С. И. Шохоръ-Троцкій

УЧЕБНИКЪ МЕТОДИКИ АРИѲМЕТИКИ

ДЛЯ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

въ которыхъ преподается этотъ предметъ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Паровая скоропечатня Я. И. Либермана, Фонтанка, № 86
1896

Дозволено цензурою С Петербургъ, 12 Декабря 1895 года

Изъ отзывовъ періодической печати

«Новый учебникъ геометріи, составленный г Шохоръ Троцкимъ, выгодно отличается отъ тѣхъ учебниковъ, въ которыхъ не обращается особенное вниманіе на рѣзкое выдѣленіе допущеній и аксіомъ, напротивъ, его можно скорѣе упрекнуть въ нѣкоторомъ избыткѣ допущеній Замѣчанія, которыя мы позволили себѣ сдѣлать относительно новаго учебника, не могутъ помѣшать намъ рекомендовать его вниманію педагоговъ Изложеніе отличается ясностью и простотою Особенное вниманіе было обращено на разъясненіе понятій о предѣлѣ и о безконечно-малыхъ и о безконечно большихъ величинахъ» (Изъ отзыва проф Казанскаго Университета А В Васильева, въ № 2 тома перваго «Извѣстій Физико математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ» за 1891 годъ)

«Названный учебникъ представляетъ стройное, вполнѣ научное изложеніе ариѳметики, приспособленное къ курсу среднихъ учебныхъ заведеній, авторъ воспользовался многими данными новѣйшей иностранной литературы Закончимъ нашу рецензію заключеніемъ, что «Учебникъ ариѳметики» г Шохоръ Троцкаго достоинъ полнаго вниманія какъ и преподавателей, такъ и любителей математики и составляетъ вообще цѣнный вкладъ въ нашу учебно-математическую литературу Цѣна книги весьма умѣренная (65 к при объемѣ въ 200 слишкомъ страницъ, изъ которыхъ 40 стр мелкаго шрифта)» (Изъ рецензіи г Владиміра Шидловскаго на «Учебникъ ариѳметики», помѣщенной въ № [illegible] «Русской Школы» за 1892 г)

«Названная книга заслуживаетъ полнаго вниманія, какъ по важности вопросовъ, обсужденіе которыхъ составляетъ ея содержаніе, такъ и по воззрѣніямъ автора Замѣчанія г Шохоръ Троцкаго со включеніемъ даже тѣхъ, съ которыми нельзя согласиться, свидѣтельствуютъ о его педагогической опытности и вѣрномъ пониманіи обще образовательнаго значенія, такъ сказать, почти каждой главы, почти каждаго отдѣла математики Авторъ нерѣдко впадаетъ въ докторальный тонъ, прибѣгаетъ къ преувеличеніямъ, но всѣ недостатки книги искупаются ея достоинствами, заставляющими желать, чтобы педагоги, и въ особенности учителя математики, обратили на нее должное вниманіе» (Изъ отзыва А Д Путяты о книгѣ «Цѣль и средства преподаванія математики» въ № 5 «Журнала М Нар Пр » за 1894 годъ)

«Многочисленныя работы г Шохоръ Троцкаго, исполненныя съ большимъ знаніемъ дѣла, имѣютъ странно двойственный характеръ Но во всякомъ случаѣ, труды г Шохоръ Троцкаго заслуживаютъ серьезнаго вниманія и большого распространенія . Какъ и другія книги г Шохоръ-Троцкаго, книга заслуживаетъ предпочтенія предъ большинствомъ ходкихъ учебныхъ книгъ» (Изъ рецензіи о «Методич Сб для ср уч зав », «Сѣверный Вѣстникъ», Іюнь 1895 г)

