с частным? (Неизвестно.) — Примеры! — Если к делителю прибавить или от него отнять несколько единиц, что случится с частным? (Неизвестно.) — Примеры:

$$54 \,|\underline{25} = 2,\ \text{остаток } 4;\quad 54 \,|\underline{26} = 2,\ \text{остаток } 2;\quad 54 \,|\underline{27} = 2.$$
$$50 \,|\underline{25} = 2;\quad 50 \,|\underline{26} = 1,\ \text{остаток } 24;\quad 50 \,|\underline{24} = 2,\ \text{остаток } 2.$$

Если к делимому прибавить *делитель*, то частное увеличится на одну единицу; если от делимого отнять делитель, то?.. — Примеры: $24 \,|\underline{2}$, $26 \,|\underline{2}$. — Если к делимому прибавить удвоенный делитель, то?.. Если к делимому прибавить несколько делителей, то?.. — И т. д.

При изучении деления с этих точек зрения, конечно, следует иметь в виду оба вида его: и деление на известное число одинаковых частей, и деление на известные *части*. Но, для выигрыша места, все вышеприведенные вопросы предполагают первый род деления, и учителю предоставляется те же примеры и учения разработать с учениками при условии деления на известные части (кратного сравнения). При этом, да и вообще при делении, *крайне важно* обращать внимание на то, что частное может быть или именованным, или отвлеченным числом, а кратное отношение должно быть числом непременно отвлеченным. Но особенно подробно изучать законы изменений частного не следует, пока мы вращаемся в области только целых чисел, — по следующим двум причинам: а) полное изучение этих законов без помощи дробей невозможно, и б) применений, сколько-нибудь значительных, законы эти не имеют.

Полезно при изучении некоторых изменений частного (а не только при „повторении" терминологии) обращать внимание на смысл терминов и выражений: „частное", „отношение", „кратное сравнение", „измерение одного числа другим", деление „по содержанию". Термин „отношение" особенно важен.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

СОСТАВНЫЕ ИМЕНОВАННЫЕ ЧИСЛА.

§ 1. Место именованных чисел в повторительном отделе.

При соответствующей истинному духу разумного обучения постановке арифметики в школе учение об именованных числах не должно представлять собою ничего иного, кроме ряда задач, которым нужно в курсе дать то или иное место в зависимости от того, какие действия требуется произвести для решения той или иной задачи. Так, вопрос о превращении именованных чисел должен разрабатываться в теснейшей связи с делением чисел на известные части, ибо вопрос превращения есть только вопрос об измерении данного числа другим числом того же наименования. Вопрос о раздроблении простых или составных именованных чисел должен разрабатываться в теснейшей связи с умножением. Вопрос же о сложении составных именованных чисел должен быть, в виду необходимости превращения некоторых результатов, связан с этим преобразованием, а вопрос о вычитании составных именованных чисел — с вычитанием чисел отвлеченных, и т. д. Одним словом, пока дети еще не усвоили себе способов решения всех этих вопросов на основании известных им действий и в теснейшей связи с этими последними, наиболее целесообразно знакомить учеников с решением этих вопросов на ряду с требуемыми для их решения действиями. Другое дело, когда мы занимаемся *повторительными* упражнениями, относящимися до материала первоначального курса арифметики. В этом случае, как это практикуется также в учебниках арифметики, выделение составных именованных чисел в отдельную статью не только дозволительно, но даже прямо желательно для придания курсу большей закругленности и законченности.

§ 2. Раздробление именованных чисел.

Раздробление составного именованного числа представляет собой (как это отмечено выше) только задачу, притом задачу чисто-арифметическую, из числа более или менее сложных. Поэтому и учение об этом преобразовании надо поставить не на почву правил (притом очень громоздких) относительно единичных отношений, а на почву *последовательного* разрешения ряда вопросов, на которые распадается эта сложная задача. Сообразно с сим и расположение вычислений при раздроблении составных именованных чисел должно быть согласовано с требованиями, предъявляемыми к решению сложной арифметической задачи, и распределено на так называемые „строчки".

Так, например, записи раздробления составного именованного числа: 6 час. 18 мин. 32 сек. можно придать следующий вид:

6 час. 18 мин. 32 сек. = 22 712 сек.

I. 60 мин. $\times$ 6 = 360 мин.
II. 360 мин. + 18 мин. = 378 мин.
III. 60 сек. $\times$ 378 = 22 680 сек.
IV. 22 680 сек. + 32 сек. = 22 712 сек.

Слово „раздробить". Значение термина „раздробить" можно выяснить так: Какая мера меньше, мельче: килограмм или грамм? — Сколько в метре сантиметров? — Сколько в 3 метрах? в 4? в 5? — Когда надо узнать — сколько более мелких мер содержится в более крупных, то говорят: надо „раздробить" эти крупные меры в мелкие. Узнать, сколько секунд в сутках, — значит раздробить сутки в секунды... — Что это значит: *раздробить* 4 часа в минуты? И т. д.

§ 3. Превращение именованных чисел с помощью умножения.

Вопрос, сколько единиц высшего наименования содержится в некоторой совокупности единиц ближайшего низшего наименования, сводится, как известно, к кратному сравнению этой совокупности единиц с числом единиц ближайшего низшего наименования, заключающихся в одной единице наименования высшего. На это должно обращать внимание учащихся, чтобы они поняли, что такой вопрос превращения, строго говоря, лишь один из тех многочисленных вопросов, которые требуют кратного сравнения. Вопрос о превращении, например, одного миллиона секунд в сутки естественно приводит к необходимости определения, сколько секунд в одних сутках. Но этот вопрос допускает двоякое решение, исходящее либо из единиц низшего, либо же из единиц наивысшего наименования.[1]

Первый способ:

I. Сколько секунд в *минуте?*

1 мин. = 60 сек. (нет действия).

II. Сколько секунд в *часе?*

60 сек. × 60 = 3 600 сек.

III. Сколько секунд в *сутках?*

3 600 сек. × 24 = 86 400 сек.

IV. Сколько суток в *одном миллионе* секунд?

$$\begin{array}{r}1\,000\,000 \text{ сек.} : 86\,400 \text{ сек.} = 11\\ \underline{86\,400}\phantom{\text{ сек.} : 86\,400 \text{ сек.} = 11}\\ 136\,000\phantom{\text{ сек.} : 86\,400 \text{ сек.} = 11}\\ \underline{86\,400}\phantom{\text{ сек.} : 86\,400 \text{ сек.} = 11}\\ 49\,600\phantom{\text{ сек.} : 86\,400 \text{ сек.} = 11}\end{array}$$

Таким образом получится ответ на ближайший вопрос, а именно, что миллион секунд составляет 11 суток и, сверх того, остается 49 600 сек. После этого можно предложить вопрос: сколько часов в этом остатке, и для решения этого вопроса можно воспользоваться ответом строки II, из которой вытекает, что в часе 3 600 сек., и определить, сколько раз 3 600 содержится в 49 600 и т. д.

Второй способ решения, исходящий из единиц высшего наименования, ведет к следующим вопросам:

I. Сколько часов в *сутках?*

1 сутки = 24 час. (нет действия).

II. Сколько *минут* в сутках?

60 мин. × 24 = 1 440 мин.

III. Сколько *секунд* в сутках?

60 сек. × 1 440 = 86 400 сек.

И т. д.

[1] Более простые способы решения задачи автор указывает ниже. *(Прим. ред.).*

Производить ли действия над числами именованными, как это сделано выше, или же над отвлеченными (что гораздо изящнее с внешней стороны), с логической точки зрения безразлично. Важно здесь лишь то, что действие деления произведено только один раз, остальные же действия — умножения.

Когда ученики вполне усвоили этот ход рассуждений на нескольких примерах, притом также и самостоятельно решая эти задачи, можно выяснить, как утомительны эти способы обращения простого именованного в равное ему составное, в *котором число единиц каждого наименования меньше* единичного отношения единицы ближайшего наименования к единице данного наименования. В этом ведь все дело, чтобы получилось правильное составное именованное число, т. е. чтобы часов было меньше, чем 24, минут — меньше, чем 60 и т. д. Учитель не должен бояться при этом мнимой потери времени, ибо никакой тут потери времени нет. Это — только решение задачи, притом не менее поучительной, чем обычные задачи с условиями.

§ 4. Превращение с помощью деления.

Когда все вопросы превращения разрешены с точки зрения логической, можно предложить себе вопрос, нельзя ли задачи этого рода разрешать не с помощью ряда умножений и одного деления, а с помощью одних делений. Т. е. нельзя ли составить себе такой *план* решения: сначала узнать, сколько в одном миллионе секунд *всего минут*, потом — сколько *часов* в полученном числе минут и, наконец, — сколько суток в этом числе часов.

Сначала можно эти вычисления располагать так:

I. 1000000 сек. : 60 сек. = 16 666; 16 666 мин.
400
400
400
400
40 сек.

Это значит, что в миллионе секунд содержится 16 666 мин. и, сверх того, 40 сек.

II. 16666 мин. : 60 мин. = 277; 277 час.
466
466
46 мин.

Это значит, что 16 666 мин. = 277 час. и что, сверх того, отдельных минут — 46.

III. 277 час. : 24 час. = 11; 11 суток.
37
13 час.

Ответ: 1000000 сек. = 11 суток 13 час. 46 мин. 40 сек.

Когда ученики вполне усвоили себе все вычисления (причем частные надо записывать, конечно, *без наименований*), то можно показать им более короткий способ расположения вычислений и менее допускающий злоупотребления наименованиями.

```
             60         60      24
1 000 000 | 16 666 | 277   | 11 сут.
  60      | 12 0   | 24
  400     |  4 66  |  37
  360     |  4 20  |  24
   400    |   466  |  13 час.
   360    |   420
    400   |    46 мин
    360   |
     400
     360
      40 сек.
```

§ 5. Действия над составными именованными числами.

К превращению именованных чисел примыкает сложение и умножение составных именованных чисел, — два действия, дающие в результате числа, подлежащие превращению. Примеров на эти два действия учитель может придумать и сам сколько угодно (задачи с условиями в этих случаях вовсе не необходимы). Но ученики должны уяснить себе, что здесь дело не столько в сложении, сколько в преобразовании составного именованного числа неправильного вида в составное именованное вида правильного.

Несколько иначе обстоит дело с действием деления составных именованных чисел на известное число одинаковых частей, а равно с делением составных именованных чисел на известные части, из которых каждая выражена тоже в виде составного именованного числа. Дело в том, что при разрешении вопросов этого рода ученику представляется случай к более вдумчивому проникновению в самую сущность обоих родов действия деления. Упражнения этого рода (не слишком сложные) послужат и к лучшему уяснению самого смысла частного при делении числа на известное число частей и к лучшему уразумению внутреннего смысла отношения при кратном сравнении двух именованных чисел. Ученик не только должен усвоить, но также вполне уяснить себе нецелесообразность раздробления всего делимого в единицы низшего наименования при делении составного именованного числа на *известное число частей* и почти неизбежную необходимость этого раздробления при кратном сравнении двух именованных чисел.

§ 6. Особенности метрической системы.

Учение о метрической системе мер и о действиях над именованными числами, выраженными в единицах этой системы, представляет не только теоретический интерес, но и интерес чисто арифметический. Прежде всего необходимо, чтобы ученики вполне сроднились с величиной основных мер: метром, километром, сантиметром, граммом и килограммом.

Для того, чтобы учителю хорошо проработать с учениками международные (метрические) единицы меры, они должны ясно представлять себе следующее:

а) Если составное именованное число выражено в единицах метрической системы, то *раздробление* его представляет собою простое преобразование, почти не требующее письменных вспомогательных вычислений:

$$7\ \textit{км}\ 2\ \textit{м}\ 4\ \textit{дм} = 7\,000\ \textit{м} + 2\ \textit{м} + 4\ \textit{дм} = 70\,024\ \textit{дм}$$
$$4\ \textit{кг}\ 45\ \textit{г} = 4\,045\ \textit{г}.$$

б) Еще менее вспомогательных вычислений требуется при *превращении* именованного числа, выраженного в единицах метрической системы мер. Так, например:

$$7\,254\ \textit{мм} = 7\ \textit{м}\ 2\ \textit{дм}\ 5\ \textit{см}\ 4\ \textit{мм}.$$

в) Равным образом и четыре действия над составными именованными числами, выраженными в единицах метрической системы мер, не требуют многочисленных вспомогательных вычислений. Раздробление составных именованных чисел, выраженных в единицах метрической системы, очень легко. Поэтому лучше всего в этом случае раздробить все данные числа в единицы самого низшего из встречающихся в данных числах наименований, и в полученном результате, если в том есть надобность, сделать превращение. Так, например:

$$8\ \textit{м}\ 6\ \textit{дм}\ 7\ \textit{см} + 3\ \textit{м}\ 5\ \textit{дм}\ 8\ \textit{см} = 867\ \textit{см} + 358\ \textit{см} = 1\,225\ \textit{см}$$
$$5\ \textit{гл}\ 8\ \textit{дкл}\ 2\ \textit{л} - 3\ \textit{гл}\ 9\ \textit{дкл}\ 5\ \textit{л} = 582\ \textit{л} - 395\ \textit{л} = 187\ \textit{л}$$
$$7\ \textit{кг}\ 28\ \textit{г} \times 40 = 7\,028\ \textit{г} \times 40 = 281\,120\ \textit{г} = 281\ \textit{кг}\ 120\ \textit{г}$$
$$7\ \textit{кг}\ 6\ \textit{гг}\ 5\ \textit{г} : 45 = 7\,605\ \textit{г} : 45 = 169\ \textit{г}$$
$$70\ \textit{м}\ 8\ \textit{см} : 5\ \textit{м}\ 8\ \textit{дм}\ 4\ \textit{см} = 7\,008\ \textit{см} : 584\ \textit{см} = 12.$$

г) Вся трудность выполнения вычислений над числами, выраженными в единицах метрической системы, зависит только от того, что необходимо помнить значения и порядок приставок: кило (тысяча), гекто (сто) дека (десять), деци (десятая часть), санти (сотая), милли (тысячная). Остальное представляет собою лишь простое применение нумерации и четырех действий над отвлеченными числами. [1]

Метрическая система представляет следующие выгоды:

1) Принятые в ней единицы меры вполне определенны и раз навсегда установлены: метр отличается от десятимиллионной доли четверти земного меридиана на вполне определенную (притом весьма незначительную) величину.

2) Все единицы мер величин разного рода весьма просто связаны между собой.

3) Единицы меры для величин однородных связаны одна с другой весьма просто.

4) Названия разных единиц меры немногочисленны и образованы единообразно.

5) Метрическая система мер, благодаря своему устройству, допускает простоту вычислений над именованными числами, не доступную при других системах мер.

---

[1] Стандартные обозначения метрических единиц, утвержденные ВЦИК и СНК РСФСР 30 ноября 1930 г., см. в приложении к этой книге. *(Прим. ред.).*

6) Действия над *составными* именованными числами, выраженными в единицах этой системы, и преобразования величин одних в другие не требуют отдельной статьи в курсе арифметики, так как представляют простое применение десятичной системы нумерации.

Метрическая система в настоящее время принята почти во всех странах земного шара.[1]

§ 7. Задачи на время.

Хотя учащиеся и знакомы с единицами меры времени, но некоторое место можно при приведении в систему материала, усвоенного учащимися в области именованных чисел, уделить простейшим задачам календарного содержания. Не имеет смысла предлагать задачи вроде, например, следующей: „Гоголь родился 19 марта 1809 г., а умер, имея от роду 42 года 11 мес. и 2 дня; спрашивается, какого числа, месяца и года он умер?" Задачи этого типа совершенно бесполезны. Жизнь дает календарные указания относительно начала и конца данного промежутка времени, но никогда не предлагает задач вроде приведенной выше.

Ясное представление должны получить учащиеся о принятой эре счисления, они должны уяснить себе, что обозначают выражения „нашей эры", „до нашей эры", понимать, к каким столетиям принадлежат годы 1900, 1800 и т. д., что 1861 год принадлежит к XIX столетию, и все годы, в нумерах которых первые две цифры 1 и 8, за исключением 1800 года, принадлежат к XIX столетию, что к XIX же столетию принадлежит и 1900 год. Известно, что в этом отношении встречаются недоразумения, при переходе из одного столетия в другое, даже у людей взрослых и культурных. Чтобы дети уяснили себе, что 1900 год был последним годом XIX века, можно прибегнуть к следующему факту. Числа, начиная от 1 до 100, все принадлежат к первой сотне; точно так же число 200 принадлежит второй сотне и т. д. Число 1900 принадлежит девятнадцатой сотне, а никак не двадцатой. А потому 1900 год принадлежит к XIX веку.

Некоторую важность имеют слова „включительно" и предлог „по" в указаниях относительно промежутков времени (до 15 июля „включительно", или „по" 15 июля).

На вопросе о переводе календарных данных в арифметические, над которыми надо произвести действие (чаще всего — вычитание), в методике арифметики останавливаться не стоит. Все дело в том, что если надо вычислить промежуток времени между днем объявления войны Германией и днем Октябрьской революции, то надо из 1916 лет 9 месяцев и 24 дней вычесть 1913 лет 6 месяцев и 17 дней, так как день мобилизации русских войск произошел 18 июля 1914 г. Выражение подобного промежутка времени в днях, конечно, тоже возможно, но требует довольно утомительных и в практической жизни никому не нужных вычислений.

Понятие о високосном годе и о способе определения, имеем ли мы дело с високосным или с простым годом, когда нам задан его нумер, не представляет собою особенных затруднений, если этот вопрос освободить от продолжительных объяснений. Считают, что 4-й год, 8-й год, 12-й год, 16-й год и т. д., нашей эры — годы високосные, а остальные —

[1] В нашем Союзе декрет о введении метрической системы мер, как обязательной с 1 января 1924 г., был издан правительством в сентябре 1918 г. *(Прим. ред.)*.

обыкновенные. В обыкновенном годе 365 дей, а в високосном 366. Добавочный день високосного года — 29 февраля. И т. д.

Выяснение „стилей" (нового и старого) календарей (Юлианского и Григорианского) может носить только догматический характер. Перевод чисел одного стиля в числа другого — задача более или менее простая, и с ее решением учащийся должен ознакомиться на практике. У нас принят новый стиль. [1] Считая по новому стилю, надо помнить, что числа нового стиля больше чисел старого на 13.

§ 8. Из области геометрии.

Геометрическим представлениям, терминам и вычислениям не чужды и более ранние ступени курса. Там преследовались методические цели, но в случае возможности, этот материал надо систематизировать и можно дополнить. Если учащиеся ранее не чуждались геометрических точек зрения, которые часто вводились из соображений педагогических, образовательных и методических, если учитель не боялся ставить многие упражнения на почву так называемых „лабораторных" занятий, то, конечно, некоторое время легко посвятить приведению в систему уже приобретенных представлений и навыков геометрического содержания. [2]

Материал, относящийся до этой ступени, распадается на три части: одна из них посвящена всему тому, что не относится непосредственно до вычисления, вторая часть относится до вычисления площадей и третья — до вычисления объемов.

Можно сюда же внести и кое-что из области примитивного землемерия.

§ 9. Неотносящееся до вычисления.

Неотносящееся до вычисления сводится преимущественно к систематизации представлений учащихся о точке, прямой линии, угле, о стороне угла, вершине угла, прямом угле, перпендикулярной (отвесной) линии, о параллельных („равнобежных") прямых, далее, о расстоянии между параллельными прямыми и т. п. При этом надо особенно остерегаться определений и всяких доказательств. Надо основываться только на непосредственном наблюдении и пользоваться здравым смыслом учащихся.

Определять, что называется точкой и прямою, что — углом, что — стороною угла и что — вершиной его и т. п. совершенно не для чего. Надо отметить, что, с точки зрения логической и научной, так называемые точные определения точки, прямой и плоскости подлежат сомнению и считаются не только не важными, но даже не считаются возможными.

Понятие прямого угла может возникнуть с помощью складывания бумаги и благодаря непосредственным пространственным восприятиям (интуиции). Трудны для детей не самые понятия прямого угла, перпендикуляра, параллельности, параллелограма, а трудны иногда названия: „перпендикуляр", „параллельная прямая" и т. п. Не важно, умеют ли они произносить те или иные слова, которые полезны только для построения

[1] Введен 18 февраля 1918 г. *(Прим. ред.)*.

[2] В программах Н. К. П. геометрический материал введен во всех классах начальной школы, начиная с первого. *(Прим. ред.)*.

определений. Так, не представление о „полосе“ с двумя краями, идущими параллельно друг другу, затрудняет детей. Параллельные прямые встречаются чрезвычайно часто в ежедневной жизни учащихся. Им стоит только посмотреть на разлинованную тетрадку, на обе стороны улицы, на рельсы и т. п., чтобы получить ясное представление, что такое взаимно-параллельные прямые.

Прямоугольник является только известной частью полосы, ограниченной с четырех сторон прямыми линиями, из которых две попарно параллельны, другие две тоже взаимно параллельны, и каждая из последних образует с каждой из первых двух прямых прямые углы. (Это, конечно, не определение прямоугольника.) Равным образом расстояние между двумя параллельными линиями представляет собой не что иное, как ширину полосы, и учащиеся эту ширину очень хорошо знают с раннего детства, когда они переходят с одной стороны улицы на другую. Они переходят улицу „прямо“, т. е. под прямым углом к противоположному краю улицы. При этом должны быть использованы все средства для усвоения учениками представления о параллельных прямых и перпендикулярах. Для этого учащиеся должны пользоваться линейкой, моделями углов, параллелограмов, полос и т. п. Важно при этом не то, чтобы учащиеся могли сказать, что „параллельными прямыми“ называются такие прямые и т. д., или что „прямым углом называется такой угол“ и т. д. или что „прямоугольником называется такой параллелограм, в котором“ и т. д.

Учащиеся совсем этого не должны говорить и учить их этому не надо, да и невозможно. Важно, чтобы они *видели*, что в прямоугольнике все четыре угла — прямые, что как бы далеко мы ни продолжали параллельные прямые, они никогда не пересекутся и т. п.

Повести первые упражнения в том геометрическом материале, который не относится до вычислений, можно, примерно, следующим образом.

§ 10. Точка, прямая, угол и т. п.

Вот точка; проведем из нее на доске прямую... — Можно ли от руки? (Можно.)... — Но можно ли с помощью линейки?.. — Что мы провели? (Прямую.) — Откуда? (Из точки.) — В каком направлении? (Вот в этом.) [1] — Много ли можно из точек провести прямых? (Сколько угодно.) — Вот прямая линия... — Это — тоже линия, но не прямая!.. и т. д. (Ученики должны, конечно, и сами поупражняться в проведении прямых линий на доске, на полу, в тетради.) Проведу прямую из точки... — Что я сделал?.. Проведу из той же точки еще одну прямую в направлении прямо-противоположном... — Где направление прямо-противоположное?.. (Все, без исключения, ученики должны поупражняться в изображении прямых и в продолжении прямых в ту же или в прямо-противоположную сторону.) Проведу прямую из точки... — Проведу другую прямую, в другом направлении, но не в прямо-противоположном... — Что получилось?.. — Получился угол... — Начертите угол! — Еще угол!.. — Где вершина угла?.. — Где стороны его?.. — Кто знает?.. — Начертим угол!.. — Еще один!.. — Вырежем из бумаги такой же угол, как второй!.. — На длину сторон не

[1] Ученик должен показать рукою, в каком направлении проведена прямая. Многоточия обозначают моменты привлечения учащихся к работе.

смотрите, — угол все тот же, хотя бы стороны его были меньше сторон этого угла... — Вот уголки из бумаги — одинаковые, хоть у них стороны и разные... — Это — углы равные между собой. — Этот угол равен тому...

Вот на доске начерчен угол!.. — Начертим еще один!.. Вырежем из бумаги угол, равный второму... — Вот первая сторона (нижняя) первого угла, вот вторая сторона первого угла... Где первая сторона второго угла, где вторая сторона второго угла? — Приложим первую сторону вот этого (вырезанного из бумаги) угла ко второй стороне первого, вершину угла (вырезанного из бумаги) на вершину, а весь угол наложим на доску... — Проведем по второй стороне (бумажного) угла мелом прямую... — Получим новый (четвертый) угол, который состоит из двух углов... — Мы сложили два угла... — Мы получили сумму двух углов... — Где в новом угле первая сторона, где вторая?.. — Какой угол образуют эти две стороны?... — Какие тут углы равны между собою? (Второй и третий.) — Вот два угла. [1] — Сложим их... — Что получим? (Не получим угла.)... — Вторая сторона второго угла и первая первого образуют ли угол? (Нет, не образуют.)... — Что же они составляют? (Они составляют одну прямую, одну прямую линию.)... — Такие два угла называются прямыми... — Каждый из этих углов называется прямым углом!.. — Сложить следующие два угла!.. — Найти сумму вот таких двух углов!.. — Прибавить вот этот угол к следующему!.. И т. д. [2]

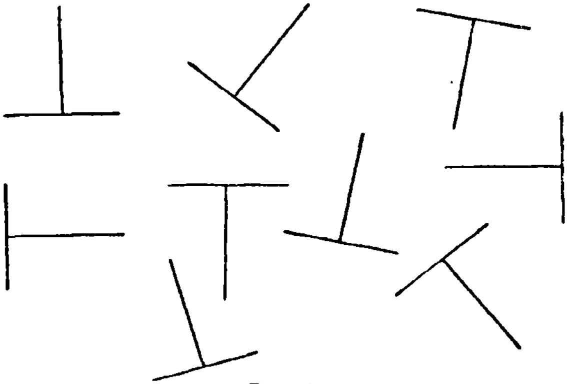


Рис. 1.

Возьмем прямую (прямую линию) и на ней точку... — Из этой точки проведем на доске еще прямую... — Сколько получилось углов? (Два.)... — Можно ли провести из точки на прямой такую прямую, чтобы оба угла были равны между собою?.. — Проведем... — Получим ли прямые углы?.. — Когда получили два прямых угла? — Два прямых угла можно получить, если из точки на прямой проведем другую прямую так, чтобы оба угла, которые при этом получатся, были одинаковы... — Из куска бумаги вырежем два прямых угла... — Разорвем бумажку так, чтобы получилось два прямых угла (сложим кусок бумаги сначала как следует)... — Начертите один прямой угол... — Любая сторона прямого угла, — так говорят, — *перпендикулярна* к другой стороне... — Говорят так: эта сторона *перпендикуляр* к другой стороне, а эта — *перпендикуляр* к той... — Вот прямая, а вот точка на ней... — Проведем из этой точки перпендикуляр к этой прямой... — Проведите перпендикуляры к прямым (вверх, вбок, вниз, влево, вправо.)... (Рис. № 1).

[1] Надо взять два прямых угла, оторванных от восьмушки бумаги.

[2] Надо поупражнять детей в сложении не только одинаковых, но также и различных углов.

— О геометрической точке говорят, что она не имеет величины... — О прямой геометрической линии говорят, что она не имеет ширины... — Как бы мала ни была пылинка, или нарисованная точка, они — не геометрические точки... — Как бы тонка ни была начерченная прямая, как бы тонка ни была туго натянутая нитка, они — не геометрические прямые...— Нарисуйте не прямую линию (кривую)!.. — Не знаете ли вы какой-либо кривой линии? (Окружность круга.)... — Как бы тонко ни провести окружность круга, она — не геометрическая окружность круга...

§ 11. Самодельный экер.

Если учитель считает разумение учеников для того достаточным, то может заняться с ними изготовлением модели так называемого *экера*, изображенной на рисунке 2. [1] Достаточно взять две дощечки, скрепить одну с другою приблизительно под прямым углом, на них провести, пользуясь хотя бы бумажною моделью прямого угла, две взаимно-перпендикулярные прямые, на концах этих прямых приспособить перпендикулярно к ним четыре иголки, эти дощечки пригвоздить или привинтить к ровному отрезу кола, и модель экера, хоть и грубая, готова. Для того, чтобы с помощью этого экера, двух вех и одного помощника провести две взаимно-перпендикулярные прямые на поверхности земли из данной ее точки, надо кол вколотить в этой точке в землю. Затем надо привести глаз свой в одну плоскость с двумя иголками, вколоченными в концы одной из линий, проведенных на экере, и вехой помощника, стоящего неподалеку (шагах в 50) от экера. Тогда одна прямая линия проведена. Не трогая экера, надо перейти к одной из иголок на другой из взаимноперпендикулярных линий экера; поместить другую веху помощника так, чтобы глаз, две иголки и эта вторая веха находились в одной плоскости. Две прямые, соединяющие (колья) вехи, поставленные помощником, с колом экера образуют прямой угол на поверхности земли. Это упражнение надо проделать на самом деле в школьном дворе, в поле, на улице. К работе, конечно, надо привлекать учащихся.

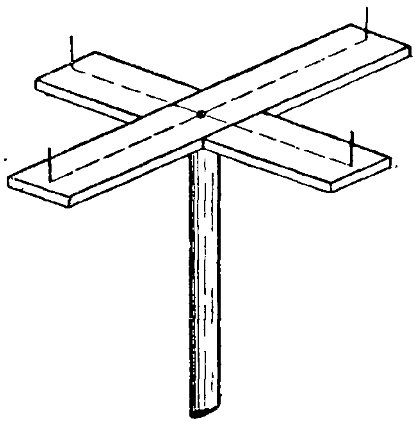


Рис. 2.

§ 12. Изготовление моделей прямоугольников из бумаги и понятие о площади.

Для дальнейших успехов в области геометрии можно заняться изготовлением моделей прямоугольников из полосы бумаги. Изготовление

[1] Знакомство с экером входит в программу 3-ей группы начальной школы. (*Прим. ред.).*

моделей прямоугольников из клочка бумаги с неровными краями представляет собою достаточные поводы для образования в умах учеников надлежащих представлений о прямом угле, о прямоугольнике и о квадрате как разновидности прямоугольника. Полезны лабораторные упражнения в изготовлении моделей из куска бумаги, имеющих одну и ту же форму и одну и ту же величину. Затем можно преобразовывать эти модели так, чтобы учащийся понял, что форма может быть различна, площадь — та же самая. Тут же можно повторить способы вычисления площадей прямоугольников и квадратов. Полезно вычислить площадь прямоугольника, намеченного на земной поверхности вехами, хотя бы даже только приближенно.

Начертим прямой угол; от вершины его *отложим* на каждой стороне одинаковые прямые (одинаковые куски, *отрезки* прямых линий)... — Вершина прямого угла — начало обоих отрезков... — А где концы этих отрезков?.. — Из конца одного отрезка проведем перпендикуляр к этому отрезку вверх... — Получим ленту, полосу... — Из конца другого отрезка проведем перпендикуляр к этому отрезку... — Получим кусок ленты, кусок полосы... — Это *четыреугольник*... — Почему? (Потому что здесь четыре угла.)... — Это *прямоугольный* четыреугольник... — Почему? (Потому что все четыре угла — прямые углы.)... — Но в этом прямоугольном четыреугольнике, *очевидно*, все четыре *стороны* равны между собой... — Такой четыреугольник называется *квадратом*... — Начертим квадрат, в котором каждая из тырех сторон имеет в длину дециметр...

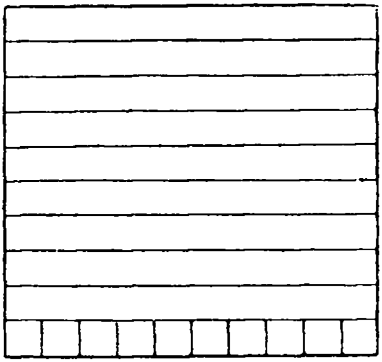


Рис. 3.

Площадь. Квадратный дециметр это — некоторая *площадь*; это — площадь того квадрата, в котором длина стороны равна одному дециметру. У пола в классе есть своя площадь... — Не вся поверхность стола оклеена клеенкой... — Площадь оконного стекла меньше площади стола... — Квадратный метр более квадратного дециметра во сколько раз?... — Площадь, занимаемая листом бумаги, если его положить на стол и развернуть хорошенько, больше или меньше площади стола?..

Сколько квадратных сантиметров в квадратном дециметре? — Почему 1 *кв. дм* $=$ 10 *кв. см* $\times$ 10 $=$ 100 *кв. см?* — Потому что из квадрата, сторона которого — 10 *см*, можно составить 10 полос, 10 лент, из которых каждая содержит ровно 10 квадратов. (На рис. 3 все размеры уменьшены вдвое.) И т. д.

То же самое справедливо для определения величины прямоугольника, длина которого 7 *см*, а высота 4 *см*. Такой прямоугольник разбивается на 4 полосы; площадь каждой полосы — 7 *кв. см*, а потому площадь такого прямоугольника равна 7 *кв. см* $\times$ 4 $=$ 28 *кв. см*. — Сколько квадратных метров в квадратном километре? — Сколько квадратных сантиметров в квадратном метре? — И т. д.

Разнородность квадратных и линейных единиц меры.

Ученики должны вполне уяснить себе, что нелепо спрашивать, сколько линейных сантиметров в квадратном дециметре. Они должны наглядно убедиться, что в квадратном дециметре сто квадратных сантиметров, что вопрос о том, сколько в квадратном метре линейных дециметров, столь же нелеп, как, например, вопрос о том, сколько килограммов в месяце или граммов в сантиметре.

§ 13. Площадь треугольника.

Без всяких стремлений к доказательствам можно учащихся привести к должному представлению о том, что площадь треугольника равна площади некоторого прямоугольника, которого основание равно основанию данного треугольника, а высота вдвое меньше высоты того же треугольника. Здесь изготовление учениками моделей сначала остроугольного треугольника, затем треугольника прямоугольного и, наконец, тупоугольного и упражнения в разрезывании этих треугольников на части, из которых можно составить прямоугольник с тем же основанием, гораздо полезнее всяких доказательств.

Всякий остроугольный или прямоугольный треугольник можно превратить в равновеликие с ними прямоугольники, пользуясь разделением тре-

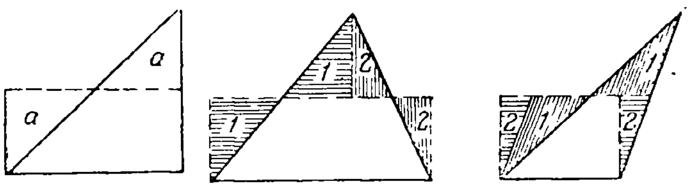


Рис. 4.

угольника на такие части, какие получены на первых двух чертежах рис. 4. Что касается тупоугольного треугольника, то и его можно превратить в прямоугольник, хотя бы мы пожелали принять за основание непременно сторону тупого угла. В этом случае приходится сначала обратить треугольник в равновеликий с ним косоугольный параллелограм, а затем последний обратить в прямоугольный (3-й чертеж рис. 4). Нет основания стремиться к тому, чтобы дети непременно усвоили себе слова: „площадь треугольника равна произведению основания на половину высоты“ или слова — „площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту“, и т. п. Опыт показывает, что иногда даже и не малолетние учащиеся, вследствие того, что дело часто ставят исключительно на почву доказательств и словесных или буквенных формулировок, то и дело ошибаются.

§ 14. Цель лабораторных упражнений на этой ступени.

Цель введения намеченных выше лабораторных упражнений — развитие у учащихся верных представлений о площадях прямоугольника и треугольника, а не усвоение ими теорем и формул, относящихся до этих площадей. Конечно, эта цель не исключает возможности рассмотрения всякого параллелограма с той точки зрения, что каждый из них разделяется на два равных треугольника, и что площадь каждого треугольника поэтому равняется половине площади параллелограма. Но для усвоения сущности дела важно не только рассуждение, но и то, что треугольник действительно можно обратить в прямоугольник, имеющий то же основание и такую высоту, которая вдвое меньше чем высота данного треугольника, а это важнее в курсе начально математики.

§ 15. Измерение и вычисление.

Надо строго различать „измерение" и „вычисление". Действительно измерить, притом приблизительно, можно, большей частью, только прямолинейные элементы фигур, т. е. только прямые линии. Измерять площади или объемы на самом деле мы в большинстве случаев не можем. Если данная нам фигура — не прямоугольник, то в этой фигуре квадрат не может уместиться так, как он иногда умещается в прямоугольнике. Покуда мы имеем дело с прямоугольником, иногда можно на него наложить квадрат столько раз, сколько требуется для того, чтобы узнать, сколько таких квадратов нужно для того, чтобы образовать данный прямоугольник. Но если нам дан треугольник, хотя бы даже прямоугольный, то квадрат в нем уже не может уместиться так, как он умещается в прямоугольнике, хотя бы даже площадь этого треугольника равнялась целому числу квадратных единиц меры. Даже в этом последнем случае наложение квадрата на треугольник не приведет к цели. Придется разрезать последний на такие части, чтобы из них можно было составить целые квадраты.

Проще (и в этом одна из многочисленных заслуг геометрии) измерить основание и высоту треугольника и, зная их длину, *вычислить* площадь этого треугольника.

§ 16. Площадь многоугольника.

Площадь многоугольника ученики должны понимать, как сумму площадей тех треугольников, на которые этот многоугольник можно разбить (см. рис. 5). При этом приходится прибегнуть к термину, который не представляет особенно большой трудности, а именно к термину „диагональ". Что всякий многоугольник можно диагоналями разложить на треугольники, учащиеся должны уразуметь путем рисования и черчения, а что площадь его можно разыскать, найдя сначала площади всех треугольников, входящих в его состав, а затем сложивши эти площади, ученики должны понять, пользуясь здравым смыслом.

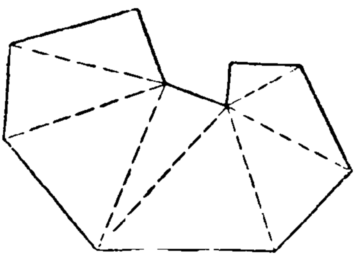


Рис. 5.

§ 17. Прямоугольник, у которого основание и высота выражены дробями.

Хорошо, если учащиеся понимают, что они не в состоянии вычислить площадь прямоугольника, в котором основание и высота выражены в виде дробей или смешанных чисел. Пусть, например, основание равняется 12,7 *см*, а высота 3,9 *см* и т. п. Учащемуся надо понимать, что̀ именно затруднительно в этом случае. Во-первых, он не знает, надо ли в этом случае помножить основание на высоту. Во-вторых, он не сумел бы помножить основание на высоту, если бы он даже знал, что и в этом случае надо выполнить это умножение. Если и основание и высота — числа смешанные, учащийся может вычислить, что площадь прямоугольника, в котором основание равно 12,7 *см*, а высота 3,9 *см*, больше, чем 36 *кв. см* и меньше, чем 52 *кв. см*. Но этого, конечно, недостаточно с математической точки зрения. Непременно избегать вопроса о том, что есть случаи, когда учащиеся не умеют вычислить площади фигур, не следует. Наоборот: учащемуся следует разбираться в том, что̀ он твердо знает и понимает, и что он не знает того, чего он действительно не знает.

§ 18. Квадратные и линейные меры.

Одна тонкость почти неизбежна в занимающем нас отделе, и избегать ее не следует учителю, стремящемуся не только к усвоению его учениками механических приемов, но и к надлежащему уразумению учащимися самой сущности дела. Мы говорим о том, что ученики не должны думать, будто квадратным метром называется *квадрат*, которого сторона равна метру. Квадратным метром называется *площадь* этого квадрата, точно так же, как линейным метром — длина известной прямой, а не самая эта прямая, кубическим же метром не куб, а *объем* куба, которого ребро равно метру, килограммом — не гиря известного веса, а вес этой гири. Учитель только не должен думать, что это можно *объяснить* словами. До этого можно довести учеников, употребляя слово *площадь* надлежащим образом, притом не сразу. Пусть ученики раньше освоятся с квадратом, как фигурой. Пусть они, далее, научатся его чертить и понимать, что называется его площадью. Пусть даже сначала говорят, что квадратный метр есть квадрат известной величины. Но должен наступить такой момент, когда учитель не только сможет поправить ученика (этого еще мало), но привить уму учеников сознание, что не самый квадрат, которого сторона равна одному метру, а площадь этого квадрата есть квадратный метр.

§ 19. Объем.

Что касается кубических мер и вычисления объемов куба и прямоугольного параллелепипеда, то учение об этом вычислении не представляет столь значительной практической важности, как учение о вычислении некоторых площадей. Этот отдел исчерпывается только наглядным выяснением того, почему, например, в кубическом метре не 10 и даже не 10 раз 10 кубических дециметров, а 10 раз 100 кубических дециметров.

Вопрос о кубическом метре можно разработать, примерно, следующим образом:

Почему в кубическом метре не 10 кубических дециметров и даже не 10 раз 10 кубических дециметров, а 10 раз 100 *куб. дм?* — Дело в том, что куб величиной в кубический метр может быть разделен на 10 одинаковых слоев, пластов, из которых каждый в свою очередь может быть разделен на 10 одинаковых частей, и объем каждой из этих последних будет равен 10 кубическим дециметрам. Но выяснение этой причины должно быть поведено на основании наглядных пособий наиболее для этого пригодных и при сильном воздействии на геометрическое воображение учеников.

§ 20. Записи.

Записи, выражающие отношение единиц меры площадей высшего наименования к единицам меры площадей наименования низшего, должны быть вполне согласованы с самым смыслом и порядком вычисления. Оно основано: а) на разделении каждой квадратной меры на известное количество равных полос, из которых в каждой содержится определенное число квадратных единиц меры площадей низшего наименования, и б) на разделении каждой кубической меры на слои, в каждом из которых содержится определенное число кубических единиц меры объемов. Ученик не только должен совершенно ясно себе *представлять*, что один квадратный метр равняется 100 *кв. дм*, но и записывать, что 1 *кв. м* = = 10 *кв. дм* $\times$ 10, и что площадь прямоугольника, которого длина равна 75 *м*, а высота — 26 *м*, равна 75 *кв. м* $\times$ 26 и т. п.

Точно так же ясно ученик должен разбираться в вопросе о том сколько кубических метров в объеме прямоугольного параллелепипеда которого длина 7 *м*, высота 5 *м*, а ширина 3 *м*; он должен понимать что ему надо (и почему это надо) 7 *куб. м* помножить на 5, а полученное — на 3, т. е. что объем этот равен 7 *куб. м* $\times$ 5 $\times$ 3.

Далее, ученики должны с полным разумением вычислять одно из измерений прямоугольника, если даны его площадь и другое его измерение а также — вычислять одно из измерений прямоугольного параллелепипеда если даны его объем и каких-нибудь два измерения параллелепипеда Ясность разумения будет засвидетельствована, если ученики будут в состоянии сказать и понять следующее: ежели площадь прямоугольника равна 70 *кв. м*, а длина его — 5 *м*, то это значит, что прямоугольник может быть разрезан на 5 одинаковых прямоугольных полос, и что в каждой из этих полос содержится 70 *кв. м* : 5, т. е. 14 *кв. м*.

Но ширина каждой из этих полос 1 *м*, стало-быть в каждой из полос квадрат, длиною и шириною в 1 *м*, умещается столько раз, сколько отвлеченных единиц содержится в отношении: 14 *кв. м* : 1 *кв. м*, т. е. 14 раз.

А это свидетельствует о том, что длина полосы или высота нашего прямоугольника равна 14 *м*. — Нечто подобное ученики должны уразуметь и относительно прямоугольного параллелепипеда: пусть объем прямоугольного параллелепипеда равняется 360 *куб. см*, пусть длина его равна 15 *см*, а ширина — 6 *см*, и пусть спрашивается, как велика высота его? — Конечно, можно исходить из мало говорящих сознанию и представлению учеников логических соображений о том, что объем прямоугольного параллелепипеда равняется произведению трех его измерений и т. д. Но тогда именно истинному уразумению фактического положения дела

неоткуда взяться. Гораздо лучше, ежели ученики представляют себе:
а) что данный параллелепипед разрезан на 15 „слоев", из которых каждый содержит в себе 360 *куб. см* : 15, т. е. 24 *куб. см*;
б) что каждый из этих слоев разрезан на 6 „столбов", из которых каждый содержит в себе 24 *куб. см* : 6, т. е. 4 *куб. см*;
в) что каждый из этих столбов состоит из стольких же кубов и г) что, стало быть, высота нашего параллелепипеда содержит в себе столько линейных сантиметров, сколько отвлеченных единиц содержится в отношении 4 *куб. см* : 1 *куб. см*, т. е. 4.

Работы для воображения в этом упражнении и рассуждении, конечно, неизмеримо больше, чем в отвлеченной ссылке на теоремы о площади прямоугольника и об объеме прямоугольного параллелепипеда. Но зато и результаты подобной работы воображения неизмеримо ценнее результатов, добываемых одною словесною ссылкой на теоремы, известные ученикам лишь понаслышке.

§ 21. Условные обозначения для квадратных и кубических мер.

В прикладной математике часто обозначают квадратные единицы меры следующим образом: 1 *см* $\times$ 1 *см*, 1 *м* $\times$ 1 *м* и т. п. Кубические единицы меры можно обозначать так: 1 *см* $\times$ 1 *см* $\times$ 1 *см*, 1 *м* $\times$ 1 *м* $\times$ 1 *м* и т. п.

Равным образом площадь прямоугольника, у которого длина основания равна 7 *см*, а длина высоты — 4 *см*, условимся иногда обозначать так: 7 *см* $\times$ 4 *см* = (1 *см* $\times$ 7) $\times$ (1 *см* $\times$ 4) = (1 *см* $\times$ 1 *см*) $\times$ 7 $\times$ 4. Отсюда согласно смыслу „произведения сантиметра на сантиметр" вытекает, что

$$7\ \text{см} \times 4\ \text{см} = 1\ \text{кв. см} \times 28.$$

Здесь речь идет не об умножении в арифметическом смысле слова. Это — только удобные обозначения, удовлетворяющие требованиям переместительного и сочетательного законов, т. е. что:

$$7\ \text{см} \times 4\ \text{см} = 4\ \text{см} \times 7\ \text{см}$$
$$(7\ \text{см} \times 3) \times 5\ \text{см} = (7\ \text{см} \times 5\ \text{см}) \times 3$$

и т. п.

Удобства и целесообразность такого обозначения очень велики. Первое удобство состоит в том, что площадь прямоугольника, основание которого и высота даны в разных единицах длины, могут быть сразу обозначены. Так, если длина его основания 5 *см*, а высота 3 *дм*, то *площадь* его обозначается так:

$$5\ \text{см} \times 3\ \text{дм} = (1\ \text{см} \times 1\ \text{дм}) \times 5 \times 3,$$

причем обозначение 1 *см* $\times$ 1 *дм* имеет совершенно определенный смысл: оно обозначает площадь прямоугольника, в котором длина основания и длина высоты соответственно равны одному сантиметру и одному дециметру.

Вторая выгода подобного обозначения состоит в возможности изображать в виде уравнения задачи такого рода: площадь прямоугольника равна 18 *кв. м*, длина основания $=36$ *дм*; чему равна длина высоты?

Пишем: 36 *дм* $\times$ *x* *дм* $=18$ *кв. м.*

По Гельмгольцу перемножение двух или более именованных чисел имеет в определенных случаях смысл, если возможны особенные физические сочетания соответствующих единиц, удовлетворяющие трем законам умножения.

$$a \cdot b = b \cdot a; \; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ и } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Физика дает примеры произведений, частных, степеней и корней, в которых пассивными и активным числами являются числа именованные. Все дело только в том, чтобы был установлен точный смысл *каждого произведения* и *каждого отношения*; например, чтобы было установлено, что умножить длину на длину *значит* найти площадь прямоугольника, в котором одна длина равна основанию, а другая — высоте его; что разделить длину на время *значит* найти скорость равномерного движения точки, пробежавшей в это время путь, равный делимому, и т. д.

Однакоже на этой ступени можно и не говорить об условном смысле даже таких ясных произведений, как 7 *м* $\times$ 4 *м* и т. п. Зато в высшей степени важно, чтобы учащиеся не умножали именованного числа на именованное *по небрежности*.

Если 1 *м* материи стоит 6 руб., то на вопрос о том, что стоят 14 *м*, дети иногда могут нечаянно ответить, что надо 6 руб. помножить на 14 *м*. Конечно, это ни в коем случае допускать не следует. Но такие способы решения задач на умножение представляют чаще обмолвку, чем результат непонимания. Еще хуже рассуждения такого рода. Один метр сатина стоит 5 руб., а 246 *м* в 5 раз больше, а потому надо 246 (чего?) помножить на 5. Само собой разумеется, что *записывать* надо то, что вытекает из самого смысла задачи, т. е.

5 руб. $\times$ 246.

Произвести же на самом деле умножение можно и так, как-будто 246 руб. надо было помножить на 5.

§ 22. Объем, емкость, пространство.

Усвоение учениками верных предварительных понятий из области вычисления объемов можно начать не прямо с определений, из которых наибольшую трудность представляет определение тела. Дети склонны думать, что когда говорят о теле, то при этом разумеют преимущественно тело человека или, в крайнем случае, тело животного. Но очень скоро, после должного количества упражнений, они примиряются с этим условным для всякого вещественного предмета названием. Что всякое тело занимает много или мало *места*, ученики, конечно, понимают, но стоит им сказать, что всякое тело занимает много или мало *пространства*, и для них это является туманным, малосодержательным. Столь же малосодержательны для них слова *объем* и *емкость*. Вот почему не на выяснение значения этих слов, а на должное их повторение в целесообразных выражениях надо обратить все свое внимание, если мы желаем, чтобы с этими словами связывались надлежащие и притом верные представления. То же относится до слов „куб“, „форма“ куба, „грани“ куба и т. п. Ученики должны на почве чисто-наглядной, конкретной, и с помощью воображения выработать себе эти представления. Надо заставить ученика в этом последнем случае *представить* себе, что у нас есть ящик, длина, ширина и высота которого, взятые внутри, равны порознь 1 *м*. Он должен понять, что емкость этого ящика — кубический метр, что тогда заключенный в этом ящике воздух тоже имеет кубическую форму. Далее, что в этот ящик можно положить сначала один куб величиной в кубический дециметр на дно, придвинуть этот куб плотно к двум смежным стенкам, рядом приставить еще один куб вплотную к первому и к одной из стенок и т. д., что таких кубов на дно можно положить только 100 штук, что на эти 100 штук можно положить еще 100, а на последние еще 100 кубов, и т. д. Слово „пространство“ учащиеся неверно понимают потому, что они часто употребляют это слово вместо слова „расстояние“.

§ 23. Польза геометрических представлений и бесполезность определений.

Даже в учебных заведениях, где курсу геометрии отводится отдельное место среди других предметов обучения, откладывать усвоение детьми основных знаний о квадратных и кубических мерах до достижения ими должных познаний в геометрии не следует из образовательных и практических соображений. Во-первых, необходимо, чтобы те ученики, которым почему-либо не удастся пройти полный курс школы, и которые оставят школу, может быть, с недостаточными понятиями из области геометрической, усвоили из этой области хотя бы то, что ими слабо пройдено ранее или вовсе не пройдено в начальной школе. Во-вторых, внесение кубических и квадратных единиц меры может пригодиться ученикам и в жизни. Наконец, в-третьих, они внесут в учение об именованных числах большую полноту и законченность. Но требовать от учеников, чтобы они давали точные определения геометрических понятий, конечно, на этой ступени обучения неуместно. Это и нецелесообразно, и большинство этих понятий, строго говоря, принадлежит к числу трудно определимых, т. е. трудно поддающихся логическому сведению их к понятиям более простым и основным. Достаточно в доказательство этого привести то соображение, что во многих курсах не только длина и площадь рассматриваются как понятия неопределимые, но к числу таких понятий относят даже и понятия о прямой линии, об угле, о фигуре и т. п.

§ 24. Единицы веса и измерение.

Для надлежащего ознакомления учащихся с единицами веса полезны упражнения детей во взвешивании и в изготовлении из „станиоля“ (листового олова, в которое заворачивают чай, шоколад и т. п.) шариков весом в один грамм. Наличность у учеников маленьких весов с чашками или пружинных желательна. Это соприкасается с вопросом об измерении окружающих величин. Учащиеся должны измерить длину и ширину тетрадей, вес тетради, длину неочиненного карандаша и т. п. Предметы ежедневного обихода учеников должны быть ученикам известны по своим размерам, весу, стоимости и т. п. Данные антропометрического характера (вес и рост ученика, обхват груди, обхват кулака, длина ступни) должны быть иметься на отдельной карточке. Вообще сближение учений об именованных числах с жизнью учащихся и жизни учащихся с математическими вопросами является могущественным орудием математического образования и воспитания.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

ПОНЯТИЯ О СЧЕТЕ, ЧИСЛЕ, НУМЕРАЦИИ И Т. П.

§ 1. Понятия неопределимые.

При построении науки, — а между наукой и учебным предметом есть громадная разница, — притом науки, входящей в состав математики, определения понятий, играющих в той или другой отрасли науки важную роль, представляют собою дело величайшей важности. При научном развитии какой-либо мысли, прежде всего исследователю надо отдать себе полный отчет в смысле тех слов, с помощью которых он будет выражать свои мысли и в которые он будет облекать свои соображения по занимающему его вопросу. Но, каковы бы ни были точки зрения данного исследователя, некоторые понятия он должен оставить без определений, так как эти понятия определению, в истинном значении этого последнего слова, не поддаются. Таковы, например, понятия о пространстве, о времени, о субстанции, о силе, о жизни и т. п. [1] Само собой разумеется, что если даже науки отказываются от определения тех или других понятий и тем не менее кладут эти понятия в основу своих исследований, то учебным предметам и подавно не надо предаваться погоне за неосуществимыми точными определениями этих понятий. Учебному предмету, встречающемуся с тем или другим из подобных понятий, надобна только уверенность в том, что это понятие существует также в уме учеников и что оно отличается достаточною и необходимою для целей учебного предмета определенностью. К числу понятий, которым, к сожалению, в очень многих учебниках арифметики даются более или менее притязательные определения, принадлежат понятия счета, целого числа, единицы, отвлеченного числа, величины, действия. Определения этих понятий только обременяют память учеников, не снабжая их сознание никаким ценным содержанием. Даже в настоящее время учебники арифметики еще не освободились от грубой ошибки против того основного требования, по которому данные учебного предмета отнюдь не должны противоречить научным его основам; не надо, например, определять, что называется единицей. С точки зрения психологической, не надо определять, что такое целое число. Полезно отметить, что арифметические понятия из числа трудно определимых по большей части существуют уже в уме учеников и требуют

[1] В настоящее время не определяют также и много других понятий. Например, Гильберт в своих „Основаниях геометрии" не определяет точки, прямой линии и плоскости.

со стороны учителя только надлежащего ухода за ними и постепенного их развития. В особенности это справедливо, если не с этих понятий начинать прохождение повторительного отдела, а ими заканчивать повторение учения о действиях над целыми числами, отвлеченными и именованными. В этом последнем случае все условия, необходимые для приведения упомянутых понятий в должную систему, будут вполне соблюдены, так как тогда у учеников находятся в полном распоряжении все средства к образованию, к развитию и укреплению этих понятий.

Приведение основных понятий в систему.

Порядок приведения основных арифметических понятий в систему можно принять следующий: счет, число, как надо считать, предметное число, единицы меры и разные величины, измерение величин, простое именованное число, единичное отношение, составное именованное число, раздробление именованных чисел, отвлеченное число; десяток, сотня, тысяча, единица, письменная нумерация двухзначных чисел, трехзначные числа; единицы второго, третьего и первого разрядов, единицы второго класса, единицы третьего класса (миллионы); нумерация чисел четырехзначных, пятизначных и шестизначных; величина миллиона, обозначение миллионов, единицы 4-го класса и единицы высших классов; арифметика, римские цифры и их неудобства; действия над числами, обозначенными с помощью римских цифр. Намеченный выше порядок приведения в систему основных арифметических понятий оправдывается следующими соображениями:

Ученик должен прежде всего уяснить себе, что, хотя он считать и умеет, но *сказать*, что это значит — считать, он не может. Он понимает, что считать какие-либо предметы значит, взяв один из этих предметов, хотя бы мысленно, произнести слово „один", взяв еще один, произнести слово „два", взяв еще один, произнести слово „три" и т. д. Он, таким образом, только характеризует словесную сторону того удивительного процесса, который известен под именем счета. Говорим „удивительного", потому что установлен только ряд слов, из которых ни одно не может быть перемещено на место другого и само не может уступить своего места никакому из остальных слов. А человек, благодаря этому ряду слов, получает возможность отличить каждый из взятых им отдельных, хотя бы и совершенно одинаковых, предметов, и их совокупность, и составить себе точное понятие как о том порядке, в каком он все эти предметы брал, так и об их „числе". Что значит считать — понимает всякий. Но дать определение этому процессу, т. е. показать его логическую связь с некоторыми другими, притом основными, понятиями, возможно только путем очень утомительного логического процесса, связанного с „теорией ансамблей" и излагаемого только в строго научных работах по этому предмету [1]. Можно только указать, что ряд *слов*, употребляемых нами при счете, может быть поставлен в следующую связь: что значит „один" — знает всякий, что значит „да еще" — тоже всякий знает. Вместо слов „один да еще один" произносим слово „два"; вместо слов: „один да один да еще один" или вместо слов „два да еще один"

---

[1] Над этим вопросом работали: Рихард Дедекинд, Герман Гельмгольц, Леопольд Кронэкер, Георг Кантор. См: Вебер и Вельштейн. „Энциклопедия элементарной математики".

говорим „три“, и т. д. Таким же образом полезно перебрать некоторые из названий чисел первого десятка, некоторые из названий чисел второго десятка и т. д. Исходя из этой точки зрения, ученик уразумевает с великой легкостью, что из *слов* один, два, три, четыре и т. д. каждое обозначает некоторое *число*, что для обозначения некоторых чисел нужны два слова, например: „тридцать четыре“, „двести четыре“, для других — три слова „сто двадцать один“, „сто тридцать шесть“, „триста семьдесят восемь“, „четыре тысячи пять“ и т. д. Каждая из планомерно составленных совокупностей слов этого рода выражает некоторое вполне определенное *число*. В этом смысле всякий человек, умеющий считать, бесспорно знает, что такое — число. Это содержание понятия о числе неизмеримо больше и определеннее, чем то, которое дается обычным определением, гласящим так: „числом называется одна единица или совокупность нескольких единиц“. Последнее определение к тому же и неправильно. Существование понятий о той или иной совокупности единиц еще недостаточно для того, чтобы число их, в *арифметическом* смысле этого слова, существовало в нашем сознании. Если у нас есть только числа и их названия и если они расположены в натуральный ряд, то арифметика ими воспользоваться не может.

Круг в определениях числа, счета и единицы. Особенно надо избегать в вопросах такого рода возможности так называемого круга в определениях: „сосчитать данные единицы значит узнать число этих единиц“, „числом называется результат счета единиц“ и „единицами называется то, что считают“.

§ 2. Как считать.

От произнесения числительных имен в надлежащем порядке до правильного счета действительных предметов только один шаг: надо *группе* считаемых предметов приписывать вполне соответствующее ей числительное имя. Но от этого умения до умения быстро, вполне надежно и, так сказать, научным образом считать остается еще один шаг. Вполне научному, на который можно было бы положиться, счету надо также научить детей. Мы говорим о том счете, который сначала производится с помощью только десяти слов, обозначающих числа первого десятка. Как, например, сосчитать большое количество предметов. Лучше всего это совершать следующим образом: отсчитать от этих предметов и отделить от них десять, составить из этих десяти предметов *отдельную* группу. Для этого придется также произнести слова: один, два, три и т. д. вплоть до слова „десять“ включительно. Так же надо поступить со следующими десятью предметами, т. е. и их отделить в отдельную группу. Но эту процедуру надо продолжать до тех пор, пока все предметы не будут исчерпаны. При этом может быть два случая: 1) или получится, что данное количество предметов распределилось только на группы по десяти предметов в каждой, и, сверх того, не оказалось ни одного такого предмета, который не входил бы в состав одной из наших групп, или же 2) в конце концов осталось несколько предметов, притом меньше десяти, сверх тех предметов, которые вошли в составленные нами группы по десяти предметов в каждой. Когда эта операция закончена, мы можем сосчитать, сколько у нас составилось таких групп. В конце концов здесь могут встретиться только следующие случаи: а) либо групп этих менее десяти, б) либо каждая из прежних групп, по десятку предметов в каждой, вошла в состав какой-либо новой, большей, группы по сотне предметов в этой последней, в) либо, наконец, несколько, но меньше десяти, групп остались не вошедшими в состав больших групп по сто предметов в каждой. Подобному счету надо научить детей на деле, а не только на словах. Для этого в качестве наглядного пособия могут послужить тщательно для этой цели подобранные маленькие бумажки, изготовленные из старых использованных и ненужных более детских тетрадей, или еще лучше — так называемая „солома" (спички). Небольшое количество времени, потраченное на это дело, окажется затратою, которая очень скоро вполне окупится при повторении детьми основ нумерации.

§ 3. Предметное число.

Прежде чем обратиться к разделению чисел на именованные и отвлеченные, каковое разделение, как мы это увидим ниже, к сожалению, не вполне точно, надо выделить в сознании детей понятие о числах, которые можно назвать *предметными* и которые иногда называются конкретными числами. Ученики отлично понимают, что мы можем считать предметы (столы, стулья, черточки, буквы, страницы, яблоки), что можем считать людей, животных, что можем считать и явления. Полезно при этом ученикам, для целей самообразования, усвоить себе значение слова „явление". Это слово вообще часто встречается, и выяснение значения этого слова не принадлежит к числу трудных. Все, что делается, все, что совершается, все, что происходит на свете, называется явлением: гром, молния, дождь, выстрел, звук, перемена погоды — явления. Если мы сосчитали некоторое число предметов или явлений, мы узнали, сколько их, мы узнали число их. Независимо от того, считали ли мы предметы или явления, это число предметов или явлений можно назвать *предметным* числом. Строго говоря, числом является только то, что обозначается словами: один, два, три и т. д., и в этом смысле говорим, что 7 стаканов — известное *число* стаканов. Но, ввиду того, что общепринято различать *числа* отвлеченные и именованные, приходится считать (хотя числа бывают только отвлеченные) данное число предметов или явлений предметным *числом* и подвести *определенные* в *числовом отношении* совокупности („ансамбли", „комплексы") предметов под общее название *предметных чисел*. Счету, с психологической точки зрения, человек учится на предметах. Только поднявшись на высшую ступень математического развития, он переходит к измерению величин и к понятию об отвлеченном числе.

§ 4. Величина и ее значения.

Гораздо труднее выработка в уме учеников надлежащего понятия о *величине* вообще и о *частных значениях* разных величин. Значения величин, а не самые величины, выражаются разными так называемыми именованными числами.

Длина вообще представляет собою величину, а 4 метра или 15 сантиметров — некоторые частные значения этой величины. Точно также вес вообще есть величина, а 4 *кг* или $8^1/_2$ *г* — некоторые частные значения этой величины. Всяческие определения величины вообще, конечно, страдают прежде всего чрезвычайной отвлеченностью и неудобоприменимостью. Сказать, что величиною называется все то, что может быть больше или меньше, значит лишить учеников возможности пользоваться этим определением. Действительно, при желании воспользоваться этим определением может оказаться, что, по вине последнего, будут извращены представления о предметах. Ибо и булка и стол могут быть больше или меньше, но тем не менее никому не приходит в голову говорить, что эти предметы суть величины. Не вдаваясь ни в какие определения, можно достигнуть того, чтобы ученики не только поняли, но и заметили себе, что метр, километр, сантиметр суть ***единицы длины*** или ***расстояния*** между некоторыми точками, и что длина и расстояние суть величины. Точно также могут быть систематизированы понятия об единицах меры, употребительных для измерения веса предметов, о единицах меры для измерения стоимости некоторых предметов и т. д. и т. д. Важно не то, чтобы ученик мог, если можно так выразиться, „отбарабанить“ то или иное определение величины, а важно то, чтобы он понимал, что длина, площадь, вес, стоимость, продолжительность, объем, емкость — суть величины и что они носят это общее название. Пусть это достигнуто, что возможно, конечно, только благодаря тому, что ученики ранее поработали над именованными числами. Тогда можно перейти к приведению в систему представлений учеников об измерении величин (длины, веса, объема, емкости, площади, расстояния между какими-нибудь точками, продолжительности промежутков времени и т. п.). Тогда же может быть возбуждено в их уме и воображении представление о том, что одни единицы меры пригодны для измерения значений некоторой величины, а другие совершенно для этого непригодны. Например, нельзя измерить вес предмета иначе, как только единицей веса, длину — иначе, чем единицей длины, объем — единицею объема и т. д.

Кроме того можно и весьма полезно укрепить в сознании учеников и мысль о пользе различных единиц меры для различных значений одной и той же величины. Одни единицы меры существуют для измерения крупных значений данной величины (километр, тонна, год), другие — для значений более мелких: метр, килограмм, час. Одним словом, не только надо уметь измерять и понимать, в чем состоит измерение, но надо также знать, какие из единиц меры, пригодных для измерения значений данной величины, надо выбрать, как наиболее подходящие. Такая постановка дела избавляет учителя от стремлений к невозможному определению понятия о величине (понятие это принадлежит к числу основных, первоначальных, не поддающихся определению). Она устраняет определения однородных и разнородных предметов (определения, также не удовлетворяющие требованиям логическим и ни к чему существенному не ведущие). Она избавляет учеников от необходимости выучивания наизусть этих бесполезных определений. Но этого мало: от вышенамеченной постановки дела представления учеников о том, что такое величина, что такое измерение, что такое единица меры, число и т. п., выигрывают в отношении наглядности, ясности и определенности.

Именованное число. Определение простого именованного числа, единичного отношения и составного именованного числа должно поставить не на ту почву, что именованным называется (как это очень часто говорят в учебниках арифметики) число, снабженное наименованием единицы. Во-первых, не *число* снабжается наименованием, а только (если уже становиться на подобную точку зрения) к *названию* числа, т. е. к числительному имени, присоединяется в известном падеже единственного или множественного числа название некоторой единицы меры. Во-вторых, если мы уже измерили некоторую длину и нашли, что в ней умещается ровно 15 метров, то именно эта длина, равная 15 метрам, называется именованным числом, и дело здесь не в том, что некоторое *слово* сопровождается некоторым *другим словом.* В этом же смысле надо понимать, если можно так выразиться, именованность чисел· 18 *кл,* 29 руб., 137 *кв. м* и т. п.

Иному может показаться большим пробелом в образовании учеников, если последние не в состоянии ответить на вопрос о том, что такое простое именованное число. Чаще всего от учащегося требуют, чтобы он умел сказать наизусть определение, начинающееся словами: „простым именованным числом называется“ и т. д. Но придавать особенное образовательное значение определениям такого рода не следует. Не только в вопросах столь простых, как вышеприведенный, но и в более сложных, определения играют весьма незначительную роль. Никто не станет спорить против утверждения, что было бы в высшей степени нецелесообразно требовать от малолетних и от кого бы то ни было определений того, что называется столом, скамьей, стулом, домом, огнем, морозом и т. п. Неблагоразумно судить о недостаточности литературного развития человека, близко знакомого с русскою литературою и любящего ее, по тому, что он не может дать определений того, что называется чувствительностью, когда говорят о прозе Карамзина, что — юмором, когда говорят о Гоголе, что — художественною прозою, когда говорят о прозе Тургенева и т. д. От такого человека можно требовать, чтобы он мог *на примере* указать, — в чем заключается юмор Гоголя, художественность Тургеневской прозы и т. д. Определения же для него совсем не обязательны. Равнодушное отношение к очень многим определениям особенно приличествует учителю *практической* арифметики. Для его учеников, изучающих все то, из чего они в состоянии себе составить верные арифметические представления и точные основные арифметические понятия, важно умение на примерах уяснить себе и быть в состоянии отдать себе отчет в этих представлениях и понятиях. Их работа над примером важнее даже безукоризненных, а часто — только мнимо точных определений тех понятий, которые, строго говоря, в определениях не нуждаются. При *научном* построении основ арифметики, как эти основы понимаются в настоящее время, определения арифметических понятий, конечно, чрезвычайно важны. Но эти определения с определениями, приводимыми в учебниках арифметики, конечно, не имеют ничего общего.

§ 5. Единичное отношение.

Хотя на практике редко приходится пользоваться термином „единичное отношение“, но, ввиду того, что этот термин встречается, надо дать ему определение. Надобности непременно в самом общем определении единичного отношения одной единицы меры к другой, конечно нет никакой. Если бы даже таковая надобность была, то с точки зрения практики, к этому определению следовало бы прийти по возможности постепенно. Без этого условия оно, как и всякое общее определение, слишком громоздко и преисполнено множеством для ученика не мотивированных и потому ему совершенно ненужных слов. Гораздо проще поставить дело на почву ряда *частных* определений. В километре 1000 *м*; число 1000 называется в этом случае единичным отношением километра к метру; в метре — 10 дециметров; число 10 в этом случае называется единичным отношением метра к дециметру и т. д. При особенно большом пристрастии к общим определениям, учитель, конечно, не затруднится выработать на основании этого материала и общее определение. Но все-таки он должен помнить, что такие определения не обладают большой ценностью. В учебниках научно-логические точки зрения важнее методических и психологических. Но из этого отнюдь не следует что при *обучении* точки зрения первого рода тоже важнее. Важно только то, что 1 *кг*: 1 *г* = 1000, что 1 *м* : 1 *см* = 100 и т. п.

§ 6. Правильное и неправильное составное именованное число.

Выяснение различия между правильным и неправильным составными именованными числами тоже не должно быть поставлено на почву только определения. Известно, что в состав последнего входит весьма громоздкий термин „единичное отношение единицы высшего наименования к единице ближайшего низшего наименования". Подобные определения никакой пользы делу не приносят, а, между тем, требуют громадной затраты времени и сил учащихся. Гораздо проще прямо выяснить, что 12 *м* 7 *дм* — *длина*, которую можно назвать *составным* именованным числом; 12 *м* 7 *дм* — правильное составное именованное число. Но 12 *м* 17 *дм* — неправильное, потому что 17 *дм* более метра, и у нас, поэтому, всех метров не 12, а 13, и еще, — сверх этих 13 *дм* — только 7 *см*. При этом, конечно, ученики легко усваивают себе эти термины, и выигранное таким образом время могут употребить на уяснение себе вопроса, когда именно получается при измерении составное именованное число, т. е. для уяснения вопроса действительно важного и поучительного. Они не только могут себе это уяснить, но даже могут научиться это условие облекать, приблизительно, в следующую словесную форму: „сначала мы измерим какую-либо величину наибольшею, какая только возможна в этом случае, единицею меры; когда при этом получится остаток меньший, чем эта единица меры, мы этот остаток снова измерим, но следующею, меньшею, чем первая, но наибольшею, какая только возможна в данном случае, единицею меры и т. д.; мы тогда получим правильное составное именованное число. Чтобы это было поставлено на почву конкретную, учителю полезно заготовить такие концы бечевки или тесемки, чтобы ему самому и ученикам можно было сначала измерить их метром, остаток — дециметром, новый остаток — сантиметром. Это внесет в занятия больше сознательности и разумения. Раздробление и превращение именованных чисел детьми уже усвоено, и если учитель считает необходимым, чтобы они еще усвоили себе определение этих терминов, то это уже не представит ни для него, ни для учеников особенных трудностей. Не надо только при этом раздробление и превращение называть действиями над именованными числами. Каждая из этих задач не представляет собою, во-первых, действия в истинном значении этого последнего слова, а во-вторых, требует для своего выполнения целого ряда действий. Раздробление и превращение представляют собою *тождественные преобразования* данных чисел в другие, выражающие ту же, что эти последние числа, величину, но выраженную в других единицах меры. Но непременно определять раздробление, как такое преобразование одного именованного числа в другое, которое имеет целью и т. д., равным образом определять, что превращением называется такое-то и такое-то преобразование именованного числа, решительно не для чего. Гораздо проще выражать эти определения не с помощью отглагольных имен существительных, а примерно в следующей форме: раздробить именованное число значит заменить его другим равным ему, но выраженным в единицах низшего наименования; превратить простое именованное число значит заменить его другим, равным ему, но выраженным в виде другого простого именованного числа высшего наименования, или же в виде правильного составного именованного числа.

§ 7. Отвлеченные числа двоякого рода.

Когда представления об именованном числе приведены в систему, можно перейти к числу отвлеченному. Для этого надо предложить ученикам, чтобы они считали, не называя единиц счета, а произнося только имена числительные в надлежащем их порядке. Каждое из имен числительных (простых, производных и сложных) обозначает какое-нибудь определенное число. Если до поры до времени или вообще неважно, какие именно единицы считаны, то такое число называется отвлеченным. Надо, однакоже, заметить что в арифметике, кроме чисел именованных, отвлеченных и предметных, встречаются числа особого рода которые нельзя отнести ни к одному из этих родов чисел.

Предметное число представляет собою некоторую *совокупность предметов или явлений* (не единиц меры), связанную в нашем сознании с законченным счетом. Именованное число выражает некоторое частное численное значение *величины*: 5 *м* представляет собою некоторую длину; 7 *г* — некоторый вес; 5 час. и 13 мин. — некоторый промежуток времени.

Отвлеченное число во всех тех случаях, когда над ним совершаются сложение или вычитание, когда оно является множимым при умножении или делимым при делении на известное число одинаковых частей, можно заменить каким угодно именованным или предметным числом. Результат действий при этом получится, во-первых, вполне соответствующий результату действия над отвлеченным числом, и во-вторых, вполне согласный с данными для производства действий значениями величины. От сложения 5 метров с 7 метрами получится, во-первых, такое число метров, которое равно сумме чисел 5 и 7, а во-вторых, в результате получится 12 метров, а не каких-либо других единиц меры. То же справедливо и для вычитания 7 *г* из 35 *г*, для умножения 7 *г* на 5 или для разделения 35 *кг* на 5 одинаковых частей. В этом смысле очевидно, что если требуется сложить 5 и 7, или вычесть 17 из 25, помножить 36 на 8, или разделить 48 на 8 равных частей, то под 5, 7, 17, 25, 36 и 48 можно разуметь данное число каких угодно единиц, и только в этом исключительном смысле говорят, что отвлеченному числу можно приписать какое угодно наименование. Это уясняет самую сущность отвлеченного числа, как числа в истинном смысле этого слова.

Но бывают такие случаи в математике и даже в арифметике, когда число отнюдь не может считаться ни предметным, ни именованным, ни даже отвлеченным в выше установленном смысле этого термина. Ему притом, по самому его смыслу, нельзя приписать никакого наименования, т. е. оно незаменимо никаким именованным и никаким предметным числом. Такими числами являются, например, чисто „активные" числа: множитель при умножении, делитель при делении на известное число одинаковых частей, отношение при делении числа на известные части, показатель степени при возвышении в степень, показатель корня при извлечении корня, наконец, логарифм числа. Действительно, если мы напишем безусловно верное равенство $7 \times 4 = 28$, то цифра 7 может обозначать какие угодно семь предметов и семь каких угодно одинаковых единиц меры. В зависимости от того, какие мы возьмем единицы, которых у нас в множимом дано 7, мы тем самым предрешим и смысл произведения, т. е. смысл числа 28: в результате получим 28 таких же единиц, каких взято нами во множимом 7. Множителю же в этом случае мы не можем приписать никакого наименования, и 4 в этом случае всегда будет выражать лишь то, на сколько надо помножить 7. Возвратившись к первоначальному значению умножения, мы можем сказать, что 4 выражает, сколько раз надо взять слагаемым число 7, чтобы получить искомое нами произведение, т. е. что множитель в этом случае ведет счет числу слагаемых, подлежащих сложению. В этом случае четыре является, очевидно, *только* числом, отвечающим на вопрос, сколько слагаемых, равных множимому, надо взять в данном случае, а отнюдь не числом, в том же смысле отвлеченным, в каком смысле отвлеченным является в нашем случае множимое, т. е. число 7. Таким образом, отвлеченность множителя в этом случае отнюдь не такова, чтобы можно было множителю приписать какое угодно наименование. Эта отвлеченность существенно отличается от отвлеченности слагаемых при сложении отвлеченных чисел, от отвлеченности уменьшаемого и вычитаемого при вычитании таких же чисел, от отвлеченности множимого при умножении, делимого — при делении на известное число одинаковых частей, делимого и делителя — при делении делимого на части, из которых каждая равна делителю. То же самое надо сказать о делителе при делении на известное число одинаковых частей и о частном (отношении) при делении чисел на известные, равные между собой, части. Делитель при делении на известное число одинаковых частей не может принять никакого наименования, выражая только одно, а именно — на сколько одинаковых частей должно разбить делимое. Равным образом и отношение, т. е. частное, при так называемом кратном сравнении одного числа с другим, выражает лишь одно, а именно, сколько делителей в этом случае заключается в делимом. Множитель при умножении, делитель и отношение при делении представляют собою, конечно, числа не именованные. Их можно называть отвлеченными только с той точки зрения, что их словесные обозначения „не снабжены наименованием", но отнюдь не в том смысле, что им можно приписать какое угодно произвольное наименование. В этом смысле так называемая отвлеченность множимого и множителя при умножении отвлеченных чисел по внутреннему смыслу своему различна, и на это надо обратить внимание. При этом достойно внимания и то обстоятельство, что когда мы пишем:

$$8 \times 7 = 7 \times 8 \text{ или } 5 \times 6 \times 10 = 10 \times 6 \times 5 \text{ и т. п.,}$$

то только первый сомножитель каждого из этих произведений может принять какое-либо наименование (притом 8 и 7 — свое, а 5 и 10 — свое наименование), остальные же сомножители этой возможности лишены. [1] Аналогичное справедливо для показателей степени и корня и для логарифма.

§ 8. Единицы разных разрядов и классов.

В старину обучение арифметике, хотя бы и первоначальное, начиналось с нумерации, притом прямо с письменной, если не считать относящимся до предмета арифметики так называемого „введения", которое, если усваивалось учениками, то без всякого разумения и непременно наизусть. Повторение интересующего нас курса арифметики, конечно, тоже может начинаться с повторения нумерации. Но это учение само по себе настолько неинтересно в качестве повторительного материала, и усвоено оно учениками настолько постепенно в начальном курсе арифметики, что подобное начало не обещает ничего хорошего. Полное систематическое повторение уместно только после того, когда ученик вполне усвоил четыре действия над числами и когда он, стало-быть, в состоянии оценить все громадное значение десятичной системы счисления. Он должен понимать те благодеяния, которые эта система оказывает во всех случаях, когда приходится прибегать к вычислению. Кроме того, при таком повторении нумерации, которое не предшествует четырем действиям, а следует за ними, самое учение о нумерации делается более содержательным и обоснованным. Наконец, для такого повторения в уме учеников найдется большое количество надлежащих

---

[1] Все эти рассуждения не относятся до перемножения двух или более именованных чисел одного и того же или разного наименования, когда произведение выражается непременно в новых единицах меры. Точно также они неприменимы при разделении одного именованного числа на другое именованное другого рода. При этом последнем делении особого рода частное выражается не именованным числом того же рода, что делимое, и не отвлеченным числом какой бы то ни было из двух вышерассмотренных категорий. Так, например $8\ \text{м} \times 2\ \text{м} = 16\ \text{кв. м}$, а $8\ \text{кг} \times 2\ \text{м} = 16\ \text{кгм}$. В первом произведении множимое — длина, а произведение — площадь, во втором множимое — вес или масса, а произведение — работа. Равным образом рассуждения эти неприменимы при делении (так сказать, третьего рода):

$$16\ \text{м} : 2\ \text{мин.} = \frac{1\ \text{м}}{1\ \text{мин.}} \cdot 8,$$

где делимое — длина, делитель — время, а частное — скорость. И т. п.

арифметических представлений и более разработанная, разрыхленная, если можно так выразиться, почва для восприятия тонкостей учения о нумерации.

Начинать повторение надо не с определения единицы,[1] каковое определение, строго говоря, и не отличается ни достаточным содержанием, ни научной верностью, а с определения того, что называется десятком, сотней и тысячей. Затем можно перейти к так называемым арабским цифрам и к правилу обозначения чисел меньших десяти, чисел больших десяти, но меньших двадцати, чисел 10, 20, 30 и т. д., вообще всяких двухзначных чисел и чисел трехзначных. Далее, можно напомнить ученикам, что десяток называется также единицею, но единицею второго разряда, сотня — единицею третьего разряда, а простая единица — единицею первого разряда. Потом можно перейти к тысяче, как к единице четвертого разряда, и в то же время — как к единице второго класса. Тогда простая единица делается также единицею первого класса. При этом получается представление о том, что тысяча единиц первого класса составляет одну единицу второго класса, а тысяча единиц второго класса — одну единицу третьего и т. д. Относительно разделения единиц данного числа на единицы разных разрядов и единицы разных классов должно помнить, что это разделение не только преследует практические цели, но представляет собою весьма остроумное орудие, как при письменном обозначении чисел, так и при обозначении устном. Дело в том, что счет единиц, если его вести вполне разумно и целесообразно (т. е. сначала не употребляя никаких других слов, кроме названий первых десяти чисел), неизбежно приводит не только к разрядам, но в конце концов и к классам. Мы при таком счете (ежели у нас дано более тысячи единиц) должны добраться до некоторого количества тысяч и некоторого количества отдельных единиц, не входящих в состав ни одной из составленных нами тысяч. Таким же образом должно быть поставлено и получение единицы третьего класса, а именно миллиона.

§ 9. Числа однозначные и многозначные.

Какие числа называются однозначными, какие — двухзначными, трехзначными и четырехзначными — ученики быстро уясняют себе вполне. Достойно их внимания, что однозначные числа не обнимают всех чисел пер-

[1] Знаменитый немецкий математик Герман Госсе, которому математическая наука обязана весьма значительными приобретениями, в скромной книжечке своей под заглавием „Четыре действия" („Die vier Species") с удивительной ясностью указывает на то, что понятие об единице принадлежит к числу понятий первоначальных, не поддающихся и потому не подлежащих определению. По его мнению, понятие о том, что такое единица, принадлежит к числу тех, которые зарождаются в уме человека в очень раннем возрасте и допускают впоследствии возможность дальнейшего развития. Он предвидит со стороны читателя вопрос о том, как может понятие столь подвижное, зыбкое и не поддающееся точному определению, лежать в основе столь точной науки, как математика. На этот вопрос он отвечает следующим образом: Всем известно, говорит он, что земля движется вокруг солнца, и что вся солнечная система, в свою очередь, также движется в бесконечном пространстве; но кому же не известна возможность прочных сооружений на столь зыбком фундаменте, как земля, совершающая в пространстве столь сложное движение?

вого десятка, так как десять уже есть число двухзначное. Равным образом двухзначные числа не обнимают всех чисел первой сотни: первые девять чисел однозначные, а сто — число трехзначное. Правила обозначения четырехзначных, пяти- и шестизначных чисел просто. Главнейшее значение имеет та особенность, по которой сначала обозначаются все тысячи, число которых может быть однозначным, двухзначным или трехзначным, а затем уже — все остальные единицы, не входящие в состав тысячи. Число последних единиц должно обозначить *непременно тремя цифрами*, хотя бы *число* их было само по себе числом *однозначным*. Правило, однакоже, должно выражать по возможности просто, хотя бы, например, так: сначала записывают, сколько всего тысяч в данном числе, а затем по порядку слева записывают, сколько в нем отдельных сотен, десятков и единиц. Для большей ясности записи низшая цифра тысяч отделяется от цифры сотен промежутком большим, чем промежутки между остальными цифрами. Нумерация чисел семи-, восьми- и девятизначных не содержит в себе уже ничего нового. Но с переходом к миллиону учителю надо побороться с неизбежно возникшим в уме учеников неверным представлением о величине миллиона. К величине миллиона не только дети, но и взрослые, относятся без должного разумения. Сказать „миллион" и обозначить это число цифрами можно очень скоро и без затруднения, а ясно представить себе число всех единиц миллиона, т. е. *миллион единиц*, невозможно.

§ 10. Величина миллиона.

При этом достойно внимания учителя и учеников, что не только дети, но и люди взрослые, неверно себе представляют тот промежуток времени, в который можно написать, например, букву „*и*" один миллион раз, ежели ее писать так быстро, как мы обыкновенно пишем, и одну букву от другой отделять, хотя бы и, весьма незначительным пробелом. С часами в руках, можно в течение одной минуты, а еще лучше в течение половины одной минуты, писать на доске букву *и* (но не слишком медленно, дабы ученики не имели впоследствии основания к нареканиям). Окажется, что в минуту даже сотни букв как следует не написать. Затем можно приступить к расчету, сколько минут потребуется на написание одного миллиона букв *и*, ежели считать, что в минуту можно написать даже 100 букв. В конце этого расчета получится, что для выполнения этой работы надо без всякого перерыва работать в течение 6 суток 22 час. и 40 мин. Этот результат, конечно, даже и не особенно развитым детям покажется поразительным. Но дабы впечатление еще больше усилить, надобно от учеников потребовать, чтобы они отдали себе полный отчет в том, что это значит: „6 суток 22 час. и 40 мин." Это значит, что писать придется почти целую неделю, считая при этом, что человек может в течение недели не есть, не пить, не спать, не двигаться, а только сидеть да писать, да еще притом писать так скоро, как почти никто не пишет, а именно по 100 букв в минуту. Самое же обозначение миллионов и правило для написания семизначного, восьмизначного и девятизначного чисел, а равно биллионов, т. е. десятизначного, одиннадцатизначного и двенадцатизначного чисел, повторяем, не представляют никаких особенных трудностей. Очень полезно при этом показать ученикам, что написать один биллион раз букву *и* значит потратить около девятнадцати лет своей жизни на одно только писание букв без отдыха и срока, без сна, пищи и питья.

