Сборник задач по алгебре для 6-8 классов

Методическая библиотека школы

Сборник задач по алгебре для 6—8 классов

Пособие для учителей

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1975

Ю. М. Колягин, М. Р. Леонтьева, Ю. Н. Макарычев,
Н. Г. Миндюк, В. Н. Руденко, А. В. Соколова

*Рекомендовано к изданию Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР*

Сборник задач по алгебре. Для 6—8 кл. Пособие
С23 для учителей. М., «Просвещение», 1975.

208 с. (Метод. б-ка школы)

На обороте тит. л. авт.: Ю. М. Колягин, М. Р. Леонтьева, Ю. Н. Макарычев и др.

512

С $\frac{60501\text{-}487}{103(03)\text{-}75}$ подписное

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач предназначен учителям математики, ведущим преподавание в VI—VIII классах. Он может быть использован на уроке как при работе со всеми учащимися, так и для индивидуальных заданий ученикам, проявляющим повышенный интерес к математике. Часть задач можно решать при повторении материала. Кроме того, сборник может быть использован на внеклассных занятиях.

Для удобства пользования сборником задачи в нем распределены по разделам и классам. Легко понять, что такое распределение является условным. Некоторые задачи, например, из раздела „Функции“ можно было бы перенести в раздел „Уравнения“ и наоборот. Выбор места для данной задачи обычно определялся дидактическими соображениями. В ряде разделов упражнения, следующие подряд, объединены общей идеей.

К каждой задаче сборника, как правило, приводится ее решение или указание к решению, дается ответ. Помещая подробные решения задач, даже весьма несложных, например, решения упражнений на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями, авторы имели целью дать учителю возможность быстро проверить правильность решения (ответа), выполненного учеником. Очевидно, что решения задач, приводимые в сборнике, не являются единственно возможными. Учитель или ученик может предложить и другие решения.

Решение некоторых задач требует использования дополнительных (по сравнению со школьной программой) теоретических сведений. В таких случаях эти дополнительные сведения вводятся в сборнике в предшествующих задачах.

Авторы надеются, что выпущенный сборник окажет помощь учителю в его работе. Авторы будут благодарны учителям и методистам, которые сделают замечания и предложения, направленные на усовершенствование пособия.

1. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

■

VI КЛАСС

1.1. Вычислите:

а) $\left(0{,}98\cdot\frac{5}{14}+1\frac{7}{12}\cdot\frac{18}{19}\right):\left(2{,}82:1{,}2-1\frac{9}{16}\cdot0{,}32\right)$;

б) $\left(\frac{5}{13}:1\frac{1}{39}-\frac{10}{17}\cdot0{,}51\right)\cdot\left(\frac{2}{15}+0{,}45\cdot4\frac{4}{9}\right)$;

в) $\left(0{,}725-1\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{34}+3\frac{6}{7}:1\frac{11}{49}\right):(0{,}4+0{,}7\cdot0{,}5)$;

г) $\left(0{,}84\cdot1\frac{3}{7}+3{,}08:\frac{14}{25}+3{,}3\right):\left(5\frac{1}{3}-2\frac{1}{3}:2\right)$.

Решение.

а) $\left(\frac{7}{20}+1{,}5\right):(2{,}35-0{,}5)=1{,}85:1{,}85=1$;

б) $\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{2}{15}+2\right)=\frac{3}{40}\cdot2\frac{2}{15}=0{,}16$;

в) $\left(0{,}725-\frac{1}{8}+3\frac{3}{20}\right):(0{,}4+0{,}35)=3{,}75:0{,}75=5$;

г) $(1{,}2+5{,}5+3{,}3):\left(5\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}\right)=10:4\frac{1}{6}=2{,}4$.

1.2. Найдите значение дроби и укажите два последовательных целых числа, между которыми оно заключено:

а) $\frac{1{,}022:7{,}3-3{,}7\cdot1{,}6}{5{,}928:5{,}7+1{,}848:2{,}8}$;

б) $\frac{3{,}08\cdot4{,}5-2{,}1\cdot1{,}6}{93{,}8:6{,}7-179{,}2:5{,}12}$.

Решение.

а) 1) $1{,}022:7{,}3=0{,}14$;
2) $3{,}7\cdot1{,}6=5{,}92$;
3) $0{,}14-5{,}92=-5{,}78$;
4) $5{,}928:5{,}7=1{,}04$;
5) $1{,}848:2{,}8=0{,}66$;
6) $1{,}04+0{,}66=1{,}7$;
7) $-5{,}78:1{,}7=-3{,}4$.

Ответ. $-4<-3{,}4<-3$.

б) 1) $3{,}08\cdot 4{,}5=13{,}86$;
2) $2{,}1\cdot 1{,}6=3{,}36$;
3) $13{,}86-3{,}36=10{,}5$;
4) $93{,}8:6{,}7=14$;
5) $179{,}2:5{,}12=35$;
6) $14-35=-21$;
7) $10{,}5:(-21)=-0{,}5$.

Ответ. $-1<-0{,}5<0$.

1.3. Найдите значение переменной x, при котором верно равенство:

а) $\dfrac{(x-11{,}875):\dfrac{5}{8}}{0{,}625\cdot\dfrac{8}{25}-2\dfrac{1}{5}}=1$;

б) $\left(\left(6\dfrac{3}{7}-\dfrac{\dfrac{3}{4}x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8-1\dfrac{3}{4}\right):\dfrac{1}{20}=235$;

в) $\dfrac{3\dfrac{4}{15}}{(5{,}5+x):21\dfrac{3}{7}}-1\dfrac{3}{8}=5{,}625$.

Ответ. а) 10,625; б) $3\dfrac{5}{12}$; в) 4,5.

1.4. Докажите, что значение выражения $333^{555}+555^{333}$ кратно 37.

Решение.

$333^{555}+555^{333}=(3\cdot 111)^{555}+(5\cdot 111)^{333}=3^{555}\cdot 111^{555}+5^{333}\cdot 111^{333}=$
$=111\,(3^{555}\cdot 111^{554}+5^{333}\cdot 111^{332})=37\cdot 3\,(3^{555}\cdot 111^{554}+5^{333}\cdot 111^{332})$.

1.5. При каком значении x верна пропорция:

а) $\dfrac{12{,}5-x}{5}=\dfrac{3{,}6+x}{6}$;

б) $\dfrac{\dfrac{1}{3}+x}{7}=\dfrac{\dfrac{3}{4}+x}{9}$?

Решение.

а) $6\cdot(12{,}5-x)=5\cdot(3{,}6+x)$; $x=5\dfrac{2}{11}$;

б) $9\cdot\left(\dfrac{1}{3}+x\right)=7\cdot\left(\dfrac{3}{4}+x\right)$; $x=1\dfrac{1}{8}$.

Ответ. а) При $x=5\dfrac{2}{11}$; б) при $x=1\dfrac{1}{8}$.

1.6. Является ли верной пропорция:

а) $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{1}{-1}$; б) $\dfrac{0}{6}=\dfrac{0}{4}$; в) $\dfrac{7}{5-15:3}=\dfrac{14}{4\cdot 3-12}$?

Ответ. а) Да; б) да; в) нет.

1.7. Останется ли верной пропорция: $64:16=160:40$, если:

а) оба члена первого отношения разделить на 4, а оба члена второго умножить на 4;

б) к обоим членам первого отношения прибавить 2, а от обоих членов второго отношения вычесть 2;

в) оба члена первого отношения умножить на 25, а оба члена второго умножить на 2?

Ответ. а) Да; б) нет; в) да.

1.8. Радиусы двух кругов равны 0,2 и 0,6 *дм*. Каково отношение: а) длин окружностей этих кругов; б) площадей этих кругов?

Решение. Пусть r_1 и r_2 — длины радиусов, C_1 и C_2 — длины окружностей, K_1 и K_2 — площади данных кругов. Тогда

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2}=\frac{r_1}{r_2}; \quad \frac{K_1}{K_2}=\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

а) $\frac{C_1}{C_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{0,2}{0,6}=\frac{1}{3}$;

б) $\frac{K_1}{K_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

Ответ. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{9}$.

1.9. Подберите значения переменных a, b и c так, чтобы пропорция $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ была верной.

1.10. Чтобы рассчитать число петель для вязания шарфика, девочка связала образец шириной 10 *см*, при этом она набрала на спицу 24 петли. Сколько петель должна набрать девочка на спицу, чтобы связать шарфик шириной 25 *см*?

Решение. Пусть x — искомое число петель, тогда

$$\frac{24}{x}=\frac{10}{25}, \quad x=\frac{24\cdot25}{10}=60.$$

Ответ. 60 петель.

1.11. Для приготовления гречневой каши на 2 стакана гречневой крупы берут 1 чайную ложку соли, 3 стакана воды и 2 столовые ложки масла. Рассчитайте, сколько соли, воды и масла надо взять, чтобы сварить кашу из 15 стаканов гречневой крупы.

Решение. Пусть на 15 стаканов гречневой крупы потребуется x чайных ложек соли, y стаканов воды и z ложек масла, тогда

$\frac{2}{15}=\frac{1}{x}, \quad x=\frac{15}{2}=7,5;$

$$\frac{2}{15}=\frac{3}{y}, \quad y=\frac{45}{2}=22{,}5;$$
$$\frac{2}{15}=\frac{2}{z}, \quad z=\frac{15\cdot 2}{2}=15.$$

Ответ. 7,5 ложки соли, 22,5 стакана воды, 15 ложек масла.

1.12. Для приготовления пельменей на 300 *г* мяса требуется $1\frac{1}{2}$ стакана муки. Сколько потребуется муки для приготовления пельменей из 1 *кг* мяса?

Решение. Пусть x — искомое количество муки, тогда

$$\frac{300}{1000}=\frac{1\frac{1}{2}}{x}, \quad x=\frac{1\frac{1}{2}\cdot 1000}{300}=5.$$

Ответ. 5 стаканов муки.

1.13. В III в. до н. э. греческий математик Эратосфен дал алгоритм нахождения простых чисел, меньших наперед заданного числа N. Этот алгоритм („решето Эратосфена") можно сформулировать так:

Шаг 1. Выпишите все натуральные числа от 1 до N.
Шаг 2. Зачеркните число 1.
Шаг 3. Подчеркните наименьшее число (число 2).
Шаг 4. Вычеркните все числа, кратные подчеркнутому на предыдущем шаге (в данном случае все четные).
Шаг 5. Подчеркните наименьшее число из неподчеркнутых и незачеркнутых (число 3).
Шаг 6. Выполните шаг 4. И т. д.

Если незачеркнутых и неподчеркнутых чисел не оказалось, то все подчеркнутые числа простые.

Пользуясь алгоритмом, выпишите все простые числа, которые меньше 100.

Ответ. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89.

1.14. Число, выражающее 1973 год, является простым числом. До конца второго тысячелетия мы будем иметь еще пять таких чисел. Каковы эти годы?

Ответ. 1979, 1987, 1993, 1997, 1999.

1.15. Профессор Московского университета И. И. Чистяков в одном из своих выступлений сказал, что он пристрастился к математике с того момента, когда, будучи подростком, самостоятельно решил такую задачу:

«Докажите, что всякое простое число, начиная с пяти, будучи либо увеличено, либо уменьшено на 1, делится на 6».

Попробуйте и вы решить эту задачу.

Решение. Пусть n — простое число, следовательно, оно нечетное, тогда числа $n-1$ и $n+1$ четные, т. е. делятся на 2. Из трех последовательных натуральных чисел $n-1$, n, $n+1$ одно делится на 3 (см. задачу 2.14). Так как n — простое число, то оно на 3 не делится, значит, на 3 делится либо $n-1$, либо $n+1$. Кроме того, числа $n-1$ и $n+1$ четные, следовательно, то, которое делится на 3, должно делиться на 6.

1.16. Докажите, что

а) одно из двух последовательных четных чисел делится на 4;

б) при простом натуральном $n \geqslant 5$ число n^2-1 делится на 24.

Решение.

а) Пусть n — натуральное число, тогда $2n$ четное, а $2n+2$ следующее за ним четное число. Если n нечетное, то $n+1$ четное и $2n+2=2(n+1)$, как произведение двух четных чисел, делится на четыре. Если же n четное, то на четыре делится $2n$.

б) n — число нечетное (так как по условию задачи оно простое, большее 5), следовательно, $(n-1)$ и $(n+1)$ — два последовательных четных числа. Значит, каждое из них делится на 2 и одно делится на 4, а тогда $(n-1)(n+1)$ делится на 8.

Докажем, что число $(n-1)(n+1)$ делится еще и на 3. Действительно, из трех последовательных натуральных чисел $(n-1)$, n, $(n+1)$ одно делится на 3. Но так как n простое, не меньшее пяти, то оно не делится на 3, а потому на 3 делится или $(n-1)$ или $(n+1)$. Следовательно, n^2-1 делится на 24.

1.17. Докажите, что квадрат нечетного числа при делении на 8 всегда дает в остатке 1.

Решение. Пусть $n \in N$, тогда $2n-1$ есть число нечетное. $(2n-1)^2=4n^2-4n+1=4n(n-1)+1$. При любом $n \in N$ значение выражения $4n(n-1)$ делится на 8, так как в этом случае либо $4n$, либо $4(n-1)$ делится на 8. Тогда значение выражения $4n(n-1)+1$ при делении на 8 дает в остатке 1, что и требовалось доказать.

1.18. Найдите такое натуральное число, которое при делении на 45 дает остаток, равный квадрату частного.

Решение. Пусть x — искомое натуральное число, тогда

$$x=45q+q^2;\quad q^2<45.$$

Отсюда $0 \leqslant q<6$, т. е. $q=0$; 1; 2; 3; 4; 5, а $x=0$; 46; 94; 144; 196; 250; 306.

Ответ. 0; 46; 94; 144; 196; 250; 306.

1.19. Найдите двузначное число, равное утроенной сумме его цифр.

Решение. Пусть x — число десятков, а y — число единиц в двузначном числе, тогда $\overline{xy}=3(x+y)$, т. е. $10x+y=3(x+y)$; $7x=2y$. Так как x и y — целые числа, причем $1 \leqslant x \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 9$, то равенство $7x=2y$ верно лишь при $x=2$, $y=7$.

Ответ. 27.

1.20. Найдите двузначное число, равное утроенному произведению его цифр.

Решение. Пусть x — число десятков, а y — число единиц в числе, тогда $\overline{xy}=3xy$, $10x+y=3xy$, $10x=3xy-y$, $y=\frac{10x}{3x-1}$.

Учитывая, что $x \in N$ и $y \in N$, а также что $1 \leqslant x \leqslant 9$ и $1 \leqslant y \leqslant 9$, находим: $x=1$, $y=5$; $x=2$, $y=4$.

Ответ. 15; 24.

1.21. Найдите двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

Решение. Если x — число десятков в числе, а y — число единиц, то

$$\overline{xy}=2xy;\ 10x+y=2xy;\ y=2xy-10x;$$
$$y=2x(y-5);\quad 2x=\frac{y}{y-5},\quad x=\frac{y}{2(y-5)}.$$

Так как $x \in N$ и $y \in N$, причем $1 \leqslant x \leqslant 9$, а $5 < y \leqslant 9$, то условию задачи удовлетворяют значения $x=3$ и $y=6$.

Ответ. 36.

1.22. На сколько надо уменьшить число 100, чтобы при делении полученного числа как на 5, так и на 7 получался остаток 1 и чтобы при этом первое частное было на 2 больше второго?

Решение. Пусть число 100 надо уменьшить на x единиц, тогда $100-x=5a+1$, $100-x=7b+1$, где a, $b \in N$.

$$\begin{cases} 100-x=5a+1, \\ 100-x=7b+1, \\ a-b=2; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a+1=7b+1, \\ b=a-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a+1=7a-14+1, \\ b=a-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a=-14, \\ b=a-2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=7, \\ b=5. \end{cases}$$

Отсюда $x=100-36=64$.

Ответ. На 64.

1.23. Сумма квадратов пяти последовательных чисел равна 135. Найдите эти числа.

Решение. Пусть эти числа: $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$. Тогда $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=135$. $x^2-25=0$; $x=5$ или $x=-5$.

Ответ. 3; 4; 5; 6; 7 или —7; —6; —5; —4; —3.

1.24. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел никогда не является полным квадратом.

Решение. Пусть $a-2, a-1, a, a+1, a+2$ (где $a>3$) — пять последовательных натуральных чисел, тогда сумма их квадратов $(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=5a^2+10=5(a^2+2)$.

Чтобы $5(a^2+2)$ было полным квадратом, надо, чтобы a^2+2 делилось на 5, т. е. a^2+2 оканчивалось пятью или нулем. Тогда a^2 должно оканчиваться восьмью или тремя, но нет такого числа, квадрат которого оканчивается цифрой 8 или 3.

1.25. Найдите все такие двузначные числа, сумма которых с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, есть квадрат некоторого целого числа.

Решение. Пусть искомое число $\overline{ab}$. Имеем: $(10a+b)+$ $+(10b+a)=11(a+b)$. Так как $a\in N$ и $b\in N$, а также $1\leqslant a\leqslant 9$ и $1\leqslant b\leqslant 9$, то значение выражения $11(a+b)$ является квадратом при условии, что $a+b=11$.

Ответ. 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92.

1.26. В записи трехзначного числа вторая цифра — нуль. Если ее зачеркнуть, то данное трехзначное число разделится нацело на полученное двузначное число. Найдите такие трехзначные числа.

Решение. По условию $\overline{x0z}=k\cdot\overline{xz}$, где $k\in N$, т. е.

$$100x+z=k(10x+z),$$
$$100x+z=10xk+kz,$$
$$10x(10-k)=z(k-1).$$
$$1<k\leqslant 10 \text{ и } 0<x\leqslant 9,\ 0\leqslant z\leqslant 9.$$

$k=10$, $z=0$; $\overline{x0z}=\overline{x00}$ (запись $\overline{x00}$ обозначает число 100, 200, ..., 900).

$k=9$, $10x=8z$, $5x=4z$, $x=4$, $z=5$.

$k=8$, $20x=7z$; решения нет.

$k=7$, $30x=6z$, $5x=z$; $x=1$, $z=5$.

$k=6$, $40x=5z$, $8x=z$; $x=1$, $z=8$.

$k=5$, $50x=4z$; решения нет.

$k=4$, $60x=3z$; решения нет.

Ответ. $\overline{x00}$; 405; 105; 108.

1.27. Я задумал число, умножил его на 20, к произведению приписал справа единицу. Полученное число разделил на 49, в частном зачеркнул цифру 9 в разряде единиц, результат умножил на 3 и получил задуманное число. Найдите это число.

Решение. Если задуманное число x, то по условию задачи может быть составлено такое уравнение:

$$((x\cdot 20\cdot 10+1):49-9):10\cdot 3=x.$$

Решив его, получим: $x=12$.

Ответ. 12.

1.28. Мясо при варке теряет 35% своей массы. Сколько

а) получится вареного мяса из 2 *кг* сырого;

б) потребуется сырого мяса для получения 2,6 *кг* вареного?

Ответ. а) 1,3 *кг*; б) 4 *кг*.

1.29. Длина окружности с центром O равна $0{,}04\pi$ *м*. Принадлежат ли этой окружности точки A, B и C, если $|OA|=3$ *дм*, $|OB|=1{,}2$ *см*, $|OC|=2$ *см*?

Решение.

$C=2\pi R;\qquad R=\frac{C}{2\pi}=\frac{0{,}04\pi}{2\pi}\,м=0{,}02\,м.$

$3\ дм=0{,}3\ м>0{,}02\ м,$
$1{,}2\ см=0{,}012\ м<0{,}02\ м,$
$2\ см=0{,}02\ м.$

Ответ. Точки A и B не принадлежат данной окружности; точка C принадлежит ей.

■

VII КЛАСС

1.30. Найдите значение выражения:

а) $\frac{59^2-28^2-87\cdot 21}{56^2-31^2}+\frac{64^2-56^2}{65^2-15^2}$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{34\cdot 24-21^2+13^2}{25^2-9^2}+\frac{45^2-27^2-72\cdot 6}{40^2-32^2}$.

Решение.

а) $\frac{(59-28)(59+28)-87\cdot 21}{(56-31)(56+31)}+\frac{(64-56)(64+56)}{(65-15)(65+15)}=\frac{31\cdot 87-87\cdot 21}{25\cdot 87}+$
$+\frac{8\cdot 120}{50\cdot 80}=0{,}64;$

б) $\frac{1}{2}+\frac{34\cdot 24-(21^2-13^2)}{(25-9)(25+9)}+\frac{(45-27)(45+27)-72\cdot 6}{(40-32)(40+32)}=\frac{1}{2}+$
$+\frac{34\cdot 24-34\cdot 8}{16\cdot 34}+\frac{18\cdot 72-72\cdot 6}{8\cdot 72}=3.$

Ответ. а) 0,64; б) 3.

1.31. Найдите значение выражения (приближенно)

$$\frac{125^6-5^8}{25^{10}-1}.$$

Решение.

$$\frac{125^6-5^8}{25^{10}-1}=\frac{5^{18}-5^8}{5^{20}-1}=\frac{5^8(5^{10}-1)}{(5^{10}+1)(5^{10}-1)}=\frac{5^8}{5^{10}+1}=\frac{1}{5^2+\frac{1}{5^8}}\approx\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=$$

$$=0{,}04.$$

Ответ. 0,04.

1.32. Найдите значение выражения (приближенно)

$$\frac{\sqrt{1{,}00001}-1}{0{,}000002}.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{1{,}00001}-1}{0{,}000002}=\frac{(\sqrt{1{,}00001}-1)\cdot(\sqrt{1{,}00001}+1)}{0{,}000002\cdot(\sqrt{1{,}00001}+1)}=$$

$$=\frac{1{,}00001-1}{0{,}000002\cdot(\sqrt{1{,}00001}+1)}\approx\frac{0{,}00001}{0{,}000002\cdot 2}=\frac{1}{0{,}2\cdot 2}=\frac{1}{0{,}4}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Ответ. 2,5.

1.33. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5^4+5\cdot 3^6}{5^3+5^2\cdot 3^2}$; б) $\dfrac{6^6\cdot 2^3-3^6}{6^6+6^3\cdot 3^3+3^6}$.

Решение.

а) $$\frac{5^4+5\cdot 3^6}{5^3+5^2\cdot 3^2}=\frac{5(5^3+(3^2)^3)}{5^2(5+3^2)}=\frac{5(5+3^2)(5^2-5\cdot 3^2+3^4)}{5^2(5+3^2)}=\frac{5^2-5\cdot 3^2+3^4}{5}=$$

$$=5-3^2+\frac{3^4}{5}=5-9+16{,}2=12{,}2;$$

б) $$\frac{6^6\cdot 2^3-3^6}{6^6+6^3\cdot 3^3+3^6}=\frac{3^6\cdot 2^6\cdot 2^3-3^6}{3^6\cdot 2^6+3^3\cdot 2^3\cdot 3^3+3^6}=\frac{3^6(2^9-1)}{3^6(2^6+2^3+1)}=$$

$$=\frac{(2^3-1)(2^6+2^3+1)}{2^6+2^3+1}=7.$$

Ответ. а) 12,2; б) 7.

1.34. Докажите, что значение выражения

$$\frac{244\cdot 395-151}{244+395\cdot 243}$$

есть целое число.

Решение.

$$\frac{244\cdot 395-151}{244+395\cdot 243}=\frac{395\cdot 243+395-151}{395\cdot 243+395-151}=1.$$

1.35. Найдите значение выражения

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}, \text{ где } n \in N.$$

Решение.

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3}=\frac{8^{2n}\cdot 3^4}{4^{3(n-1)}\cdot 3^3}=\frac{64^n\cdot 3}{64^{n-1}}=64\cdot 3=192.$$

Ответ. 192.

1.36. Зависит ли значение выражения $\frac{(4^{n+1}+6\cdot 4^n)^3}{(8^{n+1}+2\cdot 8^n)^2}$, где $n \in N$, от n?

Решение.

$$\frac{(4^{n+1}+6\cdot 4^n)^3}{(8^{n+1}+2\cdot 8^n)^2}=\frac{(4^n\cdot 10)^3}{(8^n\cdot 10)^2}=\frac{4^{3n}\cdot 10^3}{8^{2n}\cdot 10^2}=\frac{64^n\cdot 10}{64^n}=10.$$

Ответ. Не зависит.

1.37. Среди данных пар чисел найдите числа, взаимно обратные:

а) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{3\sqrt{5}}{5}$;

б) $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$;

в) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ и $\frac{5\sqrt{3}}{6}$;

г) $\sqrt{2}+1$ и $\sqrt{2}-1$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{3\cdot 5}{15}=1$;

б) $(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})=9-2=7\neq 1$;

в) $\frac{2\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{10\cdot 3}{30}=1$;

г) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$.

Ответ. а); в); г).

1.38. Значение какого выражения больше:

а) $\sqrt{12}+\sqrt{15}$ или $\sqrt{11}+\sqrt{17}$;

б) $2\sqrt{5}+\sqrt{13}$ или $3\sqrt{3}+\sqrt{11}$?

Решение. а) Так как $(\sqrt{12}+\sqrt{15})^2=27+2\sqrt{180}$, а $(\sqrt{11}+\sqrt{17})^2=28+2\sqrt{187}$, то $\sqrt{12}+\sqrt{15}<\sqrt{11}+\sqrt{17}$.

Ответ. а) $\sqrt{12}+\sqrt{15}<\sqrt{11}+\sqrt{17}$; б) $2\sqrt{5}+\sqrt{13}<3\sqrt{3}+\sqrt{11}$.

1.39. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:

а) $4+2\sqrt{3}$; б) $17-12\sqrt{2}$; в) $8+4\sqrt{3}$.

Решение.

а) $4+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^2$;

б) $17-12\sqrt{2}=9-12\sqrt{2}+8=(3-2\sqrt{2})^2$;

в) $8+4\sqrt{3}=2+4\sqrt{3}+6=(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$.

Ответ. а) $(\sqrt{3}+1)^2$; б) $(3-2\sqrt{2})^2$; в) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$.

1.40. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{15}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{13-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}+1$.

Решение.

в) $\dfrac{13-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}+1=\dfrac{12-4\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-1}+1=\dfrac{(2\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}-1}+1=2\sqrt{3}-$
$-1+1=2\sqrt{3}$.

Ответ. а) 14; б) $\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3}$.

1.41. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

б) $\dfrac{(3\cdot 2^{20}+7\cdot 2^{19})\cdot 52}{(13\cdot 8^4)^2}$;

в) $\dfrac{(2\cdot 3^{-1})^{-2}+(-4)^{-1}\cdot 0{,}2^{-1}+0{,}5^{-2}}{1^{-1}+0{,}5^2}$.

Решение.

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{4-(2+\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$;

б) $\dfrac{2^{19}\cdot(3\cdot 2+7)\cdot 52}{13^2\cdot 2^{24}}=\dfrac{2^{19}\cdot 13^2\cdot 2^2}{13^2\cdot 2^{24}}=\dfrac{1}{8}$;

в) $\dfrac{2^{-2}\cdot 3^2-0{,}8^{-1}+0{,}25^{-1}}{1{,}25}=\dfrac{\frac{9}{4}-\frac{10}{8}+4}{1{,}25}=\dfrac{5}{1{,}25}=4$.

Ответ. а) 1; б) $\dfrac{1}{8}$; в) 4.

1.42. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2-(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)+3(\sqrt{2}+1)^2$;

б) $(1-\sqrt{7})(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}+\sqrt{14})^2+3(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$;

в) $(5\sqrt{2}+3)(5\sqrt{2}-3)-(14\sqrt{3}-1)-7(\sqrt{1{,}5}-\sqrt{2})^2$;

г) $(3\sqrt{2}-4)^2-(4-\sqrt{2})(\sqrt{2}+28)-(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})\times$
$\times(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})$.

Решение.

а) $6-2\sqrt{18}+3-1+3+6+6\sqrt{2}+3=20-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}=20$;
б) $1-7-21-14\sqrt{2}+27+18\sqrt{2}=4\sqrt{2}$;
в) $50-9-14\sqrt{3}+1-24{,}5+14\sqrt{3}=17{,}5$;
г) $34-24\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2-112+28\sqrt{2}-45+32=-89$.

Ответ. а) 20; б) $4\sqrt{2}$; в) 17,5; г) -89.

1.43. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\cdot 0{,}5^{-2}$;
б) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$;
в) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{3}$;
г) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{14}}-\sqrt{9-2\sqrt{14}}\right)\cdot 3\sqrt{2}$.

Решение.

а) $(3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}+2\sqrt{9-5})\cdot 4=(6+4)\cdot 4=40$;
б) $(6-\sqrt{11}+6+\sqrt{11}-2\sqrt{36-11})\cdot 1{,}5=(12-10)\cdot 1{,}5=3$;
в) $\left(\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\right)\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+$
$+\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=6$;
г) $\left(\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}\right)\cdot 3\sqrt{2}=(\sqrt{7}+\sqrt{2}-$
$-\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=12$.

Ответ. а) 40; б) 3; в) 6; г) 12.

1.44. Сравните две дроби: $A=\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}$; $B=\frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$.

Решение. Пусть $5\,555\,555\,557=a$, а $6\,666\,666\,669=b$, тогда $A=\frac{a-4}{a}$ и $B=\frac{b-5}{b}$. Составим разность $A-B$.

$$A-B=\frac{a-4}{a}-\frac{b-5}{b}=\frac{5a-4b}{ab}.$$

Ясно, что $ab>0$. Оценим знак разности $5a-4b$.
$5a-4b=5\cdot 5\,555\,555\,557-4\cdot 6\,666\,666\,669>5\cdot 5\,500\,000\,000-$
$-4\cdot 6\,700\,000\,000>0$.

Следовательно, $A>B$.

Ответ. $A>B$.

1.45. Пользуясь правилами вычислений с приближенными данными, ответьте на следующие вопросы:

а) В поезд массой 200 *т* сел пассажир массой 70 *кг* с чемоданом массой 10 *кг* и сумкой массой 1 *кг*. Какова будет масса поезда?

б) Прикиньте, сколько примерно секунд прошло с начала нашей эры.

в) Ваше сердце делает в среднем 80 ударов в минуту. Прикиньте, сколько примерно ударов оно сделает в течение ближайших 25 лет вашей жизни.

г) Знаменитой Эйфелевой башне в 1974 году исполнилось 85 лет. К этому юбилею на одной из улиц парижского пригорода Нейи появилась точная копия этой башни. Высота ее 3,2 *м*. Построил башню из спичек часовщик Жорж Витель. Для этого ему понадобилось 2 млн. 500 тыс. спичек.

Прикиньте, сколько примерно весит спичечная Эйфелева башня.

Ответ. а) 200 *т*; б) 70 млрд.; в) 1 млрд; г) 150 *кг*.

1.46. Найдите натуральные значения x, удовлетворяющие условию: $2nx=(n+1)x+18$, где $n \in N$.

Решение. $2nx=(n+1)x+18$, $(n-1)x=18$, $x=\frac{18}{n-1}$ $(n \neq 1)$.

Число x — натуральное, если $18 \vdots (n-1)$. Составим таблицу возможных значений n и x.

n	2	3	4	7	10	19
x	18	9	6	3	2	1

Ответ. $x \in \{18, 9, 6, 3, 2, 1\}$.

1.47. К числителю и знаменателю некоторой дроби прибавили одно и то же число, отличное от нуля, от этого значение дроби не изменилось. Найдите эту дробь.

Решение. Пусть m — числитель дроби, n — знаменатель дроби, тогда $\frac{m+a}{n+a}=\frac{m}{n}$. Так как $n \neq 0$, $a \neq 0$, то $mn+an=$ $=mn+am$, $an=am$, $n=m$.

Ответ. Любая дробь вида $\frac{m}{n}$, где $m=n$ и $n \neq 0$.

1.48. При каком условии произведение двух целых чисел равно частному этих чисел?

Решение. Пусть x и y — искомые целые числа, тогда по условию $xy=\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$.

$$xy^2=x, \quad x(y^2-1)=0.$$

Данному уравнению удовлетворяют значения:

а) $x=0$, y — любое целое число, не равное нулю;

б) x — любое целое число, $y=1$;

в) x — любое целое число, $y=-1$.

1.49. Найдите трехзначное число, кратное 45, если разность между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 297.

Решение.

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=297;$$
$$100x+10y+z-100z-10y-x=297;$$
$$99(x-z)=297;$$
$$x-z=3. \qquad (*)$$

Так как $\overline{xyz}$ должно делиться на 45, то $\overline{xyz}\,\vdots\,9$ и $\overline{xyz}\,\vdots\,5$, т. е. $\overline{xyz}$ таково, что

$$x+y+z=9m \qquad (**)$$

и z либо равно пяти, либо равно нулю.

Если $z=5$, то из уравнения $(*)$ получаем $x=8$;

если $z=0$, то из этого же уравнения получаем $x=3$.

Подставляя найденные значения x и z в уравнение $(**)$, получаем:

$$8+y+5=9m; \quad 13+y=9m;$$
$$3+y+0=9m; \quad 3+y=9m.$$

Учитывая, что $0\leqslant y\leqslant 9$, подбором находим, что $y=5$ или $y=6$.

Ответ. 855 или 360.

1.50. Произведение двух несократимых дробей оказалось равным их разности. Найдите разность между дробными числами, обратными данным.

Решение. По условию задачи

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}, \quad \frac{ac}{bd}=\frac{ad-bc}{bd},$$
$$ac=ad-bc, \quad bc-ad=-ac, \quad \frac{bc-ad}{ac}=-1.$$

Искомая разность

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}=-1.$$

Ответ. -1.

1.51. Убедитесь, что

$$11^2=121;$$
$$111^2=12\,321;$$
$$1\,111^2=1\,234\,321;$$
$$11\,111^2=123\,454\,321.$$

Как вы полагаете, чему равно значение выражения $\sqrt{12345678987654321}$? Проверьте.

Ответ. 111 111 111.

1.52. Если $k\in N$, то $\frac{10^k-4}{3}\in N$. Докажите это.

Решение. Так как при $k\in N$ значение выражения 10^k является числом, записанным единицей с последующими нулями, то числовое значение выражения 10^k-4 будет записано цифрами 9 и 6. Тогда при любом $k\in N$ значение выражения $(10^k-4)\ \vdots\ 3$, так как сумма его цифр делится на 3, а потому $\frac{10^k-4}{3}\in N$.

1.53. Докажите, что если $m\in N$, то $\frac{9^{2m}+14}{5}\in N$.

Решение.

$$\frac{9^{2m}+14}{5}=\frac{81^m+9+5}{5}.$$

При любом $m\in N$ числовое значение выражения 81^m оканчивается 1, тогда сумма 81^m+9 дает число, оканчивающееся нулем, а число 81^m+9+5 будет оканчиваться пятью, значит, $(81^m+9+5)\ \vdots\ 5$.

1.54. Докажите, что значение выражения:

а) $41^{10}-1$ делится на 10;
б) $46^{46}-1$ кратно 5;
в) 67^8-1 делится на 10;
г) $89^{26}-45^{25}$ кратно 2.

Решение. а) Значение выражения 41^{10} есть число, оканчивающееся единицей, тогда значение выражения $41^{10}-1$ является числом, оканчивающимся нулем, следовательно, $(41^{10}-1)\ \vdots\ 10$.

б) Решение аналогично а).

в) $67^8-1=(67^4-1)(67^4+1)=(67^2\cdot 67^2-1)(67^4+1)$.

Значение выражения 67^2 есть число, оканчивающееся девятью, тогда значение выражения $67^2\cdot 67^2$ является числом, оканчивающимся единицей, а $67^2\cdot 67^2-1$ — число, оканчивающееся нулем, т. е. делится на 10. Значит, $(67^2\cdot 67^2-1)\cdot(67^4+1)\ \vdots\ 10$.

г) $89^{26}-45^{25}=(89^2)^{13}-45^{25}$. Значение выражения 89^2 является числом, оканчивающимся единицей, тогда значение выражения $(89^2)^{13}$ также является числом, оканчивающимся единицей.

Значение выражения 45^{25} — число, оканчивающееся пятью. Разность двух нечетных чисел есть число четное, поэтому оно делится на 2.

1.55. Докажите, что если $a+b+c$ кратно 6, то и $a^3+b^3+c^3$ кратно 6.

Решение.

$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3+$
$+c^3-3ab(a+b)=(a+b+c)((a+b)^2-(a+b)c+c^2)-3ab(a+b)$.

Первое слагаемое этой суммы делится на 6, так как $(a+b+c)\,\vdots\,6$. Второе слагаемое состоит из четырех множителей. Если a или b четно, то $3a$ или $3b$ делится на 6. Если же и a и b нечетны, то $a+b$ четно и на 6 разделится $3(a+b)$. Следовательно, $(a^3+b^3+c^3)\,\vdots\,6$.

■

VIII КЛАСС

1.56. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,5}+16^{0,75}-(0,5)^{-5}+\left(-\frac{3}{7}\right)^0\cdot 5$;

б) $\frac{81^{-\frac{3}{4}}+27^{-\frac{4}{3}}}{3\cdot 9^{-1,5}-27^{-1}}$;

в) $0,0625^{-\frac{1}{2}}-0,5^{-4}+0,25^{-\frac{1}{2}}+0,125^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^0$.

Решение.

а) $(2^{-4})^{-0,5}+(2^4)^{0,75}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}+1\cdot 5=2^2+2^3-2^5+5=-15$;

б) $\frac{(3^4)^{-\frac{3}{4}}+(3^3)^{-\frac{4}{3}}}{3\cdot(3^2)^{-1,5}-(3^3)^{-1}}=\frac{3^{-3}+3^{-4}}{3\cdot 3^{-3}-3^{-3}}=\frac{3^{-4}(3+1)}{3^{-3}(3-1)}=\frac{2}{3}$;

в) $(0,5^4)^{-\frac{1}{2}}-0,5^{-4}+(0,5^2)^{-\frac{1}{2}}+(0,5^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 1=0,5^{-2}-0,5^{-4}+$
$+0,5^{-1}+0,5^{-2}=-6$.

Ответ. а) -15; б) $\frac{2}{3}$; в) -6.

1.57. Найдите значение выражения:

а) $0,027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}+256^{0,75}-3^{-1}+(5,5)^0$;

б) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5}-7,5\cdot(\sqrt[4]{4^{-3}})^2-(-2)^{-4}+81^{0,25}$;

в) $\left(2^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+5\cdot 2^0\right)^{-1}$;

г) $\frac{5\cdot 5^0-(-2)^{-3}\cdot 4}{3\cdot 3^{-1}+(-2)^{-4}\cdot 4}$.

Решение.

а) $(0{,}3^3)^{-\frac{1}{3}} - (-6) + (2^8)^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} + 1 = 0{,}3^{-1} + 6 + 2^6 + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} +$
$+ 6 + 64 + \frac{2}{3} = 74;$

б) $1 - \frac{15}{2}\cdot\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - \frac{1}{2^4} + (3^4)^{0{,}25} = 1 - \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{16} + 3 = 3;$

в) $(2^{-2}\cdot 2^2 + 5)^{-1} = \frac{1}{6};$

г) $\dfrac{5\cdot 1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 4}{1 + \frac{1}{16}\cdot 4} = \dfrac{5 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{5\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = \dfrac{11\cdot 4}{2\cdot 5} = 4{,}4.$

Ответ. а) 74; б) 3; в) $\frac{1}{6}$; г) 4,4.

1.58. Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не является рациональным.

Решение. Пусть $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$, где $a \in Q$ (Q — множество рациональных чисел). Тогда $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, откуда $\sqrt{6} = \frac{a^2-5}{2}$. Так как $a \in Q$, то и $(a^2-5) \in Q$, значит, $\sqrt{6} \in Q$, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не есть число рациональное.

1.59. Представьте число 1000 в виде суммы двух таких натуральных чисел, из которых первое делится на 13, а второе на 53.

Решение. Пусть m и n — частные от деления слагаемых соответственно на числа 13 и 53. Тогда

$$1000 = 13m + 53n = 13m + 13\cdot 4n + n = 13(m + 4n) + n.$$

Разделив 1000 на 13, получим:

$$1000 = 13\cdot 76 + 12.$$

Из системы

$$\begin{cases} m + 4n = 76, \\ \quad\ \ n = 12 \end{cases}$$

найдем, что $m = 28$, $n = 12$.
Итак, $13\cdot 28 = 364$, $53\cdot 12 = 636$.

Ответ. $1000 = 364 + 636$.

1.60. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Решение. Так как $9+4\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^2$, то

$$\left(\sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=$$
$$=2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=2.$$

Ответ. 2.

1.61. Упростите выражение:

а) $\sqrt{4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}+\sqrt[3]{8\sqrt{\frac{1}{2}}}-2\sqrt[6]{32}$;

б) $3\sqrt{15\sqrt{75}}-7\sqrt{6\sqrt{12}}+2\sqrt{21\sqrt{147}}$.

Решение.

а) $\sqrt[6]{64\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt[6]{64\cdot\frac{1}{2}}-2\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{32}-2\sqrt[6]{32}=0$;

б) $3\sqrt{15\sqrt{25\cdot3}}-7\sqrt{6\sqrt{4\cdot3}}+2\sqrt{21\sqrt{49\cdot3}}=3\sqrt{75\sqrt{3}}-$ $-7\sqrt{12\sqrt{3}}+2\sqrt{147\sqrt{3}}=3\cdot5\sqrt{3\sqrt{3}}-7\cdot2\sqrt{3\sqrt{3}}+$ $+2\cdot7\sqrt{3\sqrt{3}}=15\sqrt[4]{27}$.

Ответ. а) 0; б) $15\sqrt[4]{27}$.

1.62. а) Расположите в порядке возрастания:

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[6]{30};$$

б) расположите в порядке убывания:

$$\sqrt{6},\ \sqrt[4]{12},\ \sqrt[8]{72}.$$

Решение. а) $\sqrt[6]{3^3}$, $\sqrt[6]{6^2}$, $\sqrt[6]{30}$; $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{36}$, $\sqrt[6]{30}$; $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$.

б) $\sqrt[8]{6^4}$, $\sqrt[8]{12^2}$, $\sqrt[8]{72}$; $\sqrt[8]{6^2\cdot6^2}$, $\sqrt[8]{6^2\cdot2^2}$, $\sqrt[8]{6^2\cdot2}$; $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[8]{72}$.

Ответ. а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$; б) $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[8]{72}$.

1.63. Вычислите с помощью таблиц квадратных и кубических корней и таблицы значений дроби вида $\frac{1}{n}$:

а) $\sqrt[4]{1{,}516}$, $\sqrt[6]{211{,}4}$, $\sqrt[9]{64{,}64}$, $\sqrt[8]{491{,}5}$, $\sqrt[12]{56{,}99}$;

б) $3{,}516^{-\frac{1}{2}}$, $72{,}11^{\frac{3}{2}}$, $222{,}2^{-\frac{1}{2}}$, $43{,}84^{\frac{1}{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{1{,}516}=\sqrt{\sqrt{1{,}516}}\approx\sqrt{1{,}231}\approx1{,}109$;

$\sqrt[6]{211{,}4}=\sqrt[3]{\sqrt{211{,}4}}\approx\sqrt[3]{14{,}54}\approx2{,}44$;

$$\sqrt[9]{64,64}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{64,64}}\approx\sqrt[3]{4,04}\approx 1,591;$$

$$\sqrt[8]{491,5}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{491,5}}}\approx\sqrt{\sqrt{22,17}}\approx\sqrt{4,708}\approx 2,170;$$

$$\sqrt[12]{56,99}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{56,99}}}\approx\sqrt{\sqrt{3,83}}\approx\sqrt{1,957}\approx 1,399.$$

б) $3,516^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3,516}}\approx\dfrac{1}{1,875}\approx 0,533;$

$72,11^{\frac{3}{2}}=\sqrt{72,11^3}\approx\sqrt{375\,000}\approx 612,4;$

$222,2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{222,2}}\approx\dfrac{1}{14,91}\approx 0,0067;$

$43,84^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{43,84}=\sqrt{\sqrt{43,84}}\approx\sqrt{6,621}\approx 2,573.$

1.64. С помощью таблиц логарифмов найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; г) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4}}$;

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$;

в) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}$; е) $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}$.

Решение.

а) $x=\sqrt{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{24}$; $\lg x=\frac{1}{6}\lg 24=\frac{1}{6}\cdot 1,3802=0,2300$; $x=1,698$.

б) $y=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{12}$; $\lg y=\frac{1}{6}\lg 12=\frac{1}{6}\cdot 1,0792=0,17986$; $y=1,513$.

в) $z=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt[12]{24}$; $\lg z=\frac{1}{12}\lg 24=\frac{1}{12}\cdot 1,3802=0,11501$; $z=1,303$.

г) $a=\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4}}=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[6]{18}$; $\lg a=\frac{1}{6}\lg 18=\frac{1}{6}\cdot 1,2553=$ $=0,20921$; $a=1,619$.

д) $b=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[8]{128}$; $\lg b=\frac{1}{8}\lg 128=\frac{1}{8}\cdot 2,1072=$ $=0,2634$; $b=1,833$.

е) $c=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}=\sqrt[27]{3^{13}}=3^{\frac{13}{27}}$; $\lg c=\frac{13}{27}\lg 3=\frac{13}{27}\cdot 0,4771=$ $=0,2297$; $c=1,697$.

Ответ. а) 1,698; б) 1,513; в) 1,303; г) 1,619; д) 1,833; е) 1,697.

1.65. Площадь круга с центром O равна 36 $см^2$. Принадлежат ли этому кругу точки M, N и P, если $|OM| = \frac{17}{3\sqrt{\pi}}$ $см$, $|ON| = \frac{80}{7\sqrt{\pi}}$ $см$, $|OP| = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$ $см$?

Решение. Сравним расстояния от точки O до данных точек с длиной радиуса $r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$:

$\frac{17}{3\sqrt{\pi}} - \frac{6}{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} < 0$, значит, $\frac{17}{3\sqrt{\pi}} < \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, поэтому точка M принадлежит кругу.

$\frac{80}{7\sqrt{\pi}} - \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{80-42}{7\sqrt{\pi}} = \frac{38}{7\sqrt{\pi}} > 0$, значит, $\frac{80}{7\sqrt{\pi}} > \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, поэтому точка N лежит вне круга.

$\frac{6\sqrt{\pi}}{\pi} - \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi} - \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi} = 0$, следовательно, точка P принадлежит кругу (лежит на окружности).

1.66. Чтобы сшить юбку «солнце», из материала вырезают кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями, ширина которого равна длине юбки, а длина внутренней окружности равна окружности талии. Рассчитайте радиусы этих окружностей, если длина окружности талии равна 63 *см*, а длина юбки — 60 *см*.

Решение. Пусть радиусы окружностей x *см* и y *см*, тогда $63 = 2\pi x$, $x = \frac{63}{2\pi}$ $см \approx 10$ $см$, а $y = 10$ $см + 60$ $см = 70$ $см$.

Ответ. 10 *см*; 70 *см*.

1.67. Есть ли среди членов последовательности (u_n), где $u_n = n(n-15)$, отрицательные числа? Если да, то сколько их?

Решение. Отрицательными членами данной последовательности будут члены, удовлетворяющие условию

$$n(n-15) < 0.$$

Так как $n > 0$, то $n - 15 < 0$, т. е. $0 < n < 15$; $n = 1, 2, 3, \ldots, 14$.

Ответ. Да, первые 14 членов.

1.68. Последовательность, у которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а первые два члена равны 0 и 1, называется последовательностью Фибоначчи; n-й член этой последовательности называется n-м числом Фибоначчи.

Напишите рекуррентную формулу для чисел Фибоначчи и первые десять чисел Фибоначчи.

Решение.

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}\ (n \geqslant 3);\ y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Ответ. 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

1.69. Бесконечная последовательность

$$-3;\ -1{,}5;\ 0;\ \ldots$$

является арифметической прогрессией. Постройте график последовательности для $1 \leqslant n \leqslant 6$. Напишите уравнение прямой, на которой располагаются точки графика этой последовательности.

Решение. Найдем разность прогрессии и a_4, a_5, a_6: $d = -1{,}5-(-3) = 1{,}5$, $a_4 = 1{,}5$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4{,}5$.

В координатной плоскости строим точки: (1; —3), (2; —1,5), (3; 0), (4; 1,5), (5; 3), (6; 4,5).

По формуле n-го члена находим:

$$a_n = -3 + 1{,}5\,(n-1) = 1{,}5n - 4{,}5.$$

Точки графика последовательности располагаются на прямой

$$y = 1{,}5x - 4{,}5.$$

Ответ. $y = 1{,}5x - 4{,}5$.

1.70. Докажите, что последовательность (u_n), где $u_n = 1{,}5n + 1$,— арифметическая прогрессия. Является ли членом этой прогрессии число 500,5?

Решение. Найдем $(n+1)$-й член последовательности:

$$u_{n+1} = 1{,}5\,(n+1) + 1 = 1{,}5n + 2{,}5.$$

Разность $u_{n+1} - u_n = 1{,}5n + 2{,}5 - (1{,}5n + 1) = 1{,}5$ не зависит от n. Следовательно, последовательность, заданная формулой $u_n = 1{,}5n + 1$, является арифметической прогрессией.

Выясним, принадлежит ли число 500,5 этой последовательности.

$$1{,}5n + 1 = 500{,}5,$$
$$1{,}5n = 499{,}5,$$
$$n = 333.$$

$333 \in N$, значит, число 500,5 является членом этой последовательности.

1.71. Найдите такое натуральное число p, чтобы сумма $p + (p-1) + (p-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$ была трехзначным числом, записанным одинаковыми цифрами.

Сумма $p + (p-1) + (p-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{p\,(p+1)}{2}$. По условию значение выражения $\frac{p\,(p+1)}{2}$ — трехзначное число. Следовательно, значение p должно быть таким, чтобы выполнялось неравенство

$$100 \leqslant \frac{p\,(p+1)}{2} < 1000$$

или неравенство

$$200 \leqslant p(p+1) < 2000.$$

Легко догадаться, что последнее неравенство будет выполнено, если выполнится неравенство

$$14 \leqslant p < 45.$$

По условию значение выражения $\frac{p(p+1)}{2}$ — трехзначное число, все цифры которого одинаковы, т. е. $\frac{p(p+1)}{2} = \overline{aaa}$. Так как $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$, то $\frac{p(p+1)}{2} = 111a$ и $p(p+1) = 222a = 6a \cdot 37$. Если $a = 6$, то $p(p+1) = 36 \cdot 37$, т. е. $p = 36$, при этом число 36 удовлетворяет неравенству $14 \leqslant p < 45$. Очевидно, что другие значения a не удовлетворяют условию.

Ответ. $p = 36$.

1.72. Известно, что (a_n) — последовательность, членами которой являются натуральные числа, дающие при делении на 7 в остатке 1. Найдите сумму первых пятнадцати членов этой последовательности.

Решение. Последовательность (a_n) может быть задана формулой $a_n = 7n - 6$, где $n \in N$. Так как $a_{n+1} - a_n = 7(n+1) - 6 - (7n - 6) = 7$, то последовательность (a_n) арифметическая прогрессия. Найдем S_{15}:

$$a_1 = 1; \; a_{15} = 7 \cdot 15 - 6 = 99;$$

$$S_{15} = \frac{1+99}{2} \cdot 15 = 750.$$

Ответ. 750.

1.73. Для перевода температуры со шкалы Фаренгейта на шкалу Цельсия пользуются формулой $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, где F — число градусов по Фаренгейту, а C — соответствующее число градусов по Цельсию.

а) Напишите формулу для перевода температуры со шкалы Цельсия на шкалу Фаренгейта.

б) Какова температура кипения воды по шкале Фаренгейта?

в) Какова нормальная температура тела человека по шкале Фаренгейта?

г) Вычислите F, если $C = 35, 36, 37, 38°$. Составят ли полученные числа арифметическую прогрессию?

Ответ. а) $F = 1{,}8C + 32$.

б) Считая, что температура кипения воды по шкале Цельсия 100°, получим, что по шкале Фаренгейта она будет 212°.

в) 97,7° (считая, что по шкале Цельсия нормальная температура 36,5°).

г) $F=95$; 96,8; 98,6; 100,4. Да, эти числа составят арифметическую прогрессию, разность которой 1,8.

1.74. Найдите натуральное число, которое в 2,5 раза меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел.

Решение. Пусть n — искомое натуральное число, тогда

$$1+2+\ldots+(n-1)=2{,}5n;$$
$$\frac{1+n-1}{2}(n-1)=2{,}5n;$$
$$n-1=5;\ n=6.$$

Действительно, если $n=6$, то $1+2+3+4+5=15$, $15:6=2{,}5$.

Ответ. 6.

1.75. Найдите сумму тех членов арифметической прогрессии $-6{,}5$; $-4{,}5$; $-2{,}5$; ..., которые больше 10 и меньше 20.

Решение. По формуле n-го члена арифметической прогрессии имеем: $a_n=-6{,}5+2(n-1)=-8{,}5+2n$. Отсюда

$$10<-8{,}5+2n<20;$$
$$18{,}5<2n<28{,}5;$$
$$9{,}25<n<14{,}25;$$
$$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14.$$

Вычислим a_{10} и a_{14}. $a_{10}=-8{,}5+20=11{,}5$; $a_{14}=-8{,}5+28=19{,}5$. Найдем сумму пяти членов прогрессии с a_{10} по a_{14}.

$$S_n=\frac{11{,}5+19{,}5}{2}\cdot 5=77{,}5.$$

Ответ. 77,5.

1.76. Длины радиусов трех неравных кругов являются последовательными членами арифметической прогрессии. Выясните, являются ли последовательными членами арифметической прогрессии (в том же порядке) длины их окружностей, площади этих кругов.

Решение. По условию радиусы кругов R, $R+d$, $R+2d$, тогда длины окружностей $2\pi R$, $2\pi(R+d)$, $2\pi(R+2d)$, а площади кругов πR^2, $\pi(R+d)^2$, $\pi(R+2d)^2$ соответственно.

$$2\pi(R+d)-2\pi R=2\pi d.$$
$$2\pi(R+2d)-2\pi(R+d)=2\pi(R+2d-R-d)=2\pi d.$$

Значит, длины окружностей являются последовательными членами арифметической прогрессии.

$$\pi(R+d)^2-\pi R^2=\pi(R^2+2Rd+d^2)-\pi R^2=\pi(2Rd+d^2);$$
$$\pi(R+2d)^2-\pi(R+d)^2=\pi(R^2+4Rd+4d^2-R^2-2Rd-d^2)=$$
$$=\pi(2Rd+3d^2).$$

Мы видим, что площади этих кругов не являются последовательными членами арифметической прогрессии.

1.77. Докажите, что последовательность, сумма n членов которой вычисляется по формуле:

а) $S_n = 2n^2$, б) $S_n = 5n^2 - 2n$,

является арифметической прогрессией. Найдите разность прогрессии и ее первый член.

Решение. а) Используя формулу $S_n = 2n^2$, запишем выражения для сумм $n-1$, n и $n+1$ членов данной последовательности:

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2; \quad S_n = 2n^2; \quad S_{n+1} = 2(n+1)^2.$$

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2; \quad a_{n+1} = 2(n+1)^2 - 2n^2.$$

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1)^2 - 2n^2 - 2n^2 + 2(n-1)^2 = 4.$$

Значит, последовательность, сумма n членов которой вычисляется по формуле $S_n = 2n^2$, является арифметической прогрессией, в которой $d = 4$, $a_1 = 2$.

б) Решение аналогично а).

Ответ. а) $d = 4$, $a_1 = 2$; б) $d = 10$, $a_1 = 3$.

1.78. а) Решите уравнение

$$3 + 5 + 7 + \ldots + x = 399,$$

если известно, что последовательность 3; 5; 7; ...; x есть арифметическая прогрессия.

б) Решите уравнение

$$1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 + \ldots + x = 37{,}5,$$

если известно, что последовательность 1,5; 2; 2,5; 3; ...; x есть арифметическая прогрессия.

Решение. а) Если число членов последовательности 3; 5; 7; ...; x обозначить через n, то $a_n = 2n + 1$ и $\frac{3 + (2n+1)}{2} \cdot n = 399$. Далее имеем: $n^2 + 2n - 399 = 0$, $n = 19$, $x = a_{19} = 39$.

б) Решение аналогично а): $n = 10$, $x = 6$.

Ответ. а) 39; б) 6.

1.79. Заполните данную таблицу так, чтобы числа, стоящие в каждой строке и в каждом столбце, являлись последовательными членами арифметической прогрессии.

1			
			6
		6	
	9		

Решение. Обозначим разность арифметической прогрессии, члены которой записаны в первой строке, буквой x, а разность арифметических прогрессий, члены которых записаны во втором, третьем и четвертом столбцах, соответственно буквами y, z, t. Тогда таблица будет выглядеть так:

1	$1+x$	$1+2x$	$1+3x$
	$1+x+y$	$1+2x+z$	$1+3x+t$
	$1+x+2y$	$1+2x+2z$	$1+3x+2t$
	$1+x+3y$	$1+2x+3z$	$1+3x+3t$

По условию задачи

$$\begin{cases} 1+x+3y=9, \\ 1+2x+2z=6, \\ 1+3x+t=6. \end{cases}$$

Используя последнюю строку таблицы, составим четвертое уравнение:

$$1+2x+3z=\frac{(1+x+3y)+(1+3x+3t)}{2}.$$

Получим:
$$\begin{cases} x+3y=8, \\ 2x+2z=5, \\ 3x+t\;\;=5, \\ x+6z-3t=8. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $x=2$, $t=-1$, $z=0{,}5$, $y=2$.

Ответ.

1	3	5	7
4,5	5	5,5	6
8	7	6	5
11,5	9	6,5	4

1.80. В рамы квадратной формы и формы равностороннего треугольника положили одинаковые шары в один слой.

Сколько шаров уместилось в каждой раме, если в обеих рамах их было поровну, а по стороне треугольника уместилось на 14 шаров больше, чем по стороне квадрата?

Решение. Пусть x — число шаров, уместившихся по стороне квадрата, тогда x^2 — число шаров в каждой раме.

Числа шаров, уместившихся в каждом ряду треугольной рамы, можно рассматривать как последовательные члены арифметической прогрессии 1, 2, ..., $x+14$, последний член которой и число членов $x+14$.

$$x^2=\frac{1+(x+14)}{2}\cdot(x+14),$$
$$x^2-29x-210=0,\ x=35.$$
$$x^2=1225.$$

Ответ. 1225.

1.81. Четыре числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма первых трех равна —21, а сумма трех последних равна —6. Найдите эти числа.

Решение. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — члены данной арифметической прогрессии, тогда

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=-21, \\ a_2+a_3+a_4=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=-21, \\ a_1+d+a_1+2d+a_1+3d=-6; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3a_1+3d=-21, \\ 3a_1+6d=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+d=-7, \\ a_1+2d=-2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} d=5, \\ a_1+10=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} d=5, \\ a_1=-12. \end{cases}$$

Ответ. —12; —7; —2; 3.

1.82. Длины сторон прямоугольного треугольника являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью *d см*. Найдите 3 тройки чисел, выражающих длины сторон этого треугольника.

Решение. Пусть x *см* длина меньшего катета, тогда $(x+d)$ *см* длина другого катета, $(x+2d)$ *см* — длина гипотенузы. По теореме Пифагора

$$(x+2d)^2=x^2+(x+d)^2,$$
$$x^2+4xd+4d^2=x^2+x^2+2xd+d^2,$$
$$x^2-2xd-3d^2=0.$$

Решив уравнение, найдем: $x_1=3d$, $x_2=-d$. Корень x_2 не удовлетворяет условию задачи.

1. Пусть $d=2$, тогда длины сторон равны 6, 8 и 10 *см*.
2. Пусть $d=5$, тогда длины сторон — 15, 20 и 25 *см*.
3. Пусть $d=12$, тогда длины сторон — 36, 48 и 60 *см*.

1.83. Задана арифметическая прогрессия (a_n), причем сумма p первых членов S_p, сумма q первых членов S_q и $S_p = S_q$. Докажите, что $S_{p+q} = 0$.

Решение.

$$S_{p+q} = \frac{2a_1 + d(p+q-1)}{2}(p+q).$$

Но так как $S_p = S_q$, то $(2a_1 + dp - d)p = (2a_1 + dq - d)q$, или $2a_1(p-q) + d(p^2 - q^2) - d(p-q) = 0$; $(p-q)(2a_1 + d(p+q-1)) = 0$. Но $p \neq q$, следовательно, $2a_1 + d(p+q-1) = 0$. Отсюда видно, что $S_{p+q} = 0$.

1.84. Градусные меры внутренних углов многоугольника, взятые последовательно, представляют собой последовательные члены арифметической прогрессии с первым членом 58° и разностью в 25°. Найдите число сторон этого многоугольника.

Решение. Известно, что сумма внутренних углов n-угольника равна $S = 180°(n-2)$. С другой стороны, по условию задачи имеем:

$$S = \frac{2 \cdot 58 + 25(n-1)}{2} \cdot n.$$

Отсюда

$$180(n-2) = \frac{116 + 25n - 25}{2} \cdot n,$$

$$360(n-2) = 91n + 25n^2, \quad 360n - 720 = 91n + 25n^2,$$

$$25n^2 - 269n + 720 = 0.$$

$$n_1 = \frac{289}{50} = 5\frac{39}{50} \text{ (не годен)}, \quad n_2 = \frac{269-19}{50} = 5.$$

Ответ. 5.

1.85. Числовая последовательность (y_n) задана формулой n-го члена:

а) $y_n = -5 \cdot 3^{n+2}$; б) $y_n = 2^{n^2}$.

Является ли последовательность (y_n) геометрической прогрессией?

Решение. а) $y_{n+1} = -5 \cdot 3^{n+3}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{-5 \cdot 3^{n+3}}{-5 \cdot 3^{n+2}} = 3$.

Числовая последовательность с n-м членом $y_n = -5 \cdot 3^{n+2}$ является геометрической прогрессией.

б) $y_{n+1} = 2^{(n+1)^2}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1}}{2^{n^2}} = 2^{2n+1}$. Частное $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ зависит от n. Последовательность, заданная формулой $y = 2^{n^2}$, не является геометрической прогрессией.

Ответ. а) Да; б) нет.

1.86. Числовая последовательность задана формулой n-го члена:

а) $b_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $c_n=-n+5$.

Является ли последовательность арифметической прогрессией?