«Начнемъ съ внѣшности Въ этомъ отношеніи мы замѣчаемъ большія улучшения Начиная съ нумераціи и кончая математическимъ учетомъ, цѣпнымъ правиломъ и правиломъ смѣшенія, мы находимъ въ этой книгѣ рѣшительно все, чего привыкли требовать отъ ариѳметическаго задачника И несмотря на эту, такъ сказать дань установившемуся обычаю, г Шохоръ Троцкій сумѣлъ удовлетворить многимъ собственнымъ требованіямъ, которыхъ нельзя не признать раціональными Вторую главную особенность «Сборника» составляетъ выдѣленіе задачъ, имѣющихъ алгебраическій характеръ Обращаетъ на себя вниманіе также выдѣленіе задачъ на употребленіе метрической системы Сверхъ того мы находимъ *упражненія въ вычисленіяхъ, расположенныя методически,* чего, насколько мы знаемъ, нѣтъ ни въ какомъ другомъ задачникѣ Г Шохоръ Троцкій въ этомъ случаѣ стремится къ тому, чтобы *учащійся научился вычислять не только вѣрно но быстро и изящно,* пользуясь *всѣми* (курсивы подлинника) выгодами, представляющимися въ каждомъ частномъ случаѣ» (Изъ рецензіи о той же книгѣ подписанной «Е Л» и помѣщенной въ «Образованіи», Октябрь 1895 года)

«Составить сборникъ ариѳметическихъ задачъ, пригодный для пользованія при прохожденіи ариѳметики въ средне учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства министерства народнаго просвѣщенія, задача далеко не легкая До сихъ поръ въ этихъ учебныхъ заведеніяхъ царитъ задачникъ Евтушевскаго, составленный по системѣ Грубе, онъ представляетъ слишкомъ однообразный, мало развивающій матеріалъ другой изъ наиболѣе распространенныхъ задачниковъ въ этихъ учебныхъ заведеніяхъ—задачникъ Верещагина—страдаетъ прямо противоположными недостатками въ немъ нѣтъ строгой системы, сразу затрогиваются слишкомъ сложные ариѳметическіе вопросы, совершенно непосильные тому возрасту, для котораго они предназначены Отыскать счастливую середину пытались весьма многіе изъ нихъ, по нашему мнѣнію удачнѣе всѣхъ разрѣшилъ этотъ вопросъ г Шохоръ Троцкій Задачникъ г Шохоръ-Троцкаго достаточно полонъ по своему содержанію, въ немъ проведена строгая система матеріалъ для упражненій разнообразный, глубоко исчерпывающій данный вопросъ и, что самое характерное, въ задачникѣ данъ матеріалъ чисто отвлеченнаго, алгебраическаго характера, по содержанію своему вполнѣ доступный для учащихся младшаго возраста

Научить дѣтей правильно, сознательно и изящно рѣшать ариѳметическія задачи и производить вычисленія и пріучить ихъ въ то-же время къ разсужденіямъ общаго характера, это и составляетъ цѣль изученія ариѳметики, намѣченную въ объяснительныхъ запискахъ къ учебнымъ планамъ министерства народнаго просвѣщенія Требованіямъ этимъ трудъ г Шохоръ Троцкаго вполнѣ удовлетворитъ» (Изъ рецензіи о той же книгѣ, подписанной «Н Б—ій» и помѣщенной въ «Новостяхъ», № 283 за 1895 годъ)

ПРЕДИСЛОВІЕ

Руководящими началами моей посильной работы надъ вопросами преподаванія ариѳметики мнѣ издавна служили двѣ мысли, изъ которыхъ одна была высказана гр Л Н Толстымъ въ одной изъ его педагогическихъ статей, а другую французскій педагогъ Жанъ Жакото положилъ въ основу своего дидактическаго міросозерцанія Гр Толстой говоритъ „Для того что бы заимствовать пріемы европейскихъ школъ, мы обязаны отличать то, что въ нихъ основано на вѣчныхъ законахъ разума, отъ того, что родилось только вслѣдствіе историческихъ условій“, а Жакото утверждаетъ, что „учить другихъ чему нибудь значитъ показать имъ—что они должны сдѣлать для того, чтобы этому научиться“ Взглядъ гр Толстого привелъ меня около 15-ти лѣтъ тому назадъ къ детальной критикѣ безраздѣльно тогда у насъ царившей методы преподаванія ариѳметики, извѣстной подъ именемъ „методы изученія чиселъ“, а мысль Жакото— къ установленію и разработкѣ принциповъ и частностей той методы, которую я вкратцѣ характеризую какъ „методу цѣлесообразныхъ задачъ и упражненій“ Результатомъ этой работы явились многія статьи мои въ нынѣ не существующемъ журналѣ „Семья и Школа“, напечатанныя въ началѣ восьмидесятыхъ годовъ, а также книги по методикѣ ариѳметики, которыя предназначались въ одно и то же время и для учителей народныхъ школъ, и для воспитанниковъ и воспитанницъ учительскихъ семинарій и т под учебныхъ заведеній Въ этихъ статьяхъ и изданіяхъ по предмету методики ариѳметики я до недавняго времени считалъ полезными главы психологическаго, педагогическаго, математическаго и историко-библіографическаго содержанія, такъ какъ считалъ основные вопросы методики ариѳметики еще не вполнѣ прочно установленными