§ 11. Услуги нумерации и десятичной системы.

В высшей степени важно показать ученикам, как велико благодеяние, оказываемое общепринятой нумерацией. Небольшим количеством цифр мы можем обозначить какое угодно число, притом быстро обозначить такие числа, которые неизмеримо больше, чем числа, обыкновенно представляющиеся в нашей ежедневной жизни. Но этого мало. Для лучшего воздействия на воображение учеников в этом направлении можно обратиться к решению вопросов о том, сколько верст займут миллион человек, поставленных гуськом, если считать, что человеку нужно только четверть метра места на земле; какой высоты столб образуется, если положить один на другой 1 000 000 медных пятаков и т. п.; сколько дней прошло от начала нашей эры до настоящего времени, сколько минут в году, сколько жителей в СССР и т. п. Когда это сделано, можно написать ряд цифр, хотя бы например, число: 8 714 560 178 563 542 074 315, и показать учащимся, что не только представить себе, как оно велико, но даже быстро прочесть его, как следует, затруднительно. А тем не менее мы над этим числом можем произвести любое действие. К нему можно прибавить какое угодно другое число, из него вычесть какое угодно число, меньшее, чем оно, помножить его на сколько угодно, разделить на какое угодно число одинаковых частей, одним словом сделать над этим числом любое вычисление. Можем вычислить, сколько километров в таком числе миллиметров, сколько лет в таком числе, секунд, и т. д., и этому вычислению учит арифметика. Отсюда получится определение арифметики не как „*науки*, которая и т. д.“, а определение и более простое для школы, и более согласное с действительностью, и более вразумительное: „арифметика учит тому, как обозначать числа и как производить четыре действия над числами, обозначенными с помощью арабских цифр“.[1]

§ 12. Сравнение удобств производства действий при цифрах арабских и римских.

Дабы еще лучше оттенить благодеяния, оказываемые десятичной системой нумерации с помощью так называемых арабских цифр, полезно обратиться также к цифрам римским, употребительным лишь

[1] Это определение арифметики не совпадает с тем значением, которое ныне придается слову «арифметика» в разных странах Европы. Строго говоря, то, что у нас принято называть арифметикою, в Германии называется „Rechnen“ или „die vier Species“, во Франции — „calcul arithmétique“. Современный научный смысл слова „арифметика“ отмечен в интересной брошюре В. Ф. Кагана, под заглавием „Что такое алгебра“, Одесса, 1911 г. — В начале 80-х годов пишущий эти строки предложил называть то, что у нас называют арифметикою, „вычислением“, а А. И. Гольденберг — «счислением». Но оба эти термина неудовлетворительны и не характеризуют того, что в школе называется арифметикою. Строго говоря, у нас под арифметикою разумеют арифметику четырех действий над целыми и дробными абсолютными числами. — О том, насколько затруднительно определение любой науки, см., между прочим, интересную книгу Фосса: «О сущности математики» в русск. пер. И. В. Яшунского, Спб. 1911, стр. 17.

до весьма незначительного предела. На циферблате часов, при обозначении столетий и при именах некоторых царей (например, Петр I, Екатерина II, Александр III, Людовик XIV) употребляются римские цифры. Цифры L и D детям, конечно, незнакомы. Но это не представляет никакого особенного затруднения, если прямо сказать, что L — латинская буква, соответствующая нашей букве Л, D — латинская буква, соответствующая нашей букве Д. Равным образом, легко им усвоить себе правила для обозначения чисел с помощью римских цифр. Но цель ознакомления с римскими цифрами не будет достигнута, ежели нам не удастся убедить детей в том, насколько действия над числами, обозначенными с помощью римских цифр, трудно выполняются, по сравнению с действиями над числами, обозначенными с помощью цифр арабских. Для примера можно взять сложение и вычитание двух многозначных чисел, потом умножение числа на десять. Даже из одних этих примеров ученики убедятся, что вычисления над числами, обозначенными с помощью римских цифр, производить гораздо труднее.

Особенно это заметно на примере умножения на десять, которое при действии над числами, обозначенными с помощью римских цифр, требует более или менее продолжительного изустного вычисления. Вдаваться в производство действий умножения и деления на многозначные числа, обозначенные с помощью римских цифр, можно, конечно, только в том случае, если на это есть время, и пользу может в этом случае принести хотя бы только попытка выполнения одного из этих действий учениками.

Ученики, благодаря подобному повторению нумерации и некоторым указаниям относительно значения десятичной системы при производстве действий, могут уяснить себе не только самую сущность нумерации, но и те великие благодеяния, какие она оказывает нам при наших вычислениях. Тогда истинная цель своевременного и вдумчивого, а не формального только и несвоевременного в начале курса, повторения этой статьи будет вполне достигнута. Ученики поймут размеры того благодеяния, которое человечеству оказали десятичная система нумерации и так называемые арабские цифры, из коих нуль представляет собою весьма важную составную часть этого изобретения. Дело в том, что и в финикийской, и в еврейской, и в греческой, и в церковно-славянской нумерации система счисления может считаться десятичною (так как основными единицами счета является десяток, сотня, тысяча и т. д.). Но, только благодаря так называемым арабским цифрам (в том числе — нулю) и возможности придавать цифрам двоякое значение (абсолютное и местное), стала возможна та арифметика, которая в настоящее время сделалась доступною даже малолетним и достигла такой степени совершенства.

§ 13. Искусственные системы счисления.

Весьма вероятно, что для усвоения размеров благодеяния, оказываемого при вычислениях десятичной системой счисления и арабскими цифрами, было бы полезно ученикам усвоить себе некоторые особенности и самую идею искусственных систем счисления (например, двоичной и пятеричной). Но опытов в этом направлении пишущий эти строки не производил. Курс арифметики в низших классах загроможден многочисленными сложными арифметическими и трудными алгебраическими задачами, вследствие чего такой опыт вероятно и невозможен. Но если бы он был и возможен, его надо было бы поставить чисто практически.

Действия (сложения, вычитания, умножения и деления) над числами, обозначенными по двоичной системе, крайне поучительны. Особенно интересно, что по этой системе счисления вычитание, умножение и деление не требуют никаких таблиц, кроме следующей:

$$1-0=1;\ 1-1=0;\ 1\times 1=1;\ 1:1=1$$

При действии сложения двух многозначных чисел можно знать, что $1+0=1$; $1+1=10$, т. е. один да один — два.

Если дано несколько многозначных слагаемых, то можно их сгруппировать попарно, и тогда не понадобится даже знания, что $1+1+1=11$; $1+1+1+1=100$ и т. п.

Все действия совершаются при этих условиях почти механически.

Разница между письменным и изустным вычислением.

Особенно ярко выступает разница между письменным и изустным вычислением в том случае, когда числа обозначены не по десятичной, а по другой системе счисления. Пусть требуется сложить четыре числа, обозначенные по пятеричной системе:

$$\begin{array}{r|}
434\\
243\\
334\\
\hline
2121
\end{array}$$

Мы без вспомогательных вычислений их прочесть не в состоянии иначе, как только следующим образом: 4 единицы третьего разряда, 3 — второго и 4 первого требуется сложить с двумя единицами третьего разряда, четырьмя второго и тремя первого и т. д. А *письменно* мы сложим так: 4 да 3 семь, да 4 одиннадцать, 1 запишем, 2 в уме; 2 да 3 пять, 5 да 4 девять, 9 да 3 двенадцать, 2 пишу, 2 в уме; 2 да 4 шесть, 6 да 2 восемь, 8 да 3 одиннадцать. Итого получим, что сумма равна 2121, причем этого числа мы опять-таки не в состоянии прочесть без вспомогательных вычислений. Здесь требовалось только знание того, что каждые 5 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего, высшего, разряда.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

НАЧАЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ НАД ДРОБЯМИ.

§ 1. Две ступени учения о дробях.

Учение о дробях весьма резко распадается на две части, ступени. Из них одна представляет собою по содержанию своему только совокупность *основных представлений о дроби и ее главных свойствах*, а другая уже содержит в себе полное учение об изменении дробей, о преобразовании их и о четырех над ними действиях в *полном их объеме*. Эта вторая часть, которую можно было бы охарактеризовать, как систематический курс дробей, уже предполагает знакомство учеников с некоторыми учениями о делимости целых чисел, о признаках этой делимости, о разложении чисел на сомножители и о наименьшем кратном нескольких чисел. Она содержит в себе (в учениях об умножении и делении на дробь) одну из самых плодотворных в математике идей, а именно идею о распространении понятия, относящегося к действиям над числами одного рода над числами другого рода. В упомянутых учениях об умножении и делении на дробь ученику приходится делать весьма значительные усилия мысли, чтобы постигнуть, что умножением называется иногда деление $(5 \cdot \frac{1}{2})$, что не всегда от умножения число увеличивается, что умножить число не всегда значит взять его слагаемым несколько раз и т. п. Само собою разумеется, что это только первый случай условного, символического, значения арифметического действия (если не считать действий с нулем: $4+0$, $4-0$ и $4 \cdot 0$, и некоторых действий с единицей: $4 \cdot 1$ и $4:1$). Но именно потому-то занимающее нас систематическое учение о дроби и требует от ученика серьезнейшей предварительной подготовки на почве конкретных наглядных представлений о дробях и об основных свойствах дробей. Первоначальные понятия о дробях относятся к 4-му году обучения в начальной школе.

В этом курсе не содержится почти ничего, сколько-нибудь затруднительного с логической точки зрения. Здесь все основано на тех наглядных, конкретных представлениях о дроби, которые, в сущности говоря, известны всякому ученику, уже вышедшему из детского возраста. Эти представления только должны быть более определенным и настойчивым образом вовлечены в область сознания учащихся и более или менее систематизированы под руководством учителя.

§ 2. Представление о дроби.

Происхождение дробей должно быть выяснено вначале на самых простых примерах: на яблоке, разделенном пополам, на метре, разделенном пополам, на листе бумаги, разделенном сначала пополам, а потом на четыре одинаковые части, и т. п. Надо позаботиться о том, чтобы дети с самого начала освободились от удручающей их мысли, будто дроби — что-то новое, что-то никогда им не встречавшееся и, должно быть, очень трудное. Крайне полезны при этом упражнения разного рода: а) складывание учащимися бумажных лент пополам, на 4, 8, 16 одинаковых частей; б) складывание бумажных лент на нечетное число 3, 5, 7 одинаковых частей; в) деление на-глаз начерченных на доске и в тетрадях конечных прямых на несколько одинаковых частей; г) деление конечных прямых с помощью вспомогательных (хотя бы изготовленных из бумаги) угла и линейки и д) вычерчивание конечных прямых, равных половине, трети, двум третям и т. д., данной конечной прямой, и снабжение этих чертежей соответствующими словесными и цифровыми надписями и т. п.

На все вопросы, касающиеся состава целого из половин, половины из четвертей, трех четвертей из четвертей, ученики должны отвечать всегда либо самым полным ответом, либо же самым кратким, какой только возможен. Ибо всякий другой ответ в этом случае не заслуживает сочувствия. Действительно, если мы спрашиваем, сколько в целом четвертей, то на этот вопрос можно ответить просто „четыре“, либо же надо ответить: „в целом четыре четверти“. Повторение обозначения дробей с помощью цифр надо начинать с обозначения трех четвертей, а не с обозначения половины. Дело в том, что слово „половина“ не содержит в себе и подобия того, что обозначает запись половины. Действительно, когда мы обозначаем три четверти, то цифра 3 для обозначения числителя и даже цифра 4 для знаменателя хоть напоминают собою слова „три“ и „четверти“. Когда же мы обозначаем половину, то ни цифра 1, ни цифра 2, служащие для обозначения половины, слова этого даже и не напоминают. При объяснении того, что такое пятая доля единицы, шестая и т. п., надобно обратить внимание учеников на то, что слова: „пятая“, „шестая“ и т. д. представляют собою в этом случае не порядковые имена числительные, выражающие, о *которой* части среди других частей идет речь, а особенное, дробное имя числительное, зависящее по форме своей от подразумевающегося при этом слова „доля“. При этом не важно, знают ли ученики термины „числитель“ и „знаменатель“, или не знают их. Важнее, чтобы они понимали, что в записи любой дроби одна или несколько цифр обозначают число взятых долей, а другая цифра или совокупность их обозначает, сколько таких долей в целом. Определение дроби должно опираться на представление учеников о доле единицы, т. е. о такой ее части, каковых в единице целое число. Они должны понять, что всякая д о л я единицы называется дробью, т. е. что когда мы говорим: одна десятая, одна восьмая, то слово „доля“ подразумевается, и что когда мы говорим: „три четверти“, „три шестых“, то мы называем как бы *сумму* трех одинаковых долей. (С чисто логической точки зрения, это не определение дроби, так как мы не дали определения того, что значит сложить несколько одинаковых долей. Но с этим надо примириться.) После этого они должны усвоить себе, что сумма каких угодно одинаковых долей единицы также называется дробью, и что всякая дробь может называться также дробным *числом*, т. е. что $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{10}$, будучи дробями, называются также *числами*. Это последнее обстоятельство вовсе не так просто, как оно кажется с первого взгляда. *Числами* ученики склонны называть, — притом совершенно справедливо, — только числа натуральные, целые. Новое применение термина „число“ к дробям для них должно явиться тем, что оно на самом деле собою представляет, а именно только *условным* обобщением понятия о числе. Когда в этом направлении проработано достаточно упражнений, детей можно ознакомить с терминами „числитель“ и „знаменатель“ дроби, а также с менее употребительным термином „члены дроби“. При определении этих терминов надо, однакоже, остерегаться определений отвлеченных и многословных. Числитель есть число *взятых* долей единицы, а знаменатель — число таких долей в единице. Если дробь записана с помощью цифр, то как она читается — вопрос довольно важный. В состав словесного обозначения дроби, как известно, входят: 1) имя числительное количественное женского рода, обозначающее числитель дроби, и 2) имя числительное порядковое того же рода в надлежащем падеже и числе, соответствующих числителю (триста одна пятьсот-шести-десятая, пятьсот две триста-шестидесятых, восемь триста-шестидесятых). Умение записывать всякую продиктованную дробь зависит от того, насколько ученики сроднились со словесным и цифровым обозначением дробей. При этом не безынтересно, что часто требуется особенно выразительное прочтение числителя и знаменателя дроби для того, чтобы дробь была записана, как следует. Если мы, например, скажем, что требуется записать две тысячи семьсот тридцать пятых, то решительно неизвестно, о каких долях говорится: о семьсот-тридцать-пятых, о тридцать-пятых ли долях, или же о долях пятых, т. е. неизвестно, какую дробь надо написать: $\frac{2\,000}{735}$ или $\frac{2\,700}{35}$ или же, наконец, $\frac{2\,730}{5}$. Все зависит от того, как эти слова прочесть. В этом направлении требуется некоторое количество упражнений. А что касается способа словесного, на письме, обозначения подобных дробей, то слова, входящие в состав названия знаменателя, нужно отделять одно от другого маленьким тире. Надо писать: две тысячи ***семьсот-тридцать-пятых*** или же: две тысячи семьсот ***тридцать-пятых***, в зависимости от того, каков знаменатель нашей дроби.

§ 3. Происхождение дробей.

Как можно смотреть на правильную дробь? — Вначале, конечно, только с той простейшей точки зрения, что она представляет собой сумму нескольких одинаковых *долей одной и той же единицы*. Но происхождение дроби может быть и иное. Для естественного, так сказать, составления дроби, например, $\frac{5}{8}$ единицы, надо взять одну единицу, разделить ее на 8 одинаковых частей и таких частей отобрать пять. Но можно поступить и иначе: можно взять пять единиц, принять их (как это вообще делается с делимым при делении) за одно целое, и это целое разделить на 8 одинаковых частей. Тогда получится 8 одинаковых частей, из которых некоторые содержат пять восьмых долей одной и той же единицы, а другие — хотя и восьмые доли разных единиц, но сумма этих долей равна пяти восьмым долям одной единицы. Особенно ясно это последнее обстоятельство при практическом и графическом истолковании происхождения обыкновенной дроби.

К выяснению этого последнего смысла дроби можно, однакоже, перейти только в случае, когда проработаны многочисленные упражнения в делении одной единицы на некоторые числа без остатка нацело. Надо неоднократно подумать о том, что каждый раз делимое представляет собою целое, делитель — число одинаковых частей, на которые надо разделить это целое, а частное — соответствующую долю этого целого. С этой же точки зрения надо посмотреть на записи:

$$1:2=\frac{1}{2};\ 1:3=\frac{1}{3};\ 1:4=\frac{1}{4}\ \text{и т. д.}$$

Когда это сделано, можно предложить ряд вопросов следующего рода: что получит каждый мальчик, если 3 одинаковых булки разделить между четырьмя мальчиками поровну? При этом выяснится, что разделить 3 булки на 4 одинаковые части можно искусственным образом:

сначала разделить одну из них на 4 одинаковых части, и каждому мальчику дать одну такую долю, затем разделить другую булку на 4 одинаковые части и полученные доли точно так же раздать этим четырем мальчикам; наконец, третью булку разделить на 4 одинаковые части, и эти доли тоже раздать. Получатся 3 группы долей, и в каждой группе одна доля составляет четверть одной булки, другая — четверть другой булки, а третья — четверть третьей булки. Каждому мальчику досталось таких долей три, т. е. от разделения трех булок между 4 мальчиками поровну получилось в результате по одной четверти от каждой из данных трех булок. Отсюда до трех четвертей булки (подразумевается *одной* булки) еще очень далеко. Чем осязательнее и конкретнее представление учеников на этой ступени повторительного курса, тем лучшее основание будет приобретено для той части основного отдела курса, в состав которой входит полное учение о дробях. Поэтому подобных упражнений над листами бумаги, лентами разного цвета, но одинаковой длины, и т. п. предметами должно быть на самом деле (а потом мысленно) проделано довольно много. Но при этом отнюдь не следует умалчивать о вышенамеченной тонкости и об этой особенности всего процесса образования дроби, на которые не обращают обыкновенно почти никакого внимания. На самом деле на них должно обращать особенное внимание учеников, так как в этих тонкостях кроется причина, по которой ученикам не всегда ясно, или, вернее, всегда неясно значение дроби, как частного, происходящего от разделения числа, равного числителю дроби, на число, равное знаменателю ее. Мы говорим о тонкости, состоящей в том, что при делении, подобном вышеописанному разделению трех булок на 4 одинаковые части, каждая из полученных частей состоит из равных между собой долей, не различаемых нами только по величине, но различных по порядку единиц, из которых взяты доли (одна из них взята от первой, другая — от второй и т. д.). Равным образом вопрос о том, можно ли разделить три булки иначе поровну между четырьмя человеками, при этом остается тоже в стороне, что вносит в учение много неясностей. А этот способ существует. Он может состоять в том, что мы от первой булки отрежем только четверть ее, вторую булку разрежем пополам и к одной половине, приложим четверть первой булки; от третьей булки тоже отрежем четверть ее и приложим ко второй половине второй булки и, таким образом, мы получим три части, из коих первая содержит в себе $\frac{3}{4}$ одной и той же булки, хотя и не отделенные одна от другой, вторая содержит тоже три четверти, но они составлены из половины второй булки и четверти первой, третья равным образом содержит в себе $\frac{3}{4}$, состоящие из половины второй булки и одной четверти третьей булки, а четвертая часть содержит в себе опять $\frac{3}{4}$ целой (третьей) булки, не отделенные одна от другой. Но относительно всех, составленных таким образом, четырех одинаковых частей, на которые надо было разделить три булки, говорят, что ***каждая из этих частей равна трем четвертям булки.*** Здесь родительный падеж („булки“) слова „булка“ уже допускает определительные слова, выражаемые словами „одной и той же“. Можно сказать, что каждая часть в этом случае содержит в себе ровно столько хлеба, сколько его содержится в трех четвертях одной булки. Только когда все это разработано в надлежащем виде, можно перейти к нахождению частных $7:8, 5:9, 7:10$ и т. п. При этом крайне важно, чтобы ученики вполне ясно понимали, что после знака равенства при разделении числа на известное число одинаковых частей надо записать *только одну* из этих частей. Это, к сожалению, иногда тоже не принимается во внимание не только учениками, но, при обучении детей, иногда даже самими учителями.

§ 4. Неправильная дробь.

Некоторую трудность и новую тонкость содержит в себе также представление о так называемой неправильной дроби. Неправильная дробь, бо̀льшая единицы, является дробью, состоящею из одинаковых долей не одной и той же единицы, а из одинаковых долей, из которых каждая только равна некоторой доле единицы. Действительно, когда мы берем неправильную дробь, равную единице $\left(\text{например, } \frac{4}{4}\right)$, то эта дробь не только представляет собою *несколько* одинаковых долей единицы, но и является собранием всех четвертых долей ее. Но когда мы берем дробь $\frac{9}{4}$, то очевидно, что для составления этой дроби взята не *одна* единица, и что разделена на 4 одинаковые части не одна единица, так как невозможно взять девять четвертых долей одной и той же единицы, когда их во всякой единице только четыре. В последнем случае неправильная дробь не является суммою девяти одинаковых частей единицы, а является суммою, в которой первое слагаемое представляет собою $\frac{1}{4}$ некоторой единицы, второе слагаемое — $\frac{1}{4}$ той же самой единицы и т. д. Пятое же слагаемое представляет собою одну четверть второй такой же единицы, шестое — четверть также второй единицы и т. д., а девятое — четверть третьей единицы. Можно сказать, что это — сумма таких девяти слагаемых, из которых каждое равно одной четверти одной единицы. Это означает, что для составления неправильной дроби $\frac{9}{4}$ надо взять все четверти одной единицы, все четверти другой и, сверх того, еще одну четверть третьей, или (что то же), взять по одной четверти от девяти *различных* единиц, или же 9 слагаемых, из которых каждое равно $\frac{1}{4}$ единицы.

Эта последняя точка зрения на неправильную дробь должна считаться единственно верною, и плодотворность ее для так называемого „исключения целого числа из неправильной дроби“, конечно, также не подлежит сомнению. Вернейшее определение неправильной дроби, как такой дроби, которая или равна единице, или больше ее, от подобного освещения ее происхождения не только ничего не проиграет, но даже прямо много выиграет, в своем содержании, для малолетних учеников.

На отвлеченную дробь, как на *отношение* одного числа к другому, т. е. как на результат кратного сравнения одного числа с другим, на этой ступени не должно быть устанавливаемо никаких точек зрения. Только зная умножение на дробь, ученики могут перейти к кратному сравнению таких двух чисел, которые в окончательном результате не дают целого числа и приводят либо к дроби правильной, либо же (при известном условии) к дроби бо́льшей, чем единица, либо же, наконец, — к смешанному числу. Это в занимающем нас отделе совершенно неуместно не только с педагогической, но и с логической точки зрения, так как отношением одного числа к другому называется число, на которое надо умножить второе, чтобы получить первое. Стало-быть, для того, чтобы знать, что отвлеченная дробь есть отношение, надо знать смысл умножения на дробь. — Отвлеченная дробь, как отношение, представляет собою одно из самых требовательных понятий в области полного учения о дробях, входящего в состав основного отдела курса арифметики в полной элементарной школе и в среднем учебном заведении.

§ 5. Представление о половинах, четвертях, восьмых и т. п.

Дальнейшая работа на поприще наглядного изучения дробей сводится, прежде всего, к сравнению величины дробей с одинаковыми знаменателями, далее — с различными знаменателями, затем — к сравнению дробей с одинаковыми числителями, причем не только вполне выразительное чтение вопросов, но и наглядно-осязательные примеры в этих случаях крайне необходимы, пока ученики еще не освоились с самой сущностью дела. За этими упражнениями могут пойти упражнения в сложении дробей, знаменатели которых 4, 8, 12 или 36, вычитание подобных же дробей, сложение таких дробей с разными знаменателями и вычитание дробей с разными знаменателями. Конечно, о термине „приведение дробей к общему знаменателю“ при этом говорить детям решительно не для чего. Ибо цель всех этих упражнений состоит только в снабжении ума учеников достаточно верными и ясными представлениями о простейших долях (половинах, четвертях, восьмых, двенадцатых, тридцать шестых) и о возможности замены более крупных долей другими, более мелкими. При этом могут потребоваться упражнения учеников только в решении вопросов о том, сколько четвертей в половине, восьмых долей в четверти и т. д.; сколько восьмых долей в трех четвертях, шестнадцатых в половине, в четверти, в трех четвертях и т. п.

§ 6. Увеличение и уменьшение дроби в несколько раз.

Увеличение дроби в зависимости от умножения числителя на некоторое число должно всегда начинать со сложения одинаковых дробей и с замены записи равных слагаемых новой записью Так, например, если требуется найти сумму

$$\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+\frac{3}{32},$$

то ученик должен понять, что эта запись легко заменяется такою: $\frac{3}{32}\times 4$. Но правила при этом выводить не для чего, так как дети сами должны его не только вывести, но даже выразить, в свое время, без всякого со стороны учителя к тому принуждения.

Сокращение дроби, получающейся от подобного умножения на целое число, может быть опущено до более благоприятного момента, так как, строго говоря, не в этом сокращении цель соответствующих упражнений. Дабы избегнуть столь неудобных при проверке самостоятельных работ разногласий в ответах учеников, полезно потребовать от учеников, пока они еще не освоились с исключением целого числа из неправильной дроби и с сокращением дробей, чтобы они полученного произведения не преобразовывали.

Полною наглядностью должны отличаться и задачи на уменьшение доли в несколько раз. Цель этих упражнений заключается только в том, чтобы ученики убедились, что всякую долю единицы можно обратить только в известные, а не в любые доли, что трети, например, можно обратить только в шестые, девятые, в двенадцатые, в пятнадцатые, но никак не в десятые, восьмые, шестнадцатые, пятые и т. п. Вести их надо по возможности в связи с графическим выполнением соответствующих задач. Это крайне важно также для возбуждения в уме детей тех основных представлений, которые пригодятся при уяснении, впоследствии, приведения дробей к общему знаменателю, выходящего, впрочем, за пределы повторительного курса. Самая большая трудность встречается для соображения учеников в том, что они неясно представляют себе, почему, например $\frac{1}{12}$ менее одной трети ровно в 4 раза. Для того чтобы это представление образовалось и окрепло в уме учеников, полезно всякий раз, когда к тому представляется надобность, обращаться к следующему ряду вопросов: а) сколько двенадцатых долей в целом, б) сколько двенадцатых долей в одной трети целого, в) во сколько раз одна треть целого, стало-быть, больше одной двенадцатой доли его и, наконец, г) во сколько раз $\frac{1}{12}$ *менее* одной трети?

Раздробление дробей. Если мысль об обратимости любой доли в другие доли получила в сознании учеников твердую основу, можно перейти к выражению дроби в других долях и к раздроблению любой доли в доли более мелкие. Но только наглядные опыты в разделении доли на одинаковые части и сильное воздействие на воображение учеников ведут к цели достаточно быстро и верно. В качестве наглядного пособия можно употребить целый лист бумаги и прямую линию с определенными концами. При этом рассуждении о числителе и знаменателе на этой ступени повторительного отдела совершенно бесполезны, а потому и нецелесообразны. Только многочисленные упражнения конкретного содержания принесут действительную пользу дальнейшему курсу, где приведение дробей к общему знаменателю поставлено на более или менее отвлеченную почву. Сюда же относятся упражнения в приведении дробей к общему знаменателю, основанном на предыдущих упражнениях в разделении доли на одинаковые части. Прием работы должен сводиться, примерно, к следующему: Пусть даны две дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$. Шестую долю можно обратить в двенадцатые, но девятую в двенадцатые доли обратить нельзя. Стало-быть двенадцатые доли не годятся. Шестые можно обратить в восемнадцатые (при этом непременно надо переходить к ближайшим долям, не допуская скачков) и девятые в восемнадцатые обратить тоже можно. Стало-быть и шестые и девятые надо обратить в восемнадцатые. Это преобразование дроби можно называть *раздроблением*.

Даны дроби: $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{15}$. Шестые можно обратить в двенадцатые, но они не годятся; в восемнадцатые, но они тоже не годятся; в двадцать четвертые — равным образом не годятся; в тридцатые!.. Вот это — доли подходящие, потому что и пятнадцатые доли тоже можно раздробить в тридцатые. Этот прием подготовляет учеников к уразумению значения сомножителей знаменателя в деле приведения дробей к одному знаменателю. Можно предложить и упражнения в обращении дробей и неподходящие доли. Таков, например, вопрос о том, сколько двадцатых долей в $\frac{2}{3}$, который может быть разрешен только отрицательно, притом с помощью следующего рассуждения: в одной единице двадцатых долей двадцать; в $\frac{1}{3}$ двадцатых долей втрое меньше, чем двадцать, т. е. не целое число двадцатых долей, а потому две трети обратить в двадцатые доли невозможно.

§ 7. Представление о сокращении дробей.

В том же направлении должно быть проведено представление о возможности сокращения дробей. Учителю иногда бывает очень трудно отрешиться при этом от мысли, что все дело зависит от одновременного уменьшения числителя и знаменателя в одно и то же число раз. и что поэтому учение об этом уменьшении есть единственная основа верного представления о сокращении дробей. На самом же деле, первоначальное представление о сокращении дробей вытекает из совершенно других соображений. Прежде всего обратимся к дробям, которые по сокращении дают только одну долю единицы, т. е. дают дробь, числитель которой равен единице. Пусть даны $\frac{2}{4}$ единицы. В целой единице четвертей — четыре; нам даны только две, т. е. вдвое меньше, чем сколько их в целой единице, а вдвое меньше одной единицы только половина ее; стало-быть, нам дана $\frac{1}{2}$ единицы, а потому $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ Пусть даны $\frac{2}{6}$ единицы; в целом шестых долей шесть; нам даны только две, т. е. втрое меньше, чем сколько их в целом; значит, эти $\frac{2}{6}$ составляют $\frac{1}{3}$ всего целого, и, значит, $\frac{2}{6}$ все равно, что $\frac{1}{3}$. Пусть дано $\frac{3}{9}$. В целом девятых долей девять; нам даны три таких доли, т. е. втрое меньше, чем сколько их в целом, и эти три доли должны составлять $\frac{1}{3}$ целого, т. е. $\frac{3}{9}$ все равно, что $\frac{1}{3}$ и т. д. Очевидно, что при подобном рассуждении мы совершенно не пользуемся неизменяемостью дроби в зависимости от изменения числителя и знаменателя. Несколько сложнее дело поставлено в том случае, когда по сокращении получается дробь, числитель которой отличается от одной единицы. Сокращение дробей можно называть *превращением.*

Это преобразование можно вести трояким способом:

1) Опираясь в упражнении детей в этом направлении на предыдущие познания их в области раздробления дробей. Благодаря самостоятельным упражнениям дети достаточно усвоили себе, что $\frac{2}{3}$ все равно, что $\frac{4}{6}$ $\frac{3}{5}$ все равно, что $\frac{6}{10}$, $\frac{4}{7}$ все равно, что $\frac{8}{14}$, и т. д.; благодаря этим же познаниям, ученики легко могут вывести, что $\frac{4}{6}$ все равно, что $\frac{2}{3}$, так как, зная, что $\frac{1}{3}$ все равно, что $\frac{2}{6}$, а $\frac{4}{6}$ в два раза больше, чем $\frac{2}{6}$, значит в два раза больше, чем $\frac{1}{3}$, — стало-быть, содержит в себе $\frac{2}{3}$.

2) Другой способ создания в уме учеников верного представления о возможности сокращения некоторых дробей заключается в следующем: Пусть дана, например, дробь $\frac{4}{6}$. В целом шестых долей шесть; $\frac{2}{6}$ составляют $\frac{1}{3}$ целого, а $\frac{4}{6}$ вдвое больше, чем $\frac{1}{3}$; т. е. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Пусть даны $\frac{10}{15}$; в целом $\frac{15}{15}$; $\frac{5}{15}$ составляют $\frac{1}{3}$, а $\frac{10}{15}$, конечно, вдвое больше. т. е. $\frac{2}{3}$. Пусть дана дробь $\frac{24}{30}$; в целом $\frac{30}{30}$; $\frac{6}{30}$ составляют $\frac{1}{5}$ долю целого, а $\frac{24}{30}$ в четыре раза больше, т. е. $\frac{4}{5}$; или же $\frac{2}{30}$ составляют $\frac{1}{15}$ долю, а $\frac{24}{30}$ в двенадцать раз больше, чем $\frac{2}{36}$, и т. д. Надобно, конечно, вначале брать дроби, сокращаемые только на 2, только на 3, только на 5, а затем уже сокращаемые на 4, на 6, на 10 и т. д. Тогда легко перейти и к обсуждению вопроса о том, в каких долях может быть выражена данная сократимая дробь. Нельзя ли выразить, например, $\frac{15}{20}$ в более крупных долях. В половинах нельзя, потому что половина все равно, что $\frac{10}{20}$, в третях тоже нельзя, потому что трети никогда не дадут двадцатых долей, в четвертях, может быть, и можно, потому что четвертые доли могут быть обращены в двадцатые доли; весь вопрос в том, сколько двадцатых нужно для составления одной четверти. Их нужно пять; у нас же собрано пятнадцать таких долей, т. е. в три раза больше; значит $\frac{15}{20}$ все равно, что $\frac{3}{4}$.

3) Подобные вопросы можно решать и иначе. Пусть, например, дана дробь $\frac{27}{72}$. Возьмем ближайшие большие доли, какие только возможны в этом случае и какие могут быть обращены в семьдесят-вторые доли. Такими долями будут тридцать-шестые. В одной тридцать-шестой две семьдесят вторых; у нас их 27, стало-быть, в тридцать-шестых долях

выразить данную дробь нельзя. Возьмем доли втрое бóльшие, чем семьдесят-вторые, т. е. двадцать-четвертые. В одной двадцать-четвертой $\frac{3}{72}$, значит, у нас $\frac{9}{24}$ и т. д.

Если взять хотя бы только десять примеров подобного рода и рассмотреть их с учениками с точки зрения обращения дроби в самые крупные доли, какие только возможно, — трети, четверти и т. д., и если десять примеров рассмотреть с учениками с точки зрения обращения данной дроби в ближайшие к ней более крупные доли, то эти двадцать примеров на первых порах будут совершенно достаточны. У учеников дальнейшее учение о дробях будет основываться на верных арифметических представлениях, а не на формально учителем навязанных правилах об изменении и неизменяемости дробей в известных случаях. Подобные упражнения принесут ученикам притом больше пользы, чем взятые несвоевременно только-что упомянутые учения.

§ 8. Смешанное число и неправильная дробь

Первоначальные представления о смешанном числе, а также и об обращении его в неправильную дробь, а также об исключении целого числа из неправильной дроби не затруднительны. Можно даже дать эти термины и пояснить, почему дроби, которые равны единице или больше единицы, называются неправильными дробями, почему сумма целого числа с дробью называется смешанным числом. Но из всех возможных определений правильной и неправильной дроби наилучшие те, по которым правильною называется дробь меньшая единицы, неправильною же — та, которая либо равна единице, либо больше ее. Эти определения теснее соприкасаются с сущностью дела, чем определения, основанные на сравнении, по величине, числителя и знаменателя данной дроби. Тут же надо обратить внимание на то, что если требуется найти сумму целого *числа* с некоторой правильной дробью, то вместо того, чтобы писать $2+\frac{1}{2}$, $3+\frac{1}{3}$, $1+\frac{3}{10}$, пишут просто $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{10}$, не прибегая в этом случае к знаку сложения (к плюсу). Самое обращение смешанной дроби в неправильную дробь надо поставить на почву не правила, а рассуждения о составе каждой единицы целого числа из некоторого числа таких же долей, из каких составлена дробная часть данного числа. Таким образом, если у нас дано смешанное число $3\frac{3}{4}$, то мы рассуждаем о том, сколько четвертей в одной единице, сколько их в трех единицах и т. д. Правило же обращения смешанного числа в неправильную дробь, а равно определение этого обращения могут быть смело опущены. До правила дети могут добраться и сами на основании самостоятельных работ, а определение обращения смешанного числа в неправильную дробь совершенно бесполезно, будучи слишком громоздко и усвоению сущности дела нисколько не помогая. Ибо будет ли в состоянии ученик пересказать правило или нет, — не столь важно, как то, чтобы он свободно, на самом деле, с полным разумением, верно и быстро, обращал всякое смешанное число в неправильную дробь. Для того, чтобы судить, насколько определение обращения смешанного числа в неправильную дробь громоздко, достаточно принять во внимание, что обратить смешанное число в неправильную дробь значит найти такую дробь, которая равна данному смешанному числу и которая выражена в тех же долях, в которых выражена дробная часть данного смешанного числа. Правила и определения могут, во всяком случае, только следовать за полным усвоением учениками сущности дела и за приобретением ими полной власти над наглядными представлениями, над умениями и навыками, сюда относящимися.

Способ исключения целого числа из неправильной дроби должно основывать каждый раз тоже на полном рассуждении, приблизительно, следующего содержания: Дана дробь $\frac{17}{8}$; требуется узнать, сколько целых единиц составляет эта дробь и сколько, сверх того, в ней восьмых долей, не *входящих в состав новой единицы*. Нам дано восьмых долей 17; в единице же восьмых долей 8; стало быть, каждые $\frac{8}{8}$ составляют одну единицу, а потому вопрос в том, сколько раз из семнадцати восьмых можно отнять по восьми восьмых долей. Только впоследствии, а не сразу, учащийся догадывается, что надо узнать, сколько раз в 17 содержится 8, и что столько же отдельных единиц содержится в этих 17 долях. Чтобы узнать — сколько раз в 17 содержится 8, надо произвести деление числа 17 на 8. Частное 2 будет выражать, сколько раз можно 8 вычесть из 17, т. е. сколько целых единиц содержится в дроби $\frac{17}{8}$, а остаток 1 показывает, сколько еще, сверх того, содержится восьмых долей в данной дроби. Таких упражнений, — притом всякий раз с надлежащими рассуждениями и с должным воздействием на воображение учеников, — последние должны проделать достаточное количество, причем ни одного ученика не должно освобождать от этой работы. Сколько таких упражнений понадобится в данном случае — сказать нельзя: это вполне зависит от состава класса и от его подготовки.

Упражнения можно располагать, примерно, следующим образом:

Чему равны $\frac{4}{4}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{16}{16}$?.. — Неправильная дробь, в которой числитель равен знаменателю, равна одной единице... — Всякая неправильная дробь, в которой числитель больше знаменателя, ***больше*** единицы... — Почему $\frac{5}{4}$ больше единицы? (Потому что $\frac{4}{4}$ равны единице, а $\frac{5}{4}$ больше ***четырех*** четвертей...) — Почему $\frac{16}{5}$ больше единицы? $\frac{17}{8}$ больше единицы? и т. д... — Как узнать, сколько единиц содержится в дроби $\frac{17}{8}$ и сколько, сверх того, в ней восьмых долей, не составляющих единицы? (В единице восемь таких долей, которых нам дано 17; сколько раз 8 содержится в 17, столько отдельных единиц содержится в этих семнадцати долях.)

$$\begin{array}{l} 17:8=2 \\ \underline{16} \\ \ \ 1 \end{array}$$

Остаток же (1) показывает, сколько, сверх того, восьмых долей в данной дроби; поэтому $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$.

Исключить целое число из неправильной дроби значит отыскать смешанное число, которое равно данной неправильной дроби... — Какое правило исключения целого числа из неправильной дроби? (По учебнику...;) — На какое вычисление похоже исключение целого числа из неправильной дроби? (На превращение именованных чисел...) — Пример: сколько суток в 125 часах?

$$125 \text{ ч.} = 5 \text{ с. } 5 \text{ ч.}$$

$$\begin{array}{l} 125 : 24 \\ \underline{120} \\ \quad 5 \end{array}$$

Другой пример: какому смешанному числу равна дробь $\frac{125}{24}$?

$$\frac{125}{24} = 5\frac{5}{24}$$

$$\begin{array}{l} 125 : 24 \\ \underline{120} \\ \quad 5 \end{array}$$

и т. д. — На какое вычисление похоже обращение смешанного числа в неправильную дробь? (На раздробление составного именованного числа...) — Пример:

$$5 \text{ м } 7 \text{ дм} = 57 \text{ дм}$$

$$10 \text{ дм} \times 5 = 50 \text{ дм}; \; 50 \text{ дм} + 7 \text{ дм} = 57 \text{ дм}$$

$$5\frac{7}{10} = \frac{57}{10}$$

$$\frac{10}{10} \times 5 = \frac{50}{10}; \; \frac{50}{10} + \frac{7}{10} = \frac{57}{10}$$

и т. д.

§ 9. Конкретное пособие для выяснения свойств дробей.

Некоторые авторы по предмету методики арифметики (из русских авторов, например, Ф. И. Егоров) наилучшим наглядным пособием для выяснения некоторых свойств дробей считают круг, разделенный на требуемое число секторов. К сожалению, более или менее точное разделение круга на одинаковые секторы осуществляется только в немногих случаях. Приблизительное же разделение, применяемое в техническом черчении, довольно затруднительно. Удобнее квадрат, разделяемый на равные полосы при умении делить прямую на сколько угодно частей. Особенно ярка иллюстрация половин, четвертей, восьмых и шестнадцатых. Легко осуществимы шестые и девятые — по глазомеру, складыванием бумаги. Если присоединить сюда двенадцатые, то с помощью этих наглядных пособий, изготовленных самими учащимися, многого можно достигнуть в первом цикле упражнений над дробями. Еще Песталоцци в ныне почти совершенно забытом, как наглядное пособие, квадрате черпал весьма поучительные упражнения учащихся даже в весьма сложных вычислениях над дробями. Интересно, между прочим, что он придавал квадрату, как наглядному пособию, прямо громадное значение и считал эту идею самой плодотворной из всех высказанных им идей по обучению. Результаты, коих он достигал с помощью квадрата, как известно, были весьма значительны. На это пособие следует, во всяком случае, обратить заслуживаемое им внимание. Наиболее естественным наглядным пособием при изучении основных свойств дробей является квадрат или другой прямоугольник, а также отрезок прямой линии. На доске удобен метр, в тетради — дециметр. Кроме полосок бумаги, для самостоятельных работ учащихся удобны полосы, заключенные между линейками линованной тетради.

ОСНОВНОЙ ОТДЕЛ

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ИЗМЕНЕНИЯ ДРОБЕЙ.

§ 1. Характер основного отдела.

Когда все, разработанное при повторении, учениками вполне усвоено, можно заняться основным отделом курса арифметики.

Материал основного отдела существенно отличается от материала повторительного курса в том отношении, что статьи повторительного отдела иногда ученикам более или менее знакомы, а учения отдела основного им знакомы лишь в весьма немногих своих частях. Кроме того, курс арифметики принимает в статьях основного отдела характер менее наглядный и более отвлеченный. Зависит это от того, что ученики, приступающие к усвоению этого курса, отличаются бо́льшим умственным развитием и от самого материала учений, составляющих содержание статей, отнесенных в этой книге к основному отделу. Должно, впрочем, помнить, что где возможна конкретная, наглядная постановка того или иного учения, к ней необходимо прибегнуть. Надо всегда относиться с особенным вниманием к неоспоримой потребности учеников в возможно более конкретной постановке курса на любой его ступени. Только в тех случаях, когда наглядность (не только внешняя, но даже и внутренняя) совершенно невозможна, от нее необходимо отказаться, ставя дело на почву строго-логическую и даже не стремясь к наглядной постановке вопроса. Соображение, будто слишком большая наглядность даже в тех случаях, когда она вполне возможна, при усвоении детьми нового учебного материала недостаточно развивает учеников умственно и недостаточно поднимает их на высшие ступени познания, — совершенно неосновательно. В надлежащем курсе арифметики полной элементарной школы и любого среднего учебного заведения довольно много таких моментов, при которых курс всякого учебного предмета может оказать полезное развивательное влияние на духовное развитие учеников вообще и на умственное развитие в данном направлении — в частности. Но особенно спешить с развитием исключительно-мыслительных способностей учеников и учениц решительно не следует по двум причинам: во-первых, только то усвояется человеком из новых для него областей познания вполне сознательно и с радостью, что находится в пределах не только его мысли и понятий, но также, по возможности, и в пределах его представлений и воображения. Во-вторых, наглядность представлений не только не мешает точности основанных на них понятий или смелому полету мысли человека (если только вообще к такому полету мысли человек этот способен), а, напротив, может им только способствовать.

Германский мыслитель Кант верно определил отношение между непосредственным усмотрением (интуицией) и отвлеченным понятием, а также относительную важность их, сказав, что „понятия без интуиций бессодержательны, а интуиции без понятий слепы". Настаивая на необходимости наглядности во всех тех случаях, где она возможна, мы только выдвигаем на первый план факт необходимости ясных представлений для образования точных понятий. Но, с другой стороны, всякое стремление сделать наглядным то, что наглядным быть не может, должно быть признано не только не целесообразным, но даже прямо для дела вредным. В этих случаях помощь наглядных пособий может привести к извращенным и, по меньшей мере, смешным и неудовлетворительным приемам обучения.

На частных примерах мы ниже ознакомимся со всеми случаями, не допускающими сколько-нибудь целесообразного следования всем требованиям принципа наглядности (например, при определении умножения дробей, деления их и т. п.).

§ 2. Изменения дробей.

По усвоении намеченного выше курса, должно перейти к систематической выработке учения об изменениях дробей во всех тех случаях, когда для обоснования этого учения не требуется знания умножения на дробь. Это значит, что из учения об изменениях дробей должны быть исключены все те случаи, когда дробь изменяется не в целое число раз. Например, неуместно здесь рассматривать случай: что сделается с дробью, если числитель ее умножить на 7, а знаменатель умножить на 4, или, что с нею сделается, если числитель разделить на 7, а знаменатель разделить на 8?

Учитель и ученики сравнивают две дроби с одинаковыми знаменателями, в которых числитель одной больше числителя другой в целое число раз. Затем они переходят к составлению дробей, бо́льших данной в несколько раз, и ученики приучаются к искусственному выражению: „дана дробь, *увеличу* ее числитель втрое или вчетверо" и т. п. Наконец, учитель указывает ученикам, что слова „увеличить в несколько раз", при надлежащем их употреблении, дают возможность довольно кратко выражать более или менее сложные мысли. Вместо, например, того, чтобы сказать, что даны две дроби, что числитель второй больше числителя первой в несколько раз, что их знаменатели одинаковы и что вторая дробь во столько же раз больше первой, во сколько раз числитель второй дроби больше числителя первой, можно сказать короче так: если числитель данной дроби увеличить в несколько раз, а знаменатель оставить без перемены, то дробь от этого увеличится во столько же раз. Доказывать это свойство дробей, ссылаясь при этом на то, что дробь представляет собою частное, происходящее от разделения числа, равного числителю, на число, равное знаменателю, не следует. Увеличение дроби в занимающем нас случае, строго говоря, и без того само по себе очевидно. Вообще говоря, даже в основном курсе арифметики не следует слишком преувеличивать значение всяческих доказательств, хотя бы и точных. С особенно большою осторожностью надо относиться к доказательствам мнимым, воображаемым, совершенно не точным и даже не заслуживающим, строго говоря, названия доказательств. К числу подобных неточных, а потому и призрачных и для детей недоступных, доказательств принадлежат доказательства изменения дробей, основанные на учении об изменениях частного в зависимости от изменения делимого и делителя. Дело в том, что эти последние изменения, как это замечено выше, относятся до случая целого частного и, с точки зрения чисто логической, вовсе не обязательны для случая, когда частным является дробь. Для того же, чтобы доказательство стало точным, надобно сделать еще соглашение, которое давало бы возможность распространить законы, справедливые для целых частных, на случаи, когда частными являются дроби. А насколько осторожным надо быть в обобщениях всякого рода — наилучшим доказательством может служить умножение. Когда множитель — целое число, большее единицы, произведение больше множимого. Но из этого вовсе не следует, что от умножения, вообще, всегда получается произведение большее множимого. Подобная осторожность должна быть развиваема в учениках. Необоснованное же распространение законов, выведенных для случаев одного рода, на случаи другого рода, подобной осторожности отнюдь не развивает.

Учение об увеличении числителя даже в основном курсе должно быть поставлено на почву простых и наглядных представлений. Столь же просто должно быть поставлено и увеличение знаменателя в несколько раз, а также уменьшение числителя или знаменателя в несколько раз для случаев, когда они делятся нацело без остатка на то число, которое выражает, во сколько раз мы хотим их уменьшить.

Увеличение и уменьшение в несколько раз.

Далее должны быть приведены в систему способы увеличения и уменьшения дробей в несколько раз. В качестве самостоятельных работ эта статья курса требует таких упражнений, при которых ученики не избегали бы знаков умножения и деления. Напротив: они должны пользоваться ими совершенно свободно в пределах, дозволительных на данной ступени обучения, а именно в тех случаях, когда множителем и делителем является целое число.

§ 3. „Одновременное“ изменение в одно и то же число раз.

Так называемое „одновременное“ увеличение обоих членов дроби в одно и то же число раз и уменьшение их в одинаковое число раз требует некоторого внимания в отношении способа выяснения *причины*, по которой дробь величины своей не изменяет. Обыкновенно на этот вопрос принято смотреть опять-таки с точки зрения одновременного увеличения или уменьшения делимого и делителя в одно и то же число раз. Помимо того, что эта точка зрения не верна логически (справедливое для целых чисел не всегда справедливо для дробей), она ученикам, как в том убеждает опыт, и не вполне доступна. Наибольший результат, который достигается с помощью этой точки зрения, сводится к тому, что ученики умеют *объяснить словами*, которые они заучили, то, чего они, строго говоря, себе не представляют. То, что учениками приобретено в области верных представлений о дробях, благодаря повторительному отделу, должно быть теперь только дополнено и закруглено. Для этой цели нужно сначала брать не две (данную и другую с увеличенными или уменьшенными в одно и то же число раз членами), а непременно *три* дроби. При этом третья дробь должна служить как бы вспомогательным средством для лучшего и более верного суждения об изменении, происшедшем с дробью в зависимости от одновременного изменения ее членов. Это означает, что если нам нужно рассудить, что случится с дробью $\frac{3}{4}$, ежели мы увеличим числитель и знаменатель ее в 5 раз, то надо не просто рассмотреть дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{15}{20}$, а прибегнуть еще к третьей дроби, а именно к $\frac{15}{4}$ или к $\frac{3}{20}$. Тогда рассуждение наше будет опираться не на одни слова, а на верные представления. Действительно, не следует удовлетворяться тем, что ученик на вопрос, почему дробь в этом случае не изменилась, без запинки ответит: „от увеличения числителя в 5 раз дробь увеличилась во столько же раз, а от увеличения знаменателя в 5 раз дробь уменьшилась в 5 раз; стало-быть, она в одно и то же время (?!) увеличилась и уменьшилась в 5 раз, а потому она не изменилась.“ Подобный ответ содержит некоторую неясность, так как одновременно увеличиваться и уменьшаться величина не в состоянии. Она может либо увеличиваться, либо уменьшаться, либо же оставаться без всякой перемены.

Несомненно вернее следующая постановка вопроса:

Даны две дроби: $\frac{3}{4}$ — первоначальная дробь, и $\frac{15}{20}$ — новая дробь. Возьмем дробь $\frac{3}{20}$, в которой только знаменатель больше знаменателя первой дроби в 5 раз. Эта третья, вспомогательная, дробь меньше первой в 5 раз. Сравним вторую дробь с нашей третьею дробью: вторая, т. е. $\frac{15}{20}$, больше третьей в 5 раз. Выходит, что третья дробь *меньше* первой в 5 раз, а вторая *больше третьей* в 5 раз, или же, что мы данную дробь сначала уменьшили в 5 раз, а потом *полученное* увеличили в 5 раз. В результате могла получиться только дробь равная первоначальной. О том же, что две дроби могут быть различны по виду, но одинаковы по величине, ученики, при той постановке курса, которая выше принята во внимание, имеют надлежащее представление на основании сделанного в повторительном курсе. Если подобных упражнений проделать не одно, не два, а столько, сколько необходимо для того, чтобы каждый из учеников мог все рассуждения, сюда относящиеся, сознательно воспроизвести, то учение о неизменяемости величины дроби при „одновременном“ увеличении членов ее в одно и то же число раз поставлено будет на надлежащую почву. Учащимся следует каждую из задач этого рода разрешить как с первоначальной, так и с новой точки зрения. Они должны рассмотреть дроби как с точки зрения состава трех четвертей из трех слагаемых, из которых каждое равно $\frac{5}{20}$ (т. е. $\frac{1}{4}$), а также и с точки зрения увеличения числителя и знаменателя в одно и то же число раз. Совершенно так же надо разработать и уменьшение дроби в одинаковое число раз. При этом полезно только то преобразование, которое получается в разультате одновременного разделения числителя и знаменателя данной *сократимой* дроби на одно и то же число, — называть сокращением. Если самое определение сокращения ученикам покажется трудным, то достаточно, чтобы они поняли, что, заменив $\frac{15}{20}$ тремя четвертями, а $\frac{25}{35}$ — пятью седьмыми, мы переделали, *преобразовали* первые дроби, выраженные в мелких долях, в другие, выраженные в долях более крупных. Такое преобразование называется сокращением. Порядок упражнений может быть избран, примерно, следующий: дана дробь $\frac{20}{25}$; мы можем числитель и знаменатель уменьшить в одно и то же число раз, а именно?.. — Что сделается с дробью?.. — Рассудим это так: дана дробь $\frac{20}{25}$ — первоначальная дробь, и дробь $\frac{4}{5}$ — новая дробь; возьмем еще дробь $\frac{4}{25}$, в которой только числитель уменьшен в 5 раз. Эта третья дробь меньше первой в 5 раз; а вторая *больше* третьей, притом *тоже* в 5 раз... — Выходит, что мы данную дробь сначала уменьшили в 5 раз, а потом *полученное* снова увеличили в 5 раз... — Сначала величину уменьшить в 5 раз, а потом полученное увеличить во столько же раз! — в результате получится ведь первоначальная величина!.. — Дана дробь $\frac{30}{40}$; $\frac{30}{40}$ — первоначальная величина; $\frac{3}{40}$ — в десять раз меньше ее; $\frac{3}{4}$ — в десять раз больше, чем $\frac{3}{40}$, т. е. величина сначала уменьшена в 10 раз, а полученная увеличена во столько же раз... — Если числитель и знаменатель делятся на одно и то же число нацело без остатка и если разделить и числитель и знаменатель на это число, то величина дроби останется та же..., но выражена будет эта дробь в более крупных долях... Такое *преобразование* дроби называется *сокращением*... — Что это значит *сократить дробь*? [1]

§ 4. Сокращение дроби.

К сокращению дробей можно приурочить не мимолетное, а сознательное появление в сознании учеников мысли о том, что они сокращать умеют не всякую дробь, и что только некоторые дроби для них

[1] С простейшей логической точки зрения дробью называется именно то число, которое выражается в зависимости от двух натуральных чисел a и b и остается без изменения, если вместо a взять an, а вместо b взять bn, где буква n обозначает натуральное число. Если же *доказывать* это свойство дроби, то можно опереться на другое определение дроби, по которому две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (где a, b, c, и d — натуральные числа) равны между собою, когда $ad = bc$. Само собою разумеется, что такие точки зрения на дробь невозможны в курсе дробей, изучаемом в низших классах средней школы. Да и для высших классов такая постановка дела нецелесообразна. С точки зрения современной критики основоначал арифметики, дробь в той же мере математическая фикция, как отрицательное число и число комплексное вида $a + bi$, где буква i обозначает $\sqrt{-1}$ (ср. Фосс: „О сущности математики", стр. 80, примеч. 38). По Таннери термин „части единицы" не имеет смысла, и дробь есть только сочетание двух натуральных чисел, подчиненное известным определениям. Эта точка зрения, конечно, верна, но для изучающих практическую арифметику преждевременна. (См. также „Теоретические основы арифметики и алгебры" — В. Н. Комарова, изд. 1929 г.)

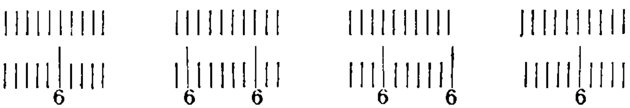
представляются с первого же взгляда поддающимися сокращению. Так, они должны прежде всего понять, что они не только могут сократить $\frac{6}{8}$, но и могут сейчас же по первому взгляду *сказать*, что эту дробь можно сократить. Дроби же $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{17}{25}$ сократить нельзя, а $\frac{15}{25}$ они точно так же могут сократить, и при одном взгляде на эту дробь они сейчас же видят, что это дробь — сократимая, а $\frac{17}{25}$ — несократимая. Затем они должны вполне уяснить себе, что есть целый ряд дробей, сократимость которых для них, учеников, не вполне ясна, например, $\frac{91}{769}$, $\frac{119}{763}$, $\frac{315}{936}$, $\frac{111}{360}$. К этому убеждению должно быть приурочено сознание, что хорошо бы знать такие приметы, по которым можно было бы быстро определить, на что делится данное число нацело без остатка, а также сознание, что это было бы весьма полезно знать и для сокращения дробей. Не рассказывать и не лекции читать должен учитель о том, насколько полезно знать те внешние приметы (так называемые признаки делимости чисел), по которым довольно быстро можно определить, делятся ли данные числа хотя бы только на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 8, на 9. Не должен он также читать лекций о том, для чего собственно полезно сокращать дроби. Только упражнения, к этой цели направленные, могут развить у учащихся понимание пользы признаков делимости чисел.

Путем упражнений должно довести учеников до сознания, что хотя $\frac{75}{100}$ и $\frac{3}{4}$ одно и то же, но что $\frac{3}{4}$ яснее представляются нашему воображению, чем $\frac{75}{100}$, что то же самое справедливо относительно $\frac{2}{3}$, если сравнить дробь $\frac{2}{3}$ с дробью $\frac{160}{240}$ и т. д., и что очень многие дроби (смотри выше) хотя и сокращаются, но этого не видно по первому взгляду на члены их. Таковы, например, дроби: $\frac{225}{378}$, $\frac{504}{729}$ и многие другие. Ученики должны попробовать сократить, с помощью более или менее утомительных соображений, несколько подобных дробей, пытаясь определить, делится ли каждый из членов дроби на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8, на 9. При этом окажется, что представление о некоторых признаках делимости чисел в сознании учеников (по крайней мере, некоторых из них) уже имеется налицо. В результате же всех этих упражнений должно получиться убеждение учеников в том, что им надо научиться распознаванию, по возможности быстрому и верному, делится ли данное число хотя бы только на число первого десятка (за исключением 7) или же не делится. Повторяем: этого не надо делать слишком бегло, торопливо и как бы между прочим.

§ 5. Приведение дробей к общему знаменателю.

К тому же должны повести и упражнения в приведении дробей к общему знаменателю на основании соображений, усвоенных раньше в повторительном курсе. Начать надо с дробей, выраженных в четвертых, восьмых, шестнадцатых, пятнадцатых, пятых, двенадцатых и т. п. долях. Надо убедить учеников, что иногда они могут *угадать*, в каких одинаковых долях можно выразить данные дроби, что иногда они могут добраться до этого *путем расчета*, нередко утомительного. Иногда — притом довольно часто — подобный расчет настолько утомителен, что с ним сразу и не справиться. Ученики должны понять, что может случиться, что им будет довольно трудно разыскать то небольшое число, которое делится на данные числа без остатка и что для этого разыскания им должно быть, нехватает каких-то знаний. На почве подобных, притом довольно многочисленных, упражнений, а не вследствие только произвола учителя, должно быть обосновано введение в курс арифметики учения о признаках делимости чисел. Оно играет в арифметике весьма важную, хотя и чисто служебную роль. Это учение важно в практическом курсе не само по себе, а в связи с сокращением дробей и с приведением их к общему знаменателю. Не с целью подготовки к алгорифму нахождения наименьшего кратного двух чисел, а с целью привития учащемуся надлежащего уразумения того, что для всякой пары целых чисел *существует* наименьшее число, которое делится на каждое из них, можно прибегнуть к следующему приему. Пусть требуется узнать наименьшее из чисел, которое можно набрать, например, шестерками и десятками. Для этого поставлю несколько отдельных десятков палочек:

Под каждой палочкой, начиная с первой, поставим другую, отсчитывая последние по шести штук, пока не доберемся до последней палочки в какой-либо из верхних групп. Чтобы не сбиться в счете, каждую шестую отметим цифрой 6. Таким образом получим следующую „графическую“ схему (первый ряд палочек повторен для ясности схемы):



Мы нашли, что 30 палочек можно набрать, считая палочки по 10 и считая палочки по 6 в группе. Число 30 при этом, очевидно, наименьшее из чисел, которое можно набрать десятками и шестерками, т. е. 30 — наименьшее кратное чисел 10 и 6. Эта работа учит детей очень многому и для них интересна. Учитель должен отрешиться от мысли о том, что несколько слов, хотя бы даже и очень веских, им более или менее своевременно сказанных, могут убедить ученика в том, в чем его убедит только собственная работа. Всякие умозаключения, замечания, просьбы о внимании, всяческие указания учителя, не опирающиеся на такие упражнения, из которых эти указания, просьбы и замечания естественным образом вытекали бы, пропадают для класса даром. Они не возбуждают в уме учеников почти никаких мыслей. Поэтому говорить о том, что „полезно“ де знать то-то и то-то, а потому „перейдем теперь к признакам делимости чисел или к общему наибольшему делителю“, — бесполезно. Говорить о том, что „иногда бывают такие случаи“, при которых нужно привести к общему знаменателю две дроби с разными знаменателями и т. п., совершенно бесполезно. Учитель может только делом, т. е. только целесообразными задачами и упражнениями, учить своих учеников тому или другому из области арифметики. Он может добиться необходимого сознания и разумения только целым рядом методически подобранных и вполне целесообразных для данного момента обучения задач и упражнений. При этом ему, даже и в лучшем случае, приходится удовлетвориться тем, что он добился хотя и не особенно продолжительного и вовсе не глубокого, но более или менее ясного, сознания в необходимости того, чего он требует. Вследствие этого к вопросу о том, *для чего* мы изучаем ту или иную статью (хотя бы, например, о признаках делимости чисел), надо возвращаться каждый раз, когда начинается урок, относящийся до этой статьи. В противном случае занятия будут носить характер навязанных и ничем, кроме авторитета учителя, не оправдываемых, а потому для учеников чуждых и более или менее неинтересных упражнений. Это навряд ли желательно на какой бы то ни было, хотя бы даже на вводной, ступени обучения.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ.

§ 1. Признаки делимости на 2.

Большинство учеников в своих самостоятельных упражнениях, благодаря всему предшествовавшему курсу арифметики и уже приобретенному ими навыку в вычислениях, до признака делимости на 2 добираются с большою легкостью. Учителю остается только привести в систему эти познания учеников и показать им, что каковы бы ни были все цифры данного числа, — на делимость данного числа на 2 без остатка влияет только последняя цифра, т. е. цифра отдельных единиц данного числа. Если цифра эта обозначает число четное или если она — нуль, то число на 2 нацело без остатка делится; в противном же случае оно на 2 нацело без остатка не делится. Причина, почему в одном случае число делится на 2 нацело без остатка, а в другом не делится, должна быть выясняема ученикам по возможности просто. Каждый десяток данного числа на 2 делится нацело без остатка, каждая сотня, каждая тысяча и т. д. также делится на 2 нацело без остатка. Весь вопрос только в том, сколько отдельных единиц первого разряда содержится в данном числе сверх имеющихся в нем десятков, сотен, тысяч и т. д. Признак делимости на 2 надобно формулировать так, чтобы он не только указывал на то, что он представляет собою примету, *достаточную* для суждения о том, делится ли данное число на 2 нацело без остатка, но также и признак, *необходимый* для этой делимости. Признак этот надо формулировать так, чтобы словесное его выражение распадалось на две части примерно следующего содержания: если последняя цифра данного числа нуль или обозначает число *четное*, то данное число делится на 2 нацело без остатка, ежели же последняя цифра обозначает число нечетное, то данное число не разделится на 2 нацело без остатка. Важно сопоставление всех случаев, когда данное число делится на 2 без остатка, со случаями, когда оно на 2 без остатка не делится. Оно важно для того, чтобы с самого начала в уме учеников возникло представление о том, что речь идет о действительном *признаке* делимости чисел, о *верной примете*, а не о случайном совпадении. Со случайным совпадением мы имеем дело, когда, например, скажем, что данное число разделится на 2 нацело без остатка, ежели каждая цифра его обозначает четное число. Этого последнего условия, конечно, вполне *достаточно* для того, чтобы число разделилось на 2, но оно вовсе *не необходимо* для этой делимости. Само собой разумеется, что все это должно быть разработано согласно методе целесообразных задач, а не догматически, в виде лекции.

Для этого могут, примерно, служить следующие *вопросы:* Можно ли, не *произведя деления*, узнать, делится ли данное число на 2 нацело без остатка?..—Возьмем числа: 2, 4, 8, 6, 10, 12, 16 и т. д.; делятся ли они на 2 нацело без остатка?—А числа 15, 17, 7, 9, 11?..—А числа 112, 517, 314, 560? и т. д...—Можно ли узнать, не произведя деления, делится ли 27 364 на 2 нацело без остатка?..—Делится ли десяток на 2 нацело без остатка?—А сотня?..—А тысяча?..—Как узнать, делится ли число на 2 нацело без остатка? Почему? (Потому что всякое многозначное число состоит либо из одних десятков, либо из десятков и отдельных единиц; но каждый десяток делится на 2 нацело без остатка,—весь вопрос только в единицах)...—Дано число 57; из скольких десятков оно состоит? (Из пяти).—Сколько, кроме, того, в нем отдельных единиц? (7).—Делится ли оно на 2 нацело без остатка? (Нет)...—Почему?.. (Потому что 5 десятков делятся, а 7 единиц не делятся нацело без остатка на 2)...—Дано число 27 356; делится ли оно нацело без остатка на 2? (Делится)...—Почему? (Потому что в нем 2 735 десятков, которые на 2 делятся нацело без остатка и еще сверх того 6 отдельных единиц, которые тоже на 2 делятся без остатка)...—И т. д.—Что называется *четным* числом? (Число, которое делится на 2 нацело без остатка)...—Какой признак делимости чисел на 2? (Если цифра единиц—нуль или обозначает четное число, то число на 2 делится нацело без остатка; в противном случае оно не делится на 2 нацело без остатка)...—Необходимо ли добавлять после слов „число делится на 2“ слова „нацело без остатка“? (Необходимо, потому что всякое число делится на два без остатка, если частное выразить в виде дроби)...—Действительно: $17 \,\underline{|2} = 8\frac{1}{2}$, $15 \,\underline{|2} = 7\frac{1}{2}$ и т. п., и в этом *случае нет остатка*...—Числа 17 и 15 в этих случаях делятся на 2 без остатка, но не нацело. И т. д.

Признак делимости на 5. Признак делимости чисел на 5 совершенно подобен признаку делимости чисел на 2, так как и в признаке делимости на 5 надо принимать во внимание только последнюю цифру данного числа. Поэтому вполне целесообразно помещение этих двух признаков рядом,—тем более, что это с методической точки зрения целесообразно ввиду того, что новых логических или методических трудностей признак делимости чисел на 5 не представляет.

Признак делимости чисел на 10. Признак делимости чисел на 10, строго говоря, самый простой, и он известен учащимся без всякого со стороны учителя указания. Но тем не менее его формулировать учащиеся должны.

§ 2. Признак делимости двухзначных чисел на 4.

Признаков делимости чисел на 4, строго говоря, три. Но из них самый употребительный сводится к суждению о том, делится ли то число, которое в данном числе обозначено последними двумя цифрами (в том порядке, в каком они записаны), или же не делится на 4 нацело без остатка. Сообщить этот признак ученикам в виде готовом конечно не трудно. К сожалению, или, вернее, к счастью, всякие правила, навязанные ученикам без их участия, во-первых, с трудом удерживаются в их памяти, а во-вторых, не содержат в себе достаточно материала для образовательного влияния на ум учеников. Поэтому полезно начинать вывод признака делимости чисел на 4 с рассмотрения (без всякого внимания к каким бы то ни было правилам) только двухзначных чисел. Необходимо, чтобы ученики сами добрались сначала до того знания, что если последняя цифра числа обозначает число нечетное, то уже на 4 данное число разделиться не может. Далее они должны понять, что речь может итти о делимости только четных чисел на 4 нацело без остатка. Наконец, они должны понять, что если цифра единиц 2, то для делимости числа нацело без остатка на 4 необходимо, чтобы цифра десятков обозначала число нечетное. Из всех двухзначных чисел, оканчивающихся на 2, делятся на 4 только 12, 32, 52, 72 и 92. То же относится до чисел, в которых цифра единиц 6, так как такие от только что поименованных чисел отличаются на 4 единицы, которые делимости чисел на 4 не препятствуют. При этом в уме учеников образуются представления о том, что всякое двухзначное число распадается на две части, из которых одна наверное делится на 4, а другая либо делится, либо же не делится на 4. Эта мысль в дальнейшем курсе вообще чрезвычайно плодотворна. На такой же наглядно-подготовительной почве должны быть рассмотрены числа, последняя цифра которых 4 или 8. Числам этого вида для делимости их на 4 необходимо и достаточно, чтобы цифра десятков обозначала число четное, ибо, сколько бы четных десятков мы ни взяли, число, состоящее из этого числа десятков (20, 40, 60 или 80), непременно на 4 делится нацело без остатка. Время, потраченное на изучение делимости двухзначных чисел на 4 нацело без остатка, окупится двояко: а) впоследствии ученики обратятся к делимости чисел многозначных, и признак этой последней и его применение от учеников не потребуют почти никакой затраты времени, и б) благодаря этой затрате времени ученики будут смотреть на всякое двухзначное число в отношении состава его из четверок совершенно иными глазами.

Не для усвоения учениками чего-либо на память, а лишь для уяснения себе того, насколько ученики овладели только-что рассмотренным содержанием упомянутого выше нумера, следует спросить учеников, какой они могут вывести признак делимости двухзначных чисел на 4. Вывод этот должен быть сделан неторопливо, и ученикам можно намекнуть, что сначала не нужно стремиться непременно к особенной краткости правила. Можно отдельно рассматривать случаи четного числа десятков и нечетного. Тогда они без особенного, притом не излишнего, труда составят приблизительно следующий признак делимости двухзначных чисел на 4: если в данном двухзначном числе число десятков четное, а цифра единиц — либо нуль, либо 4, либо, наконец, 8, а также, если число десятков — нечетное, а цифра единиц — 2 или 6, то число разделится на 4 нацело без остатка. Во всех же остальных случаях число на 4 нацело без остатка не делится. Тогда ученики приобретут полную власть над признаком делимости двухзначных чисел на 4, т. е. над такою приметой, чтобы *при одном взгляде* на двухзначное число они могли верно судить о том, делится ли оно или не делится на 4 нацело без остатка. В этом случае признак делимости двухзначных чисел на 4 принесет ученикам не одну лишь практическую пользу.

§ 3. Признаки делимости многозначных чисел на 4.

Верный в логическом отношении вывод признака делимости многозначных чисел на 4 вполне зависит от того, придет ли ученикам в голову мысль о том, что сотня делится всегда на 4 нацело без остатка, и что всякое многозначное число состоит из некоторого числа сотен и из некоторого двухзначного числа. Но мысль эта может прийти в голову только одному или нескольким ученикам, а задача методической разработки вопроса состоит в том, чтобы, не навязывая этой мысли ученикам, учитель мог быть уверен в том, что им всем эта мысль пришла в голову. Для этого надо обратиться к сходству между признаком делимости чисел на 2 и признаком делимости на 4. Сходство это заключается в том, что, при суждении о делимости числа на 2, мы принимаем во внимание только одну последнюю цифру (цифру единиц), так как все остальные цифры обозначают разряды, делящиеся без остатка на 2. При делении же чисел на 4 мы принимаем во внимание *две* последние цифры, так как все остальные разряды на 4 делятся нацело без остатка. Разница стало-быть только в числе последних цифр, принимаемых во внимание при выводе признака делимости. Но можно ли скоро навести учеников на эту мысль — вполне зависит от состава класса. Во всяком случае предварительно надо добраться до принципа, по которому полезно прежде всего рассмотреть, какие единицы различных разрядов делятся или не делятся на данное число нацело без остатка. При этом окажется, что единицы первого разряда не всегда делятся на 2 нацело без остатка, а равно не всегда делятся и на 4 нацело без остатка. Единица же второго разряда на 2 делится нацело без остатка, но на 4 нацело без остатка не разделится. А единицы третьего и единицы всех высших разрядов уже все делятся на 2 и на 4 нацело без остатка. Работа в этом направлении приводит учеников к тому взгляду на многозначные числа, о котором мы говорили выше, и по которому всякое многозначное число можно рассматривать, как сумму некоторого числа сотен с некоторым двухзначным числом. В этой сумме первое слагаемое всегда на 4 делится без остатка. Единственное, на что надо навести учеников, сводится к пользе исследования, — *единица каких разрядов делится* и *единица каких разрядов не делится на 2 и на 4 нацело без остатка*. Рядом с этим признаком делимости чисел надобно поставить и признак делимости чисел на 25.

Некоторого внимания заслуживают упражнения, в которых ученику надо сообразить, какое наименьшее число надо прибавить к данному числу для того, чтобы получить число, делящееся без остатка нацело на 4, на 25, или на 5. Кроме того, не безынтересно определить, насколько ученики в состоянии справиться с задачами, требующими определения наибольшего или наименьшего многозначного числа с определенным числом цифр, делящегося на 2, или на 4, или на 5, или на 25.

§ 4. Признаки делимости на 8 и на 125.

Признаки делимости чисел на 8 или на 125 совершенно подобны выше рассмотренным признакам делимости на 2 или на 4. Но практически большого значения признак делимости на 8 не имеет потому, что те случаи, когда практически важно разделить данное число на 8 (например, при сокращении дробей), выполняются быстрее при разделении числа на 2, полученного результата еще на 2 и вновь полученного — еще на 2, или же при разделении данного числа на 4, а полученного результата — на 2. Это тем более справедливо, что признаков делимости чисел, обозначаемых весьма многочисленными цифрами, применять почти негде. При небольшом же количестве цифр (например, для четырехзначного и даже пятизначного числа) признак делимости чисел на 8 мало облегчает суждение о том, делится ли данное число на 8 или нет, так как все-таки требует разделения трехзначного числа, обозначаемого последними тремя цифрами, на 8. Но если учитель непременно пожелает ознакомить детей с признаком делимости чисел на 8, то и в этом случае ему пришлось бы начать дело с двухзначного числа, перейти к числам трехзначным и только затем уже — к числам многозначным. Из двухзначных чисел, конечно, интерес представляют только числа, бо́льшие 80, так как числа, меньшие 80, только тогда делятся на 8, когда они принадлежат к области той части таблицы умножения, в которой даны произведения всех однозначных чисел на 8. Двухзначных чисел, бо́льших 80, которые при этом делились бы на 8, всего два, а именно 88 и 96. Что касается чисел трехзначных, то рассмотрение внешних признаков делимости их на 8, конечно, может повлиять только на лучшее уразумение состава числа из восьмерок. Но особенного практического значения это также не имеет, так как в этом случае наблюдается значительное разнообразие соотношений между разными цифрами.

§ 5. Свойства суммы двух чисел.

Когда учениками признаки делимости чисел на 2, на 4, на 5 и на 25 вполне усвоены, можно заняться тщательной проверкою того, ясно ли для учеников самое *основание* пройденных ими признаков делимости чисел. Надо проверить, вполне ли ясно для них, что все дело состоит в следующем: а) всякое целое число можно рассматривать, как сумму двух чисел; б) если каждое из этих двух слагаемых делится на одно и то же число нацело без остатка, то и сумма их также разделится на то же самое число нацело без остатка; в) если же одно из этих двух слагаемых на данное число нацело без остатка не делится, а другое делится, то и сумма этих слагаемых на данное число нацело без остатка не разделится. Здесь, при этой проверке учитель может выдвинуть на первый план столь важное для последующего курса представление о том, что в сумме двух слагаемых одно из них может не мешать, не препятствовать, а другое может препятствовать разделению этой суммы на данное число нацело без остатка. Здесь же вполне уместно показать ученикам, что если из двух чисел каждое не делится нацело без остатка на некоторое третье число, то отсюда еще вовсе не следует, что сумма данных двух чисел тоже не разделится на это третье число нацело без остатка.

Для этого можно взять очень простой пример: 5 и 7, из которых в числе 5 разделению его на 2 мешает одна единица, а в числе 7 тому же разделению равным образом мешает также только одна единица. Но после сложения чисел 5 и 7 сумма этих двух единиц делению всей суммы данных двух чисел уже мешать не будет, так как $1+1=2$. С точек зрения только что намеченных и должны быть снова проработаны и приведены в систему признаки делимости чисел на 2 и на 5, а также на 4 и на 25. Но повести это дело надо не на почве догматического изложения, а, по возможности, с помощью задач и упражнений вроде следующих: Всякое ли число можно рассматривать, как сумму двух чисел?..— Если каждое из двух слагаемых делится на одно и то же число нацело без остатка, то сумма этих двух слагаемых разделится ли на это число нацело без остатка?..— Например, даны числа 20 и 30...— Каждое из них делится на 5 без остатка нацело...— А 50?..— Каждое из них делится на 10 без остатка...— А 50? Ну, а если сумма двух чисел делится на какое-нибудь число нацело без остатка, то следует ли из этого, что и каждое слагаемое делится на то же число нацело без остатка? (Нет не следует: 5 да 7 двенадцать; 12 делится на 2 без остатка нацело, но из этого вовсе не следует, что и 5 и 7 в отдельности разделятся на 2 нацело без остатка)...— В числе 5 разделению его на 2 нацело без остатка *мешает* одна единица, в числе 7 тоже...— А когда мы сложили эти два числа, эти *мешающие* единицы образовали новое число (два), которое и дает возможность числу 12 (состоящему из слагаемых 4, 6, 1 и 1) разделиться на 2 нацело без остатка...— Какие признаки делимости чисел на 2 и на 5, а также на 4 и на 25?..— Если из двух данных чисел одно делится нацело без остатка на некоторое *третье* число, а второе на него нацело без остатка не делится, то и сумма данных двух чисел на него не разделится нацело без остатка!.. Примеры: 12 и 5; из них 12 делится на 3 без остатка нацело, а 5?..— А сумма их, т. е. 17?..— А почему 785 на 2 не делится нацело без остатка? (Потому что 780 делится, а 5 не делится.)— А почему 314 делится на 2 без остатка? (Потому что 310 делится и 4 тоже делится)... и т. д.

Такими упражнениями должно быть положено начало уразумению учениками истинного основания всех признаков делимости.

§ 6. Три признака делимости на 4.

Выше замечено было, что признаков делимости чисел на 4, собственно, три, но все они представляют собою только развитие одной и той же мысли. Основной признак, выше рассмотренный, состоит в том, что если число, обозначенное последними двумя цифрами, взятыми в том же порядке, делится на 4 без остатка нацело, то и все многозначное число также делится на 4 нацело без остатка, в противном же случае число на 4 нацело без остатка не разделится. Но мы видели, что этот признак надо применять не слепо, а вполне сознательно, хотя бы настолько сознательно, чтобы, например, не делить двухзначного числа, когда цифра единиц обозначает число нечетное. Этого, однакоже, мало. Мы видели, что при четном числе десятков не для чего обращать на них внимание и не для чего затруднять себя делением, и что в этом случае надо обратить внимание только на единицы. Далее, мы видели, что в случае нечетного числа десятков судить о делимости или неделимости данного числа можно по тому, какова последняя цифра: 2, 6 или же какая другая цифра. Говоря иначе: мы не всякий раз производим деление, требуемое прямым смыслом вышеуказанного признака. На этом-то и основан, в сущности, второй признак делимости чисел на 4.

Но, помимо этого, для суждения о делимости числа на 4 можно рассуждать и несколько иначе, а именно следующим образом: в каждом десятке делению на 4 мешают две единицы. Если десятков четное число, то, значит, мешающих двоек четное число, а потому все эти двойки делению уже не помешают, и тогда надо обратить внимание только на цифру единиц, что вполне соответствует второму признаку. Если же в данном числе десятков нечетное число, то, стало-быть, делению мешает только одна двойка. Если эту двойку прибавить к числу отдельных единиц, то от этого сложения получится новое число, которое либо делится, либо не делится на 4 нацело без остатка. В первом случае все число делится на 4 нацело без остатка, а во втором оно не разделится. Таким образом получается *третий* признак делимости чисел на 4, гласящий, примерно, так: если в данном числе четное число десятков, и если число единиц делится на 4, то все число разделится на 4; кроме того, если в данном числе нечетное число десятков, и если от прибавления к числу отдельных единиц данного числа еще двух единиц получается число, делящееся на 4, то все число на 4 разделится нацело без остатка; во всех же остальных случаях данное число на 4 нацело без остатка не делится. Этот последний признак тем удобнее первого, что не требует ни деления двухзначного числа на 4, ни внимания к тому, какова последняя цифра. Преимущество же его перед вторым заключается в том, что не надо помнить, каковы должны быть цифры единиц при четном, и каковы они должны быть при нечетном числе десятков. Пример: дано число 956; по первому признаку надо 56 разделить на 4, по второму — 16 разделить на 4, а по третьему — к 2 прибавить 6, получится 8, и 8 разделить на 4. Во всяком случае важно, чтобы ученики не рабски делили число, обозначаемое последними двумя цифрами, на 4, а обращали внимание на состав этого двухзначного числа. Никакие признаки делимости да и вообще никакие учения математики не могут требовать непременно рабского подчинения правилу.

§ 7. Предварительные упражнения, относящиеся до признака делимости на 3.

Усвоению признаков делимости на 3 и на 9 должен предшествовать целый ряд предварительных упражнений, которых образовательное значение гораздо важнее, чем даже практическое значение самых признаков делимости чисел на 3 и на 9. Практика показывает, что при том положении признаков делимости чисел на 3 и на 9, которое эти признаки занимают в курсе, в наилучшем случае достигается только знание учениками этого признака. При этом полному забвению предаются все те чисто-арифметические, притом в высшей степени поучительные, доступные ученикам и поддающиеся надлежащей методической обработке соображения, которые лежат в самой основе этих признаков. Кроме того также замечается, что ученики склонны к слишком рабскому следованию правилам, даваемым этими признаками. Они можно сказать, решительно отворачиваются от ближайшего усмотрения истинного состава данного числа с той точки зрения, которая господствует при выводе занимающих нас признаков.

Ученики отказываются от такого усмотрения иногда даже в тех случаях, когда делимость или даже неделимость данного числа на 3 или на 9 нацело без остатка совершенно очевидна. Можно иногда встретить учеников (не заслуживающих, притом, за это никакого осуждения), которые для определения того, делится ли 36 539 на 3, станут находить сумму всех цифр этого числа, не видя, что оно делиться на 3 не может, потому что 500 единиц не делятся на 3 без остатка нацело. Это явление заслуживает серьезного внимания со стороны учителя, так как служит наилучшим мерилом для суждения о том, вполне ли удовлетворительна постановка этой статьи. Надо учителю только отрешиться от боязни, что предварительные упражнения, необходимые для лучшей постановки занимающей нас статьи в курсе, отнимут слишком много времени. Конечно, учитель может желать, чтобы учение о признаках делимости чисел на 3 и на 9 было усвоено учениками напамять и на веру. Такое желание можно оправдать исключительно практическими соображениями. Но тогда немало времени придется затратить на догматическое а потому для учеников почти бесполезное, обоснование этих признаков в виде математического доказательства. К тому же для учеников это доказательство мало доступно. Постоянная забывчивость, которую ученики будут проявлять по отношению к этому доказательству, потребует от учителя многократных, притом довольно бесполезных, повторений, которые и учителю и ученикам доставят немало незаслуженных ими огорчений.

Предварительные конкретные упражнения, ведущие к признаку делимости чисел на 3, совершенно освобождают нас, учителей, от необходимости сразу ставить вопрос на почву общих соображений и слишком неожиданных для них точек зрения и приемов рассуждения. Эти предварительные упражнения должны отличаться полною наглядностью. Прежде чем уяснить себе самые признаки делимости всяких чисел на 3 и на 9 и их основания, надо уметь быстро распознавать, делится ли данное *двухзначное* число на 3 или на 9 нацело без остатка. Из всех однозначных чисел на 3 нацело без остатка делятся только три: 3, 6, 9. Однозначных же, не делящихся на 3 нацело без остатка, гораздо больше, и таковы числа: 1, 2, 4, 5, 7, 8. Эти последние должны быть основательно рассмотрены в отношении их неделимости на 3. Что 1 и 2 не делятся на 3 нацело без остатка — очевидно. В числе 4 этому разделению мешает одна единица, в числе 5 — две единицы, в числе 7 — снова одна и в числе 8 — опять две единицы. Начав с этого, а не с общих рассуждений, ученики приучаются к разложению чисел на две части, из которых одна делится на 3 нацело без остатка, а другая не делится. Это соображение они прилагают к своему суждению об одном десятке и о двух десятках. При этом в одном десятке разделению на 3 нацело без остатка препятствует, или проще, мешает только одна единица, а в двух — две единицы. Далее они соображают, что в трех десятках нет ни одной единицы, мешающей разделению, в четырех десятках (ввиду того, что $40 = 30 + 10$) делению на 3 нацело без остатка мешает только одна единица. В пяти десятках опять-таки две единицы. В шести десятках делению не мешает ни одна единица и т. д. При этом можно, после некоторого количества упражнений в указанном направлении, подметить способ определения того числа отдельных единиц, которое мешает разделению данного круглого двухзначного числа на 3 нацело без остатка. Здесь выяснится, что числа 30, 60 и 90, очевидно, делятся на 3 нацело без остатка, а всякое иное однозначное число десятков, большее, чем 30, может быть разбито на две части, из которых одна равна 30 или 60, а относительно другой можно быстро судить, сколько в ней единиц мешает разделению всего числа на 3 нацело без остатка. Так, например, $80 = 60 + 20$, а в 20 разделению на 3 без остатка нацело мешают две единицы.