Решение. а) $b_{n+1}=\left(n+1-\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$. $b_{n+1}-b_n=$
$=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+\frac{1}{2}-n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}\right)=1\times$
$\times 2n=2n$.

Числовая последовательность (b_n) не является арифметической прогрессией.

б) $c_{n+1}=-(n+1)+5=-n-1+5=-n+4$.

$c_{n+1}-c_n=-n+4-(-n+5)=-1$.

Числовая последовательность (c_n) является арифметической прогрессией.

Ответ. а) Нет; б) да.

1.87. Представьте произведение в виде степени:

а) $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot\ldots\cdot 2^{31}$ (в каждом последующем множителе показатель степени на 1 больше, чем в предыдущем);

б) $5\cdot 5^3\cdot 5^5\cdot 5^7\cdot\ldots\cdot 5^{33}$ (в каждом последующем множителе показатель степени на 2 больше, чем в предыдущем);

в) $\underbrace{7^2\cdot 7^4\cdot 7^6\cdot\ \ldots\ \cdot 7^k}_{15\ \text{множителей}}$ (в каждом последующем множителе показатель на 2 больше, чем в предыдущем).

Решение.

а) $2^{1+2+3+\ldots+31}=2^{\frac{1+31}{2}\cdot 31}=2^{496}$;

б) $a_1=1$, $a_n=33$, $d=2$; $33=1+2(n-1)$, $n=17$.

$5^{1+3+5+\ldots+33}=5^{\frac{1+33}{2}\cdot 17}=5^{289}$;

в) $a_1=2$, $d=2$, $n=15$; $a_{15}=2+2\cdot 14=30$.

$7^{2+4+6+\ldots+30}=7^{\frac{2+30}{2}\cdot 15}=7^{240}$.

Ответ. а) 2^{496}; б) 5^{289}; в) 7^{240}.

1.88. Является ли последовательность (u_n) арифметической прогрессией или геометрической прогрессией, если:

а) $u_n=5n^2$; в) $u_n=5\cdot 2^{n-1}$;

б) $u_n=5n+17$; г) $u_n=n^3+5$?

Решение. а) 5, 20, 45, ...

Замечание. Для отрицательного ответа достаточно вычислить три первых члена.

б) 22; 27; 32; ...; $u_{n+1}=5(n+1)+17$; $u_{n+1}-u_n=5(n+1)+$ $+17-5n-17=5$;

в) 5; 10; 20; ...; $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\cdot 2^n}{5\cdot 2^{n-1}}=2$.

г) 6, 13, 32, ...

Ответ. а) Нет; б) да; в) да; г) нет.

1.89. Найдите номера членов геометрической прогрессии 0,3; 0,6; 1,2; ..., которые больше 15 и меньше 45.

Решение. Найдем знаменатель прогрессии $q=\frac{0,6}{0,3}=2$ и формулу n-го члена $b_n=0,3\cdot 2^{n-1}$. По условию

$$15<0,3\cdot 2^{n-1}<45,$$
$$50<2^{n-1}<150.$$

Следовательно, $2^{n-1}=64$ или $2^{n-1}=128$, откуда $n-1=6$ или $n-1=7$, т. е. $n=7$ или $n=8$.

Ответ. 7-й и 8-й.

1.90. Длины радиусов трех кругов являются последовательными членами геометрической прогрессии. Выясните, являются ли последовательными членами геометрической прогрессии (в том же порядке) длины их окружностей, площади этих кругов.

Решение. Пусть радиусы этих кругов R, Rq, Rq^2, тогда длины их окружностей $2\pi R$, $2\pi Rq$, $2\pi Rq^2$, а площади кругов: πR^2, πR^2q^2, πR^2q^4. Найдем отношения:

$$\frac{2\pi Rq}{2\pi R}=q \text{ и } \frac{2\pi R^2q^2}{2\pi Rq}=q.$$

Длины окружностей являются последовательными членами геометрической прогресии;

$$\frac{\pi R^2q^2}{\pi R^2}=q^2, \quad \frac{\pi R^2q^4}{\pi R^2q^2}=q^2,$$

площади кругов также являются последовательными членами геометрической прогрессии.

1.91. Периметр треугольника содержит 111 *см*, а длина наименьшей стороны равна 27 *см*. Найдите длину двух других сторон этого треугольника, если известно, что длины сторон треугольника представляют собой последовательные члены геометрической прогрессии.

Решение. Пусть длины сторон треугольника—члены геометрической прогрессии со знаменателем q, тогда

$$111=27+27q+27q^2,$$
$$9q^2+9q-28=0.$$

Решив квадратное уравнение, найдем: $q=\frac{4}{3}$ или $q=-\frac{7}{3}$ (не удовлетворяет условию). Отсюда, $a_2=27\cdot\frac{4}{3}=36$, $a_3=36\cdot\frac{4}{3}=48$.

Ответ. 36 *см*, 48 *см*.

1.92. Выразите произведение P_n первых n членов геометрической прогрессии (b_n) через n, b_1 и знаменатель q.

Решение.

$$P_n=b_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2\cdot\ldots\cdot b_1\cdot q^{n-1}=b_1^n(qq^2\ldots q^{n-1})=b_1^nq^{1+2+\ldots+(n-1)}=$$
$$=b_1^n\cdot q^{\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)}=b_1^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Ответ. $P_n=b_1^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

1.93. Докажите, что сумма первых двадцати четырех членов геометрической прогрессии (b_n) 1, 2, 4, 8, ... равна двадцать пятому ее члену, уменьшенному на единицу.

Решение.

$$b_n=b_1q^{n-1},\quad S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$
$$S_{24}=\frac{1\cdot2^{23}\cdot2-1}{2-1}=\frac{2^{24}-1}{1}=2^{24}-1.$$
$$b_{25}=1\cdot2^{24}=2^{24},\quad b_{25}-1=S_{24}.$$

1.94. Докажите, что в геометрической прогрессии отношение разности суммы n членов и ее n-го члена к разности той же суммы и ее первого члена равно числу, обратному знаменателю этой прогрессии.

Решение. Надо доказать, что

$$\frac{S_n-b_n}{S_n-b_1}=\frac{1}{q}.$$

Имеем:

$$\frac{S_n-b_n}{S_n-b_1}=\frac{\frac{b_n\cdot q-b_1}{q-1}-b_n}{\frac{b_nq-b_1}{q-1}-b_1}=\frac{b_n-b_1}{b_nq-b_1q}=\frac{b_n-b_1}{q(b_n-b_1)}=\frac{1}{q}.$$

1.95. Середины сторон правильного треугольника со стороной 5 *см* соединены замкнутой ломаной линией, ограничивающей треугольник. Середины сторон получившегося треугольника также соединены и так далее (рис. 1). а) Докажите, что последовательность площадей данного и полученных таким образом треугольников является геометрической прогрессией. б) Найдите, начиная с какого номера

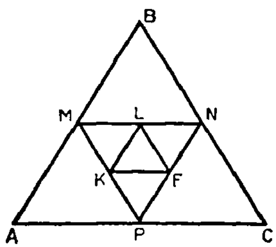


Рис. 1

площадь треугольника станет меньше $\frac{\sqrt{3}}{256}$ $см^2$.

Решение. а) $S_1 = S_{\triangle ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$, $S_2 = S_{\triangle MNP} = \frac{25\sqrt{3}}{16}$, $S_3 = S_{\triangle KLF} = \frac{25\sqrt{3}}{64}$. Очевидно, что $S_n = \frac{25\sqrt{3}}{4^n}$ и $S_{n+1} = \frac{25\sqrt{3}}{4^{n+1}}$. Отношение $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{4}$, следовательно, (S_n) — геометрическая прогрессия.

б) Решим неравенство:

$$\frac{25\sqrt{3}}{4^n} < \frac{\sqrt{3}}{256}, \quad \frac{25}{2^{2n}} < \frac{1}{2^8},$$

$$\frac{25}{2^{2n}} - \frac{1}{2^8} < 0, \quad \frac{25\cdot 2^8 - 2^{2n}}{2^{2n}\cdot 2^8} < 0,$$

$$25\cdot 2^8 - 2^{2n} < 0, \quad 2^{2n} > 25\cdot 2^8,$$

$$4^n > 6400, \quad n \geqslant 7.$$

Ответ. Начиная с $n = 7$.

1.96. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 21. Если второе число уменьшить на единицу, а третье увеличить на единицу, то новые числа (в том же порядке) будут представлять собой три последовательных числа геометрической прогрессии. Найдите эти числа.

Решение. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены арифметической прогрессии, тогда a_1, $a_2 - 1$, $a_3 + 1$ — члены геометрической прогрессии.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21, \\ \frac{a_2 - 1}{a_1} = \frac{a_3 + 1}{a_2 - 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21, \\ \frac{a_1 + d - 1}{a_1} = \frac{a_1 + 2d + 1}{a_1 + d - 1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 21, \\ \frac{7-1}{a_1} = \frac{7 + d + 1}{7 - 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + d = 7, \\ 36 = a_1(8 + d); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ 36 = (7 - d)(8 + d); \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ 36 = 56 - 8d + 7d - d^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ d^2 + d - 20 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 7 - d, \\ d = 4 \text{ или } d = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -5. \end{cases}$$

Ответ. 3; 7; 11. 12; 7; 2.

2. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

■

VI КЛАСС

2.1. Найдите одночлен, тождественно равный произведению одночленов:

а) $0{,}64x^2y^3z\cdot 1\frac{9}{16}x^2y^7z^3\cdot(-0{,}25x^2yz^4)$;

б) $0{,}125a^nb^5c^{n-1}\cdot 8a^2b^{n+1}c^3\,(-0{,}164a^5bc)$, где n — натуральное число.

Ответ. а) $-0{,}25x^6y^{11}z^8$; б) $-0{,}164a^{n+7}b^{n+7}c^{n+3}$.

2.2. Найдите одночлен, тождественно равный частному одночленов:

а) $125m^4p^5:(-0{,}25m^3p^2):25mp$;

б) $0{,}125a^{n+13}b^{n+12}:\left(-\frac{1}{8}a^4b^3\right):5a^9b^5$, где n — натуральное число.

Ответ. а) $-20p^2$; б) $-0{,}2a^nb^{n+4}$.

2.3. Найдите одночлен, тождественно равный степени выражения:

а) $(2^2x^4y^5)^3$;

б) $(-0{,}1m^np^{n+1})^4$, где n — натуральное число;

в) $(2^3\cdot 3^2a^nb^{n+1}c)^2$, где n — натуральное число;

г) $(5\cdot 2^2x)^3$.

Ответ. а) $64x^{12}y^{15}$; б) $0{,}0001m^{4n}p^{4n+4}$; в) $5184a^{2n}b^{2n+2}c^2$; г) $8000x^3$.

2.4. Приведите к стандартному виду одночлена выражение:

а) $\frac{(a^2b^3c^2)^4\cdot(a^3b)^3}{(ab^2c^4)^2}$;

б) $\frac{(2xy)^3\cdot(x^4y^2z)^2}{4x^2y^3z}$;

в) $\frac{(3^nx^2y^{n+1})^2\cdot(xy)^n}{(3x^2y^n)^2}$, где n — натуральное число.

Ответ. а) $a^{15}b^{11}$; б) $2x^9y^4z$; в) $3^{2n-2}x^ny^{n+2}$.

2.5: Докажите, что значение выражения не зависит от n:

а) $\frac{6^{n+1}\cdot 6^{n+2}}{6^{2n}}$, где $n \in N$; б) $\frac{5^{2n+3}\cdot 5^{2n-1}}{5^{4n+2}}$, где $n \in N$.

2.6. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных степеней числа 4 кратна 84.

Решение. $4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} = 4^{n-1}(4+4^2+4^3) = 4^{n-1}\cdot 84$. $n-1=0$ или $n-1 \in N$, поэтому $4^{n-1} \in N$.

2.7. Из двух данных уравнений составьте третье, исключив переменную a:

а) $2x+a=y$ и $y-a=3x$;

б) $y^2-x^2=2a$ и $5y^2+3a=0$.

Решение. а) $a=y-2x$ и $a=y-3x$, $y-2x=y-3x$.

б) $a=\frac{y^2-x^2}{2}$ и $a=\frac{-5y^2}{3}$, $\frac{y^2-x^2}{2}=-\frac{5y^2}{3}$.

2.8. Используя данные уравнения, составьте третье, выразив переменную b через a:

а) $a=2x-7$, $\quad b=2x+3$;

б) $a=8-8x$, $\quad b=3x-2$;

в) $a=-4x^2+5$, $\quad b=11-8x^2$;

г) $a=(x+2)(x+3)$, $\quad b=x^2+5x+7$.

Решение. а) Из первого уравнения выразим $2x$ через a и подставим во второе уравнение: $2x=a+7$; $b=a+10$;

б) $x=\frac{8-a}{8}$, $b=1-\frac{3}{8}a$;

в) $4x^2=5-a$, $b=11-2(5-a)$, $b=1+2a$;

г) $a=x^2+5x+6$, $x^2+5x=6-a$, $b=6-a+7$, $b=13-a$.

2.9. В трехзначном числе a сотен, b десятков и c единиц. Составьте и упростите:

а) сумму данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке;

б) разность данного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

Решение. а) $(100a+10b+c)+(100c+10b+a)=101a+20b+$ $+101c$;

б) $(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99a-99c=99(a-c)$.

2.10. Докажите, что разность между числом вида $\overline{1ab1}$ и числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, делится на 90.

Решение. $1000+100a+10b+1-1000-100b-10a-1=$ $=90(a-b)$.

2.11. В двузначном числе a десятков и b единиц. Составьте и упростите разность трехзначного числа, которое получится из этого двузначного, если между его цифрами поставить цифру 0, и данного двузначного.

Решение. $(100a+b)-(10a+b)=90a$.

2.12. Найдите простое двузначное число, которое можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Решение. Очевидно, что если $a=b+c$, где a, b и c — простые числа, то b или c должно равняться 2 (если b и c отличны от 2, то разность $a-b$ или $a-c$ будет кратна 2, чего быть не может, так как b и c — простые числа, отличные от 2).

Теперь задача сводится к отысканию двузначных чисел, которые отличаются друг от друга на 2: большее из них можно представить в виде суммы меньшего и числа 2.

Задача имеет несколько решений. Вот некоторые из них:

$$13=11+2;\ \ 19=17+2;\ \ 31=29+2;\ \ 43=41+2.$$

2.13. а) Докажите, что при любом значении x значение выражения

$$(3x-4)(7x+8)-1{,}5x(24x+4)-5(1-2x)$$

отрицательно.

б) Докажите, что при любом значении x значение выражения

$$(15x-1)^2+3(7x+3)(x+1)-(x^2-73)$$

положительно.

Решение. а) $21x^2-4x-32-36x^2-6x-5+10x=-15x^2-37$, $-15x^2-37<0$ при любом значении x.

б) $225x^2-30x+1+21x^2+30x+9-x^2+73=245x^2+83$. При любом значении x значение выражения $245x^2+83$ положительно.

2.14. Докажите, что произведение трех последовательных целых чисел кратно трем.

Решение. Нужно показать, что при любом $n\in Z$ произведение $n(n+1)(n+2)$ кратно 3.

Каждое целое число при делении на 3 может давать в остатке либо 0 (т. е. делиться на 3), либо 1, либо 2. Если n делится на 3, то и произведение $n(n+1)(n+2)$ делится на 3. Если $n=3k+1$, то на 3 делится множитель $n+2$, равный $3k+3$. Если $n=3k+2$, то на 3 делится множитель $n+1$.

2.15. Докажите, что сумма произведения трех последовательных целых чисел и среднего числа есть куб среднего числа.

Решение. Пусть m — среднее число; тогда большее число равно $m+1$, а меньшее $m-1$.

Составим сумму и преобразуем ее: $(m+1)m(m-1)+m=$ $=m(m^2-1)+m=m^3-m+m=m^3$.

2.16. Докажите, что значение выражения

а) $(7{,}5x-2y)^2+30x(y-x^2)-(2y-15)(2y+15)$;

б) $(1{,}3x-y)(y+1{,}3x)+(0{,}5x+y)^2-4x(0{,}25y-1)$

не зависит от значения переменной y. Найдите значение выражения при $x=-10$.

Решение. а) $56{,}25x^2-30xy+4y^2+30xy-30x^3-4y^2+225=$ $=-30x^3+56{,}25x^2+225$.

При $x=-10$ получаем: $30\,000+5\,625+225=35\,850$.

б) $1{,}69x^2-y^2+0{,}25x^2+xy+y^2-xy+4x=1{,}94x^2+4x$.

При $x=-10$ получаем: $194-40=154$.

Ответ. а) 35 850; б) 154.

2.17. Докажите, что если каждое из чисел a и b не кратно трем, то сумма их квадратов при делении на 3 дает остаток 2.

Решение. Для доказательства необходимо и достаточно рассмотреть три случая:

1) a и b — числа, дающие при делении на 3 остаток 1: $a=3m+1$; $b=3n+1$. Тогда $a^2+b^2=(3m+1)^2+(3n+1)^2=9m^2+$ $+6m+1+9n^2+6n+1=3(3m^2+2m+3n^2+2n)+2$, следовательно, a^2+b^2 при делении на 3 дает остаток 2.

2) a и b — числа, одно из которых при делении на 3 дает остаток 1, другое — остаток 2: $a=3m+1$; $b=3n+2$. Тогда $a^2+b^2=(3m+1)^2+(3n+2)^2=9m^2+6m+1+9n^2+12n+4=$ $=3(3m^2+2m+3n^2+4n+1)+2$, следовательно, a^2+b^2 при делении на 3 дает остаток 2.

3) a и b — числа, каждое из которых при делении на 3 дает остаток 2: $a=3m+2$; $b=3n+2$. Тогда $a^2+b^2=(3m+2)^2+$ $+(3n+2)^2=9m^2+12m+4+9n^2+12n+4=3(3m^2+4m+3n^2+$ $+4n+2)+2$; следовательно, a^2+b^2 при делении на 3 дает остаток 2.

2.18. Упростите выражение

$$(6x+1)^2-(3x-4)(3x+4)-1{,}5(18x^2+1)+2{,}5$$

и укажите, истинны ли высказывания: «При любом целом значении x значение выражения есть: а) число четное; б) число, кратное 3; в) число, кратное 4; г) число, кратное 6; д) число, дающее при делении на 12 остаток 6».

Решение. $36x^2+12x+1-9x^2+16-27x^2-1{,}5+2{,}5=12x+$ $+18$. Истинны высказывания а, б, г, д.

2.19. Делится ли на 5 значение выражения $(5n+1)^2-36$

а) при $n=147$;

б) при любом натуральном n?

Решение. $(5n+1)^2-36=25n^2+10n+1-36=25n^2+10n-$ $-35=5(5n^2+2n-7)$ делится на 5 при любом натуральном n, следовательно, и при $n=147$.

2.20. Делится ли на 3 значение выражения $(3n+5)^2-16$

а) при $n=121$;

б) при любом натуральном n?

Решение. $(3n+5)^2-16=3(3n^2+10n+3)$ делится на 3 при любом натуральном n, следовательно, и при $n=121$.

2.21. Приведите к виду $a(x-1)^2+b(x-1)+c$, где a, b и c — числа, многочлен:

а) $2x^2-3x+5$; б) $-3x^2+7x-1$.

Решение. а) I способ. Преобразуем выражение $a(x-1)^2+$ $+b(x-1)+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c=ax^2+x(b-2a)+a-b+c$.

$2x^2-3x+5=ax^2+x(b-2a)+a-b+c$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} a=2, \\ b-2a=-3, \\ a-b+c=5. \end{cases}$$

$$2x^2-3x+5=2(x-1)^2+(x-1)+4.$$

II способ. Чтобы получилось $2x^2$, очевидно, надо, чтобы $a=2$:

$$2(x-1)^2=2x^2-4x+2;$$

чтобы получить $-3x$, надо к уже имеющимся $-4x$ прибавить x, значит, $b=1$:

$$(2x^2-4x+2)+1\cdot(x-1)=2x^2-3x+1;$$

теперь найдем $c=5-1=4$.

Получили: $2x^2-3x+5=2(x-1)^2+(x-1)+4$.

б) I способ. $-3x^2+7x-1=ax^2+x(b-2a)+a-b+c$. Имеем систему:

$$\begin{cases} a=-3, \\ b-2a=7, \\ a-b+c=-1. \end{cases}$$

$$-3x^2+7x-1=-3(x-1)^2+(x-1)+3.$$

II способ. Чтобы получилось $-3x^2$, очевидно, надо, чтобы $a=-3$:

$$-3(x-1)^2=-3x^2+6x-3;$$

чтобы получить $7x$, надо к уже имеющимся $6x$ прибавить x, значит, $b=1$:

$$(-3x^2+6x-3)+1\cdot(x-1)=-3x^2+7x-4;$$

теперь найдем $c=-1-(-4)=3$.

Получили: $-3x^2+7x-1=-3(x-1)^2+(x-1)+3$.

2.22. Расположите по степеням двучлена $x+1$ многочлен:

а) x^3+5x^2+8x+6;

б) $2x^3+7x^2+11x+7$.

Решение. а) Положим $x^3+5x^2+8x+6=A(x+1)^3+$ $+B(x+1)^2+C(x+1)+D$, тогда $x^3+5x^2+8x+6=Ax^3+$ $+x^2(3A+13)+x(3A+2B+C)+A+B+C+D$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} A=1, \\ 3A+B=5, \\ 3A+2B+C=8, \\ A+B+C+D=6. \end{cases}$$

Отсюда $A=1,\ B=2,\ C=1,\ D=2.$

$$x^3+5x^2+8x+6=(x+1)^3+2(x+1)^2+(x+1)+2.$$

б) Положим $2x^3+7x^2+11x+7=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D$, тогда $2x^3+7x^2+11x+7=Ax^3+x^2(3A+B)+x(3A+2B+C)+A+B+C+D$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} A=2, \\ 3A+B=7, \\ 3A+2B+C=11, \\ A+B+C+D=7. \end{cases}$$

$$A=2,\ B=1,\ C=3,\ D=1.$$

$$2x^3+7x^2+11x+7=2(x+1)^3+(x+1)^2+3(x+1)+1.$$

2.23. Докажите, что если число имеет вид $2m^2+n^2$, то его квадрат может быть представлен в виде $2a^2+b^2$, где a, b, m, n — не равные между собой числа.

Решение. $(2m^2+n^2)^2=4m^4+4m^2n^2+n^4=4m^4-4m^2n^2+n^4+4m^2n^2+4m^2n^2=(4m^4-4m^2n^2+n^4)+8m^2n^2=(2m^2-n^2)^2+8m^2n^2=2(4m^2n^2)+(2m^2-n^2)^2=2a^2+b^2$, где $a=2mn$, $b=2m^2-n^2$.

2.24. Докажите, что значение многочлена n^3+3n^2+5n+3 при любом целом n делится на 3.

Решение. $n^3+3n^2+5n+3=n^3+3(n^2+2n+1)-n=(n^3-n)+3(n^2+2n+1)=n(n+1)(n-1)+3(n+1)^2=(n-1)n(n+1)+3(n+1)^2$.

Выражение $(n-1)n(n+1)$ делится на 3 как произведение трех последовательных целых чисел; следовательно, данное число есть сумма двух чисел, каждое из которых кратно 3, а потому оно делится (при любом n) на 3.

2.25. Покажите, что если $x=2n+1$, где $n\in Z$, то значение многочлена x^3+3x^2-x-3 кратно 48.

Решение: $x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-1)=(2n+1+3)((2n+1)^2-1)=(2n+4)2n(2n+2)=8n(n+1)(n+2)$. Произведение $n(n+1)(n+2)$ кратно 3 и кратно 2, следовательно, оно кратно 6. Поэтому $8n(n+1)(n+2)$ кратно 48.

2.26. Выразите через $a+b$ и ab выражение:

а) a^2+b^2; б) $(a-b)^2$.

Решение. а) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;
б) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

2.27. Разложите многочлен на множители:
а) $5xy^3+30x^2z^2-6x^3yz-25y^2z$;
б) $15m^3n^2p-28p^2nq^3+35mn^3q^2-12m^2p^3q$;
в) $8abc^3-3a^2b^2c-15a^3b^3+40a^2b^2c^2$.
Ответ. а) $(6x^2z-5y^2)(5z-xy)$;
б) $(5mn^2-4p^2q)(3m^2p+7nq^2)$;
в) $ab(8c^2-3ab)(c+5ab)$.

2.28. Представьте выражение $2a^2+2b^2$ в виде суммы квадратов двух многочленов.
Решение. $2a^2+2b^2=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)=(a+b)^2+$ $+(a-b)^2$.

2.29. Представьте выражение $4ab$ в виде разности квадратов двух многочленов.
Решение. $4ab=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=(a+b)^2-$ $-(a-b)^2$.

2.30. Представьте многочлен в виде произведения:
а) $a^4-9a^3+81a-81$;
б) $m^4-6m^3+54m-81$;
в) $x^4-4x^3+16x-16$.
Ответ. а) $(a^2-9)(a^2-9a+9)$; б) $(m-3)^3(m+3)$;
в) $(x+2)(x-2)^3$.

2.31. Разложите на множители
а) $a^2(b-3)^2+2a(b-3)+1$;
б) $x^2(y^2-4)^2-6x(y^2-4)+9$.
Решение. а) $(a(b-3)+1)^2=(ab-3a+1)(ab-3a+1)$;
б) $(x(y^2-4)-3)^2=(xy^2-4x-3)(xy^2-4x-3)$.

2.32. Приведите многочлен к виду $(ax+b)^2-c^2$ (a, b и c — числа) и разложите его на множители:

а) x^2-2x-3;	г) $4x^2+4x-8$;
б) $5-6x+x^2$;	д) $25x^2+10x-15$;
в) $x^2+x-\frac{3}{4}$;	е) $\frac{1}{9}x^2+2x-16$.

Решение.
а) $(x-1)^2-2^2=(x-3)(x+1)$;
б) $(x-3)^2-2^2=(x-5)(x-1)$;
в) $(x+0{,}5)^2-1^2=(x+1{,}5)(x-0{,}5)$;
г) $(2x+1)^2-3^2=(2x-2)(2x+4)$;
д) $(5x+1)^2-4^2=(5x-3)(5x+5)$;
е) $\left(\frac{1}{3}x+3\right)^2-5^2=\left(\frac{1}{3}x+8\right)\left(\frac{1}{3}x-2\right)$.

2.33. Представьте выражение $2(3a-2)^2-3a(3a-2)+1$ в виде квадрата двучлена.

Решение. I способ. $2(3a-2)^2-3a(3a-2)+1=((3a-2)^2-2(3a-2)+1)+((3a-2)^2-3a(3a-2)+2(3a-2))=((3a-2)-1)^2+(3a-2)(3a-2-3a+2)=(3a-3)^2$.

II способ. $2(3a-2)^2-3a(3a-2)+1=18a^2-24a+8-9a^2+6a+1=9a^2-18a+9=(3a-3)^2$.

2.34. Найдите четыре натуральных последовательных четных числа, зная, что сумма их квадратов больше суммы квадратов заключенных между ними нечетных чисел на 37.

Решение. Пусть последовательные четные числа $2n-2$; $2n$; $2n+2$; $2n+4$. Тогда нечетные числа, расположенные между ними,

$$2n-1;\ 2n+1;\ 2n+3.$$

Составим разность и преобразуем ее:

$$(2n-2)^2-(2n-1)^2+4n^2+(2n+2)^2-(2n+1)^2+(2n+4)^2-(2n+3)^2=-4n+3+4n^2+4n+3+4n+7=4n^2+4n+13.$$

Так как по условию эта разность равна 37, то получаем уравнение:

$$4n^2+4n+13=37,\quad n^2+n-6=0,$$
$$n^2+3n-2n-6=0,$$
$$(n-2)(n+3)=0,$$
$$n=-3 \text{ или } n=2.$$

Данной задаче удовлетворяет натуральное значение n, т. е. $n=2$.

Ответ. 2; 4; 6; 8.

2.35. Докажите, что любое нечетное натуральное число, большее 1, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Решение. Пусть $2n+1$ — любое нечетное натуральное число, большее 1. Тогда $2n+1=2n+1+n^2-n^2=(n+1)^2-n^2$.

2.36. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, увеличенное на 1, является квадратом целого числа.

Решение. $(n-1)n(n+1)(n+2)+1=n^4+2n^3-n^2-2n+1=(n^4+2n^3+n^2)-(2n^2+2n)+1=(n^2(n+1)^2)-2n(n+1)+1=(n(n+1)-1)^2$.

2.37. Из суммы кубов трех последовательных натуральных чисел вычли их утроенное произведение и полученный результат разделили на среднее арифметическое этих чисел. Какое число получилось?

Решение.

$$\frac{3(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3-3n(n+1)(n+2))}{n+(n+1)+(n+2)}=\frac{9n+9}{n+1}=9.$$

2.38. Докажите, что выражение

$$x(8x+3y)^2-2y\left(6x+\frac{1}{4}y\right)^2$$

тождественно равно кубу двучлена.

Решение. $x(8x+3y)^2-2y(6x+0{,}25y)^2=64x^3-24x^2y+3xy^2-0{,}125y^3=(4x-0{,}5y)^3$.

■

VII КЛАСС

2.39. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{5a+5a^2}{4-9a^2}\cdot\left(\frac{3}{a+1}+\frac{2}{a^2+a}\right)$;

б) $\left(\frac{x}{6-3x}+\frac{x}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}\right):\frac{x-4}{x-2}$;

Ответ. а) $\frac{5}{2-3a}$; б) $\frac{2x}{3(x-4)}$.

2.40. Представьте в виде дроби произведение:

а) $\frac{4m+4n}{m^2+4m-n^2-4n}\cdot\frac{16-m^2-2mn-n^2}{m^2+mn}$;

б) $\frac{a^2+ab}{b^2-5b+5a-a^2}\cdot\frac{a^2-10a+25-b^2}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{25a^2-10ab-4b-4}{9b^2-30ab+25a^2}\cdot\frac{25a^2-9b^2}{2b-5a+2}$.

Ответ. а) $\frac{4(4-m-n)}{m^2-mn}$; б) $\frac{a(b-a+5)}{a^2-2ab+b^2}$;

в) $\frac{(5a+3b)(5a+2)}{3b-5a}$.

2.41. Найдите значение выражения $1-\frac{x^3-1}{x^{-1}-1}:\frac{1+x+x^2}{x}$ при $x=\frac{3}{4}$.

Решение. При заданном значении x значение данного выражения существует. Преобразуем его.

$$1-\frac{(x^3-1)\cdot x^2}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)}=1+x^2.$$

При $x=\frac{3}{4}$ $\quad 1+x^2=1+\frac{9}{16}=1\frac{9}{16}$.

Ответ. $1\frac{9}{16}$.

2.42. Известно, что при некоторых значениях a и b значение разности $a-b$ равно 7. Найдите при тех же значениях a и b

значение выражения:

а) $\frac{a^2-2ab+b^2}{14}$;

б) $a(a+2)+b(b-2)-2ab$;

в) $a^2(a+1)-b^2(b-1)+ab-3ab(a-b+1)$;

г) $\frac{2a-b}{a+7}+\frac{2b-a}{b-7}$.

Решение. а) $\frac{(a-b)^2}{14}=\frac{7^2}{14}=3{,}5$;

б) $a(a+2)+b(b-2)-2ab=a^2+2a+b^2-2b-2ab=$
$=(a^2-2ab+b^2)+(2a-2b)=(a-b)^2+2(a-b)=7^2+2\cdot7=63$;

в) $a^2(a+1)-b^2(b-1)+ab-3ab(a-b+1)=a^3+a^2-b^3+b^2+$
$+ab-3a^2b+3ab^2-3ab=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(a^2-2ab+b^2)=$
$=(a-b)^3+(a-b)^2=7^3+7^2=7^2\cdot8=392$;

г) $\frac{2a-b}{a+7}+\frac{2b-a}{b-7}=\frac{a+(a-b)}{a+7}+\frac{b+(b-a)}{b-7}=\frac{a+7}{a+7}+\frac{b-7}{b-7}=2.$

Ответ. а) 3,5; б) 63; в) 392; г) 2.

2.43. Докажите, что выражения

$$M_1=\frac{\frac{1}{a-3}-\frac{1}{a+3}}{\frac{1}{a-3}+\frac{1}{a+3}}-\frac{a+3}{a} \quad \text{и} \quad M_2=\frac{\frac{1}{a^2-9}-\frac{1}{a^2+9}}{\frac{1}{a^2-9}+\frac{1}{a^2+9}}-\frac{a^2+9}{a^2}$$

тождественно равны.

Решение.

$$M_1=\frac{(a+3)-(a-3)}{(a+3)+(a-3)}-\frac{a+3}{a}=\frac{6}{2a}-\frac{a+3}{a}=\frac{3-a-3}{a}=-1,$$
$$M_2=\frac{(a^2+9)-(a^2-9)}{(a^2+9)+(a^2-9)}-\frac{a^2+9}{a^2}=\frac{18}{2a^2}-\frac{a^2+9}{a^2}=\frac{9-a^2-9}{a^2}=-1.$$

Следовательно, выражения M_1 и M_2 тождественно равны.

2.44. Докажите, что при всех значениях переменных, при которых выражение имеет смысл, его значение не зависит от значения входящих в него переменных:

а) $\frac{3x}{2y-2x}+\frac{3y}{x+y}+\frac{3y(3y-x)}{2x^2-2y^2}$;

б) $\left(\frac{1}{a^2+2ab+b^2}-\frac{1}{a^2-2ab+b^2}\right)\cdot\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{ab}$.

Решение.

а) $\frac{3x^2+3xy+6y^2-6xy-9y^2+3xy}{2y^2-2x^2}=\frac{3x^2-3y^2}{2y^2-2x^2}=-1{,}5$;

б) $\frac{-4ab\cdot(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(a-b)^2\cdot ab}=-4$.

2.45. Представьте, если возможно, в виде суммы дробей с разными знаменателями дробь:

а) $\frac{10x+3}{4x^2-9}$; б) $\frac{5x-5}{x^2-25}$; в) $\frac{48-2a}{16-a^2}$.

Решение. Задача может быть решена не однозначно. Приводим одно из возможных решений.

а) $\frac{10x+3}{4x^2-9}=\frac{6x+4x+9-6}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{6x+9+4x-6}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{6x+9}{(2x-3)(2x+3)}+$
$+\frac{4x-6}{(2x-3)(2x+3)}=\frac{3}{2x-3}+\frac{2}{2x+3}$;

б) $\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x+5}$; в) $\frac{5}{4-a}+\frac{7}{4+a}$.

2.46. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{m}{m^2+2m+4}+\frac{m^2+8}{m^3-8}-\frac{1}{m-2}\right)\cdot\left(\frac{m^2}{m^2-4}-\frac{2}{2-m}\right)\cdot(mn^2+2n^2)$ при $m=1,3$ и $n=1,7$;

б) $\left(\frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2+2ab+b^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)(a^3b^2-a^2b^3)$ при $a=1,2$ и $b=0,9$;

в) $(a^2-4x^2)\left(\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x-6}{x-2}\right)\right)$ при $x=1,1$ и $a=5,6$.

Решение.

а) $\frac{m(m-2)+m^2+8-m^2-2m-4}{m^3-8}\cdot\frac{m^2+2(m+2)}{m^2-4}\cdot(mn^2+2n^2)=$
$=\frac{m^2-2m+m^2+8-m^2-2m-4}{m^3-8}\cdot\frac{m^2+2m+4}{m^2-4}\cdot(mn^2+2n^2)=$
$=\frac{m^2-4m+4}{m^3-8}\cdot\frac{m^2+2m+4}{m^2-4}\cdot(mn^2+2n^2)=\frac{(m+2)n^2}{m+2}=n^2.$

При $m=1,3$ и $n=1,7$ значение данного выражения существует и равно $n^2=2,89$.

б) $\left(\frac{2(a+b)}{(a+b)^3ab}+\frac{a^2+b^2}{(a^2+2ab+b^2)a^2b^2}\right)\cdot a^2b^2(a-b)=\frac{2ab+a^2+b^2}{(a+b)^2a^2b^2}\times$
$\times a^2b^2(a-b)=a-b.$

При $a=1,2$ и $b=0,9$ значение данного выражения существует и равно $a-b=0,3$.

в) $(a^2-4x^2)\cdot\left(\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{x+3}{(2x-a)(x+3)}\right)=2a-a-2x=a-2x$. При $x=1$ и $a=5,6$ значение данного выражения существует и равно $a-2x=3,6$.

2.47. Найдите значение выражения

$$\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}$$

при $x=4,0016$.

Решение. Так как заданное значение $x>1$, то и $x^2>1$. Поэтому $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}=\frac{x^2-1+x^2}{2x^2-1}=\frac{2x^2-1}{2x^2-1}=1$.

При любом значении $x>1$ значение данного выражения равно 1, следовательно, оно равно 1 и при $x=4,0016$.

Ответ. 1.

2.48. Упростите выражение $\frac{a|a-3|}{a^2-a-6}$.

Решение. 1) $a^2-a-6=a^2-3a+2a-6=(a-3)(a+2)$.

2) $\frac{a|a-3|}{a^2-a-6}=\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+2)}$.

Если $a>3$, то $\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+2)}=\frac{a}{a+2}$.

Если $a<3$, то $\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+2)}=-\frac{a}{a+2}$.

2.49. Докажите, что $a+b+1,5=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, если $\frac{a^2-2b}{a(1-2b)}=$ $=\frac{b^2-2a}{b(1-2a)}$, где $a\neq b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Решение.

$$\frac{a^2-2b}{a(1-2b)}=\frac{b^2-2a}{b(1-2a)},$$
$$b(a^2-2b)(1-2a)-(b^2-2a)\,a(1-2b)=0,$$
$$(a^2-2b)(b-2ab)-(b^2-2a)(a-2ab)=0,$$
$$a^2b-2a^3b-2b^2+4ab^2-ab^2+2ab^3+2a^2-4a^2b=0,$$
$$(a-b)(ab+2a+2b)=2ab(a-b)(a+b+2).$$

Так как $a-b\neq 0$, то имеем:

$$ab+2a+2b=2ab(a+b+2).$$

Так как $2ab\neq 0$, то имеем:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=a+b+2,$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a+b+1,5.$$

2.50. Разложите на множители: а) x^4+x^2+1, б) $y^{12}+y^6+1$.

Решение. а) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=$ $=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

б) Воспользуемся тождеством $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Положим $x=y^3$, получим:

$$y^{12}+y^6+1=(y^6+y^3+1)(y^6-y^3+1).$$

2.51. Внесите множитель под знак корня:

а) $(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$, если $x>1$;

б) $(a-3)\sqrt{\frac{2a}{a^2-6a+9}}$, если $0<a<3$.

Решение. а) Так как $x>1$, то имеем:

$$(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}}=-(x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}=-\sqrt{\frac{x(x-1)^2}{x-1}}=-\sqrt{x(x-1)}.$$

б) Так как $0<a<3$, то имеем:

$$(a-3)\sqrt{\frac{2a}{(a-3)^2}}=\sqrt{\frac{2a(a-3)^2}{(a-3)^2}}=\sqrt{2a}.$$

Ответ. а) $-\sqrt{x(x-1)}$; б) $\sqrt{2a}$.

2.52. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{(1-a)^3}$, если $a\leqslant 1$;

б) $\sqrt{a^3(a-3)^5}$, если $a\geqslant 5$;

в) $\sqrt{x^5(x-7)^2}$, если $0<x<7$;

г) $\sqrt{a^3(a-2)^2}$, если $0<a<3$.

Ответ. а) $1-a\sqrt{1-a}$; б) $a(a-3)^2\sqrt{a(a-3)}$;

в) $x^2(7-x)\sqrt{x}$; г) $a(a-2)\sqrt{a}$, если $2\leqslant a<3$ и $a(2-a)\sqrt{a}$, если $0<a<2$.

2.53. Докажите, что $\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, если $a>b>0$ и $a^2+b^2=6ab$.

Решение.

1) $$\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}.$$

2) По условию $a^2+b^2=6ab$, тогда

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=8ab,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=4ab.$$

Так как $a+b>0$ и $a-b>0$, то

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\frac{8ab}{4ab}=2.$$

3) Возвращаясь к первой части решения, имеем:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

что и требовалось доказать.

2.54. Представьте выражение в виде дроби с рациональным знаменателем:

а) $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$; б) $\frac{2}{1+2\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Ответ. а) $\frac{5+\sqrt{2}}{23}$; б) $\frac{4\sqrt{3}-2}{11}$; в) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2.55. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{(b+2)^2-8b}}{\sqrt{b}-\frac{2}{\sqrt{b}}}$ при $b=0{,}0025$.

Решение. Данное значение b таково, что $b>0$, $b\neq 2$, поэтому

$$\frac{\sqrt{(b+2)^2-8b}}{\sqrt{b}-\frac{2}{\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{(b-2)^2}}{b-2}\cdot\sqrt{b}=\frac{2-b}{b-2}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{b}.$$

При $b=0{,}0025$ $-\sqrt{b}=-\sqrt{0{,}0025}=-0{,}05$.

Ответ. $-0{,}05$.

2.56. Преобразуйте произведение:

а) $\left(\sqrt{ab}-\frac{1}{b}\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; если $a>0$, $b>0$;

б) $\left(x\sqrt{7xy}-x^2y\sqrt{\frac{3}{xy}}\right)\cdot\left(\sqrt{7x^3y}-2x\sqrt{xy}+x^2\sqrt{\frac{3y}{x}}\right)$, если $x>0$, $y>0$.

Решение. а) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2b}{b}}-\frac{a}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b}{b}}+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{ab^2}{a}}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{ab^2}{a}}=$

$=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a}-\frac{b}{a}=\frac{(b-1)(a^3+b^3)}{ab^2}$.

Ответ. а) $\frac{(b-1)(a^3+b^3)}{ab^2}$;

б) $2x^3y(2-\sqrt{7}+\sqrt{3})$.

2.57. Преобразуйте частное:

а) $(a-b):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, если $a>0$, $b>0$;

б) $(x+\sqrt{x}+y-\sqrt{y}-2\sqrt{xy}):(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, если $x>0$, $y>0$.

Решение. а) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

б) $\frac{x+\sqrt{x}+y-\sqrt{y}-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+1)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+1$.

Ответ. а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; б) $\sqrt{x}-\sqrt{y}+1$.

2.58. Докажите, что при всех $a>0$ и $b>0$ имеет место тождество:

$$(2\sqrt{ab}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b}):\sqrt{ab}=2-\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Решение. I способ.

$$\frac{2\sqrt{ab}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}(2-\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}==2-\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

II способ. $(2\sqrt{ab}+\sqrt{b^2a}-\sqrt{a^2b}):\sqrt{ab}=2+\sqrt{b}-\sqrt{a}$.

2.59. Сократите дробь:

а) $\frac{n\sqrt{m}-m\sqrt{n}}{\sqrt{mn}}$, $m>0$, $n>0$;

б) $\dfrac{ab-bc}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}$, $ab>0$, $bc>0$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{\sqrt{x-y}}$, $x>y>0$.

Ответ. а) $\sqrt{n}-\sqrt{m}$; б) $\sqrt{ab}-\sqrt{bc}$; в) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

2.60. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Ответ: а) 14; б) $2\sqrt{3}$.

2.61. Сократите, если возможно, дробь:

а) $\dfrac{x^4+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$; б) $\dfrac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$.

Решение.

а) $\dfrac{x^4+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}=\dfrac{x^4+2x^2+1-2x^2}{x^2+x\sqrt{2}+1}=\dfrac{(x^2+1)^2-2x^2}{x^2+x\sqrt{2}+1}=$

$=\dfrac{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)}{x^2+x\sqrt{2}+1}=x^2-x\sqrt{2}+1$;

б) $\dfrac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}=\dfrac{x^2-x+1}{x^4+2x^2+1-x^2}=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)^2-x^2}=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}=$

$=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

2.62. Докажите, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $\sqrt{abc}>2$ имеет место тождество

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}-4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Решение. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}-4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}-2}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{abc+4-4\sqrt{abc}}{a}}}{\sqrt{abc}-2}=$

$=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(\sqrt{abc}-2)^2}{a}}}{\sqrt{abc}-2}=\dfrac{\sqrt{abc}-2}{\sqrt{a}(\sqrt{abc}-2)}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

2.63. Найдите значение выражения:

а) $x^2+12x-14$ при $x=-6+5\sqrt{2}$;

б) $2x^2+x+16$ при $x=-1+\sqrt{2}$;

в) $x^2-18x+76$ при $x=9-\sqrt{5}$;

г) $3x^2-x+15$ при $x=\sqrt{3}-4$.

Решение.

а) $x^2+12x-14=(x+6)^2-50=(5\sqrt{2})^2-50=0$;

б) $2-4\sqrt{2}+4-1+\sqrt{2}+16=21-3\sqrt{2}$;

в) $x^2-18x+76=(x-9)^2-5=(\sqrt{5})^2-5=0$;

г) $9-24\sqrt{3}+48-\sqrt{3}+4+15=76-25\sqrt{3}$.

Ответ. а) 0; б) $21-3\sqrt{2}$; в) 0; г) $76-25\sqrt{3}$.

2.64. Сократите дробь:

а) $\frac{2x^2-13x+21}{2x^2+3x-35}$; б) $\frac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}$;

в) $\frac{x^n+2x^{n-1}-3x^{n-2}}{x^2+5x+6}$, где $n \in N$ и $n \geqslant 2$.

Ответ. а) $\frac{x-3}{x+5}$; б) $\frac{2a+3}{a-2}$; в) $\frac{x^{n-2}(x-1)}{x+2}$.

2.65. Разложите многочлен на множители:

а) a^4-5a^2+4; г) a^4+4;

б) $4a^4-5a^2+1$; д) a^4+a^2+1;

в) $100a^4-41a^2+4$; е) a^8+a^4+1.

Решение.

а) Введем подстановку $x=a^2$; тогда трехчлен a^4-5a^2+4 примет вид x^2-5x+4. 1 и 4 — корни многочлена x^2-5x+4:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4).$$

$$a^4-5a^2+4=(a^2-1)(a^2-4)=(a-1)(a+1)(a-2)(a+2).$$

б) Пусть $x=a^2$, тогда $4x^2-5x+1=0$, $x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}$, 1 и $\frac{1}{4}$ — корни многочлена $4x^2-5x+1$.

$$4x^2-5x+1=4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right),$$

$$4a^4-5a^2+1=4(a^2-1)\left(a^2-\frac{1}{4}\right)=(a-1)(a+1)(2a-1)(2a+1).$$

в) Пусть $x=a^2$, тогда $100x^2-41x+4=0$, $x=\frac{41\pm\sqrt{1681-1600}}{200}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{4}{25}$ — корни многочлена $100x^2-41x+4$.

$$100a^4-41a^2+4=100\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\left(a^2-\frac{4}{25}\right)=100\left(a-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{2}{5}\right)\left(a+\frac{2}{5}\right)=(2a+1)(2a-1)(5a-2)(5a+2).$$

г) $a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$.

д) $a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.

е) $a^8+a^4+1=a^8+2a^4+1-a^4=(a^4+1)^2-(a^2)^2=(a^4-a^2+1)(a^4+a^2+1)$.

2.66. Сократите дробь:

а) $\frac{2a^2+4ab-6b^2}{a^2+5ab+6b^2}$; в) $\frac{a^2+2ab-8b^2}{3a^2-5ab-2b^2}$;

б) $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{2a^2-ab-3b^2}$; г) $\frac{4a^2+4ab+b^2}{3b^2-5ab+2a^2}$.

Решение. Найдем корни трехчленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби, и разложим их на множители.

а) $\frac{2(a+3b)(a-b)}{(a+3b)(a+2b)}=\frac{2a-2b}{a+2b}$;

б) $\frac{(2a-3b)^2}{(2a-3b)(a+b)}=\frac{2a-3b}{a+b}$;

в) $\frac{(a+4b)(a-2b)}{(3a+b)(a-2b)}=\frac{a+4b}{3a+b}$;

г) $\frac{(2a+b)^2}{(3b-a)(2a+b)}=\frac{2a+b}{3b-a}$.

Ответ. а) $\frac{2a-2b}{a+2b}$; б) $\frac{2a-3b}{a+b}$; в) $\frac{a+4b}{3a+b}$; г) $\frac{2a+b}{3b-a}$.

2.67. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{x-1}{3x^2-4x-15}\right):\frac{x^4-2x^2+1}{3x^2+11x+10}$;

б) $\left(\frac{4a-5}{a^2-9}+\frac{9(a-3)}{15-7a-4a^2}\right)\cdot\frac{4a^2-17a+15}{a-2}-\frac{7}{a+3}$.

Решение.

а) $\left(\frac{x}{(x-3)(x+2)}-\frac{x-1}{(x-3)(3x+5)}\right):\frac{(x^2-1)^2}{3x^2+11x+10}=$

$=\frac{3x^2+5x-x^2+x-2x+2}{(x-3)(x+2)(3x+5)}\cdot\frac{(x+2)(3x+5)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2+4x+2}{x-3}\cdot\frac{1}{(x^2-1)^2}=$

$=\frac{2}{(x-3)(x-1)^2}$;

б) $\left(\frac{4a-5}{a^2-9}-\frac{9(a-3)}{(4a-5)(a+3)}\right)\cdot\frac{(4a-5)(a-3)}{a-2}-\frac{7}{a+3}=$

$=\frac{(4a-5)^2-9(a-3)^2}{(a^2-9)(4a-5)}\cdot\frac{(4a-5)(a-3)}{a-2}-\frac{7}{a+3}=$

$=\frac{(4a-5-3a+9)(4a-5+3a-9)}{(a+3)(a-2)}-\frac{7}{a+3}=\frac{(a+4)(7a-14)}{(a+3)(a-2)}-\frac{7}{a+3}=$

$=\frac{7a+21}{a+3}=7.$

Ответ. а) $\frac{2}{(x-3)(x-1)^2}$; б) 7.

2.68. При каком значении переменной значение дроби равно нулю:

а) $\frac{6a^2+5a-1}{3a^2+23a-8}$; в) $\frac{7a^2+55a-8}{14a^2-9a+1}$;

б) $\frac{10a^2+a-2}{11a-15a^2-2}$; г) $\frac{15a^2-14a-8}{a^2+5a-12}$?

Решение.

а) $6a^2+5a-1=0$, $a=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{12}$, $a=-1$ или $a=\frac{1}{6}$.
Пусть $a=-1$. Высказывание $3(-1)^2+23(-1)-8\neq 0$ истинно. Пусть $a=\frac{1}{6}$. Высказывание $3\cdot\frac{1}{36}+23\cdot\frac{1}{6}-8\neq 0$ истинно.

Значение дроби равно нулю при $a=-1$ и при $a=\frac{1}{6}$.

б) $10a^2+a-2=0$, $a=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{20}$, $a=-\frac{1}{2}$ или $a=\frac{2}{5}$.
Пусть $a=-\frac{1}{2}$. Высказывание $11\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-15\cdot\frac{1}{4}-2\neq 0$ истинно. Пусть $a=\frac{2}{5}$. Высказывание $11\cdot\frac{2}{5}-15\cdot\frac{4}{25}-2\neq 0$ ложно.

Значение дроби равно нулю при $a=-\frac{1}{2}$.

в) $7a^2+55a-8=0$, $a=\frac{-55\pm\sqrt{3025+224}}{14}$, $a=\frac{-55\pm\sqrt{3249}}{14}$, $a=\frac{-55\pm 57}{14}$, $a=-8$ или $a=\frac{1}{7}$.
Пусть $a=-8$. Высказывание $14\cdot 64-9(-8)+1\neq 0$ истинно. Пусть $a=\frac{1}{7}$. Высказывание $14\cdot\frac{1}{49}-9\cdot\frac{1}{7}+1\neq 0$ ложно.

Значение дроби равно нулю при $a=-8$.

г) $15a^2-14a-8=0$, $a=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{15}$, $a=\frac{4}{3}$ или $a=-\frac{2}{5}$.
Пусть $a=\frac{4}{3}$. Высказывание $\frac{16}{9}+5\cdot\frac{4}{3}-12\neq 0$ истинно.
Пусть $a=-\frac{2}{5}$. Высказывание $\frac{4}{25}+5\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-12\neq 0$ истинно.

Значение дроби равно нулю при $a=\frac{4}{3}$ и при $a=-\frac{2}{5}$.

■

VIII КЛАСС

2.69. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{x^{\frac{3}{8}}x^{-\frac{7}{12}}}{x^{\frac{5}{24}}}\right)^{-\frac{6}{5}}$ при $x=625$;

б) $\left(\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ при $a=0{,}01$, $b=27$.

Решение. а) $\left(x^{-\frac{5}{24}}:x^{\frac{5}{24}}\right)^{-\frac{6}{5}}=\left(x^{-\frac{10}{24}}\right)^{-\frac{6}{5}}=x^{\frac{1}{2}}$, при $x=625$ $x^{\frac{1}{2}}=25$;

б) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=a^{-1}b^{\frac{1}{3}}$, при $a=0{,}01$ и $b=27$, $a^{-1}b^{\frac{1}{3}}=300$.

Ответ. а) 25; б) 300.

2.70. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^6+x^{11}}{x^{-6}+x^{-11}}$; б) $\dfrac{a^{-13}-a^{-14}}{a^{13}-a^{14}}$; в) $\dfrac{1+x+x^2}{1+x^{-1}+x^{-2}}$.

Решение.

а) $\dfrac{x^6(1+x^5)}{x^{-11}(x^5+1)}=\dfrac{x^6}{x^{-11}}=x^{17}$;

б) $\dfrac{a^{-14}(a-1)}{a^{13}(1-a)}=-\dfrac{a^{-14}}{a^{13}}=-a^{-27}$;

в) $\dfrac{1+x+x^2}{x^0+x^{-1}+x^{-2}}=\dfrac{1+x+x^2}{x^{-2}(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{x^{-2}}=x^2$.

Ответ. а) x^{17}; б) $-a^{-27}$; в) x^2.

2.71. Известно, что $2^\alpha=m$, $2^\beta=n$. Найдите: а) $2^{2\alpha+3\beta}$; б) $2^{\beta-\alpha}$; в) $2^{5\alpha-\beta}$; г) $4^{\alpha-\beta}$; д) $0{,}5^{\beta+\alpha}$; е) $0{,}25^{3\alpha-2\beta}$.

Решение.

а) $2^{2\alpha+3\beta}=(2^\alpha)^2(2^\beta)^3=m^2n^3$;

б) $2^{\beta-\alpha}=\dfrac{2^\beta}{2^\alpha}=\dfrac{n}{m}$;

в) $2^{5\alpha-\beta}=\dfrac{2^{5\alpha}}{2^\beta}=\dfrac{(2^\alpha)^5}{2^\beta}=\dfrac{m^5}{n}$;

г) $4^{\alpha-\beta}=2^{2\alpha-2\beta}=\dfrac{(2^\alpha)^2}{(2^\beta)^2}=\dfrac{m^2}{n^2}$;

д) $0{,}5^{\beta+\alpha}=2^{-\beta-\alpha}=\dfrac{1}{2^\beta 2^\alpha}=\dfrac{1}{mn}$;

е) $(0{,}25)^{3\alpha-2\beta}=(2^{-2})^{3\alpha-2\beta}=2^{4\beta-6\alpha}=\dfrac{(2^\beta)^4}{(2^\alpha)^6}=\dfrac{n^4}{m^6}$.

Ответ. а) m^2n^3; б) nm^{-1}; в) m^5n^{-1}; г) m^2n^{-2}; д) $m^{-1}n^{-1}$; е) n^4m^{-6}.

2.72. Преобразуйте произведение:

а) $\left(x^{-\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}\right)\left(x^{-\frac{2}{5}}+x^{\frac{4}{5}}\right)\left(x^{\frac{2}{5}}-x^{-\frac{1}{5}}\right)$;

б) $\left(a^{\frac{2}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{4}{9}}+a^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(a^{\frac{2}{9}}-1\right)$.

Ответ. а) $x^{\frac{8}{5}}-x^{-\frac{4}{5}}$; б) $a^{\frac{4}{3}}-1$.

2.73. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{(a-4)^3}$; в) $\sqrt[3]{(a-1)^4}$;

б) $\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}$; г) $\sqrt[4]{x^5(2-x)^6}$.

Решение. а) $\sqrt{(a-4)^3}=(a-4)\sqrt{a-4}$, если $a\geqslant 4$;

б) $\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}=\sqrt{(1-a)^3}=(1-a)\sqrt{1-a}$, если $a\leqslant 1$;

в) $\sqrt[3]{(a-1)^4}=(a-1)\sqrt[3]{a-1}$, если $a\geqslant 1$ и $\sqrt[3]{(a-1)^4}=$ $=(1-a)\sqrt[3]{1-a}$, если $a<1$;

г) $\sqrt[4]{x^5(2-x)^6}=x(2-x)\sqrt[4]{x(2-x)^2}$, если $0\leqslant x\leqslant 2$, и $\sqrt[4]{x^5(2-x)^6}=x(x-2)\sqrt[4]{x(2-x)^2}$, если $x>2$.

2.74. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$;

б) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$;

Решение.

а) $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}+1\right)}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}=x-1$;

б) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}\right)^2+\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}\right)^2=\dfrac{ab}{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+\dfrac{ab}{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}=$ $=\dfrac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$.

Ответ. а) $x-1$; б) $\dfrac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$.

2.75. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{ba}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^2b^2}+\sqrt[3]{x^2b}}$; б) $\dfrac{xy-yz}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}$.

Ответ. а) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{x^2b}}$; б) $\sqrt{xy}-\sqrt{yz}$.

2.76. Докажите, что при всех $a>0$, $b>0$ значение выражения

$$\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2,5}}{10^{-\frac{1}{2}}(a+b)}$$

равно 10.

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{10}}{a+b}=(a+b)\cdot\frac{10}{a+b}=10.$$

2.77. Докажите тождество:

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Решение.

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(a-a^{-1})-(a-a^{-2})\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)+(1-a^{-2})\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)}{a-a^{-1}}+$$

$$+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a^{-\frac{5}{2}}(1-a^2)}{a^{-1}(a^2-1)}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a^{-\frac{5}{2}}}{-a^{-1}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{-2a^{-1}+2a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}}=0 \text{ при всех } a\neq 0.$$

2.78. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{1-x^{-0,5}}-\frac{1}{1-x^{-1}}\right)\cdot(x-1) \text{ при } x=0{,}0036.$$

Решение.

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{x}{x-1}\right)\cdot(x-1)=\frac{x^{\frac{1}{2}}(x-1)}{x^{\frac{1}{2}}-1}-x=x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)-x=$$

$$=x+x^{\frac{1}{2}}-x=x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{при } x=0{,}0036, \quad x^{\frac{1}{2}}=0{,}06.$$

Ответ. 0,06.

2.79. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{m^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{1}{m^{\frac{1}{3}}+1}+1\right):\dfrac{1}{4m^{\frac{2}{3}}-4}$;

б) $\left(\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\right):\dfrac{2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}$.

Ответ. а) $4\left(m^{\frac{2}{3}}+1\right)$; б) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\times\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$.

2.80. Прологарифмируйте выражение (буквами обозначены положительные числа);

а) $x=\dfrac{a^6\sqrt[8]{a^7}\cdot a^4\sqrt[4]{a^3}\cdot a^4\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}}$;

б) $x=\dfrac{10a^3b^4c^{-15}}{\sqrt{10a^{\frac{1}{2}}c^{-5}}}$;

в) $x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{m^{-1}}}{n^{-3}}\cdot\sqrt[3]{m^{-1}n^{-2}}}$.

Ответ. $16\lg a$; б) $\frac{1}{2}(1+5\lg a+8\lg b-20\lg c)$;
в) $\frac{1}{12}(14\lg n-5\lg m)$.

2.81. Логарифмируя обе части равенства, выразите переменную y через x:

а) $x=5^y\cdot 3^{-y}$; в) $x^2=2^{2y-1}$;

б) $x=10^{2y}\cdot 3^{y+1}$; г) $x^3=10^y\cdot 5^{y-1}$.

Ответ. а) $y=\dfrac{\lg 5-\lg 3}{\lg x}$, $x\neq 1$; б) $y=\dfrac{\lg x-\lg 3}{2+\lg 3}$;
в) $y=\dfrac{2\lg x+\lg 2}{2\lg 2}$; г) $y=\dfrac{3\lg x+\lg 5}{1+\lg 5}$.

2.82. Прологарифмируйте выражение (буквами обозначены положительные числа):

а) $x=\sqrt[3]{m\sqrt{n}}$; г) $x=\dfrac{3m^{-2}\sqrt[3]{3n}}{m^2n\sqrt{mn}}$;

б) $x=\frac{1}{3}a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; д) $s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

в) $x=3b^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{3}{4}b^2}$; е) $x=\dfrac{5m^2\sqrt{3(m-n)}}{4(m-n)^2}$.

Ответ. а) $\lg x=\frac{1}{3}\lg m+\frac{1}{6}\lg n$; б) $\lg x=\lg\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\lg a$;
в) $\lg x=\frac{4}{3}\lg 3-\frac{1}{3}\lg 4+\frac{1}{6}\lg b$; г) $\lg x=\frac{4}{3}\lg 3-4{,}5\lg m-1\frac{1}{6}\lg n$;
д) $\lg s=\frac{1}{2}(\lg p+\lg(p-a)+\lg(p-b)+\lg(p-c))$; е) $\lg x=$
$=\frac{1}{2}(\lg 2{,}5+\lg 3-3\lg(m-n)+4\lg m)$.

2.83. Найдите x, если:

а) $\lg x=\frac{1}{3}\lg 27-\lg 5+\lg 2$; в) $\lg x=\frac{2}{5}\lg 32-\frac{1}{2}\lg 16+\frac{2}{3}\lg 8$;

б) $\lg x=\frac{1}{2}(9\lg 2-3\lg 4)$; г) $\lg x=3\lg 5-2\lg 25+\frac{1}{3}\lg 125$.

Ответ. а) 1,25; б) $2\sqrt{2}$; в) 4; г) 1.

3. УРАВНЕНИЯ

VI КЛАСС

3.1. Одно число на 4 меньше другого. Если первое уменьшить на 5, а второе оставить без изменения, то произведение полученных чисел будет равно нулю. Найдите исходные числа.

Решение. I способ. Произведение полученных чисел будет равно нулю, если: 1) второе число равно нулю (тогда первое равно —4), 2) первое число, уменьшенное на 5, равно нулю (тогда второе число равно 9).