Нынѣ практика показала мнѣ, что книга по предмету методики ариѳметики, разсчитанная на потребности *учителей и учительницъ* народныхъ начальныхъ школъ, не можетъ быть въ то же время пригодна также и для воспитанниковъ и воспитанницъ тѣхъ учебныхъ заведеній, въ которыхъ этотъ предметъ самъ является предметомъ преподаванія Кромѣ того я убѣдился въ томъ, что психологическія и педагогическія основанія, по которымъ „метода изученія чиселъ“ оказывается нынѣ нецѣлесообразною при обученіи ариѳметикѣ, не только изъ предлагаемаго мною нынѣ „Учебника методики ариѳметики для учебныхъ заведеній, гдѣ преподается этотъ предметъ“, но даже и изъ имѣющей вскорѣ выйти въ свѣтъ „Методики ариѳметики для учителей народныхъ школъ“ смѣло могутъ быть исключены, изложеніе упрощено и на этотъ разъ было предметомъ особенныхъ заботъ. Послѣ почти пятнадцатилѣтней кабинетной и практически-педагогической работы моей надъ вопросами методики ариѳметики, многіе взгляды, мною впервые намѣченные и разработанные, получили уже нѣкоторое право гражданства въ нашей методико-ариѳметической литературѣ и не нуждаются болѣе въ защитѣ съ точки зрѣнія педагогической, психологической или историко-библіографической. Что касается невозможности предназначенія одной и той же книги для уже работающихъ въ школѣ народныхъ учителей и для только еще готовящихся къ этому дѣлу, то въ этой невозможности я убѣдился на практикѣ: что для учителей важно, то для воспитанниковъ учительскихъ семинарій и др. под. учебныхъ заведеній совершенно не нужно, и обратно: что для этихъ послѣднихъ необходимо, то для учителя иногда совершенно излишне.

Въ основу преподаванія ариѳметики не только въ начальныхъ, но и въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, мною положена „метода цѣлесообразныхъ задачъ“. Эта метода еще не усвоена другими составителями книгъ по предмету преподаванія ариѳметики, они предпочли разработкѣ новой методы (взамѣнъ „методы изученія чиселъ“) обнародованіе такихъ книжекъ и пособій, въ основаніе которыхъ не положено никакой „методы“. Они усвоили себѣ только отрицательное отношеніе къ „методѣ изученія чиселъ“, не позаботившись, къ сожалѣнію, о созданіи, взамѣнъ ея, чего нибудь положительнаго. Исключеніе изъ ихъ числа составляетъ едва-ли не одинъ С. В. Житковъ, въ своей „Методикѣ“ и въ своихъ „Сборникахъ“ являющійся сторонникомъ новой методы. Почти всѣ остальные авторы, взамѣнъ „методы изученія чиселъ“, иногда предлагаютъ какую то „методу изученія дѣйствій,“ не подозрѣвая, что предлагаемое ими представляетъ собою не нѣкоторую *методу* обученія ариѳметикѣ, а только характеристику *цѣли* всего курса этого предмета. Это совершенно подобно тому, какъ если бы кто, взамѣнъ „звуковой“ или „буквослагательной“ методы, предложилъ „новую“ методу, а именно— „методу изученія грамоты“.