Когда таким образом разработан состав круглых двухзначных чисел в отношении их делимости или неделимости на 3 нацело без остатка, можно перейти к рассмотрению других двухзначных чисел. Можно начать с двухзначных чисел, представляющих собою результаты таблицы умножения чисел на 3. Эти результаты, конечно, делятся на 3 нацело без остатка. От них можно перейти к содержащим, кроме числа меньшего десяти, еще 3, 6 или 9 десятков, и показать, что здесь все дело зависит от единиц. Далее можно перейти к двухзначным числам, которых цифра десятков не 3, 6 или 9. Их рассмотрение покажет ученикам, что, для суждения о делимости или неделимости двухзначного числа на 3 нацело без остатка, надо прежде всего отделить 3 десятка, или (если это возможно) 6 десятков, и затем обратить внимание на то, сколько единиц в остающемся числе десятков мешает разделению, и на то, не составят ли эти „излишние“ единицы, вместе с отдельными единицами первого разряда, такого нового числа, которое делится на 3 нацело без остатка.

Пример: пусть требуется узнать, делится ли 72 на 3 нацело без остатка; $70 = 60 + 10$; 60 на 3 делится; в десяти единицах разделению на 3 мешает только одна единица; эта единица вместе с двумя единицами первого разряда заданного нам числа составит 3 единицы, и эти 3 единицы уже разделению всего числа, т. е. 72 на 3 отнюдь не помешают; поэтому 72 на 3 делится нацело без остатка. Другой пример: число 84; отделим от него 60, останется 24; число же 24 на 3 делится нацело без остатка. Третий пример: дано число 52; отделим 30, останется 22; 22 на 3 не делится без остатка; стало быть, и все число (т. е. 52) на 3 нацело без остатка не разделится. При прохождении этих упражнений учитель может неоднократно выдвигать на первый план тот принцип, который лежит в самой основе всех признаков делимости чисел, и о котором речь была в § 5 этой же главы.

Следствия предварительного упражнения.

Благодаря подобным упражнениям ученики приобретут: а) полную власть над двухзначными числами в отношении их делимости или неделимости на 3, что весьма важно, б) некоторый навык в разделении числа на две части, из которых одна, наверное, делится на 3 нацело без остатка, а другая, может быть, делится, а, может быть, и не делится, в зависимости от состава данного числа, и, наконец, в) сознание, что все дело в признаках делимости сводится к умению особенным для каждого признака образом разбивать число на надлежащую сумму двух слагаемых. Навык в надлежащем разложении двухзначных чисел на два слагаемых весьма важен для надлежащего обоснования общеизвестных признаков делимости чисел на 3 и на 9. При этом полная власть учеников над делимостью или неделимостью двухзначных чисел на 3 (каковая делимость может быть определена, ввиду незначительности чисел первой сотни), вообще, развяжет руки ученикам в этом новом для них деле. Этот навык укрепит их уважение к своему здравому смыслу. А такое уважение никогда, при обучении какому бы то ни было предмету, не может быть излишним, ежели оно опирается на умение правильно и здраво судить о представляющихся в данный момент вопросах. О сумме цифр двухзначного числа в этом случае нет и не должно быть речи, но ученики должны уяснить себе: а) что есть целый ряд чисел, *очевидно* делящихся на 3, а именно числа: 33, 36, 39, 63, 66, 69, 93, 96, 99; б) что только числа большие, чем 33, и не равные ни одному из только-что приведенных чисел, нуждаются в признаке; в) что если одна из цифр данного двухзначного числа делится на 3, а другая на 3 не делится, то число на 3 тоже не разделится; г) что если ни одна из цифр данного двухзначного числа не делится на 3 нацело без остатка, то надо посмотреть, сколько единиц в единицах первого разряда этого числа мешает этому разделению и сколько единиц ему мешает в десятках; д) что если сумма всех единиц, мешавших разделению, равна трем, то число разделится, а в противном случае не разделится на 3 нацело без остатка. Здесь практически полезные арифметические навыки идут рядом с важным, в образовательном смысле, уразумением логического основания этих навыков, — а в этом вся сила подобных предварительных упражнений. Им, к сожалению, обыкновенно при обучении не уделяется того внимания, какого они вполне заслуживают.

§ 8. Состав единиц высших разрядов.

Когда вышенамеченное проработано, можно перейти к рассмотрению единиц высших разрядов с той же точки зрения. Дело в том, что каждая из них представляет собою сумму двух чисел, из коих одно обозначается только девятками (99, 999, 9 999), а другое — равно одной единице. Написав ряд равенств: $10 = 9 + 1$; $100 = 99 + 1$; $1\,000 = 999 + 1$ и т. д., учитель должен дать ученикам возможность хорошенько всмотреться в эти равенства и самим вывести, что каждая единица любого высшего разряда состоит из двух частей, из которых одна (9, 99, 999 или 9 999 и т. д.) наверное делится на 3 нацело без остатка, мешает же этому делению только одна единица первого разряда.

Обыкновенно, особенно в теоретических курсах, весь вопрос ставится на почву учения о числах, кратных по отношению к данному делителю, и ученикам это только навязывается. Без нужды торопливо им указывается на то, что составляет самый нерв всего признака, самую сущность его. Учителя при этом иногда забывают, что для них, специалистов своего дела, это очень легко потому, что они — взрослые и что они этому так хорошо научились только благодаря тому, что они других учили („уча других — сами учимся“). Ученики же о составе единиц высшего разряда никогда в этом направлении не думали, а потому нуждаются в более или менее медленном усвоении той точки зрения, которая устанавливается (для них впервые) на единицы высших разрядов, при изучении признаков делимости на 3 и на 9.

Когда это достигнуто, можно перейти к рассмотрению, с этой точки зрения, однозначного числа единиц какого-либо высшего разряда. Надо довести учеников до сознания, что, сколько бы единиц высшего разряда мы ни взяли, это число единиц распадается на сумму ряда чисел, обозначенных исключительно девятками, со столькими единицами первого разряда, сколько единиц высшего разряда мы в данном случае взяли. Они должны научиться сознательному составлению следующего ряда тождеств:

$$1\,000 = 999 + 1; \quad 2\,000 = 999 + 999 + 2; \quad 3\,000 = 999 + 999 + 999 + 3 \text{ и т. д.}$$
$$10\,000 = 9\,999 + 1; \quad 20\,000 = 9\,999 + 9\,999 + 2 \text{ и т. д.}$$
$$70\,000 = 9\,999 + 9\,999 + 9\,999 + 9\,999 + 9\,999 + 9\,999 + 9\,999 + 7 \text{ и т. д.}$$

При этом они, записывая 9 999, должны для полной сознательности помнить, что это — „десять тысяч без единицы", дабы, записав последнее слагаемое этого вида, тотчас же прибавить недостающее в данном случае число единиц первого разряда. Все дело в том, что во всякой единице любого высшего разряда только одна единица первого разряда препятствует ей разделиться на 3 нацело без остатка. В некоторых же единицах этого разряда, число которых не равно ни 3, ни 6, ни 9, разделению на 3 мешает столько единиц первого разряда, сколько единиц высшего разряда нами было взято. Но при этом важно, что если взято 3 или 6 или 9 единиц высшего разряда, то единиц, мешающих разделению числа, нет. А если взято более трех, но менее шести, или же более шести, но менее девяти, единиц высшего разряда, то некоторое количество, — три или шесть, — единиц этого разряда наверное делятся на 3 нацело без остатка. Тогда приходится рассмотреть оставшиеся единицы высшего разряда в отношении делимости их на три нацело без остатка. Так, например, 8 000 состоят из двух частей (6 000 и 2 000); из них первая делится на 3 нацело без остатка, а в остальных двух тысячах единиц делению числа на 3 нацело без остатка препятствуют только две единицы первого разряда. Этот взгляд на всякое однозначное число единиц какого-либо разряда требует только достаточных, у доски, упражнений учеников. Он гораздо плодотворнее того взгляда, при котором не обращают внимания на то, делится ли оно на 3 нацело без остатка или же оно не делится, и на то, что делению данного однозначного числа единиц высшего разряда (например, 7 000) мешают не все 7 единиц первого разряда, получающиеся при разложении семи тысяч на сумму $999 \times 7 + 7$, а только одна из этих семи единиц. Это для учеников и гораздо доступнее и гораздо полезнее, чем то, навязываемое им насильственно, правило, по которому они и 30 000, и 6 000, и 9 000 должны разлагать непременно на два слагаемых (в то время как эти числа, очевидно, делятся на 3). Согласно этому правилу, они должны находить полную сумму всех цифр данного числа (при суждении о том, делится ли оно на 3 нацело без остатка), когда они, по самому существу вопроса, должны бы суммировать только некоторые, притом всегда меньшие трех единиц, слагаемые.

Чтобы можно было перейти к обычной формулировке того признака делимости числа на 3 нацело без остатка, который излагается в учебниках арифметики, полезно стремиться к тому, чтобы ученики, помимо этого признака, приобрели полную власть над определением того числа единиц, которое препятствует данному числу разделиться на 3 нацело без остатка. При этом с выводом признака, излагаемого в учебниках, торопиться не для чего. Сразу формулировать его непременно так, как он обыкновенно формулируется, также нет никакой надобности. Гораздо лучше, если ученики приучатся от каждой цифры отделять три или шесть единиц, а всех троек, шестерок и девяток вовсе не принимать в расчет. Пусть, например, дано число 25 394; в каждом десятке тысяч мешает числу разделиться нацело без остатка только одна единица, весь вопрос в том, сколько таких единиц находится в двух десятках тысяч; но из предыдущих упражнений ученики знают, что таких единиц только две. Далее, переходим к тысячам; из пяти тысяч три делятся нацело без остатка, а в остальных двух тысячах разделению на 3 мешают только две единицы. В сотнях делению на три не мешает ни одна единица. В десятках — тоже ни одна, и в единицах только одна. Остается теперь подсчитать, сколько всего единиц *может* мешать разделению данного числа на 3 нацело без остатка. Надо приучить учеников к тому, чтобы они, показывая мелом ту или иную цифру, тотчас же называли то число единиц, которое мешает разделению данного числа на 3 нацело без остатка, потом переходили бы к следующей цифре, прибавили бы к мешающим делению единицам еще новые мешающие единицы, ежели таковые есть, и так поступали бы до тех пор, пока таким образом не будет набрана сумма всех тех единиц, которые *могут* мешать, а, может быть, и не мешают, разделению данного числа на 3 нацело без остатка. Когда это будет усвоено, можно перейти к еще более рачительному отысканию тех единиц, которые могут препятствовать разделению данного числа на 3 нацело без остатка. Возьмем, например, число 27 297. Начав с единиц высшего разряда, видим, что в десятках тысяч разделению на 3 мешают только две единицы, а в тысячах — только одна; эти три единицы, которые, каждая в отдельности, мешали разделению числа на 3, будучи соединены в одно число, уже этому разделению не мешают. Переходим к сотням: в сотнях мешают только две единицы, в десятках ни одна не мешает разделению, а в единицах только одна. Итак, опять набираются три единицы, которые данному числу, конечно, тоже не мешают разделиться на три нацело без остатка.

Другой пример: 88 457; в десятках тысяч мешают две, в тысячах тоже две, итого четыре; из них мешает разделению на 3 только одна единица, в сотнях еще одна, итого две, в десятках две, итого четыре; из этих четырех единиц разделению данного числа (88 457) на 3 мешает только одна; в единицах мешает тоже одна; итак, разделению числа на 3 нацело без остатка все-таки мешают две единицы.

§ 9. Разложение многозначного числа на сумму двух слагаемых.

Когда ученики, таким образом, научились отысканию тех единиц, которые в данном числе могут препятствовать, а может быть, взятые вместе, и не препятствуют разделению числа на 3, надо перейти к составлению записей следующего вида:

$$27\,368 = \left|\begin{array}{r} 20\,000 \\ 7\,000 \\ 300 \\ 60 \\ +\quad 8 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} 9\,999 \times 2 \\ 999 \times 7 \\ 99 \times 3 \\ 9 \times 6 \\ \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{array}\right| + \begin{array}{r} 9\,999 \times 2 \\ 999 \times 7 \\ 99 \times 3 \\ 9 \times 6 \\ \end{array}$$

Разрабатывать это надо сначала на одном и том же примере по частям, — сначала только до второго знака равенства, затем — до третьего знака равенства и, наконец, до конца. Не надо при этом думать, что ученикам достаточно только выслушать так называемое „объяснение" учителя, посмотреть один раз на классную доску и переписать в свою тетрадь записанное на этой доске. Этого недостаточно для того, чтобы они вполне освоились с содержанием этого сложного равенства. Вообще к числу наиболее живучих школьных предрассудков в области обучения математике принадлежит убеждение весьма многочисленных учителей в том, что учителю достаточно что-либо хорошо „объяснить", „рассказать", „растолковать". Этого далеко не достаточно, чтобы учащиеся освоились с содержанием этого учения и его себе навсегда усвоили. Учитель, казалось бы, столь превосходно, ясно, толково разработал что-нибудь в своей, почти профессорской, лекции. А наступит момент, когда помимо насильственного характера, которым это объяснение отличается, ему придется признать, что объяснение вредно еще в том отношении, что обращает ученика в слушателя, а не в работника, самодеятельно трудящегося над усвоением данного учения. Оно, кроме того, усвоено лишь весьма немногими из подобных слушателей да и усвоено-то ими не надолго. Вот почему только-что охарактеризованное разложение требует со стороны учеников многочисленных упражнений не только в присутствии учителя, но также упражнений самостоятельных.

Обычный признак делимости чисел на 3.

Строго говоря, охарактеризованным в § 8 умением можно бы ограничиться в деле приобретения учениками должного навыка в быстром разрешении вопроса о том, делится ли данное число на 3 нацело без остатка или нет. Но обычно излагаемый в учебниках арифметики признак делимости чисел на 3 не только потому должен быть усвоен учащимися, что он общепринят, а также и потому, что он поддается чрезвычайно краткой и вразумительной формулировке. Это притом же отнюдь не мешает ученикам, если они надлежащим образом упражнялись в вышенамеченных направлениях, — пользоваться также многими, если можно так выразиться, выгодами и частными арифметическими уловками — вышенамеченными. Они представляют наибольшую, как в отношении быстроты, так и сознательности, пользу, соединяя в себе логически и методически правильные и полезные, но, к сожалению, не общепринятые соображения.

§ 10. Термин „сумма цифр" данного числа.

Чтобы перейти к обычному в учебниках арифметики признаку делимости чисел на 3, надобно детей ознакомить с тем условным выражением, которое в словесную формулировку признака входит как составная часть, а именно — с выражением „сумма цифр". Каждая цифра данного числа, взятая порознь, отдельно от других, обозначает несколько единиц первого разряда. Если взять все цифры, с помощью которых обозначено данное число, и рассматривать их отдельно одну от другой, если, далее. определить сумму всех тех чисел, которые обозначаются этими цифрами, взятыми непременно отдельно одна от другой, то эта сумма и называется обыкновенно, вкратце, суммою *цифр* данного числа. Это, конечно, только условное выражение. Вместо того, чтобы сказать „сумма всех единиц первого разряда, обозначаемых цифрами данного числа, взятыми каждая отдельно одна от другой", говорят короче: „сумма цифр данного числа". Конечно, *цифры* данного числа не могут быть складываемы, а складываются только числа, обозначаемые каждою из них в отдельности. Ученикам надо прежде всего научиться *отыскивать* сумму единиц первого разряда, обозначаемых цифрами данного числа, порознь взятыми. Далее им нужно научиться произносить известный ряд слов, а именно, они должны уметь сказать, что „14 представляет собою сумму единиц первого разряда, обозначаемых цифрами числа 12 452, взятыми отдельно одна от другой". Только после того, как они свыклись с отысканием этой суммы, им можно сказать, что эта сумма называется иначе суммою *цифр* данного числа. При этом надо выяснить, что это выражение не вполне правильно, так как, строго говоря, не цифры складываются, — ведь цифра только знак, заменяющий собою на письме имя числительное, а знаков складывать нельзя, — и так как складывать можно только числа.

Тогда они поймут, что это выражение употребляется только для краткости. Полезно, хотя и не необходимо, на этой ступени (а не при повторении нумерации, когда ученики еще недостаточно для того развиты) познакомить их со следующею *формулировкою* основы десятичной, с помощью арабских цифр, нумерации: „каждая цифра имеет два значения: 1) свое безусловное, безотносительное, значение и 2) значение относительное, местное". На примере это выясняется так: записано число 27 318; сама по себе цифра 2 означает две единицы, цифра 7 — семь, цифра 3 — три, цифра 1 — одну единицу, а цифра 8 — восемь. Взятые же в только что приведенном порядке те же цифры имеют каждая также свое местное (в зависимости от места, ею занимаемого) значение: цифра 2 обозначает 2 *десятка тысяч*, цифра 7 — семь *тысяч* и т. д. Тогда сумму цифр данного числа можно определить как сумму безотносительных, числовых, значений цифр этого числа. Само собою разумеется, что эти термины введены должны быть согласно требованиям вопросо-ответной формы обучения (§ 6 „Введения"), и что дело вовсе не в том, чтобы это определение непременно имело форму: „суммою цифр данного числа" и т. д. (§ 3 гл. I „Повторительного отдела"). Достаточно, если ученики в состоянии сказать, что если сложить безусловные значения цифр данного числа, то... и т. д. Но в таком случае необходимо, чтобы они отдавали себе полный отчет в том, что такое — безусловное, абсолютное числовое значение цифры.

Когда они совершенно освоились с кратким термином „сумма цифр данного числа", то учитель, если он найдет это нужным, может напомнить ученикам, что подобных, строго говоря, не вполне точных выражений, но весьма удобных, употребляется множество и в обычной речи.

Полезно также указать ученикам, что подобных выражений, употребляемых чаще всего для краткости, и в арифметике очень много. Говорят, например, „увеличить данное число на два", в то время как данное число не может увеличиться, а получается только новое число, которое больше, чем прежнее. Говорят: „разделить число на два" вместо того, чтобы сказать: „разделить на две одинаковые части", или вместо того, чтобы сказать: „разделить число на части, по две единицы в каждой". Говорят: „5 метров, 3 дециметра", вместо того, чтобы сказать: „длина, в которой 5 метров и, сверх того, еще 3 дециметра" и т. п. Подобное отступление может оказаться полезным не только в смысле внесения бо́льшего разнообразия в занятия арифметикою, но и в смысле лучшего усвоения учениками значения данного выражения, а также в смысле общеобразовательном.

§ 11. Термины: „делится" и „не делится".

Когда все предыдущее усвоено учениками вполне, учитель может вернуться к разложению чисел на два слагаемых, из которых одно равняется сумме цифр данного числа, к чему ученики уже были приучены благодаря предшествовавшим упражнениям. Затем они должны научиться, всмотревшись в эти две суммы, определять, которая из них наверно делится на 3 нацело без остатка и которая, может-быть, на 3 и не делится. Ссылка на основное начало, служащее для суждения о делимости или неделимости данного числа на некоторое другое число, должна, при проработке этого нумера, делаться не раз и не два, а много раз. Это основное начало, как известно, состоит в том, что раз из двух слагаемых каждое делится на данное число нацело без остатка, то и сумма их обладает тем же свойством, а раз из двух слагаемых только одно делится на данное число нацело без остатка, то и сумма их на данное число нацело без остатка не разделится. С этой точки зрения надо рассмотреть непременно несколько многозначных чисел, привлекая, как всегда, к работе, по возможности, весь класс, и в особенности тех именно, кто более или менее равнодушно относится к арифметике и ее учениям. Здесь же полезно для сокращения речи ознакомить детей с более краткими выражениями, заменяющими собою слова: „делится нацело без остатка" или „не делится нацело без остатка", а именно, с выражениями: „делится" и „не делится," причем слова „нацело без остатка" могут быть без особенного вреда для дела (но только для бо́льшей краткости и в ущерб точности) опускаемы.

§ 12. Признаки делимости на 3.

Все признаки делимости чисел, доселе усвоенные учениками, должны быть своевременно повторены с помощью этого краткого способа их выражения. При этом последнее, хотя и не по важности своей, место среди всех этих признаков должен занять признак делимости чисел на 3, гласящий, как известно, так: „если сумма цифр данного числа делится на 3, то и самое число делится на 3; в противном же случае оно на 3 не делится". Что при этом не надо находить непременно всю сумму и непременно всех цифр числа, — ученикам должно быть ясно само собою, так как они уже ранее упражнялись в этом направлении и уже усвоили себе истинное представление о делимости данного числа на 3. Но только многочисленные упражнения и неуклонная настойчивость в требовании от учеников со стороны учителя полного уразумения всего материала, относящегося до признака делимости на 3, приводят учеников к цели, притом с пользой не только практической, но и образовательной. Особенно полезным, с этой последней точки зрения, может оказаться весь труд, потраченный до усвоения признака делимости на 3. Важно также сознание, что обычный признак делимости чисел на 3 обнимает все возможные случаи и допускает весьма свободное и вполне согласное с требованиями здравого смысла обращение со слагаемыми той суммы, которая решает вопрос о делимости и неделимости данного числа на 3.

§ 13. Признак делимости чисел на 9.

Относительно признака делимости чисел на 9 надо заметить, что к этому признаку ученики тоже могут быть приведены путем эвристическим, т. е. изобретательным, сходным с приемом, который намечен выше при методической разработке признака делимости числа на 3. Но к нему можно подойти также и путем более кратким, основанным уже на прямом указании учителя относительно того, что признак делимости числа на 9 сходен с признаком делимости числа на 3. Если при этом ученики, или хотя бы только большинство их, нисколько не медля, тотчас же в состоянии будут формулировать этот признак, то надо будет довести и тех учеников, которые не выказали того разумения, до той же формулировки. Какого из этих двух приемов держаться с данным классом — учитель разрешит сам. Но, во всяком случае, удовлетворяться только тем, что признак делимости числа на 9 учениками уже формулирован, отнюдь не следует. Надобно, кроме того, еще хорошенько поработать над разложением единиц разных разрядов на сумму двух слагаемых, из которых одно равняется одной единице первого разряда. Далее надо перейти к разложению однозначного числа единиц любого разряда на сумму двух слагаемых, из которых одно обозначается наивысшею цифрою этого числа (т. е. в разложении числа 20 000 на сумму двух слагаемых, из которых одно равно двум, а другое равно 9 999 $\times$ 2 и т. п.). Когда это сделано, можно перейти к выяснению себе вопроса, сколько единиц первого разряда мешают данному однозначному числу единиц высшего разряда разделиться на 9 нацело без остатка. Затем можно обратиться к разложению всякого многозначного числа на сумму двух слагаемых, из которых первое равно сумме цифр данного числа, а второе состоит из слагаемых, делящихся на 9 нацело без остатка. Признак же делимости всякого числа на 9 в таком случае выводится совершенно естественным путем. Весь вопрос заключается только в исключении из последовательно получаемых учеником сумм каждый раз девяти единиц, если получилось в сумме число, равное девяти или большее, чем девять. Кроме того, надо наблюдать за тем, чтобы ученики, отыскивая сумму цифр числа, не присчитывали бы девяток, если таковые встречаются в цифровом обозначении числа. Вообще они должны избегать слишком рабского следования правилам отыскивания сумм цифр. Они должны понимать и сознавать, что им надо найти сумму только тех единиц которые мешают, препятствуют делению данного числа на 9 нацело без остатка. Кроме того ученикам надо знать признак этой делимости, но это знание вовсе не требует непременного следования правилу, требующему отыскания суммы всех цифр данного числа. И ученики должны понимать, что, при рабском следовании правилу, отыскание полной суммы всех цифр данного числа требует и больше времени и большего внимания, а при многозначных числах с многочленными цифрами эта сумма может получиться без нужды значительная. Вычисление ее поэтому не исключает возможности ошибок в результате. Цифру 9 ученики, при отыскивании суммы цифр данного числа, должны непременно опускать. Равным образом, если две или три рядом стоящие цифры представляют собою одно из сочетаний: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 117, 135, 225 и т. п.,— ученики должны эти сочетания также опускать. Они должны не только рассуждать, но также видеть и пользоваться здравым своим смыслом.

Приведение пройденного в систему и значение учебника.

Когда все вышенамеченное учениками усвоено, можно перейти к приведению в систему всех известных признаков делимости. Это приведение их в систему, конечно, должно опираться на глубокое внутреннее сходство, существующее между некоторыми признаками, например, между признаками делимости на 2, на 5 и на 10, между признаками делимости на 4 и на 25, а также между признаками делимости на 3 и на 9. Это послужит не только к лучшему сохранению в памяти учеников признаков делимости чисел, но и к лучшему уразумению самой сущности этих признаков. Небесполезно при этом использовать также принятый в школе учебник арифметики, заставив учеников прочесть в классе и дома относящийся до признаков делимости чисел текст учебника. Само собою разумеется, что учителю придется при этом: а) предварительно поработать над тем, чтобы надлежащим образом приноровить свои занятия к тексту учебника и б) надлежащим образом подготовить учеников к чтению и к полному усвоению ими этого текста.

§ 14. Необходимость внимания к системе счисления.

Но полное уразумение сущности и самого смысла усвоенных учащимися признаков делимости чисел всеми учениками не отличалось бы законченностью и определенностью, если бы ученики совершенно упустили из вида, что признаки делимости чисел обязаны своим существованием общепринятому *цифровому* обозначению чисел по *десятичной* системе, с помощью так называемых *арабских* цифр. Для уяснения ученикам этой стороны дела полезно позаняться упражнениями в определении учениками делимости чисел, обозначенных хотя бы, например, римскими цифрами, ученикам уже более или менее известными и довольно прозрачно обозначающими данное число. Еще ярче выступает эта особенность *признаков* делимости при обозначении чисел помощью арабских цифр по какой-либо из искусственных систем счисления. К сожалению, на такое освещение признаков делимости нет времени даже в школе второй ступени. Например, относительно числа MCCXLVII при одном взгляде на него можно только сказать, что оно на 2 наверное не делится нацело без остатка. Для того же, чтобы судить о том, делится ли оно на 9 или на 3, уже надо преодолеть некоторые затруднения. Если то же число написать так: 1247, то сейчас видно, что на 9 оно не делится, так как 1 да 4 — 5, а 2 да 7 — 9.

§ 15. Чередование признаков делимости упражнениями над дробями.

Вышеизложенным, в сущности говоря, исчерпывается учение о признаках делимости чисел, насколько это учение целесообразно вводить в курс всех учебных заведений, в которых объем занимающего нас учебного предмета более или менее приближается к объему курса арифметики, проходимого в низших классах средних учебных заведений. Но если не вносить в статью о признаках делимости своевременных упражнений, хотя бы только в сокращении дробей (сначала только на 2, затем на 5, на 10, далее — на 3, наконец, на 9), — как это рекомендуется выше, — то ученик во все время, в течение которого он проходил признаки делимости чисел, находится в положении человека, которому дают в руки некоторое орудие, не научив его пользоваться этим орудием с пользою для какого-нибудь дела.

Здесь же полезно ознакомить учеников с термином „делитель данного числа" и „общий делитель двух чисел". Методических трудностей эти термины не представляют.

§ 16. Первоначальные и составные числа.

Иногда о числе говорят: число делится „само на себя". Вот эти последние три слова не всегда заслуживают сочувствия, если их употреблять без всякого указания на чисто-условное их значение. Выражение „число делится само на себя" для учеников недостаточно образно. Когда мы делим семь на семь, то мы либо делим семь на семь одинаковых частей, либо же узнаем, сколько групп по семи единиц содержится в семи же единицах, а вовсе не делим семь само на себя. Гораздо удобнее поэтому, если вопрос поставлен так, что всякое число делится на число *ему равное* и на одну единицу. Если число, кроме того, делится еще на какие-нибудь числа, то оно называется *составным* или *непервоначальным*. Если же оно делится только на число ему равное и на одну единицу, то оно называется *первоначальным* или *простым*.

§ 17. Записи при сокращении дробей.

Запись всех дробей, получаемых при сокращении данной дроби, как известно, может быть двоякая. Можно писать либо так:

$$\frac{1472}{1544}=\frac{736}{772}=\frac{368}{386}=\frac{184}{193}$$

что занимает много места в длину и требует многочисленных знаков равенства и многих записей; либо же так:

$$\begin{array}{c} 184\\ 368\\ 736\\ \dfrac{1472}{1544} = \dfrac{184}{193}\\ 772\\ 386\\ 193 \end{array}$$

Это хотя менее прозрачно, но требует меньшего количества записей. Не подлежит никакому сомнению, что *начинать* упражнения в сокращении дробей надо с первого, более прозрачного, способа расположения вычислений. При этом все ученики во всякий момент сокращения отдают себе полный отчет в том, какие дроби последовательно получаются при последовательном производстве сокращения. Некоторые записывают сверху или сбоку на лежачей скобке того делителя, на который сокращают дробь. При таком производстве вычисления получается запись вроде следующей:

$$\frac{360}{480} \overset{10}{=} \frac{36}{48} \overset{4}{=} \frac{9}{12} \overset{3}{=} \frac{3}{4}.$$

Подобная запись не заслуживает особенного сочувствия, так как она не способствует ни большей ясности, ни большему изяществу записей. Равным образом не способствует изяществу расположения записей прямо дурная привычка — непременно зачеркивать сокращенные числитель и знаменатель. Эта привычка ведет только к некоторой неаккуратности в исполнении учениками письменных работ. Тем же ученикам, которые впоследствии будут учиться алгебре, придется прямо отучиваться от этого зачеркивания. А потому лучше всего и самому учителю освободиться от этой привычки, если она у него есть, и ученикам не прививать этой привычки. Если письменные обозначения числителя и знаменателя оканчиваются нулями, то прежде всего надо сократить на 10, на 100 и т. д., смотря по числу общих в членах дроби нулей. Поэтому отнюдь не должно позволять ученикам сокращение таких дробей начинать с сокращения на 2, полученного — опять на 2 и т. д. Но если бы к подобному сокращению ученики сами позволили себе когда-нибудь прибегнуть, то им надо дать возможность самим убедиться в невыгоде подобного сокращения на деле. При этом не мешает обратить их внимание на то, что при сокращении на 10 почти невозможны ошибки (надо только переписать числитель и знаменатель без последнего нуля их), в то время как сокращение на 2 требует действительного деления, а действительное производство деления иногда может повлечь к ошибкам. Стоит ученикам поработать над сокращением подобных дробей хотя бы в течение нескольких минут, и они очень быстро увидят, какое расположение вычислений и какой порядок их производства при сокращении представляют наибольшие выгоды.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

НАИМЕНЬШЕЕ КРАТНОЕ ДВУХ И НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ.

§ 1. Необходимость предосторожностей при прохождении статьи.

Кроме сокращения дробей, признаки делимости чисел применяются также к приведению дробей к общему знаменателю с помощью разложения их знаменателей на первоначальные множители и находимого, на основании этого разложения, наименьшего кратного этих знаменателей.

Ввести учеников в интересы нахождения наименьшего кратного двух и нескольких чисел можно, конечно, без всяких предисловий (к тому же, большею частью, и совершенно бесполезных). Можно дать надлежащее определение наименьшего кратного двух и нескольких чисел и научить своих учеников способу его нахождения. Но тогда вся эта статья будет носить характер материала как бы насильственно навязанного. Интерес к этому материалу со стороны учеников в таких случаях довольно слаб по причине значительной теоретичности и отвлеченности его. Отсутствие интереса усиливается еще тем обстоятельством, что почти все положения этой статьи должны быть приняты учениками более или менее на веру, почти без всяких доказательств. Точные доказательства этих положений выходят далеко за пределы практической арифметики. Эта последняя особенность занимающей нас статьи, в связи с почти неизбежною, чисто-механическою, сноровкою, которую ученики должны приобрести в нахождении наименьшего кратного нескольких чисел, обязывают учителя к особенно осторожной, с методической точки зрения проработке материала занимающей нас статьи.

§ 2. Место статьи в курсе с точки зрения научной и практической.

С точки зрения научной одних познаний из области признаков делимости чисел на 2, на 3, на 4, на 5, на 9 и на 10 далеко недостаточно для нахождения наименьшего кратного каких угодно двух чисел, хотя бы даже, например, таких небольших двух чисел, как 119 или 259. С научной точки зрения раньше всего в этом случае надо найти общий наибольший делитель этих двух чисел, для чего, опять-таки недостаточно знания упомянутых выше признаков делимости чисел. Затем уже можно найти и наименьшее кратное данных двух чисел, разделив произведение данных чисел на их общий наибольший делитель, найденный последовательным делением (алгорифм Евклида). Эта точка зрения для целей практических, конечно, слишком отвлеченна. Отвлеченность эта только возрастает с возрастанием количества чисел, которых наименьшее кратное мы должны разыскать. Но с главнейшим применением учения о наименьшем кратном мы встречаемся лишь при приведении дробей к общему знаменателю, а в жизни, как известно, встречаются только дроби с не особенно значительными знаменателями. Поэтому можно, временно опустив в курсе, проходимом в низших и средних учебных заведениях, все учение об общем наибольшем делителе, обратиться прямо к нахождению наименьшего кратного таких чисел, которые не представляют особенных в этом отношении трудностей. Необходимо внимание к прямым применениям этого учения при приведении дробей к общему знаменателю. Если же встретятся такие две дроби, знаменатели которых не поддаются разложению на множители с помощью известных нам признаков делимости чисел, то выход из этого положения может быть двоякий: а) либо придется привести данные дроби хотя и не к наименьшему, но все-таки к общему знаменателю, либо б) придется разложить знаменатели на их первоначальные сомножители (если знаменатели — числа непервоначальные) путем последовательного разделения каждого из них на числа: 7, 11, 13, 17, 19, 23, и т. д., т. е. на каждое из первоначальных чисел, меньших, чем квадратный корень из данного числа.

Пусть, например, даны две дроби:

$$\frac{40}{1333} \text{ и } \frac{25}{713}$$

и требуется их привести к общему знаменателю. В таком случае (так как известные нам признаки делимости чисел нас здесь не выручают), мы можем либо привести их к общему знаменателю, равному произведению чисел 1333 и 713, либо же, разделив второе из них на числа 7, 11, 13, 17, 19 и 23, узнать, что оно делится нацело без остатка на 23 и что оно равно произведению двух первоначальных чисел 31 и 23. Затем, разделив 1333 сначала на 23, а потом — на 31, узнаем, что 1333 делится на 31 нацело без остатка и что $1333 = 31 \times 43$. Наконец, узнав таким образом, что $1333 = 31 \times 43$, а $713 = 31 \times 23$, определим, что наименьшее кратное этих двух чисел равно произведению $31 \times 43 \times 23$, т. е. 30 659. К счастью, в действительной жизни и даже в науке (в научных сочинениях употребляются десятичные дроби) дроби с подобными знаменателями никогда не встречаются. Все изложенное выше упомянуто только для выяснения того, что особенно значительных неудобств исключение из основного курса подробного учения об общем наибольшем делителе, отнесенного нами в „Дополнительный отдел“, не представляет.

Само собою разумеется, что учитель может (если у него на то есть достаточные основания) предпослать отысканию наименьшего кратного двух или нескольких чисел изучение общего наибольшего делителя двух и нескольких чисел. Но тогда, конечно, методическая разработка будет еще затруднительнее. Затруднения эти могут быть уменьшены: а) своевременным применением общего наибольшего делителя к сокращению дробей с особенно значительными членами и б) своевременным введением учения о нахождении общего наибольшего делителя с помощью способа последовательного деления, известного в науке под именем „способа Евклида“.

§ 3. Предварительные целесообразные упражнения над дробями.

Что касается методической проработки учения о наименьшем кратном двух или нескольких чисел, то лучше всего обратиться к нему без помощи приемов отыскания наименьшего кратного двух или нескольких чисел, после надлежащих упражнений в приведении дробей к общему знаменателю (см. также § 6 гл. V „Повторительного отдела“). Нетрудно убедить учеников в пользе, которую можно извлечь из особенных способов отыскания наименьшего из всех чисел, делящихся на каждое из данных чисел без остатка. А после этого можно перейти, по порядку: 1) к отысканию всех простых сомножителей данного числа; 2) к письменному расположению вычислений при разложении числа на первоначальные множители; 3) к выяснению свойств числа, кратного двух и нескольких чисел, а также числа, кратного только по отношению к одному числу, и, наконец, 4) к выяснению способов отыскания наименьшего кратного двух и нескольких чисел с помощью разложения чисел на первоначальные множители.

§ 4. Составные числа из области первой сотни.

Прежде всего надо учеников довести до того, чтобы они умели всякое непервоначальное число, взятое из области первой и даже второй сотни, рассматривать, как произведение двух чисел, из которых одно должно быть непременно числом первоначальным. Этого, при достаточной власти учеников над числами первой сотни, достигнуть нетрудно. Для этой цели должны сначала служить четные числа из области первой сотни, затем можно обратиться к числам, делящимся на 5, и, наконец, к числам, делящимся на 3. Здесь встретятся некоторые интересные разложения, например, чисел: 51, 57, 87 — из области первой, и чисел: 102, 111, 117, 123, 129 и т. п. — из области второй сотни. Далее можно перейти, беря для этого исключительно данные из числа произведений так называемой таблицы умножения, к разложению чисел: 12, 18, 30, 42 и т. д. Наконец, можно перейти к разложению чисел трехзначных, принадлежащих к числу легко разложимых на все свои простые сомножители. Надо только остерегаться слишком раннего введения в курс общепринятых приемов расположения вычислений при разложении чисел на первоначальные множители.

§ 5. Изустное разложение однозначных и двухзначных чисел на множители.

Прежде всего надо дать ряд упражнений в *изустном* разложении однозначных и двухзначных чисел на простые множители. Здесь же ученики усваивают себе то предложение (в теоретической арифметике доказываемое, а в практической — принимаемое, конечно, без доказательства), по которому всякое непервоначальное число непременно представляет собою произведение некоторых первоначальных сомножителей. О том, что ряд этих сомножителей может быть только один и что в этом ряде можно только изменять порядок сомножителей, говорить подробно не для чего. Еще меньше надобности в научном доказательстве этого предложения. Оно составляет в теоретической арифметике основу всего учения об общем наибольшем делителе и о наименьшем кратном числе.

Сначала ученики могут, при разложении числа 360 на простые сомножители, записать ряд равенств:

$$\begin{aligned}360 &= 2 \times 180\\ 180 &= 2 \times 90\\ 90 &= 2 \times 45\\ 45 &= 3 \times 15\\ 15 &= 3 \times 5.\end{aligned}$$

Затем можно переписать их иначе (начиная с предпоследнего равенства):

$$\begin{aligned}45 &= 3 \times 3 \times 5\\ 90 &= 2 \times 3 \times 3 \times 5\\ 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5\\ 360 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.\end{aligned}$$

Можно достигнуть подобного же разложения и иным путем, а именно разложив число на два каких ни попало сомножителя, из которых каждый — число непервоначальное, а затем заменив каждое из непервоначальных чисел новыми двумя сомножителями и поступая таким образом до тех пор, пока число не будет разложено на первоначальные множители. Тогда вычисления представятся, примерно, в следующем виде:

$$360 = 18 \times 20 = 3 \times 6 \times 2 \times 10 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5.$$

Еще лучше, если ученики разлагают подобные числа изустно, говоря, например, так: 360 все равно, что 36×10; но 36 все равно, что $3 \times 3 \times 2 \times 2$ (это последнее надо записать), а 10 все равно, что 2×5 (эти два сомножителя надо приписать к ранее записанному, т. е. к записи $3 \times 3 \times 2 \times 2$, отделив последнюю знаком умножения от записи 2×5). Тогда сразу получится запись:

$$360 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5.$$

Но этого можно достигнуть только в том случае, когда числа первой сотни основательно рассмотрены в отношении их первоначальных сомножителей, и когда путем упражнений (а отнюдь не благодаря памяти) ученики научились быстро писать равенства вроде следующих:

$$4 = 2 \times 2$$
$$6 = 3 \times 2$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$9 = 3 \times 3$$
$$10 = 2 \times 5$$
$$12 = 2 \times 2 \times 3$$
$$14 = 2 \times 7$$
$$15 = 3 \times 5$$
$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

и т. д.

Само собою разумеется, что для разложения на первоначальные сомножители надо брать такие числа, к разложению которых наиболее применимы усвоенные учениками ранее признаки делимости чисел (на 2, на 3, на 4, на 5, на 25, на 10, на 100, на 9), т. е. числа вида: $2^k \times 3^m \times 5^n \times a$, где k, m и n обозначают какие угодно натуральные числа, а буква a обозначает какое-либо не слишком большое первоначальное число (7, 11, 13 и т. п.). Благодаря подобным упражнениям ученики усвоят себе механизм разложения данного числа на первоначальные сомножители. Кроме того они поймут также и самый смысл этого разложения, а по уразумении этого смысла обычно практикуемое расположение вычислений уже не представляет никаких логических затруднений.

К сожалению, в обычном у нас расположении вычислений, при разложении на первоначальные множители, слишком часто на практике встречается пристрастие не столько учеников, сколько самих учителей, к излишнему многописанию. Так, например, сплошь и рядом можно видеть у учащихся слишком подробные записи, подобные следующей:

7680	2
3840	2
1920	2
960	2
480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5

На самом деле то же разложение может быть достигнуто гораздо быстрее, притом с большею уверенностью в правильности вычислений, если будет принято во внимание, что $7680 = 768 \times 10$, что $10 = 2 \times 5$, а $768 = 3 \times 256$, число же 256 разлагается на первоначальные множители изустно. В приведенном сбоку вычислении мы тоже, добравшись до 480, можем и обязаны посмотреть на 480, как на произведение 48×10, а 48 есть произведение из 2×2 на $3 \times 2 \times 2$. Для того, чтобы учеников довести до надлежащего и сознательного навыка в быстром разложении чисел на простые сомножители, необходимо достигнуть того, чтобы ученики, как только они добрались до такого частного (стоящего налево от черты), которое представляет собою одно из произведений так называемой таблицы умножения, тотчас же разложили его изустно на его первоначальные множители. Поэтому они не должны писать с левой стороны черты никаких излишних, с вышенамеченной точки зрения, частных, а должны все разложения, по возможности, делать примерно так:

960	2	720	2	3600	2	1000	2	2480	2
	5		5		5		5		5
96	2	72	2		2		2	248	2
48	2		2		5		5		2
	2		2	36	2		2	62	2
12	3	9	3		2		5		31
	2		3		3				
	2				3				

Если учителю непременно нужно приучить учеников к таким разложениям, где все одинаковые сомножители стоят рядом (основания для этого желания, как увидим ниже, вовсе не бесспорны), то никто не мешает ему приучить учеников к тому, чтобы они всякий раз, когда в том есть надобность, переписывали, предварительно сосчитав число одинаковых сомножителей, полученные разложения в таком порядке:

$$960 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5;$$
$$720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \text{ и т. п.}$$

§ 6. Степени и показатели.

Усложнять учение о разложении чисел на простые множители непременно приемами обозначения произведения одинаковых сомножителей в виде степенных количеств, т. е. с помощью показателей, не для чего и даже, можно сказать, вредно. При введении этого обозначения приходится бороться со следующими затруднениями, до практической арифметики прямо не относящимися: а) надо дать надлежащие определения степени и показателя ее и поупражнять учеников в надлежащем применении этих определений: б) надо достигнуть того, чтобы ученики не смешивали показатель степени с множителем, т. е. не считали бы (как это чрезвычайно часто случается вначале, при изучении алгебры, даже в средних учебных заведениях), что 2^3 все равно, что 2×3, а 2^4 все равно, что 2×4 и т. п.; в) надо уяснить ученикам условное значение более или менее необоснованного условия, по которому считается, что число без показателя как бы снабжено показателем, равным единице. Само собою разумеется, что определение показателя должно дать надлежащее, а именно такое, при котором показатель выражает сколько раз *сомножителем* взято основание степени. Таким образом в выражении 3^4 цифра 4 выражает, что надо составить произведение, состоящее из 4 сомножителей, из коих каждый равен 3. Иногда учащиеся говорят, что выражение a^5 обозначает, что a надо помножить само на себя 5 раз. Это, конечно, не верно потому, что для получения пятой степени числа a требуется всего 4, а не 5 умножений. Кажущийся выигрыш во времени, могущий получиться при записях разложений на первоначальные множители с помощью показателей, незначителен. Ради этого выигрыша вводить чуждые арифметике четырех действий обозначения (к тому же и не вносящие облегчений в арифметику) по меньшей мере нецелесообразно. Особенно это справедливо в том случае, когда приемы буквенных и условных обозначений не входят в состав арифметики. Если же арифметика от буквенных обозначений не отделена никакими запретами, то введение показателей естественно и целесообразно.

§ 7. Неудобства одновременного прохождения учении о наименьшем кратном и об общем наибольшем делителе.

Ко всему этому надо добавить, что введение учения о показателях в арифметику ни мало не упрощает правил об отыскании наименьшего кратного числа и общего наибольшего делителя. Напротив, оно обременяет память излишними мелочами, от изобилия которых умение отыскивать общий наибольший делитель и наименьшее кратное число теряет и образовательное и практическое значение. Учителям, склонным к беглому и почти одновременному прохождению обоих учений, нельзя не посоветовать бо́льшей медлительности в этом деле. Надо по возможности отделить одно из этих учений от другого. Для этого полезно научить учащихся применять одно из этих учений к одним, а другое — к другим преобразованиям над дробями: наименьшее кратное число — к приведению дробей к общему знаменателю, а общий наибольший делитель — к сокращению дробей.

§ 8. Непервоначальные числа.

Чтобы в уме учеников не зарождались мысли, что среди значительных, по величине своей, чисел каждое разлагается на первоначальные множители, надо обратиться к случаям, когда сравнительно большое число, например, 877, на первоначальные сомножители не разлагается. Цель этого упражнения заключается также в том, чтобы убедить учеников в трудности разрешения вопроса, принадлежит ли данное число к числу первоначальных или нет, в тех случаях, когда в числе его сомножителей не находятся ни 2, ни 5, ни 3 [1]. Для закругления этих занятий можно выяснить способ и возможность составления таблицы первоначальных чисел. Цель этой работы заключается в том, чтобы ученики сроднились с вопросами этого рода и составили бы себе верные представления о составе чисел непервоначальных из первоначальных сомножителей. Надо, однако же, принять во внимание, что содержание упомянутого материала проходить с учениками следует так, чтобы они на самом деле выполнили всю работу, хотя бы для этого потребовалась даже затрата некоторой части урока. В противном случае, этого вопроса лучше и вовсе не затрагивать. Изготовление хотя бы небольших таблиц первоначальных чисел весьма полезно во многих отношениях и должно быть отнесено к числу самостоятельных классных и домашних работ учеников. При этом учитель должен эти, как и всякие самостоятельные работы, свое-

[1] Формула, которая включала бы все возможные первоначальные числа, как известно, еще до сих пор не найдена.

временно проверить и, как всегда, обращать свое внимание также и на внешнюю чистоту выполнения работы. Если же учитель не желает на этом останавливаться, то он может это упражнение опустить.

§ 9. Таблица первоначальных чисел.

Для составления таблицы первоначальных чисел, содержащихся между одною единицею и некоторым числом, можно прибегнуть к составлению так называемого Эратосфенова решета. [1] Выпишем в вертикальный столбец ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4 и т. д. до некоторого известного числа, например, до 1000 включительно. Если в один столбец они не уместятся, то следует поместить их в два, в три, в четыре и т. д. столбца, отделив один столбец от другого отвесною чертой. Писать числа в вертикальные столбцы удобнее, чем в горизонтальные строки, так как мы таким образом избавлены от промежутков, запятых или других знаков, которыми, рано или поздно, пришлось бы отделять рядом стоящие числа одно от другого. Хорошо разлиновать квадратиками пол-листа бумаги и поместить записи всех чисел в эти квадратики. Далее, числа 1 и 2 оставим неприкосновенными (эти первые два числа принадлежат к числу первоначальных), а цифру 4 зачеркнем. Точно так же зачеркнем записи всех остальных четных чисел; это сделать нетрудно. Затем, дабы не отыскивать чисел, делящихся на 3 нацело без остатка, считая цифру 3 первою записью, зачеркнем запись, занимавшую четвертое место, т. е. цифру 6 (которая уже раз зачеркнута), потом — снова четвертую запись, считая 6 за первую, — тогда зачеркнутою окажется цифра 9. Приняв запись 9 за первую, зачеркнем запись, стоящую от нее ниже на четвертом месте, т. е. запись 12 (которая раз уже зачеркнута) и т. д. до тех пор, пока таким образом не будут среди записанных нами чисел зачеркнуты все числа, делящиеся на 3 без остатка. Подобно этому надо поступить с цифрою 5. Ее оставим (как и цифру 3) незачеркнутою, а запись, занимающую (считая цифру 5 за первую) шестое место сверху (это будет запись 10), зачеркнем. Далее, считая запись 10 за первую, снова зачеркнем запись 15 (занимающую шестое место) и т. д. до тех пор, пока не будут зачеркнуты записи всех чисел, делящихся на 5. Подобным же образом разыщем все числа, делящиеся на 7, на 11, на 13, на 17 и т. д. Мы таким образом дойдем до того, что числа, кратные по отношению к известным нам первоначальным числам, будут зачеркнуты. Тогда мы, идя все вперед и вперед, наконец, натолкнемся, может быть, на такое незачеркнутое число, относительно которого мы не знаем — первоначальное ли оно или же непервоначальное. Пусть, например, все непервоначальные числа из области первой сотни нам известны, за исключением 97, и пусть мы сомневаемся в том, принадлежит ли это число к разряду первоначальных. Мы, конечно, можем испытать его в отношении его делимости на все первоначальные числа меньшие его. Но раз мы вычеркивали *все* непервоначальные числа, делящиеся на первоначальные числа меньшие, чем 97, а 97 осталось неперечеркнутым, то, стало-быть, 97 тоже принадлежит к числу первоначальных, и придется зачеркивание начать, для составления занимающей нас таблицы, уже с 98-го числа, считая 97 пер-

---

[1] По имени греческого грамматика, археолога, географа и астронома Эратосфена (276—196 до нашей эры).

вою записью, и т. д. В результате получится, если зачеркнутые места зачернить, известной формы неправильный рисунок. Особенно интересен этот рисунок, если таблица имеет вид прямоугольника.

§ 10. Кратное двух, одного и нескольких чисел.

Когда представление о первоначальных числах в уме учеников укрепилось, можно перейти к усвоению ими терминов: „кратное одного числа“, „кратное двух“ и „кратное нескольких чисел“. Начинать эти упражнения надо, конечно, так, чтобы ученики поняли, что собственно нового они ничего не узнают, кроме названия, кроме термина. Это справедливо для всякого упражнения, имеющего целью усвоение детьми какого-либо нового для них термина. Что число 10 делится без остатка на 2 и на 5 — они знают. Но что при этом числа 2 и 5 называются делителями десяти, — для них несколько ново. Они привыкли думать, что когда *на самом деле производят* деление, то тогда можно некоторое число назвать делимым, а другое — делителем. Здесь же приходится называть делителем число, на которое только *можно* произвести деление нацело без остатка. С этой же новой точки зрения надо рассмотреть также несколько чисел, из которых каждое *может* быть разделено на некоторое другое число нацело без остатка. Затем уже можно сообщить, что то число, которое *может* разделиться на другое нацело без остатка, называется числом *кратным* этого второго числа (так, десять — число кратное единицы, двух, пяти и десяти, а 12 — число кратное единицы, двух, трех, четырех шести и двенадцати). Полезно при этом обратиться к тем словам, в которых корень „крат“ входит как основная часть. Таких слов несколько: „однократно“, „многократно“ и „неоднократно“; иногда говорят „во-стократ“. Это полезно для того, чтобы значение термина „кратное число“ было поставлено в некоторую связь с первоначальным (старорусским) значением корня этого слова, из современного русского языка почти исчезнувшего. Затем можно обратиться к числам, разлагающимся на несколько первоначальных сомножителей, и поупражнять учеников как в отыскивании делителей данного числа, хотя бы даже и не всех, так и в употреблении термина „кратное число“. Чтобы лучше закрепить в сознании и в памяти учеников значение терминов „делитель“ и „кратное число“, полезно также сопоставить делитель данного числа с числом, кратным данного числа. Когда ищут *делитель* данного числа, то это значит что ищут такое число, на *которое* данное число делится нацело без остатка. А когда ищут число *кратное* данного числа, то ищут число, которое *само* разделилось бы на данное число нацело без остатка (т. е. подыскивают для данного числа надлежащее делимое, или число, *делимое* на данное число). Можно также указать, что если нам даны два равных между собою числа, то каждое из них есть и делитель другого, а также — число кратное другого. Указания эти надо сделать с помощью вопросов. Если учитель хочет поставить определение термина „кратное число“ непременно на возможно более конкретную почву, он может ввести представление о том, что число кратное двух можно составить, беря только одни двойки, а число кратное трех можно „набрать“, беря одни тройки и т. п. Таким образом получится представление о том, что число 57 кратное трех, потому что содержит 3 единицы известное число раз, а именно 19, что оно — 19-кратная сумма слагаемых, из которых каждое равно 3 единицам.

Кратное двух и нескольких чисел.

Далее можно обратиться к отысканию такого числа, которое надо считать кратным для каждого из данной пары чисел или, как некоторые говорят, к отысканию „общего" кратного числа. Путем упражнений ученики легко усваивают себе, что чисел кратных для данных чисел, например, для 3 и 4, много и даже бесчисленное множество. Переход к кратному трех чисел и кратному более значительного количества чисел не представляет для воображения учеников никакого нового затруднения. Но зато некоторое, притом довольно значительное, усилие ума и воображения должно употребить на то, чтобы связать свое представление о кратном числе с представлением о том, что для отыскания кратного двух или нескольких чисел достаточно их перемножить. Надо своевременно воспользоваться упражнениями в этом направлении, чтобы у учеников возникло воспоминание о том, что произведение двух чисел всегда на каждое из них делится нацело без остатка. Ученики должны усвоить, что это свойство произведения наиболее удобоприменимо для быстрого отыскания числа кратного данных двух или нескольких чисел.

Когда это уже достигнуто, можно на примерах показать, что есть такие случаи, которые требуют особых приемов: а) для отыскания числа кратного чисел 3, 2 и 5, надо эти три числа непременно перемножить. б) когда даны числа 3, 6, 5, где второе число есть кратное первого, то можно для отыскания кратного этих трех чисел перемножить только 6 и 5. в) чтобы отыскать число кратное чисел 4, 8 и 32, не надо производить никакого действия, а надо сообразить, что число, равное одному из них (32), делится на каждое из данных чисел нацело без остатка. Наконец, г) при отыскании числа кратного чисел 4, 3 и 10 тоже можно, не перемножая этих чисел, сообразить, что 60 делится на каждое из них нацело без остатка.

Во всяком случае, надобно весьма настойчиво упражнять детей в таком отыскивании кратного нескольких чисел, которое основано исключительно на здравом смысле и на некоторой сообразительности и изобретательности учеников. Ибо только на этой почве, т. е. на почве наглядных представлений и целесообразных упражнений, а не на почве отвлеченных определений и более или менее громоздких правил, возможно целесообразное и методически-верное построение понятия о наименьшем кратном двух или нескольких чисел. Пусть ученики раньше всего сроднятся с представлениями о кратном числе и со способами изустного его вычисления и отыскания с помощью догадки. Когда это достигнуто, тогда возможно сроднить их и с терминами и с правилами письменного отыскания наименьшего кратного двух или нескольких чисел. Благодаря этому прямо выигрывается много времени и соблюдаются все справедливые методические требования.

§ 11. Наименьшее кратное нескольких чисел.

Когда все намеченное в предшествующем параграфе учениками проработано вполне, можно перейти к указанию, что из всех чисел кратных по отношению к данным числам (например, к шести и восьми), одно непременно меньше всех остальных. Число 48, конечно, число кратное шести и восьми, но нет ли такого числа, которое меньше, чем 48, и которое все-таки представляет собою число кратное шести и восьми? В этом весь вопрос, который ученики должны разрешить по возможности самостоятельно, и в таком направлении с ними надо проработать достаточное количество упражнений. Прежде чем переходить к письменному нахождению *наименьшего* кратного числа по известному, столь громоздкому и сложному, правилу, надо, чтобы ум и воображение учеников обогатились верными представлениями о *существовании* кратных чисел вообще. После этого они в состоянии понять, что среди чисел кратных по отношению к данным, существует некоторое *наименьшее* кратное число

§ 12. Правило нахождения наименьшего кратного двух или нескольких чисел.

Нахождение наименьшего кратного числа по правилу, с помощью первоначальных множителей каждого из них, не может быть разработано так, чтобы ученики сами изобрели этот прием или, по крайней мере, приняли значительное участие в его изобретении. Но вызвать некоторое их участие в этот изобретении возможно.

С помощью следующего ряда вопросов можно достигнуть некоторых результатов в этом направлении: Если число делится на 6, делится ли оно еще на какие-нибудь числа? (Да, делится и на 2 и на 3.) — Если число делится на 12, делится ли оно на какие-либо другие числа? (Да, делится.) И т. д. — Если целое разделить сначала на 2 одинаковые части, а каждую полученную часть разделить на 3 одинаковые части, на сколько одинаковых частей будет таким образом разделено целое? (На 6 одинаковых частей.) — Если какое-нибудь целое разделить на 10 одинаковых частей, а полученную часть на 24 одинаковые части, на сколько одинаковых долей целое будет таким образом разделено? (На 240.) И т. д. — Чтобы число разделилось на 360 нацело без остатка, какое условие для этого достаточно? (Для этого достаточно, чтобы оно делилось на 36, и чтобы полученная часть делилась на 10 нацело без остатка.) — Чтобы число разделилось на 480, достаточно какое условие? (Достаточно, чтобы число делилось нацело без остатка на 48, а полученное делилось на 10 нацело без остатка.) И т. д. — А чтобы число разделилось на 42 и чтобы то же самое число разделилось на 10, какие условия достаточны? (Достаточны условия, чтобы оно делилось на 2 и на 21, а полученное — на 10.) — А чтобы число делилось на 2 и на 21 и на 10, какие условия достаточны? (Достаточны 4 условия: чтобы оно делилось и на 2, и на 7, и на 3, и на 5.) — Если мы возьмем произведение 2×7, то оно первым двум условиям удовлетворит. — Если мы составим произведение 14×3, то это произведение удовлетворит также третьему условию; если составим 42×5, то это произведение удовлетворит всем четырем условиям.[1] И т. д. — Какие условия достаточны для того, чтобы число разделилось на 48 нацело без остатка и чтобы то же самое число разделилось также на 36 нацело без

[1] Последнее лучше дать в более или менее готовом виде, тем более, что ученики к этому несколько подготовлены соображениями о делимости произведения чисел на каждый из его сомножителей.

остатка? — Необходимо ли, чтобы оно равнялось произведению чисел 48 и 36 или нет? (Нет, не необходимо.) — Что же для этого достаточно? — Для решения этого вопроса разложим 48 и 36 на их первоначальные сомножители:

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3, \text{ а } 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3;$$

отыщем число, которое делилось бы на 2, с тем, чтобы полученное частное тоже разделилось на 2, вновь полученное опять разделилось на 2, третье частное также разделилось на 2, а четвертое разделилось бы уже на 3 (это все — простые множители первого числа, т. е. 48), наименьшее число, удовлетворяющее этим условиям, равно 48. — Но, чтобы число разделилось, кроме того, на 36, достаточно, если оно делится на 2 (число 48 этому условию удовлетворяет), если полученное частное опять разделится на 2 (и этому условию число 48 удовлетворяет), если третье частное делится на 3 (и этому условию число 48 удовлетворяет) и, наконец, если четвертое частное число также разделится на 3 нацело без остатка; но этому условию 48 уже не удовлетворяет, потому что $48:2=24$; $24:2=12$; $12:3=4$; $4:3=1$, ост. 1. — Возьмем число 48 и помножим его 3, — и число 144 удовлетворит всем этим условиям, и т. д.

Только многочисленные в этом направлении упражнения в состоянии дать ученикам представление (конечно, не обоснованное научно) о том, что: 1) для того, чтобы число делилось на другое, *необходимо* и *достаточно*, чтобы оно содержало все простые сомножители этого второго числа, и 2) для того, чтобы найти *наименьшее* кратное двух или нескольких чисел, достаточно выписать все простые сомножители какого-нибудь из данных чисел и к нему приписать из разложений других чисел те сомножители, которых нет среди простых сомножителей взятого разложения; 3) не имеющимися в данном разложении должно при этом считать совершенно новые первоначальные числа, совсем не встречающиеся среди сомножителей взятого разложения; 4) не имеющимися в данном разложении должно считать и те сомножители, которые равны каким-нибудь из множителей этого разложения, но взяты в этом последнем разложении в меньшем количестве по сравнению с тем, сколько раз оно встречается в каком-либо из других разложений.

§ 13. Рассуждения, приводящие к наименьшему кратному.

Отсюда следует, что добраться до основания разложения чисел на первоначальные множители, — разложения, представляющего собою средство для отыскания наименьшего кратного, — вовсе не так легко. Это кажется легким только учителю, не сроднившемуся с методическими точками зрения на предмет вообще и на этот вопрос в частности. Разложение на первоначальные множители, как наиболее целесообразное средство для отыскания наименьшего кратного числа, может быть принято учениками на веру. Но они должны себе раз-навсегда усвоить, что если наименьшего кратного нескольких чисел нельзя найти путем быстрого соображения, то прежде всего необходимо данные числа разложить на первоначальные множители.

С этого пункта учащимся уже можно начать рассуждения следующего содержания: для того, чтобы число разделилось на 360, необходимо, чтобы оно разделилось на 2, чтобы полученное от этого деления число делилось на 5, чтобы вновь полученное частное вновь делилось на 2, результат этого деления опять делился на 2, новое частное делилось бы на 3, и, наконец, последнее частное также делилось бы на 3. Эти все делители могут быть выписаны один за другим, причем записи могут быть отделены одна от другой запятыми хотя бы следующим образом: 2, 5, 2, 2, 3, 3.

То же самое упражнение и рассуждение должно повторить много раз, прежде чем мы перейдем к условиям, которые требуется выполнить для того, чтобы число делилось также на 420. Когда ученики привыкли к этому рассуждению, то можно перейти к следующему: число, которое должно делиться на 360, должно в числе своих сомножителей содержать, по крайней мере, шесть сомножителей, вышевыписанных. Оно может поэтому представлять собою либо произведение всех этих сомножителей, либо же произведение этих сомножителей и еще некоторых других. Это рассуждение снова должно быть многократно повторено, и в результате всего вышенамеченного получится тогда у учеников сознание, что, например, наименьшее кратное 360, 420 и 450 во всяком случае должно содержать в себе такие и только такие сомножители, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) если сравнить простые сомножители этого наименьшего кратного по величине их и по числу их с простыми сомножителями любого из данных чисел, то среди последних сомножителей нет ни одного такого, который не встречался бы также в разложении наименьшего кратного; 2) если в разложении одного из данных чисел некоторые простые сомножители равны между собой, то никак не меньше таких же равных сомножителей находится в разложении наименьшего кратного; 3) если среди простых сомножителей наименьшего кратного числа встречается какое-либо число, то то же самое число находится, по крайней мере, в разложении одного из данных чисел; наконец, 4) если какой-нибудь сомножитель в наименьшем кратном числе встречается несколько раз, то столько же раз встречается этот сомножитель в разложении, по крайней мере, одного из данных чисел. Без полного уразумения этих условий все правила отыскания наименьшего кратного и не хорошо удерживаются памятью и не приносят никакой пользы ученику с точки зрения образовательной. Только по уразумении этих условий полезен переход к тому заключению, что число, долженствующее разделиться на 360 и 420 и притом быть наименьшим из всех чисел этого рода, должно непременно содержать всех сомножителей 360 и, кроме того, еще тех и только тех сомножителей 420, которых нет среди сомножителей 360.

Когда все упомянутое достигнуто, можно задаться вопросом — делится ли произведение $2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ также и на 450? Для того, чтобы число делилось на 450, необходимо, чтобы оно делилось на 2. Только-что выписанное произведение на 2 делится. Кроме того, необходимо, чтобы полученное частное делилось на 5. Это первое частное на 5 делится. Далее необходимо, чтобы вновь полученное частное делилось еще на 3; этому условию данное произведение тоже удовлетворяет. Затем необходимо, чтобы вновь полученное частное опять делилось на 3, — данное произведение этому условию тоже удовлетворяет. Наконец, необходимо, чтобы последнее частное разделилось на 5. Этому условию данное произведение не удовлетворяет. А потому необходимо к этому произведению $2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ присоединить еще сомножитель 5, и только тогда получится ряд сомножителей $2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 5$, от перемножения которых получится некоторое число кратное данных чисел, а именно чисел: 360, 420 и 450.

§ 14. Чего мы не можем доказать?

Но что это произведение будет ***наименьшим*** кратным числом 360, 420 и 450, в том у нас нет никакого ручательства, и это ученики должны поневоле принять почти на веру. Таким образом, ученикам необходимо принять на веру, по крайней мере, два пункта учения о наименьшем кратном числе.[1] С другой стороны, рассуждения, с помощью которых мы добрались до необходимости собрать известным образом сомножителей данных чисел, крайне громоздки. Принимая это во внимание, учитель может предпочесть постановку всего учения о наименьшем кратном нескольких чисел на почву двух-трех правил, имеющих практическое значение. Это, может быть, единственное учение во всем курсе арифметики, методическая разработка которого еще крайне несовершенна. Иногда приходится почти отказаться от уразумения учениками самой сущности тех теорем, на которых основано, с точки зрения арифметической и логической, учение о наименьшем кратном числе двух или нескольких чисел.

§ 15. Графический способ.

Наименьшее кратное число практически важно для приведения дробей к общему наименьшему знаменателю. А потому весьма целесообразно поставить способ нахождения наименьшего кратного в зависимости от выражения различных долей единицы в одинаковых ее долях. А для этого полезно воспользоваться графической интерпретацией нескольких численных примеров на приведение двух различных долей единицы к общему знаменателю на двух одинаковых отрезках.

§ 16. Правило отыскания наименьшего кратного.

Наилучшим правилом для отыскания наименьшего кратного двух или нескольких чисел надо признать следующее: а) прежде всего надо разложить каждое из данных чисел на первоначальные множители; б) затем переписать разложение одного из них; в) далее присоединить из второго разложения те сомножители, которыми оно отличается от записанного нами разложения; г) потом присоединить из третьего разложения те сомножители, которыми оно отличается от вновь полученного ряда сомножителей и т. д.; наконец, д) перемножить все сомножители полученного таким образом произведения. Это последнее правило удобно в следующих отношениях: 1) оно поддается, как мы в том убедились выше, почти во всех пунктах некоторой методической обра-

[1] Первый пункт, который принимается на веру, состоит в том, что „всякое непервоначальное число непременно представляет собою произведение некоторых первоначальных сомножителей“ (см. § 5 этой главы). *(Прим. ред.)*

ботке, более доступной силе разумения учеников, и 2) самое вычисление наименьшего кратного потому облегчено, что произведение довольно значительного числа сомножителей взятого согласно второму пункту правила разложения нам известно.

Чтобы убедиться в верности последнего замечания, примем во внимание, что отыскание наименьшего кратного чисел 360, 420 и 450 по только что изложенному правилу потребует следующих вычислений:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} 360 &= 2\times 5\times 2\times 2\times 3\times 3, \\ 420 &= 2\times 5\times 2\times 3\times 7, \\ 450 &= 2\times 5\times 3\times 3\times 5. \end{aligned}$$

Наименьшее кратное получим, записав разложение, например, 3-го числа:

$$2\times 5\times 3\times 3\times 5;$$

затем присоединим сюда еще сомножители 2 и 7 из второго, а к вновь полученному ряду сомножителей $2\times 5\times 3\times 3\times 5\times 2\times 7$ присоединим сомножитель 2 из первого разложения, после чего получим:

$$2\times 5\times 3\times 3\times 5\times 2\times 7\times 2.$$

При вычислении этого произведения нам уже не придется вычислять произведения первых пяти сомножителей, так как нам известно, что оно равно 450.

§ 17. Практическое значение учения о наименьшем кратном.

Наименьшее кратное нескольких чисел находит себе применение только при приведении дробей к общему знаменателю. Но при этом замечательно, что большой надобности в особенно строгом изложении всего учения о наименьшем кратном числе не представляется до тех пор, пока мы не выйдем за пределы тех требований, которые предъявляет нам практическая жизнь, техника и научное естествознание. Особенно это верно, если учащиеся владеют главными приемами приблизительного вычисления сумм и разностей десятичных чисел. В практической жизни из дробей встречаются преимущественно: половины, четверти, восьмые, пятые, десятые, реже — шестнадцатые, тридцать вторые. Значительно реже, чем пятые, встречаются двенадцатые, двадцать пятые, тридцатые. Совсем не встречаются тридцать пятые, седьмые, двадцать первые, а тем более — сто сорок седьмые, шестьдесят первые и т. д. Приведение же наичаще встречающихся в жизни дробей к общему знаменателю, благодаря их составу, не представляет для человека, сколько-нибудь свободно обращающегося с числами первой сотни, почти никаких особенных затруднений. Принимая это во внимание, смело можно было бы исключить полное учение о наименьшем кратном нескольких чисел не только из курса арифметики начальных школ, но и из курса арифметики низших классов средних учебных заведений. Не следует опасаться при этом практических невыгод не только для тех учеников, которым когда-нибудь придется заниматься алгеброю, но даже для тех, которые никогда впоследствии учиться алгебре не будут. Делая уступку укоренившимся в наших школах обычаям, а именно — внося также правило об отыскании наименьшего кратного в курс не только средних, но и низших учебных заведений с более или менее полным курсом арифметики, учитель не должен забывать одного. Пусть его ученики делают вычисления над никогда не встречающимися ни в жизни, ни в науке дробями. Пусть они применяют в надлежащих случаях учебной практики усвоенные ими правила отыскания наименьшего кратного числа. Но производить с помощью *каких бы ни было* правил о наименьшем кратном числе те вычисления, которые можно совершить без всяких правил, а только на основании здравого смысла и разумения, по меньшей мере, нецелесообразно и неблагоразумно. К сожалению, не только ученики, но иногда и сами учителя в классе прибегают к вычислениям по правилу в тех случаях, когда никаких правил, строго говоря, не надо. Например, в случаях сложения четвертей с десятыми, восьмых с четвертями и двенадцатыми, двенадцатых долей с четвертями и восьмыми. Подобные вычисления должны совершаться не только без всяких правил, но даже без всяких более или менее излишних записей, по возможности изустно и совершенно независимо от каких бы то ни было письменных образцов. От этого не только выигрывает образовательная сторона обучения, но будет надлежащим образом облегчено и выполнение программы. Эти упражнения облегчают, а не затрудняют полное изучение всех правил об отыскании наименьшего кратного двух или нескольких чисел. В науке и технике приходится производить сложение и вычитание только над десятичными дробями, и то — с небольшим сравнительно числом цифр после запятой.

§ 18. Приведение дробей к общему знаменателю.

Чтобы сделать для учеников приведение дробей к общему знаменателю затруднительным без отыскания наименьшего кратного числа их знаменателей, надо взять прежде всего несколько дробей с редко встречающимися в жизни знаменателями. Ученики сообразят, что сразу не рассчитать, как велик наименьший общий знаменатель данных дробей, во-первых, потому, что дробей много, и, во-вторых, потому, что знаменатели не принадлежат к числу удобных. Далее ученики должны подняться до уразумения того, что им необходимо найти не слишком большое число, если возможно — наименьшее из всех тех чисел, которые делятся нацело без остатка на знаменатели других дробей. Здесь давать что-либо на веру не для чего, раз уже учение о наименьшем кратном нескольких чисел учениками усвоено. Они должны путем настойчивого и серьезного размышления, притом более или менее самостоятельного и не навязанного учителем, добраться до того, что им необходимо найти наименьшее кратное всех данных знаменателей. Ход мыслительной работы в этом случае должен быть усвоен всеми учениками и каждым в отдельности. Все ученики должны быть в состоянии отдать себе полный отчет в том, для чего именно они отыскивают наименьшее кратное число знаменателей. Способ расположения вычислений можно практиковать, приблизительно, следующий:

$$\text{(V)}\quad \overbrace{\qquad}^{315}\qquad \overbrace{\qquad}^{210}\qquad \overbrace{\qquad}^{140}\qquad \overbrace{\qquad}^{84}\qquad \overbrace{\qquad}^{36}$$

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{4},\qquad \frac{5}{6},\qquad \frac{7}{9},\qquad \frac{8}{15},\qquad \frac{9}{35}.$$

(II) $4 = 2 \times 2$; $6 = 2 \times 3$; $9 = 3 \times 3$; $15 = 3 \times 5$; $35 = 5 \times 7$.

(III) Наименьшее кратное $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 1\,260$.

(IV) $1\,260 : 4 = 315$; $1\,260 : 6 = 210$; $1\,260 : 9 = 140$.
$1\,260 : 15 = 84$; $1\,260 : 35 = 36$.

(VI) $\frac{315}{1\,260}$, $\frac{1\,050}{1\,260}$, $\frac{980}{1\,260}$, $\frac{672}{1\,260}$, $\frac{324}{1\,260}$.

Ряд последовательных вопросов, которые могут способствовать более сознательному уразумению учениками всей важности наименьшего кратного знаменателей данных дробей, для возможности их приведения к одному знаменателю, приблизительно можно свести к следующим: а) Что нам надо найти? (Общий знаменатель.) б) На что должен делиться этот общий знаменатель? (На каждый из знаменателей данных дробей.) в) Какое число нам, стало-быть, надо найти? (Такое, которое делилось бы нацело без остатка на данные знаменатели.) г) Как называется это число по отношению к данным знаменателям? (Кратным этих знаменателей.) д) Можем ли мы найти какое-нибудь кратное данных знаменателей? (Можем, взяв произведение всех знаменателей.) е) Какое из всех кратных чисел для нас наиболее удобно? (Наименьшее кратное.) И т. д. Здесь же ученики должны вполне освоиться с терминами: „привести дроби к общему знаменателю“ или „к одному знаменателю“ и с условным значением этого последнего термина, под которым разумеют, что требуется данные дроби привести к общему наименьшему, какой только возможен в данном случае, знаменателю. При разделении наименьшего кратного всех знаменателей на каждый из них в отдельности надо пользоваться преимущественно изустным вычислением. Особенно это важно в тех, наичаще в жизни встречающихся, случаях, когда это изустное вычисление не представляет ровно никаких затруднений. В случаях, когда это изустное вычисление почему-либо затруднительно, необходимо учеников научить использованию разложения знаменателей на первоначальные множители для цели этого разделения. Так, например, если известно, что: $1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, то для разделения числа 1260 на 36 надо из числа всех сомножителей 1260 исключить сомножители 36, и тогда в частном получится произведение 5×7, т. е. 35. Впрочем, настаивать на усвоении учениками этого приема учитель может только в том случае, если ученики себе уже вполне усвоили самую сущность приведения дробей к общему знаменателю и способ расположения вычислений, рекомендованный выше. Ибо стремиться к достижению нескольких целей зараз, конечно, значит устранять возможность быстрого и вполне здравого в методическом отношении усвоения данного навыка. Всякий навык содержит в себе частности, которые должны быть усваиваемы учащимися по возможности последовательно, а не разом.

§ 19. Десятичные дроби на этой ступени.

Здесь же в высшей степени полезно обратиться к сокращению десятичных дробей, в письменном обозначении которых последние цифры — нули. Такие дроби должны быть сокращаемы только на соответственную единицу высшего разряда.

Полезно также приведение десятичных дробей к общему знаменателю.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ.

§ 1. Независимость сложения от правила.

Сложение дробей надо начинать со сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Надо ли в этом случае пользоваться так называемым *правилом* сложения, его точно формулировать или нет — предоставляется самому учителю. Но ежели обращаться к правилу, то это надо сделать непременно после того, как проработано достаточно упражнений в этом направлении, т. е. после того, как учитель вполне убедился в том, что ученики понимают, что именно так, а не иначе, надо складывать. Выводить же правила ученики должны сами с помощью учителя, который вообще не имеет права давать ученикам готовых правил для безучастного и механического их применения к данному случаю. Что $\frac{3}{10}$ да еще $\frac{2}{10}$ вместе составляют $\frac{5}{10}$, или половину, ученики должны понимать так же ясно, как то, что 3 дециметра да еще 2 дециметра составляют 5 дециметров, или полметра. Доказывать здесь нечего. Сложить дроби с одинаковыми знаменателями только и *значит* — сложить числители, полученную сумму сделать числителем новой дроби, общий знаменатель — ее знаменателем.

Согласно самому *определению* сложения дробей с одинаковыми знаменателями, полученная дробь в таком случае будет суммою двух данных дробей. Все дело только в том — правильно ли и достаточно ли выразительно прочтены данные дроби, т. е. правильно ли поставлены ударения на словах, обозначающих числители. От выразительности чтения вначале, можно сказать, зависит все. Когда требуется сложить $\frac{3}{10}$ и $\frac{2}{10}$, то это требование надо прочесть так: *три* десятых, *да еще две* десятых... а не так: три *десятых* да еще две *десятых*. Вместо ряда слов: „если у двух дробей одинаковы знаменатели и надо сложить их числители, эту сумму сделать числителем, а общий знаменатель — знаменателем новой дроби“, говорят: „сложить две дроби с одинаковыми знаменателями“. Правило же сложения двух дробей с одинаковыми знаменателями непосредственно вытекает из определения сложения таких дробей. *Возникает же смысл этого сложения из целесообразных задач, и на задачах* же должен быть построен этот смысл. [1]

[1] В алгебре, при обозначениях алгебраических дробей, может быть вопрос о том, что, *каковы бы ни были* значения букв a, b и c, вместо обозначения:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \text{ можно писать } \frac{a+b}{c}.$$

При натуральных же значениях этих букв формула

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

представляет собою не что иное, как буквенную запись самого определения сложения.

§ 2. Расположение вычислений.

Сложение дробей с разными знаменателями не представляет никаких новых трудностей, раз приведение дробей к общему знаменателю ученикам известно. Весь вопрос может заключаться только в достаточно изящном и раз навсегда установленном способе распределения вычислений на доске или на бумаге. Наиболее целесообразное расположение вычислений следующее (римские цифры означают порядок записей):

$$\text{(II)}\quad \underset{\smile}{12}\qquad \underset{\smile}{6}\qquad \underset{\smile}{3}\qquad \underset{\smile}{2}$$

$$\text{(I)}\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=2\frac{11}{12}.\quad \text{(IV)}$$

$$\text{(III)}\ \frac{12}{24}+\frac{18}{24}+\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{59}{24}.$$

Научив детей должному расположению вычислений, учитель не имеет права забывать, что всегда ученики выказывают излишнюю склонность к письменному производству действий. От этого надо отучать в тех случаях, когда вычисление может и должно быть, по самому смыслу его, произведено непременно изустно. На это надо обратить учителю как свое внимание, так и внимание учеников. Но для того, чтобы развить внимание учеников в этом направлении, требуются своевременные упражнения учеников в сложении таких дробей, которые наиболее целесообразно выполнять изустно. Особенно предосудительно письменное производство сложения в тех случаях, когда в качестве слагаемых являются половины, четверти, восьмые, шестнадцатые, или двенадцатые рядом с четвертями, десятые — рядом с пятыми и т. п.

§ 3. Сложение смешанных чисел.

Сложение смешанных чисел ничего нового собою не представляет, и здесь правило сложения также может быть совершенно опускаемо, так как оно слишком очевидно. Весь вопрос должен заключаться только в том, будут ли ученики предаваться излишнему многописанию: не сведут ли они все дело к формальному, без внутреннего интереса к делу, исполнению письменной работы и расположат ли они все вычисления, требующие непременно письменного производства действия, надлежащим образом. В тех случаях, когда письменное производство вычислений обязательно, надобно располагать их, примерно, следующим образом:

$$\text{(I)}\ 7\frac{7}{12}+8\frac{5}{16}+4\frac{3}{35}+6\frac{4}{15}=26\frac{417}{1\,680}.\qquad \text{(X)}$$

$$\text{(VII)}\quad \underset{\smile}{140}\qquad \underset{\smile}{105}\qquad \underset{\smile}{48}\qquad \underset{\smile}{112}$$

$$\text{(II)}\ \frac{7}{12}+\frac{5}{16}+\frac{3}{35}+\frac{4}{15}=\frac{417}{1\,680}.\qquad \text{(IX)}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{(III)} & 12=2\times2\times3 & \text{(V)} & 1\,680:12=140 \\
 & 16=2\times2\times2\times2 & & 1\,680:16=105 \\
 & 35=5\times7 & & 1\,680:35=\ \ 48\quad \text{(VI)} \\
 & 15=3\times5 & & 1\,680:15=112.
\end{array}$$

(IV) Наименьшее кратное знаменателей $=2\times2\times2\times2\times3\times5\times7=1\,680$

$$\text{(VIII)}\ \frac{980}{1\,680}+\frac{525}{1\,680}+\frac{144}{1\,680}+\frac{448}{1\,680}=\frac{2\,097}{1\,680}=1\frac{417}{1\,680}.$$

§ 4. Вычитание дробей.

Вычитание дробей не представляет новых логических трудностей для учеников. Относительно этого действия надо заметить, что и здесь правило и его формулировка не столь важны, как навык в применении изустного вычисления в тех случаях, когда оно наиболее целесообразно, и вычисления письменного в тех случаях, когда без него обойтись было бы слишком трудно или же неблагоразумно.

С логической (да и с методической) точки зрения самый алгорифм вычитания дробей вытекает из определения этого действия, как обратного сложению: вычесть одну дробь из другой — значит найти третью дробь, сумма которой с дробью вычитаемою равна уменьшаемой дроби.

Разложение дроби на сумму различных долей.

Для внесения бо́льшего интереса в упражнения в вычитании дробей, а также для развития лучшего навыка в быстром приведении дробей к одному знаменателю и в изустном производстве вычисления можно предложить упражнения в разложении дробей на суммы различных долей с возрастающими знаменателями. Дело в том, что всякая дробь может быть рассматриваема, как сумма не только одинаковых долей единицы, но так же, как сумма различных долей единицы, в совершенной зависимости от того, как велика данная дробь. Так, например:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};\quad \frac{15}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{240};\quad \frac{7}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36} \text{ и т. п.}$$

Расположение вычислений может быть практикуемо такое:

$$\text{(I)}\ \frac{7}{9}=\frac{1}{2}{}^{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}.$$

$$\text{(II)}\ \frac{7}{9}-\frac{1}{2}=\frac{14}{18}-\frac{9}{18}=\frac{5}{18}.$$

$$\text{(III)}\ \frac{5}{18}=\frac{1}{4}+\frac{1}{36}{}^{2}.$$

$$\text{(IV)}\ \frac{5}{18}-\frac{1}{4}=\frac{10}{36}-\frac{9}{36}=\frac{1}{36}.$$

Разложение это начинается с вопроса о том, больше ли данная дробь, чем половина или нет. Если больше, то как велика разность между нею и половиною? Если меньше, то не больше ли она, чем одна треть, и т. д. Остальное очевидно из вычисления. Упражнения этого рода представляют собою наилучшее применение действия вычитания к дробям. Они, кроме того, придают воображению учеников бо́льшую гибкость и освобождают их от стремления к слишком рабскому следованию только заученным и потому для них почти мертвым правилам.

---

[1] Сначала записана только часть равенства: $\frac{7}{9}=\frac{1}{2}+$; остальные же слагаемые: $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{36}$ записаны под конец.

[2] Здесь точно так же сначала записано только равенство; $\frac{5}{18}=\frac{1}{4}+$; другое же слагаемое $\frac{1}{36}$ записано впоследствии, когда было выполнено вычисление, отмеченное цифрою IV.

§ 5. Вычитание смешанных чисел.

Вычитание смешанных чисел не представляет опять-таки ничего нового по сравнению с тем, что ученики уже знают. Но, тем не менее, учителю надо уделить некоторое внимание тому обстоятельству, чтобы ученики отнюдь не обращали всего смешанного числа в неправильную дробь, каковое преобразование ничем не может быть оправдано. Они вообще должны стараться использовать, по возможности разумно и сознательно, состав данного смешанного числа. Поэтому они не должны приниматься за вычисление ни очертя голову, ни с каким-либо общим правилом, для данного частного случая, может быть, нецелесообразным, а пользоваться своим здравым смыслом.

Если среди упражнений брать примеры на сложение и вычитание десятичных дробей, изображенных в виде обыкновенных и, параллельно с этим, — с помощью запятой, то это приводит к прекрасным результатам. Учащиеся естественно сродняются с десятичными дробями и уразумевают всю пользу и целесообразность десятичных дробей. Это не только не мешает в дальнейшем вернуться к десятичным дробям, а, наоборот, способствует возникновению впоследствии мысли заменить сложение и вычитание обыкновенных дробей приближенным сложением и вычитанием дробей десятичных. Это подготовляет учащихся к тем вычислениям, которые надо признать и научными и целесообразными.