II способ. Обозначим первое число через x, тогда второе число будет $(x+4)$. По условию имеем: $(x-5)(x+4)=0$, $x=5$ или $x=-4$.

Ответ. 5 и 9 или —4 и 0.

3.2. Сумма двух чисел равна 957. Одно из них оканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.

Решение. I способ. Пусть меньшее число равно x, тогда большее число $10x$. По условию имеем: $10x+x=957$, $11x=957$, $x=87$.

II способ. Очевидно, что большее из чисел трехзначное, а меньшее двузначное. Если трехзначное число обозначить $\overline{abc}$, причем $c=0$, то по условию задачи двузначное число будет иметь вид $\overline{ab}$. Отсюда имеем:

$$(100a+10b)+(10a+b)=957, \quad 110a+11b=957, \quad 10a+b=87.$$

Итак, $\overline{abc}=870$, $\overline{ab}=87$.

Ответ. 87; 870.

3.3. Ученик задумал трехзначное число, приписал к нему справа единицу и к полученному числу прибавил 29. Вновь полученное число он разделил на 11. В частном получилось число на 71 меньше задуманного и в остатке 4. Найдите задуманное число.

Решение. I способ. Пусть a—задуманное число. Тогда вновь полученное число равно $10a+1+29=10a+30$. По условию имеем:

$10a+30=11(a-71)+4$, $10a+30=11a-781+4$, $a=807$.

II способ. Пусть $100a+10b+c$—задуманное число. Тогда число, полученное после приписывания к нему справа единицы и прибавления 29, будет иметь вид:

$$1000a+100b+10c+1+29, \text{ т. е. } 1000a+100b+10c+30.$$

Частное имеет вид: $100a+10b+c-71$. Делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток. Отсюда имеем:

$$1000a+100b+10c+30=11(100a+10b+c-71)+4,$$
$$100a+10b+c-807=0,$$
$$100a+10b+c=807.$$

Ответ. 807.

3.4. Найдите двузначное число с суммой цифр 16, которое при делении на 8 дает в остатке 1.

Решение. Задача легко решается методом проб. Так как цифры искомого числа $7\leqslant a\leqslant 9$, $7\leqslant b\leqslant 9$, то получаем, что искомое число будет среди чисел 79, 88, 97. Но только число 97 при делении на 8 дает остаток 1.

Ответ. 97.

3.5. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало записи числа, то новое число будет на 1 больше утроенного первого числа. Найдите это число.

Решение. Пусть x—число сотен, а y—число десятков искомого числа. Тогда искомое число имеет вид: $\overline{xy3}$. Используя условие задачи и поразрядную запись натурального числа, получим уравнение:

$$(100x+10y+3)\cdot 3=(300+10x+y)-1.$$

Откуда

$$300x+30y+9=300+10x+y-1,$$
$$290x+29y=290, \quad 10x+y=10.$$

Так как $1\leqslant x\leqslant 9$ и $0\leqslant y\leqslant 9$, то равенство возможно лишь при $x=1$ и $y=0$.

Ответ. 103.

3.6. Составьте несколько задач из разных областей окружающей жизни, решение которых приводит к системе:

$$\begin{cases} x+y=25, \\ x\cdot y=150. \end{cases}$$

3.7. Составьте задачу о прямоугольнике, которая решалась бы с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot y = 20, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$$

3.8. Какими способами можно выдать 78 копеек, имея лишь пятикопеечные и трехкопеечные монеты?

Решение. Пусть трехкопеечных монет было x, а пятикопеечных y, тогда $3x + 5y = 78$, откуда $y = \frac{78-3x}{5}$. Учитывая, что $x \in N$, $y \in N$ и $78-3x$ кратно пяти, подбором найдем:

x	1	6	11	16	21
y	15	12	9	6	3

3.9. Сколькими способами можно набрать один рубль трехкопеечными и пятикопеечными монетами?

Решение. Пусть трехкопеечных монет было n, а пятикопеечных m, тогда $3n + 5m = 100$. Откуда $m = 20 - \frac{3n}{5}$, где n кратно 5 и $n < 35$. Получаем:

n	5	10	15	20	25	30
m	17	14	11	8	5	2

Ответ. Шестью способами.

3.10. Постройте график уравнения:

а) $xy = 0$; б) $(x-8)(x+6) = 0$; в) $x^2y - 6x = 0$.

Ответ. а) График данного уравнения — объединение двух координатных осей;

б) график данного уравнения — объединение прямых $x = 8$ и $x = -6$;

в) представим это уравнение в виде $x(xy-6) = 0$. Графиком этого уравнения служит множество точек, представляющее собой объединение двух фигур: прямой $x = 0$ (оси y) и гиперболы $y = \frac{6}{x}$.

3.11. Найдите значения a такие, чтобы пара чисел $(a; -4)$ была решением уравнения $3x + 4y = 17$.

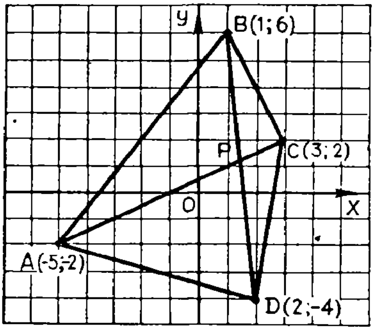


Рис. 2

Решение. Если пара чисел (a; —4) является решением данного уравнения, то $3a+4(-4)=17$. Откуда $3a-16=17$, $a=11$.

Ответ. $a=11$.

3.12. Напишите уравнение, графиком которого служит прямая:

а) проходящая через точки $(1;-1)$, $\left(\frac{1}{3};\ -3\right)$;

б) пересекающая ось абсцисс в точке с абсциссой 14, а ось ординат — в точке с ординатой 7.

Решение. Уравнение прямой имеет вид: $y=ax+b$. Зная координаты двух точек этой прямой, легко составить систему уравнений относительно a и b:

а) $y=ax+b$.

$$\begin{cases} -1=a+b, \\ -3=\frac{1}{3}a+b. \end{cases} \quad \frac{2}{3}a=2,\ a=3,\ b=-4.$$

Ответ. $y=3x-4$.

б) (14, 0), (0; 7)

$y=ax+b$

$b=7$. $0=14a+7$, $a=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $y=-\frac{1}{2}x+7$.

3.13. Известны координаты вершин выпуклого четырехугольника: $A(-5;\ -2)$, $B(1;\ 6)$, $C(3;\ 2)$, $D(2;\ -4)$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

Решение. Задачу можно решить графически: построить данный четырехугольник по координатам его вершин и установить непосредственно координаты точки P пересечения его диагоналей (рис. 2).

Можно решить эту задачу и не пользуясь чертежом. Каждая из двух диагоналей данного четырехугольника представляет собой отрезок прямой, проходящей через точки A, C и B, D соответственно. Составив уравнения прямых AC и BD, можно найти координаты точки их пересечения, решив систему этих уравнений. Имеем:

а) $y=ax+b$ — прямая AC $\qquad 4=8a,\ a=0{,}5,\ b=0{,}5;$

$$\begin{cases} -2=-5a+b, \\ 2=3a+b; \end{cases} \qquad (AC):\ y=0{,}5x+0{,}5.$$

б) $y=kx+m$ — прямая BD $\qquad k=-10,\ m=16.$

$$\begin{cases} 6=k+m, \\ -4=2k+m; \end{cases} \qquad (BD):\ y=-10x+16.$$

в) $\begin{cases} y=0{,}5x+0{,}5, \\ y=-10x+16, \end{cases}$ $\quad 10{,}5x-15{,}5=0,$ $\quad x=1\frac{10}{21}, \quad y=1\frac{5}{21}.$

Ответ. $P\left(1\frac{10}{21},\ 1\frac{5}{21}\right)$.

3.14. Напишите уравнение прямой, которая:

а) параллельна прямой $y=2x$ и проходит через точку $(-1;\ 4)$;

б) параллельна прямой $y=-x$ и проходит через точку $(0{,}5;\ 5{,}5)$;

в) параллельна оси y и проходит через точку $(8;\ 10{,}5)$;

г) параллельна оси x и проходит через точку $(-1;\ -4)$.

Решение. а) Так как искомая прямая параллельна данной прямой, то их угловые коэффициенты одинаковы и для решения задачи достаточно найти значение коэффициента b в уравнении $y=ax+b$.

$y=2x+b,\ 4=-2+b,\ b=6,\ y=2x+6.$

Ответ. а) $y=2x+6$; б) $y=-x+6$; в) $x=8$; г) $y=-4$.

3.15. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $5x+6y=1$ и $x+y=3$ и параллельна прямой $3x-y+2=0$.

Решение. Находим координаты точки пересечения прямых $5x+6y=1$ и $x+y=3$:

$$\begin{cases} 5x+6y=1, \\ x+y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-14, \\ 5x-84=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=17, \\ y=-14. \end{cases}$$

Точка $(17,\ -14)$ принадлежит искомой прямой $y=kx+b$, значение k которой определено условием параллельности ее прямой $3x-y+2=0$. Поэтому решение задачи сводится к нахождению значения b. Имеем: $-14=3\cdot 17+b$, откуда $b=-65$.

Ответ. $y=3x-65$.

3.16. Решите уравнение $(4x^2-12x+9)-(9x^2+12x+4)=0$, разлагая его левую часть на множители.

Решение. $(2x-3)^2-(3x+2)^2=0,\ (2x-3-3x-2)\times$ $\times(2x-3+3x+2)=0,\ (-x-5)(5x-1)=0.$

Ответ. $\left\{-5;\ \frac{1}{5}\right\}$.

3.17. Решите уравнения:

а) $|x+2|=6x+1$; $\quad$ в) $|1-3x|=1{,}2x-1{,}5$;

б) $5x+8=|3x-4|$; $\quad$ г) $|15+x|=-15-x$.

Решение. а) Множеством решений уравнения служит объединение множеств решений двух систем:

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x+2=6x+1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+2<0, \\ -x-2=6x+1. \end{cases}$$

Множество решений первой системы: $\left\{\frac{1}{5}\right\}$, множество решений второй системы пусто.

Ответ. а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\varnothing$; г) $]-\infty, -15]$.

3.18. Решите уравнение:

а) $4x^3+28x^2-9x-63=0$; в) $6x^3-x^2-486x+81=0$;

б) $x^3+3x^2-16x-48=0$; г) $8x^3-6{,}4x^2-0{,}5x+0{,}4=0$.

Решение. а) $4x^2(x+7)-9(x+7)=0$, $(x+7)(2x+3)(2x-3)=0$.

Ответ. $\{-7; -1{,}5; 1{,}5\}$.

б) $x^2(x+3)-16(x+3)=0$, $(x+3)(x-4)(x+4)=0$.

Ответ. $\{-4; -3; 4\}$.

в) $x^2(6x-1)-81(6x-1)=0$, $(6x-1)(x+9)(x-9)=0$.

Ответ. $\left\{-9; \frac{1}{6}; 9\right\}$.

г) $80x^3-64x^2-5x+4=0$, $16x^2(5x-4)-(5x-4)=0$, $(5x-4)(4x-1)(4x+1)=0$.

Ответ. $\{-0{,}25; 0{,}25; 0{,}8\}$.

3.19. Является ли пара чисел $(2; -3)$ решением системы уравнений $2x-3y=13$ и $x-y=5$?

Решение. I способ. Пара чисел $(2; -3)$ — решение системы, если при подстановке их в уравнения получатся верные числовые равенства. Равенства

$$2\cdot 2-3\cdot(-3)=13,$$
$$2-(-3)=5$$

верны, значит, $(2; -3)$ — решение системы.

II способ. Для ответа на вопрос задачи достаточно решить систему данных уравнений.

Ответ. Да, является.

3.20. Даны алгебраические выражения:

$$M_1=\frac{2x-y}{4} \text{ и } M_2=\frac{x+2y}{6}.$$

Найдите такие значения x и y, при которых значение M_1 на 2 больше соответствующего значения x, а значение M_2 на $1\frac{2}{3}$ меньше соответствующего значения y.

Решение. В соответствии с условием задачи получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{4} = x+2, \\ \frac{x+2y}{6} = y - 1\frac{2}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=4x+8, \\ x+2y=6y-10. \end{cases}$$

Решая эту систему, имеем:

$$\begin{cases} 2x+y=-8, \\ x-4y=-10; \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x+4y=-32, \\ x-4y=-\ 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x=-42, \\ y=-8-2x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{14}{3}, \\ y=\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ. $x=-\frac{14}{3}$, $y=\frac{4}{3}$.

3.21. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3{,}47811356x+6{,}52188644y=13{,}47811356, & (1) \\ 6{,}52188644x+3{,}47811356y=16{,}52188644. & (2) \end{cases}$$

Решение. Складывая уравнения системы почленно, имеем:

$$10x+10y=30, \quad (3)$$
$$x+y=3.$$

Вычитая уравнение (1) из уравнения (2), получаем:

$$3{,}04377288x-3{,}04377288y=3{,}04377288,$$
$$x-y=1. \quad (4)$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1, \end{cases}$ находим: $x=2$, $y=1$.

Ответ. (2; 1).

3.22. Дана система линейных уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} y=x+c, \\ dy=x+2. \end{cases}$$

Не решая системы, определите, сколько решений она имеет при:

а) $c=1$, $d=1$; б) $c=1$, $d=2$; в) $c=2$, $d=1$; г) $c=2$, $d=2$.

Ответ поясните.

Ответ. а) Не имеет решений; б) одно решение; в) бесконечно много решений; г) одно решение.

3.23. Покажите, что уравнение $x^3+ax^2+b=0$ ни при каких a и b не может иметь корнями числа 1 и -1.

Решение. Пусть $x=1$, тогда $1+a+b=0$; если $x=-1$, тогда $-1+a+b=0$.

Система $\begin{cases} a+b=1, \\ a+b=-1 \end{cases}$ не имеет решений.

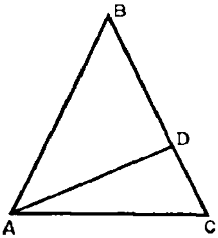


Рис. 3

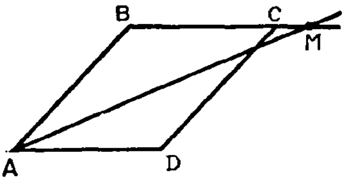


Рис. 4

3.24. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, разбивает угол при основании на два угла, величины которых отличаются друг от друга на 30° (рис. 3). Найдите углы равнобедренного треугольника.

Решение. Пусть $\widehat{DAC}=x$, $\widehat{BAD}=x+30°$, тогда $\hat{B}=90°-(x+30°)=60°-x$, $\hat{C}=x+30°+x=2x+30°$. $2(2x+30°)+60°-x=180°$; $4x+60°+60°-x=180°$, $3x=60°$; $x=20°$.

Решение аналогично, если $\widehat{DAC}=x$, $\widehat{BAD}=x-30°$.

Ответ. $\hat{C}=70°$, $\hat{B}=40°$ или $\hat{C}=50°$, $\hat{B}=80°$.

3.25. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает продолжение стороны BC в точке M, расстояние которой от точки C равно 3 *см* (рис. 4). Найдите стороны параллелограмма, если периметр параллелограмма 36 *см*.

Решение. Пусть $|AB|=x$, тогда $|BM|=x$, а $|BC|=x-3$.
$36=2(x-3)+2x$; $36=2x-6+2x$;
$4x=42$, $x=10{,}5$.

Ответ. $|AB|=10{,}5$ *см*, $|BC|=7{,}5$ *см*.

3.26. Сумма трех расстояний между тремя различными точками A, B, C равна 12 *см*. Известно, что эти расстояния выражаются тремя последовательными четными числами. Лежат ли точки A, B, C на одной прямой?

Решение. Обозначим $|AB|$, $|AC|$ и $|BC|$ соответственно через x, $x+2$, $x+4$. Из уравнения $x+(x+2)+(x+4)=12$ получим: $3x+6=12$, $3x=6$, $x=2$; 2 — четное число.

Другие расстояния выражаются числами 4 и 6. Точки A, B и C лежат на одной прямой, так как $|BC|=|AB|+|AC|$.

Ответ. Точки A, B, C лежат на одной прямой.

3.27. Длины катетов прямоугольного треугольника выражаются в сантиметрах двумя последовательными натуральными числами, а площадь его равна 28 *см*². Найдите длину катетов этого треугольника.

Решение. Пусть длина одного из катетов x *см*, тогда длина другого $(x+1)$ *см*. По формуле площади прямоугольного треугольника имеем: $\frac{1}{2}(x+1)x=28$, откуда $x(x+1)=56$. Так как $x\in N$ и $56=7\cdot 8$, то $x=7$, а $x+1=8$.

Ответ. Длина одного катета 8 *см*, а другого — 7 *см*.

3.28. Пересечением двух углов с общей вершиной O является луч OB. Отношение градусных мер этих углов равно 8. Величина одного угла меньше величины другого на $140°$. Являются ли эти углы смежными?

Решение. Для решения задачи достаточно проверить, выполняется ли для данных углов свойство: «Сумма величин углов равна $180°$» (по условию углы имеют одну общую сторону).

Обозначим $\widehat{BOD}=x$, тогда $\widehat{AOB}-8x$. Используя второе условие задачи, имеем:

$$8x=x+140°,\ 7x=140°,\ x=20°;\ \widehat{BOD}=20°,\ \widehat{AOB}=160°.$$

Ответ. Углы являются смежными.

3.29. Периметр прямоугольника равен 58 *см*. Если одну из его сторон увеличить на 5 *см*, а другую — на 3 *см*, то площадь прямоугольника увеличится на 126 *см*^{2}. Найдите стороны прямоугольника.

Решение. Обозначим через x длину одной из сторон данного прямоугольника (в сантиметрах), тогда длина другой его стороны будет $\frac{58-2x}{2}$, т. е. $(29-x)$ *см*.

По условию первую сторону увеличили на 5 *см*, а вторую увеличили на 3 *см*, т. е. длина одной стороны стала равна $(x+5)$ *см*, а второй — $(29-x+3)$ *см*, т. е. $(32-x)$ *см*.

Используя условие сравнения площадей данного прямоугольника и полученного, придем к уравнению:

$x(29-x)+126=(x+5)(32-x)$,

откуда

$29x-x^2+126=27x-x^2+160$,

$2x=34,\ x=17$.

Ответ. 17 *см* и 12 *см*.

3.30. Радиус одной из двух концентрических окружностей на 5 *см* больше радиуса другой. Площадь кольца, заключенного между этими окружностями, составляет 1,25 площади малого круга. Найдите радиусы окружностей.

Решение. Пусть r *см* — радиус малого круга кольца, тогда $(r+5)$ *см* — радиус большого круга этого кольца. По условию имеем:

$$\pi(r+5)^2-\pi r^2=1{,}25\pi r^2.$$

Решая это уравнение относительно r, получим:

$1{,}25r^2-10-25=0,\ r^2-8r-20=0;$

$r^2-10r+2r-20=0,\ r(r-10)+2(r-10)=0;$

$(r+2)(r-10)=0;\ r=10,\ r=-2.$

Ответ. 10 *см* и 15 *см*.

3.31. Круг радиуса 8 *см* требуется заменить равным ему по площади кольцом шириной 2 *см*. Найдите длину радиусов окружностей, ограничивающих кольцо.

Решение. Обозначим искомые радиусы (в сантиметрах) через x и y, тогда, по условию, $\pi R^2=\pi x^2-\pi y^2$, или $R^2=x^2-y^2$, откуда $64=(x-y)(x+y)$. Так как $x-y=2$, то $x=y+2$. Подставляя выражение x через y в уравнение, получим: $64=2(y+2+y)$. Найдем значение y:

$$64=2(2y+2),\ 32=2y+2,\ y=15.$$

Тогда $x=15+2=17$.

Ответ. Радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, 17 *см* и 15 *см*.

3.32. Решите уравнения, относительно x:

а) $2ax=x+a+5$;

б) $ax=x+3$;

в) $9x=3-a+3ax$.

Ответ.

а) $x=\frac{a+5}{2a-1}$ при $a\neq\frac{1}{2}$; при $a=\frac{1}{2}$ нет решения;

б) $x=\frac{3}{a-1}$ при $a\neq 1$; при $a=1$ нет решения;

в) $x=\frac{1}{3}$, при $a\neq 3$; при $a=3$, $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$.

3.33. Сколько килограммов товара одного сорта ценой a руб. за килограмм нужно смешать с m *кг* товара другого сорта ценой b руб. за килограмм для получения смеси ценой p руб. за килограмм?

Решение. Из условия имеем: $ax+bm=(x+m)\cdot p$, откуда $x=\frac{m(p-b)}{a-p}$ при $a\neq p$.

а) $x=0$ при $p=b$, но $p\neq a$; в этом случае товар первого сорта не вошел в смесь, и цена смеси равна цене товара второго сорта;

б) если $p=a=b$, то задача неопределенна, $0\cdot x=0\cdot m$, цены сортов одинаковы, и потому смесь может быть образована произвольно;

в) если $p=a$, но $p\neq b$, задача не имеет решения, так как при наличии двух разных сортов в смеси ее цена не может быть равна цене товара одного сорта.

Ответ. $x=\frac{m(p-b)}{a-p}$ при $a\neq p$.

Замечание. Полезно для иллюстрации задать конкретные значения переменных.

3.34. Отцу a лет, сыну b лет. Через сколько лет отец будет старше сына в k раз? Могло ли это быть в прошлом? настоящем?

Решение. $x=\frac{a-bk}{k-1}$; ясно, что $k>1$.

а) $x>0$, если $\frac{a}{b}>k$;

б) $x<0$, если $\frac{a}{b}<k$, т. е. отец был старше сына в k раз уже некоторое время назад;

в) $x=0$, если $\frac{a}{b}=k$, т. е. отец старше сына в k раз в настоящий момент.

Ответ. $x=\frac{a-bk}{k-1}$ $(k>1)$.

Замечание. Полезно предложить учащимся взять конкретные значения переменных; например: $a=30$, $b=5$ и $k=2$; 6.

■

VII КЛАСС

3.35. Решите уравнение:

а) $x-2=\frac{15}{x}$; в) $x+1=\frac{6}{x}$;

б) $x-1=\frac{8}{x+1}$; г) $\frac{2}{x+1}=x$.

Решение.

а) $x-2-\frac{15}{x}=0$,

$$\begin{cases} x^2-2x-15=0, \\ x\neq 0; \end{cases}$$

$x^2-2x-15=0$; $D=1+15=16$;

$x=1\pm\sqrt{16}$, $x=5$ или $x=-3$.

$5\neq 0$, $-3\neq 0$ — истинные высказывания.

$\{5; -3\}$ — множество корней.

б) $x-1-\frac{8}{x+1}=0$,

$$\begin{cases} x^2-9=0, \\ x\neq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \text{ или } x=3, \\ x\neq -1. \end{cases}$$

$\{-3; 3\}$ — множество корней.

в) $x+1-\frac{6}{x}=0$,

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x\neq 0; \end{cases}$$

$x^2+x-6=0$, $D=1+24=25$,

$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$, $x=-3$ или $x=2$.

$-3\neq 0$, $2\neq 0$ — истинные высказывания.

$\{-3;\ 2\}$ — множество корней.

г) $\frac{2}{x+1}-x=0$,

$\begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x\neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \text{ или } x=1, \\ x\neq -1. \end{cases}$

$\{-2;\ 1\}$ — множество корней.

Ответ. а) $\{5;\ -3\}$; б) $\{-3;\ 3\}$; в) $\{-3;\ 2\}$; г) $\{-2;\ 1\}$.

3.36. Решите уравнение и сделайте проверку:

а) $x^2+x-5=0$;

б) $11x^2+10x+2=0$;

в) $2x^2+8x+5=0$.

Ответ.

а) $\left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$;

б) $\left\{\frac{-5+\sqrt{3}}{11};\ \frac{-5-\sqrt{3}}{11}\right\}$;

в) $\left\{\frac{-4+\sqrt{6}}{2};\ \frac{-4-\sqrt{6}}{2}\right\}$.

3.37. Найдите множество корней уравнения:

а) $(5+x)^3-x(5-x)^2=25(1+x)^2+100$;

б) $(2+x)^2-(x+1)^3=x(1-2x-x^2)$;

в) $5(1-a)^2+5(1+a)^2=(1-5a)^2+(1+5a)^2+4$.

Решение.

Указание. Для решения этих уравнений можно преобразовать их к виду $f(x)=0$ и привести многочлен, стоящий в левой части уравнения, к стандартному виду.

а) $125+75x+15x^2+x^3-25x+10x^2-x^3=25+50x+25x^2+100$,

$25x^2+50x+125=25x^2+50x+125$, x — любое число;

б) $4+4x+x^2-x^3-3x^2-3x-1=x-2x^2-x^3$,

$3+x-2x^2-x^3=x-2x^2-x^3$, множество корней пусто;

в) $5-10a+5a^2+5+10a+5a^2=1-10a+25a^2+1+10a+$ $+25a^2+4$,

$10+10a^2=50a^2+6$, $4=40a^2$, $10a^2=1$,

$a=\frac{1}{\sqrt{10}}$ или $a=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ. а) $]-\infty;\ +\infty[$; б) $\varnothing$; в) $\left\{-\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

3.38. Найдите отношение $\frac{x}{y}$ из условия $ax^2+2bxy+cy^2=0$.

Решение. Ясно, что $y \neq 0$. Разделим уравнение почленно на y^2, получим:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2+2b\,\frac{x}{y}+c=0.$$

Обозначив $\frac{x}{y}=z$, имеем: $az^2+2bz+c=0$, откуда при $a\neq 0$ и $b^2-ac\geqslant 0$ $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

Ответ. $\frac{x}{y}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

3.39. Имеет ли уравнение $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ действительные корни, если a, b и c — длины сторон некоторого треугольника.

Решение. Составим дискриминант $D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$. $(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)<0$, так как $b<a+c$, $b+a>c$, $b+c>a$, $b+a+c>0$ по свойству сторон треугольника.

Ответ. Уравнение действительных корней не имеет.

3.40. Найдите множество корней уравнения:

$$\frac{1}{2x-3}:\left(\frac{4}{4x^2-9}-\frac{6x-9}{8x^3+27}\right)=\frac{4x^2-6x}{2x+3}.$$

Решение.

$$\frac{1}{2x-3}:\frac{16x^2-24x+36-12x^2+36x-27}{(2x-3)(2x+3)(4x^2-6x+9)}=\frac{4x^2-6x}{2x+3},$$

$$\frac{1}{2x-3}:\frac{4x^2+12x+9}{(2x-3)(2x+3)(4x^2-6x+9)}-\frac{4x^2-6x}{2x+3}=0,\quad \frac{4x^2-6x+9}{2x+3}-\frac{4x^2-6x}{2x+3}=0,$$

$$\frac{9}{2x+3}=0.$$

Ответ. $\varnothing$.

3.41. Решите уравнение:

$$1+\frac{2}{x-2}=\frac{10}{x+3}-\frac{50}{(2-x)(x+3)}.$$

Решение.

$$1+\frac{2}{x-2}-\frac{10}{x+3}-\frac{50}{(x-2)(x+3)}=0,$$

$$\begin{cases}(x-2)(x+3)+2(x+3)-10(x-2)-50=0,\\ (x-2)(x+3)\neq 0;\end{cases}$$

$$x^2-7x-30=0;\quad D=49+120=169;$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{169}}{2};\quad x=10 \text{ или } x=-3.$$

$(10-2)(10+3)\neq 0$ — истинное высказывание.
$(-3-2)(-3+3)\neq 0$ — ложное высказывание.

Ответ. $\{10\}$.

3.42. Решите уравнение:

$$\frac{x+5}{x-1}+\frac{2x-5}{x-7}=\frac{6(2x-5)}{(x-7)(x-1)}.$$

Решение.

$$\begin{cases}(x+5)(x-7)+(2x-5)(x-1)-6(2x-5)=0,\\ (x-1)(x-7)\neq 0;\end{cases}$$

$3x^2-21x=0$, $x=0$ или $x=7$; 7 не является корнем уравнения.

Ответ. $\{0\}$.

3.43. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{5y-5}+\frac{2y-1}{12y^2+12y}-\frac{2}{5y^2-5}=0$;

б) $\frac{3x-5}{x^2-1}-\frac{6x-5}{x-x^2}-\frac{3x+2}{x^2+x}=0$,

Решение.

а) $\begin{cases}2y^2+3y-5=0,\\ 60y(y^2-1)\neq 0;\end{cases}$ $y=-2{,}5$ или $y=1$; 1 не является корнем уравнения.

б) $\begin{cases}2x^2-x-1=0,\\ x(x^2-1)\neq 0;\end{cases}$ $x=-0{,}5$ или $x=1$; 1 не является корнем уравнения.

Ответ. а) $y=-2{,}5$; б) $x=-0{,}5$.

3.44. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-1{,}3)^2+(y+0{,}7)^2=1{,}69,\\ x+y=-0{,}1.\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}x=-0{,}1-y,\\ (-0{,}1-y-1{,}3)^2+(y+0{,}7)^2=1{,}69,\end{cases}$$

$(-y-1{,}4)^2+(y+0{,}7)^2=1{,}69$,

$y^2+2{,}8y+1{,}96+y^2+1{,}4y+0{,}49=1{,}69$,

$2y^2+4{,}2y+0{,}76=0$, $y^2+2{,}1y+0{,}38=0$, $D=4{,}41-1{,}52=2{,}89$;

$y=\frac{-2{,}1\pm\sqrt{2{,}89}}{2}=\frac{-2{,}1\pm 1{,}7}{2}$; $y=-0{,}2$ или $y=-1{,}9$.

$y=-0{,}2$, $x=-0{,}1-(-0{,}2)=0{,}1$.

$y=-1{,}9$, $x=1{,}8$.

Ответ. $\begin{cases}x=0{,}1,\\ y=-0{,}2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1{,}8,\\ y=-1{,}9.\end{cases}$

3.45. При каких значениях параметров a и b парабола $y=ax^2+bx-4$ проходит через точки $M(1;\ -1)$ и $N(2;\ -2)$.

Решение.

$$\begin{cases} -1=a+b-4, \\ -2=4a+2b-4; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=3, \\ 2a+b=1; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2, \\ b=5. \end{cases}$$

Ответ. При $a=-2$, $b=5$.

3.46. При каких значениях параметра a уравнение $x^2+ax+4=0$ имеет два корня, один из которых на 3 больше другого?

Решение. I способ. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. По теореме Виета, учитывая условие, имеем:

$$x_1(x_1+3)=4, \quad x_1^2+3x_1-4=0,$$
$$x_1=-4 \text{ или } x_1=1; \ x_2=-1 \text{ или } x_2=4;$$
$$a=5 \text{ или } a=-5.$$

II способ. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения, причем $x_1=x_2+3$. По теореме Виета имеем: $x_1+x_2=-a$ или в данном случае: $x_2+3+x_2=-a$, $x_2=-\frac{a+3}{2}$. Подставим это выражение x_2 в уравнение, получим: $\frac{a^2+6a+9}{4}-\frac{a(a+3)}{2}+4=0$, откуда

$$a^2+6a+9-2a^2-6a+16=0,$$
$$-a^2+25=0, \ a^2=25, \ a=-5 \text{ или } a=5.$$

III способ. Можно решить задачу методом проб, учитывая, что целыми корнями могут быть лишь числа 4 и 1 или -4 и -1.

Ответ. При $a=-5$ или $a=5$.

3.47. При каких значениях параметра b уравнение $x^2-6x+b=0$ имеет два корня, один из которых вдвое больше другого?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2=b$, $x_1+x_2=6$. Если $x_1=2x_2$, то $2x_2+x_2=6$, $x_2=2$, $x_1=4$, $b=4\cdot 2=8$.

Ответ. $b=8$.

3.48. При каком значении m корни уравнения $3x^2+(3m-15)x-27=0$ будут противоположными числами?

Решение. I способ. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию $x_1+x_2=0$. По теореме Виета $x_1+x_2=15-3m$, следовательно, $15-3m=0$, $m=5$.

II способ. Если корни уравнения противоположные числа, то уравнение имеет вид: $ax^2=b$. Учитывая это, получаем, что $3m-15=0$. Откуда $m=5$.

Ответ. $m=5$.

3.49. Найти все значения параметра m, при которых уравнения $x^2+(m^2-5m+6)x=0$, $x^2+2(m-3)x+(m^2-7m+12)=0$ равносильны.

Решение. I способ. $x=0$ — корень первого уравнения, значит, $x=0$ — корень и второго уравнения. Откуда получаем: $0+0+m^2-7m+12=0$, $m_1=4$, $m_2=3$.

Подставим значения m в первое уравнение.

а) $m=4$, $x^2+(16-20+6)x=0$, $x_1=0$, $x_2=-2$. Проверим, является ли $x=-2$ корнем второго уравнения:

$4-2\cdot 1\cdot 2+0=0$, $0=0$; -2 — корень второго уравнения.

б) $m=3$, $x^2+(9-15+6)x=0$, $x_1=x_2=0$.

II способ. Решение можно также найти из условий: $m^2-7m+12=0$ и $m^2-5m+6=2(m-3)$.

Ответ. $m_1=3$, $m_2=4$.

3.50. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ равна 1,75?

Решение. I способ.

$x^2-3ax+a^2=0$,

$$x=\frac{3a+\sqrt{9a^2-4a^2}}{2} \text{ или } x=\frac{3a-\sqrt{9a^2-4a^2}}{2};$$

$$x=\frac{3a+a\sqrt{5}}{2} \text{ или } x=\frac{3a-a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\left(\frac{a}{2}(3+\sqrt{5})\right)^2+\left(\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})\right)^2=1{,}75,$$

$$\frac{1}{2}a^2(7+3\sqrt{5})+\frac{1}{2}a^2(7-3\sqrt{5})=1{,}75;$$

$$a^2=\frac{1}{4},\ a=-\frac{1}{2} \text{ или } a=\frac{1}{2}.$$

II способ. Воспользуемся теоремой Виета:

$\begin{cases} x_1+x_2=3a, \\ x_1\cdot x_2=a^2, \end{cases}$ откуда $(x_1+x_2)^2=9a^2$, или $x_1^2+x_2^2=7a^2$. По условию $7a^2=1\frac{3}{4}$, тогда $a^2=\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{2}$ или $a=\frac{1}{2}$.

Ответ. При $a=-\frac{1}{2}$ или $a=\frac{1}{2}$.

3.51. При каком значении k квадрат разности корней уравнения $x^2-2x+k=0$ равен 16?

Решение. I способ.

$x^2-2x+k=0$,

$x=1+\sqrt{1-k}$ или $x=1-\sqrt{1-k}$.

$(1+\sqrt{1-k}-1+\sqrt{1-k})^2=16$,

$(2\sqrt{1-k})^2=16$, $(\sqrt{1-k})^2=4$, $1-k=4$, $k=-3$.

II способ. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=k, \end{cases}$$

откуда $(x_1+x_2)^2=4$, $(x_1-x_2)^2=4-4x_1x_2$, $(x_1-x_2)^2=4-4k$. По условию $4-4k=16$, тогда $k=-3$.

Ответ. $k=-3$.

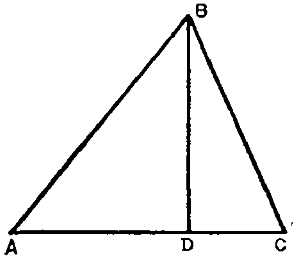


Рис. 5

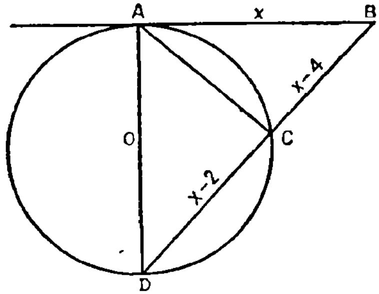


Рис. 6

3.52. Длины сторон треугольника выражаются числами 13, 14, 15 *см* (рис. 5). Найдите длину высоты треугольника, проведенной к средней по величине стороне.

Решение. Если $|AC| = 14$ *см*, $|AB| = 15$ *см*, а $|BC| = 13$ *см*, то, обозначив $|AD| = x$ *см*, а $|DC| = (14 - x)$ *см*, получим уравнение:

$$15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2,$$

$$225 - x^2 = 169 - 196 + 28x - x^2,$$

$$28x = 252, \quad x = 9.$$

Откуда $|AD| = 9$ *см*, $|BD| = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ *см*.

Ответ. 12 *см*.

3.53. Из внешней точки к окружности проведены касательная и секущая. Найдите длину касательной, если она больше длины внутреннего отрезка секущей на 2 *см*, а длины внешнего отрезка на 4 *см* (рис. 6).

Решение. Пусть $|AB| = x$ *см*, тогда $|BC| = (x - 4)$ *см*, а $|DC| = (x - 2)$ *см*. $\triangle ACB \backsim \triangle ADB$, поэтому

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|}, \quad \frac{x}{2x - 6} = \frac{x - 4}{x},$$

$$x^2 = 2x^2 - 6x - 8x + 24, \quad -x^2 + 14x - 24 = 0,$$

$$x = 7 \pm \sqrt{49 - 24}, \quad x = 7 \pm 5.$$

$x = 12$ или $x = 2$. Корень 2 не соответствует условию задачи.

Ответ. 12 *см*.

3.54. Если число сторон выпуклого многоугольника удвоить, то число его диагоналей увеличится на 30. Каково число сторон этого многоугольника?

Решение. Пусть n — число сторон многоугольника. Используя формулу числа диагоналей n-угольника, приходим к уравнению:

$$\frac{2n(2n - 3)}{2} = \frac{n(n - 3)}{2} + 30,$$

откуда $4n^2 - 6n = n^2 - 3n + 60$, $3n^2 - 3n - 60 = 0$, $n^2 - n - 20 = 0$.

$$n = 5 \quad \text{или} \quad n = -4,$$

Ответ. 5.

3.55. В прямоугольном треугольнике один из катетов на 6 *см* больше другого. Если длину первого катета увеличить вдвое, а длину второго увеличить на 2 *см*, то площадь треугольника увеличится на 264 *см²*. Найдите длины сторон треугольника.

Решение. Пусть длина первого катета x *см*, тогда длина второго катета $(x-6)$ *см*, а площадь треугольника $\frac{x(x-6)}{2}$ *см²*.

После изменений длин катетов, определенных условием, и сравнения площадей имеем:

$$\frac{x(x-6)}{2}+264=\frac{2x(x-4)}{2},$$

откуда

$$x^2-6x+528=2x^2-8x,$$

$$x^2-2x-528=0,$$

$$x=1\pm\sqrt{1+528},\ x=24 \text{ или } x=-22 \text{ — не годится.}$$

$$x=24,\ x-6=18,\ \sqrt{24^2+18^2}=30.$$

Ответ. 24 *см*, 18 *см*, 30 *см*.

3.56. Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если известно, что: а) число диагоналей в нем вдвое больше числа сторон, б) число диагоналей в нем вдвое меньше числа сторон.

Решение. Пусть n — число сторон многоугольника, тогда число его диагоналей определяется выражением $\frac{n(n-3)}{2}$.

Учитывая условие, имеем:

а) $2n=\frac{n(n-3)}{2}$, $n^2-7n=0$, $n=7$.

б) $n=2\frac{n(n-3)}{2}$, $n^2-4n=0$, $n=4$.

Ответ. а) 7; б) 4.

3.57. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 *см* (рис. 7). Найдите длины катетов этого треугольника.

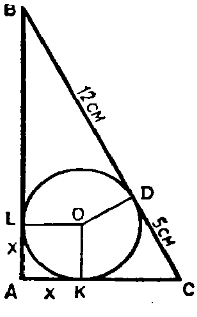


Рис. 7

Решение. По свойству отрезков касательных имеем: $|BD|=|BL|$, $|DC|=|CK|$, $|AL|=|AK|$. Пусть $|AL|=x$ *см*, тогда $|AB|=(x+12)$ *см*, $|AC|=(x+5)$ *см*, $|BC|=17$ *см*. По теореме Пифагора $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$. Используя обозначения, получаем уравнение:

$$289=(x+12)^2+(x+5)^2,$$

$$289=x^2+24x+144+x^2+10x+25,$$

$$2x^2+34x-120=0;\quad x^2+17x-60=0.$$

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{289+240}}{2}=\frac{-17\pm\sqrt{529}}{2}=\frac{-17\pm 23}{2},$$

$x=3$ или $x=-20$. Корень -20 не удовлетворяет условию задачи.

$|AB|=3+12=15$ *см*, $|AC|=3+5=8$ *см*.

Ответ. 8 *см*, 15 *см*.

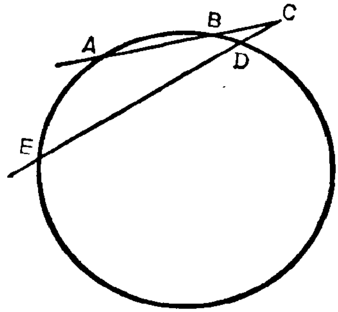


Рис. 8

3.58. Площадь прямоугольного треугольника равна 30 *см*², а длина гипотенузы равна 13 *см*. Найдите длины катетов.

Решение. Обозначим длины катетов (в сантиметрах) через x и y соответственно. Тогда, применяя формулу площади треугольника и теорему Пифагора, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy=30, \\ x^2+y^2=169; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=60, \\ x^2+y^2=169. \end{cases}$$

Решая ее, найдем:

$$\begin{cases} 2xy=120, \\ x^2+y^2=169; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=17, \\ xy=60. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5, \\ y=12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=12, \\ y=5. \end{cases}$$

Ответ. 12 *см*, 5 *см*.

3.59. Из внешней точки к окружности проведены две секущие. Сумма длин внешних отрезков секущих равна 5 *см*, а длины внутренних отрезков этих секущих 5 *см* и 10 *см* (рис. 8). Найдите длины внешних отрезков этих секущих.

Решение. Пусть $|BC|=x$ *см*, тогда $|DC|=(5-x)$ *см*, $|AC|=(x+5)$ *см* и $|CE|=5-x+10=(15-x)$ *см*.

По свойству пропорциональных отрезков в окружности имеем: $|AC|\cdot|BC|=|CE|\cdot|CD|$. Откуда получим уравнение:

$$(x+5)\,x=(15-x)(5-x).$$

Решая его, найдем:

$$x^2+5x=75-5x-15x+x^2,$$
$$25x=75, \quad x=3.$$

Итак, $|BC|=3$ *см*, а $|CD|=5$ *см* -3 *см* $=2$ *см*.

Ответ. 3 *см*, 2 *см*.

3.60. Какие натуральные числа являются корнями уравнения:

$$x^2-y^2=135?$$

Решение. Представим данное уравнение в виде $(x-y)\times(x+y)=135$. Так как x и y по условию натуральные числа, то $x>y$ и $x-y<x+y$. Таким образом, 135 надо разложить на такие два множителя, чтобы меньший из них (т. е. $x-y$) был бы меньше $\sqrt{135}$ или меньше 11. Делителями числа 135 являются числа 3, 5, 9, 15, 27, 45. Из них надо выбрать только числа, меньшие 11, т. е. 3, 5, 9.

Получим три системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=45; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=5, \\ x+y=27; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=9, \\ x+y=15. \end{cases}$$

Решая их, найдем:

$$\begin{cases} x_1=24, \\ y_1=21; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=16, \\ y_2=11; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=12, \\ y_3=3. \end{cases}$$

Ответ. (24; 21), (16; 11), (12; 3).

3.61. Найдите два таких не равных нулю числа, чтобы их сумма, произведение и разность квадратов были равны.

Решение. Обозначим искомые числа через x и y, тогда: $x+y=xy=x^2-y^2$, $x+y=(x+y)(x-y)$, $1=x-y$, $x=1+y$.

$$\begin{cases} x+y=xy, \\ x=1+y; \end{cases} \quad 1+2y=(1+y)y, \quad y+y^2-2y-1=0,$$

$$y^2-y-1=0,$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \quad x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.62. Найдите целые решения уравнения: $x^4+y^4+2=4xy$.

Решение.

$x^4+y^4+2=4xy$, $(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2=0$. Откуда

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ xy=1; \end{cases}$$

Таким образом, имеем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=y, \\ xy=1; \end{cases}$ $\begin{matrix} x_1=y_1=+1, \\ x_2=y_2=-1; \end{matrix}$

б) $\begin{cases} x=-y, \\ xy=1. \end{cases}$ Система несовместна.

Ответ. (1; 1), (—1; —1).

3.63. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1960}$?

Решение. а) $\sqrt{y}=\sqrt{1960}-\sqrt{x}$, $y=1960+x-2\sqrt{1960x}$, или $y=1960+x-2\cdot 14\cdot\sqrt{10x}$. y будет целым числом, если x — целое число и $\sqrt{10x}$ — целое число. Но $\sqrt{10x}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{x}$ будет целым, если $\sqrt{x}=k\cdot\sqrt{10}$, где k — любое целое неотрицательное число. Значит, $x=10k^2$.

б) Аналогичные рассуждения относительно y дают: $y=10l^2$, где l — любое целое неотрицательное число.

в) Подстановка этих значений в исходное уравнение дает $k\sqrt{10}+l\sqrt{10}=14\sqrt{10}$, или $k+l=14$.

Составим таблицу решений:

k	0	1	2	3	...	13	14
l	14	13	12	11	...	1	0
x	0	10	40	90	...	1690	1960
y	1960	1690	1440	1210	...	10	0

Ответ. 15 решений.

3.64. Не решая квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, составьте новое квадратное уравнение, корни которого были бы равны соответственно сумме и произведению корней данного уравнения.

Решение. Пусть корни данного уравнения x_1 и x_2, а корни нового уравнения y_1 и y_2, тогда по условию: $y_1=x_1+x_2=-p$, $y_2=x_1\cdot x_2=q$.

Применяя теорему Виета, получим:

$$\begin{cases} y_1+y_2=-p+q, \\ y_1\cdot y_2=-p\cdot q; \end{cases}$$

$y^2+(p-q)y-pq=0$ — искомое уравнение.

3.65. Не решая квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, составьте новое квадратное уравнение, корни которого

а) противоположны корням данного уравнения,

б) обратны корням данного уравнения.

Решение. а) Пусть корни данного уравнения x_1 и x_2, а корни искомого y_1 и y_2, тогда $y_1=-x_1$, $y_2=-x_2$.

$$y_1+y_2=-(x_1+x_2)=-(-p)=p.$$
$$y_1\cdot y_2=x_1\cdot x_2=q.$$

$y^2-py+q=0$ — искомое уравнение.

б) Если x_1 и x_2 — корни данного уравнения, а y_1 и y_2 — корни искомого уравнения, то $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$.

$$y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{-p}{q},$$

$$y_1\cdot y_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{q}.$$

Получаем: $y^2+\frac{p}{q}y+\frac{1}{q}=0$, или $qy^2+py+1=0$ — искомое уравнение.

Ответ: а) $y^2-py+q=0$; б) $qy^2+py+1=0$.

3.66. Не решая квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, найдите:
а) сумму квадратов его корней,
б) сумму кубов его корней.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, тогда

а) $x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$
$=(-p)^2-2q=p^2-2q$;

б) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=-p(p^2-2q-q)=$
$=-p(p^2-3q)$.

Ответ. а) p^2-2q; б) $p(3q-p^2)$.

3.67. Составьте квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, коэффициенты которого p и q являются его корнями.

Решение. По теореме Виета и по условию имеем:

$$\begin{cases} p+q=-p, \\ p\cdot q=q; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2p+q=0, \\ p\cdot q=q. \end{cases}$$

Тогда $q=0$ и $p=0$ или $p=1$ и $q=-2$.

Ответ. $x^2=0$ и $x^2+x-2=0$.

3.68. Каковы свойства корней уравнения $ax^2+bx+a=0$?

Ответ. Корни уравнения (если они существуют) — взаимно обратные числа.

3.69. Запишите два квадратных уравнения, имеющие один и только один общий корень.

Ответ. Например, $(x-2)(x+1)=0$ и $(x-2)(x-1)=0$.

3.70. Установите зависимость между корнями уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни первого уравнения, а x_3, x_4 — корни второго уравнения. Нетрудно убедиться в том, что числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ удовлетворяют второму уравнению и, кроме того, оно не имеет других корней, кроме этих. Значит, $x_3=\frac{1}{x_1}$, $x_4=\frac{1}{x_2}$ или наоборот.

3.71. Что можно сказать о существовании корней уравнения $ax^2+bx+c=0$, если $ac<0$.

Ответ. Если $ac<0$, то уравнение имеет действительные корни.

3.72. Не решая уравнения, найдите сумму квадратов корней уравнения

$(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0$.

Решение. Пусть $x^2+2x=y$, тогда

$$y^2-5y+3=0. \qquad (1)$$

Если y_1 и y_2 — корни этого уравнения, то значения x найдутся из уравнений:

$$x^2+2x=y_1, \qquad (2)$$
$$x^2+2x=y_2. \qquad (3)$$

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (2), а x_3 и x_4 — корни уравнения (3), тогда получим:

$$x_1^2+2x_1=y_1,$$
$$x_2^2+2x_2=y_1,$$
$$x_3^2+2x_3=y_2,$$
$$x_4^2+2x_4=y_2.$$

Складывая почленно и преобразуя, получаем:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2(y_1+y_2)-2(x_1+x_2+x_3+x_4)$.

Из уравнения (1): $y_1+y_2=5$,

из уравнения (2): $x_1+x_2=-2$,

из уравнения (3): $x_3+x_4=-2$.

Поэтому $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=10-2\cdot(-4)=18$.

Ответ. 18.

3.73. Две моторные лодки, имеющие одинаковые скорости в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно. По реке с каким течением — более быстрым или более медленным — лодка будет двигаться дольше?

Решение. Введем обозначения:

x *км/ч* — собственная скорость движения лодки, т. е. скорость ее движения в стоячей воде,

y *км/ч* — скорость течения более быстрой реки,

z *км/ч* — скорость течения более медленной реки,

s *км* — расстояние, пройденное каждой лодкой в одном направлении,

T *ч* — время, затраченное лодкой на весь путь по реке с более быстрым течением,

t *ч* — время, затраченное лодкой на весь путь по реке с более медленным течением.

$$T=\frac{s}{x+y}+\frac{s}{x-y}=\frac{2sx}{x^2-y^2};$$
$$t=\frac{s}{x+z}+\frac{s}{x-z}=\frac{2sx}{x^2-z^2}.$$

Найдем разницу во времени движения:

$$T-t=2sx\left(\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2-z^2}\right).$$

Так как $x>y>z$, то $\frac{1}{x^2-y^2}>\frac{1}{x^2-z^2}$, а поэтому $T-t>0$, откуда $T>t$.

Ответ. Время движения лодки по реке с более быстрым течением больше, чем по реке с более медленным течением.

3.74. Путешественник был в пути целое число дней и каждый день проезжал столько километров пути, сколько всего был в пути дней. Если бы он проезжал каждый день по 10 *км* и останавливался на один день после каждых 40 *км* пути, то время его поездки увеличилось бы на 2 дня. Сколько дней он потратил на путешествие?

Решение. Обозначим через t число дней, которое путешественник был в пути, а также и расстояние, которое он проезжал в один день, тогда по условию имеем уравнение:

$$\frac{t^2}{10}+\left[\frac{t^2}{40}\right]=t+2.$$

Здесь $\left[\frac{t^2}{40}\right]$ — целая часть числа $\frac{t^2}{40}$, выражающая число дней, потраченных на остановки. Обозначим $\left[\frac{t^2}{40}\right]=k\geqslant 0$, тогда $\frac{t^2}{10}+$ $+k=t+2$. Откуда $t^2-10t+(10k-20)=0$; $t=5+\sqrt{45-10k}$; $45-10k>0$, т. е. $k<\frac{45}{10}$. Возможные значения k: 1, 2, 3, 4. Так как t — натуральное число, то $k=2$, и тогда $t=10$.

Ответ. 10 дней.

3.75. Сторона квадрата a *см*. Определите сторону многоугольника, являющегося пересечением данного квадрата и его образа при повороте данного квадрата на 45° вокруг центра.

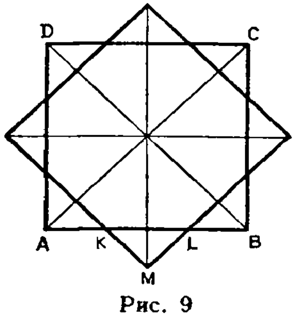


Рис. 9

Решение. Если $|KL|=x$, то $|AK|=$ $=|LB|=\frac{a-x}{2}$ (рис. 9). Из $\triangle KLM$:

$$2x^2=(a-x)^2,\ 2x^2=a^2-2ax+x^2,$$

$$x^2+2ax-a^2=0.$$
$$x=-a\pm\sqrt{a^2+a^2}=-a\pm a\sqrt{2}=a(-1\pm\sqrt{2}).$$

Корень $a(-1-\sqrt{2})$ не годен, так как $|KL|$ не может быть отрицательным. Значит, $|KL|=a(-1+\sqrt{2})$.

Ответ. $a(\sqrt{2}-1)$ *см.*

3.76. Для подъема на лифте на последний этаж восьмиэтажного дома (высота 33 *м*) при двух шестисекундных остановках потребуется столько же времени, сколько его нужно, чтобы подняться на скоростном лифте с одной семисекундной остановкой на 20-й этаж высотного здания (высота 81 *м*).

Найдите скорость подъема скоростного лифта в *м/сек*, зная, что она превышает скорость подъема обычного лифта на 1,5 *м/сек*.

Решение. Пусть x *м/сек* — скорость подъема скоростного лифта, тогда скорость подъема обычного лифта будет $(x-1{,}5)$ (*м/сек*). Составляем уравнение:

$$\frac{81}{x}+7=\frac{33}{x-1{,}5}+2\cdot 6.$$

Это уравнение имеет два положительных корня: 3 и 8,1. Используя практическое представление о скорости подъема лифта, получаем 3 *м/сек*.

Ответ. 3 *м/сек*.

3.77. Составьте текст задачи, решение которой приведет к решению следующего уравнения:

а) $x(25-x)=150$;

б) $\frac{90}{x}-\frac{90}{x+1}=1$.

■

VIII КЛАСС

3.78. Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{18x}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{18x}}=2\frac{2}{3}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{\frac{18x}{x+2}}=y$. Тогда $y-\frac{1}{y}=\frac{8}{3}$, $3y^2-8y-3=0$, $y=-\frac{1}{3}$ или $y=3$.

Так как $y\geqslant 0$, то уравнению удовлетворяет только корень 3.

$$\sqrt{\frac{18x}{x+2}}=3,\quad \frac{18x}{x+2}=9,\quad 2x=x+2,\quad x=2.$$

Ответ. 2.

3.79. Приведите пример многочлена $p(x)$ четвертой степени с коэффициентом при x^4, равным 1, множество корней которого: а) пусто, б) состоит из одного элемента, в) состоит из двух элементов, г) состоит из трех элементов, д) состоит из четырех элементов.

Решение. Приведем по одному возможному ответу:

а) x^4+4,

б) x^4,

в) $(x^2-1)(x^2+6)=x^4+5x^2-6$,

г) $(x-2)^2(x^2-9)=(x^2-4x+4)(x^2-9)=x^4-4x^3-5x^2+36x-$ -36,

д) $(x-1)x(x+1)(x+2)=(x^2-x)(x^2+3x+2)=x^4-x^3+$ $+3x^3-3x^2+2x^2-2x=x^4+2x^3-x^2-2x$.

3.80. Пусть $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем коэффициент при старшем члене равен 1, $\{1;\ 2\}$ — множество его корней. Запишите многочлен $p(x)$, если известно, что:

а) $p(x)$ — многочлен второй степени,

б) $p(x)$ — многочлен третьей степени, 1 — корень многочлена, кратности 2,

в) $p(x)$ — многочлен четвертой степени, 2 — корень многочлена, кратности 3.

Указание. Число α называется корнем кратности k, если $p(x)=(x-\alpha)^k q(x)$, где $q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Решение. Приведем по одному возможному ответу:

а) $p(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$,

б) $p(x)=(x-1)^2(x-2)=(x^2-2x+1)(x-2)=x^3-2x^2+$ $+x-2x^2+4x-2=x^3-4x^2+5x-2$.

в) $p(x)=(x-2)^3(x-1)=(x^3-6x^2+12x-8)(x-1)=$ $=x^4-6x^3+12x^2-8x-x^3+6x^2-12x+8=x^4-7x^3+18x^2-20x+8$.

3.81. Постройте график уравнения $\frac{xy-1}{y-x}=0$.

Решение.

$$\begin{cases} xy-1=0, \\ y-x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} xy=1, \\ x\neq y; \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ x\neq y. \end{cases}$$

Графиком уравнения служит гипербола $y=\frac{1}{x}$ без двух точек $(1;\ 1)$ и $(-1;\ -1)$, т. е. без точек пересечения графика с прямой $y=x$.

3.82. Постройте график уравнения:

а) $\frac{y-x^2}{xy}=0$;

б) $\frac{4y-x^2}{4-x^2}=0$;

в) $(x-3)(y-2)=0$;

г) $(x-y)(x+y)=0$;

д) $(x^2-1)^2+(y-2)^2=0$;

е) $(x^2-4)^2+(y^2-9)^2=0$;

ж) $|x|-x=|y|-y$;

з) $y=|x|-x$.

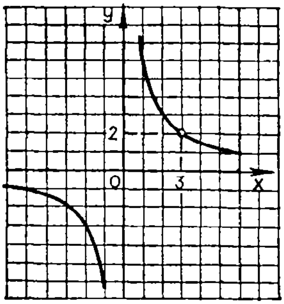


Рис. 10

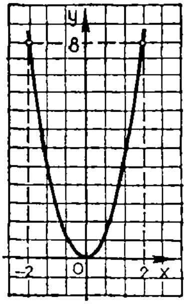


Рис. 11

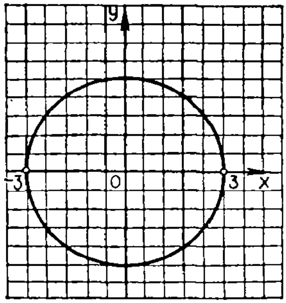


Рис. 12

3.83. Постройте график уравнения:

а) $\frac{xy-6}{y-2}=0$; б) $\frac{y-2x^2}{y-8}=0$; в) $\frac{x^2+y^2-9}{|x|-3}=0$.

Решение. а) Гипербола $xy=6$ (рис. 10) с выбитой точкой $(3;\ 2)$;

б) парабола $y=2x^2$ (рис. 11) с выбитыми точками $(2;\ 8)$, $(-2;\ 8)$;

в) окружность $x^2+y^2=9$ (рис. 12) с выбитыми точками $(3;\ 0)$ и $(-3;\ 0)$.

3.84. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$;

б) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}+1=0$;

в) $|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}=1$.

Решение. а) Найдем область определения выражения $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$: $x-2\geqslant 0$ и $1-x\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 2$, $x\leqslant 1$.

Ответ. $\varnothing$.

б) Пусть $x=3$, тогда $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{0}+1>0$.

При $x>3$ $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}+1>0$ подавно.

Ответ. $\varnothing$.

в) $|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}=1$,

$|x-1|+|x-2|=1$.

Рассмотрим различные случаи.

I. $x<1$, $1-x+2-x=1$; $2x=2$; $x=1$. Нет решения.

II. $1\leqslant x<2$, $x-1+2-x=1$; $1=1$; x—любое число, поэтому решением будет $1\leqslant x<2$.

III. $x\geqslant 2$, $x-1+x-2=1$; $2x=4$; $x=2$.

Ответ. $1\leqslant x\leqslant 2$.

3.85. Решите уравнение.

а) $(\sqrt{2x+5}-1)\lg(x-2)=0$;

б) $\sqrt{1-x}\lg(3x-4)=0$;

в) $(x+\sqrt{3})\lg(0{,}5x+3{,}5)=0$;

г) $(x-2\sqrt{5})\lg(5-x)=0$.

Решение.

а) $\sqrt{2x+5}-1=0$, $2x+5=1$, $x=-2$; при $x=-2$ выражение $\lg(x-2)$ не имеет смысла, значит, -2 не является корнем данного уравнения.

$\lg(x-2)=0$; $x-2=1$, $x=3$; при $x=3$ выражение $\sqrt{2x+5}$ имеет смысл.

Ответ. 3.

б) $\sqrt{1-x}=0$; $1-x=0$, $x=1$; при $x=1$ выражение $\lg(3x-4)$ не имеет смысла, значит, 1 не является корнем уравнения.

$\lg(3x-4)=0$; $3x-4=1$, $x=\frac{5}{3}$; при $x=\frac{5}{3}$ выражение $\sqrt{1-x}$ не имеет смысла, значит, $\frac{5}{3}$ не является корнем уравнения.

Ответ. $\varnothing$.

в) $x+\sqrt{3}=0$; $x=-\sqrt{3}$; при $x=-\sqrt{3}$ выражение $\lg(0{,}5x+3{,}5)$ имеет смысл, значит, $-\sqrt{3}$ является корнем уравнения.

$\lg(0{,}5x+3{,}5)=0$, $0{,}5x+3{,}5=1$; $x=-5$; выражение $x+\sqrt{3}$ имеет смысл при любом значении x, -5 является корнем уравнения.

Ответ. $\{-\sqrt{3};\ -5\}$.

г) $x-2\sqrt{5}=0$, $x=2\sqrt{5}$; при $x=2\sqrt{5}$ выражение $\lg(5-x)$ имеет смысл, значит, $2\sqrt{5}$ — корень уравнения.

$\lg(5-x)=0$, $5-x=1$, $x=4$; выражение $x-2\sqrt{5}$ имеет смысл при любом значении x, значит, 4 является корнем уравнения.

Ответ. $\{2\sqrt{5};\ 4\}$.

3.86. С помощью введения вспомогательной переменной решите уравнение:

а) $x^2+6x+\sqrt{x^2+6x}=20$; в) $x^2+3x+2\sqrt{x^2+3x}-8=0$;

б) $\sqrt{x^2+8}+x^2+12=16$; г) $x^2+4\sqrt{6+x^2}+6=5$.

Решение.

а) $\sqrt{x^2+6x}=y$, $y^2+y=20$, $y^2+y-20=0$, $y=-5$ или $y=4$.

$\sqrt{x^2+6x}=-5$ — нет корней.

$\sqrt{x^2+6x}=4$, $x^2+6x-16=0$, $x=-8$ или $x=2$.

Ответ. $\{-8,\ 2\}$.

б) $\sqrt{x^2+8}=y$, $y^2+y+4=16$, $y^2+y-12=0$, $y=-4$ или $y=3$.