Въ чемъ заключается содержаніе этого „Учебника методики ариѳметики“—легко видѣть даже изъ оглавленія. Но считаю нелишнимъ отмѣтить, что краткій очеркъ методико-ариѳметическихъ системъ здѣсь составляетъ добавленіе къ курсу, такъ какъ практика показала, что это гораздо цѣлесообразнѣе: зная уже одну методу вполнѣ, ученики легче усваиваютъ себѣ краткое изложеніе сущности другихъ методъ. Въ § 11 главы V изложены такіе пріемы ариѳметическихъ вычисленій, которымъ, вѣроятно, принадлежитъ будущее, по моему мнѣнію накануне XX вѣка сообщать воспитанникамъ учительскихъ семинарій и т п учебныхъ заведеній только тѣ пріемы вычисленій которые въ Западной Европѣ уже отжили свой вѣкъ и которые принадлежатъ началу XIX вѣка, не цѣлесообразно

Въ виду нѣкоторыхъ соображеній, книга эта составлена такъ, чтобы ее смѣло можно было употреблять также и независимо отъ двухъ пособій, предназначаемыхъ мною для начальной народной школы, изъ которыхъ одно („Сборникъ, съ методическими указаніями, упражненій по ариѳметикѣ, для учащихъ въ народныхъ школахъ" Спб, 1896), предполагается въ рукахъ учителя, а другое („Сборникъ упражненій по ариѳметикѣ для учащихся въ народныхъ школахъ")—въ рукахъ учениковъ. Но, конечно, ознакомленіе воспитанниковъ и воспитанницъ учительскихъ семинарій и др под учебныхъ заведеній съ этими книгами можетъ только способствовать усвоенію учащимися „методы цѣлесообразныхъ задачъ" въ ея подробностяхъ и частностяхъ

Для воспитанниковъ учительскихъ институтовъ и для учащихъ педагогическихъ классовъ женскихъ учебныхъ заведеній полезно для той же цѣли (въ виду того, что эти учебныя заведенія преслѣдуютъ нѣсколько иныя задачи) ознакомиться съ обѣими частями моего „Методическаго сборника ариѳметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній", составленнаго также согласно требованіямъ методы цѣлесообразныхъ задачъ и одобреннаго Ученымъ Комитетомъ М-ства Нар Просвѣщенія

Примѣрныхъ, такъ называемыхъ „образцовыхъ", уроковъ я въ настоящей книгѣ почти не предлагаю, притомъ по слѣдующимъ причинамъ а) при слѣдованіи требованіямъ „методы цѣлесообразныхъ задачъ" каждый урокъ ариѳметики состоитъ въ предложеніи дѣтямъ почти исключительно только ряда посильныхъ задачъ и упражненій, характеръ которыхъ совершенно точно и рѣзко опредѣляется самою сущностью данной ступени обученія, а эта сущность въ моемъ „Учебникѣ" выясняется, надѣюсь, въ достаточной степени, б) книжные „образцовые" уроки мѣшаютъ ясности уразумѣнія учениками *сущности* дѣла, загромождая ее мелочами и частностями, в) воспитанники учебныхъ заведеній, гдѣ преподается методика ариѳметики, почти безъ всякаго интереса къ дѣлу усваиваютъ себѣ и изучаютъ „образцовые" уроки изъ книги, въ то время какъ со словъ учителя они легко и охотно воспринимаютъ сущность и усваиваютъ себѣ пріемы этихъ уроковъ Въ случаѣ, если бы преподаватель методики ариѳметики пожелалъ своихъ слушателей ознакомить непремѣнно съ книжными „образцовыми" уроками, то я осмѣливаюсь обратить его вниманіе на упоминаемый выше „Сборникъ для учащихъ", гдѣ онъ найдетъ, надѣюсь, довольно много подходящаго для этой цѣли матеріала, въ рукахъ практика-учителя быстро ведущаго къ цѣли

Въ прежнихъ изданіяхъ моей „Методики" была глава, посвященная разъясненію нѣкоторыхъ ариѳметическихъ понятій Практика показываетъ, что эта глава не приводитъ къ цѣли, если занимающійся *методикой* ариѳметики ранѣе недостаточно усвоилъ себѣ самый курсъ ариѳметики, и почти безполезна, если онъ ариѳметику знаетъ Поэтому я ее исключилъ

Въ заключеніе считаю необходимымъ отмѣтить, что, кромѣ указанныхъ выше руководящихъ идей, мною въ основу распредѣленія курса ариѳметики по годамъ и отдѣленіямъ начальной школы положены а) раздѣленіе курса первыхъ двухъ лѣтъ на тридцать слишкомъ методически обособленныхъ ступеней и б) тотъ взглядъ что въ первые два года существеннѣйшія части ариѳметики (изустной и письменной) должны быть усвоены, а въ третій—дополнены, разработаны и закруглены