§ 6. Определения и правила.

Особенного внимания заслуживает то, что сумма и сложение чисел, а также произведение и умножение, для чисел каждого рода (целых, дробных и смешанных) требуют всякий раз отдельных определений. Вычитанию же, а равно и делению, можно дать определения общие, справедливые для чисел всякого рода. Это важно не только с точки зрения научной и логической, но и с точки зрения методической. Во-первых, эта особенность определений сложения и умножения освещает цели, к которым надо стремиться при усвоении учениками этой стороны дела. Во-вторых, это прямо сокращает труд по составлению определений, обыкновенно столь трудно усвояемых учениками „напамять". Наконец, в третьих, это приводит в должную систему все определения, относящиеся до четырех действий над целыми, дробными и смешанными числами.

§ 7. Смысл слова „умножить" в разных случаях.

Смысл первых двух действий (т. е. сложения и вычитания) над дробями не представляет почти ничего условного, с логической точки зрения, и ничего трудного, с точки зрения методической. Производство же этих действий требует только известного навыка. Зато умножение на дробь представляет собою такое действие, самый смысл которого затрудняет ученика по вине условности того смысла, который придается умножению в этом случае, и тех логических тонкостей, которые лежат в его основе. Дело в том, что даже тогда, когда множитель равен единице или нулю, умножение уже является действием условным и не согласованным с первоначальным смыслом, который придается этому слову (ср. § 7, гл. 1 „Повторительного отдела"). То же справедливо для случаев, когда множителем является дробь.

§ 8. Подготовительные упражнения.

Умножение на дробь (хотя бы даже на неправильную, которая по сокращении дает целое число) представляет собою дальнейшее развитие условности термина „умножение". Для этого случая совершенно теряется первоначальное значение слова „умножить". Для того, чтобы ученики вполне сознательно усвоили себе новый смысл слова „умножение", придаваемый этому слову ради неизвестных им целей, необходимо начать с приведения в порядок всех тех познаний, которые имеются у учеников относительно умножения на целое число. Им надо обратить внимание на то значение, которое доселе умножению придавалось. Для этого надо сначала брать целые сомножители, затем дробные и смешанные множимые при целых множителях. Само собою разумеется, что умножение дроби на целое число является только применением ранее уже усвоенного учениками способа увеличения данной дроби в несколько раз, и это может быть пройдено вполне подробно и без затруднений. Здесь же ученикам придется научиться сокращению, если таковое возможно, множителя числителя со знаменателем множимого. Учитель не должен думать, что это сокращение не требует ничего, кроме упражнения. Оно требует также проникновения в самый смысл преобразования; если требуется $\frac{7}{20}$ помножить на 15, то полученная запись $\frac{7 \times 15}{20}$ требует возобновления в памяти учеников законов изменения дробей при увеличении или уменьшении их членов в одно и то же число раз. По возобновлении этого представления в сознании учеников произведение 7×15, являющееся числителем, с уменьшением множителя 15 в 5 раз, уменьшится ровно в 5 раз и т. д. Эти вычисления требуют весьма многочисленных упражнений всех учеников у классной доски. Только в случае достаточного количества таких работ, учитель может добиться от учеников полного уразумения, с одной стороны, самого смысла умножения на целое число, а с другой — способов отыскания окончательного результата. Необходимо при этом, когда ученики уяснили себе сущность сокращения одного из сомножителей числителя со знаменателем, навести их также и на мысль, что это сокращение можно делать быстрее, если сразу сокращать на числа большие, если только это возможно: на 6, на 4, на 20 и т. д. Надо только не закрывать глаз на цифры и не рабски следовать правилам. Например, если дана дробь $\frac{150 \times 3}{100}$, то сразу видно, что у 150 и 100 общий делитель 50. Но само собою разумеется, что при этом не следует забывать основного начала всякого правильного обучения: „не более одной трудности зараз". А потому надо дождаться пока ученики освоятся с самой целью и смыслом сокращения, избавляющего нас от перемножения больших чисел. Чтобы лучше достигнуть этой цели, сначала надо брать такие примеры, сокращения которых могут быть совершаемы только на одно из чисел первого десятка, предоставив себе перейти впоследствии и к таким примерам, где можно сразу сократить на 25, на 50, на 20 и т. д.

§ 9. Умножение смешанного числа на целое.

Умножение смешанного числа на целое должно быть проработано тотчас же после умножения дробей на целый множитель. Но здесь требуется некоторое внимание к устройству данного числа. В одном случае возможно и надобно сразу написать результат умножения, так как и целое число, и целая часть смешанного числа, и его дробная часть не подают никакого повода к каким-либо затруднениям. В другом случае надобно сначала помножить (по возможности изустно) дробную часть смешанного числа на данный множитель, полученное произведение сократить, из него исключить целую часть и уже затем помножить целую часть смешанного числа на данный множитель с тем, чтобы к полученному прибавить предыдущий результат. В третьем придется только вычислить, какое число получится в конце концов, так как от умножения дробной части на целый сомножитель получится целое число. Но во всех случаях, когда приходится иметь дело с умножением смешанного числа на целое, надо избегать обращения смешанного числа в неправильную дробь и пользоваться не столько каким-либо общим правилом, сколько своим здравым смыслом.

Здравый смысл должен во всяком частном случае открыть ту или другую особенность, благодаря которой требуемое действие целесообразнее совершить так, а не иначе. Можно предложить учащимся составление задач с условиями для того, чтобы, во-первых, дать ученикам возможность применить приобретенные познания к частным случаям, и, во-вторых, чтобы дать возможность учителю судить о подготовке учеников к применению действия умножения, если требование этого действия облечено в форму задачи с условиями.

§ 10. Деление на целое число.

Чтобы дальнейшее усвоение умножения было основано на достаточно наглядных представлениях, надо, прежде чем перейти к умножению на дробь, предварительно упражнять учеников в *делении на целый делитель*. Прежде всего надо повторить уменьшение дроби в некоторое число раз, хотя ничего нового по существу это повторение не дает. Сокращение числителя с сомножителем знаменателя не представит также никаких новых логических и технических трудностей. Но от учеников надобно требовать отчета в праве нашем совершать подобные сокращения, при которых мы уменьшаем целый числитель, и в делителе (т. е. знаменателе) только один из его сомножителей.

Само собою разумеется, что в этом случае не может быть и речи о кратном сравнении двух чисел, так как это действие (т. е. деление числа на известные части) требует таких познаний, которые еще учениками не приобретены. Упражнения же в делении на известное число одинаковых частей необходимы, как это видно будет ниже, для надлежащего установления понятия об умножении на дробь.

§ 11. Нахождение доли числа.

От деления на целое число надо перейти к делению, формулированному несколько иначе, а именно формулированному в виде требования:

„найти некоторую долю данного числа“ и выполняемому, конечно, только с помощью деления. Так, для разрешения задачи: „найти одну пятую долю трех“ — надо написать равенство: $3:5=\frac{3}{5}$ и т. п. Т. е. нахождение доли числа надобно рассматривать, как деление числа на целое. При этом требование, по которому надо найти $\frac{1}{24}$ числа 15, надо написать так:

$$15:24=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$$

То же самое справедливо и для нахождения доли смешанного числа. Само собою разумеется, что здесь, т. е. при нахождении доли смешанного числа, как и при умножении числа на целое число, могут быть разные случаи. Может случиться, что целая часть смешанного числа делится нацело на данный делитель без остатка. Может случиться так, что при этом и числитель дробной части делится на делитель нацело без остатка. В этих случаях деление должно совершить сообразно столь удобному для разделения устройству данного смешанного числа. В других случаях приходится разделить целую часть данного смешанного числа на делитель нацело, остаток же, вместе с дробною частью делимого, обратить в неправильную дробь и затем уже разделить эту дробь на данный делитель. Наконец, может случиться, чтобы требовалось все делимое обратить в неправильную дробь. Но всегда обращать делимое в дробь неправильную отнюдь не следует. В высшей степени важно, чтобы ученики не заучивали никаких правил, относящихся до умножения и деления числа на целое число.

§ 12. Другое название для нахождения доли числа.

Только тогда, когда ученики вполне уяснили себе самый смысл умножения и деления на целое число, а также смысл нахождения одной доли какого-либо числа, можно перейти к сообщению детям другого *названия* для нахождения доли числа. Это определение, как вообще сообщение всякого нового или условного названия и термина, можно дать так, чтобы ученики на веру приняли, что то-то и то-то так-то и так-то называется. Но можно к этому сообщению подойти и путем некоторых упражнений, как бы оправдывающих появление нового названия или появление нового значения для названия, уже ранее употреблявшегося в некотором другом, вполне определенном значении. Для этого и можно прибегнуть к ряду целесообразных задач, в которых множители — целые числа, а затем к задачам, в которых множитель — доля единицы.

Мы желаем сообщить ученикам, что, вместо того, чтобы говорить: „найти одну четверть семнадцати“, говорят также иначе, а именно говорят: „17 помножить на $\frac{1}{4}$“. Этому можно предпослать следующие упражнения. Метр материи стоит 12 руб. С помощью какого действия узнают, что стоит 5, 8, 315, 28 метров этой материи? (С помощью умножения.) — А с помощью какого действия узнают, что стоит $\frac{1}{4}$ *м* той же материи? (С помощью деления.) — Килограмм сахара стоит 4 руб. 90 коп.

С помощью какого действия узнают, что стоят 5 *кг*, 9 *кг*, 27 *кг* сахара? (С помощью умножения.) — А с помощью какого действия узнают, что стоят $\frac{1}{2}$ *кг*, $\frac{1}{4}$ *кг*, $\frac{1}{5}$ *кг*? (С помощью деления.) — Узнают одно и то же, а именно — что стоит известное количество какого-либо товара. — Что узнают — повторите! А действия для этого употребляются различные: в одном случае умножение, а в другом? (В другом — деление.) — Когда прибегают к умножению? (Когда количество товара выражено целым числом единиц.) — А когда — к делению? (Когда оно выражено в виде доли.) — Когда требуется написать:

$$17 : 4;\ 25 : 7;\ \frac{3}{8} : 5\ \ 5\frac{3}{4} : 8;$$

то вместо этого можно написать:

$$17 \times \frac{1}{4},\ \ 25 \times \frac{1}{7},\ \ \frac{3}{8} \times \frac{1}{5},\ \ 5\frac{3}{4} \times \frac{1}{8}.$$

— Повторите! — Вместо того, чтобы *говорить*: „17 разделить на 4 одинаковые части“, говорят также: „17 помножить на одну четверть“. — Вместо того, чтобы говорить: „двадцать пять разделить на восемь одинаковых частей“, говорят также следующее: „25 помножить на одну восьмую“, и т. д. — При этом слова: „требуется *помножить* какое-нибудь данное число на *какую-либо долю* единицы“ — выражают только то, что требуется найти именно эту долю данного числа. — Что значит — помножить 4 на половину? (Это значит найти половину четырех.) — Что значит — 7 помножить на одну треть? (Это значит найти одну треть семи.) Записать, что надо найти одну пятую долю 8! (Это записать можно следующим образом: $8 \times \frac{1}{5}$.) — Что получится от умножения 10 единиц на одну половину? — Запишем: $10 \times \frac{1}{2} =$. — Чему же равняются 10 единиц, помноженные на одну половину? Что это значит: „помножить на одну половину?“ (Помножить на одну половину значит: найти половину множимого.) — Стало-быть $10 \times \frac{1}{2} = 5$. Чему равняются 7, помноженные на одну треть? $7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. — Почему? (Потому что для отыскания одной трети семи надо 7 разделить на 3 одинаковые части.) — Помножить число на одну седьмую значит найти одну седьмую множимого или разделить данное число на 7 одинаковых частей. — Люди, знающие хорошо арифметику, никогда не ошибаются насчет того, что это значит: „помножить на одну треть“, „помножить на одну восьмую“, „на одну двадцатую“, *вообще* на счет того, что это значит — помножить на какую-либо долю единицы! Найти одну треть дроби $\frac{5}{6}$! — Это пишут и так: $\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$. — Это пишут вместо чего? — Коля! Почему так можно писать? (Потому что умножить на одну треть — значит найти одну треть множимого.) — Примеры! — От того, *какое* именно *число* надо помножить на долю единицы, не зависит смысл слов „умножить на долю“! — Умножить на долю значит найти *эту* долю множимого, *каково бы ни было множимое!* — Что это значит $7 \times \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} \times \frac{1}{3}$, $2\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$, $\frac{17}{20} \times \frac{1}{3}$? и т. п. — Расположение вычислений лучше всего вначале предпочитать следующее:

$$\frac{7 \times \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}}{7 \times \frac{1}{3} = 7 : 3 = \frac{7}{3}}; \quad \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}}{\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{18}}; \quad \frac{2\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{12}}{\frac{11}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{12}}.$$

§ 13. Поворотный пункт в учении о действиях.

Это упражнение представляет поворотный пункт, если позволено так выразиться, — эпоху в курсе арифметики и математики вообще. Здесь ученики (если они раньше не обращали достаточного внимания на умножение на одну единицу и на нуль) знакомятся с таким случаем, когда некоторому, вполне определенному и известному слову, имеющему свое неотъемлемое и определенное значение, придается значение, совершенно новое и даже противоречащее его первоначальному значению. Здесь же очень полезно остановиться с учениками на смысле умножения на единицу и на нуль. Во всяком случае, до полного усвоения учениками значения слова „умножить“, когда множитель равен одной доле единицы, итти далее нецелесообразно. О *правиле* умножения на долю единицы в этом случае и на этой ступени не может быть и речи. Цель всех этих упражнений заключается только в сообщении ученикам верного представления о том *значении*, которое принято придавать *словам*: „помножить на $\frac{1}{4}$, на $\frac{1}{7}$, на $\frac{1}{10}$“ и т. п. Вопроса о том, почему действие деления на 4 называется умножением на одну четверть, в этом случае касаться тоже несвоевременно. Достаточно принять просто на веру, что люди, знающие арифметику, условились, договорились так, а не иначе, понимать значение слова „умножить“ на $\frac{1}{4}$, на $\frac{1}{5}$, на $\frac{1}{10}$ и т. п. Что при таком понимании умножения на долю единицы закон переместительный справедлив, отметить (но непременно на вычислениях, а не на словах только!) следует. Можно взять примеры яркие: $8 \times \frac{1}{4} = 2$ и $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ и т. п.

§ 14. Упражнения, предшествующие определению умножения на дробь.

Когда все, намеченное выше, усвоено учениками вполне, можно перейти к нахождению нескольких одинаковых долей числа. Оно требует, при достаточной к тому подготовке учеников, немногих трудов со стороны учителя. Надо только итти в намеченном выше направлении, от легкого к трудному, а именно: от случая отыскания таких частей целого числа, которые сами представляют собою числа целые, к случаям, когда искомая часть целого числа представляет собою число дробное. Научившись находить такие части целого числа, которые сами представляют собою числа целые и которые, для своего отыскания, не нуждаются даже в письменном решении задачи, можно перейти к нахождению любой части целого числа, требующему большей вдумчивости в сущность вопроса. Самый трудный пункт занимающего нас обобщения понятия об умножении состоит в том, что, например, одна четверть семи единиц равна семи четвертям одной единицы. Это положение требует не только навыка, но и более или менее глубокого проникновения в сущность дела. Если ученики не вполне владеют относящимися сюда навыками, то учителю остается признать, что дробь как частное еще недостаточно ясна ученикам и что, стало-быть, учитель своевременно не обратил внимания на то, что может быть усвоено ими только на почве самых наглядных и, если можно так выразиться, самых осязательных представлений из относящейся сюда области.

Учащиеся должны понять, что два действия $8:4=2$ и $2\times3=6$ записываются в одну строку, в виде одного действия, $8\times\frac{3}{4}=6$. И наоборот: если записано $8\times\frac{3}{4}$, то эта запись обозначает, что требуется совершить два действия: 8 разделить на 4 равные между собою части, а затем полученное частное помножить на 3.

§ 15. Трудности письменного отыскания части целого числа.

Второй пункт, могущий представить некоторые затруднения для учеников, сводится к тому, что ученики, говоря: „найти $\frac{3}{4}$ семи", раньше всего должны записать цифру 7, затем, произнося вслух слова: „$\frac{1}{4}$ семи в *четыре* раза меньше семи", должны провести черту дроби под цифрою и своевременно под чертою подписать цифру 4, и, наконец, говоря, что $\frac{3}{4}$ семи в 3 раза больше, чем *одна* четверть семи, должны в числителе своевременно записать знак умножения и рядом с этим знаком цифру 3. Этот, если можно так выразиться, чисто письменный навык должен, однако, приобретаться так, чтобы ученик во всякое время мог разобраться и отдать себе отчет в том, что, собственно, он пишет на доске. Он должен ясно понимать, какое значение имеет черта, почему он цифру 4 пишет под чертою, откуда взялся знак умножения, почему этот знак пишется в числителе, почему рядом со знаком умножения пишется такая-то цифра и т. п. Лишь в том случае, если ученики приобрели себе не только навык в надлежащем записывании, но и умение отдавать себе полный отчет в производимых ими записях, учитель может повести учеников далее. Еще лучше, если подобным упражнениям в письменном обозначении результата, получающегося при отыскании части целого, предшествуют или, по крайней мере, сопутствуют изустные в следующем духе упражнения: *одна* четверть семи равна семи четвертям единицы, а *три* четверти семи в три раза *больше* одной их четверти, т. е. в три раза больше семи четвертей единицы, а потому равны *двадцати одной* четверти единицы. Здесь умышленно взяты дроби, не встречающиеся или, по меньшей мере, редко встречающиеся в жизни. На этих дробях резче, чем на дробях, часто встречающихся, ученик освоится с работою, которую, так сказать, должна совершить его рука, чтобы искомый результат был найден письменно.

§ 16. Процент от данного числа.

На этой же ступени уместно введение в обиход речи иностранного слова „процент" в том его смысле, по которому процент данного числа или процентом от данного числа называется одна сотая доля этого числа.

Это дает возможность делать вычисления, относящиеся до отыскания скольких угодно процентов от данного числа. Учитель при этом сначала должен брать такое число процентов, которое, будучи выражено в сотых долях, дает дробь, часто встречающуюся в жизни и легко сократимую, например: 50 процентов (половина), 25% (четверть), 75%, 20%, 10%, 15% и т. д. Далее он должен упражнять учеников в нахождении известного числа процентов непременно от чисел небольших, дабы вычисление, как таковое, для учеников не представляло затруднений. Вычисление по смыслу своему не должно вначале заслоняться этими затруднениями: найти 50% — восьми, 25% — шестнадцати, 12% — пятидесяти, 50% — двух, 1% — ста и т. д.

§ 17. Раздробление дробных именованных чисел.

К этой же ступени тяготеет раздробление дробных именованных чисел. При этом раздробление является преобразованием, для совершения которого требуется только некоторый ряд действий, из которых каждое известно ученику.[1] Полезны также упражнения, из которых ученики уяснят себе, что часть одного числа и некоторая часть другого — могут быть равны между собою.

Приложение к решению задач. Чтобы учащиеся быстро разбирались в том, что в данной задаче надо употребить именно *умножение* на дробь, а не два действия, надо параллельно с предложенной задачей, одновременно с ней или предварительно, предложить одну или более задач с тем же множимым, но с целым множителем, если по смыслу задачи это возможно.

§ 18. Нахождение части дроби.

После полного и своевременного усвоения учениками умения находить часть некоторого целого, надо перейти к усвоению ими способов отыскания части любой дроби. При этом не надо забывать самостоятельных работ над отысканием доли числа, т. е. над умножением на долю единицы. Здесь ученику придется приобрести навык, прежде всего в надлежащем записывании того ряда действий, которые сначала получат форму дроби. Члены этой дроби представляют собою каждый некоторое произведение двух чисел. Эта запись потом обращается в запись некоторой дроби с целым числителем и целым знаменателем. Сокращение дроби потребует некоторых разъяснений, притом довольно утомительных. Например, при отыскании пяти шестых дроби восемь пятнадцатых, мы получим результат:

---

[1] Например, сколько минут в $\frac{3}{4}$ часа? — Сколько граммов в $\frac{4}{5}$ *кг*? — Раздробить $\frac{51}{120}$ месяца в часы, и т. д.

$$\frac{5}{6} \text{ дроби } \frac{8}{15} \text{ равны } \frac{\overset{4}{8} \times \overset{1}{5}}{\underset{3}{15} \times \underset{3}{6}} = \frac{4}{9}.$$

Здесь действие умножения не произведено, а сделано сокращение. Это сокращение требует разъяснения, подобного тому, которое рекомендовалось выше (§ 8 этой же главы) для случая, впрочем, более ясного и простого.

Это разъяснение может исходить на этой ступени из соображений более общих: разделяя множимое 8 (в числителе) на 2, мы уменьшаем числитель в два раза; чтобы дробь не изменилась, разделим на 2 и множитель 6 в знаменателе. Тогда мы, вместо числа 8 в числителе, получим 4, а вместо числа 6 в знаменателе, получим 3, и т. д.

§ 19. Задачи на простое тройное правило.

Из этих упражнений некоторые представляют собою задачи, которые учителями и составителями задачников, обыкновенно, принимаются за задачи на так называемое „простое тройное правило“. Но это не только делу не вредит, а, напротив, представляет собою только один из лучших случаев для удовлетворения тому основному методическому началу, по которому логически-однородные учения, также и с точки зрения методической, не следует давать разрозненными, а, напротив, должно соединять во-едино. Поэтому самою разумною постановкою так называемых задач на тройное правило с прямо пропорциональными величинами было бы отнесение задач этого рода к занимающей нас ступени, а не в отдельную статью.

Нахождение части смешанного числа не представляет собою ничего особенно нового и требует от учеников только сознательности, которая является необходимым условием при усвоении всякого учения, и пользования здравым смыслом, исключающим рабское следование какому бы то ни было общему правилу, как бы оно просто ни было с точки зрения техники.

§ 20. Умножение на дробь.

Когда все предыдущее усвоено учениками достаточно хорошо, можно вернуться к вопросу о том, что для отыскания части любого числа существует еще одно название. Они знают, что когда требуется найти какую-либо одну долю какого-либо числа, то можно говорить, что это последнее число требуется умножить на данную долю единицы. Точно также они могут себе усвоить, что вместо того, чтобы говорить и писать, что требуется вычислить, чему равны $\frac{3}{7}$ пятнадцати, говорят: „15 помножить на $\frac{3}{7}$“, а пишут так: $15 \times \frac{3}{7}$. Когда же это написано, то вычисляют, чему равны $\frac{3}{7}$ пятнадцати, и результат этот называют произведением из 15 на $\frac{3}{7}$, и записывают после знака равенства. Само сабою разумеется, что недостаточно только *сообщить* ученикам об этом условии, об этом

„договоре". Необходимо их также поупражнять в этом направлении, т. е. поупражнять в переводе данного требования, относящегося до отыскания части целого, в требование, относящееся до умножения, и обратно. При этом начинать надо с частных случаев, на числах небольших и данных, а потом уже говорить *вообще* об умножении *всякого* числа на *всякое* дробное число. Полезно при этом записать на доске следующее: „если вычислить, чему равняется $\frac{3}{8}$ тридцати пяти, то в результате получится или $\frac{105}{8}$, или $13\frac{1}{8}$" — и затем показать, как это записывается вкратце без слов, с помощью знаков умножения и равенства и с помощью цифр:

$$35 \times \frac{3}{8} = \frac{105}{8} = 13\frac{1}{8}.$$

Тогда ученики поймут, как это условное обозначение нахождения части числа удобно. Еще лучше, если хотя несколько учеников сами попробуют записать на доске, а остальные — у себя в тетрадях, эти фразы и соответствующие им цифровые записи, пользуясь знаком умножения. О *правилах* умножения на дробь, конечно, здесь еще и речи быть не может. Ранее всего учениками должен быть вполне усвоен самый смысл, в котором говорится об умножении на дробное число. Вместо того, чтобы говорить и писать $35:8=\frac{35}{8}$ и $\frac{35}{8}\times 3=\frac{105}{8}$ пишут $35\times\frac{3}{8}=\frac{105}{8}$, и говорят: 35 *помножить* на $\frac{3}{8}$.

Поэтому весьма полезно, после проработки только-что охарактеризованного материала, предложить ученикам для самостоятельной работы ранее уже ими выполненные, но с другой точки зрения, упражнения. При этом им надо вменить в обязанность употребление при решении этих задач знака умножения. Кроме того, им надо предложить также такие упражнения, которые требуют от учеников соблюдения наименования произведения.

§ 21. Законы умножения.

Полезно, для целей образовательных, показать ученикам, что хотя мы словам „умножить" и „умножение" стали придавать *новое* значение, сравнительно с тем, какое им придается при целом множителе, отличающемся от нуля и от одной единицы, но все-таки основное свойство произведения, а именно переместимость его сомножителей остается в полной силе и для случая дробных сомножителей, и для нуля, и для единицы. Равным образом полезно вычислением убедиться в том, что и законы сочетательный и распределительный для умножения на дробь тоже справедливы. Но это допустимо только в случае, если учитель убежден в пользе этой экскурсии в области чистой логики умножения.

Учение о произведении нескольких сомножителей не представляет такого большого значения, чтобы ему необходимо было отвести отдельное место в полном курсе арифметики. Но если бы пришлось показать ученикам, что произведение нескольких дробных чисел не зависит от их порядка, то это потребует только полезных практических упражнений в умножении.

§ 22. Раздробление дробных именованных чисел.

Когда все это усвоено, можно взять несколько примеров на раздробление дробных именованных чисел.

Сколько минут в $\frac{7}{240}$ суток?

$$\frac{7}{240}\text{ суток} = 42\text{ мин.}$$

$$\overline{60\text{ мин.} \times 24 = 1\,440\text{ мин.}}$$

$$1\,440 \times \frac{7}{240} = \frac{1\,440 \cdot 7}{240} = 42.$$

Сколько миллиметров в $\frac{2}{125}$ *м*?

$$\frac{2}{125}\,\text{м} = 1\,000\,\text{мм} \times \frac{2}{125} = 16\,\text{мм}.$$

Здесь же полезны задачи на вычисление процентов.

§ 23. Правило умножения.

Когда ученики усвоили себе самый смысл умножения на дробь, ***смысл*** и *способ* производства этого действия, то можно перейти к так называемому *правилу* умножения дробей. Раз ученики умеют умножать дробь на дробь, целое число на дробь, дробь на целое, смешанное число на смешанное, смешанное на дробь и дробь на смешанное число, то они не затруднятся так же подметить и выразить правила, хотя сначала, может быть, и не особенно точным языком. Разница между этою постановкою дела и тою, которая практиковалась повсеместно еще не так давно, состоит в том, что теперь стараются сначала *научить* детей чему-нибудь, а потом уже заставляют их *добраться до правила*. Встарину же сначала ученики выучивали *правило* наизусть, а потом уже их учили производить действие согласно этому правилу и объясняли, откуда правило взялось.

Правил при умножении дробей можно, конечно, составить много, но это не нужно. Если условиться, договориться, что всякое целое число — дробь, числитель которой равен этому целому числу, а знаменатель равен единице, то можно составить общее правило для перемножения каких угодно двух целых или дробных чисел (смешанные числа при этом в счет не идут). Тогда правило это примет следующую форму: для перемножения каких угодно двух чисел надо перемножить числители, и это произведение сделать числителем, перемножить знаменатели и их произведение сделать знаменателем новой дроби, которая и будет произведением данных дробей.

Что касается умножения смешанных чисел, то наилучшим правилом этого умножения было бы правило, по которому ученик, если один из сомножителей — целое, должен произвести действие согласно самому смыслу умножения на целое число.

Если же оба числа — смешанные, то он должен непременно оба обратить в неправильные дроби.

Но слишком большое число правил вредно, а слишком общее правило — не целесообразно. В занимающем нас случае всего лучше составить три правила: одно для целого, другое для дробного и третье для смешанного *множителя*.

§ 24. Геометрическое значение умножения дробей.

Кроме образовательного значения, которого нельзя не признать за надлежащей постановкой вопроса об умножении на дробь в школьном курсе арифметики, эта постановка вопроса имеет значение практическое. Вычисление площади прямоугольника со сторонами, которые выражены дробными числами, находится в тесной связи с этим вопросом. (Рис. 6.) Но провести этот вопрос надо чисто лабораторным способом. Учащиеся должны сами построить прямоугольник, одна сторона которого равняется, например, трем четвертям дециметра,[1] а другая — трем пятым долям дециметра. Задача состоит в том, во-первых, чтобы узнать, какую площадь занимает этот прямоугольник, или (что то же) какую часть квадратного дециметра составляет площадь этого прямоугольника, и во-вторых, какое действие надо совершить для того, чтобы вычислить эту площадь. *Логически* свести его к нахождению части целого возможно, но утомительно и трудно, а потому удобнее обратиться к чертежу и к умножению дробей. Чертеж надо выполнять также на доске, но вместо дециметра надо взять, например, метр, вместо трех четвертей дециметра — три четверти метра, а вместо трех пятых дециметра — три пятых метра. Затем

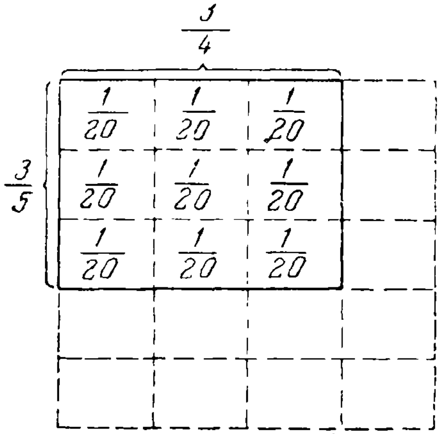


Рис. 6.

можно разделить полученный прямоугольник на части длиною в четверть дециметра (или в четверть метра), а шириною в пятую долю дециметра (или в пятую долю метра). Получим в таком случае новую фигуру, которая состоит из девяти равных частей. Из этих девяти частей каждая составляет некоторую долю квадрата, а вопрос только в том, какую именно долю *квадрата* представляет собою каждая часть нашей фигуры. Для этого стоит только дополнить чертеж до квадрата и сосчитать, сколько раз такая доля содержится в верхней полосе и сколько таких полос окажется во всем квадрате. Таких частей во всем квадрате будет двадцать, и площадь нашего прямоугольника равна девяти двадцатым площади всего квадрата. Выходит так как будто узнали три четверти трех пятых или, что то же, как будто мы три четверти помножили на три пятых. После достаточного количества упражнений этого рода выяснится, что площадь

[1] На рис. 6 сторона квадрата равна $\frac{1}{2}$ *дм.*

прямоугольника в том случае, когда основание и высота выражаются дробными или смешанными числами, можно вычислить, помножив основание на высоту.

§ 25. Условные знаменатели.

С точки зрения научной, „дробь“, числитель которой равен какому-либо натуральному числу, а знаменатель равен единице, есть только иное *обозначение* целого числа, равного числителю этой особенной дроби. Точно так же надо поставить этот вопрос и в учебном предмете. Дело в том, что никаким разъяснениям это условное обозначение не поддается, ибо знаменатель может выражать только число одинаковых долей, на которые единица разделена, а требование разделить на одну одинаковую часть нелепо. Еще опаснее трогать вопрос о дроби, знаменатель которой равен нулю: такой *дроби нет* и такого частного не может быть. Но дробь с знаменателем, равным единице, удобна при составлении общего правила перемножения двух рациональных чисел.

Умножение на правильную и неправильную дроби.

Когда надо обратить внимание учащихся на то, что произведение любого числа на *правильную* дробь всегда меньше множимого, — зависит от учителя. Лучше всего такая постановка дела, при которой сами учащиеся замечают это свойство умножения на правильную дробь. Если это не удается, надо к этому обратиться уже после того, как определение умножения на дробь основательно усвоено. После этого можно обратить внимание учащихся (путем вопросов и целесообразных вычислений) на то, что от умножения на неправильную дробь, равную единице, получается произведение, равное множимому, а от умножения на неправильную дробь, большую чем единица, получается произведение большее, чем множимое. Оставить это свойство без должного внимания нерассудительно, нецелесообразно и даже прямо недозволительно.

§ 26. Нахождение целого по известной доле его.

Когда таким образом вся работа, относящаяся до умножения дробей, учениками исполнена, то можно перейти к нахождению неизвестного целого по известной части его. При этом должно быть известно, как велика часть числа и какую именно часть целого она составляет. Особенных затруднений этот случай отыскания целого для учеников не представляет. Несмотря однако же на это, необходимо, чтобы количество этих упражнений было достаточно велико. Необходимо, чтобы ответы проверялись также с помощью деления и с помощью умножения на соответствующую долю единицы.

Дальнейшие упражнения должны по возможности исходить из наглядных представлений, так как в противном случае дети работою не станут интересоваться. Поэтому полезно начертить на доске прямую линию (черту) известной длины, обозначить черточками ее концы и заявить, что длина этой черты составляет одну четверть длины „вот этой веревочки“. При этом важно, чтобы веревочка была в руках учителя, и не только для проверки полученного результата, но и для должного воздействия на воображение детей. Нельзя не признать желательным, чтобы учитель предварительно наметил на доске нужные ему концы тех линий, которые он начертил, дабы проверка была возможна. Отыскание длины всей веревки, тесемки, ленты и т. п. для учеников весьма поучительно. Когда это сделано, можно начертить другую длину и заявить, что эта длина составляет *три* четверти длины другой веревки, причем слова „три четверти" надо произнести так, чтобы оказать должное воздействие на воображение учеников. Они должны понять, что нам в этом случае надо *обдумать*, как велика длина всей веревки в таком случае, и можно ли узнать *одну* четверть длины веревки, когда известны *три* четверти длины всей веревки? Таких упражнений надо проделать несколько, и тогда переход к отысканию всего числа (сначала целого), которого некоторая часть нам известна, не представит уже для воображения учеников никаких особенных затруднений. Наоборот, они доставят ученикам соразмерно с затраченным на это трудом, некоторое умственное удовлетворение.

Расположение вычислений при этом может быть следующее:

$$\frac{3}{4} \text{ неизвестного числа} = 216,$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad = \frac{216}{3}$$

$$\text{все неизвестное число} = \frac{216 \times 4}{3} = 288.$$

Задачи должны предлагаться, конечно, не только над отвлеченными числами, но и над числами именованными, относящимися, например, к стоимости, к расстоянию, к числу лет и т. п. Тогда уместны упражнения на вычисление всего неизвестного числа при условии, что известно, сколько процентов его составляет данное число. Здесь же уместны упражнения, требующие производства нескольких действий. Такова, например, задача: „от какого числа надо взять $\frac{3}{4}$ для того, чтобы полученное число равнялось трем четвертям суммы двух чисел, из которых первое составляет $\frac{4}{5}$ пятидесяти, а второе в 3 раза более первого". Если ученики не умеют разбираться в подобных задачах, то это значит, что учитель должен проработать с ними некоторые из этих задач во время урока. Полезно пользоваться буквенными обозначениями и составлять при этом целесообразные уравнения. Откладывать обозначение неизвестного числа буквою (например, буквою x) прямо недопустимо. Поэтому можно писать на этой ступени так:

$$\frac{3}{4}x = 216$$

$$\frac{1}{4}x = 72$$

$$x = 72 \times 4; \quad x = 288.$$

Задачи этого рода требуются многочисленные, притом вторая часть уравнения отнюдь не должна непременно делиться на числитель коэфициента при x.

§ 27. Переход к делению на отвлеченную дробь.

Когда навык в отыскании целого по данной его части и по отношению этой части к целому учениками приобретен, можно перейти к выяснению арифметического смысла этого вычисления, представляющего собою, как известно, не что иное как деление. Пусть нас спрашивают, как велико целое, и для этого указывают условие, по которому $\frac{3}{4}$ этого целого равняются, например, 17. Этим выражают только то, что некоторое число надо *помножить* на $\frac{3}{4}$ для того, чтобы в результате получить 17. Таким образом, неизвестным числом для нас является некоторое множимое, произведение которого на известный множитель нам известно. Эта логическая связь нашего вычисления с делением, при всей своей кажущейся тонкости, тем не менее вполне доступна ученикам.

Надо только все ее трудности неоднократно расчленить на ряд вопросов: а) Чтобы получить $\frac{3}{4}$ какого-либо числа, какое действие надо совершить над данным числом? (Умножить его на $\frac{3}{4}$.) б) Чтобы представить себе $\frac{5}{12}$ какого угодно числа, *можно себе представить*, что это неизвестное число помножено на $\frac{5}{12}$. в) Если нам предложена задача, что $\frac{3}{5}$ неизвестного числа равняются восемнадцати и что требуется найти это неизвестное число, то задачу эту можно истолковать каким образом? (Ее можно истолковать в том смысле, что неизвестное число помножено на $\frac{3}{5}$, и в результате получилось 18.) г) Что известно в этом случае и что неизвестно? (Известны множитель и произведение, а неизвестно множимое.) д) Какое действие надо совершить для отыскания неизвестного множимого, когда известны множитель и произведение? (Деление.) е) Что надо принять за делимое и что — за делитель? (За делимое надо принять произведение, а за делитель — множитель.) Наконец, ж) что получится от этого деления? (Неизвестное множимое.)

Конечно, только путем упражнений можно достигнуть того, чтобы ученики поняли и сумели отдать себе полный отчет в том, что всякая задача подобного рода может быть истолкована в одном и том же смысле, а именно, в таком, что неизвестное число помножено на некоторую отвлеченную дробь, и что в результате получилось некоторое известное число. Если переход к делению для учеников не вполне очевиден, то следует обратиться к задачам на целые числа. Числа эти не должны быть слишком малы, чтобы ученики не были в состоянии *угадать* результат и должны были бы на самом деле подумать о том действии, которое надо совершить для решения задачи.

Для этого пригодны, например, задачи следующего типа: если требуется отыскать число, которое надо помножить на 7, чтобы получить 182, то какое действие надо совершить для отыскания этого числа? Чтобы найти число, которое надо помножить на 17, чтобы получить 85, какое действие надо совершить над 85 и 17? и т. д. Отсюда уже переход к истолкованию задач такого рода: „$\frac{5}{7}$ задуманного числа равняются двум стам пятнадцати", — не затруднителен, и ученикам требуется только поработать над уяснением себе того, что в этом последнем случае множимое *неизвестно*, множитель равен пяти седьмым, а произведение — 215.

По усвоении намеченных точек зрения, ученики выясняют себе, что когда говорят об отыскании целого по части его и по известному отношению этой части к целому, то можно сказать, что число, выражающее часть, *надо* разделить на число, выражающее отношение части к целому. В таком случае искомое частное и будет равно задуманному неизвестному числу. При делении какого угодно числа на целое отвлеченное число делимое представляет собою целое, а частное — часть, при делении же на правильную дробь делимое представляет собою часть, а так называемое частное — целое. Скрывать это от учеников значит только увеличивать их недоумения по этому поводу. Чтобы они вполне уяснили себе сущность дела, они должны связать это с умножением и понять, что в обоих случаях по произведению двух чисел и множителю находят множимое. Но в первом случае целым является произведение, а во втором — множимое. Находить же это частное от разделения числа на отвлеченную правильную дробь ученики должны научиться на основании того условия, по которому известно, что такая-то часть этого целого равна такому-то числу. Правил здесь никаких не надо; надо только пользоваться строго логическими рассуждениями и теми умениями и представлениями из области умножения, которые ранее учениками приобретены. Указанные же только-что трудности вполне преодолимы и требуют от ученико и от учителя только должной настойчивости и целесообразного, усердного труда.

Когда обратить внимание учащихся на то, что при делении на дробь неправильную, равную единице, частное равно делимому, на дробь правильную — частное большее, чем делимое, и только в случае деления на дробь неправильную, большую чем единица, получается число меньшее, чем делимое, — зависит от учителя. Но на это обратить свое внимание учащиеся должны своевременно. Уступая общепринятому обычаю говорить о нахождении части целого и о нахождении целого по части его, автор этой книги эти термины снабжает словами „так называемое". Дело в том, что когда мы умножаем на неправильную дробь, мы вовсе не находим части множимого, а когда делим на неправильную дробь, мы не находим целого по части его, ибо в первом случае мы получаем произведение, не составляющее части множимого, а во втором не получаем частного, которое составляет целое по сравнению с делимым.

§ 28. Цель вышенамеченных указаний.

Цель всех сделанных выше указаний заключается не в том, чтобы избавить учеников от труда, — такой взгляд на методические приемы не заслуживает никакого сочувствия, ибо учение, дающееся без всякого труда, по меньшей мере, бесполезно для духовного развития учеников. Цель указанных выше приемов заключается в том, чтобы сделать труд учеников для них посильным, ибо непосильный умственный труд не только бесполезен, но даже прямо вреден. При этом надо помнить, что не сразу, по одному мановению руки учителя, ученики должны приобрести себе надлежащие точки зрения на тот или иной вопрос (в данном случае — на смысл нахождения целого по данной части его). Для этого необходимы многочисленные в этом направлении методические и, стало-быть, целесообразные работы. Только многочисленные упражнения этого рода дают ученикам возможность понять эту наиболее тонкую часть учения о дробях, т. е. оба действия (умножение и деление) над дробями и их взаимную связь.

Пока ученики ясно не поняли самой сущности условного значения умножения и деления на отвлеченную дробь, всякие правила, касающиеся производства этих действий, по самому существу своему, почти бесполезны. Они не избавляют учеников от бессознательного или, по меньшей мере, полусознательного отношения к усвояемым ими весьма серьезным и содержательным учениям арифметики.

§ 29. Деление смешанных чисел.

Что касается деления смешанных чисел, то здесь учеников, прежде всего, следует поупражнять в разных случаях деления смешанного числа на целое. Надо различать случаи, когда целая часть смешанного числа делится нацело без остатка на данный делитель и когда эта часть смешанного числа на делитель нацело без остатка не делится. Когда же делитель представляет собою смешанное число, то надобно во всяком случае это число обратить в неправильную дробь, и действие в этом случае должно совершить согласно смыслу деления на отвлеченную дробь

§ 30. Искомое число — множитель.

До общего правила деления дробей при отвлеченном делителе в разных случаях ученики еще не добрались. Это не только не вредно, но даже прямо полезно для лучшего уразумения сущности деления в том случае, когда делитель представляет собой отвлеченное число, т. е. когда искомым числом является множимое. В случае же, когда мы имеем дело с делением одного именованного числа на другое именованное и, вообще, когда искомым числом является множитель (будут ли данные числа оба целыми или дробями, или одно целым числом, а другое дробным и т. д.), ученикам приходится поглубже вникнуть в самую сущность деления на известные части. Здесь они уясняют себе сущность кратного сравнения одного числа с другим или, как говорят иногда, сущность *измерения* одного числа другим. Многочисленные упражнения должно посвятить исключительно этому, в высшей степени важному не только с теоретической, но и с практической точки зрения, случаю. Действие это можно признать даже более важным, чем действие деления на отвлеченную дробь, так как последнее действие в прямом его смысле реже требуется. Хотя мы, с точки зрения арифметической, и говорим о действии деления на отвлеченную дробь, но *задачи*, требующие этого деления, большею частью могут быть всегда разрешены на основании способов нахождения целого по части его.

Другое дело, когда нас спрашивают о том, какую часть смешанного числа $3\frac{3}{4}$ составляют $2\frac{5}{8}$, или когда нас интересует, какую часть двух с половиною метров составляют $1\frac{1}{2}$ метра. В этих исключительных случаях, требующих кратного сравнения некоторого именованного числа с известным (данным в виде другого именованного числа) числом, рассуждение, подобное тому, которое употребляется при нахождении целого по его части, уже не пригодно. Вот почему в учении о делении именованного числа на именованное, в случае дробных данных и в случае дробного отношения, надо начинать несколько издалека. Надо отыскать в пройденном уже учениками курсе арифметики те точки зрения, с помощью которых ученик может выработать себе более ясное представление о задачах интересующего нас содержания. Поэтому прежде всего предлагается простая задача, требующая разделения пятнадцати рублей на три рубля. вернее: задача, требующая кратного сравнения 15 руб. с тремя рублями, или еще точнее — требующая отыскания *отношения* пятнадцати рублей к трем рублям. Что это значит — разделить 15 руб. на 3 руб.? — Какое число мы получим в частном, именованное или отвлеченное? — Что представляют собою 15 руб. в этом случае: сумму, разность, или произведение двух чисел? — Какое число нам в этом нужно найти, — множимое или множитель? — Когда мы произведем это деление, что будет означать отвлеченное частное? — Вот тот ряд вопросов, который является той предварительной, известной ученикам, работою, с которой надо начать. для приведения учеников к представлению и понятию о кратном отношении одной дроби к другой. Далее идет вопрос о нахождении кратного отношения меньшего числа к большему (семи килограммов к пятнадцати килограммам), это отношение равно $\frac{7}{15}$, потому что 15 *кг* надо помножить на $\frac{7}{15}$, для того, чтобы получить 7 *кг*. Если бы этот переход оказался слишком быстрым, то можно взять отношения такого рода в которых делимое равно одной единице, например,

$$1\,кг : 4\,кг = \frac{1}{4}; \quad 1\,м : 8\,м = \frac{1}{8}, \text{ и т. д.}$$

— Что это значит разделить 1 *кг* на 4 *кг*, или 7 *кг* на 15 *кг* и т. д.? — Каким числом в этом случае будет частное, — именованным или отвлеченным? — Что это значит найти отношение одного числа к другому? — Как должно быть выражено делимое и делитель в этом случае: в одинаковых или разных единицах меры? — Чему равно отношение меньшего простого именованного числа к большему того же наименования: равно ли оно целому числу, или дроби? — Какой дроби это отношение равно: правильной или неправильной? — Всегда ли можно выразить отношение одного числа к другому в виде дроби? — Как можно смотреть на всякую отвлеченную дробь? Вот ряд тех вопросов, с помощью которых ученики могут быть приведены к уразумению смысла отвлеченной дроби, как числа, выражающего собою не только *часть* отвлеченной единицы. но также отношение одного числа к другому или одного значения величины к другому ее значению. Здесь же ученики встречаются с крайне интересным случаем арифметического рассуждения относительно того. на какое число надо помножить, например, семь килограммов, для того, чтобы получить один килограмм. Затем естественны вопросы: а) на какое число надо помножить 7 *кг*, чтобы получить $\frac{1}{4}$ *кг* и б) на какое число надо помножить 7 *кг*, чтобы получить $\frac{3}{4}$ *кг*. Здесь же можно показать, что для разделения, например, $\frac{5}{8}$ *г* на 15 *г*, надо $\frac{1}{15}$ помножить на $\frac{5}{8}$ или же $\frac{5}{8}$ помножить на отвлеченную дробь $\frac{1}{15}$, и что в этом случае действие совершается так, как если бы делили одно отвлеченное число на другое.

§ 31. Какой части одного числа равно другое.

Имеет ли учитель обыкновение прибегать к приемам рисования и черчения или не имеет, — ему надо привлечь учеников к решению вопроса о том, какой части одного числа равно другое, две конечные прямые, из которых каждая содержит некоторый отрезок целое число раз. Еще лучше брать две полосы, из которых одна состоит, например, из четырех одинаковых квадратов, а другая — из пяти таких же квадратов и т. п. (Рис. 7.)

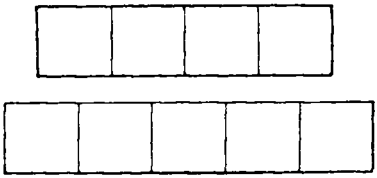


Рис. 7.

Какой части второй полосы равна первая? Очевидно, что этот вопрос будет разрешен таким образом: каждый квадрат первой (верхней) полосы *составляет* собою четверть этой полосы; каждый квадрат второй (нижней) полосы *составляет* собою одну пятую долю этой же полосы; каждый квадрат первой полосы *равен* одной пятой доле второй, а каждый квадрат второй *равен* одной четверти первой полосы. Вся первая полоса *равна* четырем пятым долям второй полосы; вся вторая полоса *равна* пяти четвертям первой. При этом полезно различать смысл слов: „равняется“ и „составляет“. При такой постановке вопроса можно обойтись и без высказанного действия деления.

§ 32. Отношение одной дроби к другой.

После этого можно перейти к технически трудному отысканию отношения одной дроби к другой, и лучше всего начинать с того важного случая, когда обе дроби суть одноименные дробные именованные числа. Упражнения можно начинать, например, с отыскания отношения трех четвертей килограмма к пяти девятым килограмма. Но если бы это оказалось для учеников слишком затруднительным по причине двух трудностей, подлежащих последовательному преодолеванию, то можно начать с упражнений таких двух родов:

$$\frac{3}{4}\,кг : 1\,кг; \quad \frac{5}{8}\,м : 1\,м; \quad \frac{5}{8}\,дм : 1\,дм$$

и

$$1\,кг : \frac{3}{4}\,кг; \quad 1\,м : \frac{5}{8}\,м; \quad 1\,дм : \frac{5}{8}\,дм \text{ и т. п.}$$

Здесь надо вычислить, *на какое отвлеченное число* надо помножить делитель для того, чтобы получить делимое. Благодаря этому, ученики смогут рассуждать, что

$$\frac{3}{4}\,кг : \frac{5}{9}\,кг = \frac{9 \times 3}{5 \times 4},$$

потому что $\frac{5}{9}$ *кг* надо помножить на $\frac{9}{5}$ для того, чтобы получить один килограмм. Для того же, чтобы получить $\frac{1}{4}$ *кг*, надо то же множимое $\left(\frac{5}{9}\,кг\right)$ помножить на дробь

$$\frac{9}{5 \times 4}.$$

А для того, чтобы получить три четверти килограмма, это множимое надо помножить на дробь, втрое большую, т. е. на дробь $\frac{9 \times 3}{5 \times 4}$. Для усвоения этого рассуждения необходимы, конечно, многочисленные упражнения в разрешении вопросов этого рода с помощью одних рассуждений, т. е. без всяких, хотя бы и самых простых, правил. Когда это сделано, можно найти отношения и частные в следующих случаях:

$$\frac{3}{4}\,кг : \frac{5}{7}\,кг \quad и \quad \frac{3}{4} \,\Big|\, \frac{5}{7}$$

$$\frac{8}{9}\,г : \frac{7}{8}\,г \quad и \quad \frac{8}{9} \,\Big|\, \frac{7}{8}$$

$$\frac{12}{25}\,г : \frac{3}{4}\,г \quad и \quad \frac{12}{25} \,\Big|\, \frac{3}{4} \quad и\ т.\ д.$$

Упражнения этого рода дадут возможность ученикам подметить, что при отыскании частного и при отыскании отношения двух чисел в окончательном результате числитель состоит из тех же сомножителей и знаменатель также представляет собою произведение некоторых двух, одинаковых для обоих случаев деления, сомножителей. Отсюда уже можно составить общее правило для отыскания одного числа к другому. Правило это гласит, примерно, так: для отыскания отношения одного именованного числа к другому того же рода надо оба эти числа привести к одному и тому же (общему) наименованию, а затем, отбросив в делимом и делителе наименования, делимое разделить на делитель.

§ 33. Важность этих упражнений.

Не подлежит сомнению, что упражнений этого рода в курсе арифметики обыкновенно делается слишком мало. Вопрос о связи между отысканием множимого и отысканием множителя по данному произведению того или другого числа на другой сомножитель остается, вследствие этого, не только не разрешенным, но даже иногда не затронутым. Насколько дурно такое невнимание к одному из важнейших вопросов практической арифметики отзывается на дальнейшем (при прохождении, например, пропорции и пропорционального деления) — известно всякому практику-учителю. Но наиболее ярким доказательством важности намеченных в этом параграфе точек зрения может служить следующее обстоятельство. Даже простые вопросы о том, какую часть 5-ти составляет 3, а также о том, какое действие надо совершить, чтобы разрешить этот вопрос, и о том, какое из чисел надо принять за делимое, и какое — за делитель, не могут быть разрешены без внимания к тому, что мы в этом случае должны отыскать множитель, на *который* надо помножить 5, чтобы получить 3, т. е. без внимания к тому, что намечено и развито выше в этом параграфе.

§ 34. Взаимно-обратные числа.

Только после того, как всеми учениками усвоен самый смысл производства деления обоего рода без относящихся сюда правил, можно перейти к выработке правила деления дробей. Но этой выработке крайне полезно предпослать еще выработку в уме учеников весьма важного представления о *взаимно-обратных* числах. Под этим именем известны два числа, произведение которых равно одной единице. Нахождение числа, на которое надо помножить данное целое число или дробь, чтобы в результате получить одну единицу, не встретит со стороны учеников затруднения после того, как они совершенно освоились со смыслом производства умножения и деления дробей. Этой работе надо посвятить упражнения, в которых двоеточию придается безразлично смысл знака деления того или другого рода и из которых ученики уяснят себе, что для разделения одного числа на другое делимое умножают на число, обратное делителю, или, как говорят короче, — „на обращенный делитель“. Полезны следующие упражнения, подготовляющие к усвоению правил деления.

$$8 \text{ р.} : 7 \text{ р.} = \frac{8}{7} \quad \text{и} \quad 8 \times \frac{1}{7} = \frac{8}{7}\cdot$$
$$\frac{3}{5} \text{ р.} : 4 \text{ р.} = \frac{3}{20} \quad \text{и} \quad \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$
$$7 \text{ р.} : \frac{1}{4} \text{ р.} = 28 \quad \text{и} \quad 7 \times 4 = 28;$$
$$7 \text{ р.} : \frac{3}{4} \text{ р.} = \frac{28}{3} \quad \text{и} \quad 7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3};$$
$$\frac{5}{7} \text{ р.} : \frac{3}{4} \text{ р.} = \frac{20}{21} \quad \text{и} \quad \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}\cdot$$

§ 35. Правила деления.

Общие правила деления и кратного сравнения не представляют на этой ступени ровно никаких логических трудностей и являются как бы выводом из всей, предшествовавшей этим правилам, сознательной работы учеников над вопросами умножения и деления. Надо выяснить, что число, обратное делителю (сначала только у числа отвлеченного есть обратное число!), называется *обращенным делителем*. Здесь же даются следующие два правила деления: 1) для отыскания *множимого*, по известному его произведению на известный множитель, надо делимое помножить на обращенный делитель; 2) для отыскания *отношения* одного именованного числа к другому того же наименования, надо прежде всего наименование отбросить, а затем полученное делимое помножить на обращенный делитель. Само собою разумеется, что при той подготовке, которую ученики получили благодаря упражнениям, предшествующим выводу правил, они, в случае кратного сравнения двух разноименных (но, конечно, однородных) именованных чисел, не затруднятся сообразить, что раньше всего надо одно из этих чисел заменить равным ему, но одноименным с другим из них, именованным числом.

§ 36. Делимое и делитель — именованные числа разного рода.

В случае разных наименований у делимого и делителя возможно *символическое* обозначение действия вроде, например, следующего:

$$\frac{3}{4}\ \textit{кг-м} : \frac{5}{6}\ \textit{кг} = \frac{3\ \textit{кг-м}}{4} : \frac{5\ \textit{кг}}{6}.$$

Приняв, что дробь, обратная делителю, в этом случае имеет числителем 6, а знаменателем 5 *кг*, получим, что

$$\frac{3}{4}\ \textit{кг-м} : \frac{5}{6}\ \textit{кг} = \frac{3\ \textit{кг-м}}{4} \times \frac{6}{5\ \textit{кг}},$$

или равно

$$\frac{3\ \textit{кг-м} \times 6}{4 \times 5\ \textit{кг}}.$$

„Сократив“ в числителе и в знаменателе наименование килограмма, получим, что

$$\frac{3}{4}\ \textit{кг-м} : \frac{5}{6}\ \textit{кг} = \frac{9}{10}\ \textit{м},$$

т. е., что если требуется совершить работу в $\frac{3}{4}$ *кг-м* и если необходимо эту работу совершить поднятием $\frac{5}{6}$ *кг* то, надо поднять этот груз на высоту $\frac{9}{10}$ *м*. Это совершенно согласно с основным понятием о работе силы. [1]

---

[1] Далее автор приводит пример раздробления именованного числа с помощью отыскания отношения. Чтобы показать, насколько обращение со старыми русскими мерами сложнее, чем с метрическими, ниже приводится пример такого раздробления в сокращенной, по сравнению с автором, записи.

Требуется раздробить $\frac{7}{400}$ пуда в золотники.

$$\frac{7}{400}\ \text{п.} = 67\frac{1}{5}\ \text{зол.}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \ 48$$

$$\frac{7}{400}\ \text{п.} : \frac{1}{40}\ \text{п.} = \frac{7 \cdot 40}{400} = \frac{7}{10};\ \frac{7}{10}\ \text{ф.} : \frac{1}{96}\ \text{ф.} = \frac{7 \cdot 96}{10} = \frac{336}{5} = 67\frac{1}{5}.$$

Если бы требовалось 0,0007 метра раздробить в миллиметры, то имели бы:

$$0{,}0007\ \textit{м} : 0{,}001\ \textit{м} = 0{,}7\ \textit{мм}.$$

(Прим. ред.)

§ 37. Увеличение и уменьшение членов дроби в разное число раз.

Для приведения в строгую и неразрывную систему учения об изменениях дробей во всех случаях увеличения или уменьшения ее членов в несколько раз полезно предварительно вернуться несколько назад, напомнив учащимся, как неполны их познания, когда они имеют дело только с целыми числами. Что случится, например, с произведением 36×4, если мы первое число уменьшим в 9 раз, а второе увеличим в 5 раз и т. п. После неособенно беглого рассмотрения подобных вопросов можно перейти к изменению дроби в том случае, когда числитель ее увеличен в некоторое целое число раз, а знаменатель увеличен в какое угодно другое целое число раз. Точно так же можно обратиться к сущности изменений, которые претерпевает дробь при уменьшении членов ее в различное число раз. Эти упражнения дают возможность поглубже вникнуть в сущность изменения дробей, в зависимости от любого увеличения или уменьшения ее членов в какое угодно число раз, — каковой вопрос не может быть вообще разрешен без умножения и деления на дробь.

Например, при увеличении числителя в 3 раза, а знаменателя в 7 раз дробь изменяется так, как будто мы ее помножили на $\frac{3}{7}$. Или: пусть числитель дроби делится нацело без остатка на 5, а знаменатель — нацело без остатка на 8; что случится с дробью, если мы эти деления совершим? Без учения об умножении или о делении дробей этот вопрос разрешен быть не может, а принимая во внимание то или другое действие, легко добраться до вывода, что эта дробь изменится так, как будто мы ее разделили на $\frac{5}{8}$, или помножили на $\frac{8}{5}$. Полезны в этом случае буквенные обозначения и введение функционального взгляда.

§ 38. Изменение одного из членов дроби на некоторое число.

Еще менее внимания обыкновенно обращают на увеличение и уменьшение членов дроби на одно и то же число, как будто это изменение принадлежит к числу арифметических тайн, непостижимых для учеников. Если бы такое невнимание к этому случаю изменения дроби имело своим последствием только сознание учеников, что в дроби то-то и то-то совершенно не поддается их полному уразумению, то эта беда еще невелика. Но, к сожалению, указанное выше невнимание приводит к тому, что ученики из числа мало интересующихся арифметикою не прочь считать, что от одновременного увеличения членов дроби на одно и то же число она не изменяется. В лучшем случае в уме их остается какая-то неясность, которая влияет вредно на всю совокупность их познаний в области дробей. Стоит для того, чтобы убедиться в этом, предложить ученикам вопрос, почему не приводят дробей к общему знаменателю с помощью прибавления к членам дроби каких-нибудь чисел. Лучше всего взять для этого две дроби со значительными членами, например, дроби:

$$\frac{117}{350} \text{ и } \frac{237}{360}.$$

Ученики (или, по крайней мере, большинство их) затрудняются объяснить, почему для приведения этих дробей к одному знаменателю нельзя хоть бы вычесть из членов второй дроби по 10.

Во избежание подобных явлений, необходимо предложить упражнения над теми простыми изменениями, которые претерпевает дробь при увеличении или уменьшении ее числителя на некоторое число, и более сложного соотношения в том случае, когда увеличению или уменьшению на некоторое число подвергается знаменатель. И в этом последнем случае можно не только вычислить, на сколько дробь уменьшится или увеличится, но составить довольно простое правило относительно того, во сколько раз дробь увеличится или уменьшится. Запоминать законы тех изменений, которые составляют содержание этих упражнений, нет никакой необходимости. Ученикам надо уяснить себе, что эти изменения можно вычислить и что их надо вычислять. Это знание служит к развитию вдумчивости и дополняет те несистематизированные сведения, которые обыкновенно даются в курсах арифметики относительно изменения дробей.

§ 39. Увеличение и уменьшение членов дроби на одно и то же число.

Немаловажно в том же отношении также изучение последствий одновременного увеличения или уменьшения обоих членов дроби на одно и то же число. Это изменение учениками обыкновенно понимается совершенно неправильно. Из двадцати учеников не только низшего учебного заведения, но даже среднего, девятнадцать склонны ответить, притом нисколько не подумавши, что дробь от одновременного увеличения или уменьшения членов ее на одно и то же число не изменится. А между тем, на самом деле дробь, *отличающаяся от единицы*, непременно в этом случае изменится, притом довольно значительно. Возьмем пример: дана дробь $\frac{7}{10}$; к числителю и знаменателю ее прибавим по три единицы, получим дробь $\frac{10}{13}$. Сравнение этих двух дробей по приведении их к общему знаменателю, или же с помощью действия вычитания и с помощью действия деления, покажет, что эти две дроби $\left(\frac{7}{10}\text{ и }\frac{10}{13}\right)$ вовсе не равны между собою. Причину этого неравенства очень легко выяснить ученикам, заставив их сообразить, сколько каких долей нехватает каждой из этих дробей до единицы. Они при этом постигнут, что в данном случае разность между числителем и знаменателем остается одна и та же, что эта разность и представляет собою число долей, не хватающих данной правильной дроби для того, чтобы быть равною одной единице.

Так, например, если дана дробь $\frac{9}{20}$, то, прибавив к числителю и к знаменателю ее хотя бы только по одной единице, мы получим новую дробь $\left(\frac{10}{21}\right)$, которой до одной единицы не будет хватать одиннадцати двадцать первых, а не одиннадцати двадцатых. Точно также можно разработать и уменьшение членов дроби на одно и то же число.

Но для того, чтобы поразить воображение учеников, надо взять непременно и примеры разительные. К числу таковых надо отнести половину и две трети, из которых последнюю дробь можно рассматривать как дробь, которой члены порознь больше членов одной половины на одну единицу. Не менее разительны $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$. Эти две дроби могут быть взяты и в обратном порядке для того, чтобы показать, что от вычитания из обоих членов дроби $\frac{3}{4}$ по две единицы получится значительно меньше, чем $\frac{3}{4}$, а именно — одна половина. В этом духе можно рассмотреть и неправильные дроби, из числа которых только равные одной единице не изменяются при одновременном увеличении или уменьшении членов на одно и то же число. Действительно: $\frac{5}{5}=\frac{7}{7}=\frac{15}{15}=\frac{16}{16}$, и т. п. Дробь же, которая больше единицы, от подобного изменения числителя и знаменателя изменяется более или менее значительно. Разительными в этом отношении примерами могут служить $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{4}$, из которых первая дробь больше единицы на одну половину, а вторая — только на одну четверть. Законы этих изменений, однако, отнюдь не должны быть усвояемы учениками наизусть. Равным образом не целесообразно было бы требовать от учеников, чтобы они непременно моментально отвечали на вопросы этого рода. В этих случаях большую пользу могут принести также буквенные обозначения.

Необходимо, чтобы ученики осторожно относились к этим вопросам. Они, во-первых, не должны утверждать, что дробь остается без перемены от одновременного увеличения или уменьшения ее членов на одно и то же число. Во-вторых, они твердо должны знать, что дроби меньшие и большие, чем единица, изменяются от подобного изменения числителя и знаменателя. Наконец, в-третьих, они должны уметь во всякое время сравнивать эти дроби с единицею, когда они имеют дело с дробями правильными (и с неправильными, заключающимися между единицею и двумя). В случае же, когда неправильная дробь больше 2, то ученики тоже должны знать, как им уяснить себе и вычислить занимающее их изменение.

§ 40. Учения об изменениях произведения и частного.

Благодаря предыдущим упражнениям, учения об изменениях произведения и частного можно дополнить и привести в надлежащую систему. Прежде всего появляется возможность вполне точно формулировать некоторые изменения произведения, которые в случаях, когда мы имеем дело только с целыми числами, приходится оставлять без внимания. Таковы изменения произведения, которые последнее претерпевает от одновременного увеличения одного из сомножителей в некоторое число раз и уменьшение другого из сомножителей в *какое угодно* другое число раз. Равным образом, учение об изменениях частного может быть освобождено от тех ограничений, которые в этом учении обусловливаются (сравни § 8, гл. II „Повторительного отдела" настоящей книги) тем, что не всегда вторичное деление при измененных членах может быть произведено нацело без остатка. Стоит только частному всегда придавать вид дроби, и все изменения частного или отношения двух чисел могут быть, с точки зрения умножения и деления, совершенно точно разработаны. Только внимательное изучение этих случаев может сделать ученика полным господином в деле правильного суждения о том, что случится с произведением или частным данных двух чисел при одновременных изменениях каждого из них в некоторое определенное число раз. Это — уже шаг к так называемому „функциональному мышлению".

§ 41. Процентные отношения.

Вычислению процентного отношения одного числа к другому должно предшествовать повторение значения слова „процент" хотя бы в следующем порядке:

Что называется процентом какого-либо числа? Что это значит: число составляет 5% другого числа? Что это значит, когда спрашивают. сколько процентов одного числа составляет другое? Если я узнал, что одно число $\frac{3}{4}$ другого, — что тогда означает вопрос, сколько процентов второго составляет первое? Как узнать, сколько сотых долей одного числа составляет другое, если известно, что оно составляет $\frac{2}{5}$? Как узнать, сколько процентов одного числа составляет другое, если известно, что первое составляет $\frac{2}{5}$ второго? и т. д.

Все рассуждения и все логические трудности вопроса сводятся к тому, что слово „процент" заменяет собою другие два слова „сотая доля". Для определения того, сколько процентов одного числа составляет некоторое другое, надо, стало-быть, найти *отношение второго числа к первому*, а затем — сколько раз одна сотая доля содержится в этом отношении. Еще проще можно сделать вычисление, выразив отношение второго числа к первому в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой. При решении некоторых задач ученики должны помнить, что во всяком числе содержится сто сотых этого числа, или сто процентов его и что если одна часть этого числа составляет, например, 76% всего числа, то другая его часть составляет 24%, а если одна часть некоторого числа составляет $2\frac{1}{2}\%$, то другая его часть составляет $97\frac{1}{2}\%$ того же числа и т. д. — Если бы усвоение этого представило для учеников какие-либо затруднения, то учителю в таком случае остается признать, что самое значение слова „процент" ученикам еще недостаточно ясно.

§ 42. Несколько замечаний о десятичных дробях.

По усвоении учениками четырех действий над обыкновенными дробями, можно перейти к упражнениям над теми из них, знаменатели которых равны какой-либо степени десяти, т. е. над дробями, имеющими вид обыкновенных, но со знаменателями: 10, 100, 1 000, 10 000..

(Дробей, выраженных в более мелких десятичных долях, брать не следует.) Упражнениями этого рода должны быть, если можно так выразиться, пересыпаемы на всех ступенях статьи о дробях все остальные упражнения над дробями. [1]

Здесь считаем прямо своим долгом обратить внимание учащих на то, что все упражнения над обыкновенными дробями, выраженными в десятичных долях (но не над десятичными дробями, обозначенными с помощью запятой!), крайне полезны именно тогда, когда проходится статья о дробях обыкновенных. Они полезны потому, что: 1) все преобразования и действия над такими дробями очень легки по причине легкости действия над единицами высших разрядов; 2) эти упражнения хорошо подготовляют к изучению статьи о десятичных дробях; 3) эта последняя статья, в таком случае, не появляется в курсе без всякой мотивировки.

Насколько просты и прозрачны вычисления над обыкновенными дробями, выраженными в десятичных долях, и насколько эти вычисления для учеников могут быть сделаны поучительными, можно видеть из следующего рода вычислений.

(I) $27\frac{39}{1\,000}=\frac{27\,039}{1\,000}$; здесь, при обращении смешанного числа в неправильную дробь, умножение на 1 000 не требует никаких отдельных вычислений.

(II) $\frac{47\,603}{1\,000}=47\frac{603}{1\,000}$; то же справедливо здесь, при исключении целого числа из неправильной дроби, где деление не требует никаких вычислений.

(III) $\frac{\overset{10}{21}}{1\,000}+\frac{\overset{100}{17}}{100}+\frac{\overset{1}{713}}{10\,000}+\frac{\overset{1\,000}{3}}{10}=\frac{5\,623}{10\,000}$; здесь нахождение наименьшего кратного и вычисление числителей, приведенных к одному знаменателю дробей, не требуют никаких письменных вычислений. Вычислений требует только сложение этих числителей.

(IV) $\frac{\overset{10}{47}}{100}-\frac{\overset{1}{119}}{1\,000}=\frac{470-119}{1\,000}=\frac{351}{1\,000}$; выводы — те же, что выше.

(V) $\frac{17}{100}\times\frac{13}{100}=\frac{17\times 13}{10\,000}$; вычислений требует только отыскание числителя произведения.

(VI) $\frac{17}{1\,000}:\frac{234}{100\,000}=\frac{17\times 100\,000}{243\times 1\,000}=\frac{1\,700}{243}$; здесь сокращение на некоторую единицу высшего разряда не представляет никаких затруднений.

Упражнения эти представляют собою, как замечено выше, наилучший материал для истинно-методического перехода от дробей обыкновенных к десятичным. Они полезны также для надлежащих упражнений в таких вычислениях над обыкновенными дробями, где сущность действия не заслоняется слишком многочисленными и слишком громоздкими вспомогательными вычислениями.

---

[1] По официальным дореволюционным программам десятичные дроби проходились уже после систематического прохождения курса простых дробей. Пожелание С. И. Шохор-Троцкого о более раннем ознакомлении с десятичными дробями осуществилось в послереволюционных программах. *(Прим. ред.)*

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ.

§ 1. Два курса десятичных дробей.

При такой постановке курса десятичных дробей, которая соответствует требованиям современной педагогики и методики математики, десятичные дроби должны проходиться, по крайней мере, два раза: 1) рядом с дробями обыкновенными и 2) дополнительно — с целью систематизации и дополнений.

Мера, могущая значительно поднять успешность занятий учеников десятичными дробями, состоит в том, чтобы курс обыкновенных дробей не чуждался дробей десятичных, обозначенных без помощи запятой, и чтобы изучению десятичных дробей, обозначенных с помощью запятой, предшествовали четыре действия над десятичными обыкновенными дробями, обозначенными без ее помощи. Кроме того, полезно, в особенности вначале, смотреть на десятичные дроби, обозначенные при помощи запятой, как на *дроби*, а не как на развитие и применение идеи обозначения целых чисел к дробям. Без обыкновенных дробей вроде половины, четверти, трех четвертей и т. п., конечно, обойтись невозможно. Потому нецелесообразно *начинать* курс с дробей десятичных.

§ 2. Обозначение десятичных дробей.

Усвоение обозначения десятичных дробей, вытекающего из свойств десятичной системы счисления, для учеников хотя и доступно, но сначала недостаточно целесообразно. Для них, прежде всего, важна не теоретическая сторона обозначения десятичных дробей, а наглядное представление, лежащее в основе этих теоретических соображений. Пусть ученики даже в состоянии уяснить себе, что цифры, находящиеся после запятой, по смыслу своему, являются только результатом распространения десятичной системы на случай десятичных долей. Но пользы от этого для учеников получится очень мало, потому что такое распространение не находится в пределах ученических интересов и стремлений. Строго говоря, ученику безразлично, можно ли или нельзя требования десятичной системы распространить далее единиц первого разряда вправо. Поэтому, гораздо целесообразнее подойти к обозначению десятичных дробей, начав с обозначения десятых долей с помощью запятой и без знаменателя. Ученики могут очень быстро уразуметь, что дроби $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ и т. д. до дроби $\frac{9}{10}$ включительно принято обозначать иначе, а именно так: 0,1; 0,2; 0,3 и т. д. Это должно быть сделано на одной из ранних ступеней. Они могут понять, что при этом получается выигрыш в записи, требующей только двух цифр и одной запятой, и что запись эта занимает только одну строку и не требует знака дроби. Они знают, что обозначение тех же десятых долей с помощью числителя и знаменателя требует непременно трех цифр, черты между обозначением числителя и знаменателя и двух строчек для своего обозначения. Ученикам полезно при этом указать, как подобные записи читаются и что обозначают записи 3,5; 6,7; 18,9 и т. п. Выгода подобных записей состоит в том, что они не требуют более мелких цифр, и что прочтение подобных смешанных чисел не представляет ровно никаких трудностей. Надо только помнить, что обозначают цифры после запятой и что — цифры, предшествующие запятой.

§ 3. Значение второй цифры после запятой.

От десятых долей можно перейти ко второй цифре после запятой. Для этого можно написать, например, число 273,5 и уяснить себе, что обозначает цифра, стоящая направо от цифры единиц после запятой. Тогда цифра единиц является как бы границею, направо от которой стоят десятые доли, а налево — десятки. Тут же полезно научить учеников сразу читать запись 273,5 также в виде неправильной дроби: две тысячи семьсот тридцать пять десятых.

В классе можно повести дело, например, так: — Что обозначает цифра, стоящая налево от десятков, т. е. цифра 2? (Она обозначает число сотен.) — А направо от цифры десятых есть ли какая-нибудь цифра? (Такой цифры нет.) — Но если бы она была, что она *могла* бы обозначать? И т. д.

Пусть написаны цифры: 273,58. Из этих пяти цифр ученику известно значение только первых четырех, считая от левой руки к правой, значение же цифры 8 ему неизвестно. Очень легко ученикам пойти на соглашение и принять раз-навсегда условие, по которому третья цифра вправо, *считая цифру единиц за первую*, обозначает сотые доли, в то время как третья цифра влево, считая цифру единиц за первую, обозначает сотни. Чтобы ученики вполне это себе усвоили, учитель должен остерегаться на этой ступени только одного. Он должен читать сам и должен учеников учить такому чтению, чтобы сначала назывались бы только целые, потом — только десятые доли отдельно, сотые же доли — опять отдельно, а не вместе с десятыми. Таким образом, запись 0,48 сначала не должна, как это дозволительно лишь впоследствии, читаться так: „нуль целых и 48 сотых“, а непременно так: „нуль целых, четыре десятых и восемь сотых“. Не вредно, а даже скорее полезно сначала брать только такие числа, в которых число целых — непременно трехзначное число, с тем, чтобы потом перейти к смешанным числам, целая часть которых — двухзначное и однозначное числа, наконец — к правильным дробям, в которых число десятых отличается от нуля.

Когда подобных упражнений проделано достаточно, причем число десятых долей отличалось от нуля, то можно перейти к установлению смысла слов „после запятой“. Говорят: „после запятой“, когда речь идет о цифрах, стоящих *направо* от запятой. Первою цифрою после запятой при этом считается вторая цифра, если за первую принимать цифру единиц. Далее можно ввести еще одну цифру, третью цифру после запятой, которая будет уже четвертою, если цифру единиц принять за первую. Очень легко в таком случае ученикам себе усвоить, что третья цифра после запятой обозначает тысячные. Далее надо усвоить себе, что если десятых долей в данном числе нет, тогда рядом с запятой направо надо поставить нуль, что если нет сотых долей, то вторая цифра после запятой будет также нуль и т. д. Когда все это усвоено, ученикам надо постигнуть, что как вместо того, чтобы написать: $7\,000 + 600 + 30 + 5$, пишут 7 635, так, вместо того, чтобы писать $5 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1\,000}$, пишут 5,398.

Следует избегать поспешности в переходе то этого взгляда на десятичную дробь, как на сумму десятичных долей *разных* разрядов, — к тому взгляду, по которому она может быть рассматриваема, как сумма одинаковых долей, т. е. не надо стремиться к тому, чтобы ученики по возможности скорее научились читать дроби 0,716 или дробь 0,817 так, как принято читать эти дроби на дальнейших ступенях. Пусть учащиеся хорошенько освоятся с таким способом чтения подобных записей, по которому запись эта обозначает три слагаемых: семь десятых, одну сотую и шесть тысячных долей единицы.

Следующие цифры после запятой.

Поупражнявшись в замене записей, сделанных с помощью запятой, записями, сделанными с помощью сложения обыкновенных дробей, можно сделать сближение записи десятичной дроби с записью целого числа. Для этого можно написать: 274,563 и разобрать, что именно обозначает каждая цифра, считая от правой руки к левой. Также надо разобрать значение записи 111,111. При этом полезно оценивать местное значение каждой цифры, начиная не только от левой руки к правой, но и от правой руки к левой, и показывая на доске мелом каждую занимающую нас цифру. Полезно также охарактеризовать единицу каждого разряда по отношению к единице следующего, говоря, например, так: „единица меньше десятка в десять раз, десяток меньше сотни в десять раз и т. д. Потом можно написать следующий ряд цифр: 11,1111 и разобрать, что обозначает каждая цифра, считая от левой руки к правой. Надо довести учеников до понимания того, что первая слева цифра этой записи обозначает десяток, вторая — простую единицу, третья — десятую долю (в десять раз меньшую, чем простая единица), вторая после запятой цифра — сотую, т. е. *единицу* в 10 раз меньшую, чем одна десятая и т. д. С этой же точки зрения можно рассматривать целые числа 7 384 и 28 865 и числа смешанные 31 542, 314 159 и т. д. Надо учеников приучить не только к тому, чтобы они верно умели определять значение каждой цифры, но также к тому, чтобы они сознательно умели сказать, что любая цифра обозначает *единицы*, из которых *каждая* в 10 раз меньше каждой из единиц, обозначаемых предшествующею цифрою, и в 10 раз *больше* каждой из единиц, обозначаемых следующею за ней направо цифрою. Это в конце концов приведет учеников прежде всего к столь необходимому полному знанию значения каждой из цифр после запятой. Все эти упражнения, сближая одну сторону обозначения десятичных долей с нумерацией целых чисел, в то же время дают возможность строгого следования незыблемому педагогическому правилу — „по одной трудности зараз!“

§ 4. Иное чтение записи.

Следующею ступенью к выяснению ученикам того подобия и сходства, которые существуют между письменным обозначением целых чисел и письменным обозначением десятичных дробей с помощью запятой, служит то чтение дробей, при котором произносятся весь числитель и весь знаменатель данной дроби. Дробь в этом случае уже не рассматривается как последовательная сумма некоторого числа десятых, некоторого числа сотых, некоторого числа тысячных долей и т. д. Когда у нас есть запись 376,742, мы первые *три* цифры, конечно, можем прочесть так: три *сотни*, семь десятков и шесть единиц, но можем прочесть и, чаще всего, читаем это иначе: „триста семьдесят шесть". Ученики должны сначала уяснить себе, какая, собственно, разница между этими двумя способами чтения целых многозначных чисел. В одном случае мы читаем числа поразрядно, в другом же — мы единицы разных разрядов обращаем в единицы самого низшего наименования. Когда дано смешанное число 376,742, то ученики умеют читать стоящие после запятой цифры только таким образом: 7 десятых, 4 сотых и 2 тысячных. Но нельзя ли обратить эти слагаемые в доли низшего наименования, т. е. все в тысячные доли? Такое своевременное сложение подобных дробей для учеников не представляет никакого затруднения. Но их надо хорошенько поупражнять в подобном сложении и в замене суммы различных десятичных долей одною дробью, выраженною в наименьших долях, какие существуют в нашем случае. Правила давать не следует, а надобно позаботиться только о том, чтобы ученики сами добрались до него. Для таковой цели упражнения сначала должны делаться только над такими десятичными дробями, где после запятой две или три цифры. Сначала пусть ученики научатся определять быстро суммы вроде следующих:

$$\frac{8}{10}+\frac{7}{100}=\frac{87}{100},\quad \frac{9}{10}+\frac{3}{100}=\frac{93}{100},\quad \frac{7}{10}+\frac{6}{100}+\frac{9}{1\,000}=\frac{769}{1\,000}\quad \text{и т. д.}$$

Потом можно перейти и к десятичной дроби, в которой после запятой более трех цифр, но не более шести, а затем уяснить себе всю трудность чтения этих дробей. Необходимо также не забыть десятичных дробей, в которых нет тех или иных десятичных долей, вроде, например, следующих:

$$\frac{0}{10}+\frac{7}{100}+\frac{0}{1\,000}+\frac{6}{10\,000}.$$

Надлежащее чтение десятичных дробей должно дать о десятичной дроби понятие, как о дроби со своим числителем и своим знаменателем, а не только как о ряде слагаемых, представленных в виде различных десятичных долей, идущих в порядке убывания.

§ 5. Определение десятичной дроби.

Здесь же уместно дать надлежащее определение, если оно не было дано ранее, что надо разуметь под терминами „десятичная дробь" и „десятичное число". Можно, конечно, считать десятичными всякие дроби, независимо от способа их обозначения, в которых знаменатели равны какой-либо десятичной единице высшего разряда, т. е. можно считать десятичными и дроби: $\frac{817}{1\,000}$, $\frac{319}{10\,000}$ и т. д. и дроби: 0,817 и 0,0319 и т. д. Но в таком случае получится некоторая непоследовательность в терминологии. Например, когда говорят *об обращении* данной десятичной дроби 0,79 в *обыкновенную*, то под этим разумеют, что вместо записи 0,79 мы хотим взять запись $\frac{79}{100}$. Отсюда вытекает, что удобнее считать запись 0,79 записью десятичной дроби, а запись $\frac{79}{100}$ — равной ей обыкновенной дроби.

Когда говорят о десятичной дроби или о действиях над десятичными дробями, то при этом также имеют в виду непременно дроби, обозначенные без знаменателя и с помощью запятой. Поэтому десятичною дробью удобнее, повторяем, называть только такую дробь, знаменатель которой равен единице высшего разряда и которая записана именно с помощью запятой, т. е. без цифрового обозначения ее знаменателя. Такой взгляд на десятичную дробь, конечно, гораздо удобнее принятого во многих учебниках.[1] Последние ограничиваются указанием на то, каков знаменатель дроби, но не принимают во внимание того, каков способ *письменного* обозначения этих дробей. Под десятичным числом надо разуметь: 1) всякое целое число, 2) всякую правильную десятичную дробь и 3) всякое смешанное число, дробная часть которого представляет собою десятичную дробь. Во избежание неточностей речи можно говорить о целом десятичном числе, о правильной десятичной дроби, о смешанном десятичном числе. Многие называют десятичной дробью также всякое смешанное десятичное число, но это не заслуживает подражания.

§ 6. Число нулей в знаменателе.

Когда чтение десятичных дробей, в которых после запятой не более шести цифр (дроби с бо̀льшим числом цифр после запятой к тому же весьма редко встречаются в жизни), усвоено, можно перейти к наблюдению над тем, сколько нулей в знаменателе обыкновенной дроби, в которую мы обращаем десятичную, когда читаем ее цифры не поразрядно. Легко заметить, что если после запятой одна цифра, то мы имеем дело с десятыми, если две — с сотыми, если три — с тысячными и т. д. Отсюда уже легко перейти к закону числа нулей в письменном обозначении знаменателя обыкновенной дроби, которою мы заменяем данную десятичную. После должного количества упражнений в этом направлении, можно перейти и к быстрому прочтению десятичных дробей, в которых после запятой не более шести цифр. Но, во всяком случае, требовать от учеников непременно мгновенного прочтения десятичной дроби, в которой более трех цифр после запятой, не только не целесообразно, но даже прямо нерассудительно. Важна не быстрота прочтения данной дроби со многими цифрами после запятой, будь все цифры значащими или же нет. Важно только то, чтобы ученики умели твердо разбираться в подобных обозначениях, притом делали бы это вполне правильно и сознательно.

Само собою разумеется, что упражнение *в чтении* десятичных дробей, записанных самим учителем и товарищами, на первых порах должно строго отделяться от упражнений *в записывании* продиктованных учителем и товарищами десятичных дробей. Те и другие упражнения представ-

[1] Из новых руководств, например, у А. Киселева, И. Попова, В. Боярчука, Н. Чулицкого и др. *(Прим. ред.)*

ляют каждое свои трудности, и соединять несколько трудностей в один момент обучения, конечно, было бы неразумно даже и на этой, довольно высокой, ступени обучения. Если учитель желает, чтобы ученики прочли записанную таким образом дробь 0,0061783, то они могут сначала переписать эту дробь иначе, а именно так: 0,006 178 3, или даже так:

$$\frac{61\,783}{10\,000\,000}.$$

Если же учитель желает, чтобы ученики верно и без сомнений написали продиктованную дробь, то он может продиктовать ее так: нуль целых, нуль сотых (нуль десятых в этом случае сам собою разумеется) и 61 783 десятимиллионных. Из упражнений учеников в письме под диктовку десятичных дробей с особенно многочисленными цифрами после запятой, обучение не извлекает никакой пользы.

§ 7. Приписывание нулей справа.