$\sqrt{x^2+8}=-4$ — нет корней.

$\sqrt{x^2+8}=3$, $x^2=1$, $x=1$ или $x=-1$.

Ответ. $\{-1,\ 1\}$.

в) $\sqrt{x^2+3x}=y$, $y^2+2y-8=0$, $y=-4$ или $y=2$.

$\sqrt{x^2+3x}=-4$ — нет корней.

$\sqrt{x^2+3x}=2$, $x^2+3x-4=0$, $x=-4$ или $x=1$.

Ответ. $\{-4, 1\}$.

г) $y^2+4y-5=0$, $y=-5$ или $y=1$.

$\sqrt{6+x^2}=-5$ — нет корней,

$\sqrt{6+x^2}=1$, $6+x^2=1$ — нет корней.

Замечание. Уже по виду уравнения ясно, что при любом значении x левая часть больше 5, поэтому уравнение не имеет решений.

Ответ. $\varnothing$.

3.87. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$;

б) $16x^4-625=0$;

в) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

Решение. а) Положим, $y=\sqrt[4]{x}$, тогда $y^2+y-12=0$, $y=3$ или $y=-4$; $\sqrt[4]{x}=-4$ — корней нет, $\sqrt[4]{x}=3$, $x=81$.

в) Преобразуем: $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$; положим, $y=x^2+$ $+3x$, $y(y+2)=24$, $y^2+2y-24=0$; $y=4$ или $y=-6$; $x^2+3x=4$; $x=1$ или $x=-4$; $x^2+3x=-6$ — корней нет.

Ответ. а) 81; б) $-2{,}5$; $2{,}5$; в) 1; -4.

3.88. Решите уравнение:

$9x^3-13x-6=0$.

Решение. $9x^3-4x=9x+6$, $x(3x-2)(3x+2)=3(3x+2)$, $(3x+2)(3x^2+2x-3)=0$. $3x+2=0$, $x_1=-\frac{2}{3}$; $3x^2-2x-3=0$, откуда $x_2=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$, $x_3=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$.

Ответ. $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right\}$.

3.89. Решите уравнение:

а) $x^4+4x-1=0$;

б) $x^4-4x^3-1=0$.

Решение. а) Для решения уравнения прибавим к обеим его частям выражение $2x^2+1$. Получим:

$x^4+2x^2+1+4x-1=2x^2+1$,

$(x^4+2x^2+1)-(2x^2-4x+2)=0$,

$(x^2+1)^2-2(x-1)^2=0$,

$(x^2+1)^2=2(x-1)^2$,

$x^2+1=\sqrt{2}(x-1)$ или $x^2+1=\sqrt{2}(1-x)$.

Первое из полученных уравнений корней не имеет. Корни второго уравнения:

$$\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} \text{ и } \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\quad \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right\}$.

б) Нетрудно заметить, что корни этого уравнения обратны корням первого из данных уравнений.

В самом деле, обозначив $x=\frac{1}{z}$ $(z\neq 0)$, получим: $\frac{1}{z^4}-\frac{4}{z^3}-1=0$, или $z^4+4z-1=0$.

Ответ. $\left\{\dfrac{2}{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-1}},\quad \dfrac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}\right\}$.

3.90. Решите уравнение:

$$z^2-8(z+3)\cdot\sqrt{z-1}+22z-7=0.$$

Решение. $z\geqslant 1$. Преобразуем левую часть уравнения: $z^2-8(z+3)\cdot\sqrt{z-1}+22z-7=z^2+6z+9-8(z+3)\cdot\sqrt{z-1}+16z-16=(z+3)^2-8(z+3)\cdot\sqrt{z-1}+16(z-1)=((z+3)-4\sqrt{z-1})^2$. Таким образом, данное уравнение может быть записано в виде

$$(z+3-4\sqrt{z-1})^2=0.$$

Но $z+3-4\sqrt{z-1}=z-1-4\sqrt{z-1}+4=(\sqrt{z-1}-2)^2$. Поэтому окончательно данное уравнение примет вид:

$$(\sqrt{z-1}-2)^4=0.$$

Откуда $\sqrt{z-1}-2=0$, $\sqrt{z-1}=2$, $z-1=4$, $z=5$. Проверка: $25-8\cdot 8\cdot 2+110-7=25-128+110-7=0$.

Ответ. $z=5$ (корень кратности 4).

3.91. Доказать, что существуют целые числа x и y, которые удовлетворяют условиям:

$$x^2+y^2=(107-z)\cdot(z-91),$$
$$54(u^2-v^2)=z\cdot(15u+3v-z).$$

Здесь u, v, z—некоторые целые числа.

Решение. Доказать, что существуют целые значения x и y, удовлетворяющие данному условию, значит, найти хотя бы одну конкретную пару таких чисел.

Проведем предварительное исследование условий с целью установить более простую зависимость между числами u, v и z.

Из первого условия следует: $x^2+y^2\geqslant 0$ для любых x и y, значит, $(107-z)\cdot(z-91)\geqslant 0$. Учитывая, что z—целое число, имеем:

$$91\leqslant z\leqslant 107. \qquad (1)$$

Рассмотрим второе условие:

$54(u^2-v^2)=(15u+3v)\cdot z-z^2$, или $z^2-(15u+3v)z+$ $+54(u^2-v^2)=0$.

Разрешим это уравнение относительно z; тем самым мы найдем более простую зависимость между z, u и v.

$$z_{1,2}=\frac{15u+3v}{2}\pm\sqrt{\frac{(15u+3v)^2}{4}-54(u^2-v^2)}=$$
$$=\frac{15u+3v\pm\sqrt{9u^2+225v^2+90uv}}{2}=\frac{15u+3v\pm(3u+15v)}{2};$$

Откуда $z_1=9u+9v=9(u+v)$, т. е. $z_1 \vdots 9$,

$z_2=6u-6v=6(u+v)$, т. е. $z_2 \vdots 6$.

Учитывая неравенство (1), имеем следующий выбор значений для z: 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107. Отберем из них числа, делящиеся на 9 или на 6: 96, 99, 102. Теперь вернемся к первому условию и проверим каждое из этих возможных значений:

$x^2+y^2=(107-96)\cdot(96-91)$, или $x^2+y^2=55$,

$x^2+y^2=(107-99)\cdot(99-91)$, или $x^2+y^2=64$,

$x^2+y^2=(107-102)\cdot(102-91)$, или $x^2+y^2=55$.

Ясно, что если $x^2+y^2=64$, то существуют целые числа, например $x=0$ и $y=8$, удовлетворяющие условию задачи.

Существование искомых чисел доказано. Дальнейший поиск других пар чисел не предусмотрен условием задачи.

3.92. Решите уравнение относительно x:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=n(n-1).$$

Решение. К обеим частям уравнения прибавим по $\frac{2x^2}{x^2-1}$:

$$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2=n(n-1)+\frac{2x^2}{x^2-1},$$
$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}-n(n-1)=0.$$
$$\frac{2x^2}{x^2-1}=y,$$
$$y^2-y-n(n-1)=0. \quad D=1+4n^2-4n.$$
$$y=\frac{1\pm(1-2n)}{2}; \quad y=1-n \text{ или } y=n.$$
$$\frac{2x^2}{x^2-1}=1-n,$$
$$x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \text{ или } x=-\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$
$$\frac{2x^2}{x^2-1}=n,$$

$$x=\sqrt{\frac{n}{n-2}} \quad \text{или} \quad x=-\sqrt{\frac{n}{n-2}}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, $-\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, $\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$, $-\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

3.93. Найдите какой-нибудь способ решения уравнения:

$$(ax^2+bx+c)^2=x^2(Ax^2+bx+c).$$

Решение. Разделим обе части уравнения на x^4 (нетрудно убедиться, что $x\neq 0$), получим: $\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)^2=A+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$. Пусть $a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=z$. Имеем: $z^2=A+z-a$. Откуда $z=$ $=\frac{1\pm\sqrt{1+4A-4a}}{2}$. Но тогда

$$x^2\left(a-\frac{1\pm\sqrt{1+4A-4a}}{2}\right)+bx+c=0.$$

Дальнейшее решение ясно (хотя и практически сложно).

3.94. Решите уравнение:

а) $2^{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{64}$; в) $13^{x-2}+13^{x-3}=2366$;

б) $5^{x^2-2x+3}=1$; г) $2^{x^2-5x+9,5}=8\sqrt{2}$.

Решение. а) $2^{(x-3)(x+2)}=2^{-6}$,

$$x^2-x-6=-6,\quad x^2-x=0.$$

Откуда $x=0$ или $x=1$.

б) $5^{x^2-2x+3}=5^0$,
$x^2-2x+3=0$, $x=3$ или $x=-1$.

в) $13^{x-3}(13+1)=14\cdot 13^2$,
$13^{x-3}=13^2$, $x-3=2$, $x=5$.

г) $2^{x^2-5x+9,5}=2^{3,5}$,
$x^2-5x+9,5=3,5$, $x^2-5x+6=0$,
$x=2$ или $x=3$.

Ответ. а) $\{0;1\}$; б) $\{-1;3\}$; в) $\{5\}$; г) $\{2;3\}$.

3.95. Решите следующее уравнение:

а) $\frac{\lg(x-8)}{x-9}=0$; в) $\frac{x\lg(x-6)}{x+7}=0$;

б) $\frac{(x-4)(\lg x-1)}{x-10}=0$; г) $\frac{(3\lg x-1)(x+2)}{x}=0$.

Решение. Решение уравнений вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$ эквивалентно решению системы $\begin{cases} f(x)=0, \\ \varphi(x)\neq 0 \end{cases}$ с добавлением условий, накладываемых на области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Поэтому имеем:

а) $\begin{cases} x-8=1, \\ x-9\neq 0. \end{cases}$

Ответ. $\varnothing$.

б) $\begin{cases} x=4 \text{ или } x=10, \\ x\neq 10. \end{cases}$

Ответ. $x=4$.

в) $\begin{cases} x-6=1 \text{ или } x=0, \\ x\neq -7, \\ x-6>0. \end{cases}$

Ответ. $x=7$.

г) $x=\sqrt[3]{10}$ или $x=-2$,
$x>0$,
$x\neq 0$.

Ответ. $x=\sqrt[3]{10}$.

3.96. Решите следующее уравнение, используя при вычислении таблицы логарифмов:

а) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=63$;
б) $3^{x+2}+3^{x+4}+3^{x+5}=444$;
в) $5^{x-1}+5^x+5^{x+1}=248$;
г) $4^{x+1}+4^{x+3}+2^{2x+4}=147$.

Решение.

а) $2^x(1+2+4)=63,\ 2^x=9,\ x=\frac{\lg 9}{\lg 2}\approx 3{,}17$;

б) $3^{x+2}(1+9+27)=444,\ 3^{x+2}=12,\ x=\frac{\lg 12}{\lg 3}-2\approx 0{,}27$;

в) $5^{x-1}(1+5+25)=248,\ 5^{x-1}=8,$
$$x=\frac{\lg 8}{\lg 5}+1\approx 2{,}29;$$

г) $4^{x+1}(1+16+4)=147,\ 4^{x+1}=7,$
$$x=\frac{\lg 7}{\lg 4}-1\approx 0{,}42.$$

3.97. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 *см*. Если один катет этого треугольника уменьшить на 8 *см*, а другой — на 2 *см*, то его гипотенуза станет равна 5 *см*. Найдите катеты исходного треугольника.

Решение. Обозначим через x и y длины катетов исходного треугольника (в сантиметрах), имеем систему:
$$\begin{cases} x^2+y^2=13^2, \\ (x-8)^2+(y-2)^2=5^2. \end{cases}$$

Ответ. 12 *см* и 5 *см*.

3.98. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 *км*, выехал мотоциклист. Через час навстречу ему из пункта B выехал велосипедист. Найдите скорость велосипедиста, если мотоциклист прибыл в пункт B через $\frac{2}{3}$ часа после встречи, а велосипедист прибыл в пункт A через 3 часа после встречи.

Решение.

Пусть x *км/ч* — скорость мотоциклиста, y *км/ч* — скорость велосипедиста.

Тогда можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x+3y=40, \\ \dfrac{\frac{2}{3}x}{y}+1=\dfrac{3y}{x}. \end{cases}$$

Ответ. 10 *км/ч*; 15 *км/ч*.

3.99. Решите каждую из данных систем аналитически и графически и сравните полученные решения.

а) $\begin{cases} (x+6)^2+(y-8)^2=0, \\ x^2+y^2=100; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ xy-2y-3x+6=0. \end{cases}$

Ответ. а) (—6,8); б) (2, 2), (2, —2), (3, 3), (—3, 3).

3.100. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\sqrt{16-x^2}, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (xy-6)(x-y)=0, \\ x-y=0. \end{cases}$

Ответ. а) Решением системы являются координаты точек пересечения полуокружности радиуса 4 *см*, расположенной в верхней полуплоскости, и двух прямых: $y=x$ и $y=-x$.

б) Графическим решением системы служит множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=x$.

3.101. Известно, что данная система имеет целые решения. Найдите их (устно).

а) $\begin{cases} x(x+y+z)=20, \\ y(x+y+z)=30, \\ z(x+y+z)=50. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(x-y+z)=12, \\ y(x-y+z)=9, \\ z(x-y+z)=6. \end{cases}$

Ответ. а) (2, 3, 5), (—2, —3, —5);

б) (4, 3, 2), (—4, —3, —2).

3.102. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ x^2+y^2+xy=84; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=-4, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{21}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2, \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x\sqrt{yz}=4, \\ y\sqrt{xz}=9, \\ z\sqrt{xy}=16. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x+y=14-\sqrt{xy}, \\ (x+y)^2-xy=84; \end{cases}$

$$(14-\sqrt{xy})^2-xy=84,$$
$$196-28\sqrt{xy}=84,$$
$$\sqrt{xy}=4, \quad xy=16.$$
$$x+y=14-\sqrt{16},$$
$$x+y=10,$$
$$\begin{cases} x+y=10, \\ xy=16; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=2, \\ y=8. \end{cases}$$

б) $\frac{1}{x+y}=u, \quad \frac{1}{x-y}=v;$

$$\begin{cases} u+v=2, \\ 3u+4v=7; \end{cases} \quad \begin{cases} u=1, \\ v=1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=1, \\ \frac{1}{x-y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$

г) Перемножим почленно все уравнения системы, получим: $(xyz)^2=24^2$. Ясно, что $x>0$, $y>0$, $z>0$, тогда $xyz=24$. Возведем первое уравнение системы в квадрат и, используя условие $xyz=24$, найдем, что $x=\frac{2}{3}$, и т. д.

Ответ. а) (8, 2), (2, 8); б) (1, 0); в) (3, —7), (—7, 3), г) $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$.

3.103. Решите уравнение:

а) $(\cos x+1)(\sin x-0{,}5)=0$, если известно, что $0\leqslant x\leqslant 180°$;

б) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$, если известно, что $-90°\leqslant x\leqslant 90°$.

Решение.

а) $\cos x+1=0$, $\cos x=-1$, $x=-180°$;

$\sin x-0{,}5=0$, $\sin x=0{,}5$, $x=30°$.

б) $\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}$, $\sin x_1=\frac{1}{2}$; $\sin x_2=-1$;

$x=30°$, $x=-90°$.

Ответ. а) $x=-180°$, $x=30°$; б) $x=30°$, $x=-90°$.

3.104. Подберите хотя бы один корень уравнения:

а) $\log_2 x=x-1$; в) $\log_3 x=2^{x-3}$;

б) $2^x=x+1$; г) $x^{\lg x-1}=\frac{10000}{x}$.

Замечание. Уравнения решаются графически или подбором возможных значений корня с последующей проверкой.

Ответ. а) 2; б) 0; в) 3; г) 100.

3.105. Найдите основание a логарифмической функции $y = \log_a x$, если известно, что ее график проходит через точку:

а) $A\left(\frac{1}{4};\ -2\right)$; б) $B(1000;\ -3)$; в) $C(0{,}125;\ 3)$.

Решение. По условию координаты точек A, B и C соответственно удовлетворяют уравнению $y=\log_a x$. Откуда:

а) $-2=\log_a \frac{1}{4}$, $a^{-2}=\frac{1}{4}$, $(a^{-2})^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $a=2$;

б) $-3=\log_a 1000$, $a^{-3}=1000$, $(a^{-3})^{-\frac{1}{3}}=1000^{-\frac{1}{3}}$, $a=0{,}1$;

в) $3=\log_a 0{,}125$, $a^3=0{,}125$, $a=\sqrt[3]{0{,}125}$, $a=0{,}5$.

Ответ. а) 2; б) 0,1; в) 0,5.

3.106. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^3+y^3=b. \end{cases}$$

Обозначив $x+y=t$, найдите уравнение относительно переменной t. Найдите целые решения системы при $a=13$, $b=19$.

Решение. 1) Обозначим $xy=u$. Тогда

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2u$,

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=t^3-3tu$.

Система примет вид: $\begin{cases} t^2-2u=a, \\ t^3-3tu=b, \end{cases}$ откуда $u=\frac{t^2-a}{2}$,

$t^3-3t\cdot\frac{t^2-a}{2}=b$, $t^3-3at+2b=0$ — искомое уравнение.

2) При $a=13$, $b=19$, получаем: $t^3-39t+38=0$, $t^3-38t-t+38=0$, $(t^3-t)-38(t-1)=0$, $(t-1)(t^2+t-38)=0$, $t_1=1$; $t_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{153}}{2}$. Поскольку $u=\frac{t^2-a}{2}$, то $u=-6$.

Значения x и y будут корнями уравнения $z^2-tz+u=0$. Отсюда целые решения $(3,\ -2)$, $(-2,\ 3)$.

Ответ. $t^3-3at+2b=0$; $(3,\ -2)$, $(-2,\ 3)$.

3.107. Разность двух чисел равна 48, разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел равна 18. Найдите эти числа.

Решение. Обозначив искомые числа через x и y, составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=48, \\ \frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=18; \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x-y=48, \\ x+y-2\sqrt{xy}=36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=48, \\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=48, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=\pm 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=6, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{x}=14, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x}=7, \\ \sqrt{y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=49, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ. $x=49$, $y=1$.

3.108. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 113. Если это число сложить с числом, записанным теми же цифрами, взятыми в обратном порядке, то получится 165. Найдите это число.

Решение. Пусть x—цифра единиц, а y—цифра десятков, тогда

$$\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ (10y+x)+(10x+y)=165; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=113, \\ x+y=15. \end{cases}$$

$$x=15-y,\ (15-y)^2+y^2=113,$$

$$225-30y+y^2+y^2=113, \qquad 2y^2-30y+112=0,$$

$$y^2-15y+56=0.$$

$$y=7 \quad \text{или} \quad y=8,$$

$$x=8 \quad \text{или} \quad x=7.$$

Ответ. 78 или 87.

3.109. Если радиус основания цилиндра увеличить на 12 *см*, то объем полученного цилиндра составит 2,56 первоначального. Найдите радиус основания цилиндра.

Решение. Пусть радиус основания цилиндра r *см*, а высота h *см*. Из условия задачи следует уравнение:

$$2{,}56\pi r^2h=\pi(r+12)^2\cdot h,$$

$$2{,}56r^2=(r+12)^2, \quad 2{,}56r^2-r^2-24r-144=0,$$

$$0{,}13r^2-2r-12=0,$$

$$r=\frac{1\pm\sqrt{2{,}56}}{0{,}13}; \quad r=\frac{1\pm 1{,}6}{0{,}13}; \quad r=-\frac{30}{13}; \quad r=20.$$

Ответ. 20 *см*.

3.110. Четырехугольник $ABCD$ ограничен прямыми AB, BC, CD, DA. Прямая AB—график уравнения $y-3x=8$, прямая BC—график уравнения $x+y=6$, прямая CD—график уравнения $y=2x-12$, прямая DA—график уравнения $y=-2x-4$. Напишите уравнение диагоналей этого четырехугольника.

Решение. Найдем координаты точек пересечения данных прямых попарно, тем самым мы определим координаты точек A, B, C и D. Имеем:

$$\begin{cases} y-3x=8, \\ y+x=6, \end{cases} \quad x=-0{,}5, \quad y=6{,}5, \quad B(-0{,}5;\ 6{,}5).$$

$$\begin{cases} x+y=6, \\ -2x+y=-12, \end{cases} \quad x=6, \quad y=0, \quad C(6;\ 0).$$

$$\begin{cases} -2x+y=-12, \\ 2x+y=-4, \end{cases} \quad x=2, \quad y=-8, \quad D(2;\ -8).$$

$$\begin{cases} 2x+y=-4, \\ -3x+y=8, \end{cases} \quad x=-2{,}4, \quad y=0{,}8, \quad A(-2{,}4;\ 0{,}8).$$

Напишем уравнение прямой AC:

$$\begin{cases} 0=6a+b, \\ 0{,}8=-2{,}4a+b, \end{cases} \quad -0{,}8=8{,}4a, \quad a=-\frac{2}{21}, \quad b=\frac{12}{21}.$$

Напишем уравнение прямой BD:

$$\begin{cases} 6{,}5=-0{,}5a+b, \\ -8=2a+b, \end{cases} \quad 14{,}5=2{,}5a, \quad a=5{,}8, \quad b=-19{,}6.$$

Ответ. $y=-\frac{2}{21}x+\frac{12}{21}$, $y=5{,}8x-19{,}6$.

3.111. Если каждую из сторон прямоугольника увеличить на 4 *см*, то его площадь увеличится вдвое, а периметр составит 1,4 первоначального. Найдите длины сторон прямоугольника.

Решение. Пусть длины сторон прямоугольника x *см* и y *см*. Составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2xy=(x+4)(y+4), \\ (2x+2y)\cdot 1{,}4=2(x+4)+2(y+4). \end{cases}$$

Решаем эту систему:

$$\begin{cases} xy-4x-4y=16, \\ 0{,}8x+0{,}8y=16, \end{cases} \quad \begin{cases} xy-4x-4y=16, \\ x+y=20, \end{cases} \quad x=20-y.$$

$$20y-y^2-4(20-y)-4y=16, \quad y^2-20y+96=0,$$

$y=10\pm\sqrt{100-96}$, $y=12$ или $y=8$; $x=8$ или $x=12$.

Ответ. 8 *см* и 12 *см*.

3.112. При каких значениях параметра a имеет решение следующая система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+4y^2=0, \\ 5x+12y=3a^2-48; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2=0, \\ 3x-4y=a^2-7? \end{cases}$

Решение. а) (0,0)—решение первого уравнения.

$5\cdot 0+12\cdot 0=3a^2-48, \quad 3a^2-48=0,$

$a^2=16, \quad a=4$ или $a=-4$;

б) (2, 3)—решение первого уравнения.

$3\cdot 2-4\cdot 3=a^2-7, \quad -6=a^2-7,$

$a^2=1, \quad a=1$ или $a=-1$.

Ответ. а) 4 и —4; б) 1 и —1.

3.113. Найдите значения p, при которых уравнение $\sqrt{x^2-5p^2}=px-1$ имеет корень равный 3.

Решение. 1) Если $x=3$—корень уравнения, то $\sqrt{9-5p^2}=3p-1$.

Найдем возможные значения p:

$9-5p^2=9p^2-6p+1, \quad 14p^2-6p-8=0,$

$7p^2-3p-4=0, \quad D=121=11^2>0.$

$p=\frac{3\pm 11}{14}, \quad p=1$ или $p=-\frac{4}{7}$.

2) Проверим, какое из значений p удовлетворяет условию задачи:

а) Пусть $p=1$, тогда $\sqrt{9-5}=3-1$ истинное высказывание.

б) Пусть $p=-\frac{4}{7}$, тогда $\sqrt{9-1\frac{31}{49}}=-2\frac{5}{7}$ ложное высказывание.

Ответ. $p=1$.

3.114. При каких значениях параметра a уравнение

а) $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}+\frac{1}{2-ax}=1$ имеет корнем число 3;

б) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-a}{x+a}=1$ не имеет корней;

в) $\frac{4x-4}{2x-1}+a=\frac{1}{x-2x^2}$ имеет корни.

Решение. а) Число 3 является корнем уравнения при тех значениях a, при которых верно равенство

$$\frac{10}{3a^2-2a}+\frac{1}{2-3a}=1.$$

Отсюда
$$\frac{10}{3a^2-2a}-\frac{1}{3a-2}-1=0;$$

$$\begin{cases} 10-a-3a^2+2a=0, \\ 3a^2-2a\neq 0; \end{cases}$$

$$3a^2-a-10=0; \qquad D=1+120=121;$$

$$a=\frac{1\pm\sqrt{121}}{6}; \quad a=2 \quad \text{или} \quad a=-\frac{5}{3}.$$

Ответ. При $a=2$ или $a=-\frac{5}{3}$.

б) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-a}{x+a}=1;$

$$\frac{(x-1)(x+a)-(x-a)(x+1)-(x+1)(x+a)}{(x+1)(x+a)}=0;$$

$$\begin{cases} -x^2-3x+ax-a=0, \\ (x+1)(x+a)\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x(3-a)+a=0, \\ x\neq -1, \\ x\neq -a; \end{cases}$$

$x^2+x(3-a)+a=0;$

$D=(3-a)^2-4a=(a-1)(a-9).$

Уравнение не имеет корней, если $D<0$, т. е. $(a-1)(a-9)<0$. Отсюда $1<a<9$.

Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых квадратное уравнение $x^2+x(3-a)+a=0$ имеет корни -1 и $-a$.

Если $x=-1$, то $(-1)^2-1\cdot(3-a)+a=0$, $a=1$. Значит, при $a=1$ квадратное уравнение $x^2+x(3-a)+a=0$ имеет корень, равный -1. Следовательно, данное уравнение при $a=1$ корней не имеет.

Если $x=-a$, то $(-a)^2-a(3-a)+a=0$, $a=0$ или $a=1$. Таким образом, при $a=1$ квадратное уравнение $x^2+x(3-a)+$ $+a=0$ имеет корень, равный $-a$. Следовательно, при $a=0$ и $a=1$ данное уравнение корней не имеет.

Ответ. Уравнение не имеет корней, если $a=0$ или $1\leqslant a<9$.

в) $\frac{4x-4}{2x-1}+a=\frac{1}{x-2x^2};$

$$\begin{cases} (4+2a)x^2-(4+a)x+1=0, \\ x\neq \frac{1}{2}, \quad x\neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$(4+2a)x^2-(4+a)x+1=0. \qquad (1)$$

Если $4+2a=0$, т. е. $a=-2$, то уравнение (1) имеет вид: $-2x+1=0$. Тогда $x=\frac{1}{2}$. Но так как число $\frac{1}{2}$ не является корнем данного уравнения, то значит при $a=-2$ данное уравнение корней не имеет.

Пусть $4+2a\neq 0$, т. е. $a\neq -2$, уравнение (1) квадратное. Найдем дискриминант: $D=(4+a)^2-4(4+2a)=a^2$. Очевидно, что при $a=0$ уравнение (1) имеет один корень, при $a\neq 0$ и $a\neq -2$ — два корня.

Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых уравнение (1) имеет корни 0 и $\frac{1}{2}$.

Ясно, что ни при каком значении a число 0 не является корнем уравнения.

Пусть $x=\frac{1}{2}$. Найдем, при каком a верно равенство

$$(4+2a)\cdot\frac{1}{4}-(4+a)\cdot\frac{1}{2}+1=0.$$

Получим:

$$1+\frac{a}{2}-2-\frac{a}{2}+1=0.$$

Это равенство верно при любом a. Значит, при любом a уравнение (1) имеет хотя бы один корень, равный $\frac{1}{2}$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют те и только те значения параметра a, при которых уравнение (1) имеет два корня. Такими значениями, как мы установили, являются все значения a, кроме $a=0$ и $a=-2$.

Ответ. При $a\neq 0$ и $a\neq -2$.

3.115. Из пункта A в пункт B и из B в A одновременно вышли два туриста. Когда первый турист прошел половину пути, второму осталось пройти еще 24 *км*, а когда второй турист прошел половину пути, первому осталось пройти 15 *км*. Сколько километров пути останется пройти второму туристу, когда первый закончит поход?

Решение. Обозначим расстояния AB через x. Пусть первый турист прошел половину пути за y *ч*, тогда $\frac{x}{2y}$ *км/ч* — скорость движения первого туриста, $\frac{x-24}{y}$ *км/ч* — скорость движения второго туриста. Второй турист на прохождение половины пути затратил $\frac{x}{2}:\frac{x-24}{y}=\frac{xy}{2(x-24)}$ *ч*, а первому туристу к этому моменту осталось пройти 15 *км* и он затратил

$$(x-15):\frac{x}{2y}=\frac{(x-15)\cdot 2y}{x}\text{ ч}.$$

Так как туристы вышли одновременно, получим уравнение:

$$\frac{xy}{2(x-24)}=\frac{(x-15)\cdot 2y}{x}.$$

Зная, что $y\neq 0$, имеем:

$$x^2-52x+480=0,\quad x_1=40;\quad x_2=12.$$

Так как $x>24$, то $|AB|=40$ *км*.

Итак, когда первый турист прошел 20 *км*, второй прошел 16 *км*, а когда второй турист прошел 20 *км*, первый прошел 25 *км*, т. е. $v_1:v_2=5:4$, значит, когда первый турист прошел весь путь, второй успел пройти $40\cdot\frac{4}{5}=32$ *км*.

Ответ. 8 *км*.

3.116. Решите уравнение:

а) $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$; б) $\frac{15x-7}{5}=\left[\frac{5+6x}{8}\right]$.

а) По определению целой части числа имеем:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}\leqslant\frac{x+1}{3}<\frac{x-1}{2}+1, \\ \frac{x-1}{2}\text{—целое число.}\end{cases}$$

Решение двойного неравенства сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}\leqslant\frac{x+1}{3}, \\ \frac{x+1}{3}<\frac{x-1}{2}+1.\end{cases}$$

Множество решений системы $[-1;\ 5]$. Из этого множества выбираем такие значения x, при которых $\frac{x-1}{2}$—целое число: 1, 3, 5.

Ответ. $\{1;\ 3;\ 5\}$.

б) По определению целой части числа имеем:

$$\begin{cases} \frac{15x-7}{5}\leqslant\frac{5+6x}{8}<\frac{15x-7}{5}+1, \\ \frac{15x-7}{5}\text{—целое число.}\end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} 25+30x\geqslant 120x-56, \\ 25+30x<120x-56+40, \\ \frac{15x-7}{5}\text{—целое число;}\end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{41}{90}<x\leqslant\frac{81}{90}, \\ \frac{15x-7}{5}\text{—целое число.}\end{cases}$$

Решениями полученной системы служат числа $\frac{42}{90}$ и $\frac{72}{90}$, т. е. $\frac{7}{15}$ и $\frac{4}{5}$.

Ответ. $\left\{\frac{7}{15};\ \frac{4}{5}\right\}$.

4. НЕРАВЕНСТВА

■

VI КЛАСС

4.1. Верно ли неравенство:

а) $7\frac{5}{6}+16\frac{1}{6}:2<5\frac{1}{12}+2\frac{11}{12}\cdot 3\frac{3}{7}$;

б) $7{,}4\cdot 0{,}38-0{,}19\cdot 5{,}4\cdot 2<0{,}76\cdot 8{,}3-8{,}3\cdot 0{,}66$;

в) $\frac{5}{7}+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{7}>17\frac{2}{3}-21\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$;

г) $0{,}17-3{,}84\cdot 0{,}17+2{,}84\cdot 0{,}27<0{,}375\cdot 0{,}32+0{,}525\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4$?

Решение. б) $7{,}4\cdot 0{,}38-0{,}38\cdot 5{,}4=0{,}38\,(7{,}4-5{,}4)=0{,}76$, $0{,}76\cdot 8{,}3-8{,}3\cdot 0{,}66=8{,}3\,(0{,}76-0{,}66)=0{,}83$; $0{,}76<0{,}83$; заданное неравенство верно.

г) $0{,}17-3{,}84\cdot 0{,}17+2{,}84\cdot 0{,}27=0{,}17\,(1-3{,}84)+2{,}84\cdot 0{,}27=$ $=-0{,}17\cdot 2{,}84+2{,}84\cdot 0{,}27=2{,}84\,(-0{,}17+0{,}27)=0{,}284$,

$0{,}375\cdot 0{,}32+0{,}525\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32\,(0{,}375+0{,}525)=0{,}32\cdot 0{,}9=$ $=0{,}288$; $0{,}284<0{,}288$; заданное неравенство верно.

Ответ. Неравенство верно, в случае б), в), г).

4.2. Найдите множество значений x, при которых верно неравенство:

а) $|x|\leqslant 4$; б) $|x|\geqslant 6$; в) $|x|\leqslant 0$; г) $|x|\geqslant -1$; д) $|x|\leqslant -5$, и покажите это множество на числовой прямой.

Ответ. а) $[-4;\ 4]$; б) $]-\infty;\ -6]\cup[6;\ +\infty[$; в) 0; г) $]-\infty;\ +\infty[$; д) $\varnothing$.

4.3. С помощью числовой прямой найдите пересечение множеств решений неравенств:

а) $x<0$ и $x<15$;

б) $y>4{,}5$ и $y>4\frac{1}{3}$;

в) $|x|\leqslant 7$ и $x<3$;

г) $y\geqslant 5$ и $|y|\leqslant 8$;

д) $-1<x<1$ и $0<x<18$;

е) $|x|<6$ и $-4<x<10$;

ж) $1\leqslant x\leqslant 5$ и $|x|\leqslant 6$;

з) $|x|\geqslant 40$ и $20\leqslant x\leqslant 50$.

Ответ. а) $]-\infty;\ 0[$; б) $]4{,}5;\ +\infty[$; в) $[-7;\ 3[$; г) $[5;\ 8]$; д) $]0;\ 1[$; е) $]-4;\ 6[$; ж) $[1;\ 5]$; з) $[40;\ 50]$.

4.4. С помощью числовой прямой найдите объединение множеств решений неравенств:

а) $x<-1$; $x<-1,5$; д) $-4\leqslant y\leqslant 1$ и $1\leqslant y\leqslant 8$;

б) $x>7,2$; $x>7\frac{1}{7}$; е) $|y|\leqslant 3$ и $0\leqslant y\leqslant 2$;

в) $|x|<5$; $x>3$; ж) $-7<y<2$ и $|y|<4$;

г) $x\geqslant -8$; $|x|\leqslant 1$; з) $|y|\leqslant 18$; $-4\leqslant y\leqslant 26$.

Ответ. а) $]-\infty; -1[$; б) $]7\frac{1}{7}; +\infty[$; в) $]-5; +\infty[$; г) $[-8; \infty[$; д) $[-4; 8]$; е) $[-3; 3]$; ж) $]-7; 4[$; з) $[-18; 26]$.

4.5. Укажите какое-либо значение переменной c, при котором множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$5,9<y<c,$$

а) пусто; б) состоит из одного элемента; в) состоит из двух элементов; г) состоит из пяти элементов.

Ответ. а) Например, 5,95; б) например 6,7; в) например, 7,01; г) например, 10,4.

4.6. а) Известно, что A — множество решений неравенства $x<a$. Подберите какое-либо значение a так, чтобы числовой промежуток $[12; 17]$ был подмножеством множества A.

б) Пусть B — множество решений неравенства $x>b$. Подберите какое-либо значение b так, чтобы пересечение множеств B и числового промежутка $]-\infty; 4]$ было пусто.

в) Пусть C — множество решений неравенства $x>c$. При каком значении c пересечение множества C и числового промежутка $[-5; 5]$ представляет собой числовой промежуток $]3; 5]$.

Ответы. а) Например, 17,05; б) например, 4,001; в) 3.

4.7. Укажите наименьшее и наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $-5,4<x<1,3$; г) $|x|<4,3$;

б) $-7,1<x<0$; д) $|x|<0,5$;

в) $-3,7<x<-2,1$; е) $|x|<4$.

Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству?

Ответ. а) -5; 1; семь чисел; б) -7; -1; семь чисел; в) -3; -3; одно число; г) -4; 4; девять чисел; д) 0; 0; одно число; е) -3; 3; семь чисел.

4.8. A — множество решений неравенства $a\leqslant x\leqslant b$, C — множество решений неравенства $c\leqslant x\leqslant d$. Подберите значения a, b, c и d так, чтобы обращалось в истинное высказывание предложение: а) $A\subset C$; б) $C\subset A$; в) $A\cap C=[2,12]$; г) $A\cup C=[-3; 10]$.

Ответ. а) Например, $a=3{,}5$, $b=10{,}7$, $c=2$, $d=15$; б) например, $a=3{,}5$, $b=10{,}7$, $c=4$, $d=9$; в) например, $a=1$, $b=12$, $c=2$, $d=18$; г) например, $a=-3$, $b=5$, $c=0$; $d=10$.

4.9. Какие из следующих неравенств верны при всех значениях переменных:

а) $(x-3)^2+(y-5)^2+4>0$;
б) $16x^2+0{,}81y^2>0$;
в) $225x^2+17y^2+1>0$;
г) $(x-4)^2+(x^2-16)^2>0$;
д) $12(x^2+4)+6(y^2+3)>0$;
е) $-9x^2-16(y+1)^2<0$?

Решение. Неравенство б) не верно при $x=0$ и $y=0$; неравенство г) не верно при $x=4$; неравенство е) не верно при $x=0$ и $y=-1$.

Ответ. а), в), д).

4.10. Существует ли такое значение переменной m, и если существует, то чему оно равно, при котором не верно неравенство:

а) $|m-5|+|4-m|>0$;
б) $|15m-4|>0$;
в) $25m^2-10m+1>0$;
г) $25m^2-10m+4>0$;
д) $-4m^2-12m-9<0$;
е) $-m^2-2<0$?

Решение. а) При $m=5$ первое слагаемое равно 0, а второе положительно, значит, сумма их положительна; при $m=4$ первое слагаемое положительно, а второе равно нулю, значит, их сумма положительна; при $m\neq 5$ и $m\neq 4$ оба слагаемых, а значит и их сумма, положительны. Неравенство верно при любом значении m.

б) Неравенство верно, если $15m-4\neq 0$, т. е. $m\neq\frac{4}{15}$.

г) $25m^2-10m+4=(25m^2-10m+1)+3=(5m-1)^2+3$, $(5m-1)^2+3>0$ при любом значении m.

Ответ. а) Нет; б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{1}{5}$; г) нет; д) $-1{,}5$; е) нет.

VII КЛАСС

4.11. Какие из следующих неравенств верны при любом значении переменной x:

а) $4x(x-1)+(5x-1)(x+1)>-12$;
б) $(2x+3)(x-1)-(x-4)(2x+5)<8$;
в) $(3x+2)(2x-0{,}5)-2{,}5x(3x+1)<3$;
г) $(4x-0{,}3)(3x+0{,}1)-2x(6x-0{,}25)<1$?

Решение. а) $4x(x-1)+(5x-1)(x+1)+12=4x^2-4x+5x^2+4x-1+12=9x^2+11$; $9x^2+11>0$ при любом значении x, значит, исходное неравенство верно при любом значении x.

б) $(2x+3)(x-1)-(x-4)(2x+5)-8=2x^2+x-3-2x^2+3x+$ $+20-8=4x+9$; $4x+9<0$ не при любом значении x, значит, исходное неравенство верно не при любом значении x.

в) $(3x+2)(2x-0,5)-2,5x(3x+1)-3=6x^2+2,5x-1-7,5x^2-$ $-2,5x-3=-1,5x^2-4$; $-1,5x^2-4<0$ при любом значении x, значит, исходное неравенство верно при любом значении x.

г) $(4x-0,3)(3x+0,1)-2x(6x-0,25)-1=12x^2-0,5x-0,03-$ $-12x^2+0,5x-1=-1,03$; $(4x-0,3)(3x+0,1)-2x(6x-0,25)<1$ при любом значении x.

Ответ. При любом значении x верны неравенства а), в), г).

4.12. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $2x^2-3\geqslant 12x-21$;
б) $6a-5\leqslant 3a^2-2$;
в) $5y^2+3\geqslant 20y-17$;
г) $12b-1\leqslant 6b^2+5$;
д) $-3y^2+30y\leqslant 75$;
е) $5a^2+20b^2\geqslant 20ab$.

Решение.

а) $2x^2-3-12x+21=2(x^2-6x+9)=2(x-3)^2$; $2(x-3)^2\geqslant 0$ при любом значении x.

б) $6a-5-3a^2+2=-3(a^2-2a+1)=-3(a-1)^2$; $-3(a-1)^2\leqslant$ $\leqslant 0$ при любом значении a.

в) $5y^2+3-20y+17=5(y^2-4y+4)=5(y-2)^2$; $5(y-2)^2\geqslant 0$ при любом значении y.

г) $12b-1-6b^2-5=-6(b^2-2b+1)=-6(b-1)^2$; $-6(b-1)^2\leqslant$ $\leqslant 0$ при любом значении b.

д) $-3y^2+30y-75=-3(y^2-10y+25)=-3(y-5)^2$; $-3(y-$ $-5)^2\leqslant 0$ при любом значении y.

е) $5a^2+20b^2-20ab=5(a^2+4b^2-4ab)=5(a-2b)^2$; $5(a-2b)^2\geqslant$ $\geqslant 0$ при любых значениях a и b.

4.13. Докажите, что при указанных значениях переменной верно неравенство:

а) $p^3+2p^2\geqslant -4p-8$, если $p\geqslant -2$;
б) $m^3+7m\geqslant 3m^2+21$, если $m\geqslant 3$;
в) $6k^2+24\leqslant k^3+4k$, если $k\geqslant 6$;
г) $a^3-5a^2\leqslant 5-a$, если $a\leqslant 5$.

Решение. а) $p^3+2p^2+4p+8=p^2(p+2)+4(p+2)=$ $=(p+2)(p^2+4)$; $(p+2)(p^2+4)\geqslant 0$ при $p\geqslant -2$.

б) $m^3+7m-3m^2-21=m^2(m-3)+7(m-3)=(m-3)(m^2+7)$; $(m-3)(m^2+7)\geqslant 0$ при $m\geqslant 3$.

в) $6k^2+24-k^3-4k=k^2(6-k)+4(6-k)=(k^2+4)(6-k)$; $(k^2+4)(6-k)\leqslant 0$ при $k\geqslant 6$.

г) $a^3-5a^2-5+a=a^2(a-5)+(a-5)=(a-5)(a^2+1)$; $(a-5)(a^2+1)\leqslant 0$ при $a\leqslant 5$.

4.14. Докажите, что при любых значениях a и b верно неравенство:

$$(a^2-b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2.$$

Решение. $(a^2-b^2)^2-4ab(a-b)^2=(a+b)^2(a-b)^2-4ab(a-b)^2=(a-b)^2(a^2+2ab+b^2-4ab)=(a-b)^4$; $(a-b)^4 \geqslant 0$ при любых значениях a и b.

4.15. Докажите, что при $a>0$, $b>0$ верно неравенство $(a-b)^4<a^4+b^4$.

Решение. $(a-b)^4-a^4-b^4=((a-b)^2-a^2)((a-b)^2+a^2)-b^4=(b^2-2ab)(2a^2-2ab+b^2)-b^4=2a^2b^2-4a^3b-2ab^3+4a^2b^2+b^4-2ab^3-b^4=6a^2b^2-4a^3b-4ab^3=-4ab(a^2-2ab+b^2)-2a^2b^2=-4ab(a-b)^2-2a^2b^2$; $-4ab(a-b)^2-2a^2b^2<0$ при $a>0$ и $b>0$.

4.16. Докажите, что при $0<m<1$ верно неравенство

$$3m+\frac{1}{m}>m^2+3.$$

Решение. $3m+\frac{1}{m}-m^2-3=\frac{3m^2+1-m^3-3m}{m}=\frac{(1-m)^3}{m}$.

$$\frac{(1-m)^3}{m}>0 \text{ при } 0<m<1.$$

4.17. Докажите, что при любых значениях x и y верно неравенство:

а) $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$;

б) $x^2+5y^2+2xy+4y+3>0$;

в) $5x^2+4xy+y^2+2x+5>0$;

г) $x^2+2xy+5y^2+4y+8>0$.

Решение. а) $(x^2+2xy+y^2)+(y^2+6y+9)+1=(x+y)^2+(y+3)^2+1$; $(x+y)^2+(y+3)^2+1>0$ при любых значениях x и y.

б) $(x^2+2xy+y^2)+(4y^2+4y+1)+2=(x+y)^2+(2y+1)^2+2$; $(x+y)^2+(2y+1)^2+2>0$ при любых значениях x и y.

в) $(4x^2+4xy+y^2)+(x^2+2x+1)+4=(2x+y)^2+(x+1)^2+4$; $(2x+y)^2+(x+1)^2+4>0$ при любых значениях x и y.

г) $(x^2+2xy+y^2)+(4y^2+4y+1)+7=(x+y)^2+(2y+1)^2+7$; $(x+y)^2+(2y+1)^2+7>0$ при любых значениях x и y.

4.18. С поезда сошли два пассажира и направились одновременно в один и тот же пункт. Первый пассажир половину времени шел со скоростью a *км/ч*, а вторую половину времени со скоростью b *км/ч* ($a \neq b$); второй пассажир шел первую половину пути со скоростью a *км/ч*, а вторую — со скоростью b *км/ч*. Кто из них первым пришел в пункт назначения?

Решение. Пусть первый пассажир шел t *ч*, тогда его путь $\frac{(a+b)t}{2}$ *км*; время второго $\frac{(a+b)t}{4a}+\frac{(a+b)t}{4b}=\frac{(a+b)^2t}{4ab}$ *ч*. Сравнивая t

и $\frac{(a+b)^2 t}{4ab}$, найдем, что время второго больше. Действительно, $\frac{(a+b)^2 t}{4ab} - t = \frac{(a+b)^2 t - t\cdot 4ab}{4ab} = \frac{(a-b)^2 t}{4ab} > 0$, так как $a \neq b$, $a > 0$, $b > 0$, $t > 0$.

Ответ можно дать сразу, если заметить, что и при $a > b$ и при $a < b$ первый пассажир проходит с большей скоростью большее расстояние, чем половина пути.

4.19. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Докажите, что если бриллиант разделить на несколько частей, то стоимость его уменьшится.

Решение. Пусть масса бриллианта в граммах равна p, причем $p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$, где p_k — масса его части (в граммах). Если α — цена одного грамма (в рублях), то стоимость бриллианта до разлома равна αp^2 руб., т. е. равна $\alpha(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)^2$ руб. Стоимость бриллианта после разлома равна $\alpha p_1^2 + \alpha p_2^2 + \alpha p_3^2 + \ldots + \alpha p_n^2$ руб. Так как $(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_n^2 + 2p_1p_2 + 2p_1p_3 + \ldots + 2p_{n-1}p_n$, то $(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)^2 > p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_n^2$. Значит, стоимость целого бриллианта больше, чем стоимость его частей, вместе взятых.

4.20. Докажите, что при любом значении m уравнение:

а) $5mx^2 - 4x - 3m = 0$; в) $3mx^2 - 3x - 2m - 1 = 0$;

б) $4mx^2 - 6x - m - 1 = 0$; г) $7mx^2 - 5x - 3m - 1 = 0$

имеет два корня.

Решение.

а) $\frac{D}{4} = 4 + 15m^2$; $4 + 15m^2 > 0$ при любом значении m.

б) $\frac{D}{4} = 9 + 4m^2 + 4m$; $4m^2 + 4m + 9 = (2m+1)^2 + 8$; $(2m+1)^2 + 8 > 0$ при любом значении m.

в) $D = 9 + 24m^2 + 12m$; $9 + 24m^2 + 12m = (2m+3)^2 + 20m^2$; $(2m+3)^2 + 20m^2 > 0$ при любом значении m.

г) $D = 25 + 84m^2 + 28m$; $25 + 84m^2 + 28m = (49m^2 + 28m + 4) + (35m^2 + 21) = (7m+2)^2 + (35m^2 + 21)$; $(7m+2)^2 + (35m^2 + 21) > 0$ при любом значении m.

4.21. Докажите, что при всех значениях a верно неравенство:

а) $a^6 + 5a^4 + a^2 - 2a^5 - 2a + 5 > 0$;

б) $a^6 - a^5 + a^4 + a^2 - a + 1 > 0$.

Решение. а) $(a^6 - 2a^5 + 5a^4) + (a^2 - 2a + 5) = a^4(a^2 - 2a + 5) + (a^2 - 2a + 5) = (a^2 - 2a + 5)(a^4 + 1) = ((a-1)^2 + 4)(a^4 + 1)$, $((a-1)^2 + 4)(a^4 + 1) > 0$ при любом значении a.

б) $(a^6 - a^5 + a^4) + (a^2 - a + 1) = a^4(a^2 - a + 1) + (a^2 - a + 1) = (a^2 - a + 1)(a^4 + 1) = \left(\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)(a^4 + 1)$, $\left(\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \times (a^4 + 1) > 0$ при любом значении a.

4.22. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях переменных:

а) $x^2+x+2>0$; г) $x^4+x^2-2>0$;

б) $x^2+x-2>0$; д) $x^8+x^4+2>0$;

в) $x^4+x^2+2>0$; е) $x^8+x^4-2>0$.

Решение. а) $x^2+x+2=0$, $D=1-8=-7\,(<0)$, $x^2+x+{}$ $+2>0$ при любом значении x.

б) $x^2+x-2=0$, $D=1+8=9$ (>0), $x^2+x-2>0$ не при любом значении x.

Нетрудно сразу заметить, что можно выбрать достаточно малые положительные значения x, при которых $x^2+x-2<0$.

в) $x^4\geqslant 0$, $x^2\geqslant 0$ при любом значении x. Следовательно, $x^4+x^2+2>0$ при любом значении x.

г) $x^4+x^2-2=0$, $y=x^2$, $y^2+y-2=0$, $D=1+8=9$,

$y=\dfrac{-1\pm 3}{2}$, $y=-2$ или $y=1$.

$x^4+x^2-2=0$ при $x=1$ или $x=-1$.

$x^4+x^2-2>0$ не при любом значении x.

Нетрудно догадаться, что можно выбрать достаточно малые по модулю значения x, при которых $x^4+x^2-2<0$.

д) $x^8\geqslant 0$, $x^4\geqslant 0$ при любом значении x. Следовательно, $x^8+x^4+2>0$ при любом значении x.

е) $x^8+x^4-2=0$, $y=x^4$, $y^2+y-2=0$; $y=-2$ или $y=1$.

$x^4=1$ при $x=1$; $x=-1$.

$x^8+x^4-2>0$ не при любом значении x.

Можно сразу заметить, что при достаточно малых по модулю значениях x, $x^8+x^4-2<0$.

Ответ а); в); д).

4.23. Пароход прошел a *км* по течению реки и возвратился обратно. Сравните время, затраченное пароходом, с тем временем, которое потребуется ему для прохождения $2a$ *км* в стоячей воде.

Решение.

Пусть x *км/ч* — собственная скорость парохода,

y *км/ч* — скорость течения реки, причем в соответствии с условием задачи $x>y$.

$\dfrac{a}{x+y}$ *ч* — время движения парохода по течению реки,

$\dfrac{a}{x-y}$ *ч* — время движения парохода против течения реки,

$\dfrac{2a}{x}$ *ч* — время, которое затрачивает пароход на прохождение $2a$ *км* в стоячей воде.

Сравним выражения $\dfrac{a}{x+y}+\dfrac{a}{x-y}$ и $\dfrac{2a}{x}$.

$$\left(\frac{a}{x+y}+\frac{a}{x-y}\right)-\frac{2a}{x}=\frac{ax^2-axy+ax^2+axy-2ax^2+2ay^2}{x(x+y)(x-y)}=\frac{2ay^2}{x(x+y)(x-y)}.$$

Так как по условию $a>0$, $x>0$, $y>0$, $x>y$, то

$$\frac{a}{x+y}+\frac{a}{x-y}>\frac{2a}{x}.$$

Ответ. Пароход затратит больше времени, чем ему потребовалось бы на прохождение $2a$ *км* в стоячей воде.

4.24. Найдите множество решений неравенства:

а) $(2x-1)^2+2(x-2)^2<(x-2)(2x+3)+(2x+1)^2$;

б) $x(3x-1)+(2x+3)^2\leqslant 8x(x+12)+(x-3)^2-2x^2+79$;

в) $(x+1)^3-2(x^2-7)<x^2(x+2)-x(x+12)$;

г) $(x+4)^2+3(x^2-6)<2x(2x+1)-18(x+1)$.

Решение. а) $4x^2-4x+1+2x^2-8x+8<2x^2-4x+3x-6+$ $+4x^2+4x+1$, $-15x<-14$, $x>\frac{14}{15}$.

$\left]\frac{14}{15};\ +\infty\right[$ — множество решений неравенства.

б) $3x^2-x+4x^2+12x+9\leqslant 8x^2+96x+x^2-6x+9-2x^2+79$; $7x^2+11x+9\leqslant 9x^2+90x-2x^2+9+79$; $-79x\leqslant 79$; $x\geqslant -1$.

$[-1;\ +\infty[$ — множество решений неравенства.

в) $x^3+3x^2+3x+1-2x^2+14<x^3+2x^2-x^2-12x$; $3x+15<$ $<-12x$, $15x<-15$, $x<-1$.

$]-\infty;\ -1[$ — множество решений неравенства.

г) $x^2+8x+16+3x^2-18<4x^2+2x-18x-18$; $24x<-16$; $x<-\frac{2}{3}$.

$\left]-\infty;\ -\frac{2}{3}\right[$ — множество решений неравенства.

Ответ. а) $\left]\frac{14}{15};\ +\infty\right[$; б) $\left[-1;\ +\infty\right[$; в) $]-\infty;\ -1[$; г) $\left]-\infty;\ -\frac{2}{3}\right[$.

4.25. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $(9x-1)(x-4)-(3x-2)(3x+2)<0$;

б) $(2x-1)(1-8x)-(5+4x)(5-4x)-2x>0$;

в) $(2x-1)^2-7x(x-8)+(3x+2)(x+1)>0$;

г) $(12x+1)(1-x)+(3x-2)^2-3x(7-x)<0$.

Решение. а) $9x^2-37x+4-9x^2+4<0$, $-37x<-8$, $x>\frac{8}{37}$.

б) $2x-1-16x^2+8x-25+16x^2-2x>0$, $8x>26$, $x>3\frac{1}{4}$.

в) $4x^2-4x+1-7x^2+56x+3x^2+5x+2>0$, $57x>-3$, $x>-\frac{3}{57}$, $x>-\frac{1}{19}$.

г) $12x-12x^2+1-x+9x^2-12x+4-21x+3x^2<0$, $22x>5$, $x>\frac{5}{22}$.

Ответ. а) 1; б) 4; в) 0; г) 1.

4.26. Укажите число сторон тех выпуклых многоугольников, сумма величин внутренних углов которых не превышает 1620°.

Решение. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника. Тогда

$$180(n-2)\leqslant 1620,$$

$$180n-360\leqslant 1620,\quad 180n\leqslant 1980,\quad n\leqslant 11.$$

Так как $n\in N$ и $n\geqslant 3$, то многоугольники, у которых сумма величин внутренних углов не превышает 1620°, имеют число n сторон, удовлетворяющее неравенству

$$3\leqslant n\leqslant 11,\text{ где } n\in N.$$

Ответ. Многоугольник может иметь 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 сторон.

4.27. Установите, при каком значении n величина каждого внутреннего угла правильного n-угольника будет отличаться от 180° меньше, чем на 40°.

Решение. Если n — число сторон правильного выпуклого многоугольника, то величина внутреннего угла в градусах равна $\frac{180(n-2)}{n}$. По условию

$$180-\frac{180(n-2)}{n}<40.$$

Отсюда

$$180n-180n+360<40n,$$

$$n>9.$$

Ответ. При любом натуральном n, большем 9.

4.28. Решите неравенство:

а) $(127y-635)(2y-15)^2>0$;

б) $\frac{115x-460}{(x-8)^2(2x+15)^2}>0$;

в) $(13y-91)^3(3y-7)^2<0$;

г) $\frac{(76x-532)^3(x-1)^2}{(3x-20)^2}<0$.

Решение.

а) $\begin{cases}127y-635>0;\\ 2y-15\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y>5,\\ y\neq 7{,}5.\end{cases}$

б) $\begin{cases}115x-460>0,\\ x-8\neq 0,\\ 2x+15\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>4,\\ x\neq 8,\\ x\neq -7{,}5.\end{cases}$

в) $\begin{cases}13y-91<0,\\ 3y-7\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y<7,\\ y\neq 2\frac{1}{3}.\end{cases}$

г) $\begin{cases} 76x-532<0, \\ x-1\neq 0, \\ 3x-20\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<7, \\ x\neq 1, \\ x\neq 6\frac{2}{3}. \end{cases}$

Ответ. а)$]5;\ 7{,}5[\cup]7{,}5;\ +\infty[$; б)$]4;\ 8[\cup]8;\ +\infty[$; в) $]-\infty;\ 2\frac{1}{3}[\cup]2\frac{1}{3};\ 7[$; г) $]-\infty;\ 1[\cup]1;\ 6\frac{2}{3}[\cup]6\frac{2}{3};\ 7[$.

4.29. Постройте график функции $y=-0{,}5x-1{,}5$. Используя этот график, составьте неравенство вида

$$-0{,}5x-1{,}5>a \text{ или } -0{,}5x-1{,}5<a,$$

(где a — некоторое число), множеством решений которого служит числовой промежуток: а)$]-1;\ +\infty[$; б) $]-\infty;\ 0[$.

Решение.

а) Из графика (рис. 13) видно, что если $x\in]-1;\ +\infty[$, то $y<-1$. Значит, искомое неравенство: $-0{,}5x-1{,}5<-1$.

$]-1;\ +\infty[$ — множество решений неравенства.

б) Из графика (рис. 13) видно, что если $x\in]-\infty;\ 0[$, то $y>-1{,}5$. Значит, искомое неравенство: $-0{,}5x-1{,}5>-1{,}5$.

$]-\infty;\ 0[$ — множество решений неравенства.

Ответ. а) $-0{,}5x-1{,}5<-1$; б) $-0{,}5x-1{,}5>-1{,}5$.

4.30. Исходя из графических представлений, ответьте на вопросы:

а) При каком значении a множеством решений неравенства $ax>5$ служит числовой промежуток $]3;\ +\infty[$?

б) При каком значении a множеством решений неравенства $ax>5$ служит числовой промежуток $]-\infty;\ -2[$?

в) Существует ли значение a, при котором множеством решений неравенства $ax>5$ служит числовой промежуток $]-4;\ +\infty[$?

г) Существует ли значение a, при котором множеством решений неравенства $ax>5$ служит числовой промежуток $]-\infty;\ 5[$?

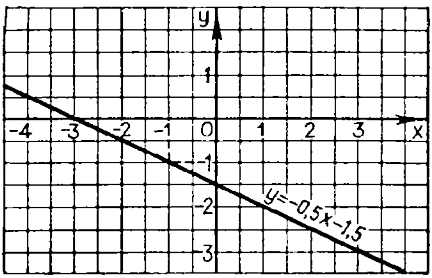


Рис. 13

Решение. График функции $y=ax$ при $a>0$ показан на рисунке 14,*а*, при $a<0$ — на рисунке 14,*б*.

а) Из графика видно, что множеством решений неравенства $ax>5$ может служить числовой промежуток $]3;\ +\infty[$ при $a>0$ (см. рис. 14). Из равенства $a\cdot 3=5$ имеем, что $a=1\frac{2}{3}$. Числовой промежу-

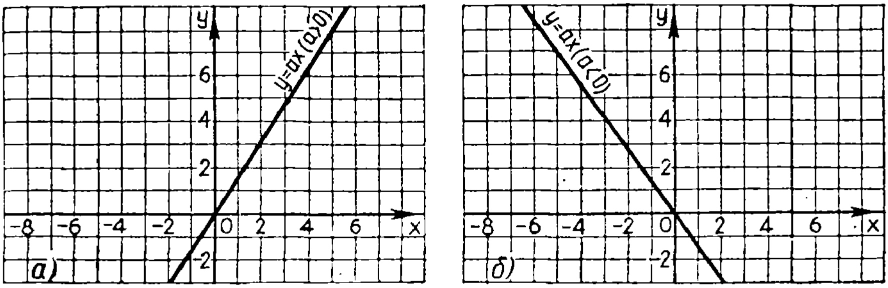


Рис. 14

ток $]3;\ +\infty[$ служит множеством решений неравенства $1\frac{2}{3}x > 5$.

б) Из рисунка 14 видно, что искомое значение a отрицательно. Из равенства $a\cdot(-2)=5$ имеем, что $a=-2{,}5$. Числовой промежуток $]-\infty;\ -2[$ служит множеством решений неравенства $-2{,}5x > 5$.

в) Из рисунка 14 видно, что такого значения a не существует (при $a > 0$ множеством решений служит промежуток $]b;\ +\infty[$, где b — отрицательное число).

г) Из рисунка 14 видно, что такого значения a не существует.

4.31. Используя схематически построенный график функции $y=2x+b$, где $b\neq 0$, найдите:

а) при каком значении b множеством решений неравенства $2x+b > 0$ служит числовой промежуток $]-0{,}5;\ +\infty[$;

б) при каком значении b множеством решений неравенства $2x+b > 0$ служит числовой промежуток $]-\infty;\ 1{,}4[$;

в) существует ли значение b, при котором множеством решений неравенства $2x+b > 0$ служит числовой промежуток $]-\infty;\ 5[$?

Решение. Вид графика функции $y=2x+b$ при $b > 0$ показан на рисунке 15,*а*, а при $b < 0$ — на рисунке 15,*б*.

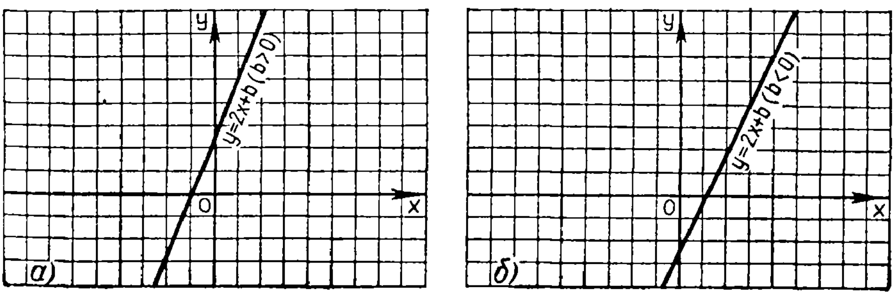
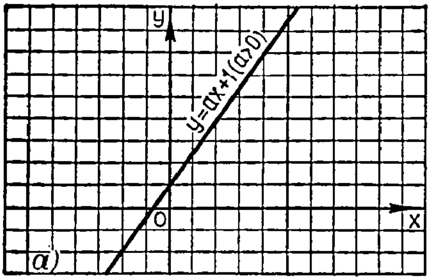


Рис. 15



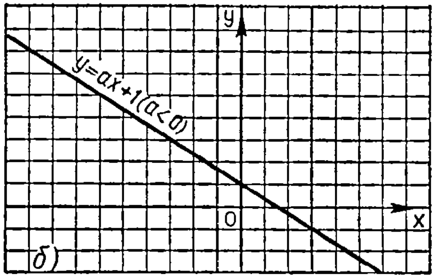


Рис. 16

а) Из рисунка 15 видно, что множеством решений неравенства $2x+b>0$ может служить числовой промежуток $]-0,5; +\infty[$ при $b>0$. Из равенства $2\cdot(-0,5)+b=0$ находим, что $b=1$. Числовой промежуток $]-0,5; +\infty[$ служит множеством решений неравенства $2x+1>0$.

б) Из рисунка 15 видно, что значение b отрицательно. Из равенства $2\cdot 1,4+b=0$ находим, что $b=-2,8$. Числовой промежуток $]-\infty; 1,4[$ служит множеством решений неравенства $2x-2,8<0$.

в) Такого значения b не существует, так как при любом b множество решений неравенства $2x+b>0$ представляет собой числовой промежуток вида $]c; +\infty[$, где c — некоторое число.

4.32. Исходя из графических представлений, ответьте на вопросы:

а) При каком значении a множеством решений неравенства $ax+1>0$ служит числовой промежуток $]-\infty; 4[$?

б) При каком значении a множеством решений неравенства $ax+1>0$ служит числовой промежуток $]-5; +\infty[$?

в) Существует ли такое значение a, при котором множеством решений неравенства $ax+1>0$ служит числовой промежуток $]3; +\infty[$?

Решение. График функции $y=ax+1$ имеет вид, показанный на рисунке 16,*а*, если $a>0$, и на рисунке 16,*б*, если $a<0$.

а) Из рисунка 16 видно, что искомое значение a отрицательно. Из равенства $a\cdot 4+1=0$ находим, что $a=-\frac{1}{4}$. Числовой промежуток $]-\infty; 4[$ служит множеством решений неравенства $-\frac{1}{4}x+1>0$.

б) Из рисунка 16 видно, что искомое значение a положительно. Из равенства $-5a+1=0$ находим, что $a=\frac{1}{5}$. Числовой промежуток $]-5; +\infty[$ служит множеством решений неравенства $\frac{1}{5}x+1>0$.

в) Из рисунка 16 видно, что множеством решений неравенства $ax+1>0$ может служить числовой промежуток вида $]-\infty;\ b[$, где b — положительное число, или вида $]c;\ +\infty[$, где c — отрицательное число. Значит, такого значения a, при котором множеством решений неравенства служит промежуток $]3;\ +\infty[$, не существует.

4.33. Укажите наибольшее и наименьшее целое число, удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} 5\left(1-\frac{x-4}{3}\right)-7(2x-3)>0, \\ \frac{3x-14}{5}-\frac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-\frac{3(x-15)}{4}-2(15-2x)<0, \\ 1,2x-\frac{2x-4}{5}-0,6(1-2x)>0. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} 5-\frac{5x}{3}+\frac{20}{3}-14x+21>0, \\ 0,6x-2,8-0,15x+0,5-0,7x-5,6<0; \end{cases}$

$\begin{cases} 15-5x+20-42x+63>0, \\ -0,25x<7,9; \end{cases}$ $\begin{cases} -47x>-98, \\ x>-31,6; \end{cases}$

$\begin{cases} x<2\frac{4}{47}, \\ x>-31,6. \end{cases}$

Ответ. -31; 2.

б) $\begin{cases} 3x-0,75x+11,25-30+4x<0, \\ 1,2x-0,4x+0,8-0,6+1,2x>0; \end{cases}$

$\begin{cases} 6,25x<18,75, \\ 2x>-0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ x>-0,1. \end{cases}$

Ответ. 0; 2.

4.34. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 *см*. Каким числом может быть выражена длина боковой стороны, если известно, что периметр треугольника меньше 80 *см*.

Решение. Пусть длина боковой стороны равна x *см*. Тогда

$$\begin{cases} 12+x+x<80, \\ x+x>12; \end{cases} \quad \begin{cases} x<34, \\ x>6. \end{cases}$$

Множество решений системы: $]6;\ 34[$.

Ответ. Любым числом из числового промежутка $]6;\ 34[$.

4.35. 1) Подберите значения параметров a и b так, чтобы множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-4 \geqslant 6, \\ ax-1 \leqslant b \end{cases}$$

а) было пусто; б) состояло из одного элемента; в) представляло собой промежуток $[5;\ 10]$; г) представляло собой промежуток $[5;\ +\infty[$.

Ответ. а) Например, $a=2$, $b=7$; б) например, $a=3$, $b=14$; в) например, $a=1$, $b=9$; г) например, $a=-2$, $b=-9$.

2) Для системы неравенств

$$\begin{cases} 3x-1 \geqslant 7, \\ ax-2 \leqslant 4 \end{cases}$$

подберите значение параметра a так, чтобы: а) наименьшее целое число, удовлетворяющее системе, было равно 3; б) наибольшее целое число, удовлетворяющее системе, было равно 12; в) не существовало бы ни одного целого числа, удовлетворяющего системе.

Ответ. а) Например, $a=1$; б) например, $a=\frac{1}{2}$; в) например, $a=13{,}2$.

4.36. Решите неравенство:

а) $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{3x+1} \geqslant 0$; г) $\dfrac{\sqrt{17-2x}}{5x+15} < 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{12-5x}}{7x+2} > 0$; д) $\sqrt{\dfrac{12-3x}{x-1}} \geqslant 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{3x+11}}{4+x} \leqslant 0$; е) $\sqrt{\dfrac{15x-3}{2x+4}} > 0$.

Решение.

а) $\begin{cases} 2x+7 \geqslant 0, \\ 3x+1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3{,}5, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases}$

$\left]-\frac{1}{3};\ +\infty\right[$ — множество решений неравенства.

б) $\begin{cases} 12-5x > 0, \\ 7x+2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2{,}4, \\ x > -\frac{2}{7}. \end{cases}$

$\left]-\frac{2}{7};\ 2{,}4\right[$ — множество решений неравенства.

в) $\begin{cases} 3x+11 \geqslant 0, \\ 4+x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3\frac{2}{3}, \\ x < -4. \end{cases}$

Множество решений неравенства пусто.

г) $\begin{cases} 17-2x>0, \\ 5x+15<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<8{,}5, \\ x<-3. \end{cases}$

$]-\infty; -3[$ — множество решений неравенства.

д) $\frac{12-3x}{x-1} \geqslant 0$,

$\begin{cases} 12-3x \geqslant 0, \\ x-1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 12-3x \leqslant 0, \\ x-1<0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x>1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x<1. \end{cases}$

$]1; 4]$ — множество решений неравенства.

е) $\frac{15x-3}{2x+4}>0$,

$\begin{cases} 15x-3>0, \\ 2x+4>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 15x-3<0, \\ 2x+4<0. \end{cases}$

$]-\infty, -2[\cup]0{,}2; +\infty[$ — множество решений неравенства.

Ответ. а) $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$; б) $\left]-\frac{2}{7}; 2{,}4\right[$; в) $\varnothing$; г) $]-\infty; -3[$; д) $]1; 4]$; е) $]-\infty; -2[\cup]0{,}2; +\infty[$.

4.37. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{2x-17}+\sqrt{31-x}$; в) $\sqrt{(1-7x)^3}+\sqrt{1-8x}$;

б) $\sqrt{5x-17}+\sqrt{22-8x}$; г) $\sqrt{(2-5x)^2}+\sqrt{2-4x}$.

Решение.

а) $\begin{cases} 2x-17 \geqslant 0, \\ 31-x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 8{,}5, \\ x \leqslant 31. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x-17 \geqslant 0, \\ 22-8x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3{,}4, \\ x \leqslant 2\frac{3}{4}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1-7x \geqslant 0, \\ 1-8x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{7}, \\ x \leqslant \frac{1}{8}. \end{cases}$

г) $2-4x \geqslant 0$; $x \leqslant \frac{1}{2}$.

Ответ. а) $[8{,}5; 31]$; б) $\varnothing$; в) $\left]-\infty; \frac{1}{8}\right]$; г) $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

4.38. В двузначном числе цифра десятков на 2 больше цифры единиц. Если это число сложить с числом, записанным теми же цифрами, взятыми в обратном порядке, то полученная сумма будет больше 80 и меньше 90. Найдите это двузначное число.

Решение. I способ. Пусть x — цифра единиц двузначного числа ($x \in N$), тогда $x+2$ — цифра его десятков. Искомое двузначное число $10(x+2)+x$. Число, записанное теми же цифрами, взятыми в обратном порядке, $10x+(x+2)$.

$$80 < 10(x+2)+x+10x+(x+2) < 90,$$
$$58 < 22x < 68,$$
$$29 < 11x < 34,$$
$$2\frac{7}{11} < x < 3\frac{1}{11},\quad x=3.$$

II способ. Прочитав внимательно условие задачи, нетрудно обнаружить, что сумма есть число, принадлежащее промежутку от 80 до 90 и записанное одинаковыми цифрами. Таким является число 88. Подбором находим число, сумма цифр которого равна 8 и цифра десятков на 2 больше цифры единиц. Искомое число: 53.

Ответ. 53.

4.39. Найдите двузначное число, если известно, что прибавив к нему его половину, мы получим число, большее 128, но меньшее 130.

Решение. Пусть x — искомое двузначное число ($x \in Z$). $128 < x+\frac{x}{2} < 130$, $256 < 3x < 260$, $85\frac{1}{3} < x < 86\frac{2}{3}$.

Ответ. 86.

4.40. В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Найдите это число, если известно, что оно больше 50 и меньше 70.

Решение. Пусть x — цифра единиц двузначного числа ($x \in N$), тогда $x+3$ — цифра десятков. Искомое двузначное число $10(x+3)+x$.

$$50 < 10(x+3)+x < 70,$$
$$50 < 10x+30+x < 70,$$
$$1\frac{9}{11} < x < 3\frac{7}{11}.$$
$$x=2 \text{ или } x=3.$$

Ответ. 52; 63.

4.41. Две стороны треугольника имеют длину 5,2 и 2,4 *см*. Длина третьей стороны выражается целым числом сантиметров. Какова длина третьей стороны?

Решение. Пусть длина третьей стороны x *см*.

$$5{,}2-2{,}4 < x < 5{,}2+2{,}4,\quad 2{,}8 < x < 7{,}6.$$

Ответ. Длина третьей стороны может быть равна 3, 4, 5, 6, 7 *см*.

4.42. С каким количеством воды при температуре 50°С надо смешать 6 *л* воды при температуре 15°С, чтобы получить воду, температура которой выше 30°, но ниже 40°.

Решение. Пусть x *л* — искомое количество воды.

$30(x+6) < x\cdot 50+6\cdot 15 < 40(x+6)$, $3x+18 < 5x+9 < 4x+24$,

$$\begin{cases} 5x+9 > 3x+18, \\ 5x+9 < 4x+24; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4{,}5, \\ x < 15; \end{cases} \quad 4{,}5 < x < 15.$$

Ответ. Более 4,5 *л*, но менее 15 *л*.

4.43. Найдите множество решений двойного неравенства $273 < 272+12b < 274$ и укажите три каких-либо элемента этого множества.

Решение.

$$273-272 < 12b < 274-272,$$
$$1 < 12b < 2,$$
$$\frac{1}{12} < b < \frac{2}{12}.$$

$\left]\frac{1}{12};\ \frac{2}{12}\right[$ — множество решений неравенства.

$\frac{1}{12}=\frac{2}{24}$; $\frac{2}{12}=\frac{4}{24}$. Искомому множеству принадлежит, например, число $\frac{3}{24}$, т. е. $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{12}=\frac{10}{120}$; $\frac{2}{12}=\frac{20}{120}$. Искомому множеству принадлежат, например, числа $\frac{13}{120}$, $\frac{17}{120}$.

Ответ. $\left]\frac{1}{12};\ \frac{2}{12}\right[$. Элементами множества служат, например, числа $\frac{1}{8}$, $\frac{13}{120}$, $\frac{17}{120}$.

4.44. Числовая последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n=3n-8$.

Указать номера тех членов этой последовательности, которые:

а) больше 40 и меньше 49,

б) больше —23 и меньше 8,

в) больше —20 и меньше —10.

Решение.

а) $40 < 3n-8 < 49$, где $n \in N$.

$$\begin{cases} 3n-8 > 40, \\ 3n-8 < 49; \end{cases} \quad \begin{cases} n > 16, \\ n < 19. \end{cases} \quad n \in \{17,\ 18\}.$$

б) $-23 < 3n-8 < 8$, где $n \in N$.

$$\begin{cases} 3n-8 > -23, \\ 3n-8 < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} n > -5, \\ n < 5\frac{1}{3}; \end{cases} \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

в) $-20 < 3n - 8 < -10$, где $n \in N$.

$$\begin{cases} 3n-8 > -20, \\ 3n-8 < -10; \end{cases} \quad \begin{cases} n > -4, \\ n < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Среди значений $n \in \left]-4; -\frac{2}{3}\right[$ нет натуральных. Значит, среди членов данной последовательности нет таких, которые заключены между -20 и -10.

Ответ. а) 17-й и 18-й члены; б) 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й члены; в) таких членов нет.

4.45. а) При каких значениях параметра a неравенству $7 < 2x - 4 < a$ не удовлетворяет ни одно из целых чисел?

б) При каких значениях параметра b неравенству $2b - 1 < < 5x + 4 < 27$ не удовлетворяет ни одно из отрицательных чисел?

Решение. а) $11 < 2x < a + 4$; $5{,}5 < x < \frac{a}{2} + 2$.

Параметр a может принимать такие значения, при которых верно неравенство $\frac{a}{2} + 2 < 6$ Отсюда $\frac{a}{2} < 4$; $a < 8$.

б) $2b - 5 < 5x < 23$; $0{,}4b - 1 < x < 4{,}6$.

Параметр b может принимать такие значения, при которых $0{,}4b - 1 \geqslant 0$. Отсюда $0{,}4b \geqslant 1$; $b \geqslant 2{,}5$.

Ответ. а) при $a < 8$; б) при $b \geqslant 2{,}5$, ответ не изменится, если число 27 заменить каким-либо другим положительным числом.

4.46. Найдите множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $-3 \leqslant 2{,}4 + 6b \leqslant 4{,}8$; в) $1 \leqslant 17 - 0{,}4b \leqslant 2$;

б) $0 < \frac{250b - 140}{7} < 60$; г) $10 < \frac{24 - 15b}{6} < 22$.

Решение. а) $-5{,}4 \leqslant 6b \leqslant 2{,}4$, $-0{,}9 \leqslant b \leqslant 0{,}4$; $\{0\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

б) $0 < 250b - 140 < 420$, $140 < 250b < 560$, $0{,}56 < b < 2{,}24$; $\{1;\ 2\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

в) $-16 \leqslant -0{,}4b \leqslant -15$, $15 \leqslant 0{,}4b \leqslant 16$, $37{,}5 \leqslant b \leqslant 40$, $\{38,\ 39,\ 40\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

г) $60 < 24 - 15b < 132$, $36 < -15b < 108$, $-108 < 15b < -36$, $-7{,}2 < b < -2{,}4$, $\{-6;\ -5;\ -4;\ -3\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

Ответ. а) $\{0\}$; б) $\{1;\ 2\}$; в) $\{38,\ 39;\ 40\}$; г) $\{-6;\ -5;\ -4;\ -3\}$.

4.47. Постройте график функции $y = 0{,}5x + 2$. Используя этот график, составьте двойное неравенство вида $a \leqslant 0{,}5x + 2 \leqslant b$, множеством решений которого служит числовой промежуток а) $[-4;\ -2]$; б) $[-6;\ 3]$.

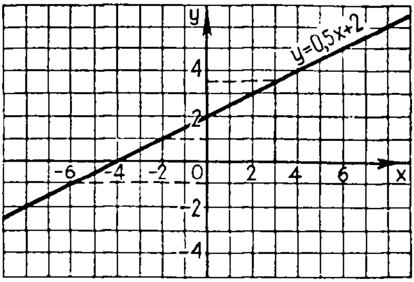


Рис. 17

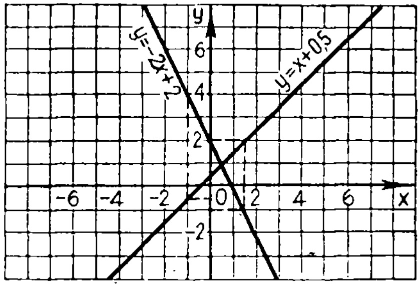


Рис. 18

Решение. а) Из графика (рис. 17) видно, что если $x \in [-4;\ -2]$, то $0 \leqslant y \leqslant 1$. Значит, искомое неравенство $0 \leqslant 0{,}5x+2 \leqslant 1$.

б) Из графика (рис. 17) видно, что если $x \in [-6;\ 3]$, то $-1 \leqslant y \leqslant 3{,}5$. Значит, искомое неравенство $-1 \leqslant 0{,}5x+2 \leqslant 3{,}5$.

Ответ. а) $0 \leqslant 0{,}5x+2 \leqslant 1$; б) $-1 \leqslant 0{,}5x+2 \leqslant 3{,}5$.

4.48. Постройте в одной системе координат графики функций $y=x+0{,}5$ и $y=-2x+2$. Используя графики функций, составьте систему неравенств вида

$$\begin{cases} x+0{,}5 \lesseqgtr a, \\ -2x+2 \lesseqgtr b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые числа, множеством решений которой служит числовой промежуток: а) $]-\infty;\ 1{,}5[$; б) $]-1;\ +\infty[$; в) $]-\infty;\ 0[$.

Решение. а) Из рисунка 18 видно, что при $x \in]-\infty;\ 1{,}5[$ график первой функции расположен ниже прямой $y=2$, а график второй функции — выше прямой $y=-1$. Значит, искомой системой неравенств может служить, например, система

$$\begin{cases} x+0{,}5 < 2, \\ -2x+2 > -1. \end{cases}$$

Можно составить другие системы с тем же множеством решений. Например, оставив первое неравенство без изменения и заменив во втором неравенстве -1 меньшим числом -4, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x+0{,}5 < 2, \\ -2x+2 > -4. \end{cases}$$

б) Из рисунка 18 видно, что при $x \in]-1;\ +\infty[$ график первой функции расположен выше прямой $y=-0{,}5$, а график в) $-20 < 3n-8 < -10$, где $n \in N$.

$$\begin{cases} 3n-8 > -20, \\ 3n-8 < -10; \end{cases} \quad \begin{cases} n > -4, \\ n < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Среди значений $n \in \left]-4; -\frac{2}{3}\right[$ нет натуральных. Значит, среди членов данной последовательности нет таких, которые заключены между -20 и -10.

Ответ. а) 17-й и 18-й члены; б) 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й члены; в) таких членов нет.

4.45. а) При каких значениях параметра a неравенству $7 < 2x-4 < a$ не удовлетворяет ни одно из целых чисел?

б) При каких значениях параметра b неравенству $2b-1 < 5x+4 < 27$ не удовлетворяет ни одно из отрицательных чисел?

Решение. а) $11 < 2x < a+4$; $5{,}5 < x < \frac{a}{2}+2$.

Параметр a может принимать такие значения, при которых верно неравенство $\frac{a}{2}+2 < 6$ Отсюда $\frac{a}{2} < 4$; $a < 8$.

б) $2b-5 < 5x < 23$; $0{,}4b-1 < x < 4{,}6$.

Параметр b может принимать такие значения, при которых $0{,}4b-1 \geqslant 0$. Отсюда $0{,}4b \geqslant 1$; $b \geqslant 2{,}5$.

Ответ. а) при $a < 8$; б) при $b \geqslant 2{,}5$, ответ не изменится, если число 27 заменить каким-либо другим положительным числом.

4.46. Найдите множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $-3 \leqslant 2{,}4+6b \leqslant 4{,}8$; в) $1 \leqslant 17-0{,}4b \leqslant 2$;

б) $0 < \frac{250b-140}{7} < 60$; г) $10 < \frac{24-15b}{6} < 22$.

Решение. а) $-5{,}4 \leqslant 6b \leqslant 2{,}4$, $-0{,}9 \leqslant b \leqslant 0{,}4$; $\{0\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

б) $0 < 250b-140 < 420$, $140 < 250b < 560$, $0{,}56 < b < 2{,}24$; $\{1;\ 2\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

в) $-16 \leqslant -0{,}4b \leqslant -15$, $15 \leqslant 0{,}4b \leqslant 16$, $37{,}5 \leqslant b \leqslant 40$, $\{38,\ 39,\ 40\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

г) $60 < 24-15b < 132$, $36 < -15b < 108$, $-108 < 15b < -36$, $-7{,}2 < b < -2{,}4$, $\{-6;\ -5;\ -4;\ -3\}$ — множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

Ответ. а) $\{0\}$; б) $\{1;\ 2\}$; в) $\{38,\ 39;\ 40\}$; г) $\{-6;\ -5;\ -4;\ -3\}$.

4.47. Постройте график функции $y=0{,}5x+2$. Используя этот график, составьте двойное неравенство вида $a \leqslant 0{,}5x+2 \leqslant b$, множеством решений которого служит числовой промежуток а) $[-4;\ -2]$; б) $[-6;\ 3]$.

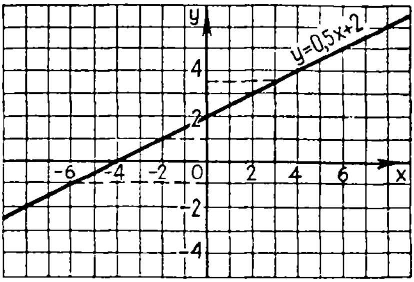


Рис. 17

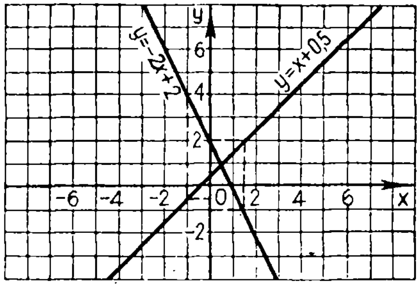


Рис. 18

Решение. а) Из графика (рис. 17) видно, что если $x \in [-4; \ -2]$, то $0 \leqslant y \leqslant 1$. Значит, искомое неравенство $0 \leqslant 0{,}5x + 2 \leqslant 1$.

б) Из графика (рис. 17) видно, что если $x \in [-6; \ 3]$, то $-1 \leqslant y \leqslant 3{,}5$. Значит, искомое неравенство $-1 \leqslant 0{,}5x + 2 \leqslant 3{,}5$.

Ответ. а) $0 \leqslant 0{,}5x + 2 \leqslant 1$; б) $-1 \leqslant 0{,}5x + 2 \leqslant 3{,}5$.

4.48. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x + 0{,}5$ и $y = -2x + 2$. Используя графики функций, составьте систему неравенств вида

$$\begin{cases} x + 0{,}5 \lesseqgtr a, \\ -2x + 2 \lesseqgtr b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые числа, множеством решений которой служит числовой промежуток: а) $]-\infty; \ 1{,}5[$; б) $]-1; \ +\infty[$; в) $]-\infty; \ 0[$.

Решение. а) Из рисунка 18 видно, что при $x \in]-\infty; \ 1{,}5[$ график первой функции расположен ниже прямой $y = 2$, а график второй функции — выше прямой $y = -1$. Значит, искомой системой неравенств может служить, например, система

$$\begin{cases} x + 0{,}5 < 2, \\ -2x + 2 > -1. \end{cases}$$

Можно составить другие системы с тем же множеством решений. Например, оставив первое неравенство без изменения и заменив во втором неравенстве -1 меньшим числом -4, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x + 0{,}5 < 2, \\ -2x + 2 > -4. \end{cases}$$

б) Из рисунка 18 видно, что при $x \in]-1; \ +\infty[$ график первой функции расположен выше прямой $y = -0{,}5$, а график второй функции — ниже прямой $y=4$. Значит, искомой системой неравенств может служить, например, система

$$\begin{cases} x+0{,}5>-0{,}5, \\ -2x+2<4. \end{cases}$$

в) Из рисунка 18 видно, что при $x\in]-\infty;\ 0[$ график первой функции расположен ниже прямой $y=0{,}5$, а график второй функции расположен выше прямой $y=2$. Значит, искомой системой неравенств может служить, например, система

$$\begin{cases} x+0{,}5<0{,}5, \\ -2x+2>2. \end{cases}$$

4.49. Найдите множество значений a, при которых сумма числа a и числа, ему обратного, принадлежит промежутку $[-2;\ 2]$.

Решение. $-2\leqslant a+\frac{1}{a}\leqslant 2;$

$$\begin{cases} a+\frac{1}{a}\leqslant 2, \\ a+\frac{1}{a}\geqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2-2a+1}{a}\leqslant 0, \\ \frac{a^2+2a+1}{a}\geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(a-1)^2}{a}\leqslant 0, \\ \frac{(a+1)^2}{a}\geqslant 0. \end{cases}$$

$a=1$ или $a=-1$.

Ответ. $\{-1;\ 1\}$.

4.50. Из числового промежутка $[12;\ 50]$ выделите подмножество чисел, удовлетворяющих неравенству

$$1\leqslant \frac{1}{3}x-4\leqslant 17.$$

Решение.

$$5\leqslant \frac{1}{3}x\leqslant 21,$$

$$15\leqslant x\leqslant 63.$$

$$[12;\ 50]\cap[15;\ 63]=[15;\ 50].$$

Ответ. $[15;\ 50]$.

4.51. Решите неравенство:

а) $\frac{5x}{4(x-3)}+\frac{2x+1}{2}<\frac{4x+3}{4}$; б) $\frac{3x-1}{6}-\frac{4}{3(x-1)}>\frac{x+5}{2}$.

Решение. а) $\frac{4x+3}{4(x-3)}<0;$

$$\begin{cases} 4x+3<0, \\ x-3>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x+3>0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

$]-0{,}75;\ 3[$ — множество решений неравенства.

б) $\frac{8-16x}{6(x-1)}>0,\quad \frac{4(1-2x)}{3(x-1)}>0.$

$$\begin{cases}1-2x>0,\\ x-1>0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}1-2x<0,\\ x-1<0.\end{cases}$$

]0,5; 1[—множество решений неравенства.

Ответ. а)]—0,75; 3[; б)]0,5; 1[.

4.52. а) При каких значениях x разность дробей $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+2}$ меньше их произведения?

б) При каких значениях x сумма дробей $\frac{2}{x}$ и $\frac{2}{3-x}$ больше их произведения?

Решение. а) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x(x+2)}$,

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x(x+2)}<0,$

$\frac{x+2-x-1}{x(x+2)}<0,\quad \frac{1}{x(x+2)}<0;$

$x(x+2)<0,\quad -2<x<0.$

б) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3-x}>\frac{2\cdot 2}{x(3-x)}$,

$\frac{2}{x}+\frac{2}{3-x}-\frac{4}{x(3-x)}>0,$

$\frac{6-2x+2x-4}{x(3-x)}>0,\quad \frac{2}{x(3-x)}>0,$

$x(3-x)>0,\quad 0<x<3.$

Ответ. а) При $x\in]-2;\ 0[$; б) при $x\in]0;\ 3[$.

4.53. Найдите множество решений неравенства

а) $\frac{(12x-69)(2x-5)^2}{4x-1}<0;$ б) $\frac{(6x-4)(7x-4)^2}{1-5x}>0.$

Решение.

а) $\begin{cases}\frac{12x-69}{4x-1}<0,\\ 2x-5\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{4}<x<5\frac{3}{4},\\ x\neq 2{,}5.\end{cases}$

б) $\begin{cases}\frac{6x-4}{1-5x}>0,\\ 7x-4\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3},\\ x\neq \frac{4}{7}.\end{cases}$

Ответ. а) $\left]\frac{1}{4};\ 2{,}5\right[\cup\left]2{,}5;\ 5\frac{3}{4}\right[$;

б) $\left]\frac{1}{5};\ \frac{4}{7}\right[\cup\left]\frac{4}{7};\ \frac{2}{3}\right[$.

4.54. Решите неравенство:

а) $2(2x^4+3x^2)>3(2x^3+x)-2$;

б) $2(2x^4+3x^2)<3(x+x^3)-2$.

Решение.

а) $2(2x^4+3x^2)-3(2x^3+x)+2>0$,

$2x^2(2x^2+1)+4x^2-3x(2x^2+1)+2>0$,

$2x^2(2x^2+1)-3x(2x^2+1)+2(2x^2+1)>0$,

$(2x^2+1)(2x^2-3x+2)>0$;

$2x^2+1>0$ при всех значениях x;

$2x^2-3x+2>0$. $D=9-16$, $D<0$.

$2x^2-3x+2>0$ при всех значениях x.

$]-\infty;\ +\infty[$ — множество решений неравенства.

б) $2(2x^4+3x^2)-3(x+x^3)+2<0$,

$2x^2(2x^2+2)+2x^2-3x(1+x^2)+2<0$,

$4x^3(x^2+1)-3x(x^2+1)+2(x^2+1)<0$,

$(x^2+1)(4x^2-3x+2)<0$,

$x^2+1>0$ при всех значениях x,

$4x^2-3x+2<0$, $D=9-32$; $D<0$.

Множество решений неравенства $4x^2-3x+2<0$, а значит, и заданного неравенства, пусто.

Ответ. а) $]-\infty;\ +\infty[$; б) $\varnothing$.

4.55. Постройте график некоторой функции $y=f(x)$, заданной на множестве $[-8;\ 8]$, если известно, что $f(-3)=0$, $f(0)=0$, $f(5)=0$ и что $f(x)>0$ при $x\in[-8;\ -3[\ \cup\ ]0;\ 5[$ и $f(x)<0$ при $x\in]-3;\ 0[\ \cup\ ]5;\ 8[$.

Решение. Примером может служить график функции, представленной на рисунке 19.

4.56. Решите графически неравенство:

а) $x^2>2x-1$;

б) $x^2>2-x$;

в) $x^2<6-5x$;

г) $x^2>2x-4$.

Ответ.

а) $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$;

б) $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$;

в) $]-1;\ 6[$; г) $\varnothing$.

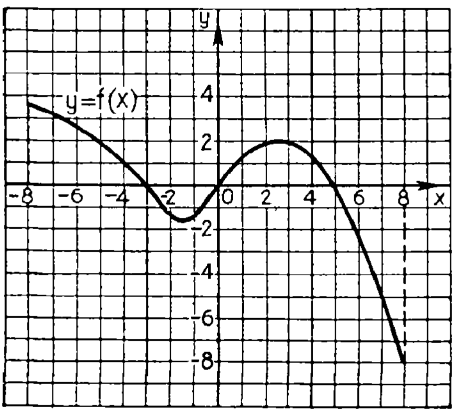


Рис. 19

4.57. Решите графически неравенство:

а) $\frac{1}{x}>x$; б) $x^2>x$.

Проверьте правильность ответа, решив неравенство аналитически.

Ответ.

а) $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$;

б) $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$.

4.58. Построив схематически график функции $y=(2x-1)\times\times(5x+8)$, решите неравенство:

а) $(2x-1)(5x+8)<0$;

б) $(2x-1)(5x+8)>0$.

Решение. График представляет собой параболу с ветвями, направленными вверх, которая пересекает ось x в точках $(-1,6;\ 0)$, $(0,5;\ 0)$.

Ответ. а) $]-1,6;\ 0,5[$; б) $]-\infty;\ -1,6[\cup]0,5;\ +\infty[$.

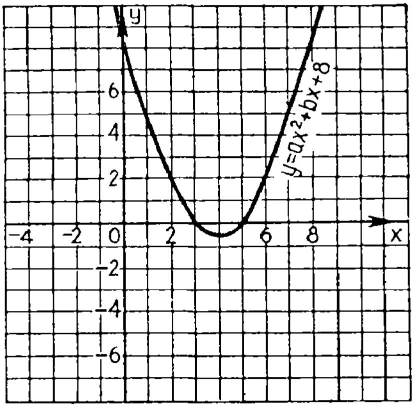


Рис. 20

4.59. Покажите с помощью графиков, что

а) множество решений неравенства $x^2<2x-4$ пусто;

б) решением неравенства $x^2>3x-5$ служит любое число.

4.60. а) Известно, что множеством решений неравенства $ax^2+bx+8<0$ служит числовой промежуток $]3;\ 5[$. Начертите схематически график функции $y=ax^2+bx+8$.

б) Существуют ли значения параметров a и b, при которых множество решений неравенства $ax^2+bx+8>0\ (a\neq0)$ пусто? Ответ дайте, исходя из геометрических представлений.

Решение. а) Схематический график показан на рисунке 20.

б) График функции $y=ax^2+bx+8$ при $a\neq0$ представляет собой параболу, пересекающую ось y в точке (0; 8). Так как парабола проходит через точку (0; 8), то ни при каких значениях a и b все точки параболы не могут располагаться в нижней полуплоскости, т. е. не существует значений a и b, при которых множество решений неравенства пусто.

4.61. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{(x^2-3x-10)^2}=x^2-3x-10$,

б) $\sqrt{(x^2-9x+14)^2}=9x-x^2-14$?

Решение. а) Равенство верно при тех и только тех значениях x, при которых верно неравенство $x^2-3x-10\geqslant0$. Решим это неравенство:

$$(x+2)(x-5)\geqslant0.$$

$$\begin{cases}x+2\geqslant0,\\x-5\geqslant0\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x+2\leqslant0,\\x-5\leqslant0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant-2,\\x\geqslant5\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x\leqslant-2,\\x\leqslant5.\end{cases}$$

$]-\infty;\ -2]\cup[5;\ +\infty[$ — множество решений неравенства.

Замечание. Неравенство $x^2-3x-10\geqslant 0$ можно решить, исходя из графических представлений. Найдя корни трехчлена (-2 и 5), построим схематически параболу $y=x^2-3x-10$ или представим ее мысленно (парабола пересекает ось x в точках с абсциссами -2 и 5; ее ветви направлены вверх). Из графика видно, что неравенство верно при значениях x, принадлежащих промежутку $]-\infty;\ -2]$ или промежутку $[5;\ +\infty[$. Множество решений неравенства: $]-\infty;\ -2]\cup[5;+\infty[$.

б) Равенство верно при тех и только тех значениях x, при которых верно неравенство $x^2-9x+14\leqslant 0$. Решим это неравенство:

$$(x-2)(x-7)\leqslant 0,$$

$$\begin{cases} x-2\leqslant 0, \\ x-7\geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-7\leqslant 0. \end{cases}$$

$[2;\ 7]$ — множество решений неравенства.

Неравенство $x^2-9x+14\leqslant 0$ можно решить, исходя из графических представлений (см. замечание к упражнению № 61а).

Ответ. а) При $x\in]-\infty;\ -2]\cup[5;\ +\infty[$; б) при $x\in[2;\ 7]$.

4.62. Из каждой вершины n-угольника проведены его диагонали. Установите, сколько сторон имеет n-угольник, если число его диагоналей не превышает 35.

Решение. $\frac{n(n-3)}{2}$ — число диагоналей, $\frac{n(n-3)}{2}\leqslant 35$, $n^2-3n-70\leqslant 0$, $-7\leqslant n\leqslant 10$.

По условию $n>3$. Значит, $3<n\leqslant 10$, $n\in N$.

Ответ. Многоугольник может иметь 4, 5, 6, 7, 8, 9 сторон.

4.63. С каким количеством цинка надо сплавить 16 *кг* меди, чтобы получить сплав, содержащий более 20%, но менее 40% меди?

Решение. Пусть x *кг* — искомая масса цинка. Тогда $\frac{16}{16+x}\cdot 100$ — процентное содержание меди в сплаве.

$$20<\frac{16}{16+x}\cdot 100<40,$$

$$1<\frac{16}{16+x}\cdot 5<2;$$

$$\begin{cases} \frac{80}{16+x}>1, \\ \frac{80}{16+x}<2; \end{cases} \quad \begin{cases} x<64, \\ x>-16, \\ x>24. \end{cases} \quad 24<x<64.$$

Ответ. Более 24 *кг*, но менее 64 *кг*.

4.64. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} (x+2)(x-7)>0, \\ (x+5)(x-7)<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+x-12<0, \\ x^2-2x-3>0. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x-7>0, \\ x+2>0, \\ x+5<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-7<0, \\ x+2<0, \\ x+5>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>7, \\ x>-2, \\ x<-5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<7, \\ x<-2, \\ x>-5. \end{cases}$

$]-5, -2[$ — множество решений системы неравенств. Этому множеству принадлежат целые числа: -4, -3.

б) $\begin{cases} (x-3)(x+4)<0, \\ (x-3)(x+1)>0. \end{cases}$

$\begin{cases} x-3>0, \\ x+4<0, \\ x+1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-3<0, \\ x+4>0, \\ x+1<0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>3, \\ x<-4, \\ x>-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<3, \\ x>-4, \\ x<-1. \end{cases}$

$]-4; -1[$ — множество решений системы неравенств. Этому множеству принадлежат целые числа: -3, -2.

Ответ. а) -4, -3; б) -3, -2.

4.65. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x-4}{x+6}>0, \\ \dfrac{1-x}{x+6}<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4x-10}{2x-1}<0, \\ \dfrac{x-0,12}{2x-1}>0. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x+6>0, \\ 2x-4>0, \\ 1-x<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+6<0, \\ 2x-4<0, \\ 1-x>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>-6, \\ x>2, \\ x>1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<-6, \\ x<2, \\ x<1. \end{cases}$

$x>2$ или $x<-6$.

$]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$ — множество решений системы.

б) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ 4x-10<0, \\ x-0,12>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x-1<0, \\ 4x-10>0, \\ x-0,12<0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0{,}5, \\ x < 2{,}5, \\ x > 0{,}12 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0{,}5, \\ x > 2{,}5, \\ x < 0{,}12. \end{cases}$$

$$0{,}5 < x < 2{,}5.$$

$]0{,}5;\ 2{,}5[$ — множество решений системы.

Ответ. а) $]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$; б) $]0{,}5; 2{,}5[$.

4.66. Числитель обыкновенной дроби на 5 меньше знаменателя. Если к числителю прибавить 1, то получится дробь, меньшая, чем $\frac{17}{24}$. Если же из числителя вычесть 1, то получится дробь, большая, чем $\frac{11}{24}$. Найдите дробь.

Решение. Пусть x — числитель дроби ($x \in N$). Тогда $x+5$ — ее знаменатель, $\frac{x}{x+5}$ — искомая дробь.

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+5} < \dfrac{17}{24}, \\ \dfrac{x-1}{x+5} > \dfrac{11}{24}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+5} - \dfrac{17}{24} < 0, \\ \dfrac{x-1}{x+5} - \dfrac{11}{24} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{7x-61}{24(x+5)} < 0, \\ \dfrac{13x-79}{24(x+5)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 > 0, \\ 7x-61 < 0, \\ 13x-79 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+5 < 0, \\ 7x-61 > 0, \\ 13x-79 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5, \\ x < 8\frac{5}{7}, \\ x > 6\frac{1}{13} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -5, \\ x > 8\frac{5}{7}, \\ x < 6\frac{1}{13}; \end{cases}$$

$$6\frac{1}{13} < x < 8\frac{5}{7};\ x = 7 \text{ или } x = 8.$$

Ответ. $\frac{7}{12}$; $\frac{8}{13}$.

4.67. Докажите, что неравенство $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$ верно в том и только в том случае, когда модуль одного из чисел a или b больше единицы, а другого — меньше единицы.

Решение.

$$\frac{(1+ab)^2}{(a+b)^2} - 1 < 0, \quad \frac{1+2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2} < 0,$$

$$\frac{(1-a^2)-b^2(1-a^2)}{(a+b)^2} < 0, \quad \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a+b)^2} < 0;$$

$$\begin{cases} 1-a^2<0, \\ 1-b^2>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1-a^2>0, \\ 1-b^2<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a|>1, \\ |b|<1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} |a|<1, \\ |b|>1. \end{cases}$$

Неравенство верно тогда и только тогда, когда $|a|>1$ и $|b|<1$ или когда $|a|<1$ и $|b|>1$.

4.68. Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{(x+2)(3-x)}{(x+4)^2}>0$; в) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+4}<0$;

б) $\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}<0$; г) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4x+4}>0$.

Решение.

а) $\begin{cases} x+2>0, \\ 3-x>0, \\ x\neq -4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2<0, \\ 3-x<0, \\ x\neq -4. \end{cases}$

$]-2;\ 3[$ — множество решений неравенства:

б) $\begin{cases} x-1>0, \\ x-5<0, \\ x\neq 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1<0, \\ x-5>0, \\ x\neq 3. \end{cases}$

$]1;\ 3[\cup]3;\ 5[$ — множество решений неравенства.

в) $x^2+2x+4>0$ — при любом значении x.

$x^2-5x+6<0$,

$(x-2)(x-3)<0$;

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0. \end{cases}$$

$]2;\ 3[$ — множество решений неравенства.

г) $\frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)^2}>0$;

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+3>0, \\ x\neq 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+2<0, \\ x+3<0, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

$]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$ — множество решений неравенства.

Ответ. а) $]-2;\ 3[$; б) $]1;\ 3[\cup]3;\ 5[$; в) $]2;\ 3[$; г) $]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.

4.69. а) При каких значениях k значения дроби $\frac{k-1}{k}$ принадлежат числовому промежутку $[-1;\ 1]$?

б) При каких значениях y значения дроби $\frac{y+2}{y-1}$ находятся вне промежутка $[-2;\ 2]$?

Решение.

а) $-1 \leqslant \frac{k-1}{k} \leqslant 1;$

$$\begin{cases} \frac{k-1}{k} \leqslant 1, \\ \frac{k-1}{k} \geqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-1}{k} \leqslant 0, \\ \frac{2k-1}{k} \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k > 0, \\ 0 < k \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$]0; \frac{1}{2}]$ — множество значений k, при которых значения дроби принадлежат промежутку $[-1; 1]$.

б) $\frac{y+2}{y-1} < -2$ или $\frac{y+2}{y-1} > 2,$

$\frac{3y}{y-1} < 0$ или $\frac{4-y}{y-1} > 0,$

$0 < y < 1$ или $1 < y < 4.$

$]0; 1[\cup]1; 4[$ — множество значений y, при которых значения дроби находятся вне промежутка $[-2; 2]$.

Ответ. а) при $k \in]0; \frac{1}{2}]$; б) при $y \in]0; 1[\cup]1; 4[$.

4.70. а) При каких значениях параметра a уравнение $a^2x+6=18-ax$ имеет положительный корень?

б) При каких значениях параметра a уравнение $7a^2x+12x=4a$ имеет отрицательный корень?

Решение. а) $a^2x+ax=12$, $a^2+a \neq 0$,

$$x=\frac{12}{a^2+a}, \quad x=\frac{12}{a(a+1)},$$

$$a(a+1)>0.$$

Ответ. $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ — множество значений a, при которых уравнение имеет положительный корень.

б) $x(7a^2+12)=4a$, $x=\frac{4a}{7a^2+12}$, $4a<0$; $a<0$.

Ответ. $]-\infty; 0[$ — множество значений a, при которых уравнение имеет отрицательный корень.

4.71. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{x+3} < 1;$ д) $\frac{2}{x-3} > 2;$

б) $\frac{10x+18}{2x+1} < 5;$ е) $\frac{6}{1-x} > 1;$

в) $\frac{14x}{3+7x} > 2;$ ж) $\frac{1}{x-2} < 3;$

г) $\frac{12x+7}{1+6x} > 2;$ з) $\frac{3-x}{x+4} < 1.$

Решение.

а) $\frac{x}{x+3}-1<0$, $\quad \frac{x-x-3}{x+3}<0$,

$\frac{-3}{x+3}<0$, $\quad x+3>0$, $\quad x>-3$.

б) $\frac{10x+18}{2x+1}-5<0$, $\quad \frac{13}{2x+1}<0$,

$2x+1<0$, $\quad x<-\frac{1}{2}$.

в) $\frac{14x}{3+7x}-2>0$, $\quad \frac{-6}{3+7x}>0$,

$3+7x<0$, $\quad x<-\frac{3}{7}$.

г) $\frac{12x+7}{1+6x}-2>0$, $\quad \frac{5}{1+6x}>0$,

$1+6x>0$, $\quad x>-\frac{1}{6}$.

д) $\frac{2}{x-3}-2>0$, $\quad \frac{8-2x}{x-3}>0$, $\quad 3<x<4$.

е) $\frac{6}{1-x}-1>0$, $\quad \frac{5+x}{1-x}>0$, $\quad -5<x<1$.

ж) $\frac{1}{x-2}-3<0$, $\quad \frac{7-3x}{x-2}<0$,

$x<2$ или $x>2\frac{1}{3}$.

Ответ. а) $]-3;\ +\infty[$; б) $]-\infty;\ -\frac{1}{2}\Big[$; в) $\Big]-\infty;\ -\frac{3}{7}\Big[$; г) $\Big]-\frac{1}{6};\ +\infty\ [$; д) $]\ 3;\ 4\ [$; е) $]-5;\ 1\ [$; ж) $]-\infty;\ 2\ [\cup]\ 2\frac{1}{3};\ +\infty\ [$, з) $]-\infty;\ -4\ [\cup]-\frac{1}{2};\ +\infty[$.

4.72. Решите неравенство:

а) $|2x-1|<1$; $\quad$ д) $|5-4x|<2$;

б) $|3x-2|>7$; $\quad$ е) $|16-x|>100$;

в) $|1-3x|<2$; $\quad$ ж) $|17-2x|>0$;

г) $|4x-1|>1$; $\quad$ з) $|5-4x|<-3$.

Решение.

а) $-1<2x-1<1$,

$0<2x<2$,

$0<x<1$.

$]\ 0;\ 1\ [$ — множество решений неравенства.

б) $3x-2>7$ или $3x-2<-7$,

$3x>9$ или $3x<-5$,

$x>3$ или $x<-1\frac{2}{3}$.

$]-\infty;\ -1\frac{2}{3}\ [\cup]\ 3;\ +\infty\ [$ — множество решений неравенства.

в) $-2<1-3x<2$.

$]-\frac{1}{3};\ 1\ [$ — множество решений неравенства.

г) $4x-1<-1$ или $4x-1>1$.

$]-\infty;\ 0[\cup]\frac{1}{2};\ +\infty[$ — множество решений неравенства.

д) $-2<5-4x<2$.

$\left]\frac{3}{4};\ \frac{7}{4}\right[$ — множество решений неравенства;

е) $16-x<-100$ или $16-x>100$,
$x>116$ или $x<-84$.

$]-\infty;\ -84\ [\cup]\ 116;\ +\infty\ [$ — множество решений неравенства;

ж) $]-\infty;\ 8{,}5[\cup]8{,}5;\ +\infty[$ — множество решений неравенства;

з) $\varnothing$.

VIII КЛАСС

4.73. На координатной плоскости покажите с помощью штриховки множество точек F, задаваемое системой неравенств. Какую фигуру представляет собой множество F?

а) $\begin{cases} y-5x-1\geqslant 0, \\ y-5x-4\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y-\ \ x-2\leqslant 0, \\ y+2x-4\leqslant 0, \\ y+\ \ 5\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-3x-1\geqslant 0, \\ y+2x-4\leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y-2x-2\geqslant 0, \\ y-2x-8\leqslant 0, \\ y+\ \ x-6\leqslant 0, \\ y+\ \ x-2\geqslant 0. \end{cases}$

Ответ. а) Полоса; б) угол; в) треугольник; г) четырехугольник (рис. 21).

4.74. При каких значениях k и b множество точек плоскости, задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} y\leqslant 3x-1, \\ y\geqslant kx+b, \end{cases}$$

а) представляет собой полосу; б) представляет собой угол; в) пустое множество?

Ответ. а) При $k=3$, $b<-1$; б) $k\neq 3$, b — любое; в) $k=3$, $b>-1$ (рис. 22).

4.75. Задайте системой неравенств фигуру, показанную на рисунке 23 штриховкой.

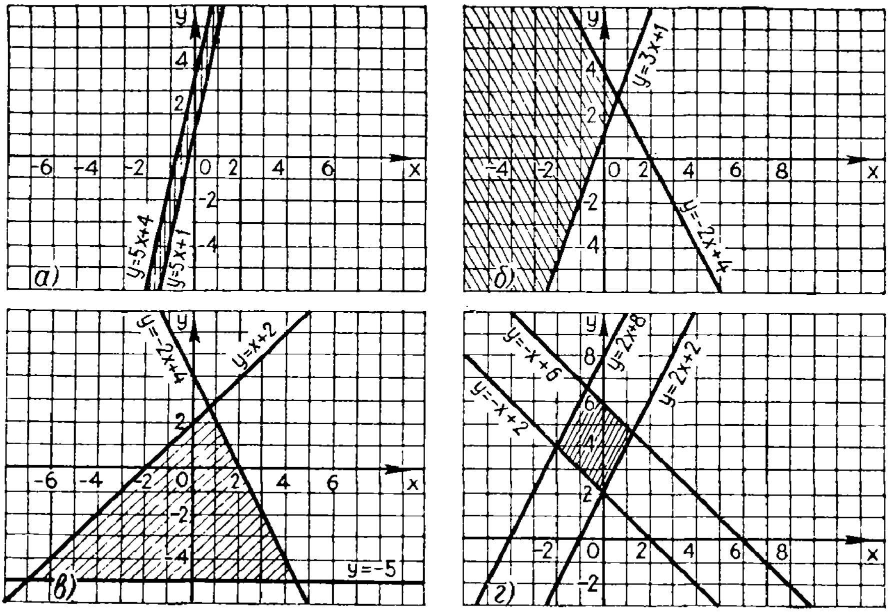


Рис. 21

Решение.

а) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4, \\ -3 \leqslant y \leqslant 5; \end{cases}$

б) составим уравнение прямой, проходящей через точки (5; 0) и (0; 8):

$$\begin{cases} 0 = 5k + b, \\ 8 = 0k + b, \end{cases} \quad \begin{cases} k = -1{,}6, \\ b = 8; \end{cases}$$

$y = -1{,}6x + 8$ — уравнение прямой, проходящей через точки (5; 0) и (0; 8).

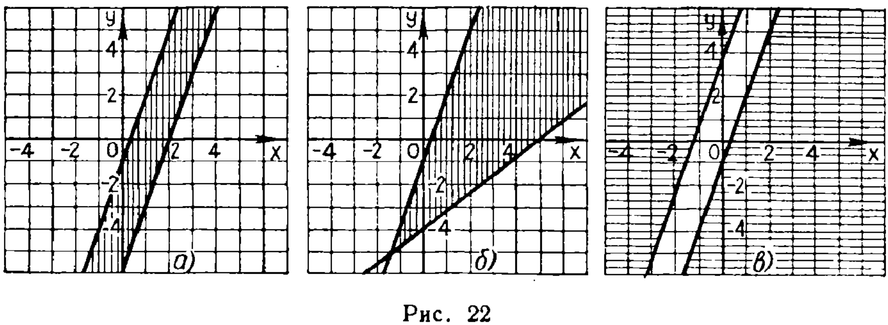


Рис. 22

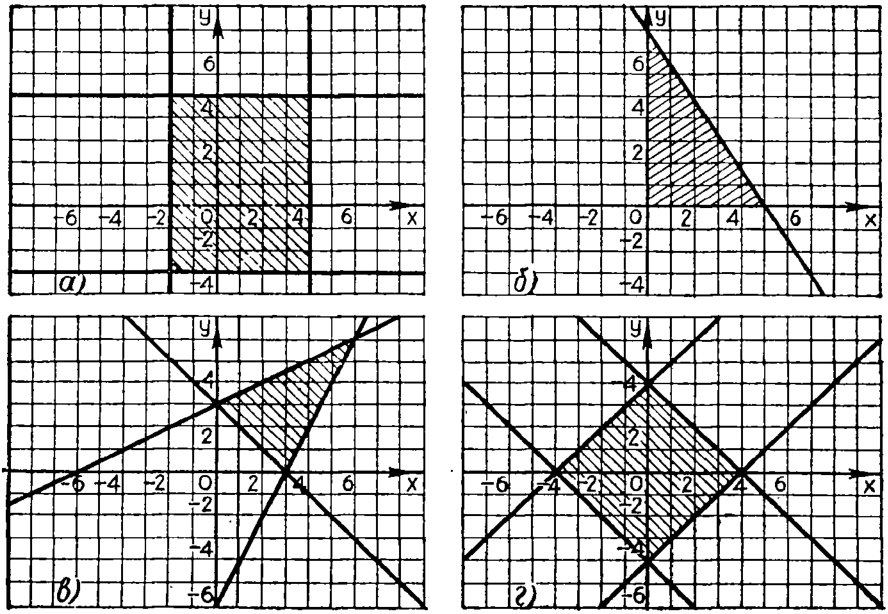


Рис. 23

Искомая система неравенств:

$$\begin{cases} y \leqslant -1{,}6x+8, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

в) $\begin{cases} 0=3k+b, \\ 3=0k+b; \end{cases}$ $\begin{cases} k=-1, \\ b=3; \end{cases}$

$y=-x+3$ — уравнение прямой, проходящей через точки (3; 0) и (0; 3).

$$\begin{cases} 0=-6k_1+b_1, \\ 3=0k_1+b_1; \end{cases} \quad \begin{cases} k_1=0{,}5, \\ b_1=3. \end{cases}$$

$y=0{,}5x+3$ — уравнение прямой, проходящей через точки (— 6; 0) и (0; 3).

$$\begin{cases} 0=3k_2+b_2, \\ -6=0k_2+b_2; \end{cases} \quad \begin{cases} k_2=2, \\ b_2=-6. \end{cases}$$

$y=2x-6$ — уравнение прямой, проходящей через точки (3; 0) и (0; — 6).

Искомая система неравенств:

$$\begin{cases} y \leqslant 0{,}5x+3, \\ y \geqslant -x+3, \\ y \geqslant 2x-6. \end{cases}$$

г) Зная для каждой из прямых, ограничивающих четырехугольник, координаты двух точек, записываем ее уравнение.

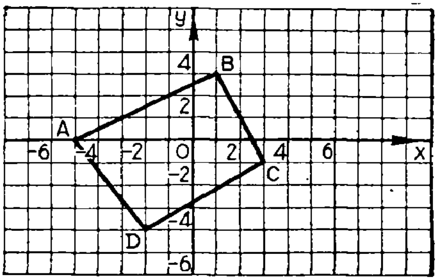


Рис. 24

Искомая система неравенств:

$$\begin{cases} y \leqslant x+4, \\ y \geqslant x-4, \\ y \leqslant -x+4, \\ y \geqslant -x-4. \end{cases}$$

4.76. Задайте системой неравенств четырехугольник $ABCD$, вершинами которого служат точки $A(-5;\ 0)$, $B(1;\ 3)$, $C(3;\ -1)$, $D(-2;\ -4)$.

Решение.

Четырехугольник $ABCD$ ограничен прямыми AB, BC, CD, DA (рис. 24). Зная координаты двух точек прямой, можно записать уравнение этой прямой.

Для прямой AB имеем:

$$\begin{cases} 0=-5k+b, \\ 3=k+b; \end{cases} \qquad \begin{cases} k=0{,}5, \\ b=2{,}5. \end{cases}$$

$y=0{,}5x+2{,}5$ — уравнение прямой AB.

Для прямой BC имеем:

$$\begin{cases} 3=k_1+b_1, \\ -1=3k_1+b_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=-2, \\ b_1=5. \end{cases}$$

$y=-2x+5$ — уравнение прямой BC.

Для прямой CD имеем:

$$\begin{cases} -1=3k_2+b_2, \\ -4=-2k_2+b_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2=0{,}6, \\ b_2=-2{,}8. \end{cases}$$

$y=0{,}6x-2{,}8$ — уравнение прямой CD.

Для прямой DA имеем:

$$\begin{cases} -4=-2k_3+b_3, \\ 0=-5k_3+b_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} k_3=-1\frac{1}{3}, \\ b_3=-6\frac{2}{3}. \end{cases}$$

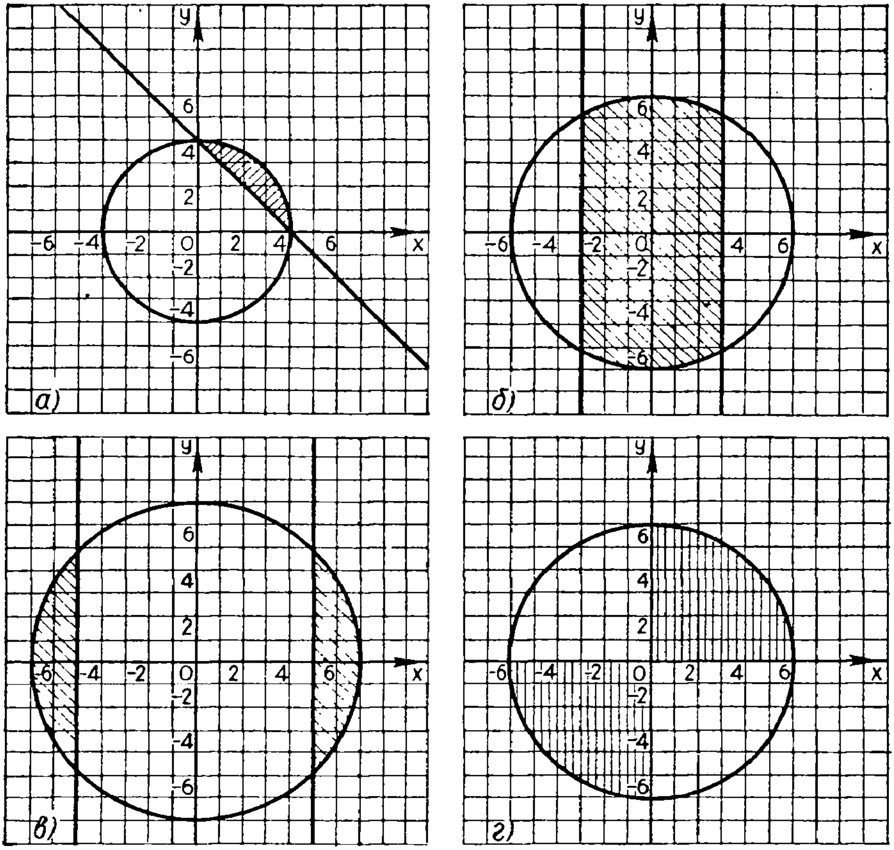


Рис. 25

$y = -1\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}$ — уравнение прямой DA.

Искомая система неравенств: $\begin{cases} y \leqslant 0{,}5x + 2{,}5, \\ y \leqslant -2x + 5, \\ y \geqslant 0{,}6x - 2{,}8, \\ y \geqslant -1\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}. \end{cases}$

4.77. Запишите систему неравенств, задающую на координатной плоскости множество точек, показанное штриховкой на рисунке 25.

Ответ.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ y \geqslant -x + 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 49, \\ |y| \geqslant 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ |x| \leqslant 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$

4.78. а) Напишите уравнение какой-либо прямой, принадлежащей полуплоскости, задаваемой неравенством $y > 2$.

б) Напишите уравнение какой-либо прямой, принадлежащей полуплоскости, задаваемой неравенством $x \leqslant -2$.

в) Напишите уравнение какой-либо параболы, принадлежащей полуплоскости, задаваемой неравенством $y \geqslant 3$.

г) Напишите уравнение какой-либо прямой, принадлежащей полуплоскости, задаваемой неравенством $y \geqslant x + 4$.

Ответ. а) Например, $y = 4$; б) например, $x = -2{,}7$; в) например, $y = x^2 + 4$; г) например, $y = x + 7$.

4.79. Покажите штриховкой множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $y > x$; б) $y > |x|$; в) $|y| > x$; г) $|y| > |x|$.

Решение. а) См. рисунок 26, *а*.

б) Искомое множество — множество точек, расположенных выше графика уравнения $y = |x|$ (рис. 26, *б*).

в) Рассмотрим отдельно каждую из координатных четвертей. В I четверти неравенство примет вид $y > x$. Ему соответствует множество точек первого координатного угла, расположенного выше биссектрисы этого угла. Во II и III четвертях неравенству удовлетворяют координаты любой из точек. В IV четверти неравенство примет вид $-y > x$, т. е. $y < -x$. Ему соответствует множество точек четвертого координатного угла, расположенных ниже его биссектрисы (рис. 26, *в*).

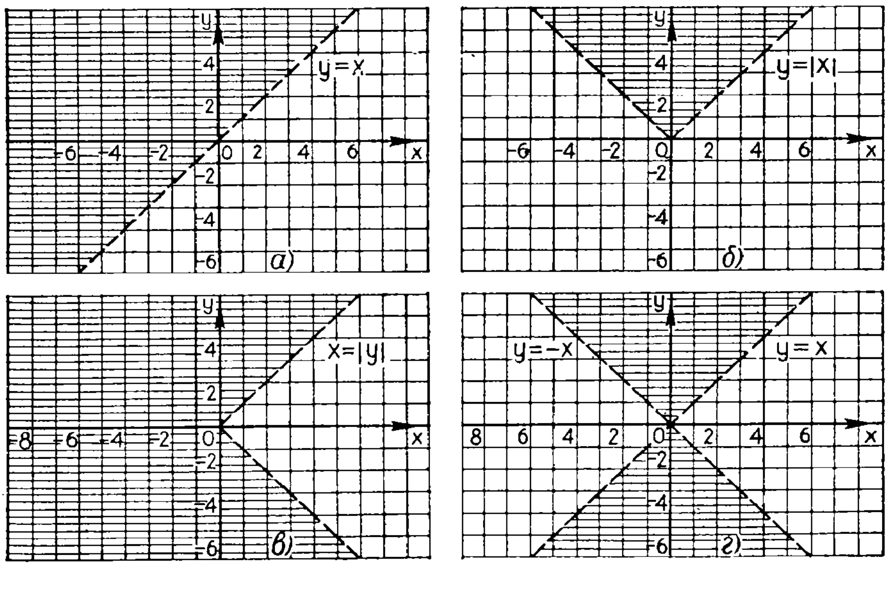


Рис. 26

г) Рассматриваем отдельно каждую из координатных четвертей (рис. 26, *г*).