Прежде всего надо всех детей научить сознательному и быстрому раздроблению десятичных чисел вообще и десятичных дробей в частности в ближайшие, низшие десятичные доли: десятых в сотые и тысячные, сотых — в тысячные и десятитысячные и т. д. При этом следует показать, что это раздробление, когда дробь обозначена в виде обыкновенной, сводится к присоединению одного или нескольких нулей к записи каждого из членов дроби. Когда же дробь или смешанное десятичное число обозначены в виде десятичной, т. е. с помощью запятой, то это раздробление сводится, очевидно, к присоединению справа к этой записи только одного или нескольких нулей. При этом величина дроби, конечно, не изменяется. Причина, по которой дробь при этом по величине своей не изменяется, может быть объясняема двояко. С присоединением нуля справа, в 10 раз увеличится как числитель, так и знаменатель десятичной дроби. Полезно отметить также, что от присоединения нулей справа обозначения десятичной дроби не изменится прежнее значение ни одной из ее цифр, а также не прибавится и не убавится ни одной доли.

§ 8. Записывание десятичных дробей.

Когда ученики научились *читать*, их легко научить и *записыванию* десятичных дробей под диктовку. Но надо остерегаться одной привычки, к которой обыкновенно пристрастны начинающие учителя и которою особенно страдали учителя встарину. Мы говорим о пристрастии, если можно так выразиться, к изловлению учеников в неумении писать десятичные дроби под диктовку. В лучшем случае оно требует упражнения их в написании по возможности неестественных и редко встречающихся десятичных дробей. Например, нуль целых и 17 стотысячных или нуль целых и 4 стомиллионных и т. д. Такая постановка дела, конечно, не отвечает методическим требованиям. Гораздо лучше начать с последовательного обозначения десятичных дробей с одной цифрою после запятой, с двумя и тремя цифрами после запятой. Затем можно перейти и к обозначению тысячных долей, где вся трудность сводится к тому, чтобы у ученика возникло и укрепилось сознание, что при обозначении тысячных долей необходимо, чтобы после запятой были три цифры. Само собой разумеется при этом, что и обучение обозначению десятичных дробей с двумя и с тремя цифрами после запятой должно начинаться с дробей, в которых все три цифры значащие. Далее можно перейти к обозначению дробей, в которых одна или две цифры — нули.

Ученикам можно сначала дозволять записывание в стороне как числителя, так даже и знаменателя дроби, подлежащей записи, с помощью запятой. Иногда учеников затрудняет быстрое соображение относительно того, сколько нулей в обозначении знаменателей, притом словесно выраженных порядковым именем числительным. Ошибаются те учителя, которые с самого начала требуют от учеников и верного и быстрого обозначения десятичных дробей под более или менее быструю диктовку учителя. Эти трудности необходимо разделить: сначала надо стремиться только к тому, чтобы ученики *правильно* записывали десятичные дроби, притом только часто встречающиеся, с небольшим числом цифр после запятой. Только впоследствии можно требовать и того, чтобы ученики выработали себе навык в обозначении долей десятитысячных, стотысячных и т. д.

§ 9. Приведение десятичных дробей к общему знаменателю.

Приведение десятичных дробей к общему знаменателю затронуто нами выше и не представляет собою сколько-нибудь трудного, по содержанию своему, учения. Оно даже не требует особенно многочисленных упражнений, если все предыдущее усвоено основательно.

§ 10. Сравнение десятичных дробей.

Суждение о том, какая из десятичных дробей больше по величине своей, несмотря на простоту того умозаключения, которое приводит к правильному об этой величине суждению, иногда ученикам дается не сразу. Они иногда склонны считать ту десятичную дробь больше, в письменном обозначении которой больше цифр после запятой. Во избежание этого, лучше всего начинать упражнения этого рода с дробей, обозначающих только десятые доли, потом с дробей, из которых одна обозначает десятые, а другая — десятые и сотые доли и т. д. Очень полезно при этом сравнение таких дробей, как например: 0,87 164 701 и 0,872 или 0,96 и 0,178 996 949.

§ 11. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, 100, 1 000 и т. д. раз.

Дальнейшее раскрытие свойств десятичных дробей переходит обыкновенно к увеличению и уменьшению десятичной дроби в число раз, выражаемое единицей любого высшего разряда. Строго говоря, было бы гораздо целесообразнее начинать не с увеличения и уменьшения десятичных дробей в 10, 100 и 1 000 и т. д. раз, а со сложения и вычитания десятичных дробей. Только что упомянутые увеличение и уменьшение скорее относятся к действиям умножения и деления десятичных дробей на некоторое целое число. Кто не желает отступать от установившегося обычай, тот может заняться упомянутыми выше увеличением и уменьшением дроби.[1]

Но, во всяком случае, весьма важное учение об изменении десятичных дробей в 10, 100, 1 000 и т. д. раз надо начинать, конечно, с простейших дробей, а именно с десятых. При этом надо опираться на то свойство умножения дробей на целое число, по которому *от умножения дроби на число, равное ее знаменателю, в результате получается числитель множимой дроби*. Точно так же можно рассматривать и увеличение в 100 раз десятичной дроби, в которой только две цифры после запятой, увеличение десятичной дроби, в которой три цифры после запятой, в 1 000 раз, и т. д. Затем можно перейти к увеличению смешанных чисел, в которых одна цифра после запятой, в 10 раз, к увеличению смешанных чисел, в которых после запятой две цифры, в 100 раз и т. д. При этом сразу говорить о так называемом „перенесении запятой“ совершенно не для чего. Когда это усвоено, можно перейти к увеличению в 10 раз дроби, в которой две цифры после запятой. При этом рассуждение о том, что при увеличении подобной дроби в 10 раз единицы будто бы „обращаются“ в десятки, десятые доли — в единицы, а сотые — в десятые, для учеников на первых порах совершенно бесполезно. Это — *вывод*, к которому они придут *после* того, как научатся находить дроби в 10 раз большие, чем заданные им. Это отнюдь не основание, которым ученики могли бы пользоваться для того, чтобы разобраться в том, что получится от увеличения данной дроби в 10 раз. При этом не только не надо избегать знака умножения, а наоборот — необходимо им пользоваться по возможности широко и свободно. Не скрывать надо от учеников, что увеличение в несколько раз есть умножение, а напротив — всегда их поддерживать в этом убеждении.

Небезынтересен при этом ряд следующих вопросов: Как увеличить десятичную дробь (например, 0,75) в 10 раз? — Приписать нуль справа? — Но от этого дробь не изменится. — Помножить числитель дроби, т. е. 75, на 10? — Но тогда получится 0,750; а в этой дроби и знаменатель увеличился в 10 раз. Напишем-ка нашу дробь в виде обыкновенной $\frac{75}{100}$ и запишем, что эту дробь требуется помножить на 10, т. е. запишем $\frac{75}{100} \times 10$. Произведем это действие. — И что же мы замечаем? — Мы видим, что $\frac{75}{100} \times 10 = \frac{75}{10}$ и что, стало-быть, $0{,}75 \times 10 = 7{,}5$.

Проделав таким же образом еще несколько примеров, ученики *сами* делают вывод, что от увеличения правильной десятичной дроби или смешанного десятичного числа в 10 раз получается число с теми же, что и в данной дроби, цифрами. Только нуля не оказывается перед первою цифрою, которая стояла после запятой в правильной десятичной дроби, а запятая во всяком случае оказывается после той цифры, которая стояла раньше после запятой. Выходит так, что запятая как будто „перенесена“ через одну цифру вправо.

---

[1] В новейшей литературе по начальной арифметике вопрос об увеличении и уменьшении десятичной дроби в 10, 100 и т. д. раз рассматривается большею частью после сложения и вычитания, т. е. в связи с умножением и делением десятичных дробей. *(Прим. ред.)*

§ 12. Перемещение запятой и его причины.

Когда ученики освоились со случаями увеличения дроби, в которой одна, две или более цифр после запятой, в 10 раз, можно перейти к вопросу о том, *от чего зависит* такое перемещение запятой. Для этого можно обратиться к какой-либо дроби, хотя бы с тремя цифрами после запятой. Пусть ее требуется увеличить в 10 раз. Сделаем это, рассматривая десятичную дробь, как сумму, и сведя увеличение этой суммы к увеличению каждого слагаемого в 10 раз. Пусть, например, надо дробь 0,875 увеличить в 10 раз. Рассуждаем так:

$$\frac{8}{10} \times 10 = 8; \quad \frac{7}{100} \times 10 = \frac{7}{10}, \text{ а } \frac{5}{1\,000} \times 10 = \frac{5}{100},$$

т. е. вместо дроби 0,875 получится смешанное число 8,75. — Что обозначала раньше эта цифра 8? — А теперь? — Что обозначала раньше цифра 7? — А теперь? — Что обозначала раньше цифра 5? — А теперь? — А нуль куда девался? (Нуль остался на своем месте, но никто не пишет 08, а пишут просто 8.)

Когда это разработано в достаточном числе целесообразных примеров, ученики вполне уяснят себе увеличение десятичных дробей или смешанных десятичных чисел в 10 раз. Надо избегать зачеркивания запятой, так как это делает запись непрозрачною и недостаточно аккуратною. Гораздо лучше всякий раз писать:

$$0{,}875 \times 10 = 8{,}75 \text{ или } 0{,}017 \times 100 = 1{,}7 \text{ и т. п.}$$

Когда это усвоено, полезно обратиться к тому, относится ли правило увеличения десятичной дроби в 10 раз также к тому случаю, когда мы увеличиваем в 10 раз такую десятичную дробь, в которой только одна цифра после запятой. „Перенесение запятой“ вправо в этом случае не имеет того прямого значения, как в случае увеличения в 10 раз многозначной десятичной дроби с несколькими цифрами после запятой.

Когда, например, дана дробь 0,3 и ее надо увеличить в 10 раз, то надо себе представить это дело так: можно ли эту дробь написать следующим образом: 0,300? (Конечно, можно.) — Можно ли для увеличения дроби в 10 раз перенести в этой записи запятую на одну цифру вправо? (Можно.) — Что тогда получится? (Получится 3,00, т. е. 3 целых и никаких десятых, никаких сотых долей, никаких тысячных.) Пишут это просто так — 3. — Стало-быть, если дана дробь с одной цифрою после запятой, то от увеличения этой дроби в 10 раз запятая исчезнет. Но можно сказать, что и в этом случае запятая как бы „перенесена“ на одну цифру вправо, хотя на самом деле запятой в этом случае не пишут. То же справедливо относительно увеличения десятичной дроби с двумя цифрами после запятой в 100 раз, с тремя знаками — в 1 000 раз и т. д.

Перенесение запятой.

В таких случаях *говорят*, что мы переносим вправо запятую на две, на три цифры. На самом же деле в этом случае запятая просто пропадает. Возможность присоединения нулей к последней цифре и к любому целому числу, если его отделить от этих двух нулей запятою, оказывает впоследствии большую услугу. Особенно это важно, когда говорят об увеличении дроби, в которой одна цифра после запятой, не в 10 раз, а в 100, 1 000 раз, или когда говорят об увеличении дроби, в которой две цифры после запятой, не в 100, а в 1 000, 10 000 и т. д. раз, и когда говорят о перенесении запятой вправо в целом числе. Исходить при изучении этих увеличений из общего правила о перенесении запятой, конечно, не для чего. Если требуется увеличить 0,76 в 1 000 раз, то при решении этого вопроса надо сначала обратиться к обыкновенной дроби $\frac{76}{100}$. При этом надо рассмотреть полученный результат с той точки зрения, что у нас было 0,76, а получился такой результат, как если бы мы дробь 0,760 помножили на 1 000, и запятая была перенесена на три цифры вправо. Проделав достаточное количество подобных упражнений, можно добиться от учеников, чтобы они поняли, что́ это значит: „перенести на четыре цифры вправо запятую“, — притом для всяческих записей целого, дробного или смешанного десятичного числа. Они должны постигнуть, что для перенесения запятой вправо на такое число цифр, которое больше числа цифр после запятой, надо предварительно приписать справа к дроби столько нулей, сколько их недостает для того, чтобы всех цифр после запятой стало столько, на сколько цифр надо перенести запятую вправо.

§ 13. Уменьшение в 10, 100, 1 000 и т. д. раз.

Уменьшение десятичной дроби в 10, 100, 1 000 и т. д. раз также должно исходить из действия над обыкновенными дробями. Начать эту работу можно с дробей, выраженных в десятых долях. Сначала можно написать результаты уменьшения в 10 раз данных дробей следующим образом:

$$\frac{3}{10}:10=\frac{3}{100};\quad \frac{7}{10}:10=\frac{7}{100};\quad \frac{9}{10}:10=\frac{9}{100}\ \text{и т. д.}$$

Затем можно перейти к обозначениям с помощью запятой:

$$0{,}3:10=0{,}03;\quad 0{,}7:10=0{,}07\ \text{и т. д.}$$

Вывод правила только тогда будет полезен, если ученики представят себе, что в записи любого числа, будь оно целое или десятичная дробь, можно *слева* приписать сколько угодно нулей, нимало не изменив его значения. Может быть еще лучше начать уменьшение дробей в 10 раз со случая, когда дано смешанное число, целая часть которого обозначена двумя цифрами, т. е. когда требуется произвести следующее действие:

$$37{,}5:10;\quad 87{,}9:10;\quad 36{,}9:10\ \text{и т. п.}$$

Производить это деление надо, сначала обратив смешанное число в неправильную дробь:

$$\frac{37{,}5:10=3{,}75.}{\frac{375}{10}:10=\frac{375}{100}=3\frac{75}{100}.}$$

Когда это усвоено, можно обратиться к рассмотрению делимого как суммы единиц разных разрядов, от разделения которых на 10 получится некоторое новое десятичное число, в записи которого запятая окажется как бы перенесенною на одну цифру влево.

Рассмотрение вышеосвещенных изменений десятичных чисел с точки зрения нумерации может только венчать все рассуждения о дробях. Дело в том, что нумерация целых чисел не нуждается в запятой. Исторически десятичные дроби возникли значительно позже, чем десятичная нумерация. Если вычисление требуется сделать изустно, то рядом с заданным и записанным числом, отделив последнее точкою с запятой, или под ним (смотря по тому, что удобнее и целесообразнее), надо записать искомый результат, так сказать, не прикасаясь к записи данного числа, ибо всякое перечеркивание знаков и цифр только приучает детей к неаккуратности в записях.

§ 14. Сложение десятичных дробей.

Прежде чем приступить к сложению десятичных дробей, надо с учениками вспомнить, как складываются целые многозначные числа, как складываются обыкновенные дроби и как надо понимать сложение дробей со знаменателями, равными единице высшего разряда, но изображенными без помощи запятой, а в виде дробей обыкновенных. Проделав несколько примеров, ученики придут к убеждению, что сложение дробей, знаменатели которых представляют собою единицы разных высших разрядов, не представляет собою дела, сколько-нибудь трудного. Они поймут также, что производить таким образом сложение только более или менее хлопотно. Однако мысль о том, что складывать десятичные дроби можно совершенно так, как складываются целые многозначные числа, сама собою в голову ученикам не придет. Они поэтому должны проделать достаточное для того число целесообразных упражнений в сложении правильных десятичных дробей и смешанных десятичных чисел, обозначенных сначала в виде десятичных дробей и обращенных для сложения в дроби обыкновенные с десятичными знаменателями. Что подобные упражнения весьма полезны, в том не может быть никакого сомнения. Поэтому, особенно торопиться с усвоением учениками „правил" сложения десятичных дробей не следует. Еще меньше оснований торопиться в деле отыскания учениками этого правила.

Если вывод правила дается ученикам со слишком большим трудом, то это доказывает, что примеры выбраны не вполне целесообразно. Сначала следует заняться сложением десятичных дробей, в которых после запятой непременно одно и то же число цифр. Затем, как бы невзначай, надо подобрать пример, в котором одно из слагаемых содержит, после запятой, одной или двумя цифрами больше, чем все остальные. Далее надо взять слагаемые, из которых одно содержит после запятой одною цифрою меньше, чем сколько их в каждом из остальных. Только после подобных упражнений над такими примерами, можно перейти к примерам, в которых два или три слагаемых отличаются от остальных числом цифр после запятой. Когда это проработано, можно перейти к указаниям относительно того, что сложение дробей (с знаменателями 10, 100 и т. п.), обозначаемых без помощи запятой, чрезвычайно хлопотно и что надо бы изобрести какой-либо другой способ сложения подобных дробей. Для нахождения этого способа следует помнить, что десятые, сотые, тысячные и т. п. доли обладают теми же свойствами, что единицы любого разряда в целых числах. А именно: каждая из поименованных долей в 10 раз меньше единицы ближайшего высшего разряда и в 10 раз больше единицы ближайшего низшего разряда. В очень скором времени ученики уяснят себе, что можно и полезно записать все слагаемые одно под другим по возможности аккуратно так, чтобы все единицы первого разряда были записаны в один отвесный столбец, запятые, равным образом, стояли тоже в одном столбце, все десятые доли были также записаны в один столбец и т. д. При этом сначала учитель обязан требовать от учеников самого полного отчета в том, что они пишут, что складывают, что получают в результате, что записывают, что „замечают" или сохраняют „в уме", и что присоединяют к единицам следующих разрядов. Впоследствии ученики, конечно, доберутся сами до правила и до быстрого выполнения сложения десятичных дробей. При сложении десятичных дробей не для чего уравнивать числа их цифр справа. Все дело сводится только к надлежащей записи слагаемых, а не к снабжению записей ни к чему не ведущими нулями.

§ 15. Вычитание десятичных дробей.

Вычитанию десятичных дробей, конечно, тоже можно научиться, заменив сначала эти дроби равными им обыкновенными и приведя эти последние к общему знаменателю. После небольшого количества упражнений в этом направлении, ученики, — в особенности, если начать дело с вычитания дробей с одинаковым числом цифр после запятой, — скоро научатся производить эти вычисления, не обращая десятичных дробей в обыкновенные. Полезно при этом методически различать три случая: а) упражнения в вычитании дробей, в которых число цифр после запятой одинаково в уменьшаемом и вычитаемом, б) вычитание в том случае, когда вычитаемое содержит после запятой меньше цифр, чем уменьшаемое, и наконец, в) вычитание таких дробей, когда число цифр после запятой в вычитаемом больше числа цифр после запятой в уменьшаемом. Более всего учителю надо остерегаться усвоения учениками одного только механизма вычисления без понимания сущности дела. Для достижения этого понимания каждому ученику надо только сделать на каждое вычисление по одному, по два примера с полным рассуждением. Кроме того, ученики и на этой ступени должны дойти до уяснения себе размеров тех услуг, которые оказывает нам самый *способ* обозначения десятичных дробей, не обращенных в обыкновенные, т. е. они должны понять, что отсутствие записей знаменателя в письменном обозначении десятичной дроби и запятая, служащая для отделения целого числа от долей, представляют собою не помеху, а истинное благодеяние для производства действия. Ученики должны понять, что арифметика и ее способы вычисления избавляют от целой массы трудностей и, во всяком случае, от излишних и крайне утомительных вычислений.

При удовлетворительном составе класса можно, не обращаясь сначала к обыкновенным дробям, сразу поставить дело на почву производства вычитания над дробями десятичными. Но тогда полезно соблюсти следующую последовательность целесообразных упражнений: сначала надо брать дроби с одинаковым числом цифр после запятой, выбранных притом так, чтобы каждая цифра уменьшаемого обозначала число, не меньшее обозначаемого соответственною цифрою вычитаемого; далее надо взять примеры, в которых одна (крайняя справа) цифра уменьшаемого обозначает число, меньшее обозначаемого соответственною цифрою вычитаемого; потом — любые примеры с одинаковым числом цифр в уменьшаемом и вычитаемом; затем — примеры, где в уменьшаемом больше цифр после запятой, чем в вычитаемом; наконец, примеры, где в вычитаемом после запятой более цифр, чем в уменьшаемом. Приведение дробей к общему знаменателю, притом только в самом начале, уместно лишь в случаях этого последнего рода.

§ 16. Умножение десятичных дробей.

Усвоение письменного умножения десятичных дробей полезнее всего начинать с умножения этих дробей на однозначное число. Затем наиболее полезно перейти к умножению десятичных дробей на 10, 100, 1 000 и т. д. на целое многозначное число и, далее, к делению на 10, 100, 1 000 и т. д., т. е. (что одно и то же) к умножению десятичной дроби на 0,1, на 0,01, на 0,001 и т. д. Закончить надо умножением на десятичную дробь. При этом весьма поучительным будет и для учителя и для учеников то место, которое занимает в материале на умножение производство деления на 10, на 100, на 1 000 и т. д. Это место совершенно подобно тому, какое занимает деление в учении об умножении на дробь. Но во всяком случае (даже когда учение об увеличении и уменьшении десятичных дробей в 10, 100, 1 000 и т. д. раз предшествует в курсе учениям о четырех действиях) приходится своевременно повторить, хотя бы вкратце (но не путем изложения, а путем выспрашивания учеников), увеличение и уменьшение десятичных дробей в 10, 100, 1 000 и т. д. раз. Начать можно, как это замечено выше, с умножения десятичной дроби на однозначное число, причем надо исходить из самого смысла этого умножения, как действия, которое требует сложения нескольких одинаковых слагаемых, с помощью таблицы умножения. Ученики должны понять, что умножить десятичную дробь на целое число можно: во-первых, умножив обыкновенную дробь, в которую надо обратить данную десятичную, на данное целое однозначное число, причем сокращать обыкновенную дробь, в которую мы обратили множимое, отнюдь не следует, так как это сокращение только еще больше затянуло бы работу; и, во-вторых, не обращая десятичной дроби в обыкновенную, а пользуясь только таблицею умножения и принимая во внимание разряд каждой цифры множимого. Например, умножая десятичную дробь 0,769 на 4, можно говорить: четырежды 9 *тысячных* 36 *тысячных*, 6 тысячных пишем, а 3 сотых замечаем и т. д. Впоследствии ученики, как и при умножении целого многозначного числа на однозначное, могут не говорить о том, какие именно единицы они записывают и какие — „замечают“, а говорить только о том, сколько они записывают и сколько замечают. В конце концов, они вполне свободно доберутся до того правила, по которому умножить десятичную дробь на однозначное число очень легко, если множимое умножить на множитель, не обращая внимания на запятую, — с тем, чтобы в полученном произведении отделить от правой руки к левой столько цифр, сколько их во множимом после запятой. Не надо только запятую зачеркивать, так как подобное зачеркивание ведет лишь к неаккуратному исполнению письменных работ.

§ 17. Умножение десятичной дроби на целое многозначное число.

Когда все предыдущее усвоено учениками, можно перейти к умножению десятичной дроби на целое многозначное число, выполнив несколько примеров на такое умножение. Можно при этом сначала прибегать к обращению этой десятичной дроби в обыкновенную и сводить умножение десятичной дроби к умножению дроби обыкновенной. Но при этом должно выяснить ученикам вред сокращения полученной записи, так как подобное сокращение, как ученики в этом должны убедиться на опыте, только усложняет дело. Проработав несколько примеров в этом направлении, ученики сами отмечают, что сначала надо числитель правильной дроби или неправильной, получившейся после обращения множимого в обыкновенную дробь, помножить на данный множитель. А затем, по получении этого произведения, в нем надо запятою отделить от правой руки к левой столько цифр, сколько их находится после запятой, в письменном обозначении множимого. Расположение вычислений в этом последнем случае может быть следующее:

$$\begin{array}{r} \underline{0{,}789 \times 369 = 291{,}141} \\ 7101\,^{1} \\ 284040 \end{array}$$

При непременном желании сводить всегда дело к закону зависимости произведения от величины множимого, можно практиковать и такое расположение вычисления:

$$\begin{array}{r} \underline{0{,}789 \times 369 = 291{,}141} \\ 789 \times 369 = 291\,141 \\ 7101 \\ 284040 \end{array}$$

При этом в записи под первою чертою множимое взято в 1 000 раз большее того, которое дано, а потому и полученное произведение (291 141) во столько же раз больше искомого и т. д.

Во всяком случае, правило не надо давать и даже выводить до тех пор, пока ученики сами не вполне освоились с приемом вычисления. При этом безразлично, основано ли оно на предварительных упражнениях над дробями обыкновенными, получаемыми от данных десятичных дробей, или же — на рассуждениях относительно вспомогательного множимого. Дозволять ученикам зачеркивание запятой (каковое зачеркивание, к сожалению, очень часто замечается на практике) отнюдь не следует и в этом случае, по причинам, не раз выше отмеченным. Для придания правилу умножения большей краткости, цифры после запятой

[1] 7 101 произведение 789 на 9, а 284 040 — произведение 7 101 на 40 (ср. стр. 76 этой книги).

в десятичных дробях обыкновенно называются „десятичными знаками". С этим термином, не содержащим в себе по существу ничего трудного, лучше детей ознакомить до перехода к умножению десятичных дробей на десятичные же. Умножение целого числа на десятичную дробь можно поставить не только на точку зрения дозволительности перемещения сомножителей, но также и на почву вспомогательного множителя, который получается после того, как в данном множителе отброшена запятая.

§ 18. Умножение десятичной дроби на десятичную.

Ввести учеников в трудности умножения десятичной дроби на десятичную же можно лучше всего, прибегнув к обращению этих десятичных дробей в обыкновенные. Таких примеров можно с учениками проделать немного. Таким образом будет соблюдено то основное начало обучения, по которому надо итти всегда от известного к неизвестному, а не прямо обращаться к неизвестному ученикам и к так называемому „объяснению" учителя. Расположение вычисления в этом случае не представляет собою ничего затруднительного. Но если ученикам стали совершенно ясны сущность и выгоды умножения десятичной дроби на десятичную же и зависимость числа знаков в записи произведения от числа нулей в обоих знаменателях, то можно перейти также к выводу и формулировке правила. Учитель может пожелать, по получении учениками совершенно ясных представлений об умножении десятичных дробей на основании обыкновенных (конечно, не сокращенных), даже дать правило и вывод его в зависимости от законов изменения произведения. Тогда лучше всего обратиться к такому расположению вычислений, при котором только множитель заменяется новым вспомогательным множителем, полученным из данного после того, как в данном отброшена запятая. В этом случае, как это уже известно учащимся, не надо обращать никакого внимания на запятую во множимом, пока мы производим умножение. О ней надо вспомнить после того, как все произведения найдены, от сложения их уже получилось полное произведение. Расположение вычислений, поэтому, вначале может быть следующее:

$$\underline{7{,}678 \times 0{,}5634 = 4{,}325\ 785\ 2}$$

Напишу след.: $\underline{7{,}678 \times 5634 = 43\ 257{,}852}$

Произведу действие:
```
38390
 46068
  23034
   30712
```

В этом произведении для получения искомого надо перенести запятую влево на *четыре* цифры.

Когда вспомогательное произведение получено, над ним можно произвести те же рассуждения, какие производились ранее при умножении десятичной дроби на целое число. Тогда правило умножения десятичной дроби на десятичную же, ранее постигнутое на основании обращения десятичных дробей в обыкновенные, можно составить на основании примеров, предварительно разрешенных обоими способами. Полезно при этом также проверить это правило для разных случаев: а) когда один из сомножителей — целое число, а другой — правильная десятичная дробь или смешанное десятичное число; б) когда оба сомножителя — десятичные дроби правильные, или один из них правильная дробь, а другой — смешанное десятичное число; в) наконец, когда оба сомножителя — смешанные десятичные числа. При этом нечего бояться слишком большой затраты времени на рассмотрение разных случаев, ибо упражнений в вычислениях, надо, все равно, сделать довольно много. Внесение необходимого порядка в эти упражнения не только не увеличивает, а даже уменьшает количество бесполезно затрачиваемых на них времени и труда. Опираться при выводе „правила" умножения десятичной дроби на десятичную на правила изменения произведения не следует по двум причинам. Во-первых, эти последние правила выведены (притом с большими трудностями) для целых чисел; во-вторых, *число* цифр в записи произведения, подлежащих отделению от правой руки к левой, слишком неявным для учащихся образом зависит от правил увеличения произведения. При умножении нецелых десятичных чисел надо пользоваться, как и при умножении чисел целых, „индивидуальностью" сомножителей. Так, например, умножение 8,4 на 0,25 должно быть заменено разделением 8,4 на четыре одинаковые части; при умножении на 37,5 должно воспользоваться умножением на 375, основанным на том, что 375 равняются тремстам, сложенным с $\frac{1}{4}$ трехсот, и т. п. Заканчиваться самостоятельные упражнения в умножении должны рядом задач с условиями.

Правило умножения. Что касается самого правила умножения десятичных дробей, то лучше всего это дело ставить так: для умножения дробного десятичного числа на дробное десятичное число произведение числителей разделить на произведения знаменателей, если же один или оба сомножителя — смешанные числа, то смешанные числа обратить в неправильную дробь. Выгоды подобного правила следующие: а) оно кратко; б) оно не отделяет учения о десятичных дробях от учения о дробях обыкновенных китайскою стеною громоздкого и довольно неуклюжего правила; в) оно обнимает как письменное, так *и изустное вычисление*; г) *оно побуждает* учеников всегда соображать и понимать сущность дела, не ограничиваясь правилом внешним; наконец, д) оно избавляет учеников от необходимости помнить ряд слов, заставляя их зато усвоить (что гораздо важнее) известный ход мыслей и ряд рассуждений. Вопрос о числе цифр произведения после запятой может быть исчерпан следующим образом: в произведении двух десятичных чисел после запятой столько же цифр, сколько их после запятых в обоих сомножителях. Это обстоятельство относится не до *производства* действия умножения, а до цифровой записи произведения.

§ 19. Другой способ расположения вычислений.

Лагранж (великий французский математик, род. в 1736, ум. в. 1813 г.) в одной из лекций, прочитанных им в Нормальной школе, приводя пример умножения числа 437,25 на 27,34, предлагает следующее расположение вычислений: подпишем данный множитель под множимое так, чтобы целые единицы первого разряда множителя были записаны под последнею цифрою множимого. Кроме того, умножение начинаем с наивысшей цифры множителя, и низшую цифру произведения записываем под соответствующей цифрой множителя. Тогда очевидно, что запятая в произведении должна находиться в одном столбце с запятою множимого. Обращаем особенное внимание читателя на этот способ умножения десятичной дроби на десятичную. Преимущества этого способа громадны: он требует только правильной записи и весьма удобен для приближенного вычисления, так как при этом способе весьма легко увидеть — какие цифры частных произведений не подлежат определению при требуемой степени точности.

$$\begin{array}{r} 437{,}25 \\ \times\ 27{,}34 \\ \hline 8745{,}0 \\ 3060{,}75 \\ 131{,}175 \\ 17{,}4900 \\ \hline 11954{,}4150 \end{array}$$

В случае, если оба десятичных числа — дроби правильные, в одном из них (где это удобнее) можно перенести запятую на столько знаков вправо, чтобы получилось число смешанное. В другом же, во избежание поправок в полученном таким образом произведении, в таком случае надо перенести запятую влево на столько же знаков. Например, пусть требуется умножить 0,3758 на 0,255. Перенеся запятую во множителе вправо, а во множимом — влево на один знак и записав оба числа надлежащим образом (т. е. единицы множителя под последнею цифрою множимого), получим в первом частном произведении 0,07516, а во всем произведении 0,095 829 0. При этом запятые вовсе не отбрасывались.

$$\begin{array}{r} 0{,}03758 \\ \times\ 2{,}55 \\ \hline 0{,}07516 \\ 18790 \\ 18790 \\ \hline 0{,}0958290 \end{array}$$

Можно, впрочем, изменений в дробях не производить, а располагать вычисления и следующим образом:

$$\begin{array}{r} 0{,}3758 \\ \times\ 0{,}255 \\ \hline 0{,}07516 \\ 18790 \\ 18790 \\ \hline 0{,}0958290 \end{array}$$

Объяснение же причин подобной записи легко и просто. Учащиеся (по крайней мере, вначале) должны отдавать себе отчет в том, что от умножения (в нашем случае — десятитысячных долей на десятые) должны получиться стотысячные доли, и что их цифры надо написать не под десятичными долями множимого, а под его стотысячными, что, далее, тысячные доли множимого, от умножения их на десятые доли множителя, должны дать десятитысячные доли произведения, и цифры их надо подписать под цифру десятитысячных долей множимого, и т. д. Тогда все дело усвоения умножения дробей, помимо выгод намеченного только что способа расположения вычислений, будет лишено обычных трудностей. Последние ныне приходится преодолевать учащимся только по вине той зависимости, в которую правила умножения ставят производство его от изменений произведения, в случае одновременного увеличения сомножителей в известное число раз.

§ 20. Деление десятичной дроби на целое число.

Учение о делении десятичных дробей должно быть построено на том, что сначала надо научить сознательному делению десятичных дробей на всякое целое число. Сюда можно приурочить понятие о том, что не всегда частное можно выразить в виде конечной десятичной дроби, и о том, что в таком случае точное частное можно выразить только в виде дроби обыкновенной или же приближенно в виде десятичного числа.

Далее, обычный способ выражения частного в виде десятичной дроби, примененный сначала только к делению десятичной дроби или смешанного десятичного числа на целое, можно распространить на случай деления одного целого числа на другое, если деление это не совершается нацело без остатка. И здесь надо показать, что есть случаи, дающие конечную десятичную дробь в частном, и случаи, такой дроби в частном не дающие (например, 7 : 18). Не мешает проработать много таких примеров.

Для полноты методической проработки деления десятичной дроби на целое число полезно предпослать этому делению немногочисленные упражнения в делении многозначного числа на однозначное. Надо связать деление десятичной дроби на целое число с делением многозначного числа на целое, когда все дело сводится к последовательному отысканию ряда цифр, начиная с единиц наивысшего разряда и переходя к следующим разрядам шаг-за-шагом. С этой же точки зрения надобно посмотреть и на деление десятичной дроби с одним десятичным знаком, с двумя и более десятичными знаками после запятой на целое число. Но при этом сначала следует выбирать такие случаи, когда полное частное не требует обращения единиц наивысшего наименования делимого в единицы следующего низшего разряда. Поэтому полезно сначала удовлетвориться примерами следующего рода: 8,6428 : 2, или 9,69093 : 3 и т. п. Потом можно перейти от одной трудности к другой, т. е. к такому делению, которое хотя и кончится, но потребует обращения одной или нескольких единиц наиболее низшего в делимом разряда в единицы следующих разрядов, например, 7,6543 : 2, или 8,54 : 5 и т. п. При этом сначала должны быть предложены такие примеры, чтобы в частном было одною цифрою больше после запятой, чем в делимом, затем можно брать и такие примеры, в которых в частном двумя десятичными знаками больше, чем в делимом, и т. д. Это полезно делать, во-первых, для того, чтобы при этом каждый раз прибавлялась только одна трудность, и, во-вторых, для того, чтобы ученики получили верное представление о возможности конечного деления. Этой возможности они не постигают, если сразу предложить задачу, в которой число цифр в частном значительно больше числа цифр в делимом или, что еще того хуже, такую задачу, в которой делению никогда не будет конца. К этому последнему случаю надо обратиться после всего.

Совершенно нецелесообразен и совершенно механичен тот способ производства деления десятичной дроби на целое число, который требует приведения делимого и делителя к общему знаменателю и отбрасывания запятой в полученных числах. Этот способ неудобен в двух отношениях: а) он иногда требует излишних нулей, и б) он с самого начала лишает производство деления его арифметического смысла и изящества.

Расположение вычислений при делении десятичных дробей должно быть вполне естественно и подобно расположению вычислений при делении целых чисел. Вдаваться в подробности относительно того, когда именно частное выражается в виде конечной десятичной дроби и когда оно в виде конечной десятичной дроби не выражается, — на этой ступени, конечно, не следует. Но хорошо, если ученики усвоят себе (конечно, из примеров) ту примету, что если делитель равен двум, четырем, восьми, пяти, шестнадцати, двадцати пяти и т. п., то частное выразится конечною десятичною дробью. Причин же этого явления ученикам *разъяснять* решительно не для чего: они понятны. Условное значение многоточия при неоконченном делении должно быть не только мимоходом сообщено ученикам, но также и выяснено, и умалчивать о появлении этого нового условного арифметического знака отнюдь не следует. Напротив, ученикам и себе должно ставить в большую вину, если кто, не совершив почему-либо деления до конца, опустил многоточие. Если на это не обращают должного внимания, то ученики считают дробь 0,3333 бесконечною дробью, в то время как она — дробь конечная. Наоборот (хотя и реже), они принимают запись 0,333... за обозначение дроби $\frac{333}{1000}$ или непременно за бесконечную периодическую дробь, в то время как 0,333... может обозначать и некоторую конечную дробь, которой цифры отброшены, и некоторую бесконечную периодическую дробь, которой период не равен трем, и некоторую бесконечную десятичную, но не периодическую дробь.

Исходить при делении десятичной дроби на целое число из дробей обыкновенных прямо не следует. Но скрывать от учеников причину, по которой мы не обращаем десятичной дроби в обыкновенную, также не следует. Пусть лучше попробуют (надо взять пример, когда числитель дроби не делится, нацело без остатка, на делитель) обратиться к обыкновенной дроби, и тогда они увидят, насколько это менее удобно, чем поразрядное деление делимого на делитель.

§ 21. Обращение обыкновенной дроби в десятичную.

Таким образом деление десятичной дроби на целое и отыскание десятичного частного, происходящего от разделения одного целого на другое, в том случае, когда это деление не совершается нацело без остатка, усвоено. Тогда можно обратиться к обращению обыкновенной дроби в десятичную. Прежде всего ученикам надо вспомнить, что всякое частное, происходящее от разделения одного числа на другое, может быть выражено в виде дроби, и обратно: что всякая дробь может быть рассматриваема, как некоторое частное, происходящее от разделения некоторого целого числа на некоторое другое целое число. Весь вопрос в том — можно ли это частное выразить в десятичных долях единицы, т. е. в виде десятичной дроби. Лучше всего *установить* и *договориться* с учениками, что если обыкновенная дробь дает при делении ее числителя на знаменатель все повторяющиеся остатки, то эту дробь обратить в десятичную с определенным числителем и определенным знаменателем *нельзя*. Дело в том, что под десятичною ученики вначале должны понимать только дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1 000 и т. д., и которая обозначена с помощью запятой по известному правилу. Что касается того, что мы запись, в которой предполагается бесчисленное множество знаков после запятой, считаем также записью *десятичной* дроби, то это — только обобщение. Это обобщение вовсе не вытекает непосредственно из первоначального представления о десятичной дроби. Бесконечная десятичная дробь представляет собою (с математической точки зрения) не что иное, как некоторый *ряд*. В представление же о десятичной *дроби* непременно входит представление о *конечном* числе знаков после запятой. Самое отыскание такой десятичной дроби, которая равна, по своей величине, данной обыкновенной, называется „обращением обыкновенной дроби в десятичную". Нужно, чтобы ученики уяснили себе, что когда хотят сказать, что частное, происходящее от разделения семи на 18, требуется выразить в виде десятичной дроби, то говорят, что $\frac{7}{18}$ надо обратить в десятичную дробь и этим двум выражениям придают одно и то же значение. Но этим еще вовсе не предрешен вопрос, обратится ли данная дробь в десятичную или нет. Это — такая логическая тонкость, без понимания которой ученики усваивают себе только механический прием так называемого обращения данной обыкновенной дроби в десятичную и не отдают себе отчета в истинном положении дела. Вследствие такого упущения, представление о бесконечной периодической десятичной дроби у них образовывается смутное, сбивчивое и даже прямо неверное[1]).

§ 22. Другой способ обращения обыкновенной дроби в десятичную.

Не только полезно, но даже в высшей степени важно в образовательном смысле усвоение учениками другого, более естественного, способа обращения обыкновенных дробей в десятичные. Пусть дана дробь $\frac{7}{8}$ и пусть требуется обратить ее в десятичную. Что это значит? Это значит, что требуется найти такую долю, в которой запись знаменателя была бы единицей с некоторым числом нулей и которая заключалась бы в нашей дроби некоторое целое число раз. Это — задача, заслуживающая во всяком случае внимания и поддающаяся решению с помощью ряда (полезных в качестве упражнений) проб. Разделим $\frac{7}{8}$ на $\frac{1}{10}$:

$$\frac{7}{8}:\frac{1}{10}=\frac{70}{8}=8\frac{3}{4},$$

---

[1] Говоря „бесконечная периодическая десятичная дробь“, мы умышленно ставим эти три имени прилагательных при одном имени существительном „дробь“. Дело в том, что бесконечною может быть и непериодическая десятичная дробь, например, следующая дробь, которой запись подчинена очевидному закону: 0,101001000100001..., а также и всякая иррациональная дробь, удовлетворяющая какому-либо определенному условию, например, дробь, получаемая при извлечении квадратного корня из неполного квадрата. С другой стороны, периодическою может быть и десятичная (но — конечная десятичная) дробь, например, 0,373737. Наконец, периодическою бесконечною может быть не только десятичная, но и непрерывная дробь, как, например, дробь:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}$$

Запись, получаемая при так называемом обращении дроби $\frac{1}{3}$ в десятичную, считается записью не только некоторой десятичной дроби, но десятичной периодической, потому бесконечной. Вот почему подобные дроби надо, для большей точности, называть бесконечными периодическими десятичными, а не просто бесконечными, или просто периодическими, или только десятичными. Из всех этих характеристик при этом самою условною и трудно усвояемою является характеристика, состоящая в том, что, например, запись 0,3333... действительно обозначает *дробь*, и, кроме того, дробь *десятичную*. Для того, чтобы обозначить, что мы имеем дело с *периодическою* десятичною бесконечною дробью, период заключают в скобки. Без этих скобок число 0,33 3... может представлять собою первые цифры *непериодической* бесконечной дроби, которая получится, например, от извлечения квадратного корня из 0,1111088889.

откуда видим, что десятая доля в дроби $\frac{7}{8}$ не содержится целого числа раз. Разделим $\frac{7}{8}$ на $\frac{1}{100}$. Получим:

$$\frac{7}{8} : \frac{1}{100} = \frac{\overset{175}{700}}{\underset{2}{8}} = 87\frac{1}{2},$$

откуда видим, что сотая доля в дроби $\frac{7}{8}$ тоже не содержится целого числа раз. Разделим $\frac{7}{8}$ на $\frac{1}{1000}$;

$$\frac{7}{8} : \frac{1}{1\,000} = \frac{\overset{\overset{875}{1\,750}}{7\,000}}{\underset{\underset{1}{2}}{8}} = 875.$$

Отсюда видим, что одна тысячная доля содержится в дроби $\frac{7}{8}$ целое число раз, а именно 875 раз. Это значит, что

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{1\,000} \times 875 = \frac{875}{1\,000} = 0{,}875$$

и что наша дробь обратилась в десятичную. Насколько этот способ яснее обыкновенного — говорить нечего; но важно не только это обстоятельство. Важно также то, что ученики уясняют себе, благодаря этому приему, *причину* обратимости или необратимости данной дроби в десятичную. В одном случае к числителю данной дроби можно приписать столько нулей, чтобы полученный числитель разделился на знаменатель, а в другом этого достигнуть невозможно. Например:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{10} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{100} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{1\,000} = \frac{1\,000}{3} = 333\frac{1}{3} \text{ и т. д.}$$

§ 23. Третий способ.

К тому же результату можно прийти и несколько иными рассуждениями. Дана дробь $\frac{7}{8}$ и ее требуется, если это возможно, обратить в десятичную. Что значит это? Это значит, что числитель и знаменатель надо умножить на одно и то же число, притом — на такое, чтобы запись знаменателя была единицею, снабженною нулями справа. Разложим 8 на первоначальные множители:

$$8 = 2 \times 2 \times 2.$$

Если каждый из этих сомножителей помножить на 5, мы получим во второй части $2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$, т. е. 1 000. Это значит, что 8 надо помножить на 5, полученное — на 5, и вновь полученное — опять на 5, чтобы получить 1 000. А потому:

$$\frac{7}{8}=\frac{7\times5\times5\times5}{1\,000}=\frac{875}{1\,000}=0{,}875.$$

Без этих приемов обращения обыкновенных дробей в десятичные и без тех точек зрения, которые учениками будут приобретены благодаря этим приемам, — все учение об обращении обыкновенных дробей в десятичные отличается для учеников крайнею отвлеченностью, формализмом и даже неудобопонятностью. Оно сводится только к механическому, не представляющему никакой образовательной ценности, выполнению вычислений, в которых, если можно так выразиться, карандаш или мел в руках ученика оказывается умнее его головы.

§ 24. Невозможность обращения некоторых обыкновенных дробей в десятичные.

Необходимо стремиться к тому, чтобы ученики уяснили себе, что если дана дробь и если спрашивается, можно ли ее обратить в конечную десятичную или нет, то раньше всего данную дробь надо сократить, а по сокращении — рассмотреть, на какие первоначальные сомножители разлагается знаменатель этой дроби. Если в числе его простых сомножителей встречается только число 2, или только число 5, или оба эти числа вместе, то дробь может быть обращена в десятичную. Если же в числе простых сомножителей знаменателя есть хотя бы один простой сомножитель, отличающийся от 2 или 5, то дробь в десятичную конечную не может быть обращена. Термин „конечная десятичная дробь“ — должен быть объяснен на примерах.

§ 25. Приблизительная величина десятичной дроби.

Термин „приблизительно“ надо выяснить на примерах такого рода: что это значит — у одного человека приблизительно 17 руб.? От Москвы до Ленинграда приблизительно 600 километров. Ученики должны себе усвоить, что когда говорят „приблизительно“, то это значит, что данное число или немного больше или немного меньше, чем истинное. Они должны понять, что с этой точки зрения можно рассматривать всякое число, всякую дробь десятичную, а также десятичную периодическую дробь, в которой почему либо удовлетворяются только несколькими цифрами для обозначения приблизительной величины данного числа. Очень удобно в качестве наглядного примера разделение одного рубля на 3 одинаковые части, в результате какого разделения получится копеек 33,3333... Конечно, *сказать*, при этом, что одна треть рубля равна $33\frac{1}{3}$ коп. можно; но одна треть копейки, как монета, не существует. Точно также не существует и трех десятых долей копейки, или тридцати трех сотых долей ее и т. д. Но от представления о несуществовании *монет*, имеющих стоимость упоминаемых долей копейки, до представления о том, что у бесконечной периодической десятичной дроби есть приблизительная величина, еще очень далеко. Поэтому крайне полезно отыскание разности между данною обыкновенною дробью и ее приблизительными десятичными значениями:

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}; \quad \frac{1}{3}-\frac{33}{100}=\frac{1}{300}; \quad \frac{1}{3}-\frac{333}{1000}=\frac{1}{3\,000}$$

и т. д. Представление о приблизительных значениях всякого числа заслуживает гораздо большего внимания, чем какое им обыкновенно уделяется в курсе арифметики.

Так как бесконечные десятичные периодические дроби ни в жизни ни в науке не встречаются, то о таких дробях ученикам следовало бы знать только то, что прямо вытекает из самого приема обращения обыкновенных дробей в десятичные. Поэтому, упражнения в обращении бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные и правила, относящиеся до этого обращения, представляют собою в арифметике совершенно бесполезный материал. Сверх того, это обращение является в арифметике даже недостаточно обоснованным, с логической точки зрения, учением. Оно представляет собою одно из тех излишеств, исключение которых из курса и из программы практической арифметики давно сделалось настоятельною необходимостью.[1] Очень важно для учащихся на этой ступени навсегда усвоить себе, что они должны считать периодическую бесконечную десятичную дробь *совершенно равною* той дроби, от обращения которой в десятичную эта бесконечная дробь получилась.

§ 26. Правило деления на целый делитель.

Полезно вначале предложить упражнения в нахождении частного, происходящего от разделения некоторых целых чисел на некоторые другие, а также десятичных дробей — на целый делитель. Приемы деления десятичной дроби на целое число должны быть, по возможности, ближе к приемам деления целого многозначного числа на целое же число. Разница состоит только в том, что при обозначении частного в виде *десятичного* числа необходимо помнить о *запятой* в частном, находящейся в полной зависимости от места запятой в делимом. Зависимость эта сводится к тому, что когда мы определим все цифры *целой* части частного, то мы должны тотчас же после цифры единиц этого частного поставить запятую. Распределение вычислений в этом случае также не представляет собою, за вычетом только что отмеченного относительно места запятой в частном, ничего нового. Приведение же делимого и делителя к общему знаменателю и отбрасывание этого знаменателя принадлежит к числу тех преобразований, которые не только излишни, но делают вычисление громоздким и вносят в него вредное многописание. Единственное удобство этого правила заключается в том, что оно обладает некоторою общностью. Но жертвовать изяществом вычисления ради никому ныне ненужной легкости усвоения *правила* наизусть, конечно, не следует. Легко выучить правило наизусть или нет — неважно, если самое знание этого правила наизусть делу воспитывающего обучения и усвоению познаний не оказывает никаких услуг. А именно этою бес-

[1] В современные программы вопрос об обращении периодических десятичных дробей в простые не входит. *(Прим. ред.)*

полезностью правило о приведении делимого и делителя к общему знаменателю и отличается в весьма значительной степени.

§ 27. Делитель — десятичная дробь.

Деление в том случае, когда делитель представляет собою десятичную дробь, если его поставить на должные точки зрения, представляет собою одну из наиболее легких статей курса. Но ученикам именно это учение дается довольно трудно. Часто замечается, что ученики очень скоро забывают так называемое правило деления на десятичную дробь. Но виною тому, чаще всего, конечно, многословие этого правила и недостаточно методическое распределение упражнений учеников в этом делении. Если требуется разделить, например, дробь 0,7164 на 0,225, то это действие, конечно, можно совершить, обратив предварительно данные дроби в обыкновенные. При этом сокращение в числителе и знаменателе полученного результата и относящееся до единиц высшего разряда, из которых одна находится в числителе, а другая — в знаменателе, не только допустимо, но даже обязательно. Так, например, в результате требуемого выше деления мы получим:

$$\frac{7\,164}{10\,000} : \frac{225}{1\,000} = \frac{7\,164 \times 1\,000}{10\,000 \times 225} = \frac{7\,164}{10 \times 225}.$$

В переводе на язык записей десятичной дроби получим, что нам надо найти частное:

$$716{,}4 : 225,$$

каковое частное отыскивается уже на основании деления десятичной дроби на целое число. Несколько таких упражнений в состоянии довести учеников до сознания, что, в сущности говоря, деление десятичной дроби на десятичную же можно всегда свести к делению на некоторое *целое* число, получающееся после того, как в делителе отброшена запятая. Этот результат чрезвычайно важен по своим последствиям. Ибо все правило деления десятичной дроби на десятичную же состоит в том, что надобно делитель обратить в целое число, отбросив в нем запятую, а делимое увеличить во столько раз, во сколько раз делитель при этом увеличен. Но еще проще правило: *для разделения на десятичную дробь надо делимое помножить на знаменатель делителя и полученное произведение разделить на числитель делителя.* При этом, если делитель — смешанное число, то его надо обратить в неправильную дробь. Это правило настолько сближает деление на десятичную дробь с делением на дробь обыкновенную, что ученикам не приходится делать никаких усилий памяти для того, чтобы его в ней сохранить навсегда. Расположение вычислений в этом случае можно практиковать в следующем роде:

0,7164 : 0,225 = 3,184	или	7,1 : 2,56 = 2,7
716,4 : 225		710 : 256
675		512
414		1980
225		1792
1890		188 и т. д.
1800		
900		
900		

Само собою разумеется, что и учение о разных случаях деления десятичных дробей только тогда усваивается учащимися как следует, если учитель не сводит всего дела к одним своим „объяснениям“, а требует сознательной работы от учеников. При этом расположение вычислений не предполагает ни перечеркнутых запятых, ни изменения записей данного числа, ни сколько-нибудь небрежного приписывания нулей в тех случаях, когда эти нули оказываются нужными, и т. д.

Само собою разумеется также, что и учителю и ученикам необходимо особенно внимательно относиться к месту запятой в частном. Это достигается без всякого труда и сомнения в том случае, когда первоначальные записи делимого и делителя (см. выше) остались неприкосновенными, — правило, которое надо соблюдать во всех случаях вычисления над десятичными дробями.

§ 28. Приблизительная величина десятичного числа.

При делении десятичных дробей часто приходится иметь дело с приближенным частным. Поэтому надо поупражнять учащихся в том, что ими раньше было усвоено относительно приближенного значения чисел, и дополнить эти познания новыми, относящимися до нахождения наилучшего приблизительного значения данного числа. Из предыдущего курса ученики уже знают, что значит „закруглить“ данное число. Вот в этом направлении и надо еще поупражнять их настолько, чтобы они, находя приближенную величину данного числа, закругляли его, внимательно относясь к тому, какие цифры они заменяют нулями. Вопрос о том, какое из приближенных значений данного числа к нему ближе (взятое с так называемым „недостатком“, или же взятое с так называемым „избытком“), должен быть для каждого случая взвешен. Когда ученики это уразумели, им можно показать, что, заменяя целый ряд цифр нулями, мы должны обратить внимание на то, как велико число, обозначенное цифрою наивысшего разряда, принадлежащее к числу отбрасываемых, т. е. заменяемых нулями. Она может обозначать число меньшее, чем пять, или же она сама — цифра 5, или же, наконец, она обозначает число большее пяти. Все дело в том, какое число ближе, например, к 75 161: число ли 70 тысяч или 80 тысяч? И т. д.

Отсюда перейти к приближенному значению десятичной дроби очень легко. Для этого полезно взять известную в математике десятичную дробь, обозначающую отношение длины окружности к длине ее диаметра:

$$3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ldots$$

Приближенные значения этого „числа“ по порядку равны: 3 целым; 3,1; 3,14; 3,142; 3,141 6; 3,141 59; 3,141 593. И т. п. Причина, по которой мы в одном случае последней из оставляемых нами цифр не изменяем, а в другом заменяем другою — вполне очевидна. Но в этом направлении должно проработать достаточное количество упражнений. Только при этом условии ученики будут в состоянии перейти к совершенно свободному отысканию наиболее близкого из двух приближенных значений данного числа.

§ 29. Приближенная величина десятичного частного.

К определению приближенной величины *частного*, наиболее близкого к искомому, можно перейти тотчас же после охарактеризованных упражнений. Но тогда от учеников надо требовать полного отчета в том, почему они должны определять 3 знака после запятой, если им нужно знать приближенное частное, выражаемое числом с двумя знаками после запятой. При этом надо брать приближенные величины не только таких частных, которые равны периодическим дробям, но и таких, которые могут быть определены и точно, но в которых, для наших целей, слишком много цифр после запятой.

Распределение вычислений и упражнений такого рода можно практиковать такое:

$$3{,}141593 : 2{,}71828 = 1{,}16 \text{ (приблизительно)}$$

$$\begin{array}{l} 314159{,}3 : 271828 = 1{,}15 \\ \underline{271828} \\ 423313 \\ \underline{271828} \\ 1514850 \\ \underline{1359140} \\ 155710 \end{array}$$

Положим, что мы хотим остановиться на числе 1,15. Мы этого не имеем права делать потому, что может быть цифра, следующая за цифрою 5, больше 5 или равна 5, и тогда вернее будет взять в частном не 1,15, а число 1,16. Эта третья цифра после запятой действительно равна 5, потому что (продолжаем деление)

$$\begin{array}{l} 1557100 : 271828 = 5, \\ 1359140 \end{array}$$

Поэтому приближенное частное равно 1,16... — Когда ищут приближенное частное в сотых долях, то надо найти и цифру тысячных долей. — А когда ищут приближенное частное в тысячных долях, то надо найти и цифру десятитысячных и т. д. — Найти приближенное значение дроби $\frac{3}{7}$ в виде десятичной дроби с тысячными долями! — Расположение подобных вычислений может иметь такой вид:

$$\frac{3}{7} = 0{,}429 \text{ (приблизительно)}^{1}$$

$$\begin{array}{l} 3 : 7 = 0{,}4285 \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \end{array}$$

[1] По стандартам, утвержденным СНК, знак приближенного равенства $\approx$. Следовательно, надо писать $\frac{3}{7} \approx 0{,}429$. *(Прим. ред.)*

Чтобы судить о значении не вычисленной цифры, надо обратить внимание на остаток. Если он больше половины делителя, то надо вместо последней цифры взять цифру, бо́льшую на одну единицу.

На этой ступени ученики уясняют себе смысл требования: вычислить или найти приближенное значение числа „до одной тысячной", или „до одной сотой доли" и т. д.

§ 30. Совокупные действия над обыкновенными и десятичными дробями.

Когда четыре действия над десятичными дробями таким образом усвоены, полезно перейти к так называемым „совокупным" действиям над дробями обыкновенными и десятичными, строго говоря не представляющим собою для учеников ничего существенно нового. Всякое вычисление, в котором рядом с обыкновенною дробью дана конечная десятичная, должно выполнять, прежде всего, быстро и верно. А быстрота вычисления зависит от умения учеников не только вычислять по правилам, но и разбираться в том, как это вычисление совершается быстрее. В одном случае полезнее обыкновенную дробь обратить в десятичную, в другом — это прямо невозможно, в третьем — десятичную дробь полезно обратить в обыкновенную, а в четвертом — это нецелесообразно. Умение хорошо разбираться во всех этих случаях гораздо важнее, чем умение выполнять столь часто встречающиеся в разных задачниках неестественные вычисления с периодическими дробями, относимые к этой статье курса. Во всяком случае, надо заметить, что нередко ученики оказываются совершенно беспомощными как-раз в простых случаях совокупных вычислений над дробями, часто встречающимися в жизни, обыкновенными и десятичными. Виною тому — то обстоятельство, что у них нет достаточно ясного представления о взаимных отношениях между некоторыми из обыкновенных дробей и некоторыми десятичным. Ученикам полезно знать на-память следующие соотношения, или, по крайней мере, быстро (по возможности изустно) уметь разбираться в них:

$$\frac{1}{2}=0{,}5 \qquad \frac{5}{8}=0{,}625$$
$$\frac{1}{4}=0{,}25 \qquad \frac{7}{8}=0{,}875$$
$$\frac{1}{8}=0{,}125 \qquad \frac{1}{16}=0{,}0625$$
$$\frac{3}{4}=0{,}75 \qquad \frac{1}{25}=0{,}04$$
$$\frac{3}{8}=0{,}375 \qquad \frac{2}{25}=0{,}08$$
$$\frac{1}{5}=0{,}2 \qquad \frac{3}{25}=0{,}12$$
$$\frac{2}{5}=0{,}4 \qquad \frac{4}{25}=0{,}16$$
$$\frac{3}{5}=0{,}6 \qquad \frac{6}{25}=0{,}24$$
$$\frac{4}{5}=0{,}8 \qquad \frac{7}{25}=0{,}28 \text{ и т. п.}$$

Это избавит учащихся от множества скучных и ненужных письменных преобразований и вычислений, в которые, к тому же, могут вкрасться и досадные ошибки. На этой ступени курса весьма полезно, исходя из целесообразных задач$\left(\frac{1}{3}+0{,}56\right.$ или $\left.\frac{7}{12}-0{,}354\right.$ и т. п.$)$, обратить внимание учеников на то, что производить действие, хотя бы даже сложение, над приблизительными значениями десятичных дробей они не вполне умеют. Можно для этого взять несколько примеров.

Пусть требуется сложить две дроби: 0,47 и 2,78, относительно которых мы достоверно знаем, что они — лишь приближенные значения некоторых двух нам неизвестных дробей. Если мы сложим эти числа, то получим

$$0{,}47+2{,}78=3{,}25.$$

— Что же, этот результат (3,25) — верен или неверен, а если неверен, то в каком смысле неверен?... — Может быть, дробь 0,47 больше истинного значения числа, которое она заменяет, может быть, и 2,78 тоже больше, чем то число, которое эта дробь заменяет, и тогда 3,25 больше, чем следует... — А, может быть, 3,25 и меньше, чем следует... — А, может быть, это число как раз равно сумме истинных значений!.. Для этой последней возможности достаточно, чтобы дробь 0,47 заменяла другую, например, 0,467, а дробь 2,78 заменяла собою дробь 2,783, и тогда сумма чисел 0,47 и 2,78 совершенно равна сумме чисел 0,467 и 2,783... — Умеем производить действие над приближенными числами да не знаем — насколько верен полученный результат...

На этой ступени надо, когда встречаются *совокупные* действия над дробями десятичными и обыкновенными, а из последних хотя бы одна не обращается в десятичную, заменить десятичные дроби равными им обыкновенными, а потом уже найти приближенное значение результата в виде десятичной дроби.

Нельзя однакоже не заметить, что слишком многочисленные и сложные примеры на вычисления этого рода не заслуживают большого внимания.

§ 31. Приведение познания учеников в систему.

Венчать статью должно приведение познаний учеников в систему, поскольку познания эти относятся до дробей обыкновенных и десятичных. Для этого можно избрать параллельное, для дробей обоего рода, повторение: обозначения дробей, приведения к общему знаменателю, вычитания, умножения и деления дробей. Такой параллельный обзор учения о дробях обыкновенных и десятичных дает ученикам правильный взгляд на дроби того и другого рода. Он должен укрепить в их сознании пользу десятичных дробей и многих выгод, представляющихся при производстве действий над ними. Он должен дать им возможность сознательно отнестись к вопросу о том, поскольку действия над десятичными дробями подобны действиям над числами целыми. Обыкновенно все это предоставляется самостоятельному и более или менее случайному усмотрению учеников и сводится к нескольким малозначащим и малосодержательным (для учеников) словам учителя или, в лучшем случае, к лекции учителя о преимуществах десятичных дробей пред обыкновенными. Но лекции, как известно, приносят мало пользы ученикам. Должно помнить, что и при повторении учителю надо строго держаться той или иной, методически и логически правильной, системы и не ограничиваться одними „объяснениями". Напротив, все повторение (притом непременно параллельное относительно дробей обоего рода) надо построить на целесообразных задачах и вычислениях, держась преимущественно вопросоответной формы обучения. Роль учебника при интересующем нас повторении также незначительна. Если учащийся упорствует в убеждении что обыкновенные дроби „удобнее" и „легче" десятичных, то это может служить только доказательством того, что он все относящееся до десятичных дробей себе недостаточно хорошо усвоил.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦИЯ.

§ 1. Место учения о пропорции в курсе математики.

Во многих отраслях точного естествознания и в технике весьма важное место занимают пропорции, когда мы имеем дело с пропорциональными величинами. Свойства пропорций обыкновенно находят себе место в курсе так называемой элементарной алгебры, а широкое применение они получают в учении о подобных фигурах в курсе геометрии. Встарину их значение преувеличивалось при решении задач на так называемые „правила" (простое, сложное, процентов, пропорциональное разделение, цепное, на так называемое смешение второго рода). Впоследствии они в арифметике уступили место так называемому способу приведения к единице. Если же уравнение 1-ой степени займет в курсе арифметики подобающее ему место, то применению пропорций к решению задач на так называемое тройное правило будет отведено более скромное место. Но при этом учителю надо помнить, что не все то из области пропорций, что доселе излагалось в курсах арифметики и элементарной алгебры, как, например, все свойства пропорций сложных и производных, уместно в курсе начальной математики, как таковой. Ибо в этом последнем курсе пропорции нужны лишь постольку, поскольку они находят в ней прямое применение, не обременяя памяти учащихся излишними правилами и подробностями. В каждой остальной отрасли элементарной математики, в физике, в механике нужны преимущественно те или иные, но не все свойства пропорций. В геометрии, тригонометрии, физике, механике нужно, например, учение о коэфициенте пропорциональности, в геометрии — свойства сложной пропорции, в алгебре — иногда то свойство, по которому пропорция

$$a : b = c : d$$

дает другую

$$\frac{ma \pm nb}{pa \pm qb} = \frac{mc \pm nd}{pc \pm qd},$$

каковы бы ни были значения букв a, b, c, d, m, n, p, и q, лишь бы ни один из делителей не равнялся нулю и лишь бы знаки брались соответственные.

§ 2. Отношение.

Чисто арифметическое значение термина „отношение“ учащимся давно известно. Отношением, однакоже, в арифметике чисел, обозначенных цифрами, является только число, от умножения которого на делитель получается делимое. Но надо принять во внимание, что из арифметики буквенной должна быть перенесена в арифметику чисел, обозначенных цифрами, также и другая точка зрения, а именно:
всякая запись

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b \text{ и } a:b$$

обозначает не только *требование* произвести некоторое действие, но и самый *результат* этого действия: первое выражение — самое сумму, второе — самое разность, третье — произведение и четвертое — отношение чисел a и b. Соответственно этому записи $7:6$ или $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$ не только требуют отыскания отношения, но также *обозначают* эти отношения. Численная же величина отношения в этом случае иногда называется *знаменателем отношения.*

§ 3. Пропорция, представление о ней и ее определение.

Учение о пропорции надо ставить на ту точку зрения, по которой она представляет собою либо тождество, либо же уравнение. Это — точка зрения алгебраическая, хотя бы мы сначала имели дело с пропорциями, в которых все члены — определенные числа и обозначены цифрами.

С этой точки зрения представление о пропорции возникает так: у двух отношений (мы имеем в виду только так называемые геометрические отношения, так как отношения и пропорции арифметическ и совершенно утратили то значение, которое им придавалось встарину), — у двух отношений, повторяем, могут быть одинаковые знаменатели отношений (т. е. одинаковые численные значения). Такие отношения, конечно, равны между собою, и это *равенство* называется *пропорцией.*

Иначе говоря: если отношение одного числа к другому равно отношению третьего числа к четвертому, то эти четыре числа составляют пропорцию. При этом отношениями являются не выражения, а числа, происходящие от разделения первого числа на второе и третьего числа — на четвертое. А то, что определение начинается не словами: „пропорцией называется“ и т. д., а словом „если“, не существенно. При этом учителю необходимо обратить свое и учеников своих внимание на то, что не запись равенства, а самое это *равенство* является пропорцией, а запись ее — только записью.

Если у нас записано $35:5=21:3$, то это значит, что существует равенство между некоторыми двумя отношениями, или записано, что четыре числа *составляют* пропорцию. Упражнения в составлении пропорций и сознание возможности дробных чисел в числе членов пропорции представляют собою необходимое условие полного уразумения учениками необходимых в арифметике свойств пропорций. С этой точки зрения, тождество, выражающее, что от разделения одной дроби на другую получается некоторая третья дробь с целым числителем и целым знаменателем, тоже представляет собою некоторую пропорцию. В этой последней отношение двух дробей равно отношению двух целых чисел и к этому, строго говоря, сводится задача деления.

Формула $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{14}{15}$ тождественна с пропорцией $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=14:15$, и вообще тождество $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ равносильно пропорции $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=ad:bc$.

Эта точка зрения очень важна в некоторых случаях.

Буквенные пропорции. Когда это усвоено, можно обратиться к пропорции буквенной. Надо уяснить себе, что если написано: $a:b=c:d$, то это не значит, что всякое, какое ни попало число, по разделении на всякое другое число, даст в результате то же самое, что получится от разделения какого ни попало третьего числа на какое ни попало четвертое число. Пропорция эта выражает только то, что буквами a, b, c и d обозначены именно такие числа, которые обладают тем свойством, что если первое число разделить на второе, а третье — на четвертое, то получатся равные частные. Здесь же можно выяснить ученикам, что отношение, записанное по левую руку, называется первым, записанное по правую руку — вторым, и что придумать, сочинить пропорцию очень легко. Для этого стоит только взять любых два небольших числа, хотя бы, например, 5 и 7 и другие два числа, из которых одно более пяти, например, в 2 раза, и другое — более 7 в 2 раза, т. е. взять числа 10 и 14. Отношения 5 к 7 и 10 к 14 равны между собою, и потому эти четыре числа *составят* пропорцию $5:7=10:14$. Когда таких пропорций ученики сочинили достаточно, то можно уже перейти к тому, как пропорция читается. А именно, вышеприведенная пропорция читается так: 5 *относится* к 7 как 10 *относится* к 14. В подобном чтении надо поупражнять каждого из учеников, чтобы они не только слышали то, что другие говорят, а также и сами сказали бы то, значение чего они должны себе уяснить.

Члены пропорции. Далее можно ознакомить учеников с терминами: „предыдущий“ и „последующий член“ пропорции. Но не надо все дело сводить к определениям. Надо уяснить себе, что *делимое* в первом отношении и *делимое* во втором *иначе* называются *предыдущими* членами, а *делитель* в первом отношении и *делитель* во втором *иначе* называются *последующими* членами. Само собой разумеется, что и в этой терминологии ученики должны поупражняться. Делимое первого отношения и делитель второго называются *крайними*, а остальные два члена пропорции — *средними* ее членами. Эти термины полезны только тогда, когда дело ставится на почву правил.

§ 4. Основное свойство пропорций.

Что касается основного свойства пропорций, по которому произведение крайних ее членов равно произведению средних, то это свойство прежде всего ученики должны проверить и интуицией уяснить себе на численных пропорциях.

Что же касается доказательства этого свойства, то оно вряд ли в полной мере доступно ученикам, еще неискушенным в математических доказательствах. На этом доказательстве оправдывается общее свойство всех математических доказательств, „проходимых“ с учениками без достаточной математической подготовки. У таких доказательств есть общее свойство: подлежащее доказательству часто яснее самого доказательства. Доказательство это основано на том, что на запись любого отношения (например, отношение $10:5$) можно смотреть с двоякой точки зрения: и как на требование (разделить 10 на 5), и как на самый результат деления, т. е., как на *отношение* 10 к 5. Поэтому, если у нас задана пропорция

$$6:3=10:5,$$

то мы можем число 6 рассматривать как делимое, 3 — как делитель, а $10:5$ — как не вычисленное частное. В этом направлении надо учеников достаточно поупражнять, отнюдь не удовлетворяясь выученными ими наизусть словами, если желаем достигнуть надлежащих результатов. Вот почему можно дело поставить так:

Рассудим на числах. Пусть

$$6:3=10:5;$$

здесь 6 делимое, 3 делитель, а все выражение $10:5$ — частное... — Можно ли так рассуждать? (Конечно, можно...) — Еще раз: пусть дана пропорция

$$6:3=10:5,$$

6 — делимое, 3 — делитель, а все выражение $10:5$ — частное... Делимое всегда равно частному, помноженному на делитель (ведь тут деление всегда совершается без остатка)... — А потому

$$6=(10:5)\times 3...$$

— То, что записано в скобках, представляет собою запись частного, происходящего от разделения 10 на 5, и это частное надо помножить на 3... А потому (вместо того, чтобы помножить частное, помножим делимое):

$$6=(10\times 3):5...$$

В этом равенстве выражение 10×3 представляет собою новое делимое (которое надо разделить на 5), 5 — делитель, а 6 частное... — Если частное 6 помножить на делитель 5, то получается делимое, т. е. 10×3, или

$$6\times 5=10\times 3...$$

Трудности этого доказательства — исключительно диалектические: в одном пункте рассуждения выражение $10:5$ принимается за частное, происходящее от деления 6 на 3, в другом — за частное, происходящее от разделения 10 на 5, а в третьем — за множимое. Практика показывает, что ученики чаще всего это доказательство на время усваивают себе наизусть с тем, чтобы в очень скором времени его позабыть. Воспитательного или образовательного значения (не говоря уже о практическом) оно поэтому в курсе арифметики не имеет. Насколько подобные рассуждения доступны данному классу, судить лучше всего может сам учитель этого класса. Если поэтому учитель видит, что силы учеников недостаточны для того, чтобы преодолеть трудности, скопленные в этом пункте, то он смело может все доказательство отнести к курсу алгебры. Строго говоря, нахождение неизвестного члена пропорции (а это почти единственное практическое применение данного свойства пропорции) можно освободить от ссылки на это свойство. Действительно: если нам дана пропорция $x:7=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$, то нет надобности при этом непременно записывать, что произведение средних равно произведению крайних, и только на основании этого отыскивать неизвестный член пропорции. Можно сначала найти, чему равняется знаменатель отношения $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$, т. е., действительно разделить $\frac{3}{4}$ на $\frac{5}{6}$, а затем записать, что $x:7=\frac{9}{10}$, откуда $x=\frac{63}{10}$.

Лучше отнести учение о произведении крайних и произведение средних членов к курсу буквенной арифметики, где пропорцию

$$a:b=c:d$$

можно заменить тождеством двух алгебраических дробей:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

буквы a, b, c и d могут обозначать *какие угодно* числа, удовлетворяющие пропорции. Из этого тождества без всяких затруднений непосредственно вытекает тождество:

$$ad=bc,$$

если учитель не желает, или не может его должным образом проработать. В курсе арифметики, повторяем, достаточно опереться на факты, на примеры, убеждающие в том, что во всякой пропорции произведение крайних членов ее непременно равно произведению ее средних членов.

§ 5. Неизвестный член пропорции.

Отыскание неизвестного члена пропорции, как это выше замечено, не нуждается в применении выше освещенного свойства геометрической пропорции. Более того, лучше всего упражнения в этом направлении начинать именно с того, что в данной пропорции, например, в пропорции

$$x:7=8:11,$$

можно найти отношение предыдущего к последующему; так, отношение 8 к 11 равно дроби $\frac{8}{11}$. В этом случае мы, вместо данной пропорции, получим уравнение, легко поддающееся решению.

Упражнений в этом направлении должно проработать довольно много, прежде чем перейти к отысканию среднего члена пропорции, в которой этот средний член ее неизвестен, а другой средний и оба крайних известны.

После этого можно воспользоваться *менее естественным* отысканием неизвестного члена пропорции, вытекающим из того свойства пропорции, по которому произведение средних членов ее равно произведению крайних. Но это не необходимо. *Правила* же, на которое в старину обращалось так много внимания, и по которому неизвестный крайний член пропорции равен произведению ее средних членов, разделенному на известный крайний, а неизвестный средний равен произведению крайних, разделенному на известный средний, — можно совсем избегнуть.

Это правило, по существу своему, и не особенно сокращает работу по отысканию неизвестного члена пропорции. Если же о нем говорить, то непременно после того, как ученики вполне освоились с отысканием неизвестного члена пропорции и сами подметили это правило. Для вывода же его не бесполезно обратиться к буквенной пропорции, потому что в этой последней действия не производятся на самом деле, а только обозначаются.

Можно предложить не только упражнения в нахождении неизвестного члена пропорции, но также упражнения другого рода, а именно — даны: один из крайних членов, произведение средних, один из средних, и требуется выписать всю пропорцию, или же даны: один из средних членов, произведение крайних и один из этих последних. При известном произведении крайних членов может быть дано какое-нибудь условие, определяющее каждый из них, например, произведение средних равно 27, а один из них составляет $\frac{3}{4}$ другого. Иногда можно предлагать и такие задачи: даны множимое и множитель, замечено, что множимое увеличилось в 3 раза, и требуется составить пропорцию из первоначального множимого, первоначального произведения, измененного множимого и измененного произведения и проверить ее справедливость. Или же даны: делимое и делитель, причем делимое изменено в известное число раз и требуется составить из первоначального делимого, первоначального частного, измененного делимого и измененного частного пропорцию и проверить ее справедливость и т. д. Сюда принадлежат задачи, в которых даны два числа; каждое из них разделено на какой-нибудь общий делитель, и требуется из данных двух чисел и полученных частных составить пропорцию. Полезны также задачи, в которых даны две дроби и их частное и требуется составить пропорцию из этих двух дробей и числителя и знаменателя их частного. Наконец, важны задачи, в которых дано частное двух чисел и требуется составить пропорцию из этих двух чисел, частного и одной единицы и т. п. Очевидно, что после подобных упражнений ученики приобретут себе достаточный навык, по крайней мере, в составлении пропорций, и в проверке их справедливости и, благодаря этому, будут подготовлены к должному уразумению внутреннего смысла всякой пропорции.

§ 6. Изменения членов пропорции.

Изменениям членов пропорции можно посвятить весьма немногочисленные упражнения. В них надо принять во внимание, главным образом, увеличение и уменьшение членов одного и того же отношения данной пропорции в одно и то же число раз, так как только это изменение и представляет собою практический интерес. Особенно важен случай, когда связь между двумя числами выражена в виде отношения одной дроби к другой, например, когда известно, что одно число относится к другому, как $\frac{3}{4}$ к $\frac{7}{8}$, и желательно это отношение заменить отношением двух целых чисел. Основана возможность увеличения членов одного и того же отношения в одно и то же число раз на том, что предыдущий член отношения — делимое, последующий того же отношения — делитель, а *полное* частное не изменяется от одновременного увеличения делимого и делителя в одно и то же число раз. Учения об остальных изменениях пропорции, о сложных пропорциях, о пропорциях производных и т. п. к курсу арифметики не имеют прямого отношения.

Даже дозволительные перестановки членов пропорции не представляются в арифметике особенно важными и применимыми с практической точки зрения.

§ 7. Наименование членов пропорции.

Вопрос о наименованиях членов пропорции, конечно, принадлежит к числу вопросов весьма важных с математической и особенно — с практической точки зрения. Здесь учащемуся надо принять во внимание смысл отношения одного именованного числа к одноименному именованному числу, а учителю возможность и смысл отношения одного именованного числа к другому, с ним не одинаковому. Кроме того, решение вопроса о произведении крайних и произведении средних членов требует внимания к тому, какой смысл имеет квадрат какой-либо единицы меры и какой — произведение двух разноименных единиц меры. В пропорции с отвлеченными членами вопросов этого рода нет. Ибо пропорция:

$$\text{(I)} \qquad 10:5=8:4$$

и равенство

$$\text{(II)} \qquad 10\times 4=5\times 8$$

не вызывает никакого вопроса о праве написания пропорции и о праве перемножения двух отвлеченных чисел. Не затруднительны и вопросы о смысле пропорций следующих типов:

$$\text{(III)} \qquad 10\ м:5=8\ м:4$$

$$\text{(IV)} \qquad 10\ м:8\ м=5:4$$

и произведений

$$\text{(V)} \qquad 10\ м\times 4=8\ м\times 5.$$

Пропорция (I) допускает все известные перестановки членов, и из нее можно составить еще 7 пропорций с теми же членами. Но из пропорции (III) можно составить как будто бы только одну (IV) и с ней тождественные, а сделать в каждом отношении предыдущие члены последующими, а последующие члены предыдущими уже неудобно. Ибо смысл пропорции

$$\text{(VI)} \qquad 5:10\ м=4:8\ м$$

без дальнейших рассуждений (см. ниже) непонятен, хотя из этой пропорции первый крайний член очень ясно выражается таким несомненным тождеством:

$$5 = 10\ м \times 4 : 8\ м,$$

а последний — таким тождеством:

$$8\ м = \frac{10\ м \times 4}{5}.$$

В пропорции (VI) двоеточие есть знак не *арифметического деления*, а знак пропорциональности. Но если принять его за знак деления, то тогда надо за частное принять символическую дробь, т. е. дробь, обратную по отношению 2 *м*. Об этой „дроби" речь впереди.

Случай

$$\text{(VII)} \qquad 10\ м : 5\ м = 8\ дм : 4\ дм$$

допускает и перемещение членов, и тождество условных произведений:

$$10\ м \times 4\ дм = 5\ м \times 8\ дм.$$

Случай

$$\text{(VIII)} \qquad 10\ м : 5\ м = 8\ сек : 4\ сек$$

равным образом допускает перемещение членов и условное тождество:

$$10\ м \times 4\ сек = 5\ м \times 8\ сек,$$

если смысл разделения и умножения длины на время установлен. И все дело только в том смысле, который можно придавать отношению одной величины к другой и произведению одной величины на другую. Если этот смысл можно и полезно установить, то пропорции (VII) и (VIII) возможны, и равенство произведения крайних произведению средних членов пропорции тоже возможно.

Лодж как физик и как многие физики смотрит на дробь, числитель которой есть отвлеченное число, а знаменатель — число именованное, как на некоторую величину, при известных условиях имеющую физическое и вообще реальное значение (см. „Легкую математику", стр. 67).[1] Так, например, по мнению Лоджа дробь

$$\frac{1}{2\ м}$$

обозначает то же, что слова „один раз на протяжении двух метров", а дробь

$$\frac{1}{2\ сек}$$

— то же, что слова „один раз в течение двух секунд" и т. д. В этом смысле подобные дроби можно преобразовывать, умножая и деля члены дроби на одно и то же число, т. е.

$$\frac{1}{2\ сек} = \frac{5}{10\ сек} \text{ и т. д.}$$

Если принять такое истолкование дроби обратной именованному числу, то член каждого из двух отношений данной пропорции, в которой делимые — именованные числа, а делители — числа отвлеченные, могут быть переставляемы один на место другого, т. е. вместо пропорции:

[1] Изд. 1909 г. И. Д. Сытина. *(Прим. ред.)*

$$5\ м : 2 = 10\ м : 4$$

можно писать

$$2 : 5\ м = 4 : 10\ м$$

или

$$4 : 10\ м = 2 : 5\ м \text{ и т. п.}$$

Остается вопрос: что обозначает слово „раз“ в выражении „один раз на протяжении двух километров, или „в течение двух секунд“ и т. п. Ответ на этот вопрос можно дать такой: „раз“ есть отвлеченное число, которому можно придать то „наименование“, которое нам в данном случае нужно, что справедливо относительно всякого отвлеченного числа. *Лодж*, например, говорит, что $\frac{60}{1760\ \text{ярдов}}$ — величина, обратная длине и обозначает (например) число телеграфных столбов на протяжении мили,[1] а дробь $\frac{1}{0{,}1\ сек}$ обозначает „частоту“, когда говорят о колебаниях, а дробь $\frac{1}{19\ \text{лет}}$ „представляет небольшую частоту, а именно ту, с которою приблизительно повторяется цикл астрономических затмений“. („Легкая математика“, стр. 68.)

Опытов в проведении в общеобразовательную школу таких взглядов автор этой книги не делал: в одном техническом учебном заведении опыт дал хорошие результаты.

§ 8. Смысл пропорции.

Гораздо большего внимания, чем полное учение о пропорции в намеченном выше направлении и о дозволительных преобразованиях пропорции, в арифметике заслуживают упражнения в *истолковании* внутреннего смысла пропорции, крайне важного для решения множества вопросов, относящихся до пропорциональности. Действительно, если дана пропорция $20 : 10 = 8 : 4$, то она выражает очень многое: 1) она *говорит*, что если 20 разделить на 10 одинаковых частей, то в каждой части получится столько же, сколько получится в каждой части, если 8 разделить на четыре одинаковые части; 2) она говорит, что 20 во столько же раз *больше* 10, во сколько раз 8 более 4; 3) она говорит, что 10 столько же раз содержится в 20, сколько раз 4 содержится в 8; 4) она говорит, что 10 во столько же раз *меньше* 20, во сколько раз 4 меньше 8; 5) что 10 составляет такую же часть 20, какую часть восьми составляет четыре; 6) она говорит, что в 20 десять таких частей, каких в 8 содержится только четыре; 7) она говорит, что в числе двадцать — 8 таких частей, каких в 10 — 4. Последние два способа истолкования очень важны при решении задач на пропорциональное деление.

Каждый из приведенных способов истолкования пропорции может быть разработан учениками вполне сознательно, со всеми его последствиями. Надо заметить, что только в таком случае ученики и приобретут достаточно способов и средств для преодоления разнообразных логических трудностей, представляющихся при решении задач разного рода с помощью пропорций. Что из членов каждой пропорции можно образовать еще 7 пропорций с теми же членами, взятыми только в другом порядке — вопрос комбинаторный и для учащихся иногда занимательный, хотя практически и не особенно важный. Важно только, в конце концов, установить порядок перемещения, чтобы не упустить какой-либо пропорции и не взять одну и ту же пропорцию два раза.

---

[1] Английская миля = 1760 ярдам. *(Прим. ред.)*

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ТАК НАЗЫВАЕМЫЕ ТРОЙНЫЕ ПРАВИЛА (ПРОСТОЕ И СЛОЖНОЕ).

§ 1. Пропорциональные величины.

Задачи на так называемое простое тройное правило при надлежащей постановке курса арифметики встречаются уже на тех ступенях (даже в области чисел первой сотни), на которых учащиеся владеют делением обоего рода.

На данной же ступени необходимо прежде всего осветить одну из важнейших функциональных зависимостей, а именно ту, когда две величины одна другой прямо или обратно пропорциональны.

Из всего курса арифметики учащиеся, конечно, вполне сроднились с тем, что с изменением одних чисел другие тоже изменяются, что с изменением одной „величины“ изменяются другие величины и т. п. Сумма „зависит“ от величины слагаемых, разность — от величины уменьшаемого и вычитаемого, стоимость товара — от количества его, длина пройденного пути — от времени, употребленного при этом. Они уже знают, что это значит, когда говорят: „при известных условиях“ и т. п. Надо взять несколько задач из области так называемого тройного правила, несколько углубиться в их смысл, из области изменений суммы разности, произведения двух чисел, из области изменения дроби и т. п.

§ 2. Прямо-пропорциональные величины.

Учение о пропорциональности некоторых величин сводится, как известно, к тому, что, при всех прочих одинаковых условиях, значения некоторой величины прямо- или обратно-пропорциональны соответственным значениям некоторой другой, к которой она находится в функциональной зависимости. Но для детей это соотношение можно ставить только на почву конкретных представлений. „От чего зависит стоимость товара?“ При всех прочих одинаковых условиях (этот термин должно брать опять-таки конкретно) стоимость товара зависит от количества его следующим образом: больше товара, во столько же раз больше его стоимость; зависит и от цены его, т. е. от того, что стоит килограмм его или метр его, притом так, что если цена товара больше, то и стоимость данного количества его во столько же раз больше и т. п. Таких величин надо взять столько, сколько этого достаточно для уяснения учащимся смысла „прямой пропорциональности“. [1]

Для большей ясности вопрос надо сначала поставить так: коль скоро одна величина увеличивается, и вторая, при всех прочих одинаковых условиях, тоже увеличивается, притом во столько же раз, то о первой величине говорят, что она п р я м о - п р о п о р ц и о н а л ь н а другой, или что она и з м е н я е т с я в п р я м о м о т н о ш е н и и к д р у г о й. Но и это для детей может оказаться слишком отвлеченным. Лучше исходить

[1] С математической точки зрения, установление той функциональной зависимости, которая называется пропорциональностью, требует гораздо более тонких и более точных соображений.