4.80. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(x-8)(y-4)\geqslant 0$; в) $x^2-y^2\geqslant 0$;
б) $(x-2)(y+6)\leqslant 0$; г) $x^2-4y^2\leqslant 0$.

Решение.
а) Неравенство верно, если

$$\begin{cases} x\geqslant 8, \\ y\geqslant 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\leqslant 8, \\ y\leqslant 4 \end{cases} \text{ (рис. 27, } a\text{).}$$

б) Неравенство верно, если

$$\begin{cases} x\geqslant 2, \\ y\leqslant -6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\leqslant 2, \\ y\geqslant -6 \end{cases} \text{ (рис. 27, } б\text{).}$$

в) Представим неравенство в виде $(x-y)(x+y)\geqslant 0$. Неравенство верно, если

$$\begin{cases} y\leqslant x, \\ y\geqslant -x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y\geqslant x, \\ y\leqslant -x \end{cases} \text{ (рис. 27, } в\text{).}$$

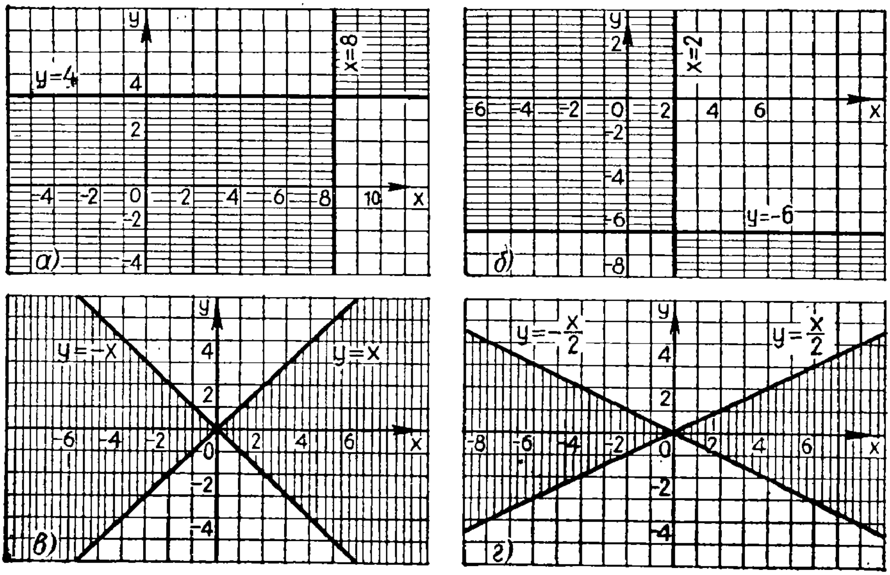


Рис. 27

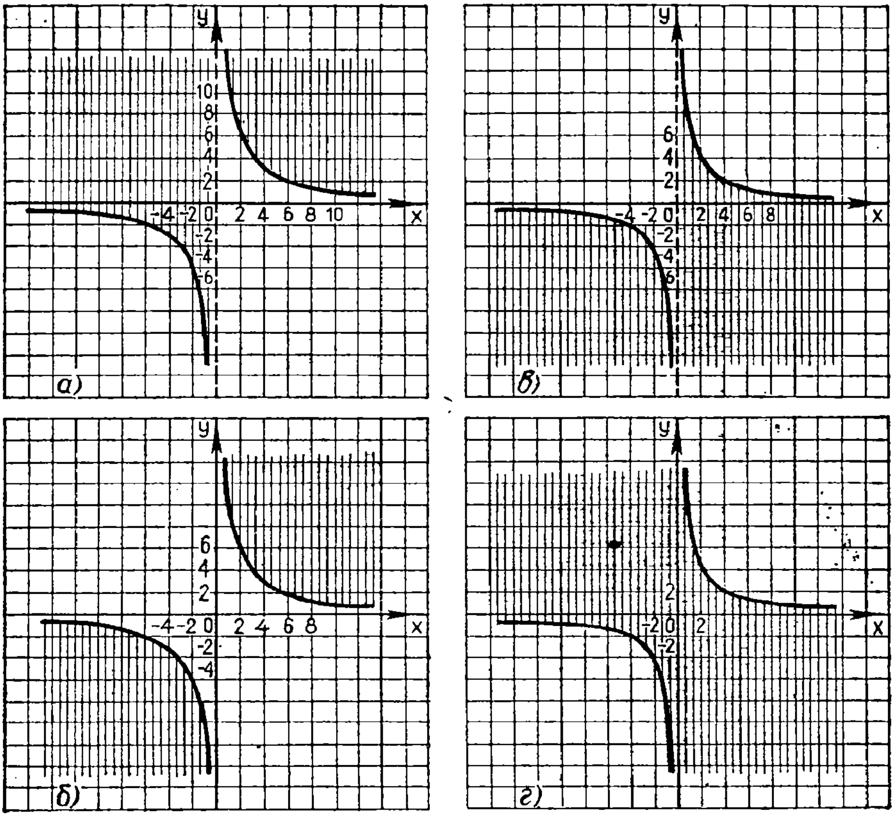


Рис. 28

г) Представим неравенство в виде $(x-2y)(x+2y)\leqslant 0$. Неравенство верно, если

$$\begin{cases} x-2y\geqslant 0, \\ x+2y\leqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2y\leqslant 0, \\ x+2y\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{(рис. 27, } г\text{).}$$

4.81. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

а) $y\geqslant\frac{12}{x}$; в) $y\leqslant\frac{8}{x}$;

б) $xy\geqslant 12$; г) $xy\leqslant 8$.

Решение. а) Удобно рассмотреть отдельно левую и правую полуплоскости, определяемые осью y. Искомое множество точек показано на рисунке 28,a.

б) При $x>0$ неравенство $xy\geqslant 12$ равносильно неравенству

$y \geqslant \frac{12}{x}$, а при $x < 0$ — неравенству $y \leqslant \frac{12}{x}$. Если $x = 0$, то координаты точки неравенству не удовлетворяют. Искомое множество точек показано на рисунке 28,*б*.

в) Рассматриваем отдельно левую и правую полуплоскости, определяемые осью y. Искомое множество точек показано на рисунке 28,*в*.

г) При $x > 0$ неравенство $xy \leqslant 8$ равносильно неравенству $y \leqslant \frac{8}{x}$. При $x < 0$ неравенство $xy \leqslant 8$ равносильно неравенству $y \geqslant \frac{8}{x}$. Если абсцисса точки равна нулю, то ее координаты удовлетворяют неравенству. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy \leqslant 8$, показано на рисунке 28,*г*.

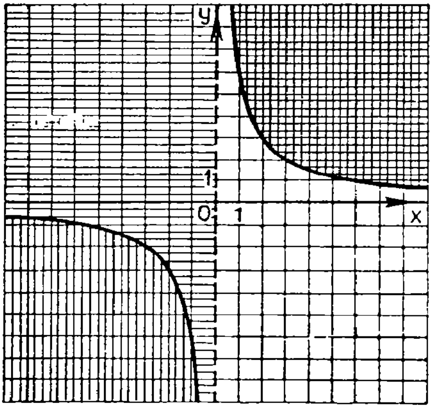


Рис. 29

4.82. На координатной плоскости покажите штриховкой множество A точек плоскости, задаваемое неравенством $y \geqslant \frac{6}{x}$, и множество B точек плоскости, задаваемое неравенством $xy \geqslant 6$. Найдите пересечение множеств A и B.

Решение. Множество A точек плоскости, задаваемое неравенством $y \geqslant \frac{6}{x}$, показано на рисунке 29 горизонтальной штриховкой. Множество B точек плоскости, задаваемое неравенством $xy \geqslant 6$, показано на рисунке вертикальной штриховкой. Пересечением множеств A и B служит множество точек плоскости, расположенных в первом координатном углу выше точек гиперболы, задаваемой уравнением $xy = 6$.

4.83. С помощью штриховки покажите на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant 2^x, \\ y \leqslant 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant 2^x, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant 3^x, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \geqslant 0{,}4^x, \\ xy \leqslant 0. \end{cases}$

4.84. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $\sqrt{(x(x^2+y^2-4))^2} = x(x^2+y^2-4)$;

б) $\sqrt{(x(x^2+y^2-4))^2} = -x(x^2+y^2-4)$.

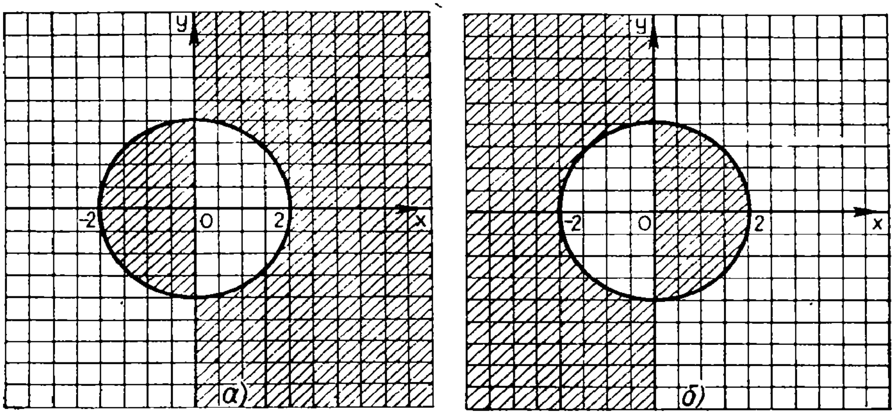


Рис. 30

Решение. а) Данное уравнение равносильно неравенству

$$x(x^2+y^2-4)\geqslant 0.$$

Неравенство верно, если

$$\begin{cases} x\leqslant 0, \\ x^2+y^2\leqslant 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x^2+y^2\geqslant 4. \end{cases}$$

Множество A точек плоскости, координаты которых удовлетворяют первой системе неравенств — полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=4$ и прямой $x=0$. Множество B точек плоскости, координаты которых удовлетворяют второй системе, есть правая полуплоскость, определяемая прямой $x=0$, из которой исключены точки, лежащие внутри круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=4$ (границы принадлежат множеству B). Искомое множество точек — объединение множеств A и B (рис. 30,*а*).

б) Данное уравнение равносильно неравенству

$$-x(x^2+y^2-4)\geqslant 0.$$

Множество точек плоскости, задаваемое этим неравенством, есть объединение множеств точек, задаваемых системами неравенств:

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x^2+y^2\leqslant 4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x\leqslant 0, \\ x^2+y^2\geqslant 4 \end{cases} \text{ (рис. 30,}б\text{).}$$

4.85. Покажите штриховкой множество точек плоскости, координаты которых служат решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 25, \\ xy\geqslant 6; \end{cases}$

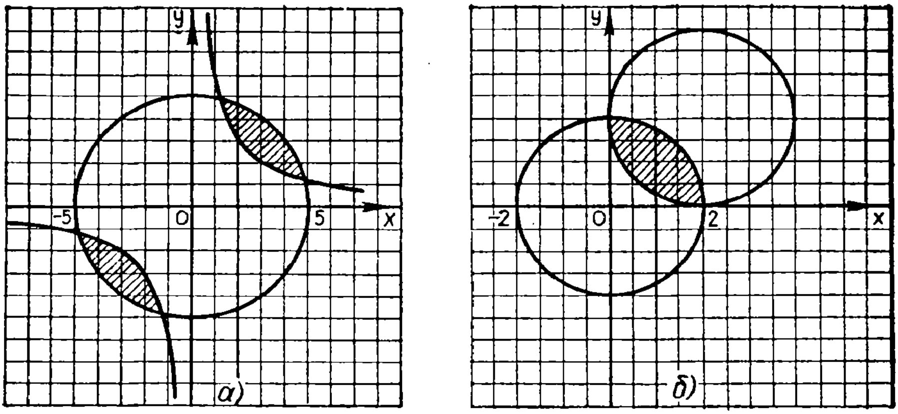


Рис. 31

б) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 4. \end{cases}$

Ответ. См. рисунок 31.

4.86. Решите неравенство:

а) $x^{\frac{2}{15}}\cdot x^{\frac{1}{5}}<2$; в) $x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{1}{3}}<30$;

б) $x^{0,5}\cdot x^{\frac{1}{4}}>125$; г) $x^{0,5}\cdot x^{\frac{1}{6}}<81$.

Решение. а) $x^{\frac{1}{3}}<2$; $0<x<8$.
Ответ. $]0;\ 8[$.

б) $x^{\frac{3}{4}}>125$; $x>125^{\frac{4}{3}}$.
Ответ. $]625;\ +\infty[$.

в) $x^{\frac{1}{2}}<30$; $0<x<900$.
Ответ. $]0;\ 900[$.

г) $x^{\frac{2}{3}}<81$; $0<x<81^{\frac{3}{2}}$; $0<x<9^3$; $0<x<729$.
Ответ. $]0;\ 729[$.

4.87. Известно, что при $k\geqslant 3$ $(k\in N)$ верно неравенство $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k$. Проверьте это для случаев $k=3;\ 4;\ 5$. Докажите, что из неравенства $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k$ следует неравенство:

а) $k^{k+1}>(k+1)^k$,

б) $\sqrt[k]{k}>\sqrt[k+1]{k+1}$.

Решение.

а) $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k$; $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k<k$; $\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}<\sqrt[k]{k}$; $\frac{k+1}{k}<k^{\frac{1}{k}}$;
$k+1<k\cdot k^{\frac{1}{k}}$; $k+1<k^{\frac{k+1}{k}}$; $(k+1)^k<\left(k^{\frac{k+1}{k}}\right)^k$; $k^{k+1}>(k+1)^k$.
Значит, $\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k\right)\Rightarrow(k^{k+1}>(k+1)^k)$.

б) Мы доказали выше, что

$$\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k\right)\Rightarrow(k^{k+1}>(k+1)^k).$$

$$k^{k+1}>(k+1)^k,\quad \sqrt[k(k+1)]{k^{k+1}}>\sqrt[k(k+1)]{(k+1)^k}.$$

Значит,

$$\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<k\right)\Rightarrow(\sqrt[k]{k}>\sqrt[k+1]{k+1}).$$

4.88. Найдите множество решений неравенства:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}>1{,}5^2$; в) $0{,}8^{x+1{,}5}<\frac{\sqrt{5}}{2}$;

б) $0{,}4^{7-10x}<2{,}5^3$; г) $0{,}75^{2-x}>\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $x-3<-2$, $x<1$.
Ответ. $]-\infty;\ 1[$.

б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7-10x}<\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$, $7-10x>-3$, $10x<10$; $x<1$.
Ответ. $]-\infty;\ 1[$.

в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1{,}5}<\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $x+1{,}5>-0{,}5$, $x>-2$.
Ответ. $]-2;\ +\infty[$.

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $2-x<-\frac{1}{2}$, $x>2{,}5$.
Ответ. $]2{,}5;\ +\infty[$.

4.89. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{2})^{(x-3{,}5)(x+2{,}1)}<1$; г) $0{,}26^{4x^2-4x+1}<1$;

б) $17{,}3^{x^2-4}>1$; д) $36^{2x-x^2}<216$;

в) $15^{x^2-4x+4}>1$; е) $125^{x^2-\frac{1}{3}}<25$.

Решение.

а) $(x-3{,}5)(x+2{,}1)<0$,

$$\begin{cases}x-3{,}5>0,\\ x+2{,}1<0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x-3{,}5<0,\\ x+2{,}1>0.\end{cases}$$

Ответ. $]-2,1;\ 3,5[$.

б) $x^2-4>0$, $(x-2)(x+2)>0$,

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+2>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-2<0, \\ x+2<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-\infty;\ -2[\cup]2;\ +\infty[$.

в) $x^2-4x+4>0$, $(x-2)^2>0$. $x\neq 2$.

Ответ. $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.

г) $4x^2-4x+1>0$; $(2x-1)^2>0$.

Ответ. x — любое число, кроме 0,5.

д) $6^{4x-2x^2}<6^3$, $4x-2x^2<3$, $2x^2-4x+3>0$, $2x^2-4x+3=0$, $\frac{D}{4}=4-6<0$.

Ответ. $]-\infty;\ +\infty[$.

е) $5^{3x^2-1}<5^2$, $3x^2-1<2$, $3x^2-3<0$, $(x-1)(x+1)<0$,

$$\begin{cases} x-1<0, \\ x+1>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-1>0, \\ x+1<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-1;\ 1[$.

4.90. Найдите множество решений двойного неравенства:

а) $0{,}0625<2^{x+1}<1024$; в) $\frac{1}{9}<(\sqrt{3})^{3x+5}<343$;

б) $\frac{1}{49}<\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+4}<343$; г) $0{,}04<\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{1-5x}<5\sqrt{5}$.

Решение.

а) $2^{-4}<2^{x+1}<2^{10}$, $-4<x+1<10$, $-5<x<9$.

б) $7^{-2}<7^{-2x-4}<7^3$, $-2<-2x-4<3$, $-3<2x+4<2$, $-7<2x<-2$, $-3{,}5<x<-1$.

в) $3^{-2}<3^{\frac{3x+5}{2}}<3^5$, $-4<3x+5<10$, $-9<3x<5$, $-3<x<\frac{5}{3}$.

г) $5^{-2}<5^{\frac{5x-1}{2}}<5^{\frac{3}{2}}$, $-2<\frac{5x-1}{2}<\frac{3}{2}$, $-4<5x-1<3$, $-3<5x<4$, $-0{,}6<x<0{,}8$.

Ответ. а) $]-5;9[$; б) $]-3{,}5;\ -1[$; в) $]-3;\ \frac{5}{3}[$; г) $]-0{,}6;0{,}8[$.

4.91. Докажите, что при любых значениях переменной x верно неравенство:

а) $5^{x^2-6x+10}>1$; г) $216^{x^2-x+1}>36$;

б) $0{,}7^{6x-12-x^2}>1$; д) $(2{,}5)^{5x-x^2}<0{,}4^{-12}$;

в) $25^{0{,}5x^2-6x+24}>125$; е) $0{,}3^{\frac{x^2-x}{2}}<\left(3\frac{1}{3}\right)^5$.

Решение. а) Данное неравенство равносильно неравенству $x^2-6x+10>0$. $x^2-6x+10=(x-3)^2+1$; $(x-3)^2+1>0$ при любом значении x.

б) Данное неравенство равносильно неравенству $6x-12-x^2<0$. $-x^2+6x-12=-(x-3)^2-3$; $-(x-3)^2-3<0$ при любом значении x.

в) Представим неравенство в виде $5^{x^2-12x+48}>5^3$. Исходное неравенство равносильно неравенству $x^2-12x+48>3$.

$x^2-12x+48-3=x^2-12x+45=(x-6)^2+9$;

$(x-6)^2+9>0$ при любом значении x.

г) Представим неравенство в виде $6^{3x^2-3x+3}>6^2$. Исходное неравенство равносильно неравенству $3x^2-3x+3>2$. Рассмотрим уравнение $3x^2-3x+3-2=0$; $3x^2-3x+1=0$; $D=9-12<0$. $3x^2-3x+3>2$ при любом значении x.

д) Представим неравенство в виде $\left(\frac{5}{2}\right)^{5x-x^2}<\left(\frac{5}{2}\right)^{12}$. Исходное неравенство равносильно неравенству $5x-x^2<12$, т. е. неравенству $x^2-5x+12>0$.

$x^2-5x+12=(x-2{,}5)^2+5{,}75$; $(x-2{,}5)^2+5{,}75>0$ при любом значении x.

е) Представим неравенство в виде $0{,}3^{\frac{x^2-x}{2}}<0{,}3^{-5}$. Исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{x^2-x}{2}>-5$, или $x^2-x+10>0$. $x^2-x+10=(x-0{,}5)^2+9{,}75$, $(x-0{,}5)^2+9{,}75>0$ при любом значении x.

4.92. Решите неравенство:

а) $0{,}1^{x^2+1}<100^x$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}<9^{2-x}$;

б) $2^{x^2+7}>4^{3x+1}$; г) $25^{1-x^2}>125^{2x-2}$.

Решение. а) $10^{-x^2-1}<10^{2x}$, $-x^2-1<2x$, $x^2+2x+1>0$, $(x+1)^2>0$, $x\neq-1$.

Ответ. $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$.

б) $2^{x^2+7}>2^{6x+2}$, $x^2+7>6x+2$, $x^2-6x+5>0$, $(x-1)(x-5)>0$,

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-5>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1<0, \\ x-5<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-\infty;\ 1[\cup]5;\ +\infty[$.

в) $3^{-x^2}<3^{4-2x}$, $-x^2<4-2x$, $x^2-2x+4>0$, $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$, $(x-1)^2+3>0$ при любом значении x.

Ответ. $]-\infty;\ +\infty[$.

г) $5^{2-2x^2}>5^{6x-6}$, $2-2x^2>6x-6$, $2x^2+6x-8<0$, $x^2+3x-4<0$, $(x-1)(x+4)<0$,

$$\begin{cases} x-1<0, \\ x+4>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1>0, \\ x+4<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-4;\ 1[$.

4.93. Решите неравенство:

а) $(x-7)(2^x-2^{x+2})\geqslant 0$;

б) $x^3(5^x-5^{x-1})\leqslant 0$.

Решение. а) $(x-7)2^x(1-2^2)\geqslant 0$;
$2^x>0$ при любом x; $1-2^2<0$. Следовательно, заданное неравенство равносильно неравенству $x-7\leqslant 0$.

Ответ. $]-\infty;\ 7]$.

б) $x^3(5^x-5^x\cdot 5^{-1})\leqslant 0$; $x^3\cdot 5^x(1-5^{-1})\leqslant 0$. $5^x>0$ при любом x; $1-5^{-1}=1-\frac{1}{5}>0$. Следовательно, заданное неравенство равносильно неравенству $x^3\leqslant 0$. Отсюда $x\leqslant 0$.

Ответ. $]-\infty;\ 0]$.

4.94. Решите неравенство:

а) $3^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2-x}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\geqslant 2^{\frac{1}{x+1}}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}<3^{\frac{1}{x}}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x-1}}<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

а) $3^{\frac{1}{x}}\leqslant 3^{-\frac{1}{2-x}}$, $\frac{1}{x}\leqslant-\frac{1}{2-x}$,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\leqslant 0$, $\frac{2}{x(2-x)}\leqslant 0$, $x(2-x)<0$,

$$\begin{cases} x<0, \\ 2-x>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x>0, \\ 2-x<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]2;\ +\infty[$.

б) $3^{2-x}<3^{\frac{1}{x}}$, $2-x<\frac{1}{x}$, $2-x-\frac{1}{x}<0$, $\frac{2x-x^2-1}{x}<0$, $\frac{x^2-2x+1}{x}>0$, $\frac{(x-1)^2}{x}>0$, $x>0$ и $x\neq 1$.

Ответ. $]0;\ 1[\,\cup\,]1;\ +\infty[$.

в) $2^{-4x}\geqslant 2^{\frac{1}{x+1}}$, $-4x\geqslant\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+1}+4x\leqslant 0$,

$\frac{1+4x^2+4x}{x+1}\leqslant 0$, $\frac{(1+2x)^2}{x+1}\leqslant 0$, $x<-1$.

Ответ. $]-\infty;\ -1[$.

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$, $\frac{2}{x-1}>\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}>0$, $\frac{1}{x(x-1)}>0$,

$$\begin{cases} x>0, \\ x-1>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x<0, \\ x-1<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-\infty;\ 0[\,\cup\,]1;\ +\infty[$.

4.95. Решите неравенство:

а) $2^x3^x < 6\sqrt[3]{36^x}$; в) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{2x}3^{2x} < \sqrt{343^x}$;

б) $0{,}1\sqrt{10^x} > 5^x2^x$; г) $4^x\cdot 3^{2x} < 6\sqrt{6}$.

Решение.

а) $6^x < 6\sqrt[3]{6^{2x}}$, $6^x<6\cdot 6^{\frac{2x}{3}}$, $x < 1+\frac{2x}{3}$, $\frac{3+2x-3x}{3} > 0$, $\frac{3-x}{3} > 0$, $x < 3$.

Ответ. $]-\infty;\ 3[$.

б) $10^{-1}\cdot 10^{\frac{x}{2}} > 10^x$, $\frac{x}{2}-1 > x$, $x-2 > 2x$, $x < -2$.

Ответ. $]-\infty;\ -2[$.

в) $\left(\frac{7}{3}\right)^{2x}\cdot 3^{2x} < \sqrt{7^{3x}}$, $7^{2x} < 7^{\frac{3x}{2}}$, $2x < \frac{3x}{2}$, $x < 0$.

Ответ. $]-\infty;\ 0[$.

г) $2^{2x}\cdot 3^{2x} < 6\cdot 6^{\frac{1}{2}}$, $6^{2x} < 6^{\frac{3}{2}}$, $2x < \frac{3}{2}$, $x < \frac{3}{4}$.

Ответ. $\left]-\infty;\ \frac{3}{4}\right[$.

4.96. Найдите область определения выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{x+5}}{\sqrt{x^2+1+2x}}$; г) $\dfrac{\lg(1-4x)}{x^2+12x+156}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x-8}+\sqrt{2x-1}}{x+4}$; д) $\dfrac{\lg(1-x)+\lg(1+x)}{x}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2x-0{,}3}}{4x^2-5x+1}$; е) $\dfrac{\lg(4-x^2)}{\sqrt{3x-1}}$.

Решение.

а) $\begin{cases} x+5\geqslant 0, \\ x^2+2x+1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+5\geqslant 0, \\ (x+1)^2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant -5, \\ x\neq -1. \end{cases}$

Ответ. $[-5;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$.

б) $\begin{cases} x-8\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0, \\ x+4\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 8, \\ x\geqslant \frac{1}{2}, \\ x\neq -4. \end{cases}$

Ответ. $[8;\ +\infty[$.

в) $\begin{cases} 2x-0{,}3\geqslant 0, \\ 4x^2-5x+1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 0{,}15, \\ x\neq 1,\ x\neq 0{,}25. \end{cases}$

Ответ. $\left[0{,}15;\ 0{,}25[\cup]0{,}25;\ 1[\cup]1;\ +\infty\right[$.

г) $\begin{cases} 1-4x>0, \\ x^2+12x+156\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{4}, \\ x\text{ — любое число.} \end{cases}$

Ответ. $\left]\frac{1}{4};\ +\infty\right[$.

д) $\begin{cases} 1-x>0, \\ 1+x>0, \\ x\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases}$

Ответ. $]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[$.

е) $\begin{cases} 4-x^2>0, \\ 3x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2<x<2, \\ x>\frac{1}{3}. \end{cases}$

Ответ. $\left]\frac{1}{3};\ 2\right[$.

4.97. Найдите область определения выражения:

а) $\lg|15x+90|$; д) $\frac{1}{\lg|2x+84|}$;

б) $\lg(x^2-2x+1)$; е) $\frac{1}{\lg(5x-4)^2}$;

в) $\lg(9x^2-12x+13)$; ж) $\frac{1}{\lg|x^2-4|}$;

г) $\lg(17x^2-22x+9)$; з) $\frac{1}{\lg(x^2-6x+40)}$.

Решение.

а) $15x+90\neq 0$; $x\neq -6$.

Ответ. $]-\infty;\ -6[\cup]-6;\ +\infty[$.

б) $x^2-2x+1>0$; $(x-1)^2>0$; $x\neq 1$.

Ответ. $]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.

в) $9x^2-12x+13>0$.

$$9x^2-12x+13=0,\ \frac{D}{4}=36-117<0.$$

$9x^2-12x+13>0$ при любом значении x.

Ответ. $]-\infty;\ +\infty[$.

г) $17x^2-22x+9>0$.

$17x^2-22x+9=0$, $D=484-612<0$, $17x^2-22x+9>0$ при любом значении x.

Ответ. $]-\infty;\ +\infty[$.

д) $\begin{cases} 2x+84\neq 0, \\ 2x+84\neq 1, \\ 2x+84\neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq -42, \\ x\neq -41{,}5, \\ x\neq -42{,}5. \end{cases}$

При любом значении x, кроме $-42{,}5$; -42; $-41{,}5$.

Ответ. $]-\infty;\ -42{,}5[\cup]-42{,}5;\ -42[\cup]-42;\ -41{,}5[\cup]-41{,}5;\ +\infty[$.

е) $\begin{cases} 5x-4\neq 0, \\ 5x-4\neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0{,}8 \\ x\neq 1. \end{cases}$

Ответ. $]-\infty;\ 0{,}8[\cup]0{,}8;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.

ж) $\begin{cases} x^2-4\neq 0, \\ x^2-4\neq -1, \\ x^2-4\neq 1; \end{cases}$

Ответ. $]-\infty;\ -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5};\ -2[\cup]-2;\ -\sqrt{3}[\cup$ $\cup]-\sqrt{3};\ \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};\ 2[\cup]2;\ \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};\ +\infty[$.

з) $x^2-6x+40>0$,

$x^2-6x+40=(x^2-6x+9)+31=(x-3)^2+31$.

$x^2-6x+40>0$ при любом значении x.

$x^2-6x+40\neq 1$;

$x^2-6x+39=(x-3)^2+30$;

$x^2-6x+40\neq 1$ при любом значении x.

Ответ. $]-\infty;\ +\infty[$.

4.98. При каких значениях y имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\lg(5x-4)}{112x-112}$; в) $\sqrt{\lg(x^2+4x+4)}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{-\lg(3x-1)}}$; г) $\dfrac{\sqrt{\lg(5x-x^2-3)}}{x-1{,}5}$?

Решение.

а) $\begin{cases} 5x-4>0, \\ 112x-112\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0{,}8, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Ответ. При $x\in]0{,}8;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.

б) $-\lg(3x-1)>0$, $\lg(3x-1)<0$, $0<3x-1<1$, $1<3x<2$, $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$.

Ответ. При $x\in\left]\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right[$.

в) $\lg(x^2+4x+4)\geqslant 0$, $x^2+4x+4\geqslant 1$, $x^2+4x+3\geqslant 0$, $(x+1)(x+3)\geqslant 0$,

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x+3\geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1\leqslant 0, \\ x+3\leqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство $x^2+4x+3\geqslant 0$ можно решить, исходя из геометрических соображений (см. замечание к упражнению № 61 а).

Ответ. При $x\in]-\infty;\ -3]\cup[-1;\ +\infty[$.

г) $\begin{cases} \lg(5x-x^2-3)\geqslant 0, \\ x-1{,}5\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-x^2-3\geqslant 1, \\ x\neq 1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x+4\leqslant 0; \\ x\neq 1{,}5; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)(x-4)\leqslant 0, \\ x\neq 1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-4\leqslant 0, \\ x\neq 1{,}5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1\leqslant 0, \\ x-4\geqslant 0, \\ x\neq 1{,}5. \end{cases}$

Неравенство $x^2-5x+4\leqslant 0$ можно решить, исходя из геометрических соображений (см. замечание к упражнению № 61а).

Ответ. При $x\in[1;\ 1{,}5[\cup]1{,}5;\ 4]$.

4.99. Решите неравенство:

а) $\lg\frac{5x-1}{2}<0$; в) $\lg\frac{2x+1}{x}>1$;

б) $\lg\frac{x-3}{x+3}>0$; г) $\lg\frac{10}{x+1}>1$.

Решение. а) $0<\frac{5x-1}{2}<1$, $0<5x-1<2$, $1<5x<3$; $0{,}2<x<0{,}6$.

Ответ. $]0{,}2;\ 0{,}6[$.

б) $\frac{x-3}{x+3}>1$, $\frac{x-3}{x+3}-1>0$, $\frac{-6}{x+3}>0$, $x+3<0$, $x<-3$.

Ответ. $]-\infty;\ -3[$.

в) $\frac{2x+1}{x}>10$, $\frac{2x+1}{x}-10>0$, $\frac{1-8x}{x}>0$,

$$\begin{cases} 1-8x>0, \\ x>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1-8x<0, \\ x<0. \end{cases}$$

Ответ. $\left]0;\ \frac{1}{8}\right[$.

г) $\frac{10}{x+1}>10$, $\frac{10}{x+1}-10>0$, $\frac{-10x}{x+1}>0$, $\frac{x}{x+1}<0$,

$$\begin{cases} x<0 \\ x+1>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>0, \\ x+1<0. \end{cases}$$

Ответ. $]-1;\ 0[$.

4.100. Решите неравенство:

а) $-2<\lg(3x-5)<1$; в) $-1<\lg\frac{x-1}{4}<0$;

б) $0<\lg(12-x)<2$; г) $-1<\lg\frac{12-5x}{3}<1$.

Решение.

а) $\lg 0{,}01<\lg(3x-5)<\lg 10$,
$0{,}01<3x-5<10$,
$5{,}01<3x<15$,
$1{,}67<x<5$. $x\in]1{,}67;\ 5[$.

б) $\lg 1<\lg(12-x)<\lg 100$,
$1<12-x<100$,
$-100<x-12<-1$,
$-88<x<11$. $x\in]-88;\ 11[$.

в) $\lg 0{,}1<\lg\frac{x-1}{4}<\lg 1$,
$0{,}1<\frac{x-1}{4}<1$,
$0{,}4<x-1<4$,
$1{,}4<x<5$. $x\in]1{,}4;\ 5[$.

г) $\lg 0{,}1<\lg\frac{12-5x}{3}<\lg 10$,

$0{,}1 < \frac{12-5x}{3} < 10,$

$0{,}3 < 12-5x < 30,$
$-30 < 5x-12 < -0{,}3,$
$-18 < 5x < 11{,}7,$
$-3{,}6 < x < 2{,}34.$ $\quad x \in]-3{,}6;\ 2{,}34[.$

4.101. При каких значениях переменной x а) значения функции $y=\lg(5x-7)$ принадлежат числовому промежутку $[-1;\ 1]$; б) значения функции $y=\lg(-x+2)$ находятся вне промежутка $[0;\ 2]$?

Решение.
а) $-1 \leqslant \lg(5x-7) \leqslant 1,$
$0{,}1 \leqslant 5x-7 \leqslant 10,$
$7{,}1 \leqslant 5x \leqslant 17,$
$1{,}42 \leqslant x \leqslant 3{,}4.$

Ответ. При $x \in [1{,}42;\ 3{,}4]$.

б) $\lg(-x+2) < 0$ или $\lg(-x+2) > 2;$
$0 < -x+2 < 1$ или $-x+2 > 100;$
$1 < x < 2$ или $x < -98.$

Ответ. При $x \in]-\infty;\ -98[\cup]\ 1;\ 2[$.

4.102. Решите неравенство:

а) $10^{\lg(5x-4)} < 3;$ в) $10^{\lg(x+2)-1} > 4;$

б) $10^{2+\lg(1-2x)} < 3;$ г) $10^{\lg(1-5x)+1} < 1.$

Решение. а) $0 < 5x-4 < 3,\ 4 < 5x < 7,\ 0{,}8 < x < 1{,}4.$

Ответ. $]0{,}8;\ 1{,}4[$.

б) $10^2 \cdot 10^{\lg(1-2x)} < 3,\quad 10^{\lg(1-2x)} < 0{,}03,$

$0 < 1-2x < 0{,}03,\ -1 < -2x < -0{,}97,\ 0{,}97 < 2x < 1,$
$0{,}485 < x < 0{,}5.$

Ответ. $]0{,}485;\ 0{,}5[$.

в) $10^{\lg(x+2)}10^{-1} > 4,\quad 10^{\lg(x+2)} > 40;$
$x+2 > 40;\ x > 38.$

Ответ. $]38;\ +\infty[$.

г) $10^{\lg(1-5x)} \cdot 10 < 1,\quad 10^{\lg(1-5x)} < 0{,}1,$

$0 < 1-5x < 0{,}1,\quad -1 < -5x < -0{,}9,$

$0{,}9 < 5x < 1,\quad 0{,}18 < x < 0{,}2.$

Ответ. $]0{,}18;\ 0{,}2[$.

4.103. Найдите множество решений неравенства:

а) $\lg x + \lg(2-x) > 1;$ в) $1+\lg(2x-1) > \lg 5x;$
б) $\lg x - \lg(x+1) > 0;$ г) $\lg x + \lg(x+1) > \lg 2x.$

Решение. а) $\lg(x(2-x)) > 1,\ x(2-x) > 10,\ x^2-2x+10 < 0,$ $(x-1)^2+9 < 0.$

Ответ. $\varnothing$.

б) $\begin{cases} x > 0, \\ x+1 > 0, \\ \frac{x}{x+1} > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x > x+1. \end{cases}$

Ответ: $\varnothing$.

Замечание. Ответ можно получить сразу, если учесть, что функция $y = \lg x$ возрастающая.

в) $\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 5x > 0, \\ 10(2x-1) > 5x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0{,}5 \\ x > 0, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$

Ответ. $\left]\frac{2}{3};\ +\infty\right[$.

г) $\begin{cases} x > 0, \\ x+1 > 0, \\ x(x+1) > 2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x > 1. \end{cases}$

Ответ. $]1;\ +\infty[$.

4.104. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2-x} > x$; б) $\sqrt{2-x} \leqslant x$.

Решение. а) Выражение $\sqrt{2-x}$ имеет смысл при $x \in]-\infty;\ 2]$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $x \in]-\infty;\ 0[$ и $x \in [0;\ 2]$. При $x \in]-\infty;\ 0[$ неравенство верно, так как значение x—отрицательно, а значение выражения $\sqrt{2-x}$ положительно. При $x \in [0;\ 2]$ имеем: $2-x > x^2$; $x^2+x-2 < 0$; $(x-1)(x+2) < 0$. При $x \in [0,\ 2]$ второй множитель положителен, произведение отрицательно при отрицательных значениях первого множителя, т.е. при $x < 1$. Итак, мы получили, что исходное неравенство верно при любом значении x, меньшем 1, т. е. множеством решений неравенства служит числовой промежуток $]-\infty;\ 1[$.

б) Неравенство $\sqrt{2-x} \leqslant x$ можно решить аналогично неравенству а). Но можно рассуждать иначе: множество решений неравенства $\sqrt{2-x} \leqslant x$ есть дополнение множества решений неравенства $\sqrt{2-x} > x$ до числового промежутка $]-\infty;\ 2]$, т. е. это есть числовой промежуток $[1;\ 2]$.

Ответ. а) $]-\infty;\ 1[$; б) $[1;\ 2]$.

5. ФУНКЦИИ

■

VI КЛАСС

5.1. Между множеством X, где $X=\left\{2;\ 3;\ \frac{1}{5};\ -1\frac{2}{3};\ 1\right\}$, и множеством Y задано соответствие с помощью пар вида $(x;\ y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, так, что для каждой пары $(x;\ y)$ выполняется соотношение:

а) $xy=1$; в) $\frac{y}{x}=3$;

б) $x+y=0$; г) $|y|=x$.

Задайте это соответствие с помощью стрелок.

5.2. Дано множество $A=\{10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50;\ 60\}$. Отобразите множество A на себя двумя различными способами, задав отображение в каждом случае формулой.

Ответ. $y=x$, где $x \in A$ и $y \in A$;

$y=70-x$, где $x \in A$ и $y \in A$.

5.3. Функции f, g и h заданы таблицами:

f					
	x	-5	7	$\frac{1}{3}$	$-0,1$
	y	-15	21	1	$-0,3$

;

g					
	y	-15	21	1	$-0,3$
	z	-13	23	3	$1,7$

;

h					
	x	-5	7	$\frac{1}{3}$	$-0,1$
	z	-13	23	3	$1,7$

Задайте каждую из них формулой.

Ответ. f: $y=3x$, где $x \in \left\{-5;\ 7;\ \frac{1}{3};\ -0,1\right\}$;

g: $z=y+2$, где $y \in \{-15;\ 21;\ 1;\ -0,3\}$;

h: $z=3x+2$, где $x \in \left\{-5;\ 7;\ \frac{1}{3};\ -0,1\right\}$.*)

*) В ответах указаны наиболее простые формулы. Вообще же ответ не однозначен.

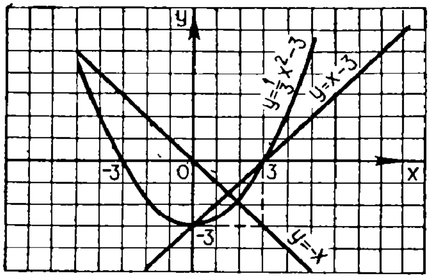


Рис. 32

5.4. Каждую точку $M(a; b)$ координатной плоскости отобразили на точку $M'(|a|; b)$. В какую точку при этом отображении перейдет точка $A(-3; 0)$; $B(3; 0)$; $C(2; 2)$; $D(-2; 6)$; $E(2; 6)$? Сделайте чертеж. На какую фигуру отобразится: а) отрезок AB; б) отрезок CD; в) отрезок DE; г) треугольник CDE; д) окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5; е) квадрат с вершинами в точках A; $(0; 3)$; B; $(0; -3)$?

Ответ. а) На отрезок OB; б) на ломаную с вершинами в точках C, $(0; 4)$, E; в) на отрезок с концами в точках E и $(0; 6)$; г) на четырехугольник с вершинами в точках C, E, $(0; 6)$, $(0; 4)$; д) на полуокружность с тем же центром и того же радиуса, расположенную в правой полуплоскости; е) на треугольник с вершинами в точках B; $(0; 3)$; $(0; -3)$.

5.5. Известно, что $\triangle BAC \cong \triangle NMK$ и $\hat{A}=70°$, $\hat{B}=50°$, $\hat{M}=50°$, $\hat{N}=70°$. Запишите с помощью знака $\cong$ высказывание «треугольник BAC конгруэнтен треугольнику NMK» так, чтобы записанное соотношение показывало соответствие между множеством вершин и множеством сторон этих треугольников.

Назовите, не выполняя чертежа, конгруэнтные углы и конгруэнтные стороны треугольников.

Ответ. $\triangle ABC \cong \triangle NMK$.

5.6. Задайте формулой такую функцию, которая отображала бы множество A на множество B, где:

а) $A=[0; 3]$; $B=[-3; 0]$; г) $A=[0; 2]$; $B=[0; 4]$;
б) $A=[-2; 5]$; $B=[-5; 2]$; д) $A=[-3; 0]$; $B=[0; 9]$;
в) $A=[1, 3]$; $B=[6; 8]$; е) $A=[4; 16]$; $B=\left[\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right]$.

Решение. Задача неопределенная: можно подобрать несколько формул, задающих функции, каждая из которых отображает одно данное множество на другое. Это легко увидеть из графика (рис. 32): прямая $y=-x$, прямая $y=x-3$, парабола $y=\frac{1}{3}x^2-3$ отображают множество $[0; 3]$ на множество $[-3; 0]$.

Целесообразно ограничиться наиболее простой формулой:

Ответ. а) $y=-x$; б) $y=-x$; в) $y=x+5$; г) $y=2x$; д) $y=x^2$; е) $y=\frac{1}{x}$.

5.7. Даны два множества: $X=\{11; 12; 13; 14\}$, $Y=\{1; 2; 3; 4\}$.

а) Каждому числу, принадлежащему множеству X, постав-

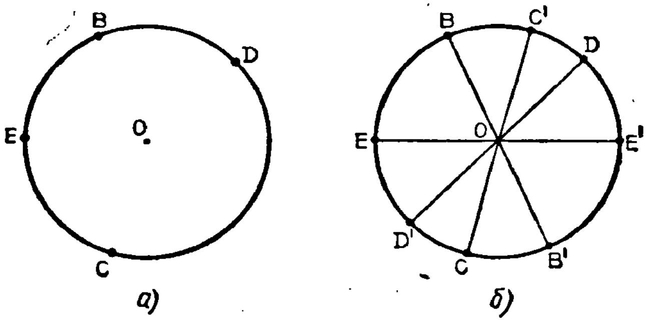


Рис. 33

лено в соответствие такое число из множества Y, которое служит его делителем.

б) Каждому числу, принадлежащему множеству X, поставлено в соответствие такое число из множества Y, которое представляет собой остаток, полученный при делении этого числа на 5.

Выпишите множество пар соответствующих элементов. Является ли рассматриваемое соответствие между множествами X и Y функцией?

Ответ. а) $\{(11;\ 1);\ (12;\ 1);\ (12;\ 2);\ (12;\ 3);\ (12;\ 4);\ (13;\ 1);\ (14;\ 1);\ (14;\ 2)\}$. Нет.

б) $\{(11;\ 1);\ (12;\ 2);\ (13;\ 3);\ (14;\ 4)$. Да.

5.8. Каждой точке X окружности поставлена в соответствие такая точка X', что отрезок XX' служит диаметром окружности. Укажите соответствующие точки для точек B, C, D, E (рис. 33, *а*). На какое множество отображается дуга BD? На какое множество отображается множество точек окружности?

Решение.

$B \longrightarrow B'$; $E \longrightarrow E'$; $D \longrightarrow D'$; $C \longrightarrow C'$.

$\smile BD \longrightarrow \smile B'D'$ (рис. 33, *б*).

Окружность отображается на себя.

5.9. Докажите, что если точка $M\,(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y=\frac{16}{x}$, то:

а) точка M_1, симметричная точке M относительно начала координат, также принадлежит графику этой функции;

б) точка M_2, симметричная точке M относительно оси y, не принадлежит графику функции;

в) точка M_3, симметричная точке M относительно прямой $y=x$, принадлежит графику функции.

Решение. $b=\frac{16}{a}$ — верное равенство.

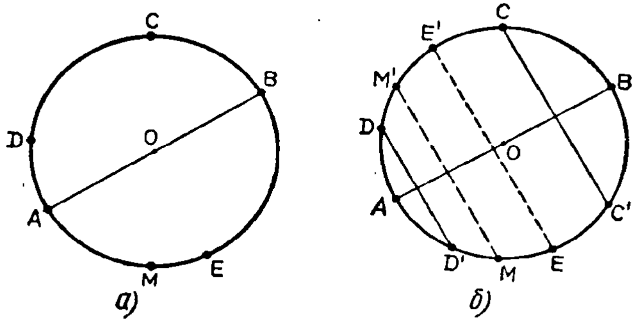


Рис. 34

а) $M_1(-a;\ -b)$, $-b=\frac{16}{-a}$ — верное равенство;

б) $M_2(-a;\ b)$, $b=\frac{16}{-a}$ — неверное равенство;

в) $M_3(b;\ a)$, $a=\frac{16}{b}$ — верное равенство.

5.10. Напишите уравнение, графиком которого служит прямая, симметричная прямой $y=3x$:

а) относительно оси y;

б) относительно оси x;

в) относительно прямой $y=x$.

Ответ. а) $y=-3x$; б) $y=-3x$; в) $y=\frac{1}{3}x$.

5.11. Каждой точке окружности поставлена в соответствие точка, симметричная ей относительно диаметра AB (рис. 34, *а*). Какая точка соответствует точке C, D, E? Какая точка соответствует точке A? точке B? Имеется ли на окружности точка, которой соответствует точка M? На какое множество отображается множество точек окружности?

Ответ. $C \to C'$; $D \to D'$; $E \to E'$; $A \to A$;
$B \to B$; $M' \to M$ (рис. 34, *б*).

Окружность отображается на себя.

5.12. а) Каждой точке окружности (O; 2 *см*) поставлена в соответствие точка окружности (O; 4 *см*) таким образом, что соответствующие точки расположены на одном луче, исходящем из точки O. Какая точка соответствует точке B, точке C, точке K? Для какой точки является соответствующей точка D', точка E' (рис. 35, *а*)? На какое множество отображается множество точек окружности?

б) Каждой точке X окружности (O; 3 *см*) поставлена в соответствие точка Y окружности (O; 4 *см*), принадлежащая лучу

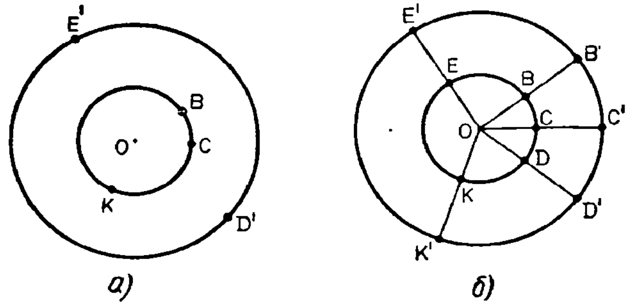


Рис. 35

XO (рис. 36, *а*). Для точек B, C, K укажите соответствующие. Для какой точки является соответствующей точка D', точка E'? На какое множество отображается множество точек окружности (0; 3 *см*)?

Ответ. а) $B \to B'$; $C \to C'$; $K \to K'$; $D \to D'$; $E \to E'$ (рис. 35, *б*); множество точек окружности (O; 2 *см*) отображается на множество точек окружности (O; 4 *см*); б) $B \to B'$; $C \to C'$; $K \to K'$; $D \to D'$; $E \to E'$ (рис. 36, *б*); множество точек окружности (O; 3 *см*) отображается на множество точек окружности (O; 4 *см*).

5.13. Прямая проходит через точки $A(8; -2)$ и $B(-3{,}2; 0{,}8)$. Может ли она служить графиком прямой пропорциональности? Если может, то напишите формулу.

Решение. Пусть график функции $y = kx$ проходит через точку $A(8; -2)$. Тогда равенство $-2 = k \cdot 8$ верное. Отсюда $k = -\frac{1}{4}$. Проверим, проходит ли график функции $y = -\frac{1}{4}x$ через точку $B(-3,2; 0{,}8)$. Равенство $0{,}8 = -\frac{1}{4} \cdot (-3{,}2)$ верное. Следовательно, график функции $y = -\frac{1}{4}x$ — искомая прямая.

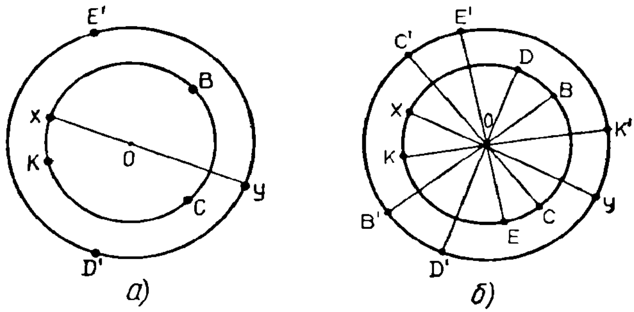


Рис. 36

5.14. На плоскости даны точки $A(-3;\ 4)$, $B(1{,}5;\ -8)$, $D(10;\ -1{,}2)$. Принадлежат ли эти точки графику обратной пропорциональности? Если принадлежат, то напишите формулу этой пропорциональности.

Решение. Произведения координат точек A, B и C соответственно равны: $-3\cdot 4=-12$, $1{,}5\cdot(-8)=-12$, $10\cdot(-1{,}2)=$ $=-12$. Следовательно, эти точки принадлежат графику функции $y=\frac{-12}{x}$.

5.15. В системе координат построено 5 графиков функций (прямой пропорциональности). Каждый из графиков проходит через одну из заданных точек: $A(-3;\ 7{,}5)$, $B(2;\ -2)$; $C(3{,}2;\ -6{,}4)$; $D(-2;\ -3)$; $E(5;\ 8)$. Задайте каждую функцию формулой.

Решение.

$k_1=\frac{7{,}5}{-3}=-2{,}5,\qquad y=-2{,}5x;$

$k_2=\frac{-2}{2}=-1,\qquad y=-x;$

$k_3=\frac{-6{,}4}{3{,}2}=-2,\qquad y=-2x;$

$k_4=\frac{-3}{-2}=1{,}5,\qquad y=1{,}5x;$

$k_5=\frac{8}{5}=1{,}6,\qquad y=1{,}6x.$

5.16. Что представляет собой график функции f, заданной формулой $y=\frac{1}{2}x$ на множестве:

а) $[-6;\ 6]$; г) $[-4;\ -2]\cup[2;\ 4]$;
б) $[-2;\ +\infty[$; д) $]-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty[$;
в) $]-\infty;\ 4[$; е) $\{-4;\ 0;\ 4\}$?

Ответ. Графиком функции f служит: а) отрезок (рис. 37); б) луч (рис. 38); в) открытый луч (рис. 39); г) объединение отрезков (рис. 40); д) объединение лучей (рис. 41); е) множество, состоящее из трех точек (рис. 42).

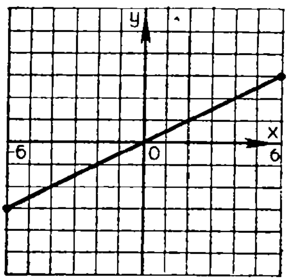


Рис. 37

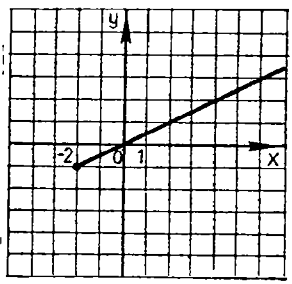


Рис. 38

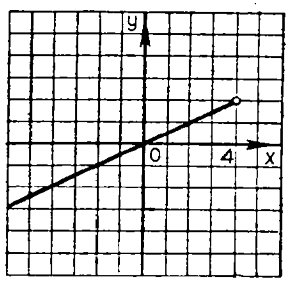


Рис. 39

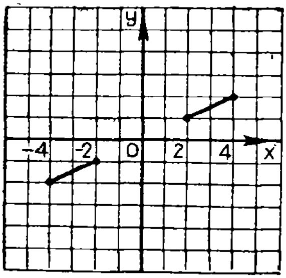


Рис. 40

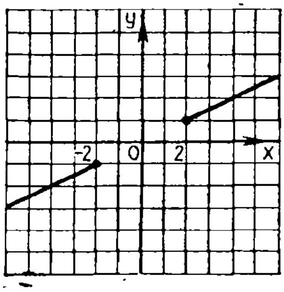


Рис. 41

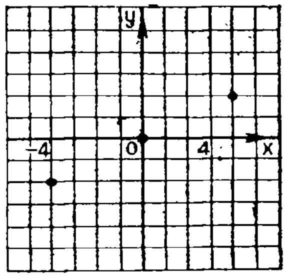


Рис. 42

5.17. Функция g задана на отрезке $[-6;\ 6]$. Постройте график функции g, зная, что:

а) $g(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{если } x\in[-6;\ -1]; \\ x+3, & \text{если } x\in\,]-1;\ 6]; \end{cases}$

б) $g(x)=\begin{cases} -2x-2, & \text{если } x\in[-6;\ 0]; \\ 2x-2, & \text{если } x\in\,]\,0;\ 6]; \end{cases}$

в) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & \text{если } x\in[-6;\ 2[; \\ \frac{4}{x}, & \text{если } x\in[2;\ 6]; \end{cases}$

г) $g(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\in[-6;\ 3[; \\ -\frac{9}{x}, & \text{если } x\in[3;\ 6], \end{cases}$

д) $g(x)=\begin{cases} -3, & \text{если } x\in[-6;\ 0[; \\ 0, & \text{если } x=0, \\ 3, & \text{если } x\in\,]\,0;\ 6]. \end{cases}$

е) $g(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in[-6;\ -2]\cup[2;\ 6], \\ 3, & \text{если } x\in\,]-2;\ 2[. \end{cases}$

Ответ. См. рисунок 43.

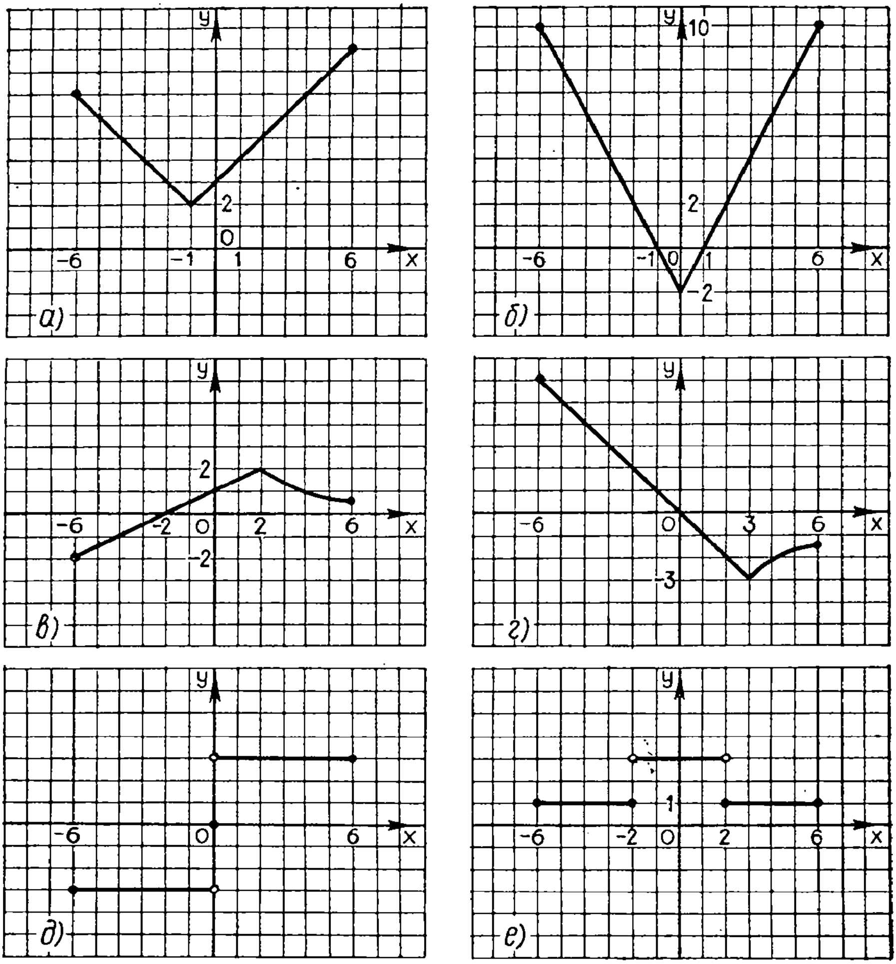


Рис. 43

5.18. График линейной функции f проходит через точки A и B. Задайте функцию f формулой, зная координаты этих точек:

а) $A(2;\ 6)$; $B(5;\ 15)$; г) $A(4;\ 3)$; $B(9;\ 8)$;

б) $A(2;\ 6)$; $B(5;\ 9)$; д) $A(-6;\ 1)$; $B(3;\ -2)$;

в) $A(4;\ 2)$; $B(18;\ 9)$; е) $A\left(-1\frac{1}{3};\ 5\right)$; $B(2{,}7;\ 5)$.

Решение. а) $y = kx + b$;

$$\begin{cases} 6 = 2k + b, \\ 15 = 5k + b, \end{cases} \quad 9 = 3k,\ k = 3,\ b = 0,\ y = 3x;$$

б) $y=kx+b$;

$$\begin{cases} 6=2k+b, \\ 9=5k+b, \end{cases} \quad 3=3k, \ k=1, \ b=4, \ y=x+4;$$

в) $y=\frac{1}{2}x$; г) $y=x-1$; д) $y=-\frac{1}{3}x-1$; е) $y=5$.

5.19. Известно, что график линейной функции g проходит через точки A, B, C, D. Найдите значения координат x_1 и y_1, если:

а) $A(4;\ 28)$, $B(5;\ 35)$, $C(x_1;\ 49)$, $D(9;\ y_1)$;

б) $A(1;\ 0)$, $B(x_1;\ 8)$, $C(-3;\ y_1)$, $D(-10;\ -22)$;

в) $A(20;\ y_1)$, $B(95;\ -0{,}5)$, $C(x_1;\ -9{,}9)$, $D(100;\ 0)$;

г) $A(x_1;\ 10)$, $B(7;\ 8)$, $C(-3;\ 3)$, $D(-17;\ y_1)$.

Ответ. а) $x_1=7$, $y_1=63$; в) $x_1=1$, $y_1=-8$;
б) $x_1=5$, $y_1=-8$; г) $x_1=11$, $y_1=-4$.

5.20. Функция задана формулой $y=-1{,}5x+3$ на множестве X. Какое множество точек является ее графиком, если:

а) $X=]-\infty;\ +\infty[$; в) $X=[-2;\ 3]$;

б) $X=[-1;\ +\infty[$; г) $X=\{-6;\ 1{,}6;\ 2;\ 10\}$.

Ответ. а) Прямая; б) луч; в) отрезок; г) множество, состоящее из четырех точек: $\{(-6;\ 12),\ (1{,}6;\ 0{,}6),\ (2;\ 0),\ (10;\ -12)\}$.

5.21. Постройте график функции:

а) $y=x^2$, где $x\in\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$;

б) $y=x^2$, где $x\in[-3;\ 2]$;

в) $y=x^2$, где $x\in]-8;\ 0]$;

г) $y=x^2$, где $x\in[-3;\ -1]\cup[1;\ 3]$;

д) $y=x^2$, где $x\in]-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty[$.

5.22. Постройте график функции:

а) $y=x^3$, где $x\in\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$;

б) $y=x^3$, где $x\in[-1;\ 2]$;

в) $y=x^3$, где $x\in[-2;\ -1]\cup[1;\ 2]$;

г) $y=x^3$, где $x\in]-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty[$.

5.23. Зная, что $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-x+1$, найдите:

$$f(0),\ f(1),\ f(-1),\ f(a),\ f(-a).$$

Решение. $f(0)=1$;
$f(1)=1^5-2\cdot 1^4+3\cdot 1^3-1+1=2$;
$f(-1)=(-1)^5-2(-1)^4+3(-1)^3-(-1)+1=-4$;
$f(a)=a^5-2a^4+3a^3-a+1$;
$f(-a)=(-a)^5-2(-a)^4+3(-a)^3-(-a)+1=-a^5-2a^4-$
$-3a^3+a+1$.

5.24. Пусть $f(x)=x^3+x+1$; $g(x)=x^4-2x^2+1$.
Докажите, что:

а) $f(a)+f(-a)=2$; в) $g(a)=g(-a)$;
б) $f(1-a)+f(1+a)=6+6a^2$; г) $g(1+a)-g(1-a)=8a^3$.

Решение. а) $f(a)+f(-a)=(a^3+a+1)+((-a)^3+(-a)+$
$+1)=a^3+a+1-a^3-a+1=2$;
б) $f(1-a)+f(1+a)=(1-a)^3+(1-a)+1+(1+a)^3+(1+a)+$
$+1=6+6a^2$;
г) $g(1+a)-g(1-a)=(1+a)^4-2(1+a)^2+1-(1-a)^4+$
$+2(1-a)^2-1=(1+a)^4-(1-a)^4+2((1-a)^2-(1+a)^2)=$
$=((1+a)^2+(1-a)^2)((1+a)^2-(1-a)^2)+2(-4a)=(2+2a^2)(4a)-$
$-8a=8a+8a^3-8a=8a^3$.

5.25. Как расположены относительно оси x точки:

а) $A_1(2,\ 3)$ и $A_2(2,\ -3)$; в) $C_1(5,\ a)$ и $C_2(5,\ -a)$;
б) $B_1(-3,\ -4)$ и $B_2(-3,\ 4)$; г) $D_1(a,\ b)$ и $D_2(a,\ -b)$?

Ответ. Симметрично.

5.26. Как расположены относительно оси y точки:

а) $A_1(3,\ 2)$ и $A_2(-3,\ 2)$; в) $C_1(a,\ 3)$ и $C_2(-a,\ 3)$;
б) $B_1(-1,\ -4)$ и $B_2(1,\ -4)$; г) $D_1(a,\ b)$ и $D_2(-a,\ b)$?

Ответ. Симметрично.

5.27. Докажите, что графики функций $y=f(x)$ и $y=f(-x)$ симметричны относительно оси y.

Решение. Пусть точка $A(a;\ b)$ — произвольная точка графика G_1 функции $y=f(x)$. Тогда равенство $b=f(a)$ верное. Точка $A'(-a;\ b)$, симметричная точке $A(a;\ b)$ относительно оси y, принадлежит графику G_2 функции $y=f(-x)$. Действительно, равенство $b=f(-(-a))$ верное. Следовательно, каждой точке $A(a;\ b)\in G_1$ соответствует точка $A'(-a;\ b)\in G_2$. Аналогично можно показать, что каждой точке графика G_2 соответствует симметричная относительно оси y точка графика G_1. Отсюда следует, что график G_2 симметричен графику G_1 относительно оси y.

5.28. Постройте в одной и той же системе координат графики функций $y=f(x)$ и $y=f(-x)$, если:

а) $f(x)=2x$; в) $f(x)=0{,}5x^2$;

б) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=\frac{4}{x}$.

Указание: а) $f(-x)=-2x$; б) $f(-x)=-x^3$; в) $f(-x)=0{,}5x^2$; г) $f(-x)=-\frac{4}{x}$.

5.29. Задайте формулой функцию g, график которой симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси y, зная, что функция f задана формулой:

а) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=x^2-x-2$;

б) $f(x)=x^2$; д) $f(x)=|x|-1$;

в) $f(x)=1-x+x^3$; е) $f(x)=x|x|$.

Ответ. а) $g(x)=-x^3$; б) $g(x)=x^2$; в) $g(x)=1+x-x^3$; г) $g(x)=x^2+x-2$; д) $g(x)=|x|-1$; е) $g(x)=-x|x|$.

5.30. Известно, что $f(x)=0{,}5x-2$ и $g(x)=x^2$. Зная это, постройте графики функций:

а) $y=f(x)$; г) $y=g(x)$;

б) $y=-f(x)$; д) $y=-g(x)$;

в) $y=f(-x)$; е) $y=g(-x)$.

Ответ. б) График функции $y=-f(x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси x; в) график функции $y=f(-x)$ симметричен графику функции относительно оси y.

5.31. Известно, что точка $M(a, b)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$. Принадлежит ли точка $A(a, -b)$ или точка $B(-a, b)$ графику функции:

а) $y=-f(x)$; б) $y=f(-x)$?

Ответ. а) Точка A принадлежит графику функции $y=-f(x)$; б) точка B принадлежит графику функции $y=f(-x)$.

5.32. Известно, что $f(x)=4x+3$, а $g(x)$ таково, что равенство $f(g(x))=x$ есть тождество. Найдите $g(x)$.

Решение. $4g(x)+3=x$; $4g(x)=x-3$; $g(x)=0{,}25x-0{,}75$.

5.33. На рисунке 44 изображены графики движения пешехода (прямая a) и велосипедиста (прямая b). Используя график, ответьте на вопросы:

а) Какой путь прошел пешеход за 10 *мин*?

б) Какой путь проехал велосипедист за 3 *мин*?

в) Кто из них проделал больший путь?

г) С какой скоростью двигался пешеход?

д) С какой скоростью двигался велосипедист?

е) Какое расстояние пройдет пешеход, когда велосипедист проедет 600 *м*?

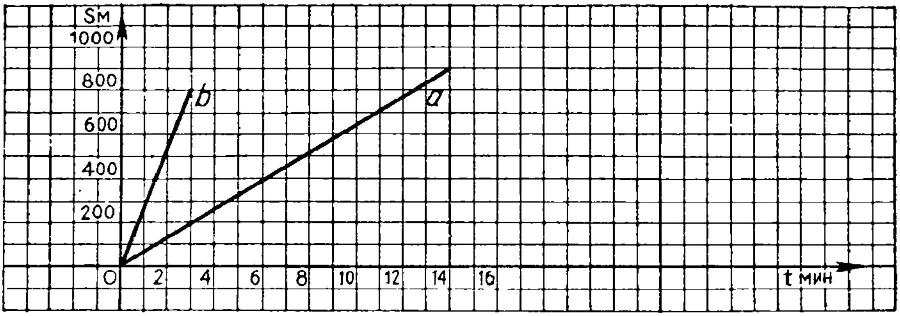


Рис. 44

5.34. На рисунке 45 изображены графики движения велосипедиста (прямая p) и мотоциклиста (прямая q), которые двигались по одной дороге и в одном направлении. Используя график, ответьте на вопросы:

а) Какова скорость велосипедиста и какова скорость мотоциклиста?

б) Из одного ли пункта они начали двигаться?

в) Одновременно ли они начали двигаться (если нет, то кто выехал раньше)?

г) На каком расстоянии друг от друга они будут через 5 *мин* после начала движения велосипедиста?

5.35. Пружина длиной 30 *см* под действием груза в 200 *г* растягивается до 34 *см*. Вторая пружина длиной 20 *см* под действием груза в 500 *г* растягивается до 25 *см*. Существует ли груз, при котором обе пружины имеют одинаковую длину? (Предполагается, что в условиях задачи изменение длины пружины пропорционально изменению нагрузки.)

Ответ. Не существует.

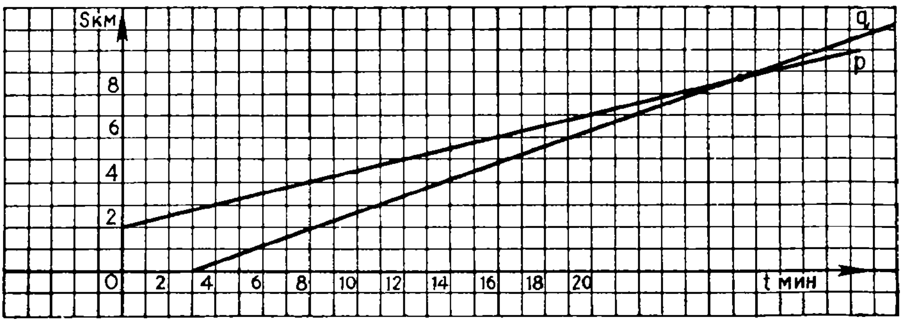


Рис. 45

VII КЛАСС

5.36. Известно, что точка $A(a; 8)$ принадлежит графику функции f. Принадлежит ли точка $B(a+4; 8)$ графику функции g, если;

а) $f(x)=5x+2$; $\quad g(x)=5(x-4)+2$;

б) $f(x)=-3x$; $\quad g(x)=-3(x+4)$;

в) $f(x)=2x^2$; $\quad g(x)=2(x-4)^2$;

г) $f(x)=\frac{9}{x}$; $\quad g(x)=\frac{9}{x-4}$;

д) $f(x)=-\frac{3}{x+5}$; $\quad g(x)=\frac{-3}{x+1}$;

е) $f(x)=x^3$; $\quad g(x)=(x-4)^3$?

Решение. а) В силу того что точка $A(a; 8)$ принадлежит графику функции f, равенство $8=5a+2$ верное ($f(a)=5a+2$ и $f(a)=8$). Проверка показывает, что $g(a+4)=5(a+4-4)+$ $+2=5a+2$ и $g(a+4)=8$, т. е. мы видим, что равенство $g(a+4)=5a+2$ верное.

Следовательно, точка B принадлежит графику функции g.

б) $f(a)=-3a=8$; $g(a+4)=-3(a+8)=-3a-24\neq 8$. Точка B не принадлежит графику функции g.

в) $f(a)=2a^2=8$; $g(a+4)=2(a+4-4)^2=2a^2=8$. Точка B принадлежит графику функции g.

г) $f(a)=\frac{9}{a}=8$; $g(a+4)=\frac{9}{a+4-4}=\frac{9}{a}=8$. Точка B принадлежит графику функции g.

д) $f(a)=-\frac{3}{a+5}=8$; $g(a+4)=-\frac{3}{a+4+1}=-\frac{3}{a+5}=8$. Точка B принадлежит графику функции g.

е) $f(a)=a^3=8$; $g(a+4)=(a+4-4)^3=a^3=8$.
Точка B принадлежит графику функции g.

5.37. Известно, что точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y=x^2$. Принадлежит ли графику функции $y=(x+2)^2$ точка $K(a-2; b)$?

Решение. Равенство $b=(a-2+2)^2$ верное, так как верно равенство $b=a^2$. Следовательно, точка K принадлежит графику функции $y=(x+2)^2$.

5.38. Каждую точку $M(a; b)$ координатной плоскости отобразили на точку $M'(a+3; b)$. В какую точку при этом отображении перейдет точка $A(-3; 1)$; $B(-1; 4)$; $C(0; 0)$; $D(2; 0)$? Сделайте построение. На какую фигуру отобразится отрезок AB; отрезок CD; треугольник ABC? На какую фигуру отобразится график функции $y=2x$; $y=\frac{4}{x}$; $y=x^2$? В каждом случае сделайте построение и подберите формулу, задающую функцию, график которой получился в результате заданного отображения.

Ответ. При указанном отображении график функции $y=2x$ перейдет в график функции $y=2(x-3)$; график функции $y=\frac{4}{x}$ — в график функции $y=\frac{4}{x-3}$; график функции $y=x^2$ — в график функции $y=(x-3)^2$.

5.39. Докажите, что график функции g, где $g(x)=f(x-a)$, может быть получен из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса в направлении оси x на a единиц (если $a>0$, то на a единиц вправо, если $a<0$, то на $|a|$ единиц влево).

Решение. Пусть G_1 — график функции f, а G_2 — график функции g. Если $M(p;\ q)\in G_1$, то равенство $q=f(p)$ верное. Точка $M'(p+a;\ q)\in G_2$: равенство $q=f(p+a-a)$ верное. Следовательно, в результате параллельного переноса $M(p;\ q)\to M'(p+a;\ q)$ каждая точка $M\in G_1$ перешла в точку $M'\in G_2$. Покажем, что среди точек графика G_2 нет «лишних», т. е. таких, которые не были бы получены из точек графика G_1 в результате проведенного параллельного переноса. Допустим, что $K(m;\ n)\in G_2$ — такая «лишняя» точка. Тогда $n=f(m-a)$ — верное равенство, но точка $L(m-a;\ n)\in G_1$, так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y=f(x)$. При параллельном переносе $M(p,\ q)\to M'(p+a;\ q)$ точка L перешла в точку K. Значит, точка K не «лишняя». Полученное противоречие показывает, что график G_2 состоит из точек, которые были получены в результате параллельного переноса графика G_1 и только этих точек.

5.40. Постройте график функции:

а) $y=\frac{4}{x}$; г) $y=\frac{1}{8}x^3$;

б) $y=\frac{4}{x-2}$; д) $y=\frac{1}{8}(x-2)^3$;

в) $y=\frac{4}{x+2}$; е) $y=\frac{1}{8}(x+2)^3$.

Указание. б) График функции $y=\frac{4}{x-2}$ может быть получен из графика функции $y=\frac{4}{x}$ с помощью параллельного переноса в направлении оси x на 2 единицы (сдвига на 2 единицы вправо). в) График функции $y=\frac{4}{x+2}$ может быть получен из графика функции $y=\frac{4}{x}$ с помощью параллельного переноса в направлении оси x на -2 единицы (сдвига на 2 единицы влево).

5.41. Каждую точку $M(a;\ b)$ координатной плоскости отобразили на точку $M'(a;\ b+2)$. В какую точку при этом отображении перейдет точка $A(-3;\ 1)$; $B(-1;\ 4)$; $C(0;\ 0)$; $D(2;\ 0)$? Сделайте построение. На какую фигуру отобразится отрезок AB; отрезок CD; треугольник ABC? На какую фигуру отобразится график функции $y=-\frac{1}{2}x$; $y=\frac{4}{x}$; $y=-x^2$? Для каждого случая сделайте построение и подберите формулу, задающую функцию, график которой получится в результате отображения.

Ответ. При указанном отображении график функции $y=-\frac{1}{2}x$ перейдет в график функции $y=-\frac{1}{2}x+2$; график функции $y=\frac{4}{x}$ — в график функции $y=\frac{4}{x}+2$; график функции $y=-x^2$ — в график функции $y=-x^2+2$.

5.42. Докажите, что график функции g, где $g(x)=f(x)+b$, может быть получен из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса в направлении оси y (если $b>0$, то на b единиц вверх, если $b<0$, то на $|b|$ единиц вниз).

Решение. Доказательство аналогично проведенному в задаче 39.

5.43. Постройте график функции:

а) $y=\frac{4}{x}$;

б) $y=1+\frac{4}{x}$;

в) $y=-1+\frac{4}{x}$;

г) $y=\frac{1}{8}x^3$;

д) $y=\frac{1}{8}x^3+2$;

е) $y=\frac{1}{8}x^3-2$.

Указание. б) График функции $y=1+\frac{4}{x}$ может быть получен из графика функции $y=\frac{4}{x}$ с помощью параллельного переноса в направлении оси y на 1 единицу (сдвига на 1 единицу вверх). в) График функции $y=-1+\frac{4}{x}$ может быть получен из графика функции $y=\frac{4}{x}$ с помощью параллельного переноса в направлении оси у на —1 единицу (сдвига на 1 единицу вниз).

5.44. В одной и той же системе координат постройте графики функций:

а) $y=\frac{12}{x}$ и $y=\frac{12}{x-2}$;

б) $y=\frac{12}{x}$ и $y=\frac{12}{x}-1$;

в) $y=\frac{12}{x}$ и $y=\frac{12}{x+3}$;

г) $y=\frac{12}{x}$ и $y=\frac{12}{x}+2$.

5.45. Пользуясь графиком функций $y=\frac{12}{x}-1$, найдите положительные значения x, при которых $y=0$; $y>0$; $y<0$.

Ответ. $y=0$ при $x=12$; $y>0$ при $0<x<12$; $y<0$ при $x<0$ или $x>12$.

5.46. Постройте график функции и найдите множество значений аргумента x, при которых $y=0$, $y>0$, $y<0$ (если такие существуют):

а) $y=\frac{2x+6}{x}$; б) $y=\frac{-4x+11}{x-2}$.

Решение. а) Выражение $\frac{2x+6}{x}$ преобразуем тождественно: $\frac{2x+6}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{6}{x}=2+\frac{6}{x}$. Отсюда $y=2+\frac{6}{x}$. График функции $y=2+\frac{6}{x}$ получается из графика $y=\frac{6}{x}$ путем параллельного переноса на две единицы в направлении оси y.

б) $\frac{-4x+11}{x-2}=\frac{-4x+8+3}{x-2}=\frac{-4(x-2)+3}{x-2}=-4+\frac{3}{x-2}$. Задача сводится к построению графика функции $y=-4+\frac{3}{x-2}$. Построив график функции $y=\frac{3}{x}$, строим график функции $y=\frac{3}{x-2}$, а затем график функции $y=-4+\frac{3}{x-2}$.

5.47. Докажите, что графики функций конгруэнтны:

а) $y=\frac{12}{x}$ и $y=\frac{5x-3}{x-3}$;

б) $y=x^2$ и $y=(x+3)^2-1$;

в) $y=\sqrt{x}$ и $y=-3+\sqrt{x-1}$;

г) $y=f(x)$ и $y=f(x-a)+b$, где a и b — заданные числа.

Решение. а) $\frac{5x-3}{x-3}=\frac{5x-15+12}{x-3}=\frac{5(x-3)}{x-3}+\frac{12}{x-3}=5+\frac{12}{x-3}$. Отсюда видно, что график функции $y=5+\frac{12}{x-3}$ может быть получен из графика функции $y=\frac{12}{x}$ с помощью параллельного переноса. г) График функции $y=f(x-a)+b$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса — вектора $\overrightarrow{OA}$, где $O(0;\ 0)$, $A(a;\ b)$. Так как параллельный перенос плоскости есть перемещение, то графики $y=f(x-a)+b$ и $y=f(x)$ конгруэнтны.

5.48. Постройте график функции:

а) $y=x^2$; г) $y=\sqrt{x}$;

б) $y=(x-2)^2$; д) $y=\sqrt{x-2}$;

в) $y=(x-2)^2-4$; е) $y=\sqrt{x-2}-4$.

Указание. д) График функции $y=\sqrt{x-2}$ может быть получен из графика функции $y=\sqrt{x}$ с помощью параллельного переноса в направлении оси x на 2 единицы (сдвига на 2 единицы вправо).

е) График функции $y=\sqrt{x-2}-4$ может быть получен из графика функции $y=\sqrt{x-2}$ с помощью параллельного переноса в направлении оси y на -4 единицы (сдвига на 4 единицы вниз).

5.49. Числовое множество, которое наряду с принадлежащим ему числом x содержит также и число $-x$, называют симметричным относительно нуля.

Какие из множеств симметричны относительно нуля:

а) $[-5;\ 5]$; в) $\left]-16;\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ 16\right[$;

б) $\left]-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; г) $\{-7;\ -3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 7\}$?

Ответ. а); в); г).

5.50. Функция f, определенная на множестве, симметричном относительно нуля, называется четной, если при любом значении аргумента x верно равенство $f(-x)=f(x)$.

Является ли четной функция, заданная формулой:

а) $f(x)=x^2$; д) $f(x)=|x-2|$;

б) $f(x)=-5x^4$; е) $f(x)=x^4-x^2-5$;

в) $f(x)=|x|$; ж) $f(x)=|x+1|+|x-1|$;

г) $f(x)=2x^2$, где $x \geqslant 0$; з) $f(x)=\frac{x^6-1}{x^4+1}$?

Решение. а) Функция определена на множестве $]-\infty;\ +\infty[$, симметричном относительно нуля. Кроме того, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Следовательно, f — четная функция.

г) Область определения функции — множество $[0;\ +\infty[$, не симметричное относительно нуля. Поэтому f не является четной функцией.

ж) Функция определена на симметричном относительно нуля множестве и $f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|x-1|+|x+1|=f(x)$. Следовательно, f — четная функция.

5.51. Докажите, что график четной функции симметричен относительно оси y.

Решение. Пусть f — четная функция. Тогда: а) область ее определения X — симметричное относительно нуля множество; б) $f(-x)=f(x)$, где $x \in X$ — верное равенство.

Пусть G — график функции f. Если $(a;\ b) \in G$, то верно равенство $b=f(a)$. Покажем, что точка $(-a;\ b)$ также принадлежит графику G. Действительно, так как $a \in X$, то $-a \in X$. Кроме того, $f(-a)=f(a)$. Следовательно, равенство $b=f(-a)$ верное.

Итак, каждой точке $(a;\ b) \in G$ соответствует точка $(-a;\ b) \in G$. Но точки $(a;\ b)$ и $(-a;\ b)$ симметричны относительно оси y. Значит, график G симметричен относительно оси y.

5.52. Докажите, что функция, заданная формулой:

а) $f(x)=|x|-4$; б) $g(x)=|x+3|+|x-3|$;

в) $\varphi(x)=|x-2|+|x|+|x+2|$; г) $p(x)=\left(1-\frac{1+x^2}{1+x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}\right)$, четная и постройте ее график.

Решение. а) Функция f определена на множестве R, которое симметрично относительно нуля. Кроме того, $f(-x)=|-x|-4=|x|-4=f(x)$. Следовательно, f — четная функция.

б) Область определения g — множество R и $g(-x)=|-x+3|+|-x-3|=|x-3|+|x+3|=g(x)$.

в) $\varphi(-x)=|-x-2|+|-x|+|-x+2|=|x+2|+|x|+|x-2|=\varphi(x)$ и область определения R.

г) Область определения функции p есть множество $X=\{x\,|\,x\in R$ и $x\neq\pm1, x\neq 0\}$, симметричное относительно нуля.

$$\left(1-\frac{1+x^2}{1+x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}\right)=\frac{1+x-1-x^2}{1+x}\cdot\frac{1-x+2x}{x(1-x)}=\frac{(x-x^2)(1+x)}{(1+x)\,x(1-x)}=1.$$

Следовательно, при любом $x\in X$ $p(-x)=p(x)$. Графиком функции p является прямая $y=1$ без трех точек с абсциссами -1, 0, 1.

5.53. Функция f, определенная на множестве, симметричном относительно нуля, называется нечетной, если при любом значении аргумента x верно равенство $f(-x)=-f(x)$.

Является ли нечетной функция:

а) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=x^5$, где $x\geqslant 0$;

б) $f(x)=-2x^5$; д) $f(x)=2x^{15}-x^5+x$;

в) $f(x)=x-3$; е) $f(x)=|x-10|-|x+10|$?

Решение. а) Да, так как $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ и область ее определения R — симметричное относительно нуля множество;

б) да; в) нет; г) нет, так как область определения функции множество $[0; +\infty[$, не симметричное относительно нуля; д) да; е) да; $f(-x)=|-x-10|-|-x+10|=|x+10|-|x-10|=-(|x-10|-|x+10|)=-f(x)$.

5.54. Докажите, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Решение. Пусть f — нечетная функция. Тогда: а) область ее определения X — симметричное относительно нуля множество; б) равенство $f(-x)=-f(x)$ верно при любом $x\in X$.

Пусть G — график функции f. Если $(a;\ b)\in G$, то верно равенство $b=f(a)$. Покажем, что точка $(-a;\ -b)$ также принадлежит графику G. Действительно, так как $a\in X$, то $-a\in X$. Кроме того, $f(-a)=-f(a)$. Следовательно, равенство $-b=f(-a)$ верное. Итак, каждой точке $(a;\ b)\in G$ соответствует точка $(-a;\ -b)\in G$. Но точки $(a;\ b)$ и $(-a;\ -b)$ симметричны относительно начала координат. Значит, график функции f симметричен относительно начала координат.

5.55. Докажите, что функция, заданная формулой:

а) $f(x)=x|x|$;

б) $\varphi(x)=|x-2|-|x+2|$,

нечетная, и постройте ее график.

Решение. а) $f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$. Область определения R. При $x\geqslant 0$ $f(x)=x|x|=x^2$; при $x<0$ $f(x)=x|x|=x(-x)=-x^2$. График расположен в первом и третьем координатных углах.

б) $\varphi(-x)=|-x-2|-|-x+2|=|x+2|-|x-2|=-(|x-2|-|x+2|)=-\varphi(x)$. Область определения R. Следовательно, функция φ — нечетная.

Представим промежуток $[0;\ +\infty[$ в виде объединения двух множеств: $[0;\ 2[$ и $[2;\ +\infty[$. Если $x\in[0;\ 2[$, то $\varphi(x)=|x-2|-|x+2|=(2-x)-(x+2)=-2x$; если $x\in[2;\ +\infty[$, то $\varphi(x)=|x-2|-|x+2|=(x-2)-(x+2)=-4$. Таким образом,

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2x, & \text{если } 0\leqslant x<2,\\ -4, & \text{если } x\geqslant 2.\end{cases}$$

Построив часть графика функции φ, соответствующую $x\geqslant 0$, другую часть графика (где $x<0$) строят с помощью симметрии относительно начала координат.

5.56. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{(x-2)^2}+3$; б) $y=\sqrt{(x+1)^2}-5$.

Решение.

а) $\sqrt{(x-2)^2}+3=|x-2|+3=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\geqslant 2;\\ -x+5, & \text{если } x<2.\end{cases}$

Ответ. График функции $y=\sqrt{(x-2)^2}+3$ состоит из двух лучей, исходящих из точки $(2;\ 3)$.

5.57. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; б) $y=\dfrac{4x^2-25}{2x+5}$.

Ответ. а) График — прямая $y=x+3$ без точки $(3;\ 6)$; б) график — прямая $y=2x-5$ без точки $(-2{,}5;\ -10)$.

5.58. Докажите, что функция, заданная формулой

а) $f(x)=2x+3$;

б) $f(x)=10x-1$;

в) $f(x)=3x^2$, где $x\geqslant 0$;

г) $f(x)=-2x^2$, где $x\leqslant 0$;

д) $f(x)=\sqrt{x}-5$;

е) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, где $x>0$,

возрастающая.

Решение. а) Пусть $x_2>x_1$, где x_1 и x_2 — любые числа. $f(x_2)-f(x_1)=(2x_2+3)-(2x_1+3)=2(x_2-x_1)>0$, так как $x_2>x_1$. Следовательно, $f(x_2)>f(x_1)$.

в) Пусть $x_2>x_1\geqslant 0$, $f(x_2)-f(x_1)=3x_2^2-3x_1^2=3(x_2+x_1)\times(x_2-x_1)>0$, так как $x_2>0$, $x_1\geqslant 0$ и $x_2>x_1$. Следовательно, $f(x_2)>f(x_1)$.

г) Пусть $x_1 < x_2 \leqslant 0$. $f(x_2) - f(x_1) = -2x_2^2 + 2x_1^2 = -2(x_2^2 - x_1^2) = -2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$, так как $x_2 > x_1$ и $x_2 + x_1 < 0$. Следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$.

е) Пусть $x_2 > x_1 > 0$. $f(x_2) - f(x_1) = -\frac{1}{x_2} - \left(-\frac{1}{x_1}\right) = -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1} > 0$, так как $x_2 > x_1$ и $x_2 x_1 > 0$.

5.59. Докажите, что функция, заданная формулой

а) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$; г) $g(x) = -2x^2$, где $x \geqslant 0$;

б) $g(x) = -15x - 4$; д) $g(x) = -\sqrt{x}$;

в) $g(x) = 3x^2$, где $x \leqslant 0$; е) $g(x) = \frac{1}{x}$, где $x > 0$,

убывающая.

Решение. а) Пусть $x_2 > x_1$, где x_1 и x_2 — любые числа. $g(x_2) - g(x_1) = \left(-\frac{1}{2}x_2 + 5\right) - \left(-\frac{1}{2}x_1 + 5\right) = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1) < 0$, так как $-\frac{1}{2} < 0$ и $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$.

5.60. Представьте область определения функции в виде объединения промежутков, в каждом из которых функция монотонна (возрастает или убывает). Укажите характер монотонности функции в каждом из выделенных промежутков:

а) $f(x) = x^2$; д) $f(x) = (x-4)^2 - 1$;

б) $f(x) = |x|$; е) $f(x) = -(x+4)^2 + 3$;

в) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$; ж) $f(x) = x\sqrt{x^2}$;

г) $f(x) = -\frac{1}{4}x^{-2}$; з) $f(x) = |x-2| - 3$.

Ответ. а) $]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$; в промежутке $]-\infty; 0]$ функция убывает; в промежутке $[0; +\infty[$ функция возрастает (число 0 можно исключить из промежутка $]-\infty; 0]$ и $[0; +\infty[$).

5.61. Функция f задана формулой:

а) $f(x) = \begin{cases} -2x - 7, \text{ если } x \in]-\infty; -2[; \\ -x^2 + 1, \text{ если } x \in [-2; 2]; \\ 2x - 7, \text{ если } x \in]2; +\infty[; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -0{,}8x - 5{,}6, \text{ если } x \in [-32; -2]; \\ 0{,}5x^3, \text{ если } x \in]-2; 2[; \\ -0{,}8x + 5{,}6, \text{ если } x \in [2; 32]; \end{cases}$

в) $f(x) = ||2x| - 4| - 1$;

г) $f(x) = x^2 - 2|x| - 8$;

д) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;

е) $f(x) = -x^2 + 5|x| - 6$.

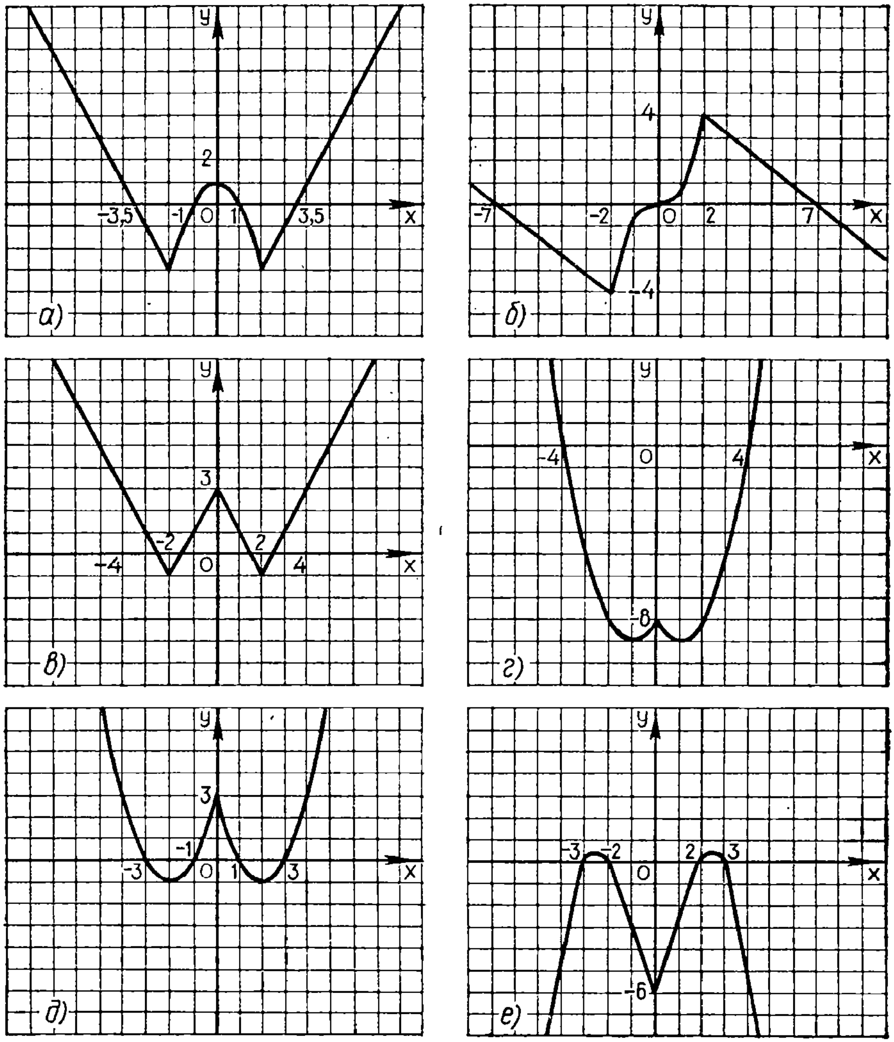


Рис. 46

Постройте график функции f. Найдите множество значений переменной x, при которых $f(x)=0$; $f(x)<0$; $f(x)>0$. Найдите промежутки, в которых функция f возрастает, убывает.

Ответ. См. рисунок 46.

5.62. Начертите график какой-либо функции, которая:

а) определена на множестве $[-7; 8]$; в промежутке $[-7; -2[$

возрастает; в промежутке $]-2;\ 4[$ убывает; в промежутке $]4;\ 8]$ возрастает;

б) определена на множестве $[-6;\ 6]$; в промежутке $[-6;\ -1[$ убывает; в промежутке $]-1;\ 1[$ возрастает; в промежутке $]1;\ 6]$ убывает.

в) определена на множестве $[-5;\ 5]$; множеством ее значений является множество $\{-1;\ 2;\ 5\}$; в каждом из промежутков $[-5;\ -1[$, $[-1;\ 1]$, $]1;\ 5]$ функция принимает одно и то же значение.

■

VIII КЛАСС

5.63. Существует ли такое натуральное n, при котором график $y=x^n$ проходит через точку:

а) $A(-2;\ 256)$; д) $E(7;\ 1\,879\,435\,875)$;
б) $B(3;\ 102)$; е) $F(-7;\ 426\,599\,023)$;
в) $C(5;\ 87\,976)$; ж) $K(1{,}3;\ 2{,}197)$;
г) $D(6;\ 229\,473)$; з) $L(2{,}3;\ 121{,}67)$?

Решения и ответы.

а) Существует, $n=8$; $(-2)^8=256$ — верное равенство.

б) Нет. При любом натуральном n 3^n оканчивается нечетной цифрой, поэтому равенство $3^n=102$ не может быть верным.

в) Нет. Натуральная степень 5 оканчивается цифрой 5.

г) Нет. Натуральная степень 6 оканчивается четной цифрой.

д) Нет. Натуральная степень 7 не может оканчиваться цифрой 5.

е) Нет. Значения степени 7^n могут оканчиваться лишь цифрами 7, 9, 3, 1. При этом цифрами 7 и 3 значения 7^n оканчиваются при нечетном n. Поэтому $(-7)^n$ не может оканчиваться цифрой 3 и быть положительным числом.

ж) Существует. $n=3$.

з) Нет. Значение степени $2{,}3^n$ может быть числом, в котором два знака после запятой лишь при $n=2$, но $2{,}3^2\neq 121{,}67$.

5.64. Постройте график функции:

а) $y=x^4$; д) $y=x^5$;
б) $y=(x-2)^4$; е) $y=(x-1)^5$;
в) $y=x^4+2$; ж) $y=x^5-3$;
г) $y=(x-3)^4-1$; з) $y=(x+2)^5-1$.

5.65. Задайте формулой функцию, обратную f. Постройте график функции f и обратной ей функции, если функция f задана формулой:

а) $y=5x-1$; г) $y=(x-2)^2-1$, где $x\geqslant 2$;
б) $y=\frac{6}{x}$; д) $y=\frac{5x+4}{x}$, где $x<0$;
в) $y=\sqrt{x}$; е) $y=\sqrt{x+2}$.

Ответ.

а) $y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$; б) $y=\frac{6}{x}$; в) $y=x^2$, где $x\geqslant 0$;

г) $y=\sqrt{x+1}+2$; д) $y=\frac{4}{x-5}$, где $x<5$; е) $y=x^2-2$, где $x\geqslant 0$.

5.66. Постройте график функции:

а) $y=2^x$; г) $y=\lg x$;
б) $y=2^{x-1}$; д) $y=\lg(x-1)$;
в) $y=2^x-1$; е) $y=\lg x-1$.

Указание. б) График функции $y=2^{x-1}$ может быть получен из графика функции $y=2^x$ с помощью параллельного переноса в направлении оси x на 1 единицу.

в) График функции $y=2^x-1$ может быть получен из графика функции $y=2^x$ с помощью параллельного переноса в направлении оси y на -1 единицу.

5.67. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; г) $y=\lg(x^2-x-20)$;

б) $y=\sqrt[4]{\frac{x-2}{2x-5}}$; д) $y=\lg\left(\frac{x+3}{3x-7}\right)$;

в) $y=\sqrt[7]{\frac{x+5}{1-2x}}$; е) $y=\lg\left(\frac{2-5x}{x+3}\right)$.

Решение. а) $x^2-5x+6\geqslant 0$, $x\in]-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty[$;

б) $\frac{x-2}{2x-5}\geqslant 0$; $\begin{cases}(x-2)(2x-5)\geqslant 0,\\ 2x-5\neq 0;\end{cases}$ $x\in]-\infty;\ 2]\cup]2{,}5;+\infty[$;

в) $\frac{x+5}{1-2x}\geqslant 0$; $\begin{cases}(x+5)(2x-1)\leqslant 0,\\ 1-2x\neq 0;\end{cases}$ $x\in[-5;\ 0{,}5[$;

г) $x^2-x-20>0$; $x\in]-\infty;\ -4[\cup]5;\ +\infty[$;

д) $\frac{x+3}{3x-7}>0$; $(x+3)(3x-7)>0$; $x\in]-\infty;\ -3[\cup]2\frac{1}{3};\ +\infty[$;

е) $\frac{2-5x}{x+3}>0$; $(5x-2)(x+3)<0$; $x\in]-3;\ 0{,}4[$.

5.68. На какое множество отображается промежуток $[-1;\ 1]$ функцией:

а) $y=4x$; г) $y=4x^2+4$;
б) $y=4x+4$; д) $y=4x^3$;
в) $y=4x^2$; е) $y=4^x$?

Ответ. а) $[-4;\ 4]$; б) $[0;\ 8]$; в) $[0;\ 4]$; г) $[4;\ 8]$; д) $[-4;\ 4]$; е) $\left[\frac{1}{4};\ 4\right]$.

5.69. Какие из чисел -1, 0, 6, 12, 18 принадлежат множеству значений функции $y=2x^2-5x+8$?

Решение. $2x^2-5x+8=-1$; $2x^2-5x+9=0$; $D=25-72<0$. Следовательно, уравнение $2x^2-5x+8=-1$ не имеет корней. Это значит, что -1 не принадлежит множеству y значений данной функции.

Ответ. 6, 12, 18.

5.70. Принадлежит ли число 10 множеству значений функции $y=\sqrt{x^2+2x+112}$?

Решение. $x^2+2x+112=100$, $x^2+2x+12=0$; $D=1-12<0$.

Ответ. Не принадлежит.

5.71. Принадлежит ли число -2 множеству значений функции $y=\lg(x^2-5x+9)$?

Решение. $x^2-5x+9=10^{-2}$; $x^2-5x+8{,}99=0$, $D=25-4\cdot 8{,}99<0$.

Ответ. Не принадлежит.

5.72. Постройте график функции $y=|\lg x|$. Покажите, что если точка $P(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y=|\lg x|$, то точка $Q\left(\frac{1}{a};\ b\right)$ также принадлежит этому графику.

Решение. Если точка $P(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y=|\lg x|$, то равенство $b=|\lg a|$ верное. $\left|\lg\frac{1}{a}\right|=|\lg a^{-1}|=$ $=|-\lg a|=|\lg a|$. Отсюда следует, что равенство $\left|\lg\frac{1}{a}\right|=b$ верное. Следовательно, точка $Q\left(\frac{1}{a};\ b\right)$ принадлежит графику функции $y=|\lg x|$.

5.73. Постройте график функции $y=\left|\lg\frac{1}{x}\right|$.

Решение. График функции $y=\left|\lg\frac{1}{x}\right|$ имеет тот же вид, что и график функции $y=|\lg x|$. Действительно, $y=\left|\lg\frac{1}{x}\right|=$ $=|\lg 1-\lg x|=|-\lg x|=|\lg x|$.

5.74. В одной и той же системе координат постройте графики функций: $f(x)=x^2$ и $g(x)=2^x$. Сколько корней имеет уравнение $x^2=2^x$? Найдите их.

Ответ. Уравнение имеет три корня: $x_1\approx -0{,}76$; $x_2=2$; $x_3=4$.

5.75. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{|x|}$; б) $y=\lg|x|$.

Указание. Нужно доказать, что каждая из функций четная. После этого легко построить график каждой функции (он симметричен относительно оси y).

5.76. Постройте график функции

$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2$.

Решение. График состоит из одной точки (3; 2), так как функция определена лишь при $x=3$.

5.77. Чем отличаются друг от друга графики функций

$$y=\lg x^2 \text{ и } y=2\lg x?$$

Решение. Функция $y=\lg x^2$ четная. Она определена на множестве всех чисел, кроме нуля. Функция $y=2\lg x$ определена на множестве положительных чисел. Поэтому график функции $y=\lg x^2$ состоит из двух ветвей: из графика функции $y=2\lg x$ и симметричной ему относительно оси y ветви $y=2\lg(-x)$.

5.78. Постройте график функции:

а) $y=10^{\lg x}$; г) $y=10^{\lg(9-x^2)}$;

б) $y=10^{\lg x^2}$; д) $y=10^{\lg\frac{1}{x}}$;

в) $y=10^{\lg(x^2-4)}$; е) $y=10^{\lg\frac{4}{x-2}}$.

Указание. График функции $y=10^{\lg f(x)}$ такой же, как и график функции $y=f(x)$, где $f(x)>0$.

5.79. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{\frac{5-x}{x+5}}$; в) $y=\lg(x^2-x-20)$;

б) $y=\sqrt{\frac{3-x}{x+5}}+\frac{1}{x-2}$; г) $y=\lg(x^2-x-6)-\sqrt{1-x}$.

Решение. а) $\frac{5-x}{x+5}\geqslant 0$; $\begin{cases}(x-5)(x+5)\leqslant 0;\\ x\neq -5;\end{cases}$ $x\in]-5;\ 5]$;

б) $\begin{cases}\frac{3-x}{x+5}\geqslant 0,\\ x-2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-3)(x+5)\leqslant 0,\\ x\neq 2,\ x+5\neq 0;\end{cases}$ $x\in]-5;\ 2[\cup]2;\ 3]$.

в) $x^2-x-20>0$; $(x+4)(x-5)>0$; $x\in]-\infty;\ -4[\cup]5;+\infty[$.

г) $\begin{cases}x^2-x-6>0,\\ 1-x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+2)(x-3)>0,\\ x<1;\end{cases}$ $x\in]-\infty;\ -2[$.

5.80. При каком значении x функция принимает наименьшее значение:

а) $y=x^2-4x+4$; в) $y=x^2-3x$;

б) $y=x^2-2x-15$; г) $y=(x^2-3x)(x^2-3x+4)$?

Решение. а) $y=(x-2)^2$. Наименьшее значение функция принимает при $x=2$.

б) $x^2-2x-15=(x^2-2x+1)-16=(x-1)^2-16$.

Наименьшее значение функция принимает при $x=1$.

в) $x^2-3x=x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=(x-1{,}5)^2-\frac{9}{4}$.

Наименьшее значение функция принимает при $x=1{,}5$.

г) Пусть $x^2-3x=p$. Тогда $(x^2-3x)(x^2-3x+4)=p(p+4)=$ $=p^2+4p+4-4=(p+2)^2-4$. Наименьшее значение выражение $(p+2)^2-4$ имеет при $p=-2$. Найдем значения x, при которых $x^2-3x=-2$. Уравнение $x^2-3x+2=0$ имеет корни 1 и 2. Следовательно, наименьшее значение функция $y=(x^2-3x)\times$ $\times(x^2-3x+4)$ принимает при $x=1$ и $x=2$.

5.81. Найдите наименьшее значение функции $y=x(x+1)\times$ $\times(x+2)(x+3)$.

Решение. $x(x+1)(x+2)(x+3)=(x(x+3))((x+2)(x+1))=$ $=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$. Обозначим x^2+3x буквой p. Тогда $y=p(p+2)=p^2+2p+1-1=(p+1)^2-1$.

Наименьшее значение выражение $(p+1)^2-1$ принимает при $p=-1$, оно равно -1. Следовательно, $y_{\min}=-1$.

5.82. Функция задана формулой $f(x)=\sqrt{x^2-4}$. Докажите, что при $a>1$ $f\left(a+\frac{1}{a}\right)=a-\frac{1}{a}$.

Решение. $f\left(a+\frac{1}{a}\right)=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{a^2}-4}=$ $=\sqrt{\frac{(a^2+1)^2-4a^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{a^2}}=\frac{|a^2-1|}{|a|}$.

Так как $a>1$, то $\frac{|a^2-1|}{|a|}=\frac{a^2-1}{a}=a-\frac{1}{a}$.

5.83. Функция f определена на множестве целых чисел и обладает свойством: для любых целых a и b $f(a+b)=f(a)+f(b)$.

1) Чему равно $f(0)$?

2) Каково соотношение между $f(-x)$ и $f(x)$?

3) Если $f(1)=k$, то $f(x)=kx$. Докажите это.

Решение. 1) Пусть $a=b=0$; тогда $f(0+0)=f(0)+f(0)$, $f(0)=2f(0)$, $f(0)=0$.

2) Пусть $a=x$, $b=-x$; тогда $f(x-x)=f(x)+f(-x)$, $f(0)=f(x)+f(-x)$, $0=f(x)+f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$.

3) $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=k+k=2k$,

$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=2k+k=3k$,

$f(n)=f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ раз}})=\underbrace{f(1)+f(1)+\ldots+f(1)}_{n \text{ раз}}=n\cdot k$;

$f(-n)=-f(n)=-nk$.

Таким образом, для любого $x\in Z$ верно, что $f(x)=kx$.

5.84. Множество целых чисел функцией f отображается на множество $\{-1;\ 1\}$. Известно, что функция f обладает свойством: для любых целых a и b верно равенство $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$.

1) Чему равно $f(0)$?

2) Каково соотношение между $f(-x)$ и $f(x)$?

3) Докажите, что если $k\in Z$, то:

а) $f(2k)=1$; б) $f(1)=-1$; в) $f(2k+1)=-1$.

Решение. 1) Пусть $a=b=0$; тогда $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)$, $f(0)=(f(0))^2$; отсюда $f(0)=0$ или $f(0)=1$. Но функция f не может принимать значение, равное нулю. Следовательно, $f(0)=1$.

2) Пусть $a=x$, $b=-x$; тогда $f(x-x)=f(x)\cdot f(-x)$; $f(0)=$ $=f(x)\cdot f(-x)$, $1=f(x)\cdot f(-x)$. Отсюда следует, что $f(x)$ и $f(-x)$ могут принимать лишь значения одного знака, т. е. если $f(x)=1$, то $f(-x)=1$, или если $f(x)=-1$, то $f(-x)=-1$. Следовательно, $f(-x)=f(x)$ (функция f четная).

3) а) $f(2)=f(1)\cdot f(1)$, $f(2)=(f(1))^2$. Следовательно, $f(2)\geqslant 0$. Из двух значений -1 и 1, принимаемых функцией f, этому условию удовлетворяет только одно $f(2)=1$. Аналогично, $f(2k)=f(k)\cdot f(k)$, $f(2k)=(f(k))^2$, т. е. $f(2k)=1$.

б) $f(2k+1)=f(2k)\cdot f(1)=1\cdot f(1)=f(1)$. Если бы $f(1)$ равнялось 1, то в этом случае множество Z отображалось бы на множество $\{1\}$, а не на множество $\{-1;\ 1\}$. Следовательно, $f(1)=-1$.

в) Так как $f(2k+1)=f(1)$, а $f(1)=-1$, то $f(2k+1)=-1$.

5.85. Функция f определена на множестве R действительных чисел и обладает свойством: для любого $x\in R$ верно неравенство $f(x+1)>f(x)$. Может ли функция f быть немонотонной?

Решение. Легко сообразить, что функция, график которой дан на рисунке 47, не является монотонной и удовлетворяет условию задачи, если длина отрезка AB меньше 1. Примером такой функции может служить функция, заданная формулой $y=x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$. Эта функция не монотонна (рис. 48), однако для любого x выполняется неравенство $f(x+1)>f(x)$.

$$f(x+1)-f(x)=(x+1)\cdot\left((x+1)^2-\frac{1}{9}\right)-x\left(x^2-\frac{1}{9}\right)=(x+1)^3-$$
$$-\frac{1}{9}(x+1)-x^3+\frac{1}{9}x=x^3+3x^2+3x+1-\frac{1}{9}x-\frac{1}{9}-x^3+\frac{1}{9}x=$$
$$=3x^2+3x+\frac{8}{9}.$$

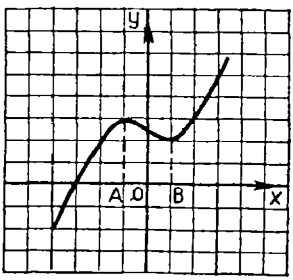


Рис. 47

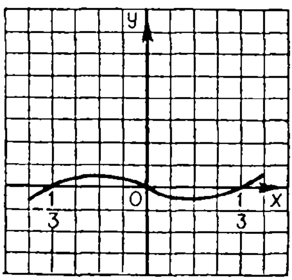


Рис. 48

Дискриминант трехчлена $3x^2+3x+\frac{8}{9}$ меньше нуля: $D=3^2-4\cdot3\cdot\frac{8}{9}=9-10\frac{2}{3}<0$. Поэтому трехчлен при любом x имеет положительное значение. Следовательно, при любом x $f(x+1)>f(x)$.

5.86. Функция f определена на множестве R действительных чисел и обладает свойством: для любого $x\in R$ верно равенство

$$f(-x)+(1-x^2)f(x)=x^4-2x^2. \qquad (1)$$

Задайте функцию f формулой.

Решение. Подставив в тождество (1) $-x$ вместо x, получим тождество:

$$f(x)+(1-x^2)f(-x)=x^4-2x^2. \qquad (2)$$

Умножим обе части тождества (1) на выражение $-(1-x^2)$. Получим тождество:

$$(x^2-1)f(-x)-(1-x^2)^2f(x)=(x^4-2x^2)(x^2-1). \qquad (3)$$

Сложив почленно тождества (2) и (3), получим:

$$f(x)-(1-x^2)^2f(x)=(x^4-2x^2)(x^2-1)+x^4-2x^2.$$

Отсюда

$$f(x)=\frac{(x^4-2x^2)(x^2-1+1)}{1-(1-x^2)^2}=\frac{(x^4-2x^2)x^2}{2x^2-x^4}=-x^2.$$

Итак, $f(x)=-x^2$.

5.87. Функция f определена на множестве R и обладает свойством: для любого $x\neq0$ верно равенство $f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=3x+x^{-1}-8$. Задайте функцию f формулой.

Решение. Заменим в тождестве $f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=3x+x^{-1}-8$ переменную x на x^{-1}. Получим: $f(x)+3f(x^{-1})=3x^{-1}+x-8$. Умножим обе части первого тождества на -3 и сложим вновь полученное тождество со вторым. Получим:

$$+\begin{array}{r} -3f(x^{-1})-9f(x)=-9x-3x^{-1}+24, \\ f(x)+3f(x^{-1})=3x^{-1}+x-8 \\ \hline -8f(x)=-8x+16. \end{array}$$

Отсюда $f(x)=x-2$.

6. МНОЖЕСТВА

■

VI КЛАСС

6.1. Число элементов данного конечного множества A обозначим символом $|A|$. Найдите $|A|$, если:

а) $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$;

б) A — множество двузначных чисел;

в) A — множество натуральных чисел, кратных 5 и меньших 100;

г) A — множество натуральных решений неравенства $2x<33$.

Ответ. а) $|A|=10$; б) $|A|=90$; в) $|A|=20$; г) $|A|=16$.

6.2. Составьте три подмножества множества чисел $\{0;\ 5;\ 8\}$, каждое из которых содержит: а) один элемент; б) два элемента.

Ответ. а) $\{0\}$; $\{5\}$; $\{8\}$; б) $\{0;\ 5\}$; $\{0;\ 8\}$; $\{5;\ 8\}$.

6.3. Дано множество $B=\{15;\ 29;\ 35;\ 42;\ 60;\ 72\}$. Составьте подмножество множества B из чисел:

а) кратных 5; в) не делящихся на 5;

б) кратных 7; г) не делящихся на 3.

Ответ. а) $\{15;\ 35;\ 60\}$; б) $\{35;\ 42\}$; в) $\{29;\ 42;\ 72\}$; г) $\{29;\ 35\}$.

6.4. Составьте все подмножества множества M, если:

а) $M=\{a;\ b;\ c\}$; б) $M=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Ответ. а) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$;

б) $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{0;\ 1\}$, $\{0;\ 2\}$, $\{0;\ 3\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{0;\ 1;\ 2\}$, $\{0;\ 1;\ 3\}$, $\{0;\ 2;\ 3\}$, $\{1;\ 2;\ 3\}$, $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

6.5. Из некоторого множества X составили все его подмножества: $\{5\}$, $\{5;\ 21\}$, $\{243\}$, $\{5;\ 243\}$, $\varnothing$, $\{21;\ 5;\ 243\}$, $\{243;\ 21\}$, $\{21\}$. Найдите множество X.

Ответ. $\{5;\ 21;\ 243\}$.

6.6. Сколько различных пар можно составить из элементов множества:

а) $A=\{a;\ b\}$; в) $C=\{a;\ b;\ c;\ d\}$;

б) $B=\{a;\ b;\ c\}$; г) D, содержащего n элементов?

Решение.

а) $\left.\begin{matrix} aa, & ab, \\ ba, & bb, \end{matrix}\right\}$ Отсюда видно, что всего можно составить 2^2 различных пар;

б) $\left.\begin{matrix} aa, & ab, & ac, \\ ba, & bb, & bc, \\ ca, & cb, & cc. \end{matrix}\right\}$ Всего 3^2 пар;

в) $\left.\begin{matrix} aa, & ab, & ac, & ad \\ ba, & bb, & bc, & bd \\ ca, & cb, & cc, & cd \\ da, & db, & dc, & dd \end{matrix}\right\}$ Всего 4^2 пар.

г) Из n элементов множества D можно составить n^2 различных пар.

6.7. Сколько различных двузначных чисел можно составить, используя только цифры:

а) 1; 2; 3; в) 1; 3; 5; 7; 9;

б) 2; 4; 7; 9; г) 0; 1; 2; 3?

Решение. а) $3^2=9$; б) $4^2=16$; в) $5^2=25$.

г) Из четырех цифр, среди которых нет нуля, можно составить 16 различных двузначных чисел. Среди этих чисел имеется 4, которые начинаются одной и той же цифрой (например, цифрой 3). Следовательно, среди всех комбинаций по две цифры будет четыре комбинации, у которых первая цифра нуль; такие комбинации надо исключить. Значит, всего двузначных чисел из цифр 0, 1, 2, 3 можно составить 12.

6.8. Сколько различных двузначных чисел, среди которых нет чисел с одинаковыми цифрами, можно составить из цифр — элементов множества A, если:

а) $A=\{1;\ 2;\ 3\}$; в) $A=\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$;

б) $A=\{1;\ 3;\ 4;\ 5\}$; г) $A=\{0;\ 1;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Решение. а) Составим всевозможные двузначные числа из цифр 1, 2, 3:

11, 12, 13,
21, 22, 23,
31, 32, 33.

Легко видеть, что числа, записанные одинаковыми цифрами, расположены по диагонали таблицы. Их будет столько, сколько цифр содержится в множестве A. Следовательно, искомых двузначных чисел будет 3^2-3, т. е. 6.

б) $4^2-4=12$.

в) $5^2-5=20$.

г) Исключив числа, состоящие из одинаковых цифр, получим, что их число равно $5^2-5=20$. Среди оставшихся после этого чисел имеется 4, которые начинаются с нуля. Исключим их. Получим: $20-4=16$.

6.9. Сколько различных двухэлементных подмножеств можно составить из множества A, если:

а) $A=\{a, b, c\}$; в) $A=\{a, b, c, d, e\}$;

б) $A=\{a, b, c, d\}$; г) A — содержит n элементов.

Решение. а) 3.

б) Составим таблицу всевозможных пар из элементов множества A:

$$\begin{matrix} aa, & ab, & ac, & ad, \\ ba, & bb, & bc, & bd, \\ ca, & cb, & cc, & cd, \\ da, & db, & dc, & dd. \end{matrix}$$

Вычеркнем пары, состоящие из одинаковых элементов (по диагонали таблицы). Оставшиеся пары попарно состоят из одинаковых элементов (ab и ba, ac и ca и т. д.). Их число равно 4^2-4. Ясно, что двухэлементных подмножеств множества A будет $\frac{4^2-4}{2}$, т. е. 6.

в) Рассуждая так же, как в случае б), найдем: $\frac{5^2-5}{2}=10$.

г) $\frac{n^2-n}{2}$.

6.10. Начертите отрезок AB, где, $|AB|=5$ *см*. Укажите множество точек отрезка AB, которые:

а) удалены от точки A на 2 *см* или 3 *см*;

б) удалены от точки B не более, чем на 3 *см*;

в) удалены от точки B не менее, чем на 2 *см*.

6.11. Начертите круг радиусом 3 *см* с центром в некоторой точке O. Какую фигуру составляет множество точек этого круга, удаленных от точки O на расстояние:

а) равное 2 *см*;

б) не большее, чем 2 *см*;

в) не меньшее, чем 2 *см*.

Ответ. а) Окружность с центром O и радиусом, равным 2 *см*; б) круг с центром O и радиусом, равным 2 *см*; в) кольцо — часть круга, заключенная между окружностями с центром в точке O радиусов 2 *см* и 3 *см*, включающая обе эти окружности.

6.12. Найдите объединение и пересечение множеств A и B, если:

а) $A=[-4; 5]$; $B=[3; 8]$; г) $A=]-\infty; 4[$; $B=[6; +\infty[$;

б) $A=]-8; 7]$; $B=[2; 8[$; д) $A=]-\infty; 7]$; $B=[2; 10]$;

в) $A=]-\infty; 2]$; $B=[-2; +\infty[$; е) $A=\varnothing$; $B=[5; +\infty[$.

Ответ. а) $A\cup B=[-4; 8]$; $A\cap B=[3; 5]$; б) $A\cup B=]-8; 8[$; $A\cap B=[2; 7]$; в) $A\cup B=]-\infty; +\infty[$; $A\cap B=[-2; 2]$; г) $A\cup B=]-\infty; 4[\cup[6; +\infty[$; $A\cap B=\varnothing$; д) $A\cup B=]-\infty; 10]$; $A\cap B=[2; 7]$; е) $A\cup B=[5; +\infty[$; $A\cap B=\varnothing$.

6.13. Найдите пересечение и объединение:

а) множества четных чисел и множества целых чисел;

б) множества нечетных чисел и множества целых чисел;

в) множества четных и множества нечетных чисел.

Ответ. а) Пересечение — множество четных чисел; объединение — множество целых чисел; б) пересечение — множество нечетных чисел; объединение — множество целых чисел; в) пересечение — пустое множество; объединение — множество целых чисел.

6.14. Даны множества $[2;\ a]$, где a — число, большее 2, и $[b;\ 10]$, где b — число, меньшее 10. Найдите числа a и b, если известно, что: а) $[2;\ a] \cap [b;\ 10] = [3;\ 7]$; б) $[2;\ a] \cap [b;\ 10] = \{4\}$; в) $[2;\ a] \cup [b;\ 10] = [-1;\ 15]$.

Ответ. а) $a=7$; $b=3$; б) $a=b=4$; в) $a=15$; $b=-1$.

6.15. Найдите пересечение множеств натуральных делителей числа 30 и числа 72.

Решение. $\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 15;\ 30\} \cap \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24;\ 36;\ 72\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$.

6.16. Найдите натуральное число a, зная, что $7 < a < 17$ и множество его натуральных делителей является подмножеством множества натуральных делителей числа 24.

Решение. Из условия задачи следует, что делителями числа a могут быть лишь делители числа 24, т. е. элементы множества $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 24\}$. Следовательно, само число a может быть лишь одним из элементов множества A (в противном случае оно содержало бы делитель, который не является делителем 24). С другой стороны, число a должно быть решением неравенства $7 < a < 17$, т. е. принадлежать промежутку $B =]7;\ 17[$.

Отсюда

$A \cap B = \{8;\ 12\}$.

Ответ: $a=8$ или $a=12$.

6.17. Найдите натуральное число b, зная, что: 1) $b > 199$; 2) b есть квадрат натурального числа; 3) множество натуральных делителей b — подмножество множества натуральных делителей числа 8775.

Решение. $8775 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$. Разложение числа b на простые множители имеет вид: $b = 3^m \cdot 5^n \cdot 13^k$, где $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3$; $n = 0,\ 1,\ 2$; $k = 0,\ 1$. Так как b — квадрат натурального числа, то $b = 3^2 \times \times 5^2 = 15^2 = 225$ (других возможностей нет).

Ответ. $b = 225$.

6.18. Найдите пересечение множества двузначных чисел, кратных 3, и множества двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 3.

Ответ. $\{33,\ 63,\ 93\}$.

6.19. Пусть A — множество двузначных чисел, кратных 5, B — множество двузначных чисел, кратных 7, C — множество двузначных чисел, меньших 24, D — множество двузначных чисел, больших 79. Найдите:

а) $A \cap B$; г) $A \cap D$;
б) $A \cap C$; д) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
в) $B \cap C$; е) $A \cap (B \cup C)$.

Ответ. а) $\{35; 70\}$; б) $\{10; 15; 20\}$; в) $\{14; 21\}$; г) $\{80; 85; 90; 95\}$; д) $\{10; 15; 20; 35; 70\}$; е) $\{10; 15; 20; 35; 70\}$.

6.20. Найдите пересечение множеств A и B, если:

а) $A = \{x \mid x = 2n, n \in Z\}$; $B = \{y \mid y = 5m, m \in Z\}$;

б) $A = \{x \mid x = 2n, n \in Z\}$; $B = \{y \mid y = 8m, m \in Z\}$;

в) $A = \{x \mid x = 3n, n \in Z\}$; $B = \{y \mid y = 7m, m \in Z\}$;

г) $A = \{x \mid x = 3n, n \in Z\}$; $B = \{y \mid y = 9m, m \in Z\}$.

Ответ. а) $\{z \mid z = 10k, k \in Z\}$; б) $\{z \mid z = 8m, m \in Z\}$; в) $\{z \mid z = 21k, k \in Z\}$; г) $\{z \mid z = 9m, m \in Z\}$.

6.21. Найдите координаты точек пересечения:

а) ломаных ABC и DEF, если: $A(-4; 2)$, $B(5; 5)$; $C(1; -3)$; $D(0; 5)$, $E(6; 2)$, $F(-3; -1)$;

б) ломаных $ABCD$ и EFH, если: $A(-4; 1)$, $B(0; 5)$, $C(2; -5)$, $D(6; 3)$; $E(-3; 3)$, $F(13; 3)$, $H(-3; -1)$.

Ответ. а) (2; 4), (4; 3), (3; 1); б) (—3; 3), (0,4; 3), (6; 3), (5; 1), (0; 1).

6.22. Используя множества A и B покажите, что верно равенство $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (знаком $|X|$ обозначено число элементов множества X), если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4, 5\}$;

б) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{5, 6, 7, 8\}$;

в) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5\}$;

г) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Решение. а) $|A| = 3$; $|B| = 4$; $|A \cup B| = 5$; $|A \cap B| = 2$. $5 = 3 + 4 - 2$ — верное равенство.

б) $|A| = 3$; $|B| = 4$; $|A \cup B| = 7$; $|A \cap B| = 0$, $7 = 3 + 4 - 0$ — верное равенство.