прямо из примеров и задач на стоимость товара и количество его, на площадь прямоугольника и основание его, на количество работы и число рабочих и т. п. На отдельных примерах прямо-пропорциональных величин необходимо подробно останавливаться. При этом полезно иметь в виду, что в качестве надлежащих примеров могут служить не только обычно встречающиеся примеры, но также произведение и один из сомножителей, дробь и числитель ее, коль скоро мы имеем в виду прямую пропорциональность.

Неточность вышеприведенного определения зависит от того, что принято во внимание увеличение или уменьшение данного значения величины только в целое число раз. Но с этой неточностью можно и надо временно примириться. Впоследствии же можно устранить ее, рассмотрев вопрос о том, что случится со значением одной величины, если мы помножим или разделим на дробь или на смешанное число соответствующее значение другой величины, пропорциональной первой величине. Это гораздо лучше, чем выражение: „с увеличением одной в несколько раз“ и т. д., потому что не всегда значение величины увеличивается в целое число раз, а слова „в несколько раз“ именно обозначают умножение на целое число.

Примеры непропорциональных величин. Если учащиеся привыкли, не задумываясь, решать задачи на так называемые тройные правила, то мысль о том, что существуют только пропорциональные величины, может крепко укрепиться в умах учащихся. Важно, чтобы учащиеся уяснили себе, что величины прямо-пропорциональные друг другу чрезвычайно часто встречаются в жизни, но что не всякие две величины непременно пропорциональны, хотя бы одна из них и зависела от другой некоторым образом.

Кран самовара, наполненного водой, нечаянно оставлен открытым; в первые две секунды вылилось полстакана воды; сколько воды выльется в следующие две секунды? Казалось бы, что количество воды, выливающейся из самоварного крана, должно быть прямо-пропорционально времени; на самом же деле — это не так, потому что сначала давление воды больше, чем впоследствии, когда воды в самоваре становится все меньше и меньше. — Камень, упавший в один колодец, падал в течение одной секунды; глубина колодца около 5 метров; камень, упавший в другой колодец, падал 2 секунды, как велика глубина второго колодца? Глубина эта не в 2, а в 4 раза больше глубины первого колодца. — Сторона одного квадрата больше стороны другого в 3 раза; во сколько раз площадь первого больше площади второго? Не в 3, а в 9 раз. Этот последний пример наиболее подходящ, потому что его результат учащиеся могут проверить самостоятельно, а не только принять на веру.

§ 3. Обратно-пропорциональные величины и способ приведения к единице.

Понятие об обратно-пропорциональных величинах можно укрепить в сознании учащихся тоже благодаря некоторому ряду целесообразных задач. Задачи эти и примеры должны учащихся привести к заключению о существовании таких величин, что с изменением одной в несколько раз другая изменяется в обратном отношении, т. е. с увеличением одной другая уменьшается, а с уменьшением — другая увеличивается, притом во столько же раз, или — точнее: с умножением одной из них на какое бы то ни было число другая делится на то же самое число. Решать эти задачи непременно с помощью так называемого приведения к единице нет часто никакой необходимости. (Да и вообще решать задачи нет сейчас надобности). Особенно это нецелесообразно, когда этот способ приводит к промежуточным результатам, неудобным с точки зрения здравого смысла.

Наиболее часто из обратно-пропорциональных величин встречаются: число рабочих и время, число дней и число часов ежедневной работы, необходимые для выполнения всей работы. Как раз в этих задачах приходится при приведении к единице наталкиваться на некоторые неудобства, о которых выше упомянуто. Пусть, например, предложена задача: „некоторую работу можно совершить в 20 дней, работая по 8 часов в день; спрашивается, по скольку часов в день надо работать для того, чтобы ту же работу окончить в 30 дней? Рассуждая по методу приведения к единице, начинают так: 8 часов в день надо работать, если эта работа может быть выполнена в 20 дней; для того же, чтобы ее кончить в 1 день, следовало бы в течение дня употребить в 20 раз большее число часов, т. е. 160 часов, что невозможно и противоречит здравому смыслу. Таких примеров можно привести сколько угодно и из них легко вывести, что способ приведения к единице во многих случаях неудобен.

Иногда при решении задачи на пропорциональные величины может получиться дробное число таких единиц, которые не могут быть выражены дробным числом. Пусть, например, известно, что 7 рабочих могут окончить некоторую работу в 20 дней; спрашивается, сколько рабочих нужно для того, чтобы окончить ту же работу в 15 дней? Решая задачу с помощью приведения к единице, мы получим, что для окончания работы в 15 дней нужно $9\frac{1}{3}$ рабочих. Но одной трети рабочего на свете нет, и такой ответ не соответствует здравому смыслу. Его возможно истолковать в том смысле, что нужна работа девяти человек и одна треть работы одного рабочего. Но и это толкование несколько отвлеченно, а гораздо проще исходить из вопроса о том, сколько рабочих дней нужно для окончания этой работы. Всего нужно *рабочих дней* 140. Если эту работу нужно окончить в 15 дней, то *рабочих дней* понадобиться в 15 раз меньше, т. е. $9\frac{1}{3}$ рабочего дня. К счастью, в жизни не приходится выполнять подобных вычислений с такой большой точностью.

§ 4. Задачи на обратно-пропорциональные величины.

При решении задач на обратно-пропорциональные величины, как и при решении всяких задач, на первом плане должен стоять не шаблон, а здравый смысл. Обратимся, например, к вышерассмотренной задаче. „Для окончания работы в течение 20 дней нужно каждый день работать по 8 часов; по скольку часов в день надо работать, чтобы кончить ту же работу в 30 дней?“

Если в этом случае имеется ввиду такая работа, что число часов ежедневной работы на самом деле обратно-пропорционально числу дней, в течение которых ее надо окончить, то прежде всего (потому что естественнее всего) надо рассчитать, сколько она требует рабочих *часов*. Это число рабочих часов равно 8×20, т. е. 160. Если возможно каждый день посвящать этой работе одинаковое число часов (а это в задаче предполагается, хотя об этом и не говорится), и если ее надо окончить в 30 дней, то для решения задачи надо 160 часов разделить на 30. Такой способ рассуждения отвечает существу вопроса и требованиям здравого смысла. Да он, к тому же, значительно яснее и доступнее разумению учащихся, чем способ приведения к единице. Представление о рабочем дне и о рабочем часе и т. п. гораздо доступнее учащимся и гораздо важнее, чем механическое применение так называемого приведения к единице.

Есть случаи, когда решение прямо очевидно. Если, например, 10 рабочим нужно для окончания работы 40 дней и если ее нужно выполнить в 20 дней, то рабочих понадобится 20, т. е. в два раза больше. — Аналогичное справедливо и для других величин, считаемых обратно-пропорциональными.

Задачи относительно длины и ширины куска сукна сводятся к вопросу о „площади" куска сукна; а относящиеся до цены товара и количества его сводятся к стоимости его и т. п. Даже в случае решения задачи этого рода с помощью приведения к единице внимание к существу дела только помогает решению задачи.

С помощью пропорции задачи на простое тройное правило, в которых мы имеем дело с обратно-пропорциональными величинами, разрешаются весьма поучительным образом. Нашу задачу можно вкратце записать так:

20 дн. — 8 ч.
30 дн. — X ч.

С научной точки зрения должна иметь место следующая пропорция:

$$X : 8 = \frac{1}{30} : \frac{1}{20},$$

откуда

$$X : 8 = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad X = \frac{16}{3}.$$

При такой постановке решения задачи надо только знать, что, если две величины (A) и (B) обратно-пропорциональны, и у нас есть собственные значения A_1 и A_2 первой из них и два соответствующих значения B_1 и B_2 второй, то пропорции:

$$A_1 : A_2 = B_2 : B_1$$
$$A_1 : A_2 = \frac{1}{B_1} : \frac{1}{B_2}$$

равносильны. Говоря иначе, A_1 и A_2 прямо-пропорциональны обратным значениям значений B_1 и B_2, т. е. дробям:

$$\frac{1}{B_1} \text{ и } \frac{1}{B_2}.$$

После достаточного числа упражнений в этом направлении, учащиеся могут себе усвоить и равносильность выше написанных пропорций и верность только-что приведенного свойства обратно-пропорциональных величин. Это понятно, если принять во внимание, что отношение

$$\frac{1}{B_1} : \frac{1}{B_2} \text{ равно отношению } B_2 : B_1.$$

Важность этого взгляда в образовательном отношении не может подлежать сомнению.

§ 5. Примеры обратно-пропорциональных величин.

Из обратно-пропорциональных величин можно указать еще следующую: площадь прямоугольника прямо-пропорциональна основанию; но если прямоугольник должен иметь известную площадь, то основание его обратно-пропорционально высоте. Из других обратно-пропорциональных величин доступны пониманию учащихся скорость движения (конечно, равномерного) и время, в течение которого тело должно пройти известное расстояние, величина дроби и знаменатель ее, множимое и множитель при постоянном произведении, частное и делитель при постоянном делимом в тех случаях, когда деление совершается без остатка. Учащиеся должны научиться быстро соображать, какие величины прямо и какие обратно-пропорциональны, и записывать так:

площадь прямоуг.-ка и основание его	— пр.
колич. работы и число рабочих	— пр.
число рабочих и число дней работы	— обр. и т. п.

§ 6. О правилах.

Распределение задач известного рода на так называемые: простое тройное и сложное тройное правила, правила процентов, учета векселей, товарищества, пропорционального деления, смешения 1-го рода, смешения 2-го рода, цепное и т. п., относится еще к тому времени, когда вся арифметика рассматривалась только как совокупность правил. Тогда *сознательному* усвоению учениками того или иного учебного материала и *методическому* обучению не придавалось никакого значения и не уделялось достаточно внимания. В старину было еще больше правил, чем теперь. Например, в учебнике арифметики некоего Видемана, вышедшем в свет, правда, в 1489 году, только для решения задач, считавшихся уместными в курсе арифметики, насчитывается более 20 правил. Вместе с правилами производства действий, в число которых входили и «действие» удвоения, и «действие» разделения пополам, всех правил в старину набиралось несколько десятков.

Задачи на так называемые „простое тройное правило“, „сложное тройное правило“ и т. п. так или иначе примыкают к учениям об умножении и делении дробей и к применению этих двух действий. Если задачи на эти два правила выделены в этой книге в отдельную статью, то это сделано только для удовлетворения требованиям установившихся в этом деле обычаев. Что касается задач на пропорциональное разделение, то они отнесены к числу задач алгебраического характера, к каковым они наиболее тяготеют, в чем мы убедимся ниже.

§ 7. Простое и сложное тройные правила.

Правила в истинном смысле этого слова в настоящее время все более и более уступают место сознательному разрешению задач, основанному на том или ином способе логического умозаключения. Стоит обратиться к так называемому простому тройному правилу, чтобы убедиться в том, что задачу на таковое представляет собою решительно всякая задача на умножение и деление. Действительно, возьмем задачу: „1 метр ситца стоит 3 руб. 50 коп.; что стоит 5 метров того же ситца?“ Здесь даны два значения одной величины (количество ситца) и одно, соответствующее одному из этих количеств, значение другой, прямопропорциональной ей, величины (стоимости товара), а требуется найти другое значение той же величины. Это — все условия, которые делают задачу отвечающей требованиям задачи на простое тройное правило. В такой же мере задачами на простое тройное правило являются задачи: „5 метров ситца стоят 17 руб. 50 коп.; что стоит 1 метр того же ситца?“ и „7 рабочих могут окончить работу в 5 дней; сколько рабочих понадобится для окончания той же работы в 1 день?“ и т. п. Но никому не приходит в голову считать эти задачи задачами на какое-то правило, а тем более — на правило тройное. Пора освободиться также от присвоения задачам на последовательное деление и умножение особенных названий, притом ничего не говорящих сознанию учеников, а только сбивающих их с толку.

§ 8. Итальянская практика.

При решении задач на „тройное правило“ особенно важна и для учащихся поучительна так называемая „итальянская практика“, которая часто освобождает учеников от „правил“, от рутины, от скучных записей, сокращений и т. п. Состоит прием этот в следующем: Пусть предложена такая незамысловатая задача: „8 метров сукна стоят столько же, сколько 63 метра ситца; сколько метров ситца можно купить вместо 14 метров сукна?“ Обычное расположение условий и решение следующее:

8 *м* сукна 63 *м* ситца

14 X

$$X : 63 = 14 : 8, \text{ откуда } X = \frac{63 \times 14}{8}$$

Этого результата можно и без пропорции достигнуть и весьма искусственным в этом случае способом приведения к единице. С точки зрения же итальянской практики задача решается так:

8 *м*	сукна	стоят	столько же,	сколько	63 *м*	ситца
4 „	„	„	„	„	$31\frac{1}{2}$	„
2 „	„	„	„	„	$15\frac{3}{4}$	„
14 „	„	„	„	„	$110\frac{1}{4}$	„

или же так:

$$\begin{array}{ll} 8 \text{ м сукна} & 63 \text{ м ситца} \\ 16 \text{ „ „} & 126 \text{ „ „} \\ 2 \text{ „ „} & 15\frac{3}{4} \text{ „ „}, \end{array}$$

откуда вычитанием $15\frac{3}{4}$ из 126 узнаем, что 14 *м* сукна стоят столько же, сколько $110\frac{1}{4}$ *м* ситца.

Одного взгляда на эти два последние способа решения достаточно, чтобы видеть преимущества итальянской практики. Вычисления с помощью приемов последней, конечно, отличаются большей наглядностью и большим изяществом, но требуют большей сознательности. Надо, однакоже заметить, что не всегда они достаточно быстро ведут к цели, и что увлечение ими также не заслуживает сочувствия.

§ 9. Предварительные записи последовательного деления и умножения.

Избегая введения в занимающую нас статью общепринятых способов решения задач на простое тройное правило, надо начинать дело с повторения сознательных записей в тех исключительных случаях, когда сначала требуется какое-либо число увеличить или уменьшить в несколько раз, а затем полученный результат уменьшить или увеличить в некоторое другое число раз. Этому повторению должно посвятить такие упражнения, например: если требуется сначала какое-либо число, например, 8 или $\frac{5}{7}$ уменьшить в 6 раз, а полученное затем увеличить, например, в 10 раз, то вместо того, чтобы писать следующие равенства: $8:6=\frac{8}{6}$; $\frac{8}{6}\times 10=\frac{80}{6}$, или $\frac{5}{7}:6=\frac{5}{42}$; $\frac{5}{42}\times 10=\frac{50}{42}$ и т. д., можно сразу написать

$$\frac{8\times 10}{6} \text{ и } \frac{5\times 10}{7\times 6}.$$

Здесь же ученики впервые встречаются с точкою зрения, которая господствует при обозначении действий над числами, обозначенными с помощью букв. С этой точки зрения не надобно производить требуемого записью ряда действий, а можно сначала только *обозначить* их с тем, чтобы потом воспользоваться некоторыми свойствами записанного результата. Только в конце концов надо произвести на самом деле некоторые действия. Ученики должны набить себе руку в своевременном проведении черты дроби, в сознательном записывании знаков умножения в надлежащем месте и в своевременном же записывании рядом с этими знаками умножения надлежащих чисел. Кроме того, ученики должны уяснить себе также внутренний смысл окончательного результата и тех приемов, которые употребляются для его достижения. Поэтому упражнений с ними в указанных направлениях должно проделать довольно много.

§ 10. Значение условий.

Решая задачи этого рода, ученики должны уяснить себе значение условий этих задач, а также уразуметь, что это значит, если говорят, что все прочие условия одинаковы. Пусть предложена задача, из которой явствует, что ров длиною в 27 метров в известное время могут вырыть 33 работника, а спрашивается, сколько землекопов понадобится для вырытия рва в 35 *м* длиною? Пусть при этом добавлено, что *все прочие условия одинаковы*. Это значит, что ширина — та же; что глубина рва — та же; что во втором случае рабочие такие же ловкие и прилежные; что грунт — такой же; что у работников такие же лопаты и т. д. и т. д., — одним словом, что все одинаково, *от чего зависит* успешность работы, что *влияет* на работу. Здесь встречается идея функциональной зависимости одной величины от других. На постепенное и постоянное введение и использование понятия о функциональной зависимости учителю надо обращать особенное свое внимание.

Одинаковые условия в задаче. Для того же, чтобы ученики вполне уяснили себе значение одинаковых условий, надо своевременно предложить задачи, в которых некоторые условия совершенно одинаковы. Интересно для суждения о том, насколько работа учеников отличается сознательностью, предложить им решение задач этого рода, без всякого предупреждения и без предварительной проработки подобных задач под руководством учителя.

Самостоятельные работы. При решении задач этого рода наибольшее значение надо придавать задачам, решаемым в классе под непосредственным руководством учителя, а не выработке навыка в *механическом* решении задач этого рода. Кроме того, это руководство учителя на этой ступени важно потому, что здесь встречается очень много частностей, могущих при проверке работы ускользнуть от бдительности учителя.

Здесь же уместно остановиться на том, что это значит, что, например, для вырытия рва в один метр нужно $\frac{23}{27}$ рабочего и как это понимать. Не значит ли это, что нужны $\frac{23}{27}$ доли *работы*, которую может исполнить один рабочий или, что нужны $\frac{23}{27}$ *доли рабочего дня?* — Задач этого рода надо с учениками проработать достаточное количество, притом непременно так, чтобы каждая частность вырабатывалась отдельно от другой.

§ 11. Обратно-пропорциональные величины.

Разнообразие вносят в простое тройное правило задачи, в которых речь идет об обратных друг другу величинах. Здесь ученикам, по меньшей мере, приходится немного подумать, прежде чем заняться изображением дроби, ведущей к окончательному ответу на вопрос. Полезно прежде решения задачи проработать с учениками несколько задач только до того пункта включительно, когда ученикам надо рассудить, больше или меньше единиц меры искомой величины, чем сколько их дано, потребуется для одной единицы меры другой величины. Вообще надо обращаться к более наглядным примерам, чем вопросы о землекопах, о ткачах и т. п., — к вопросам о мытье полов в школе, о заделке окон, об окраске полов школы, а в деревне — о навивании возов сена, о вязке снопов и т. п.

Когда случаи с целыми числами разработаны вполне, можно перейти к задачам с дробными данными. Надо предложить задачи, требующие не прямого перехода к способу приведения к единице, а сначала — перехода к какой-нибудь доле единицы, а затем уже — перехода к целой единице.

Это, конечно, требует непременно целесообразных, а не случайных упражнений.

§ 12. Пропорциональность величин.

Когда задачи на простое тройное правило учениками усвоены вполне, можно вернуться к упражнениям в суждении о пропорциональности (прямой и обратной) некоторых величин.

Учителю не надо бояться понятий о зависимости значений одной величины от значений другой, о *связи* между одной величиной и другой, о том, что каждую из двух пропорциональных величин можно принять за переменную независимую, а другую — за ее функцию. Не надо бояться и этих слов, которые можно ввести исподволь, без определений, а только в понятных контекстах: „*зависит*“ ли стоимость купленного мною товара от количества его?“ Или: „от чего это *зависит*, что пять килограммов сахарного песка стоят меньше, чем пять килограммов колотого сахара?“, или „есть ли какая-нибудь связь между расстоянием, которое пройдет человек в известный промежуток времени, и продолжительностью этого промежутка времени?“

§ 13. Итоги.

Обычно предлагаемые в школе способы решения задач на так называемое простое тройное правило, как это замечено выше, не требуют ни особенной изобретательности, ни особенного навыка в вычислениях. Кроме того, они недостаточно наглядно отвечают самому смыслу условий предложенной задачи. Если, например, предложена задача, по которой 127 метров ситца стоят 467 руб. 36 коп., а требуется узнать, что стоят 126 метров того же ситца, то для этого, конечно, не необходимо писать:

$$\frac{46736 \times 126}{127}$$

и только после этого узнавать окончательный результат. Следует только узнать, что стоит один метр (для чего придется разделить 467 руб. 36 коп. на 127), а затем полученное число рублей и копеек, а именно 3 руб. 68 коп., вычесть из стоимости всех 127 метров, т. е. из 467 руб. 36 коп. Равным образом, если нам известно, что стоят 15 *м* сукна, а требуется найти, что стоят 25 *м*, то нет надобности непременно делить стоимость 15 *м* на 15, а полученное умножить на 25. То же самое вычислим, узнав, что стоят 5 *м* (т. е. разделив данное число на 3) и помножив полученное на 5, и т. п. Случаев, когда можно применить подобные способы решения задач на так называемое тройное правило, бесчисленное множество. Задач же, которые можно разрешать только с помощью приведения к единице и с помощью пропорций, строго говоря, в жизни встречается очень мало. А потому учитель, желающий распространить требования полной сознательности в решении учениками задач чисто арифметических также и на случаи решения ими задач на так называемое тройное правило, может с очень большой пользой не только для развития этой сознательности, но и для придания большей практичности способам решения задач, обратить внимание на решение *всех* задач этого рода также и способами „итальянской практики".

§ 14. Сложное тройное правило.

К задачам на сложное тройное правило надо перейти, сначала вводя только одно новое условие, притом непременно допускающее чрезвычайно быстрое вычисление. Вообще, нельзя не признать, что задачи на сложное тройное правило, большей частью, страдают преувеличенной сложностью, не только никогда не встречающейся в жизни, но и чрезвычайно редкой даже в области научной. Но введение новых условий и выяснение ученикам значения этих условий должны итти постепенно. Ученики прежде всего должны научиться только *разбираться* в условиях. С этой точки зрения крайне важно, чтобы ученики могли себе отдать полный отчет в том, какие именно величины встречаются в данной задаче: число дней, число часов ежедневной работы, число переписанных листов, или число каменщиков и т. д.

Равным образом важно, чтобы ученики отдавали себе отчет в том, в каком отношении находится то значение величины, которое мы должны определить, к остальным величинам, два значения которых нам даны. Это уразумение должно предшествовать или, в крайнем случае, сопутствовать усвоению учениками самых способов решения задач этого рода. Подобные предварительные упражнения вносят сознательность во всю последующую работу учеников над задачами занимающего нас типа.

§ 15. Методические точки зрения при решении задач на сложное тройное правило.

Сложного тройного правила давно уже в старинном и истинном смысле последнего слова в настоящее время нет.

В настоящее время нет также ни простого тройного правила, ни правила процентов, ни правила учета векселей. Этих правил даже не формулируют.

Но это не исключает необходимости отдать себе отчет в том, что надо сделать для наилучшего, в воспитательном и техническом отношениях, усвоения детали приемов решения задач того или иного рода.

Прежде всего надо учителю помнить, что и решение задач на так называемое сложное тройное правило должно считаться с той методической точкой зрения, по которой и на высших ступенях обучения надо преодолевать в каждый данный методический момент только по одной трудности за раз. Поэтому начинать надо дело с задач с тремя величинами, в которые не входят обратно-пропорциональные величины.

После этого надо научить детей записывать условия задачи вкратце, причем значения той величины, из которых одно неизвестно, надо записывать в первый (или в последний) столбец, например, так (условия задачи: переписчик в течение 4 дней может переписать 40 листов, работая по 9 часов в день; во сколько дней он перепишет 60 листов, работая по 12 часов в день?):

4 д.	40 л.	10 ч.
X	60 л.	12 ч.,

или так:

40 л.	10 ч.	4 д.
60 л.	12 ч.	X.

Более или менее значительные затруднения сопряжены со словесной формулировкой задач. Она требует большой власти над своей речью и представляет упражнение и в языке и в арифметике. Требовать от учащихся, если возможно так выразиться, стилистической обработки текста условий, конечно, не всегда возможно, но к ней стоит стремиться. Можно разрешить учащимся говорить простыми предложениями, т. е. без деепричастий.

Когда дети усвоили *сущность* записей и решения задачи с пятью условиями, можно перейти к задачам с семью условиями (т. е. четырьмя величинами).

Истинное значение решения учениками задач на так называемое сложное тройное правило вовсе не так велико, как это иногда кажется. Главная цель — выяснение влияния условий на решение вопроса — достигнута раньше. Практического же значения задачи этого рода не имеют. Поэтому следует ограничиваться задачами с тремя, много — четырьмя величинами.

§ 16. Сокращение дробей.

При решении задач на „сложное тройное правило" приходится иметь дело с дробями, числители и знаменатели которых представляют произведения ряда сомножителей. При сокращении таких дробей весьма удобна запись в строку, а не „многоэтажная", обыкновенно практикуемая.

Дана дробь

$$\frac{336 \times 12 \times 9}{8 \times 6}.$$

Сокращаю 336 и 8 на 4; записываю после цифр 9 и 6 знак умножения и частные: 84 и 2. Затем сокращаю 84 и 2 на 2 и опять пишу знаки умножения (после 84 и 2) и полученные частные и т. д.:

$$\frac{\cancel{336} \times \cancel{12} \times 9 \times \cancel{84} \times 42 \times 2}{\cancel{8} \times \cancel{6} \times \cancel{2} \times 1}$$

Записи двух чисел, сокращаемых на один и тот же сомножитель, зачеркнуты одинаковым образом.

§ 17. Сложное тройное правило и приведение к единице.

Пусть предложена задача (очевидно, не удовлетворяющая жизненным условиям), которую мы возьмем только для себя, не считая ее подходящей для школы: „артель землекопов в 26 человек, работающих машинами, может вырыть канал в 96 *м* длины, 20 *м* ширины и 12 *дм* глубины в течение 40 дней, работая по 12 часов в день; какой длины канал могут вырыть 39 землекопов, если ширина канала должна быть 10 *м*, а глубина 18 *дм*, работая в течение 80 дней по 10 часов в день?"

Рассуждаем так:

Канал в 96 *м* длины могут при известных условиях вырыть 26 человек; при тех же условиях один человек выроет канал длиною в

$$\frac{96}{26}\ м,$$

а 39 человек при тех же условиях выроют канал длиною в

$$\frac{96 \times 39}{26}\ м.$$

Такой длины канал может быть вырыт по условию в течение 40 дней; в течение же одного дня может быть вырыт канал длиною в

$$\frac{96 \cdot 39}{26 \cdot 40}\ м\ldots$$

а в течение 80 дней может быть вырыт канал длиною в

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80}{26 \cdot 40}\ м\ldots$$

Такой длины канал можно вырыть, по условию, при 12-часовой ежедневной работе, а при часовой работе можно вырыть канал длиною в

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80}{26 \cdot 40 \cdot 12}\ м\ldots$$

Такой длины канал может быть вырыт при часовой работе, а при десяти часовой ежедневной работе может быть вырыт канал длиною в

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80 \cdot 10}{26 \cdot 40 \cdot 12}\ м\ldots$$

Такой длины канал может быть вырыт при условии, что ширина канала равна 20 *м*. Если бы требовалось вырыть канал в один метр шириною, то длина канала была бы, очевидно, в 20 раз больше, чем при ширине канала равной 20 *м*, т. е. была бы равна

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 20}{26 \cdot 40 \cdot 12}\ м\ldots$$

Такой длины канал был бы вырыт, если бы ширина была равна 1 *м*. Но ширина канала должна быть равна 10 *м*; поэтому длина канала, очевидно,

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 20}{26 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 10}\ м\ldots$$

Такой длины канал был бы вырыт, если бы глубина была равна 12 *дм*, а при глубине в 1 *дм* был бы вырыт канал в 12 раз длиннее, т. е. в

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 12}{26 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 10}\ м\ldots$$

Такой длины канал был бы вырыт, если бы глубина его была равна одному дециметру; но глубина канала на самом деле должна быть равна 18 *дм*, а потому *длина канала*, очевидно, будет в 18 раз меньше, т. е. равняться

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 12}{26 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 18}\ \text{м} \ldots [1]$$

Теперь остается только произвести сокращение этой дроби.

Упражнения в записи, подобной вышенамеченной, могут быть сокращены в том смысле, чтобы искомый ответ развивался из второй строчки, не требуя десяти отдельных записей, а только одной, постепенно изменяющейся. Тогда в конце концов получится такая запись, которую ученики должны раньше всего изготовить:

26 чел.	40 дней	12 час.	20 *м* шир.	12 *дм*. гл.	96 *м* дл.
1 „	40 „	12 „	20 „ „	12 „ „	„ „
39 „	40 „	12 „	20 „ „	12 „ „	„ „
39 „	1 „	12 „	20 „ „	12 „ „	„ „
39 „	80 „	12	20 „ „	12 „ „	„ „
39 „	80 „	1 „	20 „ „	12 „ „	„ „
39 „	80 „	10 „	20 „ „	12 „ „	„ „
39 „	80 „	10 „	1 „ „	12 „ „	„ „
39 „	80 „	10 „	10 „ „	12 „ „	„ „
39 „	80 „	10 „	10 „ „	1 „ „	„ „
39 „	80 „	10 „	10 „ „	18 „ „	„ „

Когда вышеприведенная запись сделана, ученик под последней записью проводит черту и начинает, переходя от верхней строчки к следующей, от второй к третьей и т. д. до последней включительно, составлять ответ:

$$\frac{96 \cdot 39 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 12}{26 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 18}\ \text{м} = 320\ \text{м}.$$

§ 18. Сложное тройное правило и пропорции.

С помощью пропорций задача, подробно рассмотренная выше, может быть написана так:

96 *м* дл.	26 чел.	40 дн.	12 час.	20 *м* шир.	12 *дм*. гл.
a „ „	39 „	40 „	12 „	20 „ „	12 „ „
b „ „	39 „	80 „	12 „	20 „ „	12 „ „
c „ „	39 „	80 „	10 „	20 „ „	12 „ „
d „ „	39 „	80 „	10 „	10 „ „	12 „ „
x „ „	39 „	80 „	10 „	10 „ „	18 „ „

Пропорции получаются следующие:

$$a : 96 = 39 : 26$$
$$b : a = 80 : 40$$
$$c : b = 10 : 12$$
$$d : c = \frac{1}{10} : \frac{1}{20}$$
$$x : d = \frac{1}{18} : \frac{1}{12}$$

Прием, основанный на том свойстве пропорции, благодаря которому пропорции можно почленно перемножать, конечно, довольно быстро ведет к цели.

---

[1] Каждую строчку, отмеченную многоточием, ученики должны повторить неоднократно, чтобы влияние каждого нового условия уяснялось учеником постепенно.

Но можно, начав с первой пропорции, прибегнуть к способу исключения неизвестных с помощью подстановки, часто производимой изустно. Из первой пропорции, попутно сократив 39 и 26 на 13, получим $a = 96 \times \frac{3}{2}$, но $b = 2a$, а потому

$$b = 96 \times \frac{3}{2} \times 2;$$

так как

$$c = \frac{5}{6} b,$$

то

$$c = 96 \times 3 \times \frac{5}{6};$$

но $d = 2c$, а потому

$$d = 96 \times 3 \times \frac{5}{6} \times 2;$$

подставив это значение в последнюю пропорцию, получим, производя попутно сокращения, что

$$x = 96 \times 5 \times \frac{2}{3} = 320.$$

Как велика экономия мысли, слов и действий в этом решении задачи может оценить всякий, проработавший ту же задачу способом приведения к единице.

§ 19. Третий способ решения задач на сложное тройное правило.

Дело надо свести в нашей задаче к числу рабочих *часов*, необходимых для выемки известного количества *кубометров* земли. Действительно, для вырытия канала, при всех данных условиях, требуется работа 26 рабочих в течение 40 дней при 12-часовой работе, или всего рабочих часов

$$12 \times 40 \times 26, \text{ т. е. } 12480 \text{ часов.}$$

Емкость канала, вырытого в это время, равна числу кубометров, которое равно произведению

$$96 \text{ \textit{куб. м}} \times 20 \times 1{,}2, \text{ т. е. } 2304 \text{ \textit{куб. м}}.$$

Для вырытия другого канала неизвестной нам длины число рабочих часов равно:

$$10 \times 80 \times 39, \text{ т. е. } 31200 \text{ часов.}$$

Длина этого рва нам неизвестна, стало-быть, нам неизвестна также его емкость. Но 2304 *куб. м* можно вырыть в 12480 часов, а потому в один час можно вырыть

$$\frac{2304}{12480} \text{ \textit{куб. м}},$$

а в 31200 часов в 31200 раз больше

$$\frac{2304 \cdot 31200}{12480} = 5760.$$

Стало-быть, емкость второго канала равна 5760 *куб. м*. Но глубина его, по условию, равна 1,8 *м*, а ширина — 10 *м*. Емкость же канала с прямоугольным дном и прямоугольными стенками равна длине, помноженной на ширину и, сверх того, помноженной на глубину. А потому длина второго канала в метрах равна

$$5760 : 18 \text{ или } 320 \text{ \textit{м}}.$$

Легко видеть, что этот способ более отвечает требованиям здравого смысла и надлежащего обучения: а) в нем нет того шаблона, к которому обыкновенно сводится решение задач на сложное тройное правило; б) на его усвоение не приходится затрачивать столько времени и труда, как на обычный способ; в) он от учащихся требует более активной работы и доступной им сообразительности; г) далее, он сближает способ решения задач этого рода с синтетическим способом решения сложных задач вообще, не ставя задач на сложное тройное правило на незаслуженный ими в курсе арифметики отдельный пьедестал; д) он вносит в учебный предмет некоторое единство, столь необходимое не только с логической точки зрения, но и с точки зрения методической, и е) ни один из промежуточных результатов вычисления не нуждается в каком-либо оправдании и чисто логическом освещении, потому что среди этих результатов не встречается ни невозможного числа часов ежедневной работы, ни дробного числа людей и т. д. Но лучше всего, конечно, в этих случаях прибегать к помощи уравнения.

§ 20. Понятие о функциональной зависимости.

При изучении решения задач на сложное тройное правило невозможно установить точного понятия о функциональной зависимости одной величины от других. Дело в том, что крайне трудно словесно формулировать тот ряд действий, который надо совершить над частными значениями одних величин для того, чтобы получить искомое частное значение некоторой определенной величины. Но ученики должны понимать, что при отыскании длины некоторого канала в нашей задаче над числом, выражающим длину другого канала, надо произвести *определенный* ряд действий. Не надо стремиться к общему определению функции, не надо думать, что это понятие может быть установлено сразу. Но заронить хотя бы сначала и *смутную* идею о функциональной зависимости можно и полезно, особенно если к идее возвращаться при всяком удобном случае.

§ 21. Наименования в задачах на сложное тройное правило.

Вопрос о наименованиях в составленной при решении задачи на сложное тройное правило формуле допускает четыре ответа. 1) Наименования совсем не нужны, так как наименование окончательного результата должно быть ясно без всяких отметок. 2) Наименование может быть, как это сделано выше, выписано рядом с окончательным результатом, а учащимся во все время вычисления только называемо, но не записываемо. 3) Наименованием снабжена раз-навсегда только запись первого числа в числителе, так что в нашей задаче окончательный результат будет записан такой:

$$\frac{96\ \textit{м} \times 39 \times 80 \times 10 \times 20 \times 12}{26 \times 40 \times 12 \times 10 \times 18}.$$

4) Известный английский физик Оливер Лодж считает возможным запись каждого числа снабжать наименованием, так что записанный результат решения нашей задачи может иметь, по его мнению, следующий вид:

$$\frac{96\ \textit{м} \times 39\ \text{чел.} \times 80\ \text{дн.} \times 10\ \text{час.} \times 20\ \textit{м} \times 12\ \textit{дм}}{26\ \text{чел.} \times 40\ \text{дн.} \times 12\ \text{час.} \times 10\ \textit{м} \times 18\ \textit{дм}}.$$

Лодж при этом указывает на то, что единицы одного и того же наименования суть множители, которые могут быть сокращаемы: час с часом, человек с человеком и т. п. Как ни странна подобная запись для учителей, привыкших к записям, обычно практикуемым в учебниках, в ней есть также некоторые удобства.

§ 22. Процентные вычисления.

Задачи на процентные вычисления можно различать двух родов: 1) вычисления денежно-коммерческого содержания и 2) вычисления отвлеченные. Задачи второго рода бывают преимущественно двоякого содержания: либо надо найти известное число процентов какого-нибудь числа, либо приходится вычислить, скольким процентам одного числа равно другое[1]. Задачи этого рода разрешаются сообразно с тем, что слово „процент" заменяет собою два слова „сотая доля".

Задачи, в которых требуется узнать процентные деньги за целый год, который считают в этих случаях равным 360 дням, или за известное число дней решаются очень легко и просто. Учащиеся должны только вполне усвоить себе, что выражение: капитал G приносил p процентов годовых есть только более краткая формулировка следующего утверждения: капитал G был внесен, например, в сберкассу с тем, чтобы по прошествии года сберкасса вернула этот капитал и еще p сотых долей такого же капитала; если же сберкасса пользовалась капиталом не в течение года, а в течение другого промежутка времени, то будем полагать, что процентные деньги пропорциональны промежутку времени. И задачи этого рода могут быть разрешены, сообразуясь с тем, что слово „процент" заменяет собою слова „сотая доля".

Но обратимся к итальянской практике, пользуясь которою многое можно вычислить изустно.

Итальянская практика.

Пусть требуется вычислить, какую прибыль (какие „процентные деньги") принес капитал в 256 руб., отданный в банк на один год по семи процентов годовых. Прибегая к итальянской практике, получим следующий ряд совершенно ясных строчек:

1% с 256 р. равен 2 р. 56 к.
6% „ 256 „ „ 15 р. 36 „
7% с 256 р. равны 17 р. 92 к.

Если приходится вычислить процентные деньги при таксе, выражающейся смешанным числом, то и в этом случае нетрудно найти искомый результат.

Пусть, например, требуется узнать, как велики процентные деньги, причитающиеся с 594 р., отданных в рост по $3\frac{1}{2}$% годовых, через год. Можно рассуждать так:

1% с 594 р. равен 5 р. 94 к.
2% „ 594 „ равны 11 р. 88 к.
$\frac{1}{2}$% „ 594 „ равны 2 р. 97 к.
$3\frac{1}{2}$% с 594 р. равны 20 р. 79 к.

§ 23. Процентные вычисления и сложное тройное правило.

Пристрастие к сложному тройному правилу привело к тому, что задачи на денежные процентные вычисления в течение многих лет рекомендовалось решать по шаблону задач на сложное тройное правило. При этом рекомендовалось записывать задачи, примерно, так:

100 р. — 1 год — 6 р.
2 780 р. — 11 мес. — x,

[1] Сюда же относятся задачи на нахождение числа по данным его процентам. (*Прим. ред.*)

а в случае неизвестной процентной таксы, так:

$$\frac{\begin{array}{l}2780 \text{ р.} - 11 \text{ м.} - 76 \text{ р.}\\100 \text{ р.} - \ \ 1 \text{ г.} \quad\ \ x\end{array}}{}$$

и т. п.

Решение задач этого рода сводится к вопросам о том; а) что означает слово „процент", б) что это значит „отдать капитал по столько-то процентов годовых" и в) сколько причитается процентных денег за один год. Для нас более интересно, как именно ввести детей в интересы этих вычислений, выходящих далеко за пределы собственно-детских интересов. Что значат слова „процент какого-либо числа" или „процент с какого-либо числа", ученики знают из всего предыдущего курса. Несколько иное значение получает слово „процент" в выражениях: „некто взял денег взаймы из $5^0/_0$ годовых", или выражение „кто-то отдал деньги на проценты". Опыт показывает, что ученики, зная только то или иное значение слова „процент", далеко еще не подготовлены к самостоятельному уразумению того, что означает это слово в других случаях, — в особенности, если от них требуют сразу решать задачи, для которых прежнее значение слова „процент" заменено новым. Поэтому необходимо предварительными, соответствующим образом подобранными упражнениями привести учащихся к новому пониманию слова „процент".

§ 24. Понятие о функциональной зависимости.

При решении задач на вычисление процентных денег уместно вернуться к значению слов „функция" и „функциональная зависимость". Если над рядом чисел надо совершить некоторый определенный род действий, то иногда говорят, что результат этих действий есть „функция" тех чисел, над которыми произведен этот ряд действий. При этом числа, над которыми этот ряд действий должно произвести, должны быть до поры до времени неопределенными. Можно сказать, что сумма двух чисел вообще есть некоторая функция слагаемых. Но невозможно говорить, что 7 есть функция 3 и 4 единиц. Другое дело уравнения

$$y = 4 + x \quad \text{или} \quad y = x + t.$$

В этом случае можно сказать, что y представляет собою некоторую функцию икса, и что уравнение $y = 4 + x$ выражает функциональную зависимость между y'ом с одной стороны и x'ом — с другой. Аналогичное справедливо относительно второго уравнения: $y = x + t$. Оно свидетельствует о том, что для получения численного значения буквы y надо совершить сложение численных значений x и t.

Когда понятие (повторяем, примитивное) о функции учащимися усвоено, можно обратиться к составлению уравнения, устанавливающего функциональную зависимость между процентными деньгами с одной стороны и капиталом, процентною таксою и числом дней, в течение которых капитал приносил доход, — с другой.

Тогда получаем уравнение

$$c = \frac{C \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360},$$

где буква c обозначает процентные деньги, C — капитал, p — процентную таксу и t — число дней, в течение которых капитал приносил доход.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА.

§ 1. Классификация задач алгебраического характера.

Задачи алгебраического характера, если для их решения прибегать к уравнениям, можно строго различать двух родов: задачи с одною неизвестною и задачи с двумя неизвестными или бо́льшим числом их. Конечно, задачу со многими неизвестными, если она принадлежит к числу определенных, можно решить с помощью уравнения с одной неизвестной, выразив все остальные неизвестные в зависимости от этой одной неизвестной. Но на деле часто удобнее эти зависимости выражать в виде записанных уравнений с несколькими неизвестными.

Задачи алгебраического характера с одной неизвестной можно распределить на следующие группы: а) задачи на задуманное число, б) задачи на пропорциональное разделение, в) задачи, в которых спрашивается об *одном* из чисел, когда даны разность и отношение между двумя числами, г) задачи, приводящие к уравнениям вида $ax+b=cx+d$. Из них только задачи под литерами „б" и „в" включены из чисто методических соображений в рубрику задач с одной неизвестной величиной, хотя они логически при некоторых условиях приводят к уравнениям с двумя неизвестными; это часто зависит от постановки вопроса.

Задачи с двумя неизвестными, предлагаемые в большинстве арифметических задачников, относятся до отыскания *двух* неизвестных чисел при следующих условиях: а) даны сумма и разность двух чисел; б) даны сумма двух чисел и отношение одного числа к другому; в) даны сумма двух целых чисел, частное и остаток от разделения большего на меньшее; г) даны разность двух чисел и их отношение; д) задача приводит к системе двух совместных уравнений:

$$ax+by=c.$$
$$mx+ny=p.$$

§ 2. Так называемое „арифметическое" решение задач алгебраического характера.

Решение почти всех задач, перечисленных в предыдущем параграфе, часто называют арифметическим потому, что оно является только решением без помощи записанных уравнений. Чаще всего, однако, при так называемом „арифметическом" решении употребляются уравнения, но только не записанные. Арифметическим, тем более, нельзя назвать такое решение задач, когда неизвестные числа обозначены римскими цифрами, I, II, III и т. п., и если при решении задач эти обозначения служат также, вместе со знаками действий и равенства, для записывания результатов действий, получаемых на основании условий этих задач. Разница только в том, что вместо латинских или других букв употреблены римские цифры. Естественнее всего задачи алгебраического характера решаются с помощью уравнений. Довольно просто они чаще всего разрешаются с помощью прямой линии. Наименее естественно они разрешаются без помощи наглядных пособий, к числу каковых надо отнести не только прямую линию, но иногда также уравнения. [1] Конечно, задачи алгебраического характера не могут считаться обязательною составною частью курса арифметики, подлежащего непременному усвоению детьми, учащимися в школе первой ступени.

§ 3. Задачи на задуманное число.

Задачи на задуманное число (задачи-загадки), наиболее тесно соприкасающиеся с задачами чисто-арифметическими, должны быть составляемы так, чтобы после известного ряда действий, произведенных над задуманным числом, в результате получилось число известное. Задачи должны быть таковы, чтобы действия эти шли последовательно: сначала производилось бы действие над неизвестным числом, потом — над полученным результатом, затем — над вновь полученным результатом и т. д.

Уравнения. Уравнения, которые можно при этом составить, требуют иногда многочисленных скобок, что для школы первой ступени совершенно излишне. Вообще лучше не предлагать задач этого рода, если этих скобок потребуется более двух родов, так как в *записывании* уравнений с помощью скобок в таких случаях представляются бо́льшие трудности, чем в решении самой задачи.

Поэтому первое место надо отвести задачам с одной неизвестной величиной, требующим только двух действий: сначала — умножения и сложения, затем — умножения и вычитания, далее — вычитания и умножения, и, наконец, — сложения и деления. Например: я задумал число, помножил его на 4, прибавил к полученному 7, и в результате получил 39; какое я задумал число?.. — С помощью икса эта задача решается так: я задумал число x, помножил его на 4 и получил $4x$, прибавил к полученному 7 и получил $4x+7$. По условию получилось 39, и потому:

$$4\,x+7=39.$$

Для решения этого уравнения надо сначала смотреть на дело исключительно с точки зрения арифметической, а именно, с той точки зрения, по которой $4x$ — неизвестное слагаемое, 7 — слагаемое известное, а 39 — их сумма. Припомнив, что каждое слагаемое данной суммы двух чисел равно этой сумме, уменьшенной на другое слагаемое, мы получим, что $4x=32$. Рассуждая далее над иксом, как над неизвестным множимым, произведение которого на известный множитель (т. е. на 4) нам известно и равно 32, мы получим, что буква x в этом случае обозначает число 8 или, как говорят в таких случаях, что $x=8$. Подобный же ход рассуждений может быть употребляем и для всех подобных задач этого отдела. Что же касается небуквенного способа решения задач этого рода, то к нему надо учеников подвести путем наводящих вопросов и анализа условий задачи.

---

[1] Неосновательно думать, будто так называемый арифметический способ решения всегда легче алгебраического. Лишь в очень редких случаях это так. Поэтому учитель должен себе отдавать полный отчет в том, с каким именно случаем он имеет дело в данной задаче.

Анализ условий задач на задуманные числа.

Анализ задач этого рода и вообще задач алгебраического характера значительно отличается от анализа задач чисто-арифметических. В этом последнем случае, исходя из вопроса, можно путем более или менее общих рассуждений добраться до установления плана решения довольно скоро (если предложенные чисто-арифметические задачи, конечно, не принадлежат к числу особенно многосложных). Другое дело — задача алгебраического характера. Трудность ее анализа зависит не столько от многочисленности условий, сколько от той формы, в которую облечена, — если можно так выразиться, „запрятана", — зависимость между данными и неизвестными членами.

Пусть предложена та же задача, что выше: задумано число; оно умножено на 4; к полученному прибавлено 7, в результате получилось 39; чему равно задуманное число? — О чем спрашивается? (О том, как велико задуманное число.) — Что нам относительно этого задуманного числа известно? (Нам известно, что оно помножено на 4.) — Что нам нужно знать для того, чтобы определить, как велико задуманное число? (Нам нужно знать, сколько получилось от умножения на 4.) — Известно ли нам, сколько получилось от умножения его на 4? (Нет, не известно.) — Что нам известно относительно того числа, которое получилось от умножения задуманного числа на 4? (Нам известно, что к нему прибавлено 7.) — Можем ли мы на основании этого узнать, сколько получилось от умножения задуманного числа на 4? (Нет, не можем.) — Что нам необходимо знать для того, чтобы было возможно определить то число, которое получилось от умножения задуманного числа на 4? (Необходимо знать, сколько получилось от прибавления 7 единиц к этому числу.) — Известно ли нам, сколько получилось от прибавления 7 единиц к тому числу, которое получилось от умножения задуманного числа на 4? (Известно: от этого прибавления получилось 39.) — Можем ли мы на основании этого узнать, сколько получилось от умножения задуманного числа на 4? — Будем ли мы в состоянии потом, когда узнаем, сколько получилось от умножения неизвестного числа на 4, узнать также, сколько задумано? (Будем в состоянии.) — Почему мы будем в состоянии узнать это? (Потому что в этом случае мы будем знать, что от умножения некоторого неизвестного числа на 4 получилось некоторое известное число.)

Ход вопросов и анализа нашей сравнительно вовсе незамысловатой алгебраической задачи, как это видно из вышеизложенного, не может быть признан ни прозрачным, ни достаточно интересным для ученика. Мы притом совершили только анализ, а после этого анализа надо еще установить план решения и затем уже выполнить тот ряд действий, который выражен следующими простыми строчками:

$$39 - 7 = 32;$$
$$32 : 4 = 8.$$

Очевидно, что небуквенное *аналитическое* решение этой задачи (и, конечно, весьма многих других задач алгебраического характера), если к нему приступать по всем правилам искусства, т. е. с подробным анализом, установленным планом решения и т. д., представляет для учеников весьма большое количество упражнений, малосодержательных, крайне громоздких, отличающихся схоластическим направлением и пристрастием к бесплодной, для учеников мало доступной и неинтересной, диалектике.

Учитель должен по возможности нагляднее и, если возможно, картиннее освещать решение задач этого рода. Он не должен бояться ни жеста, ни оживленного чтения задачи, ни выразительности речи при ее решении, а напротив — стремиться в своей работе к возможно большему использованию всех, имеющихся у него, средств воздействия на воображение и суждение учеников. Он не безучастно должен говорить о том, что некто прибавил к какому-то числу 7 и в результате получил 39, а должен сказать это так, чтобы ученики постигли, что именно от того, что к числу прибавлено 7 единиц, а не больше и не меньше, получилось в результате ровно 39 единиц, а не больше и не меньше. Освободиться от требований выразительности и от упомянутой выше картинности речи учитель может только впоследствии, когда уже самый прием решения задач подобного рода учениками усвоен во всех своих частностях.

Решение очень многих задач алгебраического характера без помощи написанных уравнений по большей части остается все-таки чисто-алгебраическим. Оно отличается от последнего только в том отношении, что буква x заменена в нем двумя словами: „неизвестное число", что уравнение не записано, и что ученики должны, стало-быть, постигнуть одним воображением то, что не облечено в видимую запись. Что естественнее и легче — понятно само собою.

Наименования в записи уравнения. Внимания со стороны учителя, притом с самого начала, заслуживает естественное желание учеников записывать в уравнении также наименования тех чисел, над которыми приходится совершать действие.

Так, например, при решении задачи, в которой 8 рублей надо помножить на x, а к полученному прибавить 6 рублей, у учеников есть стремление писать так: 8 р. $\times\, x + 6$ р., или, что еще хуже: $8 \times x + 6$ р. В этом случае надо выяснить ученикам, что в первой записи наименование излишне, так как мы хорошо помним, что обозначают цифры 8 и 6, а во второй — неправильно, так как $8 \times x$ — число отвлеченное, а 6 р. — именованное; к отвлеченному же числу прибавить именованное невозможно, а обозначать подобное действие поэтому недозволительно.

Задачи с неизвестным результатом. Что касается тех задач, в которых после производства некоторых двух действий получается *неизвестный* результат, то алгебраическое решение задач этого рода не представляет собою ровно никакого затруднения. Пусть, например, задача гласит так: к неизвестному числу прибавлено 257 единиц, и в результате получилось удвоенное неизвестное число; как велико неизвестное число? — Уравнение получается такое:

$$x + 257 = 2x, \text{ откуда } x = 257.$$

При этом $2x$ сумма, x одно слагаемое, а 257 другое, и если из суммы ($2x$) вычесть слагаемое (x), то получится один икс, который „равен" 257. Небуквенное же решение гласит так: если к неизвестному числу прибавить 257 единиц, то получится удвоенное неизвестное число; *удвоенное* неизвестное число можно получить из неизвестного числа только в том случае, если к неизвестному прибавлено *такое* же число, как оно само;

прибавлено 257 единиц, и при этом получилось удвоенное неизвестное число; стало-быть, 257 и есть число, равное неизвестному. Хотя здесь нет ни буквы x, ни записанного уравнения, но тем не менее это — рассуждение чисто-алгебраическое. Здесь буква x только заменена в нем двумя словами „неизвестное число", и уравнение не записано. Понятно поэтому, что ученики, совершенно не знающие алгебраического приема, очень затрудняются в этом рассуждении, что всякий учитель-практик, без сомнения, откровенно подтвердит. Многословие же при отсутствии уравнения только вредит, а не помогает делу.

Несколько последовательных действий. Следующее место среди задач, имеющих дело с одною неизвестною величиною, занимают задачи, требующие последовательного производства нескольких действий. Такова, например, задача, гласящая так: если задуманное число помножить на 3, к полученному прибавить 18, а вновь полученное разделить на 6, то получится 18; какое число задумано? Приведенная выше задача с помощью икса разрешается следующим образом: задумано число x; от умножения его на 3 получилось $3x$, от сложения полученного результата с 18 получилось $3x+18$; вновь полученное надо разделить на 6, и в окончательном результате получится 18, т. е. уравнение получится такое:

$$(3x+18) : 6 = 18.$$

Отсюда, на основании свойства делимого,

$$3x+18 = 18 \times 6, \text{ или } 3x+18 = 108;$$

тогда, на основании известного свойства слагаемого,

$$3x = 90; \quad x = 30.$$

При небуквенном разрешении многих задач, анализ задачи и установление плана ее, если к ним отнестись с требуемою правилами анализа и установления плана полнотою вопросов, слишком громоздки и несоразмерны со степенью того интереса, который ученики могут проявлять по отношению к разным диалектическим тонкостям этого рода. Есть сторонники взгляда, по которому ученики должны просто выучить способы решения типических задач, при решении коих требуется применение каких-либо особенных приемов. Это — взгляд тоже неверный.

Надо признать, что в задачах интересующего нас типа изобретательность и наблюдательность в направлении внутреннего построения задачи полезнее подробного и утомительного анализа ее. При всем уважении к анализу, как методу *мышления*, надо относиться с уважением также и к здравому смыслу и к той изобретательности, которою обладает всякий, не подавленный правилами, ум. В этом смысле изобретательная, так называемая эвристическая форма обучения приводит к гораздо лучшим результатам, чем строго проведенный анализ задач этого рода, и особенно — чем выученные наизусть правила решения „типических" задач.

Записывать условия задач занимающего нас рода учитель и ученики могут следующим образом:

$$\times 3; \ +18; \ : 6; \ = 18.$$

Исходя из этой записи, надо начинать рассуждение с последней, правой записи и, последовательно восходя к первым записям, можно быстро прийти к результату. Это делается, примерно, следующим образом:

Какое было последнее действие? (Деление.) — На сколько какое то число было разделено? (На 6.) — Что получилось в частном? (18.) — Что можно узнать? (Можно узнать, какое число было разделено на 6.) — Каким образом можно это узнать? (Умножив 18 на 6.) И т. д.

В конце концов ученики доберутся до того, что без вопросов учителя научатся рассуждать так: число 18 получилось от разделения какого то числа на 6; делимое в этом случае равно 108; это делимое получилось от прибавления 18 к некоторому числу, а это последнее число равно 90; но 90 получилось от умножения задуманного числа на 3; стало-быть, задуманное число равно 30. — При решении уравнений, подобных приведенному выше, о перенесении членов уравнения из одной части в другую на этой ступени не должно быть и речи. Все решение уравнения должно основываться на том же, на чем основано вышеприведенное небуквенное решение: число 18 получилось от деления какого то числа на 6 и т. д. Можно предлагать задачи, отличающиеся от рассмотренных ьыше тем, что среди данных чисел встречаются числа дробные (например 2 неизвестного числа, увеличенные на $\frac{3}{4}$ того же числа, дают в сумме 1 единиц; или: некто сначала истратил $\frac{2}{7}$ всех своих денег, а потом остатка, и у него после этого осталось 2 р. 46 к.). Задачи такого ода не содержат в себе, строго говоря, ничего нового. Тем не менее ни учеников затрудняют вследствие большего или меньшего равноду-ния их к разнице, существующей, например между $\frac{5}{12}$ *неизвестного исла* и $\frac{1}{18}$ *долей единицы*. Вы говорите ученикам, что к $\frac{5}{12}$ числа прибавлена $\frac{1}{18}$ доля единицы, и первая мысль их состоит в том, что надо ложить $\frac{5}{12}$ и $\frac{1}{18}$. Само собою разумеется, что и в задачах этого рода уквенное решение их гораздо нагляднее небуквенного, — тем более, что оследнее совпадает с первым, не отличаясь тою же мерою наглядности.

§ 4. Неизвестное в обеих частях уравнения.

Среди задач надо предложить и такие, которые, будучи обращены уравнение, дают в обеих частях уравнения неизвестные величины. Систематическое же прохождение задач этого рода должно занимать ледующее за задачами-загадками место, причем задачи эти должны одержать в себе только одно неизвестное число. Если учитель желает юставить дело на почву функциональных точек зрения, то это на данюй ступени достижимо. Задачи этого рода, строго говоря, в том и состоят, что некоторые две функции от икса должны быть равны между собою ри неизвестном нам значении буквы x.

Начинать надобно с задач, в которых вторая часть уравнения содержит в себе неизвестное число, снабженное каким-либо численным коэфициентом. Такова, например, задача: если удвоить неизвестное число и к полученному прибавить 360 единиц, то получится учетверенное неизвестное число. Задач этого рода учитель может придумать и сам сколько угодно, если он будет задумывать числа не очень значительные. Но сначала надо стремиться только к тому, чтобы ученики уяснили себе сущность дела. Поэтому не следует предлагать задач, требующих слишком многочисленных и утомительных письменных вычислений. Надо, наоборот, брать такие, которые допускают даже быстрое изустное решение, как с помощью, так и без помощи икса, т. е. задачи, которых смысл не заслонен требуемыми вычислениями. Затем можно предложить задачи, требующие уже некоторых вычислений и приводящие к уравнениям вида $ax+b=cx$. Их придумать учителю будет еще легче, так как он числами затрудняться в этом случае не должен. Когда задачи этого рода проделаны, можно перейти к задачам, в которых обе части уравнения представляют собою двучлены, а из последних каждый содержит в себе один буквенный одночлен с одною неизвестною величиною.

Задачи вида $ax+b=cx+d$. Если к удвоенному неизвестному числу прибавить 360 единиц, то получится утроенное неизвестное число, увеличенное на 150; как велико неизвестное число? Неизвестное число обозначим буквою x; уравнение следующее:

$$2x+360=3x+150,$$

из которого найдем следующее:

$$2x=3x+150-360, \text{ или } 2x=3x-210,$$

откуда $x=210$. Неалгебраическое ее решение крайне многословно: к удвоенному неизвестному числу прибавлено 360, а получилось не только утроенное неизвестное число, но, кроме того, еще 150; стало-быть, чтобы получить только утроенное неизвестное число к удвоенному неизвестному числу надо прибавить не 360, а число меньшее, чем 360, на 150 единиц, т. е. 210; в таком случае 210 и есть неизвестное число. — Трудности этой и подобных ей задач при разрешении без помощи икса громадны. Приходится представлять себе мысленно то, что в уравнениях записано более или менее наглядно.

Само собою разумеется, что на этой ступени при разрешении уравнений можно и не говорить о перенесении неизвестных и известных из одной части в другую. Все дело может быть поведено так, чтобы ученики научились смотреть на часть уравнения, смотря по надобности, то как на сумму, то как на разность двух чисел, и применяли бы к этой части надлежащее действие.

Но надо вообще помнить, что особенно увлекаться задачами на задуманные числа нет оснований. Как и вообще при решении всяких задач, надо стремиться к тому, чтобы учащиеся и сами придумывали задачи. Так, особенно полезны упражнения в самостоятельном составлении ими во время урока задач на задуманные числа. Проверка верности решения тоже чрезвычайно важна и полезна. При надлежащей постановке дела, учащиеся на досуге охотно играют в „задуманные числа".

§ 5. Задачи на пропорциональное разделение.

Задачи на пропорциональное разделение, конечно, допускают применение одного или двух уравнений, а если частей больше, чем две, то и большего числа уравнений. Они распадаются на следующие группы: а) одна часть данного числа в целое число раз больше другой его части, и вопрос поставлен только о величине меньшей части; б) отношение частей известного целого выражено в виде дроби, и в) отношение одной части к другой выражено в виде отношения одного целого числа к другому, т. е. когда две части данного целого числа „пропорциональны" данным двум целым числам.

§ 6. Уравнение.

Конечно, все эти задачи можно разрешить с помощью двух неизвестных, но зависимость одной из них от другой настолько проста, что выражается в виде следующего уравнения: если буква x обозначает одну часть, то другая часть $y = ax$. В виду этого, в уравнении $x + y = b$ мы вместо буквы y подставляем прямо ее значение, выраженное в зависимости от буквы x. Этот случай алгебраической задачи отнесен, в виду этого чрезвычайно простого соотношения между двумя неизвестными числами, к числу задач на уравнения с одною неизвестною. Для того, чтобы не требовалось двух уравнений, лучше всего предлагать самый вопрос задачи относительно величины только одной из частей, а именно так: „чему равна меньшая часть?" или „чему равна бо̀льшая часть?".

§ 7. Ошибки суждения при решении задач первой группы.

Хотя задачи первой группы на пропорциональное деление учителю и вообще взрослому человеку кажутся задачами чрезвычайно легкими, но школьники, как о том свидетельствует опыт, относятся к задачам этого рода иначе, чем взрослые.

У школьников нет для этого, при некоторых условиях, достаточно живого арифметического воображения. Если требуется разделить 20 на такие две части, чтобы одна была больше другой в 4 раза, то легко может случиться, что учащийся пожелает разрешить эту задачу следующим образом: он разделит 20 пополам и одну из этих половин, т. е. 10, увеличит в 4 раза. Он при этом думает, что таким образом он разделил 20 на две части, из которых одна больше другой в 4 раза, но что сумма этих двух чисел должна быть равна 20, он не принял во внимание. Чтобы раз навсегда исключить возможность ошибок воображения и суждения, полезно обратиться к примерам такого рода: „отрезок состоит из двух неравных частей; бо̀льшая из них больше меньшей в 4 раза; сколько раз меньшая часть содержится во всем отрезке и во сколько раз весь отрезок больше меньшей части?" Учащийся должен уразуметь, что меньшая *содержится* во всем отрезке не *четыре*, а *пять* раз; она содержится в данном отрезке один раз и, кроме того, она содержится в большей части этого отрезка еще 4 раза, всего, сталобыть, во всем отрезке — пять раз. Другой пример: „прямоугольник состоит из двух неравных прямоугольников: бо̀льшая часть его больше меньшей в 7 раз; сколько раз меньший прямоугольник содержится во всем прямоугольнике?“ Когда в том есть надобность, то задачам этого рода могут предшествовать задачи даже еще более простые: „начертить небольшой прямолинейный отрезок; прибавить к нему другой, который больше первого в пять раз; сколько раз меньший отрезок содержится в сумме этих двух отрезков?“

§ 8. Отвлеченная задача и задача с условиями.

Если сказать, что требуется 56 единиц разделить на две такие части, чтобы одна часть была больше другой в 6 раз, то это — задача отвлеченная. Но эту задачу можно облечь в следующую, не отвлеченную форму: „за один карандаш и одну чернильницу заплачено 56 коп.; чернильница обошлась в 6 раз дороже, чем карандаш; спрашивается, что стоит карандаш?“ В этом случае можно пустить ученика по следующей дороге: „сколько карандашей того же сорта можно купить вместо одной чернильницы?“ Даже самые нелюбознательные в вопросах арифметики ученики сейчас же сообразят, что вместо чернильницы можно купить шесть карандашей. Тогда можно пойти дальше: 56 коп. пришлось заплатить за один карандаш и одну чернильницу; на эти деньги, стало-быть, можно было купить не один карандаш, а один да еще шесть карандашей, т. е. семь карандашей, а потому один карандаш стоит в 7 раз меньше, чем 56 коп., т. е. 8 коп. Учащиеся очень скоро приобретают верный и сознательный способ решения задач этого рода и понимают сами, что если в задаче этого рода одно число больше другого в несколько раз, то известную сумму обоих чисел надо разделить на число, которое больше отношения бо̀льшего числа к меньшему на одну единицу, хотя этого сказать (т. е. формулировать), вероятно, не сумеют. Но эта формулировка и не нужна. Более того — она вредна.

Отнюдь не надо учащимся сообщать правила для решения таких задач. Легко видеть, что не в последовательном решении целой массы задач одного и того же „типа“ — залог истинных успехов учащихся, а в *методической* проработке учебного материала, предупреждающей и исключающей возможность ошибочных или без разумения заученных методов решения задач. Важно при этом, чтобы решение задачи с условиями приноравливалось к частностям этих условий. Достойно внимания, что в рассмотренных задачах спрашивается об одном числе.

§ 9. Уравнение.

Если учитель желает применить к решению задач этого рода уравнения, то это, конечно, заслуживает только сочувствия. „Сумма двух чисел 18, одно из них больше другого в пять раз; чему равно меньшее слагаемое?“ Задачи этого рода решаются так: меньшее слагаемое x; тогда большее слагаемое $5x$, а потому $5x+x=18$, т. е. $6x=18$, откуда $x=3$. То обстоятельство, что вообще в задачах этого рода *всякое* неизвестное число обозначается одной и той же буквой x, учащихся почти никогда не смущает. Но если бы это и смутило их, то учителю стоит только указать, что буква эта обозначает во всех задачах только то число, которое надо отыскать. Надо только знать, что̀ она в каждом случае обозначает.

§ 10. Отношение выражено дробью.

Часто задачи этого рода задаются в такой форме, что отношение одного числа к другому выражено в виде дроби, а именно: „сумма двух чисел 96, одно из них равно пяти одиннадцатым другого; требуется найти второе число". Для того, чтобы задачи этого рода были учащимися поняты, можно, конечно, обратиться опять-таки к чертежу или рисунку; начертить или нарисовать отрезок, разделить его на шестнадцать равных частей и найти точку, которая отделяет $\frac{11}{16}$ этого отрезка от пяти шестнадцатых его. Отдав себе отчет в том, на какие две части одна точка разделяет данный отрезок, учащийся в то же время отдает себе отчет в том, что это значит: „одна часть данного отрезка равна $\frac{5}{11}$ долям другой его части". Иногда в этих случаях говорят, что бо̀льшая часть *относится* к меньшей „как пять *относится* к одиннадцати". Для того, чтобы учащиеся себе уяснили это, повидимому, отвлеченное и условное выражение геометрические толкования чрезвычайно полезны. Но на самом деле, эти, столь необычные в ежедневной и особенно в детской речи, слова выражают только то, что если одну из частей целого разделить на пять одинаковых частей, другую — на 11 равных частей, то все эти доли будут равны между собою.

§ 11. Отношение выражено в виде незаписанной пропорции.

В задачах с условиями выражения: „относятся как 5 к 3", „в отношении пяти к трем", „соразмерно (или соответственно) числам 5 и 3", „пропорционально пяти и трем" — вполне понятны. Возьмем задачу: „два рабочих получили вместе 80 руб., один проработал пять дней, а другой — всего три дня; им надо разделить между собою эти деньги по-справедливости, чтобы никому не было обидно, т. е. соответственно, соразмерно тому времени, в течение которого они работали", и смысл слов „соответственно" и „соразмерно", при всей их книжности, становится ясен, благодаря так называемому „контексту".

Задачи на так называемое „пропорциональное разделение" решаются опять-таки только тогда с полным разумением, когда учащиеся уяснили себе, что̀ это собственно значит: „разделить данное число на две части, пропорциональные двум данным числам, например, пяти и трем". Эти слова можно пояснить так: *говоря и* так, и говорят вместо того, чтобы сказать, что надо *разделить число на восемь равных между собою долей, и отобрать от этих восьми долей пять, из них составить одну часть, а потом взять остальные три доли и из них составить другую.* Так говорят, потому что это короче. Здесь опять-таки некоторое упражнение в черчении, или, в крайнем случае, в рисовании оказывает неисчислимые услуги учащимся, избавляя их от необходимости вращаться непременно в сфере отвлеченных соображений и условных и многословных выражений. Здесь задачи с условиями, вроде приведенной выше (о рабочих), тоже чрезвычайно полезны.

§ 12. Уравнения.

Применение уравнения к задачам этого рода сопряжено с небольшим затруднением, если приходится складывать одну единицу с некоторою дробью, например, одна часть x, другая $\frac{7}{12}x$, а потому

$$x+\frac{7}{12}x=38, \text{ откуда } \frac{19}{12}x=38.$$

Но и эта трудность невелика и с пользой для дела преодолима, если учащиеся прибегают к черчению и рисованию. Другая задача: „60 разделить на две части, пропорциональные числам 7 и 5". Это значит, что в одной из этих частей некоторое число содержится 7 раз, а в другой то же число содержится 5 раз. Обозначим это число буквой x; получим, что

$$7x+5x=60, \text{ т. е. } 12x=60 \text{ и т. д.}$$

Задачи этого рода отнесены к классу задач, приводящих к *одному* уравнению с одной неизвестной по следующей причине. Если ввести два неизвестных и обозначить одно буквою x, а другое — буквою y, то получим систему уравнений:

$$x+y=60,$$
$$x:y=7:5.$$

Из пропорции следует, что

$$y=\frac{5}{7}x,$$

и у нас получится система уравнений

$$x+y=60,$$
$$y=\frac{5}{7}x.$$

Эта система требует подстановки значения буквы y из второго уравнения вместо буквы y в первое. Это без нужды слишком усложняет вопрос и затрудняет учащихся. Во избежание недоразумений лучше всего формулировать вопрос задачи в том смысле, что спрашивается, либо „чему равна первая часть числа", *либо* „чему равна вторая часть его", а не „чему равна каждая из этих частей". Это полезно и в том смысле, что учащийся, желая пользоваться дробным отношением одной части к другой и обозначив большую часть буквой x, получит, например, такое уравнение:

$$x+\frac{5}{7}x=60,$$

а обозначив меньшую часть буквой x, получит уравнение

$$x+\frac{7}{5}x=60.$$

Это обстоятельство может быть для учащихся полезно в смысле образовательном. Оно подает повод для того, чтобы учащиеся применили то, что они знают, а именно, что если первая величина равна, например, $\frac{3}{4}$ второй, то вторая равна $\frac{4}{3}$ первой (т. е. так называемой „обратной дроби"). И т. п.

О коэфициенте одночлена. Составляя уравнения при решении задач на пропорциональное деление, приходится прибегать к коэфициентам. На коэфициенты учащиеся сначала могут смотреть с точки зрения интуитивной. Если одно число обозначено буквой x, а другое больше его в три раза, то *естественно* обозначить вопрос так: $3x$, а если оно равно трем четвертям первого, то его естественно обозначить так: $\frac{3}{4}x$. Но при этом ученик не смотрит на коэфициент, как на множитель, а только заменяет цифрами слова. На самом же деле он должен усвоить себе, что записи $3x$, $\frac{3}{4}x$ обозначают произведения, сомножителями которых являются числа x и 3, x и $\frac{3}{4}$.

§ 13. Отношение двух чисел, разность между которыми остается постоянной.

Совершенно исключительное место среди задач алгебраического характера занимают те задачи, в которых даны два числа, изменяющиеся так, что разность между данными числами остается одна и та же. Тогда отношение одного к другому меняется. Прежде всего учащиеся не представляют себе, что если сейчас, например, отцу 40 лет, а сыну 9, стало-быть, отец старше сына на 31 год, и отец старше сына приблизительно в 4 раза, то будет такой момент, когда отец станет вдвое старше сына, и был такой, когда отец был старше сына, скажем в 63 раза. Детям кажется, что если число все время остается больше другого на одно и то же число, то и отношение тоже остается все время одно и то же. Говоря иначе: они считают, что отношение одного числа к другому вообще не изменяется от одновременного увеличения или уменьшения делимого и делителя на одно и то же число. Чтобы избавить их от такой ошибки, очень полезно взять два числа, например, 37 и 1, и показать на этом примере „экспериментальным“ способом, что если оба эти числа увеличивать на одно и то же число единиц, то отношение их сильно будет изменяться:

$37:1=37$

$38:2=19$

$39:3=13$

$40:4=10$

$41:5=8\frac{1}{5}$

$42:6=7$

$43:7=6\frac{1}{7}$

$44:8=5\frac{1}{2}$

и т. д.

Сначала частные очень быстро падают: 37, 19, 13; потом они тоже падают, но уже не так быстро. Разность между числами остается все время одна и та же и равна все время 36. *Этот факт прямо поражает* учащихся. Но он же и весьма для них поучителен, уясняя им то, чего не может дать неполная статья об изменении частного в курсе арифметики.[1]

Без помощи уравнения решение нашей задачи не может быть достаточно ясно для учащихся, потому что в основе его лежит соображение, что если неизвестное число, сложенное с 31, равно тому же неизвестному числу, сложенному с тем же неизвестным числом, то неизвестное число как раз и

---

[1] Может быть, при решении задач этого рода своевременно вернуться к неизменяемости всякой дроби при одновременном увеличении обоих членов ее *в одно и то же число раз* и к изменяемости всякой дроби, отличающейся от одной единицы, от одновременного увеличения или уменьшения членов дроби *на одно и то же число.*

равно 31. Во всяком случае, той задаче, в которой спрашивается, через сколько лет возраст отца будет вдвое больше возраста сына, должна с методической и логической точки зрения предшествовать задача, в которой спрашивается о том, сколько лет *будет* сыну, когда отец *будет* вдвое старше его.

§ 14. Уравнение.

При такой постановке дела составление уравнения будет чрезвычайно легко. Действительно: предположим, что сыну тогда *будет* x лет, когда отец будет в 2 раза старше его; а в таком случае отцу будет $2x$ лет; но и в это время, как и всегда, отец будет старше сына на 31 год, потому что $40 - 9 = 31$, а потому

$$2x - x = 31, \text{ откуда } x = 31,$$

т. е. сыну будет 31 год.

Та же задача, если спрашивается о том, *через сколько лет* отец будет в 2 раза старше сына, приводит к уравнению, в котором есть скобочное выражение, что уже менее удобно. Действительно: предположим, что отец будет в 2 раза старше сына через x лет, тогда имеем, что

отцу тогда будет $40 + x$,
сыну же „ $9 + x$;

но отцу тогда будет в 2 раза больше лет, чем сыну, а потому

$$40 + x = (9 + x) \times 2.$$

Вывод отсюда следующий: решению задач, в которых спрашивается, по скольку надо прибавить к делимому и к делителю для того, чтобы делимое стало во столько то раз больше делителя, надо предпосылать задачи, в которых спрашивается, как велик должен быть делитель для того, чтобы делимое стало больше его в столько то раз, если мы прибавим к делимому и к делителю поровну.

§ 15. Графический метод.

В настоящее время графический метод употребляется всегда, когда мы занимаемся наглядным описанием и даже исследованием каких-либо явлений, поддающихся этому методу. Арифметические вопросы и задачи алгебраического характера поддаются графическому методу, и это не может подлежать никакому сомнению. Конечно, естественнее всего решать задачи алгебраического характера при благодетельной помощи алгебры. Но неестественнее всего — разрешать их чисто-отвлеченными, скрыто-алгебраическими приемами, не опирающимися ни на что известное ученикам и часто более трудными, чем способы алгебры. В случае полной невозможности исключить решение алгебраических задач из курса арифметики и невозможности внести в курс арифметики некоторые элементы алгебры, дозволительно обращаться к прямой линии, как к наглядному пособию, особенно помогающему уразумению детьми задач этого рода.

§ 16. Прямая линия при решении алгебраических задач.

Пусть предложена задача на так называемое пропорциональное разделение: „разделить 45 руб. на такие две части, чтобы одна была больше другой в два раза“. Предположим, что первый прямолинейный отрезок содержит 45 кусков одинаковой длины и представляет собою 45 *рублей.* Этот отрезок *А* (рис. 8) требуется разделить на две части, чтобы одна была больше другой в два раза. Разделим его на две неодинаковые части (рис. 8 *Б*), и пусть первая из них в два раза более второй. (Если ученики неверно разделят, тем лучше; они тогда убедятся в том, что делить надо не зря, и еще лучше уяснят себе — в чем дело). Тогда первая часть содержит в себе таких частей, как вторая, две, и мы получим изображенное на чертеже *В.* Стало-быть, эти 45 *единиц* (опять шаг вперед!) составляют три таких части, из которых каждая равна второй; а потому вторая содержит в себе в три раза меньше 45 единиц, и т. д.

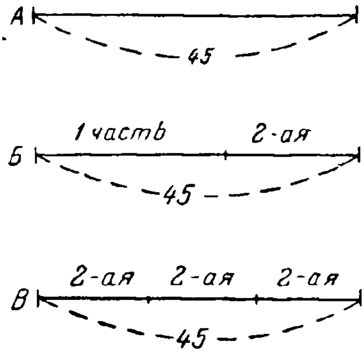


Рис. 8.

Пусть нам предложена задача (более сложная): разделить 100 единиц на такие три части, чтобы они были пропорциональны числам 7, 8 и 5. Пусть отрезок (рис. 9) содержит 100 единиц; он должен быть разделен на три неодинаковые части, — первая должна быть меньше второй, а третья меньше первой. Разделим поэтому этот отрезок на три неодинаковые части, например, так, как на рис. 10, и пусть первая меньше второй, а третья меньше первой. (Замечание, сделанное в скобках относительно первой задачи, справедливо относительно этой и каждой из последующих задач, так что больше об этом упоминать не стоит.)

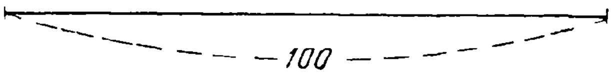


Рис. 9.

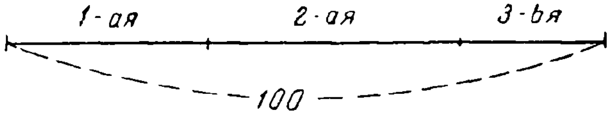


Рис. 10.

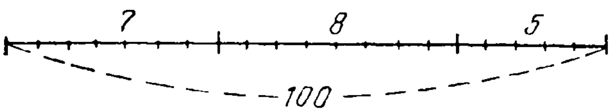


Рис. 11.

Далее, по условию, в первой части некоторый кусок должен содержаться 7 раз, во второй тот же кусок должен содержаться 8 раз, в третьей — 5 раз. Поэтому мы должны получить рис. 11. Во всем отрезке этот кусочек будет заключаться сколько раз? (20 раз.) — Сколько *еди-*

ниц во всем отрезке? (100.) — А сколько единиц в каждом кусочке? (5.) — А сколько в первой части? (35.) — А во второй? (40.) — А в третьей? (25.)

Само собою разумеется, что таких задач должно решить несколько, и тогда ученикам выяснится причина, почему здесь все дело только в разделении данного числа на сумму тех чисел, которым пропорциональны искомые части.

Из других задач с одною неизвестною величиною видное место

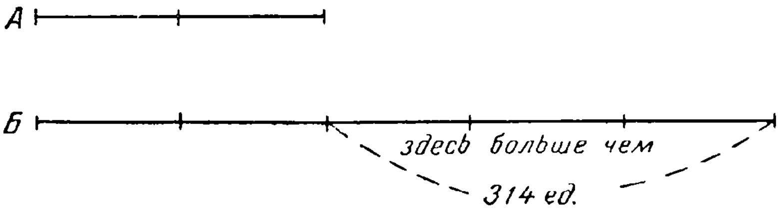


Рис. 12.

занимают задачи, приводящие, при алгебраическом способе решения задач, к уравнениям вида $ax+b=cx+d$.

Возьмем задачу этого рода, не принадлежащую к числу легких: „если удвоенное неизвестное число увеличить на 314, то получится упятеренное число, уменьшенное на 10 единиц“. — Пусть некоторый прямолинейный отрезок изображает это неизвестное число; тогда удвоенное неизвестное число изобразится так (рис. 12, чертеж A). Прибавим еще 314 *единиц* в виде некоторого четвертого прямолинейного отрезка; но этот отрезок должен быть такой длины, чтобы получилось *упятеренное* неизвестное число, уменьшенное на 10 единиц. Стало-быть, от прибавления 314 единиц к удвоенному неизвестному числу не получится упятеренного неизвестного числа: упятеренное число больше. На сколько больше? (На 10 единиц.) Прибавим утроенное неизвестное число; в утроенном неизвестном число сколько единиц? ($314+10$, т. е. 324 единицы). А в таком случае в неизвестном числе $324:3$, т. е. 108 единиц.

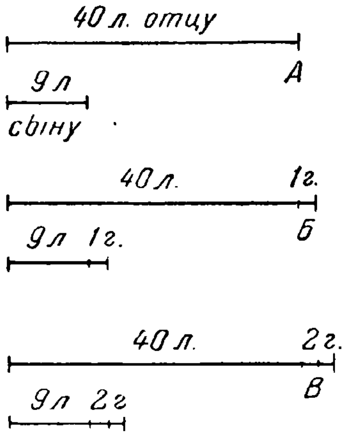


Рис. 13.

С помощью отрезка неопределенной длины решаются задачи вроде следующей: „отцу 40 лет, а сыну 9; через сколько лет отец будет вдвое старше сына?“ В переводе на графический язык это значит, что надо прибавить к двум отрезкам поровну, но чтобы при этом первая сумма оказалась вдвое больше второй.

Пусть эта задача решена так (рис. 13). По прошествии одного года и отец и сын станут старше прежнего на год, — прибавлю по одному году (рис. 13 *Б*). По прошествии еще года и отец и сын опять-таки станут старше прежнего на год, — прибавлю еще по году (черт. 13 *В*) и т. д. — Из этого ученики должны вывести, что отец все время остается старше сына на 31 год и что это — самое важное для решения задачи. Когда это выяснилось *воочию*, вопрос получает уже такой оборот: Возьмем два новых отрезка (рис. 14).

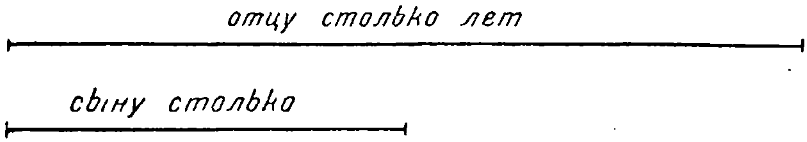


Рис. 14.

Первый отрезок все время больше второго на 31 единицу, но нужно найти, когда он будет в два раза длиннее второго отрезка (здесь опять появляются отрезки неопределенной длины, но конечные). Пусть первый

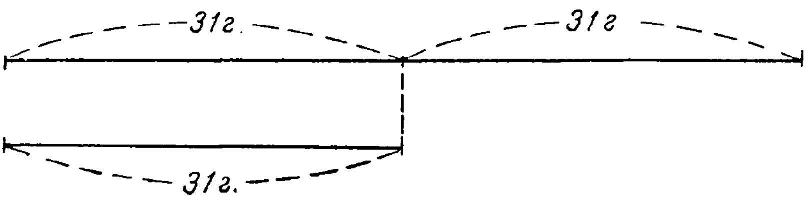


Рис. 15.

отрезок действительно более второго вдвое; тогда первый отрезок, кроме того, на 31 единицу более второго. А потому (рис. 15) в первом отрезке второй кусок должен равняться 31 единице, и первый — тоже 31 единице. Это значит, что отец станет вдвое старше сына тогда, когда сыну будет 31 год, и т. д.

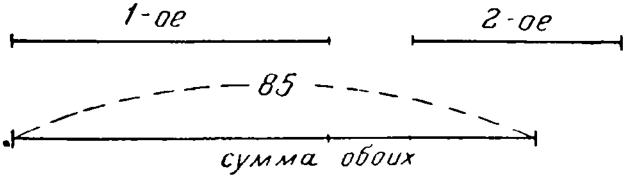


Рис. 16.

На разных задачах „о курьерах“ не стоит останавливаться, так как там приложение прямой линии настолько очевидно, что иногда даже начинающие учителя прорабатывают задачи этого рода с помощью чертежей. Обратимся лучше к задаче с двумя неизвестными. Самыми обычными среди задач этого рода являются задачи, в которых по данной сумме (например, 85) и данной разности (например, 17) двух чисел требуется найти каждое из них. Это — задачи чисто-графические. Поступаем следующим образом (рис. 16):

Чтобы найти разность этих двух чисел, отложим меньшее из них справа налево на большее (рис. 17).

Всматриваясь в этот чертеж, видим, что весь отрезок содержит 85 единиц, одна часть его 17, остальное составляет 85—17, т. е. 68. Поэтому меньшее из данных чисел равно половине 68, т. е. 34 единицам.

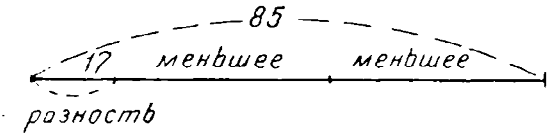


Рис. 17.

Возьмем следующую, более сложную, задачу: „сумма двух чисел 450; если разделить первое на второе, то в частном получится 3, а в остатке 10. Сколько раз второе содержится в первом?“ (Очевидно, 3 раза с лишком.) Обращаемся к чертежу (рис. 18).

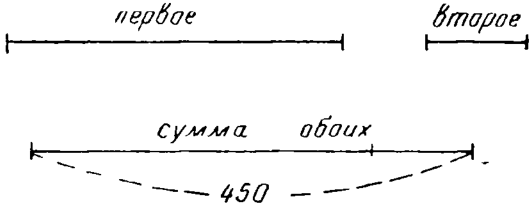


Рис. 18.

Второе должно уместиться в первом три раза, и при этом должен получиться остаток в 10 единиц. Отложим (рис. 19). На эти четыре куска, из которых каждый изображает второе число, приходится 440 единиц и т. д.

Во избежание каких-либо недоразумений следует помнить: 1) здесь чертежи приведены так, что, как только понадобилось изменить чертеж, мы тотчас же берем другой, чтобы таким образом иметь возможность усмотреть весь *ход* изменения чертежа; на практике же решение можно проводить, конечно, и на одном чертеже; 2) выше приведены не самые изящные, а самые согласные с условиями предложенных задач способы решения их; введение же более изящных приемов — дело изобретательности — притом изобретательности не учителя (это было бы навязчиво и худо), а самих учеников (только это — и хорошо!); 3) если задача учениками без всякого участия учителя дается почему-либо легко, то введение прямой линии, как средства для решения этой задачи, конечно, не нужно.

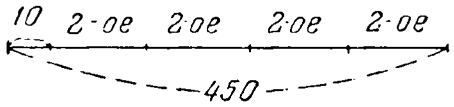


Рис. 19.

Условия применения прямой линии к решению задач алгебраических.

Не учитель, а ученики должны чертить на классной доске и в своих классных и домашних тетрадях прямолинейные отрезки. Не учитель, а ученики должны добиваться смысла отрезков, сводить арифметические вопросы к вопросам об отрезках, поправлять, стирать, снова чертить и придумывать выход из разных затруднений. Учитель должен приходить к ним только на помощь, при том лишь в случае необходимости. *Излагать*, как с помощью отрезка разрешить каждую задачу, учитель не должен, так как он этим уничтожает образовательную силу и вспомогательное значение отрезка, как наглядного пособия. Само собою разумеется, что прямолинейный отрезок, как пособие при решении задач алгебраического характера, весьма полезен и вполне уместен и тогда, когда учат решению таких задач с помощью уравнений.

§ 17. Обе части уравнения — двучлены.

Задачи, приводящие к уравнению, в котором обе части уравнения двучлены, могут быть составлены по типу задачи, гласящей так:

„Если книгоиздательство будет продавать книгу по 6 р. 50 к., то оно на всем издании получит 50 000 руб. прибыли. Продавая же по 5 руб., оно получит 20 000 руб. прибыли. Сколько книг выпустило издательство? (Каков тираж?)".

Решение этой задачи с помощью икса имеет следующий вид: пусть издательство выпустило x экземпляров книг. Оно выручит всего $6{,}5x$ рублей или $6{,}5x$; при этом оно получит 50 000 руб. прибыли; сталобыть, ему самому книги обошлись вот во сколько рублей: $6{,}5x - 50\,000$. Рассуждая таким же образом, определим, что стоимость книг в рублях равна $5x - 20\,000$, откуда

$$6{,}5x - 50\,000 = 5x - 20\,000.$$

Решение той же задачи без помощи икса — искусственно. Если его не запомнить, то можно потратить много времени на рассуждения, не приводящие к цели. Оно может итти следующим образом. Продавая книгу по 6 р. 50 к., издательство получило бы 50 000 руб. прибыли, а продавая по 5 руб., оно получило бы 20 000 руб. прибыли. В первом случае оно получило бы большую прибыль; почему? (Потому, что оно дороже продавало бы каждый экземпляр.) — На сколько в этом случае оно выручило бы больше? (На 30 000 р.) — Откуда составился бы такой избыток? (Он составился бы из тех 1 р. 50 к. лишку, которые издательство получило бы на каждой книге.)

Решение задач этого рода без помощи икса представляет собою, при самом тщательном анализе, весьма большие, чисто алгебраические трудности. Трудности эти значительно больше, чем те, которые приходится преодолевать при решении буквенно-алгебраическом. Задачи этого рода могут быть составлены так, что по условиям их в обоих случаях получится убыток, или же — в одном случае — прибыль, а в другом убыток. Трудность зависит не столько от того или другого сочетания условий, сколько от того, в какую форму облечена зависимость между задуманными и данными числами в этих случаях. Легко видеть, что ход рассуждений, при отсутствии наглядного обозначения неизвестного числа буквою, гораздо тоньше чисто-алгебраического и, без всякой пользы для дела, требует гораздо большего усилия отвлеченной мысли. Поэтому задачам этого типа следовало бы всегда предпосылать сначала упражнения следующего рода, — сперва на числах, потом непременно на буквах: а) кооператив выручил за товар a рублей; при этом получил убытку 17 р.; во что ему самому обошелся товар $(a + 17)$? б) кооператив выручил b рублей, но получил при этом прибыли c рублей; во что ему самому обошелся товар $(b - c)$? И т. п. Это поставит учащихся на надлежащие рельсы.

Кроме того, можно облегчить ученикам полное уразумение только что приведенного рассуждения также с помощью следующего ряда менее загроможденных условиями упражнений: а) продавая метр сукна по одной цене, магазин мог бы получить на сукне 70 руб. прибыли; продавая сукно по другой цене, он мог бы на всем получить 100 руб. прибыли; от чего это зависит (от цены, по которой он будет продавать сукно)? б) если продавать сукно по более низкой цене за метр или же по более высокой, то когда получится бо̀льшая прибыль? в) продавая метр материала по 8 руб., кооператив на всей материи получит убытку 237 р., а продавая ее по 10 руб., он что получит (неизвестно: может быть, тоже убыток, но уж наверное меньший, чем 237 руб.; может быть, и прибыль получит, а может быть, и продаст товар без прибыли и убытку, т. е. в свою цену)? г) продавая по одной цене килограмм чаю, кооператив на всем чае одного сорта получит убыток в 460 руб.; продавая по другой цене, он получил бы на нем 214 р. прибыли; от чего это зависит? (от цены чая); д) из чего составляется прибыль, получаемая с известного количества товара, продаваемого по одной цене? (она составляется путем сложения всех прибылей, получаемых на каждой единице количества этого товара: на каждом килограмме, десятке, метре и т. д.;) е) из чего составляется убыток, получаемый на всем товаре, который продается по одной и той же цене? ж) если при одном условии данной задачи получается одна прибыль, а при другом — другая, от чего зависит разность этих прибылей? (от разности между продажной ценою метра в одном случае и продажною ценою — в другом.) И т. д. — Само собою разумеется, что и в других случаях, а именно, когда мы встречаемся с двумя убытками, или с одним убытком и одною прибылью, должно проработать подобный же ряд упражнений. Но в последнем случае речь будет итти не о разности между данною прибылью и данным убытком, а о некоторой сумме, именно о *всей выгоде*, получаемой в одном случае сравнительно с другим, дающим убыток.

§ 18. Уравнения вида $ax+b=cx+d$ и „взвешивание“.

Уравнения вида $ax+b=cx+d$ со сплошь положительными членами принадлежат к числу тех, решение которых смело можно, при благоприятных условиях, внести в курс арифметики. Опустив все учения о буквенных преобразованиях, обыкновенно предшествующие в учебниках и курсах алгебры, можно к решению уравнений этого вида подойти и с точки зрения уравновешения чашек весов, на одну из которых, так сказать, положена одна часть, а на другую чашку — другая часть уравнения. [1] Некоторые временные затруднения представляют собою отрицательные члены в одной или обеих частях уравнения. Но и это затруднение очень скоро преодолевается, если указать учащимся, что отрицательный член (— 7) в уравнении $5x-7=2x+8$ свидетельствует только о том, что левую чашку весов должно облегчить на 7 граммов, т. е. 7 граммов надо положить на правую чашку тех же

[1] Вместо того, чтобы пользоваться весами, можно решать такого рода уравнения на основе зависимостей между компонентами и результатами действий. *(Прим. ред.)*

весов. Таким образом уравнение $5x - 7 = 2x + 8$ *только заменяет* следующую запись: $5x = 2x + 8 + 7$. Что касается уравнения вида $ax + b = cx + d$ с двумя отрицательными членами, например, уравнения $5x - 7 = 15 - 6x$, то оно, при достаточном методическом внимании учителя, для учащихся является только уравнением, равносильным со следующим: $5x + 6x = 15 + 7$. Отсюда легко выводится и правило (хотя оно не необходимо) так называемого „перенесения“ членов из одной

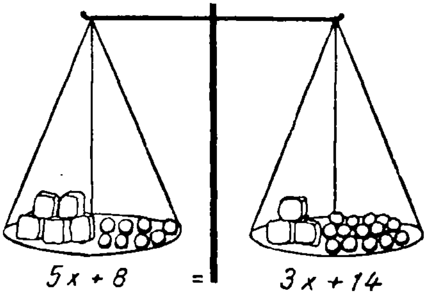


Рис. 20.

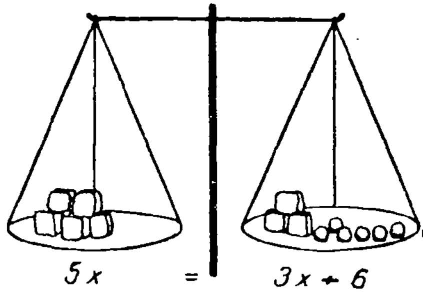


Рис. 21.

части в другую. При этом полезны рисование и конкретная интерпретация, намеченная ниже.

Пусть требуется разрешить уравнение

$$5x + 8 = 3x + 14.$$

Изготовьте восемь пакетов, каждый в 3 грамма весом, наполненных бумагой, зернами ржи и т. п. Положите на одну чашку весов 5 таких пакетов и 8 гирек по грамму каждая, а на другую — 3 пакета и 14 гирек по грамму каждая, и уравнение готово (рис. 20). Теперь стоит с обеих чашек весов снять по 8 гирек, и равновесие не нарушится. При этом на одной чашке весов останутся 5 пакетов, а на другой — таких же 3 пакета и 6 гирек (рис. 21). Снимите с каждой чашки по три пакета и на одной чашке останутся два пакета, а на другой — 6 граммов (рис. 22), и очевидно будет, что вес каждого пакета 3 грамма.

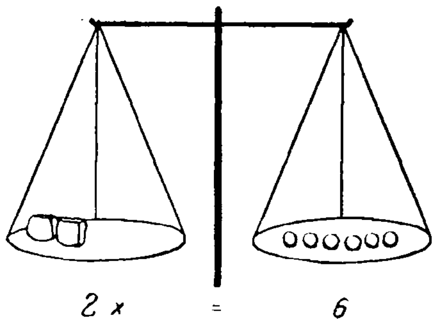


Рис. 22.

Если все ученики это проделают, то они уяснят себе самую сущность решения уравнения такого вида, или так называемое „перенесение“ неизвестных в одну, а известных — в другую часть уравнения. — Пусть дано уравнение $5x - 7 = 3x + 13$. Это *значит*, что 7 гирек лежат не на левой, а на правой чашке весов и что, стало-быть, это уравнение равносильно уравнению $5x = 3x + 20$, и т. д. Полезно, если рисунки на подобие приведенных выше для решения уравнения $5x + 8 = 3x + 14$ многократно выполняются самими учениками.

Самое *составление* уравнения значительно легче, чем рассуждение без уравнения, в чем легко убедиться из предыдущих параграфов Трудности представляют только так называемое „перенесение“ известных и неизвестных из одной части уравнения в другую. Применение нарисованных, а впоследствии только воображаемых „весов“ дает отличные результаты при усвоении учащимися этого механизма решения уравнений.

§ 19. Уравнения с двумя неизвестными.

Среди задач, которые рассмотрены выше, были и такие, которые логически требуют системы уравнений с двумя и более неизвестными, но легко могут быть сведены, из методических и образовательных соображений, к одному уравнению с одним неизвестным. Особенно это справедливо относительно: 1) задач на так называемое тройное правило, если к их решению применим систему пропорций; 2) задач на пропорциональное деление, в которых требуется данное число разделить на такие части, которые приводят к системе уравнений такого вида:

$$(A)\begin{cases} x+y+z+u+\ldots=S, \\ x:y=a_1:a_2, \\ y:z=a_3:a_4, \\ z:u=a_5:a_6, \end{cases}$$

и т. д., где вообще одновременно $a_2 \neq a_3$, $a_4 \neq a_5$, $a_6 \neq a_7$ и т. д.

Если же $a_2=a_3$, $a_4=a_5$ и т. д., то эта система иногда заменяется условной пропорцией:

$$x:y:z:u\ldots=a_1:a_2:a_3:a_4:\ldots,$$

которая в полном курсе алгебры может сразу привести к простым пропорциям:

$$\begin{aligned} S:x&=(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots):a_1 \\ S:y&=(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots):a_2 \\ S:z&=(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots):a_3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Другое дело, когда справедлива система уравнения (A). Пусть, например, предложена задача: „разделить число 780 на такие четыре части, чтобы первая относилась ко второй, как $1:2$, вторая — к третьей, как $1:3$, а третья — к четвертой, как $4:7$. Здесь последовательность этих отношений такова, что известно, сколько каких долей первой части равны второй, сколько каких долей второй равны третьей, и, наконец, сколько каких долей третьей равны четвертой, но доли то во всех этих случаях различны.

Обозначив части буквами x, y, z, t, получим систему:

$$\begin{aligned} x+y+z+t&=780 \\ x:y&=1:2 \\ y:z&=1:3 \\ z:t&=4:7 \end{aligned}$$

Из последних трех пропорций находим, начав с последней, что

$$z=\frac{4}{7}t,$$

$$y = \frac{1}{3} z,$$
$$x = \frac{1}{2} y.$$

В зависимости от t значения остальных букв вычисляются так:

$$y = \frac{1}{3} z = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} t = \frac{4}{21} t,$$
$$x = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} \times \frac{4}{21} t = \frac{2}{21} t.$$

Подставив вместо букв x, y и z их значения в функциях от t в первое уравнение, получим

$$\frac{2}{21} t + \frac{4}{21} t + \frac{4}{7} t + t = 780$$

и т. д.

Без помощи системы явных уравнений, прибегнув только к одной букве x и обозначая остальные части римскими цифрами или словами „3-я часть", „2-ая часть" и т. д., получим ту же буквенную систему уравнений:

4-ая равна x,
3-я „ $\frac{4}{7} x$
2-ая равна $\frac{4}{7} x \cdot \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{4}{21} x$,
1-ая „ $\frac{4}{21} x \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{2}{21} x$,

сумма всех $= 780$,

и уравнение с одной неизвестной получится следующее:

$$x + \frac{4}{7} x + \frac{4}{21} x + \frac{2}{21} x = 780,$$

или $\frac{39}{21} x = 780$, откуда $x = \frac{780 \times 21}{39} = 420$,

т. е. четвертая из искомых частей равна 420.

Здесь же очевидно, насколько важно, чтобы учащиеся усвоили себе своевременно смысл сомножителя, являющегося коэфициентом данного одночлена.

Без помощи же икса расчет этот отличается еще большей отвлеченностью и для учеников представляет бесполезные трудности. Во всяком случае можно заметить, что если учитель желает, чтобы ученики достигли полной власти над задачами этого рода и над самой сущностью дела, то для этого ему необходимо соблюсти, по крайней мере, следующие условия: а) каждое из решений должно быть непременно проверено; б) каждая задача должна быть разрешена с помошью икса, т. е. с помощью уравнения; в) большинство задач должно быть разрешено в таком предположении, что буквою x может быть обозначена *какая угодно* из нескольких частей; и г) ученики должны сами сочинять подобные задачи.

Лишь при соблюдении учителем этих условий ученики усвоят себе способ решения задач этого рода и приобретут также навык в употреблении уравнений, столь важный для дальнейшей плодотворной работы над задачами алгебраического характера и в области математики вообще.

§ 20. Даны сумма и разность двух неизвестных чисел.

У нас уравнения первой степени с одной неизвестной и определенно системы уравнений с двумя и более неизвестными обыкновенно включаются в курс алгебры. Эта точка зрения давно оставлена в Западной Европе не только среди педагогов, принадлежащих к сторонникам реформы преподавания математики, но и в учебниках. Несмотря на такое отличие общепринятых у нас взглядов от взглядов на этот вопрос, господствующих в Западной Европе и Америке, у нас очень давно укрепилось решение задач алгебраического характера, вклиняемое в курс арифметики.

Первое место среди задач этого рода отводят задачам, в которых по данной сумме и данной разности двух чисел требуется найти каждое из них, — притом даже на низших ступенях курса. Известно, что обычный способ небуквенного решения задач этого рода сначала для учеников совершенно непонятен. Для детей прибавление какого-либо числа к сумме двух чисел совсем не равносильно с прибавлением этого числа только к одному из этих двух чисел, а вычитание какого-либо числа из суммы двух чисел отнюдь не равносильно с вычитанием этого числа из большего из определяемых чисел. Для нас, казалось бы, так очевидно, что, прибавив к сумме двух чисел, из которых одно больше другого на пять единиц, *новые* пять единиц, мы прибавляем их как бы к меньшему числу, и поэтому можем утверждать, что в результате получится сумма двух таких чисел, из которых каждое равно большему. Дети же усваивают одной памятью самый *способ* решения задач этого рода, почти без всякого разумения относительно того, почему это надо так сделать.

Способ решения, обычно практикуемый, по существу своему глубоко алгебраичен и совершенно тождественен с алгебраическим решением. Этот последний, как известно, сводится к тому, что меньшее число обозначают буквою x, а большее в таком случае выразится в виде суммы, полученной от сложения икса с разностью между искомыми числами, после чего чрезвычайно быстро составляется уравнение $x + (x + d) = s$, где d — означает разность, а s — сумму искомых чисел. Лучше, может быть, другой способ, но он требует некоторого количества предварительных упражнений, весьма полезных, впрочем, и во многих других отношениях.

§ 21. Подготовительные упражнения.

Подготовительные упражнения могут исходить из других точек зрения. Два числа одинаковы: каждое равно 67-ми; если из одного вычесть единицу, а к другому ее прибавить, на сколько единиц второе число станет больше прежнего?.. — А на сколько оно будет больше, чем уменьшенное первое?.. — У меня и у моего брата по сто рублей; я ему отдал из своих денег 25 рублей; на сколько у него станет больше, чем у меня?..— Почему?..— И т. д.— Если два числа не равны между собою, например, 80 и 30, то сколько единиц надо отнять от большего с тем, чтобы прибавив их к меньшему, получить поровну? (*Половину* пятидесяти)... И т. п.— Упражнения!— Сумма двух чисел 200; одно больше другого на 40; как велико каждое?..— Если бы они были равны между собою, то каждое равнялось бы 100.— Для того, чтобы из двух равных между собою чисел сделать два разных числа, сумма которых та же, и из которых одно больше другого на 40 единиц, надо от одного отнять 20 единиц и их прибавить ко второму...— Тогда получим два числа 120 и 80, которые и представляют собою искомые числа.

Кто из учителей желает приучить учеников не только к отвлеченно-словесному решению задач этого рода, при этом совершенно согласному с обычною алгебраическою точкою зрения, тому придется поработать на наглядных пособиях сначала над данными числами для раскрытия связи между суммой двух данных чисел и их разностью. Подобный же ряд упражнений учитель без затруднения построит и сам для вычитания разности двух искомых чисел из их суммы.

Когда все это проработано, тогда только ученики уразумеют обычный способ решения задач этого рода, как с помощью уравнения, так и без его помощи.

§ 22. Разность и отношение.

В задачах, где даны разность двух чисел и их отношение, приходится поглубже вникнуть в строение большего из данных чисел, притом нам неизвестного. Действительно, пусть дана задача следующего содержания: „разность двух чисел равна 18, и одно из них более другого в 3 раза; спрашивается, как велики эти числа?“ Несмотря на незначительность вычисления, ученик не сразу сообразит, как велики искомые числа. Зависит это не только от того, что задачи этого типа в жизни встречаются чрезвычайно редко, но и от того, что функциональная зависимость одной части от другой, легко постигаемая при буквенных обозначениях, в арифметике заслонена отвлеченной постановкой вопроса.

Система двух уравнений с двумя неизвестными получается такая:

$$x - y = 18$$
$$x : y = 3.$$

Из второго уравнения получаем:

$$x = 3y,$$

а подставив $3y$ вместо буквы x в первое уравнение, получим

$$3x - x = 18 \text{ и т. д.}$$

С помощью одной неизвестной решение требует более тонких соображений и решается так: пусть меньшее из чисел x; тогда большее $3x$, и по условию:

$$3x - x = 18 \text{ и т. д.}$$

Небуквенное же решение той же задачи содержит в себе некоторые трудности и гласит так: разность искомых чисел 18. Это значит, что в большем содержится меньшее число да еще 18 единиц. Но, по условию, большее число в три раза больше меньшего, — стало-быть, 18 вдвое больше меньшего. Этот последний вывод для учеников недостаточно прозрачен.

Затруднения представляют собою те задачи, в которых дана разность двух чисел и в которых отношение большего числа к меньшему не выражается целым числом. Такова, например, задача: найти два числа, из которых большее относится к меньшему, как $9:4$, если разность между ними равна 65. С помощью системы уравнений дело идет быстро: большее число x, меньшее y; по условиям задачи имеем систему:

$$x - y = 65\,,$$
$$x : y = 9 : 4\,.$$

Из второго уравнения имеем:

$$x = \frac{9}{4}y$$

и тогда $\frac{9}{4}y - y = 65$ и т. д.

Вопрос о том, почему удобнее принять второе уравнение за исходный пункт, и есть вопрос, заставляющий задуматься над тем, уместны ли задачи этого типа в курсе начальной математики.

Ближе к небуквенному решению задачи следующее; большее число и меньшее состоят из частей, — в первом числе таких частей 9, а во втором — 4; обозначим каждую из таких частей буквою x.

Тогда $9x - 4x = 65$, и т. д.

Небуквенное же решение гласит так: в большем числе 9 таких долей, каких в меньшем 4, т. е. в большем таких долей более на 5, чем в меньшем, и эти 5 долей составляют 65 единиц, а, стало-быть, каждая доля равна 13, и т. д.

Небуквенное решение задачи, очевидно, страдает не только многословием, но и ненужной отвлеченностью. Оно неявным образом заключает в себе не только уравнение, но и решение незаписанного уравнения. Оно могло бы служить для истолкования уравнения, а не заменять последнее.

§ 23. Обе неизвестные величины подвергаются изменениям.

Ближайшее место после только что рассмотренных упражнений принадлежит задачам, в которых сумма двух неизвестных чисел остается неизменною, а изменяются только эти числа, причем известен характер этих изменений. Надо при этом заметить, что не только небуквенное, но и алгебраическое решение задач этого рода представляют некоторые трудности. Пусть задана задача: „в одной кассе на 1400 руб. больше, чем в другой; если из первой кассы передадут во вторую 1100 руб., то во второй кассе будет втрое больше денег, чем в первой; сколько денег в каждой кассе?“

Алгебраическое решение задачи с помощью одной неизвестной может быть такое: во второй кассе x руб., а в первой $x+1400$. Когда из первой передадут во вторую 1100 руб., то в первой останется $x+300$, а во второй станет $x+1100$. Тогда у нас получится уравнение

$$(x+1100):(x+300)=3,$$

откуда:

$$x+1100=3x+900,$$

или

$$2x=200;\ x=100.$$

Здесь требуется знание умножения двучлена на некоторое число. Очевидно, что такие задачи уместны тогда, когда учащиеся более или менее владеют уравнениями и преобразованиями буквенных выражений.

Небуквенное же решение требует гораздо большего напряжения воображения. В первой кассе больше, чем во второй, на 1400 руб.; если из нее передадут в третью кассу 1100 руб., то в первой кассе все таки будет больше, чем во второй, на 300 руб. Если вторая касса получит из третьей только 300 руб., то в ней станет столько же денег, сколько в первой. Если же из третьей кассы передадут во вторую 1100 руб., то тогда во второй станет больше, чем в первой, на 800 руб., и тогда в ней, по условию задачи, станет втрое больше, чем в первой. По разности двух чисел и по отношению их можно найти эти числа.

Значительную услугу небуквенному решению задачи могут оказать те упражнения, которые рекомендованы выше при проработке задач, в которых по данной сумме и по данной разности двух чисел отыскиваются эти два числа. Решению нашей задачи, вышеприведенной, полезно предпослать несколько упражнений, хотя бы следующего содержания: а) У одного человека больше, чем у другого, на 20 руб.; если он отдаст этому второму лицу один рубль, то у него станет больше, чем у второго, уже не на 20 руб., и не на 19, а только на 18 руб., — почему? б) Если бы он отдал этот рубль третьему лицу, то на сколько у него в этом случае было бы больше, чем у второго? в) А если он этот рубль отдаст второму лицу, то на сколько у него станет больше, чем у второго? (Только на 18 рублей.) г) У одного человека больше, чем у другого, на 100 руб.; если он отдаст 10 руб. третьему лицу, то у него на сколько станет денег больше, чем у второго? д) А если бы он отдал эти 10 руб. второму лицу и т. п. — На этой задаче весьма поучительно выясняется глубокий смысл каждой строчки решения задачи алгебраического характера. — В нашей задаче „строчки“ решения и значение их следующие:

I. $1400-1100=300$;	на столько рублей в 1-й кассе будет больше, чем во 2-ой, если из 1-ой передадут в 3-ью 1100 руб.
II. $1100-300=800$;	на столько рублей во 2-ой кассе станет больше, чем в 1-ой, если из 3-ей кассы передадут во 2-ую 1100 руб., взятые из 1-ой кассы.
III. $800:2=400$;	столько рублей будет после этого в 1-ой кассе.
IV. $400\times 3=1200$;	столько рублей будет во 2-ой кассе.
V. $400+1100=1500$;	столько денег было раньше в 1-ой кассе.
VI. $1200-1100=100$;	столько денег было раньше во 2-ой кассе.

Из вышеприведенных строчек до очевидности ясно: а) насколько небуквенный способ решения тоньше и труднее буквенного; б) насколько важно при решении задач этого рода воздействие на воображение и, наконец, в) насколько предварительные целесообразные упражнения, специально подобранные для каждого типа задач, прямо неизбежны при решении учениками небуквенными способами более или менее замысловатых задач алгебраического характера.

§ 24. Исключение неизвестных.

В задачах с двумя неизвестными мы прибегали к выражению одной неизвестной величины в зависимости от другой. Мы таким образом как бы исключали из уравнений те неизвестные, которые нам мешают при составлении уравнения с одной неизвестной. Вследствие этого, вместо системы уравнений, мы получали, в конце концов, одно уравнение с одним неизвестным. Но бывают такие случаи, когда подобное исключение крайне затруднительно. Чаще всего это бывает при решении таких задач, которые, будучи облечены в форму уравнений, дают два уравнения вида: $ax+by=c$. Такова, например, задача, по которой 4*м* сатина и 7*м* полотна стоят 65 руб., а 2*м* сатина и 5*м* полотна — 40 руб., и в которой спрашивается, что стоит метр сатина и что — метр полотна? Она приводит прямо к следующим двум уравнениям:

$$4x+7y=65,$$
$$2x+5y=40,$$

где x обозначает (в рублях) цену метра сатина, y — цену метра полотна. Лучше всего начинать упражнения в решении задач подобного рода с таких задач, в которых коэфициенты при одной из неизвестных одинаковы. Когда это усвоено, то решение системы может быть сведено к этому частному случаю, именно:

$$4x+7y=65$$
$$2x+5y=40.$$

Удвоим обе части второго уравнения. Тогда получим новую систему уравнений с одинаковыми коэфициентами у буквы x. Трудность здесь не в решении уравнений. Она заключается в том, что при недостаточной к тому подготовке ученики затрудняются тотчас же уразуметь, что стоимость сатина в первом случае в рублях сначала выражается так: $x \cdot 4$, стоимость полотна так: $y \cdot 7$ и т. д., и что эти произведения заменяются произведениями $4x$, $7y$ и т. п. Это связано с вопросом о значении коэфициента, как множителя. Небуквенное решение задачи того же рода по содержанию мало отличается от буквенного.

К этому же типу задач несколько примыкают задачи, в которых одно из уравнений имеет вид: $x+y=a$, а другое представляет собою равенство двух неизвестных одночленов вида ax и by между собою.

Такова, например, задача: „метр сатина и метр полотна стоят вместе 12 р. 50 к., а 2 метра сатина стоят столько же, сколько 3 метра полотна; что стоит метр сатина и что метр полотна?“ Буквенное решение дает два уравнения:

$$x+y=1250,$$
$$2x=3y.$$

Помножим обе части первого уравнения на 2, т. е. купим 2*м* сатина и 2*м* полотна, получим

$$2x + 2y = 2500.$$

Заменяем 2 икса тремя игреками и т. д.

§ 25. Задачи на пробу.

Уяснение того, что такое проба, можно повести следующим образом: если в килограмме сплава находится 800 граммов благородного металла, то говорят, что это — сплав 800 пробы. Но в этом случае на практике учителей затрудняет выяснение, а учеников — усвоение того, что в серебре 800-й пробы (с той точки зрения, которая выше установлена на пробу) всего $\frac{800}{1000}$ долей чистого металла, какой бы кусок сплава мы ни взяли. Их затрудняет постоянная пропорциональность количеств чистого металла и сплава числам 800 и 1000. Гораздо удобнее поэтому пробу определять так: если в сплаве одну тысячную долю всего сплава составляет благородный металл, то говорят, что это сплав 1-й пробы; если чистый металл составляет $\frac{2}{1000}$ доли всего сплава, то говорят, — что это сплав второй пробы, и т. д. Отсюда уже переход к тому, что если в куске сплава, весящем один килограмм, чистого металла 800 граммов, то это — сплав 800-й пробы, никаких особенных, излишних трудностей не содержит.

Решение же задач на пробу должно исходить из исчисления, сколько чистого благородного металла находится в данном сплаве. Если только понятие о пропорциональности усвоено учениками вполне, то особенных затруднений задачи на пробу собою не представят. Буквенное и небуквенное решение разных задач этого рода может практиковаться следующее. Пусть сплавлено золото 480 пробы с золотом 520 пробы и пусть после этого получилось золото 510 пробы, а спрашивается, как относятся между собою количества золота, взятые из каждого слитка. Алгебраически эта задача принадлежит к числу задач, где каждое из неизвестных особенно полезно обозначать различными буквами. В нашем случае пусть из первого слитка взято x килограммов, а из второго y *кг*. Тогда граммов чистого золота в первом слитке будет $450x$, а во втором $520y$. С другой стороны, во всем полученном сплаве будет $510\ (x+y)$ граммов чистого золота. Отсюда

$$480x + 520y = 510\ (x+y),$$

или

$$480x + 520y = 510x + 510y,$$

откуда

$$y = 3x, \text{ или } y : x = 3.$$

Т. е. вес количества металла, взятого из первого слитка, в три раза меньше веса количества металла, взятого из второго слитка.

Гораздо труднее небуквенное решение: в первом слитке $\frac{480}{1000}$ всего сплава составляет благородный металл, во втором же он составляет

$\frac{520}{1000}$ всего сплава. Чтобы составить золото, в котором благородный металл составляет $\frac{510}{1000}$ всего сплава, надо вычислить: 1) сколько тысячных долей неблагородного металла в первом сплаве надо заменить благородным для того, чтобы образовался сплав 510 пробы ($\frac{30}{1000}$); 2) сколько тысячных долей благородного металла во втором сплаве надо заменить лигатурой, чтобы из второго сплава образовался сплав определенной пробы ($\frac{10}{1000}$) и 3) сколько надо взять всего сплава из каждого слитка для составления нового сплава 510 пробы, т. е. для уравновешивания нехватающих в одном долей благородного металла излишними в другом. — Что это рассуждение требует значительной работы воображения и что без его помощи оно слишком отвлеченно, — совершенно очевидно.

§ 26. Задачи, подлежащие исключению.

Остальные задачи алгебраического характера должны быть совершенно исключены из курса арифметики. Особенно это справедливо относительно такого курса этого предмета, в который не внесены начальные алгебраические обозначения и начальные учения об алгебраических выражениях, о некоторых уравнениях первой степени с одною и с двумя неизвестными. К числу подлежащих по разным причинам исключению из не переплетенного с алгеброю курса арифметики задач алгебраического характера смело можно отнести задачи следующих типов: а) задачи-загадки о задуманном числе, в которых неизвестное число входит в обе части уравнения; б) когда изменяются два числа, разность между которыми остается постоянною; в) по сумме и разности двух чисел найти каждое из них; г) по сумме двух чисел и другой их связи найти эти числа; д) задачи на смешение „второго рода"; е) по разности двух чисел и их отношению найти эти числа; ж) задачи, приводящие к системе уравнений: $ax+by=c$ и $mx=ny$; и вообще задачи без нужды замысловатые и нежизненные.

Из числа алгебраических задач, подлежащих исключению из любого серьезного курса начальной математики, одни непригодны по слишком значительной тонкости требующихся рассуждений, другие — по причине полной неприменимости в жизни, третьи — по причине крайней неестественности условий, противоречащих научным данным (бассейны с кранами, из которых одни наполняют, а другие опоражнивают бассейны), четвертые — по причине несоответствия между господствующими в них и детскими интересами (например, на учет векселей, на коммерческие процентные вычисления, особенно — на смешение второго рода и т. д.). В курсе алгебры задачи смешанного характера вполне уместны.

§ 27. Правило составления уравнений.

Что касается *правила* составления уравнений, то абсолютно пригодного для всех случаев правила не существует. Но некоторые общие указания уместны, хотя они и должны быть выведены из усвоенных учащимися способов решения задач: на них необходимо навести учеников постепенно. Наибольшие трудности наблюдаются при использовании условий — в особенности, если условия не записаны с достаточной аккуратностью, и если ученики не научены переходить от одного условия к другому и к последовательному и возможно полному использованию каждого условия. Если при этом условия записаны в таком порядке, что условием, занимающим первое место, воспользоваться нельзя, то ученики должны отыскать то условие, которым легче воспользоваться с тем, чтобы затем обратиться к следующему по смыслу условию, и т. д. Тогда „правило“ составления уравнения получится следующее: а) надо вкратце записать условия задачи, каждое, по возможности, в отдельную строчку и в виде *простого* предложения; б) надо записать сначала главный вопрос, а потом — остальные; в) неизвестные числа, отвечающие на вопрос, надо обозначить какими-нибудь буквами; г) затем надо рассмотреть, можно ли, на основании первого условия, над этими буквами совершать действие; д) если нельзя, то обратиться, по порядку, к каждому из остальных условий, пока не найдем условия, пригодного для указанной цели; е) когда действия над буквами совершены, надо обратиться опять к условиям еще не использованным и постараться их использовать; ж) когда все условия будут использованы, в конце концов, должно получиться уравнение или система их, если задача не содержит излишних условий, и если условий для ее решения приведено достаточно.

Во всяком случае, *правило* составления уравнения должно быть освещаемо при самом решении каждой задачи. В противном случае правило это будет бесплодно. Мы привели его в этом месте для того, чтобы начинающий учитель ему не придавал того значения, которого оно не имеет. Оно наиболее уместно при повторительных упражнениях над решением задач, уже решенных, но не вполне усвоенных.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

О СЛОЖНЫХ ЧИСТО-АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ.

§ 1. Способы решения чисто-арифметических задач.

Способов решения сложных чисто-арифметических задач обыкновенно различают два: аналитический и синтетический. Аналитический способ состоит, как известно, в том, что, исходя из вопроса задачи, мы, пользуясь общими соображениями, притом соответствующими данным предложенной нам задачи, устанавливаем, какие два числа необходимо знать для разрешения этого вопроса. Когда это установлено, мы обращаемся к каждому из этих двух чисел в отдельности и рассматриваем, дано ли хоть одно из них в нашей задаче и, если ни одно из них не дано или не дано только одно из них, мы предлагаем себе новый вопрос: какие два числа надо знать для того, чтобы найти новое искомое число. Продолжая тот же процесс далее, мы, наконец, приходим к двум вопросам, для разрешения которых у нас в задаче даны два условия с известными числовыми данными. Когда весь этот анализ закончен, мы можем установить план решения предложенной задачи, идя в нисходящем порядке. А именно надо задать себе ряд новых вопросов, примерно, следующего рода: зная такое-то число и такое-то число, что мы можем после этого узнать? А зная это новое число и еще некоторое число, что мы можем после этого узнать? и т. д. Этот план приводит нас к ряду действий, подлежащих выполнению. Первое из этих действий будет совершено над некоторыми известными нам числами, второе — над некоторыми другими известными нам числами, данными в задаче, или же над только-что определенным нами результатом и одним или несколькими данными в задаче числами и т. д.

Другой способ решения арифметических задач (чисто синтетический), как известно, исходит не из вопроса задачи, а прямо из условий ее. Задачи не особенно сложные, большею частью, решаются путем синтетическим более или менее быстро. В чистой своей форме синтетический прием решения задач требует быстрой оценки двух условий вопроса, который можно разрешить на основании этих двух условий, и быстрой оценки того, насколько ответ на этот вопрос нужен нам для решения главного вопроса задачи.

Для примера приводим решение следующей задачи:

В кооператив доставили 4 сорта конфет в среднем по 8 руб. 71,2 коп. за килограмм. Всего конфет было 500 *кг*. 1-го сорта было 80 *кг*; 2-го — вдвое больше; 3-го — на 20 *кг* меньше, чем 2-го; 4-го — все остальное. Конфеты 1-го сорта кооператив продавал по 17 руб. 60 коп. за килограмм, 2-го — по 10 руб. 50 коп., 3-го — по 7 руб. 20 коп. Почем продавался 1 *кг* 4-го сорта, если на всех конфетах получено в среднем 96,8 коп. прибыли на каждый килограмм?

Условия можно записать и для удобства ссылок на то или иное условие перенумеровать так:

1) 8 р. 71,2 к. — средняя стоимость 1 *кг* конфет.
2) 500 *кг* — вес всех конфет.
3) 80 *кг* — вес конфет 1-го сорта.
4) в 2 раза более — 2-го сорта.
5) 3-го сорта на 20 *кг* меньше, чем 2-го.
6) 4-го сорта — остальное.
7) по 17 р. 60 к. за килограмм продавался 1-й сорт.
8) „ 10 р. 50 к. „ „ 2-й „
9) „ 7 р. 20 к. „ „ 3-й „
10) 96,8 коп. получено прибыли с килограмма.

Почем продавали килограмм 4-го сорта?

Трудно без всяких размышлений и без плана прийти к следующему ряду действий:

1) 80 *кг* $\times$ 2 = 160 *кг*; было 2-го сорта.
2) 160 *кг* — 20 *кг* = 140 *кг*; было 3-го сорта.
3) 80 *кг* + 160 *кг* + 140 *кг* = 380 *кг*; было первых трех сортов.
4) 500 *кг* — 380 *кг* = 120 *кг*; было 4-го сорта.
5) 8 р. 71,2 к. $\times$ 500 = 4356 р.; заплачено за все конфеты.
6) 96,8 к. $\times$ 500 = 48400 к. = 484 р.; получено всего прибыли.
7) 4356 р. + 484 р. = 4840 р.; выручено за все конфеты.
8) 17 р. 60 к. $\times$ 80 = 1408 р.; выручено за 1-й сорт.
9) 10 р. 50 к. $\times$ 160 = 1680 р.; „ 2-й „
10) 7 р. 20 к. $\times$ 140 = 1008 р.; „ 3-й „
11) 1408 р. + 1680 р. + 1008 р. = 4096 р.; выручено за первые три сорта.
12) 4840 р. — 4096 р. = 744 р.; выручено за 4-й сорт.
13) 744 р. : 120 = 6 р. 20 к.

Ответ: 1 *кг* 4-го сорта продавался по 6 р. 20 к.

Трудности решения. Трудности приучения учащихся к правильному решению сложных чисто-арифметических задач состоят в приучении их 1) к разумной записи условий задачи и уразумению их смысла и связи; 2) к выработке и установке твердого и определенного плана решения; 3) к твердому и последовательному употреблению надлежащих действий; 4) к чистому и аккуратному выполнению работы.

При решении задач этого рода можно, как замечено выше, прибегнуть к одному из двух способов: а) синтетическому или б) аналитическому. Первый быстрее ведет к цели, когда задача не очень сложна; второй ведет к цели медленно, но зато не отказывает никогда в своей помощи. Всех учеников надо приучить к употреблению преимущественно синтетического способа. Но для того, чтобы привести их к этой цели, надо соблюдать постепенность, которая сводится к надлежащему использованию „приведенных" к надлежащему виду задач (см. § 4 этой главы). Для большей ясности ниже предлагается двоякий примерный разбор нашей задачи.

§ 2. Синтетический способ.

Синтетический способ отправляется от частностей задачи к решению ее вопроса.

Было доставлено 4 сорта конфет в среднем по 8 руб. 71,2 коп. за килограмм. Что мы можем отсюда узнать? (Ничего.) — Всего было конфет 500 *кг*. — А отсюда? (Можем узнать, сколько стоили все конфеты.) — Пригодится ли нам это? — Вопрос задачи: почем продавали 1 *кг* конфет 4-ой партии?.. — Если мы будем знать, что̀ заплачено за все конфеты и что̀ выручено за них, и будем знать, сколько килограммов 4-го сорта, мы будем в состоянии решить вопрос задачи... — Запишем, что мы можем узнать из первого и второго условий:

1) Что стоили кооперативу все конфеты?

Первого сорта — 80 *кг*. Что можем узнать? — Об остальных сортах говорится в условиях: 4-ом, 5-ом и 6-ом; к ним обратимся в свое время.

Запишем второй вопрос:

2) Что заплачено за 1-й сорт? — Пригодится ли это? (Может быть — пригодится, а, может быть, и не пригодится...)

Второго сорта было вдвое больше, чем первого. — Что можем узнать?

Запишем вопрос, который мы можем разрешить, зная это...

3) Сколько конфет 2-го сорта?

Третьего сорта на 20 *кг* меньше, чем 2-го; мы можем на основании ответа на 3-й вопрос и на основании этого условия узнать, сколько было конфет 3-го сорта... — Запишем 4-й вопрос, который мы можем разрешить:

4) Сколько конфет 3-го сорта?

Пойдем дальше. — Шестое условие говорит, что 4-го сорта — остальные конфеты... Можем на основании 2-го и 3-го условий, ответов на 3-й и 4-й вопросы и на основании условия 6-го узнать, сколько конфет 4-го сорта... — Запишем 5-ый и 6-ой вопросы.

5) Сколько конфет первых трех сортов?

6) Сколько конфет 4-го сорта?

Пойдем дальше!.. — На основании условий 3-го и 7-го мы можем ответить на вопрос:

7) Что выручено за конфеты 1-го сорта?

На основании условия 8-го и ответа на 3-й вопрос можем узнать, что выручено за конфеты 2-го сорта... Запишем вопрос:

8) Что выручено за конфеты 2-го сорта? — И т. д.

Повторите, какие у нас получились вопросы!.. А теперь приступим к вычислениям:

I. 8 р. 71,2 к. × 500 = 4356 р.; уплачено за все конфеты.
II. 8 р. 71,2 к. × 80 = 696 р. 96 к.; уплачено за 1-й сорт.
III. 80 *кг* × 2 = 160 *кг*; было 2-го сорта.
IV. 160 *кг* — 20 *кг* = 140 *кг*; было 3-го сорта.
V. 80 *кг* + 160 *кг* + 140 *кг* = 380 *кг*; было первых трех сортов.
VI. 500 *кг* — 380 *кг* = 120 *кг*; было 4-го сорта.
VII. 17 р. 60 к. × 80 = 1408 р.; выручено за 1-й сорт.
VIII. 10 р. 50 к. × 160 = 1680 р.; выручено за 2-ой сорт.

И т. д.

Задача эта здесь проработана (не до конца) не для того, чтобы ее непременно предложить и учащимся. Она предложена только для образца и преследует троякую цель: а) она намечает пути синтетического способа решения сложной задачи; б) она свидетельствует о том, что вопросы, так и напрашивающиеся на решение, не всегда целесообразны; в) она выясняет, насколько важно надлежащее размещение условий.

§ 3. Аналитический способ.

Рассмотрим аналитический способ решений той же задачи, отправляющийся от вопроса к условиям и пользующийся рассуждениями *общими*.

Что надо узнать? (Почем кооператив продавал 1 *кг* конфет 4-го сорта.) Что надо знать для решения этого вопроса? (Надо знать, что он выручил за весь 4-й сорт и сколько в нем было килограммов.) — Знаем ли мы какую-либо из этих величин? (Нет, не знаем.)

Стало-быть, сначала *надо определить, что выручено за 4-й сорт.* — Что надо для этого знать? (Надо знать, *что выручено за все конфеты* и что за первые 3 сорта.) — Знаем ли мы какую-нибудь из этих величин? (Нет, не знаем.) Что надо знать для определения того, что выручено за все конфеты? (Надо знать, во что обошлись кооперативу все конфеты и сколько получено на них прибыли.) — Знаем ли мы хоть одну из этих величин? (Нет, не знаем.) — Что надо знать для определения того, во что обошлись все конфеты? (Надо знать — сколько было всего конфет и почем платили за 1 *кг.*) — Знаем ли мы хоть одну из этих величин? (Знаем обе.)

Далее надо разрешить вопрос о том, *что выручено за все конфеты.* (Ответ и действия записываются после того, как весь план в виде вопросов составлен.)

I. Что заплачено за все конфеты? Отв. — 4356 р.

Действие: 8 р. 71,2 к. $\times$ 500 = 4356 р.

II. Сколько прибыли получено на всех конфетах? Отв. — 484 р.

Действие: 96,8 к. $\times$ 500 = 484 р.

III. Что выручено за все конфеты? Отв. — 4840 р.

Действие: 4356 р. + 484 = 4840 р.

Теперь надо обратиться ко второй величине. — *Что выручено за первые три сорта конфет?* — Что надо знать для определения этой величины? (Надо знать, сколько выручено за 1-й сорт, за 2-й и за 3-й.) — Что надо знать для решения каждого из этих вопросов? (Надо знать, почем продавался 1 *кг* каждого из первых трех сортов и количество каждого сорта.) Знаем ли мы какие-нибудь из этих величин? (Знаем: вырученное за 1 *кг* каждого из первых трех сортов и вес первого сорта.) — Что надо еще узнать? (Вес 2-го и 3-го сорта.) — Что говорится в задаче об этих весах? (Говорится, что 2-го сорта вдвое больше, чем 1-го, а 3-го на 20 *кг* меньше, чем 2-го.)

Составим план определения того, *сколько конфет 2-го, 3-го и 4-го сортов.*

IV. Сколько второго? Отв. — 160 *кг.*

Действие: 80 *кг* $\times$ 2 = 160 *кг.*

V. Сколько третьего? Отв. — 140 *кг.*

Действие: 160 *кг* — 20 *кг* = 140 *кг.*

VI. Сколько весят первые 3 сорта? Отв. — 380 *кг.*

Действие: 80 *кг* + 160 *кг* + 140 *кг* = 380 *кг.*

VII. Сколько четвертого сорта? Отв. — 120 *кг.*

Действие: 500 *кг* — 380 *кг* = 120 *кг.*

VIII. Сколько выручено за 1-й сорт? Отв. — 1408 р.

Действие: 17 р. 60 к. $\times$ 80 = 1408 р.

IX. Сколько выручено за 2-й сорт? Отв. — 1680 р.

Действие: 10 р. 50 к. $\times$ 160 = 1680 р.

X. Сколько выручено за 3-й сорт? Отв. — 1008 р.

Действие: 7 р. 20 к. $\times$ 140 = 1008 р.

XI. Сколько выручено за все три сорта? Отв. — 4096 р.

Действие: 1408 р. + 1680 р. + 1008 р. = 4096 р.

XII. Сколько выручено за 4-й сорт? Отв. — 744 р.

Действие: 4840 р. — 4096 р. = 744 р.

XIII. Почем продавали 1 *кг* 4-го сорта? Отв. — 6 р. 20 к.

Действие: 744 р. : 120 = 6 р. 20 к.

Когда план решения намечен, тогда только надо приступать, как это замечено выше, к полному решению каждого вопроса, чтобы не утерять нити рассуждений. Очевидно, что аналитический способ решения довольно утомителен, и что его применение к решению задач требует некоторой тонкости ума и очень большого навыка. В не слишком сложных задачах большею частью неестественно прибегать к аналитическому способу *для решения* задачи, но *для упражнения* в применении этого способа необходимо начинать с задач не очень сложных.

Обозначение искомых чисел буквами. Можно при составлении плана решения задачи временно обозначать результаты буквами, чтобы ученики не занимались выполнением действий, могущим отвлечь их внимание от составления плана. В нашей задаче это приведет к таким строчкам плана:

I. 8 р. 71,2 к. $\times$ 500 = a р.; уплачено за все конфеты.
II. 96,8 к. $\times$ 500 = b р.; получено прибыли.
III. a р. + b р. = c р.; выручено за все конфеты.
IV. 80 *кг* $\times$ 2 = d *кг*; было 2-го сорта.
V. d *кг*. — 20 *кг* = e *кг*; было 3-го сорта.
VI. 80 *кг* + d *кг* + e *кг* = m *кг*; весят 3 сорта.
VII. 500 *кг* — m *кг* = n *кг*; весит 4-й сорт.
VIII. 17 р. 60 к. $\times$ 80 = k р.; выручено за 1-й сорт.
IX. 10 р. 50 к. $\times$ d = C р.; „ за 2-й сорт.
X. 7 р. 20 к. $\times$ e = q р.; „ за 3-й сорт.
XI. k р. + p р. + q р. = r р.; „ за все 3 сорта.
XII. C р. — r р. = S р.; „ за 4-й сорт.
XIII. S р. : n = x р.; стоит 1 *кг* 4-го сорта.

Буквы в этом случае облегчают труд по составлению плана решения но, конечно, не представляют собою ничего обязательного. Алгебраических элементов буквенное обозначение чисел и результатов, конечно, не вносит.

§ 4. Разделение сложных чисто-арифметических задач.

Взвесив выгоды и невыгоды аналитического и синтетического способов решения сложных чисто-арифметических задач, можно прийти к следующим заключениям: а) синтетический способ решения может отвлечь внимание учеников от необходимых действий и привести их к действиям, для решения задачи даже ненужным; б) аналитический способ требует значительной тонкости ума и значительной власти над рассуждениями, исходящими из общих соображений; с другой стороны, в) синтетический способ иногда быстрее, а аналитический вернее ведет к цели. Усвоение обоих способов решения сложных чисто-арифметических задач выходит чаще всего далеко за пределы непосредственых целей обучения ариф-

... ли чисто-мето-
... ...елю и ученикам труд усвоения
... разрешения сложных чисто-арифметических задач.
...но, чтобы ученики научились решать задачи независимо от правил их разрешения утомительным аналитическим и не всегда надежным синтетическим способом. Ответ показывает, что есть средство, отнюдь не требующее от учеников слишком большой затраты времени и не отзывающееся сколько-нибудь вредно на развивательной стороне обучения, а, наоборот, влияющее на нее в высшей степени полезно. Средство это — предварительное решение учениками сложных чисто-арифметических задач, которым в книгах автора дано название *приведенных*.

Сложные чисто-арифметические задачи бывают двух родов. Одни изложены так, что условия, приводящие к разрешению одного из промежуточных вопросов, приведены рядом, и задача, вследствие этого, почти без всякого анализа разрешается очень быстро. Такова, например, задача:

„В цехе работают мужчины, женщины и подростки. Мужчин — 196 человек, причем каждый из них зарабатывает в среднем 13 руб. за рабочий день; женщин — 104 человека, получающих в среднем по 11 руб. за рабочий день. За 25 рабочих дней все рабочие (мужчины, женщины и подростки) получили 3900 руб. зарплаты. Сколько было подростков, если каждый из них зарабатывал в день по 8 руб.?» К числу задач того же рода принадлежит и такая задача: „Кооператив получил 8 ящиков яиц по 1440 шт. в каждом. Яйца ценились по 45 коп. за штуку. При приемке яиц боя оказалось 5%. Продав эти яйца, кооператив получил 288 руб. прибыли. Почем он продавал десяток яиц?"

Но сложные чисто-арифметические задачи могут быть изложены и чаще всего излагаются так, что условия, тесно одно к другому примыкающие, стоят не рядом, а отделены одно от другого одним или несколькими другими условиями. Такова, например, задача:

„На трех участках железнодорожного пути — первом длиною в 6 *км* 825 *м*, втором — 8 *км* 32 *м* и третьем — 3 *км* 454 *м* — нужно заменить шпалы. Сколько потребуется шпал для ремонта всего пути, если на первом участке требует замены $\frac{1}{5}$ пути, на втором участке $\frac{2}{5}$ этого пути и на третьем участке $\frac{1}{4}$, и если на 0,85 *м* пути кладется одна шпала?" Здесь второе условие не связано ни с первым, ни со следующим и т. д. Одним словом: условия, здесь приведенные рядом, не связаны логически, т. е. не дают таких чисел, над которыми можно было бы совершить действие для разрешения какого-либо из нужных вопросов. Разместив условия задачи сообразно с внутренней связью условий, мы получим следующую задачу, решение которой уже не требует должного сочетания условий: „На трех участках железнодорожного пути нужно заменить шпалы. На первом участке, длиною в 6 *км* 825 *м*, требует замены $\frac{1}{5}$ пути, на втором участке, длиною 8 *км* 32 *м*, — $\frac{2}{5}$ этого пути и на третьем, длиною в 3 *км* 454 *м*, — $\frac{1}{4}$ пути. Одна шпала кладется на 0,85 *м* пути. Сколько потребуется шпал для ремонта всего пути?"

Задачи, в которых условия изложены в том порядке, который наиболее отвечает смыслу задачи и порядку требуемых действий, условимся называть *приведенными* к ряду простых задач или просто *приведенными*. Задачи же, этому порядку не отвечающие, — *неприведен...*

Неприведенной будет и такая, например, задача: „На украшение клуба куплено 17,5 *м* ткани и 2,5 *кг* гвоздей. Во время работы обнаружилось, что н тает 2,25 *м* ткани и 0,5 *кг* гвоздей. В какую сумму обошлось украшение і если известно, что 1 *м* ткани, ранее купленной, обошелся в 2 руб. 50 коп., докупленной — на 10% дороже? За 1 *кг* гвоздей оба раза платили 1 руб. 20

Эта же задача может быть заменена такой приведенной: „На украш клуба было куплено 17,5 *м* ткани по 2 руб. 50 коп. за 1 *м* и 2,5 *кг* гвозде 1 руб. 20 коп. за 1 *кг*. Во время работы пришлось докупить 2,25 *м* ткан 10% дороже, чем первая, и 0,5 *кг* гвоздей по той же цене, что и ран В какую сумму обошлось украшение клуба?"

Само собою разумеется, что раньше всего учитель должен науч детей решению приведенных задач (при этом аналитический спо решения окажется почти совсем неприменимым). Затем учитель мо перейти к решению с ними под его руководством тех же задач, в неприведенном виде. Только, когда это исполнено, можно предложи ученикам сложные неприведенные задачи для самостоятельной работы.

§ 5. Общие выводы.

В качестве общих выводов из всего вышеизложенного можно счи тать следующие положения:

1) Нельзя требовать от учащихся школы первой ступени умени применять непременно аналитический способ решения хотя бы не слишком сложных чисто-арифметических задач, а тем более нельзя требовать умения применять оба метода.

2) Синтетический способ вообще несколько легче, чем аналитический, так как учащиеся, применяя синтетический метод, свободнее пользуются своим здравым смыслом и изобретательностью, исходя из данных чисел, а не из чисел неизвестных.

3) Прежде чем обратиться к усвоению детьми одного из этих методов, полезно с ними перерешить приведенные задачи с теми же условиями, и те же условия использовать для неприведенных задач, составляемых самими учащимися.

4) Буквы для обозначения результатов промежуточных вычислений часто облегчают составление прозрачного плана решения задачи и самый порядок выполнения действий.

5) Составление уравнений для решения многих задач, которые обыкновенно решаются без уравнений, очень часто облегчает их решение.

6) Педантизм в деле обучения детей искусству решать сложные задачи (как и вообще всякий педантизм) большею частью приносит учащимся вред, а не пользу, а потому не может быть оправдан никакими педагогическими соображениями.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ И БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ.

§ 1. Некоторые алгебраи...

В свое...

предшествовать систематизации алгебраического материала, имеющего дело с тождественными преобразованиями численных и не особенно сложных буквенных выражений. Сделано это из соображений чисто дидактических и методических. Никогда ранее не встречавшиеся случаи, когда *необходимо* было сложить одночлен с двучленом, или вычесть многочлен из многочлена, являются для учащихся навязанным им извне материалом. Для чего иногда нужно бывает совершить то или иное действие, учащимся непонятно и поэтому неинтересно. Пусть учащиеся под руководством учителя одной интуицией и примитивными рассуждениями совершают те или иные преобразования, нужные для решения задачи, пусть и учитель входит в интересы учащихся, помогая им пустить в ход все ресурсы своей интуиции и ума для преодоления той или иной трудности. Впоследствии учащиеся оценят систематизацию уже интуитивно побежденных трудностей вопросов разного рода.

Это вполне отвечает требованиям методы целесообразных задач. Попутно с решением задач алгебраического характера ученики обогатили свой математический лексикон некоторыми терминами, которые ранее встречались между прочим. Учитель, затрудняющийся тем или иным вопросом тождественных преобразований, может навести справки в этой главе книги, не предпосылая составлению и решению уравнений того, что составляет содержание материала, освещаемого с методической точки зрения в этой главе.

Содержание этой главы составляют: понятие о функции (хотя с функциями учащиеся уже встречались), численное значение выражения, одночлен, двучлен и многочлен, первые правила употребления и неупотребления скобок, равенства, тождества, коэфициент и т. п.

§ 2. Понятие о функции.

В математике, как известно, первые буквы латинской азбуки обозначают во всяком выражении определенные числа, а последние буквы могут принимать различные значения, зависящие от условий вопроса. Так, выражение $x^5 - 3ax^2 + 2bx - c$ представляет собой некоторую функцию от икса, причем мы только иксу можем придавать различные значения (в зависимости от условий вопроса), но каждой из букв a, b, c в каждом данном случае мы придаем именно одно значение. Эту функцию можно обозначить опять-таки одною из последних букв латинской азбуки (например, буквою y) и тогда говорят, что уравнение $y = x^5 - 3ax^2 + 2bx - c$ выражает некоторую функциональную в данном случае зависимость между y-ком и x-ом, и что y в этом случае есть некоторая определенная функция от x-а. В элементарной алгебре встречаются уравнения в роде следующих:

$$y = 2x - 7;\ y = 3x^2 + 6x - 2$$

и приходится определять ***численные значения*** буквы y при различных значениях буквы x. Затем можно перейти к уравнениям

$$y = ax^2 + b,\ y = ax^2 + bx + c$$

и определять численные значения буквы y при одних и тех же значениях букв a, b и c и различных значениях буквы x. При этом следует избегать случаев, когда функция обращается в отрицательное число. В отделе смешанных задач можно взять ряд чисто арифметических задач на коэфициенты расширения, удельный вес, площади и объемы, длину окружности и площадь круга, поверхность шара, равномерное движение, угловые скорости, падение тел. Из этих задач можно брать в высшей степени поучительные примеры на функциональные зависимости и отыскание численных значений некоторых простейших алгебраических функций. Эти примеры, без сомнения, гораздо полезнее обычно употребляемых *случайных* выражений. Эти понятия (о функции и независимой переменной) учащимся вполне доступны.

§ 3. Численное значение выражения.

Давать определение того, что называется численным значением выражения, не следует. Дело в том, что, с методической точки зрения, достаточно, если ученики правильно понимают самый *смысл* этого простого выражения (численное значение) и умеют *находить* численное значение выражений, ими вполне верно понимаемых. Гораздо затруднительней для учеников привыкнуть к термину „выражение“. Но этого понятия и определять не надо. Достаточно, если ученики, сначала говорившие о том, что *запись* $8+6$ означает сумму 8 и 6, начинают, по примеру учителя, говорить, что „выражение“ $8+6$ представляет собой сумму чисел 8 и 6. Впоследствии понятие это окрепнет и разовьется независимо от каких бы то ни было определений.

§ 4. Одночлен и двучлен.

Представление об одночлене должно развиваться постепенно, а потому не надо давать определение одночлена. Достаточно вести дело согласно общим законам возникновения знакомства со значением общих названий в сознании человека. Сначала надо вести детей от частностей к общему, когда данный термин (как в занимающем нас случае) обнимает слишком много частностей. Сначала пусть ученики усвоят себе, что если дано какое-либо определенное число, или одна буква, обозначающая какое-либо число, и если запись требует только действия умножежения или деления, то это выражение называется „одночленом“. Пусть они далее усвоят себе, что если требуется одно число помножить на другое, полученное — на третье, вновь полученный результат — на четвертое и т. д., то это выражение тоже называется одночленом.

Пусть они затем заметят себе, что всякая дробь, в том числе и дробь, которой числитель равен произведению нескольких чисел, и знаменатель, равным образом, — произведению нескольких чисел, тоже представляет собой некоторый одночлен. Пусть они сами научатся придумывать примеры более или менее сложных одночленов только что охарактеризованных видов. Пусть при этом учитель сначала ограничивается только этим пониманием учеников, предоставив себе отложить дальнейшее развитие понятия об одночлене до тех пор, пока у него не возникнет твердого убеждения в том, что ученики обладают всеми необходимыми для образования этого понятия конкретными представлениями. Когда все это усвоено, можно перейти к подобному же усвоению того, что такое двучлен: сначала двучленом является выражение, требующее только одного сложения или только одного вычитания. Пусть затем двучленом называется и выражение, которое требует, чтобы было совершено действие сложения или вычитания над каким-нибудь одночленом и каким-нибудь числом (которое в этом случае также является одночленом!), или же над двумя сложными одночленами. Пусть ученики научатся и сами придумывать двучлены, прежде чем перейти к вычислению численной величины одночленов. Величину двучленов, как известно, надо вычислять не сразу. Сначала, вычислив значение каждого из одночленов, надо потом совершить над полученными двумя значениями требуемое действие сложения или вычитания. Расположение вычислений при этом можно практиковать вроде следующего:

$$\frac{5 \times 4 \times 7 - 4 \times 3 \times 5{,}2 = 77{,}6}{\begin{array}{r} 5 \times 4 \times 7 = 140 \\ 12 \times 5{,}2 = 62{,}4 \\ 140 - 62{,}4 = 77{,}6. \end{array}}$$

§ 5. Многочлен.

Когда ученики в этом направлении приобрели навык, можно перейти к тому, как обозначаются на письме так называемые *алгебраические суммы* нескольких одночленов. Термин „алгебраическая сумма“ должен быть исключен из этой ступени: ему в школе первой ступени не место. Так называются результаты, которые получаются, если даны несколько чисел или одночленов, если два из них надо сложить или же один вычесть из другого, если к полученному надо прибавить или от него отнять третье число или третий одночлен, к этому результату снова надо прибавить или из него вычесть какое-либо четвертое число или новый одночлен и т. д. В этих случаях скобок, как известно, употреблять не надо, т. е. не надо писать:

$$70 + (3 \times 4) - (3 \times 7 \times 0{,}5) + 18 + (7 \times 2),$$

а следует писать просто так:

$$70 + 3 \times 4 - 3 \times 7 \times 0{,}5 + 18 + 7 \times 2.$$

Когда ученики научились разбираться в том, какие члены входят в состав данного многочлена, можно ознакомить их с термином „ряд последовательных сложений и вычитаний“ и „многочлен“. При этом не надо объяснять того, что это значит — совершить ряд последовательных сложений и вычитаний, а надо прямо указать, что, например, в следующем выражении:

$$7 + 8 \times 3 - 6 \times 2 + 4 - 2 \times 3 + 4 \times 3 + 2 \times 7$$

приходится в конце концов сделать ряд последовательных сложений и вычитаний.

Здесь, конечно, надо брать лишь такие многочлены, чтобы всякое вычитание было возможно совершить, т. е., чтобы уменьшаемое не было меньше вычитаемого. Расположение вычислений, при которых раньше всего вычисляют численные значения одночленов, а потом уже производят ряд последовательных сложений и вычитаний, может быть следующее:

$$7 \times 5 - 0{,}3 \times 0{,}7 - 2 \times 4{,}25 + \frac{1}{2} \times 0{,}75 = 26{,}665$$

$$7 \times 5 = 35$$
$$0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$$
$$2 \times 4{,}25 = 8{,}5$$
$$\frac{1}{2} \times 0{,}75 = 0{,}375$$
$$35 - 0{,}21 = 34{,}79$$
$$34{,}79 - 8{,}5 = 26{,}29$$
$$26{,}29 + 0{,}375 = 26{,}665.$$

§ 6. Скобки.

Следующая за сим работа должна быть посвящена введению употребления скобок, сначала в тех простейших случаях, когда скобки прямо необходимы. Ученики уже знают, что если требуется произвести ряд последовательных сложений и вычитаний, то при этом надо записать одночлены, отделяя один от другого знаком сложения или вычитания, в зависимости от того, какое требуется произвести действие. Отсюда один только шаг к уяснению того, что если к многочлену надо прибавить или из него вычесть одночлен, то это надо записать без всяких новых знаков, кроме еще одного знака сложения или вычитания между данным многочленом и данным одночленом. Так, например, для того, чтобы записать, что к многочлену:

$$2 \times 4 - 3 \times 2 + 4 \times 5$$

надо прибавить одночлен $3 \times \frac{3}{4}$, надо записать следующее:

$$2 \times 4 - 3 \times 2 + 4 \times 5 + 3 \times \frac{3}{4}.$$

Равным образом, если из многочлена

$$7 \times \frac{1}{2} + 4 \times 3 - 2 \times 2$$

надо вычесть одночлен $\frac{1}{2} \times 14$, то это надо записать так:

$$7 \times \frac{1}{2} + 4 \times 3 - 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 14.$$

Другое дело, если над *многочленом* надо совершить умножение или деление. Тогда многочлен этот надо заключить в скобки. Но сначала надо брать только случаи, когда многочлен является множимым. Если, например, требуется многочлен

$$7 \times 2 - 3 \times 4 + 17 \times \frac{1}{2} \times 3$$

помножить на 5, то это требование надо записать так:

$$(7 \times 2 - 3 \times 4 + 17 \times \frac{1}{2} \times 3) \times 5.$$

Если многочлен надо разделить на 15, то этот многочлен тоже надо заключить в скобки. Это — простейшие и легчайшие случаи применения скобок, на которых однако же надо остановиться достаточно долго.

Нетрудно, при неспешной и своевременной (об этом ниже) проработке упражнений и при достаточном их количестве, дается ученикам также и следующее правило: многочлен непременно надо ставить в скобки в тех случаях, когда он является *вторым слагаемым* в некоторой сумме, *вычитаемым* в некоторой разности, *множителем* в произведении и *делителем* у некоторого частного. Тогда он является в записи как бы вторым числом (числом деятельным, активным; первое число, *над которым* производится действие, можно называть страдательным, пассивным). Таким образом, ученики научатся употреблять скобки в четырех случаях, наиболее часто встречающихся на практике. Ученики очень скоро освобождаются от ошибок, притом раз-навсегда, если они проделали на каждый случай достаточно упражнений, и если учитель ставил дело не на почву единственного, общего, отвлеченного правила, а на почву целесообразных и единообразных упражнений. Только такие упражнения дают ученикам возможность каждый раз на достаточном количестве примеров преодолеть по одной лишь трудности. Расположение вычислений при отыскании численного значения выражения может быть в следующем роде:

$$(7 - 2\frac{1}{2} \times 1{,}75 + 4{,}2 \times \frac{1}{7}) \times 0{,}4 = 1{,}29\,.$$

$$2\frac{1}{2} \times 1{,}75 = 4{,}375$$

$$17{,}5 : 4\ ^{1}$$

$$4{,}2 \times \frac{1}{7} = \frac{42}{10 \times 7} = 0{,}6$$

$$7 - 4{,}375 = 2{,}625$$

$$2{,}625 + 0{,}6 = 3{,}225$$

$$3{,}225 \times 0{,}4 = 1{,}29.$$

Во избежание недоразумений, в некоторых случаях, вначале, можно заключить в скобки и одночлены. Но учитель по этому поводу должен каждый раз делать указание относительно того, что хотя скобки вреда не приносят, но не необходимы, и что поэтому их лучше не ставить. Особенно опасна ошибка, к которой склонны учащиеся и которая состоит в том, что, вычисляя выражение,

$$7 + 8 \times 3,$$

они считают, что к 7 надо прибавить 8, или если написано $6 - 2 \times 2$, то ученики очень легко впадают в заблуждение, считая, что в этом

---

[1] Вместо того, чтобы число 1,75 умножить на $2\frac{1}{2}$, можно умножить его на 10, а полученный результат разделить на 4. *(Прим. ред.)*

случае сначала надо из 6 вычесть 2, а потом полученное число помножить на 2, в то время, как на самом деле, сначала надо 2 помножить на 2, а полученное вычесть из 6. Во избежание недоразумений, хорошо одночлены сначала записывать так, чтобы знаки сложения и вычитания, отделяющие один член от другого, стояли не слишком близко к записям одночленов. Поэтому следует *сначала* писать так:

$$7\times6 \quad -2; \qquad 8\times3 \quad -2\times4 \quad +7\times3 \quad -2;$$

$$\frac{1}{2}\times4-2\times\frac{1}{2},$$

где записи одночленов отделены одна от другой более значительным промежутком, чем каким отделены элементы каждого одночлена, а не так:

$$7\times6-2;\ \ 8\times3-2\times4+7\times3-2;\ \ \frac{1}{2}\times4-2\times\frac{1}{2}.$$

§ 7. Случаи употребления скобок при действиях над многочленами.

Следующий шаг к надлежащему употреблению скобок должен быть сделан в том направлении, чтобы ученики постигли, что *всякий* многочлен, над которым требуется совершить какое бы то ни было действие, надо заключить в скобки. Исключение из этого правила могут представлять, хотя это и необязательно, только два случая: а) когда многочлен является первым слагаемым в данном выражении, или б) когда этот многочлен является уменьшаемым в данном выражении. Во всех же прочих случаях, когда над многочленом совершают действие, скобки необходимы. Когда это усвоено, можно указать, что если частное записано в виде дроби, то в тех случаях, когда числитель и знаменатель представляют собою многочлены, эти многочлены можно писать без скобок. Т. е. не пишут:

$$\frac{(7\times2-30:6)}{(8\times4-12)}, \text{ а пишут просто } \frac{7\times2-30:6}{8\times4-12}.$$

Самостоятельные упражнения для учеников на этой ступени содержат в себе нечто совершенно новое. Таковы упражнения в обозначении, с помощью выражений, в которые входят разные знаки действий, таких требований, которые выражены не глаголами, а именами существительными, обозначающими *результаты* действий. Так, если мы скажем, что сначала надо 56 сложить с 44, полученное разделить на 10, затем 56 надо помножить на 2, и прежнее частное умножить на полученное произведение, то это требование ученики запишут с довольно большой легкостью. Если же им сказать, что *частное*, происходящее от разделения *суммы* чисел 56 и 44 на 10, надо умножить на *произведение* первого из этих двух чисел на 2, то ученики сначала несколько затрудняются.

§ 8. Частное правило о скобках.

Полезнейшим дополнением к упражнениям в обозначении учениками разных требований, относящихся до известного ряда действий, служат упражнения, имеющие целью разработку представления о порядке действий в данном выражении. Затем ученики должны уяснить себе значение термина „последовательный ряд умножений“. Под этим выражением разумеют тот ряд действий, когда одно число сначала надо помножить на другое, полученное — на третье, вновь полученное — на четвертое, и т. д. В этом случае, встречающемся чрезвычайно часто, скобок никаких не надо, и пишут просто:

$$7 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{4} \times 2 \text{ и т. п.}$$

Другое дело, если приходится произвести ряд, хотя бы и последовательных умножений, но над какими-либо *выражениями*, каковы бы эти выражения ни были. В этом случае каждое из выражений надобно заключить в скобки. Так, например, если приходится сумму двух чисел 7 и 5 помножить на одночлен 5×3, полученное — на другой одночлен (на $8 \times 3 \times \frac{1}{2}$), вновь полученное — на разность между 8 и 3, то это надо писать так:

$$(7 + 5) \times (5 \times 3) \times (8 \times 3 \times \frac{1}{2}) \times (8 - 3),$$

т. е. непременно каждое выражение заключить в скобки. Только когда первый сомножитель — одночлен, то его можно в скобки не заключать, т. е. если бы вместо суммы $7 + 5$ надо было взять произведение 7×5, то можно было бы писать и так:

$$7 \times 5 \times (5 \times 3) \times (8 \times 3 \times \frac{1}{2}) \times (8 - 3).$$

Если в одночлене последнее действие — деление, и делитель — тоже одночлен, то этот одночлен следует заключить в скобки. Надо писать так: $(8 \times 4) : (3 \times 2)$ или же $8 \times 4 : (3 \times 2)$, но не так: $8 \times 4 : 3 \times 2$, потому что последняя запись может подать повод к недоразумениям. Если над частным надо произвести еще одно действие деления или умножения, то это частное, во избежание всяких недоразумений, лучше всего ставить в скобки: $(18 : 3) \times 4$. Только при производстве сложения или вычитания над одночленами, последние следует писать без скобок.

Легко видеть, что эти частные правила не могут быть усвоены зараз и удержаны памятью учеников. Только упражнениями, притом целесообразными, можно достигнуть того, чтобы во всяком случае, какой только может представиться, ученики ставили скобки или не ставили их только на основании общих правил. На каждое из этих правил надо проделать с учениками достаточное количество упражнений, каждый раз работая только в одном направлении и не переходя ранее времени от одного правила к другому. При этом лучше всего отделять одну от другой две трудности: уменье детей разбираться в данной записи от уменья записывать требование с помощью скобок. Первое умение должно обязательно предшествовать второму. В этом направлении должно проработать с учениками достаточное количество целесообразных упражнений. Полезно при этом сравнение выражений, составленных из тех же элементов — то совсем без скобок, то со скобками, то с одними скобками, поставленными в одних местах, то — со скобками, поставленными в других местах, и т. д.

§ 9. Порядок действий.

Когда все это сделано, ученики подготовлены к восприятию верных представлений о порядке требуемых данным выражением действий. Без полной власти учеников над представлением о порядке требуемых действий дальнейшие работы их почти совершенно невозможны. При этом весьма полезно, чтобы, благодаря разобранным примерам, ученики вполне уразумели, что если дан ряд чисел, то над ним можно совершить различный ряд действий. Полезно, чтобы ученики научились, на целом ряде примеров, размечать порядок действий.

$$(8-5)\times 4:5-\left(5+\frac{1}{2}\right)\times 0{,}001-(15-6):(5\times 3)$$

1-ое 2-ое 3-ое 6-ое 4-ое 5-ое 10-ое 7-ое 9-ое 8-ое

Что „оставить в покое“?

Чрезвычайно полезно ввести в свою речь слова: „оставить в покое“. Эти слова полезны в тех случаях, когда после известного ряда действий надо окончательный результат себе заметить, а затем перейти к производству действий над некоторыми другими числами, например, пусть дано выражение

$$5\times 4-7\times 2+4\times 2\times 3.$$

Порядок действий здесь следующий: сначала надо 5 помножить на 4, но этот результат надо оставить в покое для того, чтобы обратиться к следующему действию, а именно к умножению 7 на 2. Результат этого действия тоже приходится оставить в покое, ибо далее надо помножить 4 на 2, а это произведение — еще на 3. Только когда все эти действия сделаны, т. е. численные величины одночленов: 5×4, 7×2 и $4\times 2\times 3$ определены, можно перейти к ряду действий, обозначенных в этом случае знаками вычитания и сложения. С этой точки зрения ученикам надо очень много поработать над упражнениями этого рода.

§ 10. Скобки разного вида.

Когда все, сюда относящееся, учениками достаточно усвоено, можно перейти к усвоению ими употребления скобок разного вида. Но в упражнениях этого рода не надо допускать увлечений. Для этого лучше начать с такого примера, где употребление одних скобок рядом с другими было бы необходимо. Например, пусть требуется обозначить, что разность между 418 и 327 вычтена из 673, полученная разность вычтена из 925, а вновь полученная — из 2367, и определить окончательный результат всех этих действий! — Как это сделать? — Раньше всего обозначим, что разность между 418 и 327 надо вычесть из 673

$$673-(418-327);$$

потом обозначим, что эту разность надо вычесть из 925 — для этого напишем:

$$925-(673-(418-327))\ldots$$

— Повторите! — Что надо раньше всего обозначить? — Обозначьте! — Что надо теперь обозначить? — Кто знает? — и т. д. — Когда мы получим запись 925 — (673 — (418 — 327)), еще не все кончено: надо еще обозначить, что эту разность надо вычесть из 2367! — Как это обозначить? — Это надо обозначить так:

$$2367 - (925 - (673 - (418 - 327))).$$

В этом случае можно сначала употреблять скобки того же вида и понять, что употребление скобок одного и того же вида *недостаточно прозрачно*, т. е. что *с первого взгляда неясно видно*, какой собственно ряд действий требуется произвести. Тогда ученики вполне уяснят себе, что каждой новой паре скобок, в которые надо заключить выражение, уже содержащее в себе какие-нибудь скобки, надо придавать другую форму. Например, вместо того, чтобы писать:

$$925 - (673 - (418 - 327)),$$

пишут так:

$$925 - [673 - (418 - 327)].$$

А когда приходится это выражение снова заключить в скобки, то употребляются уже скобки третьего вида, например, такие { }.

Тогда получится:

$$2\,367 - \{925 - [673 - (418 - 327)]\}.$$ [1]

Учеников надо приучить к спокойному, уверенному, неторопливому употреблению скобок. Для достижения этого учителю самому не надо торопиться с заданием, а надо медленно и постепенно выражать требования. Надо говорить так: *сначала* надо найти сумму чисел 500 и 35, *потом* надо найти их разность, *затем* полученную сумму помножить на эту разность, и это произведение оставить в покое: а *за сим* надо из 12 356 вычесть 10 275 и произведение, ранее полученное, помножить на разность между только что упомянутыми числами и т. п. Ученики научатся впоследствии, когда требования будут выражаться более трудным языком, тоже разбираться в том порядке действий, который требуется совершить, — только при том условии, если их не сразу заставляли записывать требования вроде вышеприведенного.

Предлагать ученикам задачи с особенно многочисленными скобками решительно не для чего. Действительно: по существу своему цель ознакомления с употреблением скобок заключается только в усвоении смысла этих записей и способа изображения записей, встречающихся в арифметических задачах алгебраического характера. Но последние редко требуют даже употребления скобок трех видов. Да и *в научных* сочи-

---

[1] Учеников, как известно, затрудняет изображение так называемых фигурных скобок, и, во избежание неаккуратного письма, учителю надо показать им, как достигнуть правильного изображения этих скобок. Это сделать очень легко, указав на то, что верхняя часть первой скобки представляет собою вертикальную часть написанной прописной буквы *Г*, а нижняя половина — главную часть вопросительного знака, несколько укороченного сверху; во второй же скобке верх представляет собою упомянутую часть вопросительного знака, а низ — основную вертикальную часть прописной буквы *Г*. Само собою разумеется, что ученики должны (частью — у доски, частью — в тетрадях) поупражняться в правильном изображении этих скобок.

нениях выражения с многочисленными скобками встречаются крайне редко. Самостоятельные упражнения учеников на этой ступени должны сводиться к определению численных величин выражений, в которые входят скобки разного вида.

§ 11. Равенство, тождество и тождественные выражения.

Ознакомившись со способами записывания в одну строку различных арифметических требований, ученики могут перейти к уяснению себе того, что разумеют под словом „тождество“. Представление о тождестве надо развивать, начав дело с самых простых тождественных выражений. Сумма данных двух чисел (215 и 358) не зависит от того, которое из них принято за первое слагаемое и которое — за второе; как это обозначить с помощью знаков и цифр? Очевидно, что достаточно написать следующее:

$$215 + 358 = 358 + 215.$$

Эта запись обозначает, что прибавить 358 к 215 все равно, что прибавить 215 к 358. Это выражают иначе, сказавши и записавши, что сумма чисел 215 и 358 равна сумме чисел 358 и 215. Другая задача: сумма чисел: 27, 12, 36, 48 и 59 равна той сумме, которая получится от сложения суммы всех отдельных десятков этих чисел с суммою всех отдельных единиц этих чисел. Как это записать без помощи слов, а только с помощью знаков? — Это записать можно следующим образом:

$$27 + 12 + 36 + 48 + 59 = (20 + 10 + 30 + 40 + 50) + (7 + 2 + 6 + 8 + 9).$$

Третий пример: как обозначить, что величина разности между числами 29 и 14 не изменится, если мы уменьшаемое и вычитаемое увеличим на одно и то же число, например, на 7 единиц? — К уменьшаемому надо прибавить 7 и к вычитаемому — тоже 7, и разность между полученными числами будет равна прежней разности. Это значит, что:

$$(29 + 7) - (14 + 7) = 29 - 14 \text{ и т. п.}$$

После многочисленных упражнений этого рода, взятых из области сложения и вычитания или же из области умножения и деления, ученики уясняют себе, что если значения двух выражений равны между собой, то мы можем говорить о *равенстве* двух выражений. Так, запись:

$$17 + 5 = 18 + 4,$$

свидетельствует о том, что эти два выражения равны между собой. Для краткости, самые записи называются *равенствами*. Выражения же, обозначающие одно и то же число, называются тождественными. Так, выражения $15 + 35 - 10 = 25 + 15$ представляют собой два тождественных выражения. — Время, затраченное детьми на усвоение представления о тождественных выражениях и о тождествах, впоследствии принесет свои плоды.

§ 12. Обозначение чисел буквами.

В состав всего усвоенного учениками употребление букв для обозначения чисел входило только при обозначении функций и при решении уравнений.

Прежде всего на выражения, содержащие буквы, соединенные знаками действий, должно смотреть не как на требование, а как на результаты действий. Эту подготовительную ступень и содержали в себе все упражнения, рассмотренные выше в настоящей главе. Только когда все эти предварительные понятия вполне учениками усвоены, может быть введено обозначение известных чисел буквами, составляющее совершенно новую точку зрения и являющееся как бы новою эрою в интересующем нас курсе. Для обозначения же чисел не неизвестных, а только в данном вопросе могущих принимать любые значения, можно поступить, примерно, следующим образом: Прежде всего возьмем какое-либо тождество, например,

$$176 + 378 = 378 + 176.$$

Оно обозначает то, что сумма двух вполне определенных чисел равна сумме тех же чисел, взятых в другом порядке. С этой же точки зрения можно рассмотреть и другие тождества:

$$45 \times 47 = 47 \times 45;\ 8 \times 7 \times 6 = 6 \times 7 \times 8 \text{ и т. п.}$$

Но каждое из этих тождеств свидетельствует о равенстве только двух выражений, относящихся до совершенно определенных чисел, не выражая никакого *общего закона*. Вполне естественен вопрос: как обозначить, что сумма *всяких* других двух, *каких ни попало*, чисел не зависит от того, какое из них принято за первое слагаемое, и которое — за второе? Затем достаточно — просто заявить ученикам, что принято обозначать числа, когда нам все равно, как велики эти числа (когда для нас величина этих чисел, в данном случае, не важна, безразлична), буквами какой-либо азбуки. Далее можно сказать, что для этой цели большею частью служат буквы азбуки латинской. При этом надо остановиться более всего на тех фактах, которые нам желательно выразить в виде тождества, относящегося до каких угодно, каких ни попало чисел. Мы говорим, например, что сумма всяких *каких ни попало* двух чисел не зависит от того, которое из них принято за первое слагаемое и которое — за второе (переместительный закон). Для нас в таком случае все равно, о каких именно числах мы говорим. Ученики должны уразуметь, что величина суммы зависит от величины каждого из слагаемых. Но тот закон, что величина суммы двух слагаемых не зависит от того, которое из них принято за первое слагаемое, и которое — за второе, — этот *закон* справедлив для всяких чисел: больших, малых, многозначных, однозначных, целых и дробных. Вот этот то именно закон и записывают так:

$$a + b = b + a.$$

На этом тождестве и вообще на тех тождествах, которые впоследствии будут выражены с помощью букв, учителю надо несколько остановиться. Ученики не только должны научиться *читать* подобные тождества и понять, что последние обозначают, но также научиться отдавать себе *отчет* в том, что именно обозначают эти записи. Своевременно можно учеников ознакомить с третьей латинской буквой c (если они не были с ней знакомы раньше). Можно научить их обозначению того, что сумма трех каких ни попало чисел равна первому числу, увеличенному на сумму двух остальных (соединительный закон), что это можно написать с помощью букв латинской азбуки так:

$$a+b+c=a+(b+c) \text{ или яснее: } (a+b)+c=a+(b+c),$$

и что эта запись содержит в себе запись закона, относящегося до трех каких ни попало чисел. — Как обозначать, что требуется найти разность каких ни попало двух чисел? Как обозначить, сумму двух чисел, из которых одно может быть какое ни попало, а другое непременно равно 8? Как обозначить, что из какого то числа, все равно какого, мы вычитаем 17 и что для нас, действительно, все равно как велико уменьшаемое? Как обозначить, что от прибавления к разности каких ни попало двух чисел, числа, равного вычитаемому, получится уменьшаемое? И т. д. — Все подобные вопросы надо разработать и повторить с учениками без всякой поспешности и без всяких отвлеченностей много раз. Тогда ученики уяснят себе, что обозначение чисел буквами влечет за собой возможность выражения результатов действий над числами, до величины которых нам в данном случае почему-либо дела нет, — притом, в виде записей весьма кратких и без слов.