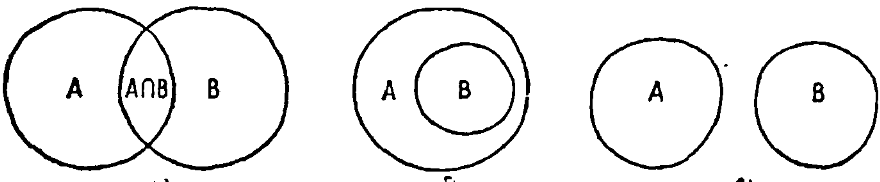
в) $|A| = 5$; $|B| = 3$; $|A \cup B| = 5$; $|A \cap B| = 3$, $5 = 5 + 3 - 3$ — верное равенство.

6.23. Пользуясь кругами Эйлера (рис. 49), покажите, что верно равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

где A и B — конечные множества.
(Рассмотрите случаи: а) $A \cap B = C$, где $C \neq \varnothing$; б) $B \subset A$; в) $A \cap B = \varnothing$.)

6.24. Из 30 учащихся VI класса 17 человек читают журнал «Пионер», 15 человек читают журнал «Юный техник», 5 человек



а) б) в)

Рис. 49

читают оба журнала. Сколько человек в этом классе не читают ни один из этих журналов?

Решение. Пусть A — множество учащихся VI класса, читающих «Пионер», B — множество учащихся VI класса, читающих «Юный техник». Тогда $|A|=17$, $|B|=15$, $|A\cap B|=5$, $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=17+15-5=27$.

Следовательно, не читают ни «Пионер», ни «Юный техник» трое учащихся $(30-27=3)$.

6.25. Используя множества A, B и C, покажите, что верно равенство $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|-|A\cap B|-$ $-|A\cap C|-|B\cap C|$, если:

а) $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{3, 4\}$; $C=\{2, 3, 5\}$;

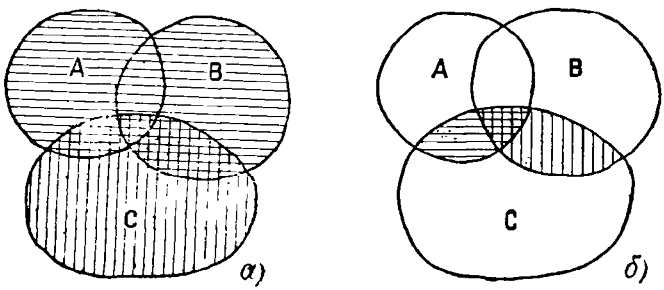
б) $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{4, 5\}$; $C=\{6\}$.

Решение. а) $|A|=3$; $|B|=2$; $|C|=3$; $|A\cap B\cap C|=1$; $|A\cap B|=1$; $|A\cap C|=2$; $|B\cap C|=1$; $|A\cup B\cup C|=5$. Равенство $5=3+2+3+1-1-2-1$ верное.

б) $|A|=3$; $|B|=2$; $|C|=1$; $|A\cap B\cap C|=0$; $|A\cap B|=0$; $|A\cap C|=0$; $|B\cap C|=0$; $|A\cup B\cup C|=6$. Равенство $6=3+2+1+$ $+0-0-0-0$ верное.

6.26. Пользуясь кругами Эйлера (рис. 50), покажите, что верно равенство $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

Решение. На рисунке 50, *а* множество $A\cup B$ показано горизонтальной штриховкой. Пересечению множеств $A\cup B$ и C со-



а) б)

Рис. 50

ответствует область, где горизонтальная и вертикальная штриховки накладываются.

На рисунке 50, *б* множество $A \cap C$ показано горизонтальной штриховкой, а множество $B \cap C$ — вертикальной штриховкой. Объединению множеств $A \cap C$ и $B \cap C$ соответствует область, покрытая штриховкой.

Из сравнения рисунков 50, *а* и 50, *б* замечаем, что множества $(A \cup B) \cap C$ и $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ совпадают.

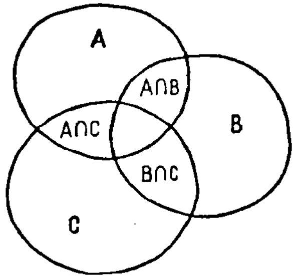


Рис. 51

Замечание. На рисунках 50, *а* и 50, *б* рассмотрен случай, когда все три множества A, B и C пересекаются и их пересечением служит непустое множество. Легко понять, что возможны и другие случаи. Можно показать, что в любом другом случае равенство $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ будет верным.

6.27. Используя соотношения
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ и $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, где A, B и C — конечные множества, докажите, что верно равенство $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ и проиллюстрируйте его с помощью рисунка 51.

Решение. $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

6.28. В нашей квартире 8 человек. Из них 5 любят смотреть телепередачи, 3 — играть в шахматы и 6 — слушать радио. Причем каждый интересуется хотя бы одним из этих дел. Четверо увлекаются радио- и телепередачами, один любит играть в шахматы и слушать радио, трое играть в шахматы и смотреть телепередачи. Сколько человек нашей квартиры интересуются всем: любят смотреть телепередачи, слушать радио и играть в шахматы?

Решение. Пусть A, B и C — соответственно множества людей нашей квартиры, которые любят смотреть телепередачи, играть в шахматы и слушать радио. Тогда $|A| = 5$, $|B| = 3$, $|C| = 6$, $|A \cap C| = 4$, $|B \cap C| = 1$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B \cup C| = 8$.

Воспользовавшись соотношением
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$, имеем: $8 = 5 + 3 + 6 - 3 - 4 - 1 + |A \cap B \cap C|$. Отсюда $|A \cap B \cap C| = 2$.

Итак, смотреть телепередачи, играть в шахматы и слушать радио любят двое.

6.29. Из 73 шестиклассников 26 учеников посещают математический кружок, 24 драматический и 18 исторический. 23 человека не занимаются ни в одном из этих кружков. Но 6 учащихся занимаются одновременно в математическом и драматическом, 10 — в историческом и драматическом, а 1 даже во всех трех кружках. Сколько учащихся одновременно занимаются только в двух кружках: в математическом и историческом?

Решение. Пусть A, B и C — множества шестиклассников, занимающихся соответственно в математическом, драматическом и историческом кружках. Тогда $|A|=26$, $|B|=24$, $|C|=18$, $|A\cap B|=6$, $|B\cap C|=10$, $|A\cap B\cap C|=1$, $|A\cup B\cup C|=73-23=50$.

Используя соотношение

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+$ $+|A\cap B\cap C|$, получим: $50=26+24+18-6-|A\cap C|-10+1$. Отсюда $|A\cap C|=3$.

В математическом и историческом кружках занимаются трое учащихся.

6.30. Что является объединением всех треугольников, вписанных в данную окружность с центром в точке O и радиусом r?

Ответ. Круг с центром в точке O и радиусом r.

6.31. Что является пересечением всех прямоугольных треугольников, вписанных в данную окружность с центром в точке O и радиусом r?

Ответ. Точка O.

6.32. Что является объединением и пересечением множества прямоугольных треугольников, вписанных в данную окружность и опирающихся на диаметр AB?

Ответ. Объединение — круг; пересечение — диаметр AB.

■

VII КЛАСС

6.33. Дано множество $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите дополнение $A-B$ множества B до множества A, если:

а) $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$; в) $B=\varnothing$;

б) $B=\{1, 3, 5, 7\}$; г) $B=A$.

Ответ. а) $A-B=\{0, 1, 2\}$; б) $A-B=\{0, 2, 4, 6\}$; в) $A-B=$ $=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; г) $A-B=\varnothing$.

6.34. B — множество натуральных чисел, дающих при делении на 3 остатки 1 или 2. Найдите дополнение множества B до множества натуральных чисел.

Решение. Дополнение B до N есть множество натуральных чисел, кратных 3.

6.35. M — множество натуральных чисел, дающих при делении на 4 в остатке 1 или 3. Найдите дополнение M до N.

Решение. Дополнение M до N есть множество натуральных чисел, дающих при делении на 4 в остатке 2, или кратных 4. Следовательно, $N - M$ есть множество четных натуральных чисел.

6.36. Найдите дополнение объединения множеств $A = \{x \mid x = 6k+1,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$, $B = \{x \mid x = 6k+3,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$, $C = \{x \mid x = 6k+5,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$ до множества целых неотрицательных чисел.

Решение. Искомым дополнением до множества целых неотрицательных чисел является объединение множеств $\{x \mid x = 6k,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$, $\{x \mid x = 6k+2,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$ и $\{x \mid x = 6k+4,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$, т. е. множество четных неотрицательных чисел.

6.37. Какое множество является дополнением:

а) множества Q рациональных чисел до множества R действительных чисел;

б) множества иррациональных чисел до множества R?

6.38. Верно ли:

а) $(x \in Q) \Rightarrow (x \in R)$;   в) $(x \in Z) \Rightarrow (x \in R)$;
б) $(x \in R) \Rightarrow (x \in Q)$;   г) $(x \notin Z) \Rightarrow (x \in Q)$?

Решение. а) верно; б) неверно; в) верно; г) неверно; например, если $x = \sqrt{2}$, то высказывание $\sqrt{2} \notin Z$ верно ($\sqrt{2}$ не является целым числом), однако высказывание $\sqrt{2} \in Q$ неверно ($\sqrt{2}$ — иррациональное число).

6.39. Укажите на числовой прямой (рис. 52) множество точек, расстояние которых от точки A:

а) равно 2;   г) равно 4;
б) меньше 2;   д) меньше 4;
в) больше 2;   е) больше 4.

Рис. 52

Ответ. а) $\{B;\ C\}$; б) $]B;\ C[$; в) $]BE) \cup]CD)$; г) $\{E;\ D\}$; д) $]E;\ D[$; е) $]EO) \cup]DM)$.

6.40. Найдите множество решений уравнения или неравенства:

а) $|x| = 2$;   г) $|x| = 1$;
б) $|x| \leqslant 2$;   д) $|x| \leqslant 1$;
в) $|x| \geqslant 2$;   е) $|x| \geqslant 1$.

Ответ. а) $\{-2;\ 2\}$; б) $[-2;\ 2]$; в) $]-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty[$.

6.41. Решите уравнение или неравенство:

а) $|x-2|=5$; г) $|x+1|=3$;
б) $|x-2|<5$; д) $|x+1|\leqslant 3$;
в) $|x-2|\geqslant 5$; е) $|x+1|>3$.

Ответ. а) $\{-3;\ 7\}$; б) $]-3;\ 7[$; в) $]-\infty;\ -3]\cup[7;\ +\infty[$; г) $\{-4;\ 2\}$; д) $[-4;\ 2]$; е) $]-\infty;\ -4[\cup]\ 2;\ +\infty[$.

6.42. Укажите на числовой прямой (рис. 53) множество точек, сумма расстояний которых от точек A и B: а) равна 5; б) больше 5; в) меньше 5.

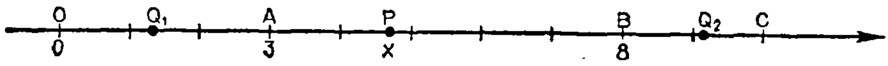


Рис. 53

Решение. а) Если точка P с координатой x принадлежит отрезку AB, то $|AP|+|PB|=|x-3|+|8-x|=x-3+8-x=5$. Поэтому множество точек, сумма расстояний которых от точек A и B равна 5, есть отрезок $[AB]$, которому соответствует числовой отрезок $[3;\ 8]$; б) Если точка Q с координатой x не принадлежит отрезку AB, то $|AQ|+|QB|>5$. Действительно, если точка Q_1 находится левее A, то $|AQ_1|+|Q_1B|=|AB|+ +2|AQ_1|=5+2|AQ_1|>5$; если точка Q_2 находится правее B, то $|AQ_2|+|Q_2B|=|AB|+2|BQ_2|=5+2|BQ_2|>5$.

Следовательно, множество точек, сумма расстояний которых от точек A и B больше 5, есть объединение открытых лучей $]AO)$ и $]BC)$. Этому множеству точек соответствует числовое множество $]-\infty;\ 3[\cup]8;\ +\infty[$; в) $\varnothing$.

6.43. Найдите множество решений уравнения или неравенства:

а) $|x+1|+|x-2|=3$;
б) $|x+1|+|x-2|>3$;
в) $|x+1|+|x-2|<3$.

Решение. Расстояние между точками числовой прямой с координатами -1 и 2 равно 3. Поэтому: а) $[-1;\ 2]$; б) $R-[-1;\ 2]$; в) $\varnothing$.

6.44. Укажите на числовой прямой (рис. 54) множество точек, сумма расстояний которых от точек P и Q: а) равна 5; б) меньше 5; в) больше 5.

Решение. Так как расстояние между точками P и Q равно $|4-(-2)|=6$, то любая точка числовой прямой (см. рис. 54)

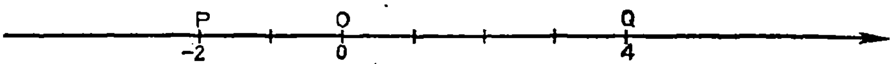


Рис. 54

удалена от точек P и Q на расстояние, большее, чем 5. Поэтому: а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) вся прямая, которой соответствует множество R действительных чисел.

6.45. Найдите множество решений уравнения или неравенства:

а) $|x+2|+|x-2|=3$;
б) $|x+2|+|x-2|<3$;
в) $|x+2|+|x-2|>3$.

Решение. Расстояние между точками числовой прямой с координатами -2 и 2 равно 4. Поэтому: а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) R.

6.46. Укажите на числовой прямой (рис. 55) множество точек, сумма расстояний которых от точек A и B: а) равна 7; б) меньше 7; в) больше 7.

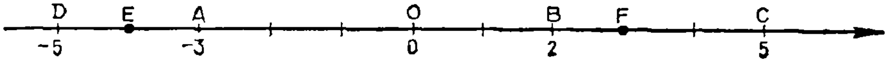


Рис. 55

Решение. $|AB|=|2-(-3)|=5$; $5<7$. На числовой прямой существуют две точки E и F, сумма расстояния которых от точек A и B равна 7. Если точка принадлежит интервалу $]E;\ F[$, то сумма ее расстояний от точек A и B меньше 7. Для точек же, лежащих вне отрезка $[E;\ F]$ сумма их расстояний до точек A и B больше 7. Поэтому: а) $\{E;\ F\}$ или $\{-4;\ 3\}$; б) $]E;\ F[$ или $]-4;\ 3[$; в) $(AB)-[EF]$ или $R-[-4;\ 3]$.

6.47. Найдите множество решений уравнения или неравенства:

а) $|x+1|+|x-1|=3$;
б) $|x+1|+|x-1|<3$;
в) $|x+1|+|x-1|>3$.

Решение. Расстояние между точками числовой прямой с координатами -1 и 1 равно 2; $2<3$. Поэтому: а) $\{-1,5;\ 1,5\}$; б) $]-1,5;\ 1,5[$; в) $R-[-1,5;\ 1,5]$.

6.48. Дано уравнение

$$|x-a|+|x-b|=c,$$

где a, b и c — числа, причем $c>0$ и $b>a$. Проверьте, что:

а) если $|b-a|<c$, то числа

$$x_1=a-\frac{c-|b-a|}{2} \quad \text{и} \quad x_2=b+\frac{c-|b-a|}{2};$$

корни данного уравнения;

б) если $|b-a|=c$, то любое число $x_0 \in [a;\ b]$ является корнем данного уравнения;

в) если $|b-a|>c$, то уравнение не имеет корней.

Решение. а) $\left|a-\frac{c-|b-a|}{2}-a\right|+\left|a-\frac{c-|b-a|}{2}-b\right|=$
$=\left|\frac{c-|b-a|}{2}\right|+\left|\frac{2a-c+b-a-2b}{2}\right|=\left|\frac{c-|b-a|}{2}\right|+\left|-\frac{c+(b-a)}{2}\right|=$
$=\left|\frac{c-|b-a|}{2}\right|+\left|\frac{c+|b-a|}{2}\right|=\frac{c-|b-a|}{2}+\frac{c+|b-a|}{2}=c.$

$\left|b+\frac{c-|b-a|}{2}-a\right|+\left|b+\frac{c-|b-a|}{2}-b\right|=\left|\frac{2|b-a|+c-|b-a|}{2}\right|+$
$+\left|\frac{c-|b-a|}{2}\right|=\left|\frac{|b-a|+c}{2}\right|+\left|\frac{c-|b-a|}{2}\right|=\frac{|b-a|+c}{2}+\frac{c-|b-a|}{2}=c.$

б) Пусть $x_0\in[a;\ b]$; тогда $a\leqslant x_0\leqslant b$. Покажем, что x_0 — корень данного уравнения:

$$|x_0-a|+|x_0-b|=x_0-a+b-x_0=b-a=|b-a|=c.$$

в) Если $x_0<a$ (следовательно, $x_0<b$), то

$|x_0-a|+|x_0-b|=a-x_0+b-x_0-a+a=(b-a)+2(a-x_0)=$
$=|b-a|+2|a-x_0|>c+2|a-x_0|>0.$

Если $a\leqslant x_0\leqslant b$, то $|x_0-a|+|x_0-b|=x_0-a+b-x_0=b-a=$
$=|b-a|>c>0.$

Если $x_0>b$ (следовательно, $x_0>a$), то

$$|x_0-a|+|x_0-b|=x_0-a+x_0-b+b-b=$$
$$=(b-a)+2(x_0-b)=|b-a|+2|x_0-b|>c+2|x_0-b|>0.$$

Таким образом, при любом $x\in R$ левая часть данного уравнения принимает положительные значения, большие, чем c. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

6.49. Предложение «Разность $(x-1)^2-(x-2)^2$ — натуральное нечетное число» обращается в истинное высказывание при некоторых значениях переменной x. Найдите множество A таких значений переменной x.

Решение. Выражение $(x-1)^2-(x-2)^2$ тождественно выражению $2x-3$. Выражение $2x-3$ обращается в натуральное нечетное число тогда и только тогда, когда x — натуральное число, большее 1.

Следовательно, $A=\{x\,|\,x\in N$ и $x>1\}$.

6.50. Найдите множество B значений переменной, при которых предложение

а) сумма $(p^3+p^2+p+1)(p-1)+p^2(1-p^2)$ — есть целое число;

б) разность $\frac{2a^2+2a+1}{a^2+a}-\frac{a+1}{a}$ — есть правильная дробь со знаменателем 7

обращается в истинное высказывание.

Решение. а) Сумма $(p^3+p^2+p+1)(p-1)+p^2(1-p^2)$ тождественна p^2-1. Значение выражения p^2-1 — целое число тогда и только тогда, когда p — целое или p есть корень квадратный из натурального числа. Отсюда

$$B = Z \cup \{p \mid p = \sqrt{n}, \quad n \in N\}.$$

б) $\frac{2a^2+2a+1}{a^2+a} - \frac{a+1}{a} = \frac{2a^2+2a+1-(a+1)^2}{a(a+1)} = \frac{a^2}{a(a+1)} = \frac{a}{a+1}$.

Решим уравнение $\frac{a}{a+1} = \frac{m}{7}$ относительно a, где $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$7a = ma + m, \quad (7-m)a = m, \quad a = \frac{m}{7-m}.$$

Подставляя в формулу $a = \frac{m}{7-m}$ значения m, получим множество значений a: $\left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6\right\}$.

6.51. Найдите множества X_1 и X_2 решений неравенств $5x \geqslant 60$ и $-8x \leqslant -56$. Какое из высказываний истинно:

а) $X_1 \subset X_2$; б) $X_2 \subset X_1$?

Решение. $X_1 = [12; +\infty[$; $X_2 = [7; +\infty[$. Верно высказывание $X_1 \subset X_2$.

6.52. С помощью кругов Эйлера покажите соотношение между множествами A и B и найдите пересечение этих множеств, если:

а) A — множество чисел, кратных 18, B — множество чисел, кратных 6;

б) A — множество чисел, кратных 5, B — множество чисел, кратных 6;

в) A — множество четных чисел; B — множество чисел, кратных 4;

г) A — множество чисел, кратных 12, B — множество чисел, кратных 18.

Ответ. а) $A \cap B = A$; б) $A \cap B = C$, где C — множество чисел, кратных 30; в) $A \cap B = B$; г) $A \cap B = C$, где C — множество чисел, кратных 36.

6.53. Найдите дополнение:

а) множества натуральных чисел до множества целых чисел;

б) множества положительных и отрицательных рациональных чисел до множества рациональных чисел;

в) множества целых чисел, оканчивающихся цифрой 5, до множества чисел, кратных 5;

г) множества чисел, кратных 4, до множества чисел, кратных 2;

д) множества чисел, кратных 9, до множества чисел, кратных 3.

Ответ. а) Множество, состоящее из целых отрицательных чисел и нуля;

б) множество, состоящее из одного элемента — нуль: $\{0\}$;

в) множество целых чисел, оканчивающихся цифрой 0;

г) множество чисел вида $4k+2$, где k — целое число;

д) множество, состоящее из чисел, имеющих вид $9k+3$ или $9k+6$, где k — целое число.

6.54. Найдите дополнение:

а) множества корней уравнения $x^2-0{,}5x-3=0$ до множества корней уравнения $(x^2-0{,}5x-3)(2x+18)(x+100)=0$;

б) множества корней уравнения $f(x)=0$ до множества корней уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые многочлены не имеющие одинаковых корней;

в) множества решений неравенства $2x-12{,}5>0$ до множества положительных чисел;

г) множества целых решений неравенства $10x-72{,}5>0$ до множества натуральных чисел;

д) множества решений неравенства $(x-4)(2x-1)>0$ до множества действительных чисел;

е) множества решений неравенства $(x-2)^2(3-x)^2>0$ до множества действительных чисел.

Решение. а) -9, -100 не являются корнями многочлена $x^2-0{,}5x-3$. Искомое множество: $\{-9;\ -100\}$;

б) множество корней уравнения $g(x)=0$;

в) $2x>12{,}5$; $x>6{,}25$. Искомое множество: $]0;\ 6{,}25]$;

г) $10x>72{,}5$; $x>7{,}25$. Искомое множество: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

д) $(x-4)(2x-1)>0$. $]-\infty;\ \frac{1}{2}[\cup]4;\ +\infty[$. Искомое множество $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$. Или иначе: это множество решений неравенства $(x-4)(2x-1)\leqslant 0$;

е) $(x-2)^2(3-x)^2>0$ при $x\neq 2$ и $x\neq 3$. Искомое множество: $\{2;\ 3\}$.

■

VIII КЛАСС

6.55. Пусть A — множество людей. Найдите дополение множества B до множества A, если B:

а) множество студентов;

б) множество врачей;

в) множество детей 12 лет;

г) множество мужчин старше 60 лет.

Ответ. а) Множество людей, не являющихся студентами; б) множество людей, не являющихся врачами; в) множество людей, возраст которых меньше 12 или больше 12 лет; г) множество всех женщин и множество мужчин, которым 60 лет или меньше.

6.56. Найдите дополнение множества A до множества Z (Z — множество целых чисел), если A:

а) множество нечетных целых чисел;

б) множество целых отрицательных чисел и число 0;

в) множество целых чисел, меньших 2;

г) множество целых чисел, больших или равных 5.

Ответ. а) Множество четных целых чисел; б) множество натуральных чисел; в) множество целых чисел, больших или равных 2; г) множество целых чисел, меньших 5.

6.57. Верно ли:

а) (c кратно 6) $\Rightarrow$ (c — четное число);

б) ($a=4k+1$, где $k \in Z$) $\Rightarrow$ (a — нечетное число);

в) ($b=4k+3$, где $k \in Z$) $\Rightarrow$ (b — нечетное число);

г) ($x=2n$, где $n \in Z$) $\Rightarrow$ ($x=4k+2$, где $k \in Z$);

д) (y — нечетное число) $\Longleftrightarrow$ ($y=4k+1$ или $y=4k+3$, где $k \in Z$);

е) ($a=6k$ или $a=6k+3$, где $k \in Z$) $\Longleftrightarrow$ (a кратно 3)?

Ответ. а) Верно; б) верно; в) верно; г) неверно; д) верно; е) верно.

6.58. Пусть A — множество чисел, обладающее свойством: целое число b принадлежит A тогда и только тогда, когда $b-2$ кратно 5. Найдите:

а) $Z \cap A$; б) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} \cap A$.

Решение. $(b \in A) \Longleftrightarrow (b-2=5n,\ n \in Z) \Longleftrightarrow (b=5n+2,\ n \in Z)$. Следовательно, множество A содержит те и только те целые числа, которые при делении на 5 дают в остатке 2. Отсюда:

а) $Z \cap A=\{x \mid x=5n+2,\ n \in Z\}$;

б) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} \cap A=\{2\}$.

6.59. Найдите пересечение множеств A и B, если:

а) $A=\{x \mid x=6n,\ n \in Z\}$, $B=\{y \mid y=3m,\ m \in Z\}$;

б) $A=\{x \mid x=6n,\ n \in Z\}$, $B=\{y \mid y=5m,\ m \in Z\}$;

в) $A=\{x \mid x=6n,\ n \in Z\}$, $B=\{y \mid y=4m,\ m \in Z\}$.

Ответ. а) $A \cap B=A$; б) $A \cap B=\{z \mid z=30k,\ k \in Z\}$; в) $A \cap B= =\{z \mid z=12k,\ k \in Z\}$.

6.60. Пусть N^2 — множество всевозможных пар натуральных чисел. Пара $(a;\ b)$ принадлежит подмножеству A множества N^2 тогда и только тогда, когда b делится на a. B — множество таких пар $(a;\ b)$ — элементов множества N^2, — в которых $a \geqslant b$. Найдите $A \cap B$.

Решение. Пусть $(a;\ b) \in A$; тогда $b=aq$, где $q \in N$. Следовательно, $a \leqslant b$. Если $(a;\ b) \in B$, то по условию $a \geqslant b$. Отсюда следует, что общими элементами множества A и B могут быть лишь такие пары $(a;\ b)$, у которых $a=b$.

Итак, $A \cap B=\{(a;\ b) \mid a=b \text{ и } a \in N\}$.

6.61. Подмножество множества Z^2 (Z^2 — множество всевозможных пар целых чисел) называется симметричным, если вместе с парой $(a;\ b)$ оно содержит также и пару $(b;\ a)$.

Проверьте, является ли симметричным:

а) множество Z^2;

б) множество целых решений уравнения $x^2=y^2$;

в) множество целых решений неравенства $x\leqslant y$;

г) множество пар целых чисел, удовлетворяющих условию $x\neq y$;

д) множество целых решений уравнения $\sqrt{x^2}=y$;

е) множество решений уравнения $\sqrt{5-x}+\sqrt{y-5}=0$.

Решение. а) Множество Z^2, очевидно, является симметричным, так как если $a\in Z$ и $b\in Z$, то $(a;\ b)\in Z^2$ и $(b;\ a)\in Z^2$.

б) Если пара $(a;\ b)$ — решение уравнения $x^2=y^2$, то равенство $a^2=b^2$ верное. Следовательно, $b^2=a^2$ тоже верное равенство и пара $(b;\ a)$ — решение уравнения $x^2=y^2$. Множество целых решений уравнения $x^2=y^2$ является симметричным.

в) Множество целых решений неравенства $x\leqslant y$ не является симметричным. Для доказательства истинности этого утверждения достаточно показать существование двух пар $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$, одна из которых — решение этого неравенства, а другая нет. Приведем такой пример. Пара $(2;\ 5)$ — решение неравенства $x\leqslant y$, так как $2\leqslant 5$ — верное неравенство. Пара $(5;\ 2)$ не является решением этого неравенства, так как неравенство $5\leqslant 2$ неверное.

г) Если $a\neq b$ — верное соотношение, то очевидно, что верным является и соотношение $b\neq a$. Следовательно, множество пар целых чисел, удовлетворяющих условию $x\neq y$, симметричное.

д) Множество решений уравнения $\sqrt{x^2}=y$ не является симметричным, так как пара $(-2;\ 2)$ является его решением, а пара $(2;\ -2)$ не является.

е) Уравнению $\sqrt{5-x}+\sqrt{y-5}=0$ удовлетворяет единственная пара $(5;\ 5)$. Отсюда видно, что множество $\{(5;\ 5)\}$ симметричное.

6.62. Если A и B — симметричные множества (подмножества Z^2), то $A\cap B$ и $A\cup B$ также симметричные множества. Докажите это.

6.63. а) Множество A — область определения выражения $\sqrt{x-16}\cdot\sqrt{x-12}$; множество B — область определения выражения $\sqrt{(x-16)(x-12)}$. Найдите множества A и B и проиллюстрируйте соотношение между ними с помощью кругов Эйлера.

б) Множество C — область определения выражения $\lg(2x-6)+\lg(x+4)$; множество D — область определения выражения $\lg(2x-6)(x+4)$. Найдите множества C и D и проиллюстрируйте соотношение между ними с помощью кругов Эйлера.

Решение.

а) $\begin{cases} x \geqslant 16, \\ x \geqslant 12; \end{cases}$ $\quad A = [16; \ +\infty[;$

$(x-16)(x-12) \geqslant 0, \ B =]-\infty; \ 12] \cup [16; \ +\infty[. \ A \subset B.$

б) $\begin{cases} 2x-6 > 0, \\ x+4 > 0; \end{cases}$ $\quad C =]3; \ +\infty[;$

$(2x-6)(x+4) > 0. \ D =]-\infty; \ -4[\cup]3; \ +\infty[. \ C \subset D.$

6.64. Постройте график уравнения:

а) $\frac{|x|}{x} = \frac{|y|}{y}$;

б) $|x| - x = |y| - y$;

в) $|x| + x = |y| + y$;

г) $|x| = |y|$;

д) $[x] = [y]$;

е) $[x] = \{y\}$;

ж) $\{x\} = [y]$.

Ответ. а) См. рисунок 56; б) см. рисунок 57; в) см. рисунок 58; г) см. рисунок 59; д) см. рисунок 60; е) см. рисунок 61; ж) см. рисунок 62.

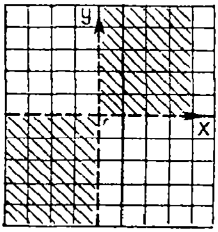


Рис. 56

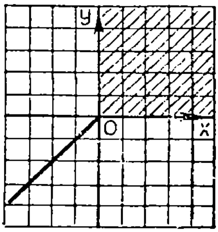


Рис. 57

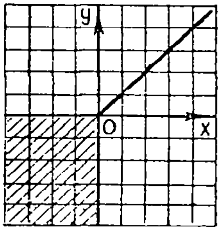


Рис. 58

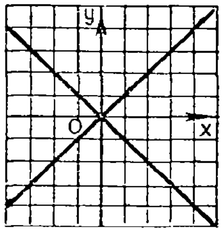


Рис. 59

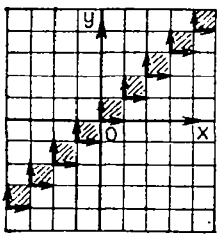


Рис. 60

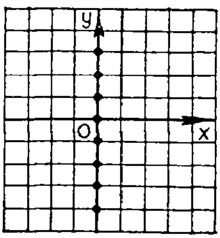


Рис. 61

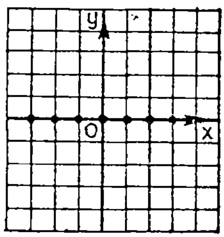


Рис. 62

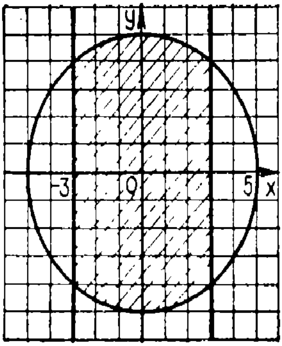


Рис. 63

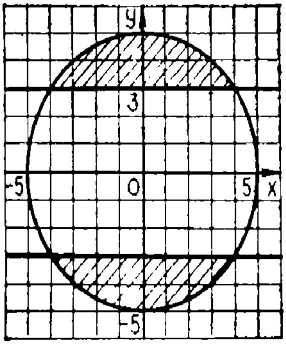


Рис. 64

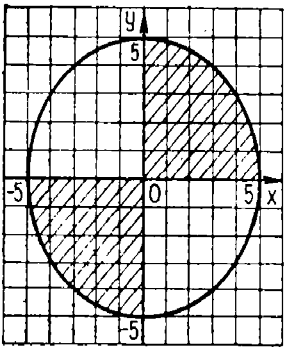


Рис. 65

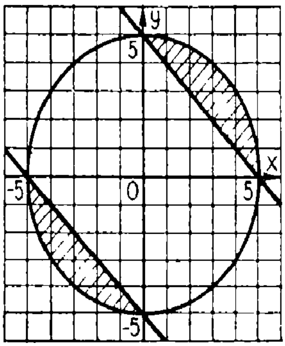


Рис. 66

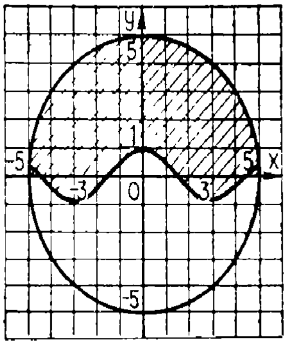


Рис. 67

6.65. Постройте множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25; \\ |x| \leqslant 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25; \\ |x+y| \geqslant 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25; \\ |y| \geqslant 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25; \\ y \geqslant \cos x. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 25; \\ xy \geqslant 0; \end{cases}$

Ответ. а) См. рисунок 63; б) см. рисунок 64; в) см. рисунок 65; г) см. рисунок 66; д) см. рисунок 67.

7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

■

7.1. Какие из следующих высказываний истинны:

а) в ромбе противоположные стороны равны;

б) в любом четырехугольнике противоположные стороны равны;

в) $12 \geqslant 3$;

г) $\frac{3}{5}$ — простое число;

д) всякий будильник — часы.

Ответ. а); в); д).

7.2. Какие из следующих высказываний истинны:

а) 21 делится на 3 или на 7;

б) 21 делится на 3 и на 7;

в) 21 делится на 3 или на 5;

г) 21 делится на 3 и на 5;

д) 21 делится на 5 или на 7.

Ответ. а); б); в).

7.3. Сформулируйте с помощью союза **«или»** условия, при которых истинны следующие предложения:

а) $xy=0$; б) $(x-3)(x+2)=0$; в) $|x|=4$.

Ответ. а) Произведение xy равно нулю тогда и только тогда, когда $x=0$ или $y=0$;

б) произведение $(x-3)(x+1)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x=3$ или $x=-2$;

в) модуль числа равен 4 тогда и только тогда, когда $x=4$ или $x=-4$.

7.4. Сформулируйте с помощью союза «и» условия, при которых истинны следующие предложения:

а) $\frac{x}{y}=0$; б) $x^2+y^2=0$; в) $(x-2)^2+(y-3)^2=0$.

Ответ. а) Дробь $\frac{x}{y}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y \neq 0$;

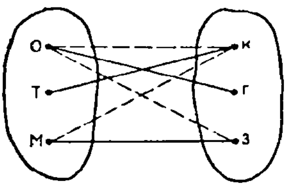


Рис. 68

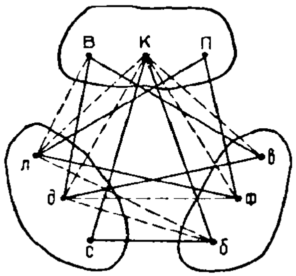


Рис. 69

б) сумма квадратов x^2+y^2 равна нулю тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$;

в) сумма квадратов $(x-2)^2+(y-3)^2$ равна нулю тогда и только тогда, когда $x=2$ и $y-3$.

7.5. Из указанных предложений составьте верные высказывания:

а) слагаемые делятся на одно и то же число;

б) сумма делится на это число;

в) сумма не делится на данное число;

г) слагаемые не делятся на одно и то же число;

д) сумма может делиться, а может не делиться на данное число.

Ответы проиллюстрировать примерами.

Решение. Если слагаемые делятся на одно и то же число, то и сумма делится на это число. Если слагаемые не делятся на одно и то же число, то сумма может делиться, а может не делиться на данное число.

7.6. Для Оли, Тани и Маши мама купила ленты красного, зеленого и голубого цветов. Оля не любит красный цвет и не хочет зеленую ленту. Маша не хочет красную. Какого цвета любят девочки ленты?

Решение. Для решения можно воспользоваться стрелочными схемами (графами). Если точке из множества девочек {О; Т; М} соответствует точка из множества цветов {к; г; з}, то мы их соединим сплошной линией, если нет, то пунктирной (рис. 68).

Ответ. Оля любит голубую ленту; Таня — красную; Маша — зеленую.

7.7. Три друга Витя, Коля и Петя уехали отдыхать в лагерь, деревню, санаторий и занимаются там волейболом, футболом и боксом. Известно, что:

1) Витя уехал не в лагерь, а Коля не в деревню;
2) в лагере нет секции бокса;
3) тот, кто живет в деревне, занимается волейболом;
4) Коля не любит футбол.

Кто из товарищей и где занимается любимым видом спорта?

Решение. Как и в предыдущем случае, для решения задачи можно воспользоваться графами (рис. 69)

Ответ. Витя в деревне занимается волейболом. Коля в санатории — боксом и Петя в лагере — футболом.

7.8. Два школьника, живущие в одном и том же селе, были выбраны делегатами на районный слет пионеров. Они договорились, что выедут из своего села на велосипедах в 8 *ч* 30 *мин* утра. Когда в назначенный час они встретились, оказалось, что у одного мальчика велосипед неисправен. До слета оставалось 1,5 часа. Расстояние до райцентра — 10 *км*. Каждый школьник может пройти 5 *км/ч*, так что пешком они не успевают. На велосипеде может ехать только один человек и со скоростью 12 *км* в час.

Воспользовавшись одним велосипедом, оба школьника прибыли одновременно за 5 *мин* до начала слета. Как им это удалось сделать?

Решение. Один школьник первую половину ехал на велосипеде, затем оставил велосипед и пошел пешком. Второй школьник первую половину прошел пешком, затем взял велосипед и одновременно с первым прибыл к началу.

7.9. Коля попросил отца-математика взять его с собой на шахматный турнир. Отец согласился, но поставил такое условие.

— Ты сыграешь три партии в шахматы с братом и сестрой по очереди. Если ты выиграешь две партии подряд, тогда я возьму тебя на турнир.

— А кто будет играть со мной первую партию?

— Выбирай сам, — ответил математик, хитро усмехнувшись.

Коля знал, что он играет хуже брата, но лучше сестры.

В какой последовательности ему следовало играть три партии (с братом, сестрой, братом или с сестрой, братом, сестрой), чтобы шансы на выигрыш в двух партиях были максимальными?

Решение. Приведем нестрогое рассуждение. (Более строгое доказательство потребует знаний элементов теории вероятностей.)

Чтобы выиграть две игры подряд, Коля должен выиграть обязательно вторую игру. Следовательно, в его интересах играть вторую игру против более слабого игрока, т. е. против сестры.

Кроме того, он должен выиграть по крайней мере одну игру у более сильного игрока. Поэтому его шансы на успех повысятся, если с более сильным игроком он встретится в двух играх.

Следовательно, ему выгодно играть с братом, сестрой, братом.

7.10. В ящике 35 штук яблок трех сортов: анис, антоновка, славянка. В темноте я выбираю яблоки. Какое наименьшее число яблок нужно взять, чтобы среди них наверняка оказалось не меньше четырех яблок одного сорта?

Решение. Наибольшее число яблок, при котором 4 яблока одного сорта может и не оказаться в том случае, когда будут взяты по 3 яблока аниса, антоновки и славянки. Всего 9 яблок.

Значит, взяв еще одно любое яблоко, обязательно будем иметь 4 яблока одного сорта. Поэтому 10 яблок обеспечат наличие среди них 4 яблок одного сорта.

Ответ. 10 яблок.

7.11. Имеется 10 кучек монет, в каждой из которых по 10 монет. В девяти кучках настоящие монеты. Одна же кучка целиком состоит из фальшивых монет, но какая именно — неизвестно. Известна лишь масса настоящей монеты и, кроме того, установлено, что масса каждой фальшивой монеты на 1 *г* больше массы настоящей.

Монеты можно взвешивать на весах. Какое минимальное число взвешиваний необходимо произвести, чтобы отыскать кучку, целиком состоящую из фальшивых монет?

Решение. Кучку фальшивых монет можно найти с помощью одного-единственного взвешивания. Следует пронумеровать кучки монет, а затем взять одну монету из первой кучки, две — из второй, три — из третьей и т. д. и, наконец, все десять монет — из десятой кучки. Затем все отобранные монеты взвесить. Лишняя масса, выраженная в граммах, будет соответствовать номеру фальшивой кучки. Если, например, оказалось, что масса отобранных монет на 7 *г* больше, чем она должна быть, то фальшивой будет седьмая кучка, откуда взяли эти семь монет (масса каждой из них на 1 *г* больше массы настоящей). Даже при наличии одиннадцати кучек из десяти монет этот метод все еще пригоден. Отсутствие излишка в массе говорит о том, что кучка, из которой не взяли ни одной монеты, фальшивая.

7.12. Рыбаки выловили сетью из пруда 42 рыбы, отметили их и снова бросили в воду. На другой день рыбаки выловили этой же сетью 48 рыб. Среди них оказалось 2 меченых.

Можно ли по этим данным сказать, сколько всего рыб в пруду?

Решение. Пусть число рыб в пруду N. Тогда отношение меченых рыб ко всем рыбам равно $\frac{42}{N}$. Во второй раз рыбаки выловили 48 рыб, из них 2 меченые. Следовательно, отношение числа меченых рыб к числу выловленных рыб равно $\frac{2}{48}$. Будем предполагать, что меченые рыбы равноценно распределились среди всех рыб в водоеме, тогда оба отношения одинаковы:

$$\frac{42}{N}=\frac{2}{48}; \quad N=\frac{42\cdot 48}{2}=1008.$$

Значит, в пруду имеется примерно 1000 рыб, годных для улова данной сетью.

7.13. Можно ли покрыть шахматную доску, у которой отпилены два противоположных по диагонали угла, 31 косточкой домино, покрывая одной косточкой две клетки шахматной доски (рис. 70)?

Ответ. Нет. Каждая косточка домино закрывает черный и белый квадрат. У доски отпилены оба белых квадрата. Из 62 квадратов 30 белых и 32 черных, которые 31 косточкой покрыть нельзя.

7.14. Какие из следующих высказываний верны:

а) для того чтобы я находился в школе, достаточно, чтобы я был в физическом кабинете школы;

б) для того чтобы я находился в школе, необходимо, чтобы я был в физическом кабинете;

в) для того чтобы треугольник был тупоугольным, достаточно, чтобы два других угла были острыми;

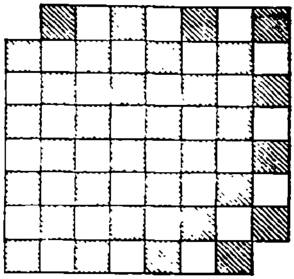


Рис. 70

г) для того чтобы треугольник был тупоугольным, необходимо, чтобы два других угла были острыми;

д) для того чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы оно оканчивалось на 5.

Ответ. а) и г).

7.15. Равносильны ли уравнения:

а) $x=y$ и $x^3=y^3$;

б) $\frac{(x^2+1)(x^2-2x-3)}{x^2+1}=0$ и $x^2=2x+3$;

в) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{5-x}{x-2}$ и $x-3=5-x$;

г) $(x+3)(x-3)=0$ и $x+3=0$;

д) $x^2=0$ и $|x|=0$.

Ответ. а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да.

7.16. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы двузначное число делилось на сумму его цифр?

Решение. Предположим, что двузначное натуральное число $\overline{xy}$ делится на $x+y$ и в частном получается n. Тогда $10x+y=$ $=n(x+y)$; $10x+y=nx+ny$.

Найдем, в какой зависимости находятся x и y:

$$x(10-n)=y(n-1).$$

Переменная x не может принимать значение 0, так как в этом случае $\overline{xy}$ — не двузначное число. Если $x\neq 0$, то $\frac{y}{x}=\frac{10-n}{n-1}$, где $1<n<10$.

Таким образом, для делимости $\overline{xy}$ на $(x+y)$ необходимо, чтобы $y=x\frac{10-n}{n-1}$, где $1<n<10$. Покажем, что это условие является достаточным. По полученному условию имеем:

$$y=x\frac{10-n}{n-1}.$$

Покажем, что при этом условии число $\overline{xy}$ делится на $(x+y)$. Преобразуем выражение $10x+y=10x+x\cdot\frac{10-n}{n-1}=x\cdot\frac{10n-10+10-n}{n-1}=$ $=x\cdot\frac{9n}{n-1}$. Преобразуем выражение $x+y=x+x\cdot\frac{10-n}{n-1}=$ $=x\cdot\frac{n-1+10-n}{n-1}=x\cdot\frac{9}{n-1}$.

Найдем частное $\overline{xy}:(x+y)=x\cdot\frac{9n}{n-1}:\left(x\cdot\frac{9}{n-1}\right)=n$. Следовательно, условие $\frac{y}{x}=\frac{10-n}{n-1}$, где $1<n<10$, является необходимым и достаточным условием того, чтобы любое натуральное двузначное число делилось на сумму чисел, выраженных его цифрами.

7.17. Доказать, что квадрат любого натурального числа, большего 1, есть число вида $5m$ или $5m\pm 1$.

Является ли сформулированное выше условие достаточным (необходимым) для того, чтобы данное натуральное число было квадратом другого числа?

Решение. Всякое натуральное число, являющееся квадратом, записывается в десятичной нумерации с помощью цифр, последняя из которых 0, 1, 4, 5, 6, 9. Поэтому оно всегда имеет вид:

1) $5m$, для последних цифр 0 и 5;
2) $5m+1$, для последних цифр 1 и 6;
3) $5m-1$, для последних цифр 4 и 9.

Данное условие необходимо для того, чтобы натуральное число, большее единицы, было квадратом, но не является достаточным; например, число 6 является числом вида $5m+1$ $(m=1)$, однако оно не представляет квадрата какого-либо натурального числа.

7.18. а) Следует ли из неравенств

$$3{,}72<a<4{,}18,\quad 5{,}18<b<6{,}12$$

неравенство:

1) $8{,}9<a+b<10{,}3$; 3) $8{,}5<a+b<10{,}5$;
2) $8<a+b<10$; 4) $9<a+b<11$?

б) Следует ли из неравенств $7{,}5<a<8{,}4$, $3{,}4<b<4{,}5$ неравенство:

1) $25{,}5<ab<37{,}8$; 3) $26<ab<38$;
2) $25<ab<37$; 4) $25{,}4<ab<37{,}9$.

Решение. а) $8{,}9<a+b<10{,}3$. Отсюда: 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да.

б) $7{,}5\cdot3{,}4 < ab < 8{,}4\cdot4{,}5$, $25{,}5 < ab < 37{,}8$. Отсюда: 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да.

7.19. Равносильны ли неравенства:

а) $\lg(5x+8) > \lg 6$ и $5x+8 > 6$;
б) $\lg(12-4x) < \lg 3$ и $12-4x < 3$;
в) $\lg(x^2+4x) > 1$ и $x^2+4x > 10$;
г) $\lg(2x^2+17) < 3$ и $2x^2+17 < 100$.

Ответ. а) Да; б) нет; неравенство $\lg(12-4x) < \lg 3$ равносильно неравенству $0 < 12-4x < 3$; в) да; г) нет.

7.20. Следует ли из неравенства $\lg(15x^2+6x-1) < 1$ неравенство:

а) $15x^2+6x-1 < 1$;
б) $15x^2+6x-1 < 10$;
в) $0 < 15x^2+6x-1 < 10$?

Какое из указанных неравенств равносильно неравенству $\lg(15x^2+6x-1) < 1$?

Решение. $\lg(15x^2+6x-1) < \lg 10$, поэтому $0 < 15x^2+6x-1 < 10$.

Ответ. а) Нет; б) да; в) да; неравенству $\lg(15x^2+6x-1) < 1$ равносильно неравенство $0 < 15x^2+6x-1 < 10$.

7.21. Равносильны ли неравенства:

а) $a^{\frac{7}{8}} > a^{\frac{5}{6}}$ и $a > 1$; в) $a^{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}} < a^{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}}$ и $a > 1$;

б) $a^{\frac{\sqrt{7}-1}{4}} < 1$ и $0 < a < 1$; г) $a^{\frac{n-1}{2}} > 1$ и $0 < a < 1$?

Решение. а) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. Неравенства равносильны.

б) $\frac{\sqrt{7}-1}{4} > 0$. Неравенства равносильны.

в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}15$; $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}5$; $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$. Неравенства равносильны.

г) $\frac{n-1}{2} > 0$. Неравенства неравносильны.

7.22. Следует ли из первого уравнения второе, следует ли из второго уравнения первое:

а) $\frac{54-6x}{(x-9)(x+5)} = 0$ и $54-6x = 0$;
б) $\sqrt{x-12} = 5$ и $x-12 = 25$;
в) $\sqrt{x+12} = x$ и $x+12 = x^2$;

г) $x^2-6x=7$ и $15^{x^2-6x}=15^7$?

д) $x^2=x+7$ и $\lg x^2=\lg(x+7)$?

Ответ. а) Да, нет; б) да, да; в) да, нет; г) да, да; д) да, да.

7.23. Верно ли следующее высказывание: а) „Любое рациональное число является корнем уравнения $(x+2)^2-(x-2)^2=8x$“; б) „Существует рациональное число, являющееся корнем уравнения $\frac{4}{x}+2=x-1$“?

Докажите, если оно верно, или опровергните примером, если не верно.

Решение. а) Преобразуем данное уравнение:

$$(x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)=8x,\ 8x=8x.$$

Оказалось, что выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, при всех действительных значениях переменной x тождественно равны, следовательно равны они и при любых рациональных значениях переменной x. Отсюда корнем данного уравнения является любое рациональное число.

б) Число 4 обращает данное уравнение в верное равенство. 4 — рациональное число.

Ответ. а) Да; б) да.

7.24. Может ли быть квадратом некоторого числа число вида: а) $\overline{acac}$; б) $\overline{abcabc}$?

Решение. а) При делении числа $\overline{acac}$ на число $\overline{ac}$ получается 101, поэтому число $\overline{acac}=101\cdot\overline{ac}$. Множитель 101, представляющий собой простое число, содержится в произведении $101\cdot\overline{ac}$ один раз, так как $\overline{ac}<101$, следовательно, $\overline{acac}$ не может быть точным квадратом.

б) Число $\overline{abcabc}=1001\overline{abc}=7\cdot11\cdot13\cdot\overline{abc}$. Число $\overline{abcabc}$ не может быть полным квадратом, так как произведение простых чисел $7\cdot11\cdot13$ не может равняться числу $\overline{abc}$; оно заведомо больше.

7.25. Найдите трехзначное число с суммой цифр 17, которое при делении на 419 дает в остатке 75.

Решение. Пусть x — искомое трехзначное число, тогда $x=419p+75$, где $p\in N$ и $p<3$. Значение выражения $419p+75$ будет трехзначным числом, если $p=1$ или $p=2$. Если $p=1$, то $x=419\cdot1+75=494$. Если $p=2$, то $x=419\cdot2+75=913$. Искомым числом является число 494 и не является число 913, так как сумма $4+9+4=17$, а $9+1+3\neq17$.

Ответ. 494.

7.26. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

Решение. В сутки часовая стрелка делает два оборота, а минутная — 24. Отсюда минутная стрелка обгоняет часовую

22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образует по два прямых угла.

Ответ. 44 раза.

7.27. Известно, что верно равенство $x^2+6x+9=0$. Найдите значение выражения:

а) $x^3+3x^2-9x-27$;

б) x^2+6x+1;

в) $3x^2+18x-21$;

г) $-\frac{1}{2}x^2-3x+2$.

Решение. а) $x^2(x+3)-9(x+3)=(x+3)(x^2-9)=(x^2+3)\times$ $\times(x-3)=(x^2+6x+9)(x-3)=0\cdot(x-3)=0$;

б) $x^2+6x+1+8-8=x^2+6x+9-8=0-8=-8$;

в) $3(x^2+6x-7)=3(x^2+6x+9-9-7)=3(0-16)=-48$;

г) $-\frac{1}{2}(x^2+6x-4)=-\frac{1}{2}(x^2+6x+9-13)=-\frac{1}{2}(0-13)=6{,}5$.

Ответ. а) 0; б) −8; в) −48; г) 6,5.

7.28. Добавьте недостающие данные, чтобы можно было ответить на вопрос следующей задачи:

„Из деревни вышел пешеход. Через несколько часов вслед за ним выехал автобус. Через сколько времени после своего выезда автобус догонит пешехода?“

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно, например, еще знать скорость движения пешехода ($v_п$), скорость движения автобуса ($v_а$) и время, которое провел в пути пешеход до выезда автобуса ($t_п$). Так, если $v_п=5$ *км/ч*, $v_а=60$ *км/ч*, $t_п=2$ *ч* и x — время, которое прошло до встречи автобуса и пешехода, то решение задачи следует из уравнения $60x-5x=5\cdot 2$. Задача допускает и другие варианты ответов.

7.29. В романе И. Ильфа и Е. Петрова «Золотой теленок» есть такая задача: «На трех станциях: Воробьево, Грачево, Дроздово — было поровну служащих. На станции Дроздово было комсомольцев в 6 раз меньше, чем на двух других, вместе взятых, а на станции Воробьево партийцев было на 12 человек больше, чем на станции Грачево.

Но на этой последней беспартийных было на 6 человек больше, чем на первых двух. Сколько служащих было на каждой станции и какова была там партийная и комсомольская прослойка?»

Задача эта явно пародийная и решения не имеет. Но если ввести одно добавочное условие, то задачу можно решить. Попробуйте найти это добавочное условие и решите задачу.

Решение. Дополнительное условие: на станции Дроздово 15 партийцев, тогда на станции Грачево — 1 партиец, 10 комсомольцев, 11 беспартийных; на станции Воробьево — 13 партийцев, 8 комсомольцев, 1 беспартийный; на станции Дроздово — 15 партийцев, 3 комсомольца, 4 беспартийных.

Ответ. На каждой станции работает 22 человека.

7.30. Можно ли бумажную модель семнадцатиугольника разрезать на четырнадцать треугольников?

Решение. Если предположить, что такую операцию выполнить можно, то очевидно, что сумма величин внутренних углов этих треугольников не меньше суммы величин внутренних углов многоугольника? Сумма величин внутренних углов многоугольника подсчитывается по формуле $2d(n-2)$, где n — число сторон многоугольника. Для 17-угольника эта сумма равна $30d$; а для четырнадцати треугольников сумма величин углов равна $28d$.

Ответ. Нельзя.

7.31.
$$\begin{array}{r} BDCE \\ BDAE \\ \hline AECBE \end{array}$$

В этом примере буквами зашифрованы цифры. Попробуйте их расшифровать.

Решение. $E=0$, так как только при этом условии $E+E=E$; $A=1$, так как сумма $B+B$ не может быть больше 18. Далее видно, что $B=5$, так как только в этом случае можно получить цифру E, равную нулю. Если $B=5$, $A=1$, то $C=4$, так как $C+A=B$. Если $C=4$, то $D=2$.

Ответ.
$$\begin{array}{r} 5240 \\ +\,5210 \\ \hline 10450 \end{array}$$

7.32. Найдите все пары значений x и y, при которых равенство $\sqrt{x^2-y^2}=x-(\sqrt{y})^2$ будет верным.

Решение. Данное равенство будет верным, если выполняется условие:

$$\begin{cases} x\geqslant y\geqslant 0, \\ \sqrt{(x-y)(x+y)}=x-y; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant y\geqslant 0, \\ \sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}=\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x-y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geqslant y\geqslant 0, \\ \sqrt{x-y}\,(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})=0; \end{cases}$$

Из чего следует:

$$\begin{cases} x\geqslant y\geqslant 0, \\ \sqrt{x-y}=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \text{ — любое неотрицательное число,} \\ y=0. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y=x \end{cases}$ или $\begin{cases} x \text{ — любое неотрицательное число,} \\ y=0. \end{cases}$

7.33. Как изменяется значение дроби $\frac{3a+10}{a+2}$ при увеличении значений a от 0 до 10?

Решение. Преобразуем дробь:

$$\frac{3a+10}{a+2}=\frac{3(a+2)}{a+2}+\frac{4}{a+2}=3+\frac{4}{a+2}.$$

При увеличении a от 0 до 10 значение дроби $\frac{4}{a+2}$, а следовательно, и всей суммы $3+\frac{4}{a+2}$ уменьшается. Значение дроби $\frac{3a+10}{a+2}$ при возрастании значений a от 0 до 10 уменьшается от 5 до $3\frac{1}{3}$.

7.34. Половину расстояния между городами A и B автомашина прошла со скоростью 60 *км/ч*, а вторую половину со скоростью 40 *км/ч*. Какова средняя скорость автомашины на участке AB?

Решение. Пусть AB равно $2x$ *км*. Тогда время, затраченное автомашиной на первую половину пути, равно $\frac{x}{60}$ *ч*, а время, затраченное ею на вторую половину пути, равно $\frac{x}{40}$ *ч*.

Время в часах, затраченное на весь путь AB, равно

$$\frac{x}{60}+\frac{x}{40}=\frac{x}{24}.$$

Средняя скорость автомашины равна $2x:\frac{x}{24}=48$.

Ответ. 48 *км/ч*.

7.35. Докажите, что сумма, разность и произведение двух чисел вида $a\mp b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $b\neq 0$, равна числу того же вида.

Решение.
$(a_1\mp b_1\sqrt{2})+(a_2\mp b_2\sqrt{2})=(a_1\mp a_2)+(b_1\mp b_2)\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$.
Для произведения доказательство проводится аналогично.

7.36. Докажите, что частное $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$, где a, b, c и d — целые числа, причем $b\neq 0$ и $d\neq 0$, есть число того же вида при условии, что $c^2-2d^2=1$.

Решение.
$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}=(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})$, если $c^2-2d^2=1$.

Произведение $(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})$ есть число вида $a'+b'\sqrt{2}$, в силу решения предыдущей задачи.

7.37. Докажите, что при делении числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $b\neq 0$, на число $3-2\sqrt{2}$ всегда получится число того же вида с целыми коэффициентами.

Решение.

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{9-8}=(3a+4b)+(2a+3b)\sqrt{2}=A+$$
$+B\sqrt{2}$, если $a\in Z$ и $b\in Z$, $b\neq 0$.

7.38. При каком условии частное $\frac{a+b\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$, где a, $b\in Z$ и $b\neq 0$, равно числу вида $c+d\sqrt{2}$, где c и d — целые числа и $d\neq 0$?

Решение.
По условию

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}=c+d\sqrt{2} \quad \text{или} \quad (a+b\sqrt{2})=(c+d\sqrt{2})(4+3\sqrt{2}).$$

$a+b\sqrt{2}=(4c+6d)+(4d+3c)\sqrt{2}$.

Откуда $\left.\begin{aligned} a&=4c+6d \\ b&=4d+3c \end{aligned}\right\}$. Это условие необходимое.

Покажем, что это условие является достаточным.

$$\frac{4c+6d+(4d+3c)\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}=\frac{(4c+6d+(4d+3c)\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})}{-2}=$$
$$=\frac{(16c+24d-24d-18c)+(16d-12c+12c-18d)\sqrt{2}}{-2}=$$
$$=\frac{-2c}{-2}+\frac{-2d}{-2}\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}.$$

Ответ. $a=4c+6d$, $b=4d+3c$.

7.39. На логарифмической прямой известно положение меток a и $\frac{1}{a}$. Укажите положение меток a^3 и $\frac{1}{a^3}$.

Ответ. См. рисунок 71.

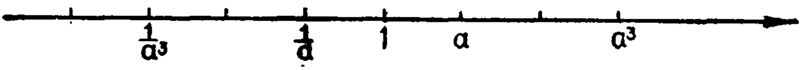


Рис. 71

7.40. Население страны ежегодно увеличивается на 1,25%. Через сколько лет население этой страны удвоится?

Решение. Обозначим количество населения в данный момент через N. Тогда количество населения к концу первого года составит $N+\frac{N}{80}$ (1,25% составляет 1/80 часть),

$$N+\frac{N}{80}=N\left(1+\frac{1}{80}\right).$$

Количество населения к концу второго года составит:

$$N\left(1+\frac{1}{80}\right)\left(1+\frac{1}{80}\right).$$

Количество населения к концу n-го года составит:

$$N\left(1+\frac{1}{80}\right)^n,\quad N\left(1+\frac{1}{80}\right)^n=2N,\quad n=\frac{\lg 2}{\lg 81-\lg 80}\approx 56\ (\text{лет}).$$

Ответ. ≈ 56 лет.

7.41. Через сколько лет срочный вклад в сберегательной кассе удвоится (из расчета 3% годовых)? А через сколько лет при этих же условиях один рубль станет капиталом в 10 000 рублей?

Ответ. 24 года; ≈ 350 лет.

7.42. Великому математику Леонарду Эйлеру принадлежит следующая задача: «Обойти конем все клетки шахматной доски, побывав в каждой клетке только по одному разу».

Решение. Пусть клетки доски будут занумерованы, как показано ниже. Клетки, в которых конь уже побывал, будем перечеркивать. Обойдите обычную 64-клеточную доску, пользуясь следующим алгоритмом: на каждом ходе (включая и первый ход) ставьте коня в такую клетку, из которой можно совершить наименьшее число ходов на ранее не пройденные (не перечеркнутые) клетки. Если таких клеток „с наименьшим числом ходов“ не одна, а несколько, то для определенности выбирайте ту из них, которая имеет наименьший номер.

64	63	62	61	60	59	58	57
49	50	51	52	53	54	55	56
48	47	46	45	44	43	42	41
33	34	35	36	37	38	39	40
32	31	30	29	28	27	26	25
17	18	19	20	21	22	23	24
16	15	14	13	12	11	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
1. Числовые выражения. Задачи на делимость. Последовательности 4
2. Тождественные преобразования выражений 35
3. Уравнения 57
4. Неравенства 99
5. Функции 149
6. Множества 177
7. Разные задачи 195

Юрий Михайлович Колягин
Маргарита Романовна Леонтьева
Юрий Николаевич Макарычев
Нора Григорьевна Миндюк
Валентина Николаевна Руденко
Ангелина Викторовна Соколова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ
ДЛЯ 6–8 КЛАССОВ

Редактор *Л. М. Котова*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Г. Л. Татура* и *М. И. Смирнова*
Корректор *О. С. Захарова*

Сдано в набор 30/VII 1974 г. Подписано к печати 3/IV 1975 г. $60\times90^1/_{16}$
Бумага типогр. № 3. Печ. л. 13 Уч.-изд. л. 11,31. Тираж 83 500 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение»
Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28. Заказ № 2226

Цена без переплета 31 к., переплет 10 к.