Само собою разумеется, что учить записыванию подобных равенств надо, по возможности, систематично. Требуется, например, обозначить, что от прибавления к разности между двумя числами такого числа, которое равно вычитаемому, получается уменьшаемое. При этом надо научить учеников принимать во внимание, что мы говорим о *разности* между двумя какими ни попало числами, что первое из них можно обозначить буквою a, второе — буквою b. Тогда разность между ними придется обозначить так: $a-b$. Далее, к этой разности надо прибавить вычитаемое, а это можно записать так: $(a-b)+b$, или просто так: $a-b+b$. От этого прибавления в окончательном результате должно получиться уменьшаемое, потому что от сложения разности с вычитаемым *всегда* получается уменьшаемое. Все это надо записать так: $(a-b)+b=a$.

Полезны упражнения в обозначении того, что: а) от разделения произведения двух чисел на множитель получается множимое, б) от умножения дроби на число, равное ее знаменателю, получается числитель, в) от разделения всякого числа на другое в частном получается дробь, числитель которой равен делимому, а знаменатель делителю, г) от сложения всяких двух дробей с одинаковыми знаменателями получается новая дробь, которой числитель равен сумме числителей, а знаменатель — знаменателю данных дробей и т. д.

Можно, введя еще одну латинскую букву d, поупражнять учеников в обозначении разных требований: например, в обозначении требования, по которому сумму двух каких ни попало чисел надо помножить на разность двух каких ни попало чисел, или сумму двух каких ни попало чисел надо помножить на разность между этими же числами и т. д. Крайне важно показать, что последовательность действий в буквенных выражениях

$$a+(b+c) \text{ и } (a+b)+c \text{ (или } a+b+c)$$
$$a+(b-c) \text{ „ } (a+b)-c \text{ (или } a+b-c)$$
$$a-(b+c) \text{ „ } (a-b)-c \text{ (или } a-b-c)$$

и т. д.

различна, и в чем это различие сказывается.

Затем, надо научиться разбирать, что обозначают записи вроде следующих:

$$(a - 16) + (a - 16) + a \times 16;$$

$$(a + b) : (a - b) + (a - b);$$

$$a + b : (a - b) + a - b;$$

$$(a + b) - (a - b) : (c + b);$$

$$(c + d) : [(a + b) + (a - b)].$$

Затем следует обратиться к тому, какое последнее действие требуется совершить в каждом из этих выражений, и вообще, какой порядок действий должен быть соблюден в каждом из них.

Диктовать подобные записи надо вразумительно. Например, последнее выражение надо продиктовать следующим образом: „скобка"; $c + d$; скобку закрыть; разделить; прямая скобка; круглая скобка; $a + b$; круглую скобку закрыть; плюс; круглая скобка; $a - b$; круглую скобку закрыть; прямую закрыть. Полезно и выразительное чтение. Упражнять учеников в сложных выражениях с особенно многочисленными скобками, повторяем, отнюдь не следует по той причине, что ни образовательного значения ни практического эти упражнения не имеют.

§ 13. Обозначение умножения и коэфициент.

Здесь нами не отведено место одночленам, в которых буквы снабжены какими-либо показателями. Это обозначение для наших целей бесполезно. В решении арифметических задач алгебраического характера не встречается степенных количеств.[1] Если где-нибудь еще применимо употребление показателей, то только при нахождении наименьшего кратного числа, да и здесь они не необходимы. Но тем бо́льшего внимания заслуживают различные способы обозначения произведений в алгебре и полное усвоение учениками значения *коэфициента* в данном одночлене. Самое слово *коэфициент* не принадлежит к числу тех иностранных слов, которых произношение давалось бы детям с особенной легкостью. Оно к тому же не выражает для них чего-нибудь, хотя бы по-наслышке, известного.

Если надо помножить число a на число d, то это требование, как известно, может быть обозначено трояким образом. Между буквами можно поставить косой крестик, т. е. знак умножения. Но можно поставить точку. Можно между этими буквами не ставить никакого знака, и тогда это обозначение тоже выражает произведение двух чисел, обозначенных буквами. Если буквенных сомножителей больше двух, то и тогда произведение может быть обозначено трояким образом. Из всех этих записей, запись abc короче остальных двух, и этим объясняется, почему она чаще всего предпочитается другим записям. Но если сомножители обозначены цифрами, то между ними необходимо ставить

---

[1] Автор рассматривает весь алгебраический материал только с точки зрения его необходимости для решения задач алгебраического характера. Поэтому он и считает, что понятие о показателе степени не нужно. В программу же V класса входят понятия о степени и показателе степени. *(Прим. ред.)*

знак умножения. Ибо в противном случае запись будет обозначать совершенно другое.

Запись $5abc$ обозначает, что 5 надо помножить на число a, полученный результат — на b и вновь полученный — на с, или что произведение трех чисел a, b и c надо помножить на 5. Численный множитель, записанный на первом месте, называется коэфициентом всего одночлена. — Какие коэфициенты в одночленах:

$$3ab;\ \frac{3}{4}abc;\ 1\frac{5}{7}ac;\ 15{,}3\,a;\ 8{,}75\,ad?$$

И т. п.

Численную же величину одночленов, в состав которых входят коэфициенты, можно вычислять, примерно, следующим образом: если $a=7$, $b=9$, $c=\frac{3}{35}$, то

$$\overline{5\,abc=27}$$

$$abc=7\cdot 9\cdot\frac{3}{35}=\frac{7\cdot 9\cdot 3}{35}\quad\text{(не сокращают!)}$$

$$5\,abc=\frac{7\cdot 9\cdot 3\cdot 5}{35}=27.$$

Надлежащие упражнения в этом направлении, под непосредственным руководством учителя, должны быть более или менее многочисленны. Тогда можно перейти к отысканию численной величины многочленов, члены которых снабжены коэфициентами. При этом с большою настойчивостью надо добиваться того, что если буква a обозначает, например, 2, то $5a$ обозначает не 52, а 2×5 и т. п. Полезно не только для должного усвоения алгебраических понятий, но и для целей чисто арифметических и вычислительных, научить детей отысканию численного значения буквенных (алгебраических) выражений разного вида. Пусть $a=10$, $b=5$; тогда надо найти численные значения выражений:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}:\frac{aa-bb}{4}\quad\text{(Отв.: 1);}$$

$$\frac{5a-7b}{5ab}+\frac{7}{5a}-\frac{1}{b}\quad\text{(Отв.: 0);}$$

$$(4a+8):4b+8a:4b\quad\text{(Отв.: 6,4);}$$

$$7a+2b-ab\quad\text{(Отв.: 30). И т. п.}$$

Но особенно многочисленных самостоятельных упражнений на отыскание численных величин для дальнейших целей эта статья не требует. Гораздо важнее соответствующие упражнения учеников под непосредственным руководством учителя. Учитель не должен непременно брать, по возможности, выражения сложные. Он должен научить нахождению в его присутствии численных величин буквенных выражений, сравнительно простых. При этом учитель, конечно, должен также избегать таких случаев вычитания, в которых уменьшаемое меньше вычитаемого. Не следует думать, что ученики сразу поймут, что это значит „определить численную величину данного выражения, если $a=7$“. Это выражение — „a равно 7" — учеников сначала смущает. А поэтому гораздо лучше сначала говорить: буква a *обозначает* число 7. Впоследствии можно условиться, что для *краткости* в таком случае говорят, что a равно семи, и пишут $a = 7$. Конечно, буква a не может равняться *цифре* 7, а может только обозначать (и то не всегда) *число* семь.

§ 14. Сложение многочленов.

Внесение действий, хотя бы над простейшими буквенными выражениями, в курс школы первой ступени, конечно, является пожеланием нелегко осуществимым по очень многим причинам.

Речь идет о тождественных преобразованиях буквенных выражений. Понятно, что прежде всего надо освоиться с так называемыми четырьмя „действиями" над многочленами простейшей структуры, которые в зачаточной форме встречались уже при решении некоторых уравнений первой степени с одной и с двумя неизвестными.

Сложение простейших многочленов лучше всего начать решением задач хотя бы такого рода: найти (изустно), сумму чисел 96 и 38. Как это сделать скорее? Учащиеся знают, что в этом случае скорее получится результат, если дополнить 96 до ста (т. е. прибавить к 96 четыре), а затем к ста прибавить 34. В результате удастся установить равенство:

$$96 + 38 = (96 + 4) + 34$$

или, что для нас важнее,

$$96 + (4 + 34) = (96 + 4) + 34$$

или еще проще

$$96 + (4 + 34) = 96 + 4 + 34.$$

Разобрав несколько таких задач, учащиеся легко придут к заключению, что вообще

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

или

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Затем им предлагают, подстановкой в обеих частях вместо a, b и c каких угодно чисел, убедиться в том, что последнее тождество верно для каких угодно чисел. Когда учащимися это усвоено, следует им предложить выразить словами мысль, выражаемую этим тождеством (чтобы прибавить к некоторому числу сумму двух каких угодно чисел, прибавляют к нему первое слагаемое, а затем второе слагаемое). После надлежащих упражнений можно задать такую задачу: найти изустно сумму чисел: 152, 84 и 16. Выяснится, что проще всего сложить раньше 84 и 16, а затем к 152 прибавить полученную сумму. Несколько таких примеров приведут к тождеству:

$$a + b + c = a + (b + c),$$

т. е. к прежнему, но переписанному так, что правая часть стала левой, а левая — правой. Наше тождество, так переписанное, также выражает некоторую мысль, но отличную от прежней (вместо того, чтобы к некоторому числу прибавить второе, к полученной сумме — третье, можно к первому прибавить сумму двух других).

Таким образом учащиеся убедятся, что во всяком буквенном тождестве, по существу, кроются две мысли. Надо только достигнуть того, чтобы они разобрались, что эти мысли действительно различны. Что всякое тождество, вообще говоря, выражает две мысли — это должно быть известно учащимся. Необходимо упражнять их в чтении несложных тождеств. Это имеет большое образовательное значение. Учитель, если захочет, может это тождество обобщить

$$a+(b+c+d+e)=a+b+c+d+e.$$

Это обобщение учащимся дается легко.

Но на этой ступени лучше ограничиться двучленами, а, в крайнем случае, трехчленами. Только не следует давать правила, что для прибавления многочлена к некоторому числу, приписывают к последнему все члены первого со своими знаками. Такое определение будет в данном случае чисто условным, так как в школе первой ступени отрицательные числа не изучаются.

Когда учащимися все выше изложенное будет усвоено, можно перейти к решению таких примеров, в которых применяется тождество, слева направо:

$$10+(10+x);\ (25+x)+(y+7);\ (a+b)+(c+d);$$
$$(a-b)+(b+c) \text{ и т. д.}$$

Затем таких, в которых это тождество употребляется справа налево. Заключить в скобки последние два члена следующих выражений:

$$a+b+c;\ x+y+2; \text{ и т. п.}$$

Это преобразование необходимо сразу же применить к решению уравнений, надлежащим образом подобранных.

Далее следует, чтобы учащиеся ознакомились с тождеством

$$a+(b-c)=(a+b)-c$$

или проще

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

Для этого лучше всего исходить из задач такого рода: найти изустно сумму чисел 88 и 97. Чтобы ее вычислить, лучше всего к 88 прибавить 100, а из полученной суммы вычесть 3. В знаках это можно записать так:

$$88+97=(88+100)-3$$

или

$$88+(100-3)=(88+100)-3 \text{ и т. д.}$$

Затем следует предложить убедиться в верности этого тождества подстановкой вместо a, b и c каких угодно чисел (но всегда число b должно быть больше c). Потом учащиеся сами излагают мысль, выражаемую этим тождеством (чтобы к числу прибавить разность, можно к нему прибавить уменьшаемое, а из полученного результата вычесть вычитаемое). Подбором соответствующих задач можно прийти к тому же тождеству, но переписанному справа налево. Учащиеся опять должны этому переписанному тождеству дать формулировку (вместо того, чтобы к некоторому числу прибавить второе, а из полученной суммы вычесть третье, можно к первому прибавить разность второго и третьего) и сравнить с данной ими ранее. Теперь они легко справятся с такими преобразованиями

$$20 + (30 - x);\ (a + b) + (c - d);\ (a - b) + (b - c) \text{ и т. д.}$$

и с заключением в скобки последних двух членов выражений:

$$a + b - c;\ x + 7 - y \text{ и т. п.}$$

Можно, конечно, разобрать более сложные случаи $a + (b + c - d$ или $a + (b - c + d)$ или $a + (b - c - d)$, — все зависит от подготовк класса и степени заинтересованности учащихся этими преобразованиями Но отнюдь не следует давать правило, обычно принятое в учебника: алгебры. Только если сами учащиеся уловят это правило, то им можно его дать в следующей форме: чтобы прибавить к некоторому числу многочлен, приписывают к нему слагаемые многочлена в качестве сла гаемых же, уменьшаемые — в качестве уменьшаемых, а вычитаемые в качестве вычитаемых.

Само собою разумеется, что и второе тождество должно применятьс в соответствующе подобранных уравнениях.

§ 15. Вычитание многочленов.

Прежде всего можно решить несколько примеров на изустное вычитание целых чисел. Например, надо найти разность чисел 335 и 124. Как скорее найти эту разность? (Вычесть из 335 сначала сто, а из полученного разультата 24.) Запишите это!

$$335 - 124 = (335 - 100) - 24$$

или

$$335 - (100 + 24) = 335 - 100 - 24.$$

На основании таких примеров учащиеся убедятся, что, по существу, вычисление здесь производится по равенству:

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

или проще

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Затем им предлагают убедиться в верности этого тождества посредством подстановки вместо a, b и c целых и дробных чисел, соблюдая, конечно, условие, чтобы повсюду уменьшаемое было больше вычитаемого. Когда учащиеся свыклись с этим тождеством, предлагают им выразить словами мысль, ему соответствующую (чтобы из некоторого числа вычесть сумму, вычитают из него первое слагаемое, а затем второе). Затем им можно предложить задачи такого рода: вычислить выражение:

$$273 - 88 - 12.$$

Нетрудно их навести на мысль, что удобнее прежде сложить числа 88 и 12, а затем полученную сумму (100) вычесть из 273. После нескольких таких упражнений они заметят, что здесь мы имеем дело с прежним тождеством, но написанным в ином порядке:

$$a - b - c = a - (b + c).$$

Затем учащиеся прочитывают это тождество (вместо того, чтобы из некоторого числа вычесть второе, а из полученной разности — третье, можно из первого числа вычесть сумму двух других).

Когда учащимися все это усвоено, можно перейти к усвоению тождества

$$a - (b - c) = (a - b) + c,$$

начав, например, с такой задачи: как скорее получить разность чисел 256 и 98? И т. д. И это тождество прочитывается слева направо и справа налево. Затем уже можно, повторив предварительно сложение двучленов, разобрать простейшие примеры на вычитание двучленов. Причем как при сложении, так и при вычитании, не следует брать пока примеры, приводящие к приведению подобных членов. Конечно, здесь вполне уместны упражнения на заключение в скобки, требующие применения наших тождеств. Если преподаватель пожелает, то он может в качестве вычитаемого взять и трехчлен, но опять-таки лучше производить это вычитание без правил, а основываясь на постепенном применении предыдущих тождеств. Но если давать правило, то в таком роде: чтобы из некоторого числа вычесть многочлен, все уменьшаемые и слагаемые приписываются в качестве вычитаемых, а вычитаемые — в качестве слагаемых.

Далее, не бесполезно для дальнейшего выяснить на численных примерах верность следующих трех тождеств:

$$a + b + c = a + c + b$$
$$a + b - c = a - c + b$$
$$a - b - c = a - c - b.$$

Первое и третье, конечно, быстро усваиваются учащимися. Что же касается второго, то оно дается им не так легко, поэтому следует подтвердить его справедливость на многочисленных примерах, подчеркнув, что число a здесь должно быть больше числа c. Далее на численных и буквенных примерах они должны убедиться, что вообще члены многочлена можно переставлять, причем при этой перестановке сохраняется знак действия каждого из них. Конечно, при этом должно соблюдаться условие, чтобы вычитание всегда выполнялось. Например,

$$2 + 3 - 4 + 18 - 7 - 5$$

можно представить так:

$$2 + 3 + 18 - 4 - 7 - 5$$

или

$$2 + 18 - 4 - 7 - 5 + 3,$$

но не так:

$$2 + 3 - 7 + 18 - 4 - 5 \text{ и т. д.}$$

§ 16. Умножение одночленов.

Учащимся уже известно переместительное свойство сомножителей произведения:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Чтобы дать им представление об умножении одночленов, предложим пример такого типа:

$$(27 \cdot 25) \cdot 4.$$

Учащиеся, конечно, скажут, что надо прежде всего вычислить произведение $27 \cdot 25$, а полученный результат умножить на 4. Задав им вопрос: нельзя ли вычислить это произведение скорее? — надо их довести до интуитивного понимания, что можно раньше 25 умножить на 4, а затем 27 умножить на полученное произведение (100), так что в результате можно записать:

$$(27 \cdot 25) \cdot 4 = 27 \cdot (25 \cdot 4).$$

Проработав целый ряд таких примеров с целыми и дробными числами, учащиеся в конце концов придут к заключению, что вообще

$$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$$

или

$$abc = a \cdot (b \cdot c),$$

каковы бы ни были числа a, b и c.

Проверив затем это тождество подстановкой вместо a, b и c каких угодно чисел, учащиеся должны дать его формулировку (чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое умножить на произведение второго и третьего). Затем учитель может предложить пример такого рода

$$6 \cdot (2\frac{1}{3} \cdot 29)$$

и попросить вычислить его. Ученики убедятся, что результат получится скорее, если 6 умножить на $2\frac{1}{3}$, а полученное произведение — на 29, чем если умножить раньше $2\frac{1}{3}$ на 29, а затем 6 на полученное произведение. Следовательно,

$$6 \cdot \left(2\frac{1}{3} \cdot 29\right) = \left(6 \cdot 2\frac{1}{3}\right) \cdot 29.$$

В итоге они получат прежнее тождество, но переписанное справа налево:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(Чтобы умножить некоторое число на произведение двух других чисел, можно первое умножить на второе, а полученное призведение — на третье.)

Из первой формулировки видно, что если надо произведение двух чисел умножить на третье, то надо первое умножить на произведение второго и третьего. Далее учащимся нетрудно понять, что можно и второе число умножить на произведение двух остальных, в зависимости от надобности. Например, произведение $(8 \cdot 47) \cdot 125$ скорее получим, если его заменим таким

$$(8 \cdot 125) \cdot 47,$$

так как $8 \cdot 125 = 1000$, а $1000 \cdot 47 = 47\,000$.

После достаточного количества упражнений, учащиеся могут понять, что вообще при умножении произведения нескольких чисел на некоторое число, достаточно умножить один из сомножителей на это число, например,

$$\left(2 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 7\right) \cdot 6 \quad 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7,$$

где $8 = 1\frac{1}{3} \cdot 6$.

Тогда они поймут, что

$$5abc \cdot 7 = 35abc.$$

Что же касается произведения двух одночленов, например,

$$2a \cdot 3b,$$

то можно рассуждать так: число $2a$ надо умножить на произведение $3b$; но из второй формулировки видно, что для этого надо $2a$ умножить на 3, а полученный результат на b. Но $2a \cdot 3$ равно $6a$; $6a \cdot b$ равно $6ab$, поэтому

$$2a \cdot 3b = 6ab.$$

Разобрав достаточное количество таких примеров, учащиеся, несомненно, освоятся с умножением одночленов. Правило здесь полезно дать только в том случае, если учащиеся сами дойдут до него.

§ 17. Умножение многочлена на одночлен.

Как найти изустно произведение 17 на 6? (10 помножить на 6, 7 помножить на 6 и полученные произведения сложить.) — Как это записать? ($17 \cdot 6 = 10 \cdot 6 + 7 \cdot 6$ или $(10 + 7) \cdot 6 = 10 \cdot 6 + 7 \cdot 6$.) Далее учащимся нетрудно понять, что $11 \cdot \frac{2}{9} = 9 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9}$ или $(9 + 2) \cdot \frac{2}{9} = 9 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9}$. После достаточного ряда упражнений они убедятся, что вообще

$$(a + b) \cdot c = ac + bc,$$

каковы бы ни были числа a, b и c. Подстановкой вместо этих букв каких угодно чисел (целых и дробных) учащиеся окончательно убедятся в верности тождества. Учащиеся, конечно, не затруднятся эту мысль выразить словами (чтобы сумму двух чисел умножить на третье число, помножают на это число первое слагаемое, затем второе и полученные произведения складывают). С другой стороны из изустных вычислений учащиеся уже знают $30 \cdot 2 + 8 \cdot 2$, то же самое, что $38 \cdot 2$; поэтому

$$30 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = (30 + 8) \cdot 2;$$

Также

$$20 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} \text{ равно } 23 \cdot \frac{2}{7}, \text{ т. е.}$$

$$20 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} = (20 + 3) \cdot \frac{2}{7}.$$

Следовательно, вообще

$$ac + bc = (a + b) \cdot c.$$

Это тождество то же, что и предыдущее, но переписанное справа налево.

Учащимся нетрудно будет прочесть и это тождество (если требуется сложить два произведения, у которых множители одинаковы, то для получения результата, можно сумму множимых умножить на общий множитель; пример: $243 \cdot 7 + 757 \cdot 7 = (243 + 757) \cdot 7 = 7 \cdot 1000 = 7000$.

Далее, когда учащимися все вышеизложенное усвоено, можно перейти к решению примеров такого рода:

$$(2x + 7) \cdot 5;\ 3 \cdot (2x + 5);\ (2a + 3b) \cdot 5;\ (2a + 3b) \cdot 4.$$

К тождеству $(a - b) \cdot c = ac - bc$ учащихся можно подвести следующим образом: — Чему равно произведение 175 на 4? — Можно ли его получить так: умножить раньше 200 на 4, а из полученного результата вычесть произведение 25 на 4? Как это записать?

$$175 \cdot 4 = 200 \cdot 4 - 25 \cdot 4,$$

или

$$(200 - 25) \cdot 4 = 200 \cdot 4 - 25 \cdot 4.$$

Так в конце концов они убедятся, что вычисление в таких случаях производится по тождеству

$$(a - b) \cdot c = ac - bc.$$

Само собою разумеется, что учащиеся в этом случае легко справятся с формулировкой.

Затем можно перейти к решению примеров

$$(3x - 4)\,5;\ 2\,(7x - 8);\ 3\,(2x - 3y) \text{ и т. д.}$$

Разложение на сомножители. Из предыдущих двух тождеств учащиеся уже знают, что выражения вида $ac + bc$ и $ac - bc$ могут быть представлены в виде произведения двух сомножителей, именно $ac + bc = (a + b) \cdot c$; $ac - bc = (a - b) \cdot c$.

На основании этого они в состоянии решать несложные примеры на „разложение на сомножители“. Например,

$$6x + 8 = (3x + 4) \cdot 2;\ 6a - 9b = (2a - 3b) \cdot 3;$$

$$2ab - 6ac = (b - 3c) \cdot 2a \text{ и т. д.}$$

Приведение подобных членов. Приведение подобных членов основывается на тех же тождествах. Например,

$$7x + 5x = (7 + 5)\,x = 12x$$

$$9x - 4x = (9 - 4)\,x = 5x\,.$$

Рассуждение вроде такого: 7 карандашей да 5 карандашей составит 12 — не соответствует ни логическим основаниям, ни здравому смыслу, т. к. x — не карандаш, а сомножитель. Конечно, предварительно надо стремиться к тому, чтобы ученики освоились с тем, чтó разумеют под *подобными* членами многочлена. Для этого надо брать одночлены без показателей, т. е. линейные буквенные многочлены и показать, что один из буквенных членов многочлена может содержать те же буквенные сомножители, что и другой. Когда ученики научились различать подобные члены, надо с ними проработать следующие случаи приведения подобных членов:

1) $a+7x+5x$, не вызывающий затруднений. Учащиеся уже на основании тождества $a+b+c=a+(b+c)$ понимают, что $a+7x+5x=a+(7x+5x)$.

Но $7x+5x=12x$; поэтому $a+7x+5x=a+12x$.

2) $a+7x-5x$ — тоже не вызывает у них затруднений.

3) $a-5x-3x$ — может учащихся затруднить.

Здесь учащиеся должны уразуметь, что лучше всего предварительно заключить последние два члена в скобки, так что $a-5x-3x$ может быть заменено $a-(5x+3x)$, что равно $a-8x$.

4) $a-9x+4x$ — может учащихся тоже затруднить. И здесь учащиеся должны уразуметь, что последние два члена надо предварительно заключить в скобки, так что $a-9x+4x$ заменяется $a-(9x-4x)$, а последнее равно $a-5x$.

На последние два случая необходимо с учащимися в достаточной степени поупражняться, прежде чем перейти к более сложным случаям.

Что же касается примеров такого рода, как $a-2x+7x$, то учащиеся, придерживаясь четвертого случая, увидят, что из меньшего числа (2) приходится вычитать большее. При решении задач алгебраического характера навряд ли учителю придется столкнуться с такими случаями. Но, если он пожелает это проработать, то он должен им просто указать, что (на основании тождества $a-b+c=a+c-b$).

$$a-2x+7x=a+7x-2x,$$

а это уже представляет второй случай.

Также и пример $a+2x-9x$ — может поставить учеников в тупик. Но если им указать, что

$$a+2x-9x=a-9x+2x,$$

то они уже с ним справятся. Конечно, для этого необходимо, чтобы все тождества были основательно проработаны, и чтобы учащиеся поняли, что одно и то же тождество может быть использовано двояко (слева направо и справа налево). Только в том случае, когда они эти тождества не запомнят, а сознательно будут уметь их применять, только тогда все разобранные здесь случаи приведения подобных членов дадутся им легко и будут ими сознательно усвоены. Другой подход к решению разобранных здесь примеров требует введения в явном или в замаскированном виде отрицательных чисел, но последние не вводятся в курс школы первой ступени.

§ 18. Более сложные преобразования.

После всего сказанного можно перейти к более сложным преобразованиям. Причем на первых порах каждый свой шаг учащиеся должны уметь объяснить. Пусть дано выражение

$$7(2x-4)-4(2x-6).$$

Его можно заменить таким (почему?!)

$$(14x-28)-(8x-24),$$

Следует приучить учеников получающиеся в таких примерах произведения всегда заключать в скобки, во избежание недоразумений. Далее последнее выражение равно (почему?!)

$$14x - 28 - 8x + 24.$$

Это же в свою очередь равно

$$14x - 8x - 28 + 24$$

или (почему?) $$(14x - 8x) - (28 - 24)$$
или $$6x - 4.$$

§ 19. Умножение двучленов.

При умножении двучленов не следует давать учащимся никаких правил. Надо основываться исключительно на предыдущих тождествах. Пусть учащимся дан пример:

$$(x - y) \cdot (e + k).$$

Они должны уразуметь, что так как $e + k$ есть число, получающееся при сложении чисел e и k, то в примере требуется разность двух чисел (x и y) умножить на третье число, обозначенное суммой $(e + k)$. Но они знают, что вообще $(a - b) \cdot c = ac - bc$, поэтому им нетрудно будет усвоить, что

$$(x - y) \cdot (e + k) = x \cdot (e + k) - y(e + k) = (xe + xk) - (ye + yk) =$$
$$= xe + xk - ye - yk.$$

Учащимся полезно самим разобрать все представляющиеся случаи умножения двучленов:

$$(a + b) \cdot (c + d);\ (a + b) \cdot (c - d);\ (a - b) \cdot (c + d);\ (a - b) \cdot (c - d).$$

Давать примеры на умножение трехчленов не целесообразно, так как практического значения (в уравнениях) они на этой ступени не имеют.

Если учащиеся знакомы с выражениями a^2, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, то полезно им дать самим преобразовать выражения:

$$(a + b)^2,\ (a - b)^2 \text{ и } (a + b)(a - b).$$

Но никаких правил об умножении многочленов, на наш взгляд, давать не следует. Правило знаков умножения требует знания отрицательных чисел, а другие правила слишком громоздки.

§ 20. Деление одночленов.

Деление одночленов можно начать, примерно, со следующей задачи: разделить произведение $(87 \cdot 27)$ на 9, т. е. вычислить

$$(87 \cdot 27) : 9.$$

Учащиеся, по всей вероятности, скажут, что надо раньше вычислить произведение, а полученный результат разделить на 9. Надо, чтобы они поняли, что результат получится скорее, если 27 разделить на 9, а 87 помножить на полученное частное. Что так можно поступать, они могут убедиться хотя бы из рассмотрения дроби $\frac{87 \cdot 27}{9}$. После целого ряда упражнений подобного рода с целыми и дробными числами, они поймут, что тождества

$$(ab) : c = a \cdot (b : c)$$

или

$$(ab) : c = (a : c) \cdot b$$

удовлетворяются всегда (за исключением, конечно, того случая, когда $c = 0$; но деления на 0 в школе первой ступени не касаются).

Прочитав последнее тождество (чтобы разделить произведение двух чисел на третье число, можно частное одного сомножителя на это третье число помножить на второй сомножитель), следует затем его обобщить, т. е. заставить убедиться учащихся на ряде примеров, что этому свойству удовлетворяет и произведение нескольких чисел:

$$(abcd) : e = (abc) \cdot (d : e).$$

Теперь учащиеся без труда решат примеры такого рода:

$$6a : 3;\ 8a : a;\ 8ab : 4 \text{ и т. п.}$$

Когда учащимися все это усвоено, можно им задать пример в таком роде:

$$8700 : (87 \cdot 5).$$

Учащиеся должны уразуметь, что в данном случае обычным путем (т. е. делением 8700 на вычисленное произведение 87 и 5) мы результат получим не так скоро, как в том случае, когда 8700 сначала разделим на 87, а полученное частное (100) разделим на 5. Что так можно поступать, видно хотя бы из рассмотрения дроби $\frac{8700}{87 \cdot 5}$. После нескольких разнообразных примеров подобного рода учащиеся заметят, что вычисления производятся по тождеству:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c.$$

Это тождество опять должно быть учащимися прочитано (чтобы разделить на произведение, надо раньше разделить на первый сомножитель, а полученный результат — на второй).

Читать это тождество, как и первое тождество, справа налево не следует, так как на этой ступени это не имеет практического значения.

Далее ученикам можно уже предложить упражнения такого рода:

$$12a : 3a;\ 15ab : 5b;\ \text{и т. п.}$$

С такими примерами они легко справятся, если ими тождества этого параграфа были усвоены.

§ 21. Деление многочлена на одночлен.

Прежде всего учащиеся должны себе уяснить, что, при делении суммы или разности двух чисел на третье число, нет необходимости вычислять самое сумму или разность и затем полученный результат делить на третье число. Можно, разделив каждое слагаемое или уменьшаемое и вычитаемое в отдельности на это число, сложить или вычесть полученные частные. Например: $(95+80):5$ можно вычислить, найдя раньше частное $95:5=$ $=19$ и $80:5=16$ и сложив 19 и 16. Также вычисляется $(115-75):5$ — находятся раньше частные $115:5=23$ и $75:5=15$ и из первого частного 23 вычитают второе частное 15. Когда на ряде примеров они убедились в сказанном, они поймут, что, по существу, мы здесь имеем дело с тождествами:

$$(a+b):c=a:c+b:c \text{ и } (a-b):c=a:c-b:c,$$

и что это верно не только для целых чисел, но и дробных. Чтение этих тождеств учащимся дается легко. Когда ими это усвоено, можно перейти к упражнениям такого рода:

$$(6a+3b):3;\ \left(5a-\frac{1}{2}b\right):\frac{1}{3};\ (6ab+2ac):2a \text{ и т. п.}$$

Можно, конечно, обобщить это и на многочлен, содержащий большее число членов — это зависит от учителя.

§ 22. Уравнения.

Следует только заметить, что прохождение всех изложенных здесь тождественных преобразований должно сопровождаться решением задач с условиями, которые требовали бы составления уравнений, но таких уравнений, для решения которых необходимы упомянутые преобразования. Только в этом случае введение этого отдела в курс школы первой ступени будет иметь смысл и будет оправдано в глазах учащихся. И вообще тождественные преобразования в так называемой элементарной математике нужны постольку, поскольку они имеют практическое применение.

§ 23. Характеристика алгебраического материала.

Изложенным выше исчерпывается, строго говоря, весь тот алгебраический материал, который может оказаться полезным при решении учениками задач алгебраического характера. С этим материалом в руках ученики смело могут приступить к решению любой задачи, приводящей к одному уравнению первой степени с одним неизвестным, если только они приобретут себе предварительно также навык в составлении уравнений. Нетрудно им будет справиться и с задачами в так называемых арифметических задачниках, приводящими к системе уравнений первой степени с двумя или даже с тремя неизвестными.

§ 24. О скобках.

Надобности в численных и буквенных выражениях с многочисленными скобками, как это неоднократно отмечалось в этой книге, конечно, нет ни в курсе арифметики, ни в курсе алгебры. Прежде всего учителю надо твердо усвоить себе научные точки зрения на скобки. Они сводятся к следующему:

Четыре арифметические действия распадаются на две ступени: а) сложение и вычитание — действия первой ступени и б) умножение и деление — действия второй ступени. Что касается двух чисел, данных для производства над ними действия, то первое слагаемое, уменьшаемое, множимое, делимое — *пассивные* числа, а второе слагаемое, вычитаемое, множитель и делитель — числа *активные*. Тогда правила употребления скобок состоят в следующем:

1) Если над результатом действия первой ступени требуется совершить действие второй ступени, то запись действия первой ступени *необходимо* заключить в скобки. Так, в записях:

$$(a \pm b) \cdot c; \; c \cdot (a \pm b); \; (a \pm b) : c \text{ и } c : (a \pm b)$$

скобки необходимы, если над алгебраической суммой надо совершить действие умножения или деления.

2) Если над результатом действия второй ступени надо совершить действие первой ступени, то запись действия второй ступени в скобки заключить *можно*, но это делать нет надобности. Так, вместо записей:

$$(a \cdot b) \pm c; \; c \pm (a \cdot b); \; (a : b) \pm c \text{ и } c \pm (a : b),$$

следует писать просто:

$$a \cdot b \pm c; \; c \pm a \cdot b; \; a : b \pm c \text{ и } c \pm a : b.$$

3) Если над результатом действия первой ступени надо совершить действия той же ступени (и если упомянутый результат есть число активное), то запись результата *необходимо* заключить в скобки. Так, в записях:

$$a + (b + c); \; a - (b + c); \; a + (b - c) \text{ и } a - (b - c)$$

скобки необходимы, если требуется алгебраическую сумму прибавить или вычесть.

4) Если над результатом действия первой ступени надо совершить действие той же ступени, и если упомянутый результат есть число пассивное, то его запись в скобки заключить *можно*, но делать это нет надобности. Так, вместо записей:

$$(a + b) + c; \; (a - b) + c; \; (a + b) - c \text{ и } (a - b) - c,$$

соответственно можно писать просто

$$a + b + c; \; a - b + c; \; a + b - c; \text{ и } a - b - c.$$

5) Если над произведением надо совершить умножение, если произведение обозначено с помощью знака умножения и является активным числом, то его запись *необходимо* поставить в скобки. Так, если надо число a помножить на произведение $b \cdot c$, то надо написать $a \cdot (b \cdot c)$. Если же произведение является пассивным числом, то его можно в скобки не заключать. Так, вместо записи: $(a \cdot b) \cdot c$ можно писать просто $a \cdot b \cdot c$.

6) Если над результатом действия второй ступени надо совершить действие той же ступени, то вообще, во избежание недоразумений, запись этого результата надо заключить в скобки. Исключение составляет случай пункта 5. Так, лучше не опускать скобок ни в одном из следующих случаев:

$$(a : b) : c; \; a \cdot (b : c); \; (a : b) \cdot c; \; a : (b \cdot c) \text{ и т. п.;}$$

7) Если частное является активным числом при делении и пассивным при любом действии второй ступени, то частное *необходимо* заключить в скобки. Так, выражения

$$a:(b:c),\ (a:b)\cdot c \text{ и } (a:b):c$$

без скобок подают повод к неверному истолкованию порядка действий.

8) Если при умножении знак умножения не поставлен, а при делении результат действия обозначен в виде дроби, то записи таких результатов действий второй ступени можно не заключать в скобки. Так, вместо записей:

$$(ab)\cdot c,\ (ab):c,\ c\cdot(ab),\ c:(ab)$$

можно соответственно писать просто:

$$ab\cdot c,\ ab:c,\ c\cdot ab,\ c:ab \text{ и т. п.;}$$

равным образом не надо ставить в скобки члены дробей:

$$\frac{ab}{c},\ \frac{c}{ab},\ \frac{c}{a:b},\ \frac{a:b}{c} \text{ и т. п.}$$

9) Вообще горизонтальная черта в записи дроби заменяет скобки, которые приходится писать в некоторых случаях, требующих деления. Так, вместо

$$a:(b+c) \text{ или } (a-b):c,$$

можно писать соответственно

$$\frac{a}{b+c} \text{ и } \frac{a-b}{c} \text{ и т. п.}$$

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ.

§ 1. Повторение.

Повторению вообще надо придавать значение лишь постольку, поскольку оно практикуется и продолжается в течение всего курса. Старинное дидактическое правило, по которому „повторение — матерь учения“, вполне справедливо лишь в том случае, если повторение сводится к своевременным *упражнениям* не только в том, что составляет в данный момент обучения учебный материал этого момента, но также в том, что более или менее отдалено от интересов этого момента. Говоря о необходимости повторения, мы разумеем повторение не систематическое и продолжительное, не в специально назначенные для того часы, а повторение ежедневное и, если можно так выразиться, постоянное. Выбор этих упражнений должен всецело зависеть от того, какие способы вычислений наиболее поддаются забвению и какие требуют большего или меньшего упражнения, какие представления должны приобрести ещё бо̀льшую ясность, какие соображения особенно важны в курсе и т. д.

Умеют ли ученики словесно охарактеризовать каждый из способов вычислений, ими повторяемых на практике, конечно, тоже очень интересно. В этом направлении некоторое значение имеют указания учебника, которые должны быть своевременно сделаны достоянием не только разумения учеников, но и памяти их. Не должно, однако же, слишком преувеличивать значение памяти *слов*, которыми выражается правило. Одна эта память не предотвращает забвения самой сущности дела, забвения основания тех или иных умений, забвения навыков, которых в арифметике гораздо более, чем понятий, могущих возникнуть в памяти с помощью слов. К тому же, память слов, по большей части, перестает работать, как только перестала работать память мыслей и хода рассуждений. Вследствие этого, постоянные, хотя бы и не особенно продолжительные, практические упражнения прямо необходимы как раз в большинстве случаев арифметического вычисления, относящихся до самых способов производства четырех действий над целыми числами, над обыкновенными дробями и над дробями десятичными. Какие упражнения в данный момент, для данного класса или данной группы его учеников наиболее уместны — судить может, конечно, только учитель, и каких-либо общих правил, сюда относящихся, дать, конечно, невозможно. Но повторение должно быть разнообразно.

§ 2. Роль учебника.

Вопрос о повторении соприкасается с вопросом о роли учебника во всех тех статьях, которые не относятся ни до четырех действий над целыми числами, ни до содержания так называемых „введений“, которые составляют преддверие всех учебников арифметики.

Роль учебника и задача его заключается именно в приведении в систему усвоенных детьми под руководством учителя, но без помощи учебника, умений, познаний, понятий и логических навыков. Должно заметить, что вообще учебник может быть читаем и в классе, в присутствии и под непосредственным руководством учителя, при разъяснениях со стороны читающего, со стороны слушателей и в случае надобности — самого учащего.

Но читать в классе каким бы то ни было образом чаще всего можно только те статьи учебника, которых содержание детьми усвоено вполне основательно и с полным разумением. Цель же этого чтения двоякая: а) она заключается в придании ранее приобретенным знаниям и умениям учащегося вполне законченной, логически строгой, прочной и изящной словесной формы; б) чтение это учит учащегося *впоследствии* учиться по учебнику. Поэтому учебник не только должен быть читаем, но также изучаем и содержание его не только должно быть изучено, но также совершенно усвоено учащимися.

Если дело усвоения учениками текста учебника поставлено надлежащим образом, то легко и естественно достигнуть того, чтобы многие параграфы учебника были усвоены (не вызубрены, а именно усвоены) учащимися почти слово в слово. В таком усвоении текста учебника не только нет ничего предосудительного, но даже ничего, напоминающего практиковавшееся встарину „долбление“ и „зубрение“, если только курс построен надлежащим образом.

Особенно полезно чтение и усвоение тех параграфов учебника, в которых даются правило и определения, до которых ученики уже добрались. Само собою разумеется, что содержание этих параграфов должно прорабатывать в обиходе классной работы, и отмечать в учебнике надо не то, что требуется „выучить“ к следующему уроку, а то, что уже проработано учениками в классе. Задавание на дом, в виде уроков, каких-либо статей по учебнику в низших классах не приводит к хорошим результатам. Более того: сколько-нибудь трудные в логическом отношении статьи должны быть прорабатываемы по учебнику только в классе, при непосредственном участии и под неустанным наблюдением учителя. Дозволительно это особенно в том случае, когда содержание данной статьи учащимся хорошо известно из классных занятий. Задавание совершенно новых статей по учебнику уместно только в высших классах и то не в очень широких размерах.

Если ученик пропустил урок, то из этого вовсе не следует, что его должно лишить того, чем пользовались его товарищи, а именно — методически правильной разработки урока, и что его можно предоставить самому себе. Это — забота учителя, и руководствоваться этим исключительным случаем изложение учебника не может. Ученик, пропустивший один и даже несколько уроков, должен пропущенное наверстать во время *уроков*, при соответствующих упражнениях его товарищей и под руководством учителя. К помощи же учебника ученик может обратиться в этом случае только тогда, если для него вполне посильна такая работа либо благодаря его познаниям, либо благодаря легкости материала, либо благодаря тому, что ему учителем дана возможность наверстать пропущенное. Во многих случаях (как в том убеждает и практика) даже неопытные в искусстве обучения товарищи могут скорее помочь малолетнему ученику, чем учебник, хотя бы очень близкий по изложению к самоучителю.

Метода целесообразных задач особенно благоприятствует тому, чтобы учебник был действительным и могущественным средством обучения и математического образования. Но ученику, пропустившему много уроков, учебник, конечно, помочь в состоянии лишь в исключительных случаях. Вообще же школьная организация должна быть такова, чтобы случайно отставшему ученику могла быть предоставлена возможность восполнить пробелы в своих познаниях и навыках в отдельные для того назначенные часы, притом под руководством его же учителя или другого лица, принадлежащего к педагогическому персоналу и держащегося той же методы обучения, которой держится учитель. Таких часов учащемуся понадобится немного, потому что он будет учиться один, не вместе с классом.

§ 3. Восстановление содержания предыдущего урока.

Весьма полезным средством для восполнения пробелов предыдущего урока, да и вообще прекрасным средством обучения может служить восстановление на словах, общими силами класса, хода и содержания предыдущего урока. Это как бы свидетельский опрос класса относительно того, что̀ *делалось* в прошлый раз (не что̀ задано к этому разу, а что̀ делалось!). При этом опросе все неясное для учеников обрисуется для них и для учителя яснее, чем в прошлый раз, и учитель не станет повторяться и повторять того, что и без повторения ясно и повторение чего для учеников не интересно и даже не поучительно. „Это мы знаем“, думают ученики, а наиболее деятельные даже говорят учителю, и почти все перестают работать.

§ 4. Запись условий задач.

В свое время полезно приучать при решении сложных задач к надлежащей записи условий задач на классной доске. Учитель выразительно и внятно читает задачу. Когда задача прочтена учителем, ее повторяет один из учеников, — при том опять-таки с должным выражением и разумением. Запись условий должна вестись выразительно кратко и раздельно: должно записывать только существенное, точно оттеняя, что́ именно записывается и что́ мы надеемся сохранить в памяти.

§ 5. Письменные работы учащихся.

Письменные работы учащихся в средней школе по арифметике бывают классные и домашние. Ни тем, ни другим не надо придавать значения работ, носящих в какой-либо степени экзаменационный характер. Они могут преследовать одну из двух целей: а) проверку того, что классом усвоено, и б) упражнение в усвоенном. Как в том, так и в другом случае необходимо научить учащихся тому, *как* им производить эти работы, *как* располагать вычисления, *каким образом* указывать логическую последовательность в различных частях работы и логическую связь их между собою. Каждая классная или домашняя работа учащихся должна быть сделана поучительною для всех. Возможные ошибки должны быть предупреждены указаниями учителя. Это легко сделать, так как большинство ошибок, делаемых учащимися, из года в год повторяются, как только учащиеся достигли данной ступени обучения.

Почти бесполезна для учащихся проверка ученических работ учителем у себя на дому. Чрезвычайно трудно достигнуть того, чтобы малолетний обратил должное внимание на внесенные учителем в его работу поправки и замечания. Эти поправки, большей частью, только вскользь задевают внимание учащегося и остаются в его тетради без влияния на его познания и навыки. Когда изучен в классе какой-либо вопрос, допускающий возможность письменной работы, и когда учащимся показано, как эту письменную работу делать, учителю следует, — не для проверки работ учеников, а для уяснения себе самому уровня познаний и навыков класса, — отобрать тетради учеников и дома их рассмотреть и исправить. Он таким образом скорее и полнее узнает число мало успевающих в *письменных* работах учеников, пробелы в познаниях некоторых учеников, умение их обращаться с письменными принадлежностями и, главное, — свои собственные промахи и недосмотры. Но, чтобы такая самопроверка учителя принесла пользу и классу, надо, вернув тетради учащимся, не называя учеников, допустивших ошибки и вообще нуждающихся в самоусовершенствовании, и даже не говоря о том, в чем сделаны ошибки, ближайший урок свой в классе посвятить *положительной* (а не отрицательной) работе над неусвоенным материалом или над тем, в чем замечены недочеты. Учащиеся должны в своих тетрадях, им возвращенных, разыскать относящееся до замечаний учителя место и отыскать сделанные в этом месте ошибки. Весьма полезны классные анонимные письменные работы: они дают более ясное представление об успехах класса, чем работы, подписанные учениками.

Возьмем два примера. Некоторые из учеников при умножении на

207 ненадлежащим образом подписали частные произведения. В этом случае надобно сделать так, чтобы все ученики поработали тут же, в классе, над выяснением этого умножения, а допустившие ошибку зачеркнули бы сами относящееся сюда место работы и зависящие от него остальные ошибки (ежели таковые есть), и занесли бы с доски в свои тетради надлежащую запись. Другой пример: у некоторых учеников беспорядочно содержатся тетради, у других много „клякс“, посторонних вычислений, у некоторых, может быть, найдутся рисунки или просто запачканы тетради. По этому поводу не надо с учениками говорить о том, чего *не следует* делать (этого не перечислить!), а надо выяснить, для чего существуют тетради на свете, что надо писать в тетрадях по арифметике, как их надо содержать и т. д. Для внесения бо̀льшего порядка в ведении записей в тетрадях полезно, чтобы ученики каждый пример отделяли от следующего прямой горизонтальной чертой во всю ширину осьмушки, а начинали бы работу следующего дня, подчеркнув последнюю работу прежнего дня двумя горизонтальными прямыми во всю ширину осьмушки. Для той же цели полезно работу начинать с записи (под чертами, отделяющими упражнения одного урока от упражнений другого) относительно того, какого числа, какого месяца и года эта работа выполнялась. Во избежание излишних вопросов со стороны учеников, следует добиться того, чтобы ученики на классной доске записали вкратце, до начала урока, число, месяц и год по возможности выше, и чтобы эта запись не стиралась в течение всего учебного дня. Такие мелочи не только вносят больше порядка в ежедневную школьную жизнь, но оказывают много услуг во многих других отношениях.

§ 6. Предварительная проверка познаний учеников.

Принимая неизвестную ему или известную группу, учитель прежде всего должен проверить наличность познаний и навыков, имеющихся в распоряжении учеников его класса. Делать это надо методически, переходя со ступени на ступень, начиная со ступеней низших и отнюдь не перескакивая из одной области учебного предмета в другую. Только при такой проверке учитель будет поставлен в возможность вполне уяснить себе уровень арифметических навыков и познаний того или другого класса. Сверх того, он будет поставлен в возможность восполнить те или иные пробелы в этих познаниях и навыках и не рискует натолкнуться впоследствии на неожиданности разного рода. Этот способ проверки и восполнения познаний и навыков учащихся потребует меньших затрат сил и времени, чем восполнение случайно открываемых пробелов, отрывающих учителя от намеченных им целей и доставляющих иногда и учителю и ученикам ненужные огорчения, отрывая их от дела. Благодаря такой методической проверке познаний, все ученики класса в очень скором времени *планомерно* подводятся под один общий уровень, что так важно для дальнейшего успешного движения их вперед. При этом не только достигается подведение познаний учеников к одному уровню, но также восполняются все пробелы в их познаниях.

§ 7. Поведение учителя на уроке арифметики.

Хотя вопрос о поведении учителя относится к числу вопросов не методического, а общепедагогического содержания, но на уроках арифметики чаще встречаются те неприглядные особенности поведения учителя, которые особенно вредно отзываются на деле. Вследствие того, что всякий верный арифметический вопрос допускает только один верный ответ, у учителя на уроке арифметики может проскользнуть особенно резкое осуждение неверного ответа, вроде „врешь!“ „вздор!“ и т. п. Хотя это относится до нравственной стороны урока, до педагогической этики, но вред от подобного отношения к ученикам, учащимся арифметике, так велик, что предостережение может быть уместно и в этой книге. Дело в том, что, помимо неуместности оскорбительного для учеников поведения учителя, резкое отношение последнего к неверным ответам сильнее понижает интерес учеников к занятиям арифметикою, чем интерес к занятиям другими предметами. Ни в одном предмете ученик не рискует, вследствие прямо ничтожных неудач, так скоро впасть в уныние, как при неудачных занятиях арифметикою.

К другой, менее важной, области поведения учителя относится вопрос о том, как он и ученики его пишут на классной доске: молча ли или же говоря, что они делают? Необходимо самого себя приучать и учеников неустанно приучать к немолчаливому письму на доске. Особенно важно, чтобы сам учитель говорил все, что он пишет на доске, и предварял учеников о том, что он намерен что-то написать и что они должны смотреть на доску, слушать, что он говорит, и, если нужно, то и писать то же самое у себя в тетрадях. В этом надо быть настолько требовательным к себе, что если, например, надо записать на доске число 17 038, то учитель должен сказать, примерно, следующее: „я напишу на доске 17 038; семнадцать тысяч, нуль, тридцать восемь“, и т. п. Учитель должен при этом стоять с правой стороны доски и не заслонять того места, на котором он пишет, писать протянутой рукой, так, чтобы каждая цифра, которую он пишет, была видна с самого начала. Если того, что он или один из учеников пишет на доске, не надо заносить в тетради, то учитель об этом должен предупредить. Но общим правилом должно быть требование, чтобы все, изображаемое на доске, старательно заносилось учащимися в тетради.

При необходимом доверии к классу и его поведению учитель может, если это физически легко выполнимо, садиться на место вызванного к доске ученика или взять его тетрадь для того, чтобы в ней записать то, что ученик пишет на доске. Это даст ученику возможность занять свое место, продолжать работу далее, и, впоследствии, возобновить в памяти то, что у него, в противном случае, не было бы записано в тетради. Особенно это важно при решении более или менее сложных задач и при выполнении каких-либо продолжительных вычислений.

К поведению учителя на уроке арифметики относится также обычай некоторых учителей слишком долго держать вызванного к доске ученика у доски. Гораздо целесообразнее во всех отношениях привлекать к одному и тому же делу возможно больше учеников: один запишет, какое действие надо сделать, другой запишет знак равенства и выполнит какую-нибудь одну цельную часть действия, третий закончит его, четвертый запишет, что мы узнали, пятый запишет следующее и т. д. Это дает возможность: а) поддержать внимание класса, б) не утомлять отдельных учеников, в) вызванному ученику быстро восполнить пробелы в тетради, г) естественным, а не искусственным образом привлекать класс к работе и т. д.

Чтобы класс работал вместе со стоящим у доски учеником, учитель должен постоянно требовать от учеников полного согласия в работе с этим учеником, не отставая от него и отнюдь не забегая вперед. Только работающие над самостоятельными упражнениями ученики могут и даже должны работать хотя и над одним и тем же материалом, но врозь, каждый отдельно от других. Работающие под непосредственным руководством учителя должны, если можно так выразиться, все время дышать общим интересом к делу и, так сказать, не выбывать из строя и не опережать его. В противном случае поведение учеников и учителя не будет отвечать требованиям классного обучения, и не все ученики во время урока будут в состоянии итти в занятиях арифметикой нога в ногу и рука об руку со своими товарищами.

§ 8. Урок арифметики с различных точек зрения.

Всякий урок арифметики преследует некоторую определенную цель, отличается от другого урока или сходен с ним по своему *содержанию*, согласуется с требованиями той или иной *методы* обучения, пользуется теми или иными *приемами, средствами и пособиями* обучения, отличается той или иной *формою*. Цель урока может быт достигнута или не достигнута. Если она достигнута не вполне, то это не всегда вредно. Иногда достаточно, чтобы только *интерес* к содержанию урока был возбужден, и чтобы был заложен фундамент для тех занятий, которые впоследствии приведут класс к цели.

По содержанию своему урок арифметики часто бывает не вполне удовлетворителен потому, что учитель сам делал или дозволял ученикам делать грубые ошибки, которых ни он, ни ученики не заметили. Начинающие учителя и учительницы, вследствие волнения и неопытности, говорят вместо одних слов другие: вместо „купил" говорят „продал", вместо „осталось" — „было" и т. п. Даже в числовых данных у начинающих учителей иногда встречаются ошибки, и нередко бывает, что учитель сам ошибается в вычислениях и т. п. Ошибки этого рода встречаются чаще всего у учителей, которые сами слишком много говорят, не заставляют учеников говорить и не обращаются к классу с вопросом: „так или не так?" Часто случается, что учитель соглашается с учеником, ответившим неверно, или не соглашается с ним, когда он отвечал верно. Особенно часто эта ошибка по содержанию встречается у учителей, которые пестрят свою речь словами „да" и „нет", вовсе неуместными на уроках. Для избежания подобных ошибок по содержанию учитель должен побольше привлекать учеников к работе и к поправкам.

Приемы и другие средства обучения зависят не только от учителя, но и от принятой им методы обучения. Держась известной методы, учитель может приемы своего обучения разнообразить в весьма значительной мере. Ошибочны будут только те приемы, которые ведут к цели слишком окольным, кружным путем, а также приемы, которые противоречат общедидактическим требованиям всякого обучения. К числу таковых принадлежат согласие учителя с ответившим верно на вопрос учеником или несогласие его, выражаемое словами „да", „нет", „разве?" и т. п. Сюда же принадлежит повторение учителем неверного ответа. Еще менее поучительно требовать такого повторения учеником, вопрос: „а ты как сказал?"

и т. п. Слова „да“ и „нет“, сказанные учителем, расхолаживают класс и погружают его в бездеятельное состояние. Вопрос „разве“ подсказывает ученику то, чего хочет учитель, а повторение неверных ответов иногда, вследствие недостаточного внимания некоторых учеников, внедряет в их умы неверные представления. Это повторение представляет собою также ошибку против требований формы обучения.

Законченность урока. Часто при суждении постороннего лица об уроке, данном другим, и даже при суждении учителя о собственном уроке, приходится слышать неодобрение или испытывать самому неприятное чувство неудовлетворенности по причине так называемой незаконченности урока, его неполной отделанности. Неодобрение такого рода и неудовлетворенность самого учителя, однако же, часто не вполне основательны в том смысле, что не всегда незаконченность урока является его недостатком. Если урок не вполне достиг своей цели, и если при этом самый материал урока или недостаток времени тому виною, то сетовать по поводу этой незаконченности не следует. В следующий урок все придет к вожделенному концу, и может оказаться, что работа предшествовавшего урока не только не потеряна, но даже, наоборот, была крайне важна для полного успеха. Что не закончено вчера, может сегодня особенно хорошо устроиться, а вчера прямо не могло устроиться как следует и не могло не по вине учителя, а по причинам, от учителя не зависящим. Обучение — искусство, урок — произведение его, а ни одно произведение искусства не может обойтись без поправок и без длительной над ним работы.

§ 9. Родная речь на уроках арифметики.

Каждый урок по какому угодно из учебных предметов должен быть в то же время уроком родного языка. Поэтому и на уроках арифметики учитель должен не только сам соблюдать требования чистоты своей речи, но и детей побуждать к тому же. Не избегая (в случае надобности) областных слов и выражений для установки значения какого-либо неизвестного детям слова, учитель также должен постепенно и своевременно приучать детей к речи книжной и литературной, в лучшем смысле этого слова. Особенно трудно дается детям употребление разных причастных форм, отглагольных имен существительных, книжных оборотов речи с союзами, придаточными предложениями и т. п., слова иностранные (сумма, квадрат, линия, результат, вертикальный и т. п.), термины, образованные из слов устарелых, ныне в общежитии неупотребительных (знаменатель, наименование, кратное число, слагаемое и т. п.).

Арифметические термины. Особенные трудности представляет собою полное усвоение учениками арифметических терминов. Они иногда по причине устарелости и книжности своего возникновения, по причине незнакомства учащихся с латинским или греческим языком и т. п., ничего не говорят ни уму, ни языковому чутью учеников.

Слово „слагаемое“, например, происходит от глагола „слагать“, употребительного преимущественно в форме совершенного вида (сложить). Кроме того, причастия в страдательных формах своих вообще необычны в детской и простонародной речи. Здесь приходится не скрывать этих трудностей от учеников, а, наоборот, поставить детей в возможность смело и сознательно употреблять эти формы. Поэтому необходимы и соответствующие предварительные упражнения: умеем ли мы складывать, *слагать*? То, что мы любим, — любимое, что бросаем, — бросаемое, что читаем, — читаемое, а что складываем, „слагаем“, — слагаемое и т. п. — Аналогичное справедливо относительно слова „множимое“. Еще менее говорят уму и воображению учеников термины *делитель* и *множитель*, так как ученики смутно чувствуют, что мы при этом как бы одушевляем числа, но не понимают, по какому праву мы это делаем. Они понимают, что учитель учит, сочинитель сочиняет, но что множитель множит, а делитель делит — для них не осязательно, не ясно и даже странно. И в этом случае надо оказать должное воздействие прямо, если можно так выразиться, на языковое чутье учеников.

Ученики должны не только понимать, что множитель как бы множит и, таким образом, как бы действует, но впоследствии даже уразуметь, что иногда встречается такой множитель, который не изменяет множимого (единица), что может встретиться и такой, который его уничтожает (нуль) и т. п. Всему этому, конечно, не место ни на первых ступенях обучения, ни даже на одной какой-либо определенной высшей ступени курса. Этому место на разных ступенях курса. То же справедливо относительно способов и времени усвоения учениками термина „делитель“. Если при этом все методические предосторожности будут соблюдены, то смешение двух соседних терминов (множимое и множитель или делимое и делитель), часто наблюдаемое в школьной практике, будет прямо невозможным. Что касается термина „частное“, то его усвоение не доставляет ученикам никаких огорчений, ежели связь этого слова со словом *часть* учениками подмечена и если она приурочена к самому смыслу действия деления. Наиболее трудным и, может быть, поэтому и наименее употребительным на уроках арифметики является весьма важный термин „отношение одного числа к другому“. Здесь справедлива опять-таки та же вышенамеченная необходимость полного внимания учителя к языковому чутью учеников. Ученики на известной ступени обучения могут понять и понимают выражения: „я отношусь к тебе хорошо“, „мое отношение к тебе“, „мои отношения к родным“ и т. д., если на эти выражения и их смысл учитель обращает должное внимание. Отсюда перейти (не непременно на том же уроке) к смыслу и значению термина „отношение 6 к 3“ вовсе не так трудно, как это может показаться учителю, никогда не пробовавшему учить детей языку, — не грамматике, а языку живому и творчески-созидательному.

От учеников не надо скрывать всего того, что является в данном термине живым и творчески-образным началом. Наоборот их надо навести на уразумение этого начала, опираясь не на внешние, отвлеченные определения понятий, а на самый смысл занимающих нас слов и словесных форм.

Не надо родного языка бояться, не надо думать, что бессмысленно заучить что-либо наизусть и бессмысленно „вызубрить“ определение термина наизусть для кого бы то ни было легче и интереснее, чем понять, почувствовать первоначальный смысл и значение хотя бы даже книжного устарелого слова. Надо помнить, что смысл этот коренится не в отвлеченных определениях, даваемых в учебниках, а в первоисточнике слов данного языка, в познающем и творящем язык духе народа и в постоянно зиждительном и вполне естественном, всегда деятельном творчестве не только взрослого человека, но и ребенка на поприще родного языка.

§ 10. Место изустных вычислений в курсе.

Изустным вычислениям (преимущественно над двузначными числами и над денежными данными) *должно отводить на каждом уроке арифметики около пяти минут*, не считая того времени, когда учащиеся, в интересах данного момента, вычисляют изустно при решении какой-либо задачи. Особенно важны эти упражнения, если в течение урока господствовали письменные способы производства действий. А так как изустным вычислениям без многочисленных и ежедневных упражнений научить нельзя (это дело требует навыка и упражнения), то поэтому учитель обязан посвящать несколько минут каждого урока арифметики этим вычислениям. Только при соблюдении этих условий школа может дать своим воспитанникам, выпускаемым ею в жизнь, те арифметические навыки и познания, которые им наиболее пригодны в жизни, и сделать для учащихся детей арифметику предметом занимательным и могущим оказать полезное воспитательное влияние даже на общее развитие учеников. „Многолетний опыт убеждает в том, что только те ученики умеют хорошо вычислять письменно, которых учили также вычислению изустному“, говорит Келер, педагог, работавший еще в XVIII веке. К сожалению, эта истина, которая должна была бы быть общеизвестной и незыблемой основой обучения арифметике, доселе забывается очень многими на практике. Само собою разумеется, что изустное вычисление не должно относиться до многозначных чисел со многими значащими цифрами, а должно вращаться в области вопросов, относящихся до чисел первой сотни, до круглых многозначных чисел, до наичаще встречающихся дробей и единиц меры, до ежедневных денежных расчетов. Особенно важно наблюдать за тем, чтобы учащиеся, решая задачи, не прибегали к письменным вычислениям тогда, когда вычисление естественнее произвести изустно.

§ 11. Ритм при производстве вычислений и выразительное чтение.

Известно, что всякая работа в большей или меньшей степени сопровождается соблюдением требований некоторого ритма, а работа, сопровождаемая словами, — также некоторыми явлениями музыкального характера. К сожалению, при обучении арифметике учащиеся да и учащие недостаточно сознательно относятся к этой стороне вычислений, производимых вслух. Ритм при обучении счету, при усвоении таблиц наизусть (путем упражнений в этом усвоении) и при вычислениях вслух является не только полезным, но и необходимым условием этих упражнений. Подобно тому, как все жизненные процессы в организме совершаются ритмически (кровообращение, дыхание, кишечная перистальтика), так ритм свойственен и всякой сознательной работе, стремящейся превратиться в автоматическую.

Поэтому учащиеся должны приучаться и к ритмическому производству вспомогательных устных вычислений при производстве письменных.

например, при сложении, вычитании, умножении и делении многозначных чисел. Кроме ритма, при многих вычислениях, производимых вслух, замечаются изменения в силе звука произносимых слов и в высоте воспроизводимых тонов. Можно чисто экспериментальным путем установить, что при устном вычислении сумм следующего вида:

$$37+27, \quad 56+26, \quad 33+43 \text{ и т. п.},$$

слова „тридцать" и „двадцать" (в первой сумме), „пятьдесят" и „двадцать" во второй, „тридцать" и „сорок" в третьей — произносятся громче и выше, чем слова, обозначающие число отдельных единиц в этих слагаемых. Аналогичное справедливо относительно способов произнесения числа десятков и числа единиц в случаях следующего вида:

$$37+38, \quad 52+53, \quad 33+34 \text{ и т. п.},$$

где у слагаемых одной суммы число десятков одинаково, а различно число единиц. Совершенно иначе произносятся слагаемые в случаях

$$37+25, \quad 43+24 \text{ и т. д.},$$

где и цифры десятков неодинаковы, и цифры единиц тоже различны. Ритм и музыкальная сторона арифметических вычислений еще мало исследованы, но не подлежит сомнению, что они крайне важны. Ритм играет, как известно, большую роль также при упражнениях в усвоении так называемых таблиц сложения и умножения, особенно умножения.

Не малое значение, с точки зрения надлежащего обучения начальной математике, имеет также выразительное чтение условий предлагаемой задачи или текста данного предложения. Хотя бы и внятно, но без выражения прочитанная задача требует для своего разрешения большей, при том часто бесполезной и невознаградимой затраты сил учащихся, чем задача, прочитанная с толком и, если так можно выразиться, „с чувством", „с расстановкой". То же самое относится к тексту и доказательству теоремы, к тексту правила.

§ 12. Так называемая лабораторная метода.

Не задаваясь целью сколько-нибудь обстоятельно осветить лабораторную методу, однако же перечислю некоторые важнейшие материалы, инструменты и измерительные приборы, пригодные при применении этой методы к обучению математике. Если обучение арифметике освободить от решения прямо громадного множества задач, слишком сложных и требующих несоответствующей пользе дела затраты времени, то возможна организация *практических* лабораторных занятий по математике. Возражение, будто бы она потребует слишком много времени, падает само собою, если принять во внимание, что еще так недавно считалась неосуществимой организация практических занятий для учащихся, особенно для учащихся низших классов, по различным отделам естествознания (физике, химии, зоологии, ботанике). Время, затраченное на практические занятия, чаще всего наверстывается на уроках, благодаря более ясному со стороны учащихся пониманию их содержания.

Инвентарь математической лаборатории обходится недорого. Учащиеся сами могут собрать очень много предметов нужного им инвентаря. Он представляется приблизительно в следующем виде:

а) *Сырой материал*: бумага (писчая, цветная, прозрачная, восковая, оловянная, миллиметренная), картон, белая тонкая жесть, фанера, проволока (мягкая медная и железная), вязальные спицы, резиновые тонкие трубки, пластилин, глина для лепки, брюква, картофель, глицериновое прозрачное мыло, деревянные палочки („солома“), бумага вязальная и нитки разноцветные, бечевка, тесемка и т. п.

б) *Вспомогательный материал*: гуммиарабик или фотографический клей, сургуч, тиноль (для паяния металлов без паяльной трубки), облатки, гвозди, кнопки, пробки, цветные мелки, „пистоны“ для скрепления и образования в картоне аккуратных отверстий и т. п.

в) *Инструменты*: циркули, линейки, транспортиры, плоскогубцы, острогубцы, круглогубцы, тиски, молотки, клещи, ножи, пила, ножницы „стеки“ (для лепки), напильники, шило, перфоратор, пила, „металлик“ (для прикрепления „пистонов“), „универсальный инструмент“ (содержащий несколько инструментов в одном предмете) и т. д.

г) *Измерительные приборы и пособия*: весы, масштабы, рулетки, разновесы метрические, калибрированные сосуды, мензурки, пробирки, таблицы мер, модели единиц меры и т. п. классные пособия.

д) *Вычислительные приборы и пособия*: счеты разного рода, арифметический ящик, арифмометры, графики и т. п. пособия, которые, конечно, должны иметься налицо во всяком среднем учебном заведении, а иногда и у учащихся.

Лабораторная метода дает возможность сделать задачи гораздо более жизненными и содержательными в научном отношении, чем это имеет место в большинстве задачников. Из области практических занятий можно взять данные, относящиеся до удельного веса, до температур, термометрических шкал, коэфициентов линейного и объемного расширения, до соотношений различных систем мер и веса, до падения тел и т. п. При этом может представиться полная возможность приблизить поучительные данные из области разных отраслей знания к интересам учащихся и интересы учащихся поднять до этих данных. Это, конечно, гораздо полезнее, чем решение нескончаемых задач о фабрикантах, купцах, торговцах и т. п. действующих лицах арифметических задачников. В старину приходилось иметь дело с этими задачами по-неволе. Современное состояние научного знания, культуры и техники и современные педагогические взгляды дают возможность не насильственно навязать учащимся ненужные им данные, но сделать эти данные и математику интересными для учащихся.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ОТДЕЛ.

§ 1. Значение дополнительного отдела.

Дополнительный отдел курса арифметики, подлежащего прохождению в школе с более или менее высокими, относительно преподавания арифметики, требованиями, конечно, не представляет собою чего-нибудь такого, что для всех школ могло бы быть установлено с полною точностью. В этот отдел можно отнести следующие статьи: а) об общем наибольшем делителе двух или нескольких чисел; б) о периодических дробях. Впрочем, не только практическое, но и образовательное их значение не очень велико. Нахождение общего наибольшего делителя может понадобиться только при сокращении дробей и при приведении к общему знаменателю дробей с громадными числителями и знаменателями, никогда не встречающимися ни в жизни, ни в науке, ни в технике. В равной мере лишены практического значения бесконечные периодические десятичные дроби, которых тоже не встречаем ни в жизни, ни в науке, ни в технике.

§ 2. Характер статей дополнительного отдела.

При сравнительно малом воспитательном и практическом значении большинства из поименованных выше статей дополнительного отдела полезно остановиться на том, какой характер должно носить сообщение сведений из поименованных выше статей: чисто ли научный или чисто-фактический. Не только низшая элементарная школа, но даже среднее учебное заведение не может задаваться какими-либо чисто-теоретическими точками зрения в учении о периодических дробях, об общем наибольшем делителе и т. п. Теоретические точки зрения не только чужды умственным интересам учеников, но недоступны и мере их математического разумения. Для полного научного обоснования учения об общем наибольшем делителе требуется не только знание многих весьма тонких теорем о делителях, но и понимание их взаимной связи и взаимных соотношений. Основания же истинно-научной теории периодических дробей соприкасаются с учением о пределах, недоступным, при современном состоянии методики, пониманию малолетних. Поэтому учитель обязан, если желает ознакомить учеников с теми или иными статьями дополнительного отдела, соблюсти присущее и столь необходимое педагогу чувство меры и ограничиться усвоением учениками только *приемов* вычисления. Надо стремиться только к восприятию учениками этих приемов с должным разумением и вдумчивостью. Нахождение общего наибольшего делителя двух чисел с помощью Евклидова способа (способа последовательного деления) можно повести параллельно с уразумением нахождения общей наибольшей меры двух конечных прямых линий. Все дело в том, что ученики должны понять *основания* приема: *посмотрим,* не содержится ли меньшее число в большем целое число раз, а ежели оно содержится, то ведь это число и будет общим делителем обоих данных чисел. И т. д. Что последний остаток, умещающийся в предпоследнем целое число раз, в то же время представляет собою общий *наибольший* делитель данных двух чисел, ученики могут только понять, но не доказать. Этого понимания, этой вдумчивости и надо добиться.

Что касается бесконечных периодических десятичных дробей, то все основное приобретено учениками ранее. Обращение же бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные на этой ступени также не допускает доказательств. Исходить надо из обыкновенных дробей, знаменатели которых отличаются от одной единицы высшего разряда на одну простую единицу (9, 99, 999 и т. д.). Бесконечные периодические десятичные дроби, известные под именем смешанных, надо рассматривать как результат уменьшения смешанного числа, которого дробная часть равна чистой периодической десятичной дроби, в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Все доказательства, обыкновенно приводившиеся в старину в учебниках арифметики, надо исключить из курса, как неточные и вовсе не отвечающие современным точкам зрения на „число" с бесконечным числом цифр после запятой. Не надо также увлекаться чрезвычайно громоздкими правилами, а надо ограничиться умением *вычислять* производящую данной бесконечной десятичной периодической дроби, в конце концов представляющей собою некоторый „ряд".

§ 3. Искусственные системы письменной нумерации.

Можно познакомить учащихся с так называемыми искусственными системами письменной нумерации. С какой из них начать дело — зависит отчасти от вкуса учащего; но, вероятно, лучше начинать с такой системы, для которой, сверх имеющихся в распоряжении учащихся арабских цифр, нужны еще другие. Удобнее других систем двенадцатиричная. Единицы, не составляющие дюжины, — единицы первого порядка, дюжины — единицы второго, гроссы (дюжины дюжин) — третьего, дюжины гроссов — четвертого, гроссы гроссов — пятого. Задача, которую можно предложить учащимся, и с которой можно начать, формулируется так:

Кроме наших цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), пусть у нас есть еще две цифры: α (альфа), обозначающая десять, и β (бета), обозначающая одиннадцать, так что вместо обозначений 10 и 11, употребляемых нами, мы будем писать соответственно α и β... Дано число 18931... — Заметьте: двенадцать отдельных единиц называются дюжиной, дюжина дюжин — гроссом; для дюжины гроссов нет особенного названия; назовем ее большим гроссом... — Известными нам способами вычислим, сколько в этом числе дюжин, затем — сколько гроссов... —

$$\begin{array}{l} 18931 : 12 = 1577 \\ \;\;69 \\ \;\;\;\;93 \\ \;\;\;\;\;\;91 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;7 \end{array}$$

В нашем числе 1577 дюжин и 7 отдельных единиц, не входящих в состав какой бы то ни было дюжины нашего числа... Теперь узнаем, сколько дюжин дюжин (т. е. сколько гроссов) содержится в нашем числе... — Дюжин простых у нас 1577... — Сколько дюжин в 1577 единицах, столько же гроссов в нашем числе... —

$$\begin{array}{l} 1577 : 12 = 131 \\ \ 37 \\ \ \ 17 \\ \ \ \ 5 \end{array}$$

Таким образом гроссов в нашем числе 131, а отдельных дюжин, не входящих в состав какого-либо гросса, 5... Повторите сначала задачу и все рассуждения и вычисления!.. — Сколько больших гроссов в нашем числе?.. Столько же, сколько раз 12 содержится в 131 единице...—

$$\begin{array}{l} 131 : 12 = 10 \\ \ 11 \end{array}$$

Десять больших гроссов и, сверх того, осталось еще одиннадцать гроссов. Запишем все полученные результаты словами:

10 б. гр. 11 гр. 5 дюж. 7 ед.

Как мы договорились обозначать 10? (Буквой α)...

— Как одиннадцать? (Буквой β)...

Запишем так:

α б. гр. β гр. 5 дюж. 7 ед.

Или проще так:

$\alpha\beta 57$

и т. д.

Остальное требует прямых и обратных методических продуманных упражнений, из которых для учащихся должна выясниться идея абсолютного и местного значения каждой цифры любой искусственной системы письменной нумерации и, тем самым, — глубокая идея употребляемой всем культурным миром индусской системы. Одной двенадцатиричной письменной нумерацией ограничиться нельзя. Нужно взять искусственные системы, пользующиеся меньшим числом цифр, например, пятью: 0, 1, 2, 3, 4 — пятеричная система, восемью: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и, под конец, двоичную систему, имеющую в своем распоряжении только две цифры: 0 и 1. Можно избрать и другой порядок ознакомления учащихся с идеей искусственных систем счисления. В этом направлении автор этой книги не сделал достаточного числа опытов, которые дали бы ему право судить о преимуществах того или иного порядка.

Но если ограничиться только этими упражнениями и не останавливаться на самом существенном в письменном производстве четырех действий над числами, обозначенными по правилам какой-нибудь искусственной системы нумерации и на некоторых признаках делимости, то результаты этой работы не будут достаточно велики. Для четырех действий превосходна двоичная система, так как таблицы сложения и умножения в этой системе крайне просты, ибо при двоичной системе

$$1 + 1 = 10; \quad 10 + 1 = 11; \quad 10 + 10 = 100 \text{ и т. д.}$$

и

$$1 \times 1 = 1; \quad 0 \times 1 = 0.$$

Для признаков же делимости удобна шестеричная система счисления, по которой

$$1+1=2;\quad 2+1=3;\quad 3+1=4;\quad 4+1=5;\quad 5+1=10$$

и т. д., а из признаков делимости удобны признаки: а) делимости на 10, т. е. на шесть, аналогичный с нашим признаком делимости чисел на 10, б) делимости на 2 и на 3 и особенно в) признак делимости на 5, аналогичный с нашим признаком делимости на 9.

§ 4. Некоторые замечательные числа.

В связи с системой счисления находится весьма тонкий вопрос о некоторых числах, являющихся при десятичной арабской системе прямо замечательными. Таково, например, число 12345679. Из цифр здесь пропущены только 0 и 8, а остальные взяты в натуральном порядке. От умножения этого числа на 9 получается 111 111 111 и от умножения того же числа на произведение 9 на любое однозначное число получается число, обозначенное сплошь одной и той же цифрой, тождественной с упомянутым однозначным множителем. Интересны также суммы:

$$\begin{array}{r} 12\times 9+3 \\ 123\times 9+4 \\ 1234\times 9+5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 12345678\times 9+9 \end{array}$$

Все эти суммы обозначены единицами, притом для обозначения каждой требуется столько единиц, сколько единиц во втором слагаемом.

Не малый интерес представляют и следующие суммы:

$$\begin{array}{lcl} 9\times 9+7=88 & \qquad & 1\times 8+1=9 \\ 98\times 9+6=888 & & 12\times 8+2=98 \\ 987\times 9+5=8888 & & 123\times 8+3=987 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 98765432\times 9+0=888888888 & & 123\ldots 89\times 8+9=987654321. \end{array}$$

Если 1 000 000 разделить на 7, то в частном получится число 142 857, представляющее собою период той бесконечной десятичной дроби, которая получается при обращении одной седьмой доли в десятичную дробь. Замечательно, что произведения:

$$\begin{array}{c} 142\,857\times 2 \\ 142\,857\times 3 \\ 142\,857\times 4 \\ 142\,857\times 5 \\ 142\,857\times 6 \end{array}$$

дают числа, обозначенные теми же цифрами, взятыми в другом порядке. Если умножить 142 857 на 8, то получим 1142856.

Если первую цифру отбросить и к остатку прибавить единицу, то опять получим 142 857. К сожалению, все эти замечательные и интересные случаи, если на них посмотреть не как на факты, зависящие от особенностей принятой нами десятичной нумерации, могут учащимся внушить почти мистический взгляд на те или иные числа. Чтобы избегнуть такого нежелательного отношения учащихся к некоторым особенностям по десятичной индусской системе, достаточно обратиться к одному из предыдущих примеров и, обозначив встречающиеся там числа по одной из искусственных систем нумерации, например, по системе восьмеричной, посмотреть, что из этого выйдет.

Возьмем первый из примеров этого параграфа: $12 \times 9 + 3 = 111$; $123 \times 9 + 4 = 1111$ и т. д. По восьмеричной системе этот пример дает такие результаты, по величине тождественные с нашими:

$$14 \times 11 = 154; \qquad 154 + 3 = 157;$$

$$173 \times 11 = 2123; \qquad 2123 + 4 = 2127;$$

$$2322 \times 11 = 25542; \qquad 25542 + 5 = 25547 \text{ и т. д.}$$

Всякая тень мистического использования чисел здесь исчезает.

МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР.[1]

Приведенные ниже „основные стандарты мер“ являются обязательными, согласно постановлению ВЦИК и СНК РСФСР от 30 ноября 1930 г. и постановлению ЦИК и СНК Союза ССР от 23 ноября 1929 г.

„Наркомпрос предлагает всем учреждениям народного образования: школам, рабфакам, техникумам, вузам, учреждениям политпросветработы, библиотекам, музеям и научно-исследовательским институтам ввести в постоянное употребление стандарты, не допуская впредь никаких уклонений от введенных ими правил и обозначений и принять все меры к широкой пропаганде значения стандартизации и отдельных стандартов“.

СССР Совет труда и обороны Комитет по стандартизации	Общесоюзный стандарт Метрические меры	ОСТ — 516

Наименования	Сокращенные обозначения		Определения	Отношения к основной единице
	Русск.	Иностр.		
Меры массы				
Килограмм	кг	*kg*	Килограмм есть масса платино-иридиевой гири, которая в 1889 г. Первой международной конференцией мер и весов признана международным прототипом килограмма и хранится в Международном бюро мер и весов. *Примечание.* Для СССР, согласно положению о мерах и весах от 6 июня 1924 г., за основной эталон килограмма принята платино-иридиевая копия международного килограмма, носящая знак № 12, переданная России в 1889 году Первой международной конференцией мер и весов и хранящаяся в Главной палате мер и весов.	1

[1] Перепечатывается из „Справочника общесоюзных стандартов математических обозначений и единиц физических измерений“. Изд. Наркомпрос РСФСР, 1931 г.

Наименования	Сокращенные обозначения		Определения	Отношения к основной единице
	Русск.	Иностр.		
Тонна	*т*	*t*	Тысяча килограммов (1 000 *кг*)	10^3
Центнер	*ц*	*q*	Сто килограммов (100 *кг*)	10^2
Декаграмм	*дкг*	*dkg*	Одна сотая килограмма (0,01 *кг*)	10^{-2}
Грамм	*г*	*g*	Одна тысячная килограмма (0,001 *кг*)	10^{-3}
Дециграмм	*дг*	*dg*	Одна десятитысячная килограмма (0,0001 *кг*)	10^{-4}
Сантиграмм	*сг*	*cg*	Одна стотысячная килограмма (0,000 01 *кг*)	10^{-5}
Миллиграмм	*мг*	*mg*	Одна миллионная килограмма (0,000 001 *кг*)	10^{-6}
Меры длины				
Метр	*м*	*m*	Метр есть длина, равная при определенных условиях, установленных VII Международной конференцией мер и весов, расстоянию между осями двух штрихов, нанесенных на платино-иридиевом стержне, который в 1889 году Первой международной конференцией мер и весов признан международным прототипом метра и хранится в Международном бюро мер и весов. *Примечание.* Для СССР, согласно положению о мерах и весах от 6 июня 1924 г., за основной эталон метра принята платино-иридиевая копия международного метра, носящая знак № 28, переданная России в 1889 году Первой международной конференцией мер и весов и хранящаяся в Главной палате мер и весов.	
Километр	*км*	*km*	Тысяча метров (1 000 *м*)	10^3
Дециметр	*дм*	*dm*	Одна десятая метра (0,1 *м*)	10^{-1}
Сантиметр	*см*	*cm*	Одна сотая метра (0,01 *м*)	10^{-2}
Миллиметр	*мм*	*mm*	Одна тысячная метра (0,001 *м*)	$^{-3}$
Микрон		*μ*	Одна миллионная метра (0,000 001 *м*)	0^{-6}
Меры поверхности				
Квадратный метр	*кв. м* или *м*^{2}	*m*^{2}	Квадратный метр есть площадь квадрата, сторона которого имеет длину, равную одному метру.	1
Квадратный километр	*кв. км* или *км*^{2}	*km*^{2}	Один миллион квадратных метров (1 000 000 *кв. м*)	
Гектар	*га*	*ha*	Десять тысяч квадратных метров (10 000 *кв. м*) } Поземельные меры	10^4
Ар		*a*	Сто квадратных метров (100 *кв. м*) } Поземельные меры	10^2
Квадратный дециметр	*кв. дм* или *дм*^{2}	*dm*^{2}	Одна сотая квадратного метра (0,01 *кв. м*)	10^{-2}
Квадратный сантиметр	*кв. см* или *см*^{2}	*cm*^{2}	Одна десятитысячная квадратного метра (0,000 1 *кв. м*)	10^{-4}
Квадратный миллиметр	*кв. мм* или *мм*^{2}	*mm*^{2}	Одна миллионная квадратного метра (0,000 001 *кв. м*)	10^{-6}

Наименования	Сокращенные обозначения		Определения	Отношения к основной единице
	Русск.	Иностр.		
Меры объема				
Кубический метр	*куб. м* или *м*³	m^3	Кубический метр есть объем куба, ребро которого имеет длину, равную одному метру.	1
Кубический километр	*куб. км* или *км*³	km^3	Один миллиард кубических метров (1 000 000 000 *куб. м*)	10^9
Кубический дециметр	*куб. дм* или *дм*³	dm^3	Одна тысячная кубического метра (0,001 *куб. м*)	10^{-3}
Кубический сантиметр	*куб. см* или *см*³	cm^3	Одна миллионная кубического метра (0,000 001 *куб. м*)	10^{-6}
Кубический миллиметр	*куб. мм* или *мм*³	mm^3	Одна миллиардная кубического метра (0,000 000 001 *куб. м*)	10^{-9}
Меры вместимости				
Литр	*л*	*l*	Литр есть объем одного килограмма воды при наибольшей ее удельной массе и при нормальном атмосферном давлении [1]. 1 литр равен 1 000 028 *куб. дм*.	1
Килолитр	*кл*	*kl*	Тысяча литров (1 000 *л*)	10^3
Гектолитр	*гл*	*hl*	Сто литров (100 *л*)	10^2
Декалитр	*дкл*	*dkl*	Десять литров (10 *л*)	10
Децилитр	*дл*	*dl*	Одна десятая литра (0,1 *л*)	10^{-1}
Сантилитр	*сл*	*cl*	Одна сотая литра (0,01 *л*)	10^{-2}
Миллилитр	*мл*	*ml*	Одна тысячная литра (0,001 *л*)	10^{-3}
			Примечание. Для измерений с точностью, не превышающей 0,01%, литр принимается равным кубическому дециметру, килолитр—кубическому метру, миллилитр—кубическому сантиметру.	

Сокращенные обозначения мер применяются в тексте только после числовых величин и пишутся в строку без последующей точки как знака сокращения. После сокращений: *кв.* (квадратный) и *куб.* (кубический) точки ставятся.

[1] Нормальное атмосферное давление равно давлению ртутного столба в 760 *мм* высоты на его горизонтальное основание при удельной массе ртути 13,595 и при нормальном ускорении свободного падения 980, 665 *см/сек*².

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

(Числа относятся к страницам этой книги)

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Основной отдел.

Дополнительный отдел.