С Шохоръ-Троцкій

ОГЛАВЛЕНІЕ

		стр
Введеніе	Задачи, предметъ и основныя начала Методики ариѳметики	1
Глава I	Наглядныя пособія, ариѳметическія задачи и метода цѣлесообразныхъ задачъ	4
Глава II	Концентрація курса ариѳметики распредѣленіе его по годамъ начальной школы и форма обученія	21
Глава III	Курсъ перваго года обученія ариѳметикѣ въ нач школѣ	26
Глава IV	Курсъ второго года	47
Глава V	Курсъ третьяго года	57
Добавленіе	Краткій очеркъ методико - ариѳметическихъ системъ	74

ВВЕДЕНІЕ

Задачи, предметъ и основныя начала Методики Ариѳметики

§ 1 Надо различать *науки* и *учебные предметы* Въ учебныхъ заведенiяхъ, низшихъ и среднихъ, не преподаютъ наукъ тамъ преподаются учебные предметы Наука обнимаетъ все, относящееся до нея, и поэтому отличается отъ учебнаго предмета какъ содержанiемъ, такъ и объемомъ своимъ Искусства, въ полномъ смыслѣ этого слова, также не преподаются ни въ какихъ общеобразовательныхъ, низшихъ и среднихъ, учебныхъ заведенiяхъ тамъ могутъ преподаваться, напримѣръ, пѣнiе или рисованiе, но не въ качествѣ искусствъ, а лишь въ качествѣ *учебныхъ предметовъ*

Наука и учебный предметъ вообще

Всякiй учебный предметъ занимается только нѣкоторыми истинами, интересующими науку, только нѣкоторыми законами, которымъ подчиняются тѣ или иныя явленiя, только нѣкоторыми умѣнiями (при обученiи искусствамъ), составляющими эти искусства, и не имѣетъ въ виду ни изслѣдованiя, ни всесторонняго изученiя этихъ истинъ, законовъ и умѣнiй Учебный предметъ долженъ 1) дать учащемуся нѣкоторый кругъ *практически* полезныхъ знанiй, умѣнiй и, кромѣ того, 2) оказать на духовное его развитiе полезное *развивательное, образовательное* влiянiе При преподаванiи учащимся какого либо учебнаго предмета необходимо знать условiя обученiя, какъ-то 1) возрастъ и способности учащагося, 2) особенности школы, а равно 3) общеобразовательныя, спецiальныя или профессiональныя цѣли, преслѣдуемыя школою при обученiи данному предмету При преподаванiи дѣтямъ какого либо предмета, прiемы обученiя зависятъ также отъ того—въ классѣ ли ведется обученiе со многими, или же оно ведется дома—съ однимъ ученикомъ

§ 2 Ариѳметика, какъ учебный предметъ, содержитъ въ себѣ ученiя 1) о производствѣ четырехъ дѣйствiй надъ цѣлыми и дробными числами и 2) о примѣненiи этихъ дѣйствiй къ рѣшенiю разнаго рода задачъ съ числовыми данными

Ариѳметика какъ учебный предметъ

Содержанiе ариѳметики, какъ предмета обученiя, **въ русской начальной школѣ,** *ограничивается, въ виду кратковременности курса этой школы, нумерацiею (устною и письменною), четырьмя дѣйствiями надъ цѣлыми числами и только простѣйшими упражненiями надъ числами* *дробными* Рѣшать дѣти должны только задачи, не принадлежащiя ни къ числу очень трудныхъ, ни къ числу очень многосложныхъ или сколько нибудь запутанныхъ Непосредственная *цѣль обученiя ариѳметикѣ* въ интересующихъ насъ школахъ состоитъ въ томъ, чтобы дѣти научились а) *правильно,* б) *быстро* и в) *вполнѣ сознательно производить четыре дѣйствiя надъ цѣлыми числами* (отвлеченными и именованными), наконецъ, г) *ясно понимать смыслъ дробей и нѣкоторые простѣйшiе случаи ихъ примѣненiя*

Цѣли методики ариѳметики

§ 3 Методика ариѳметики излагаетъ—*какъ* учить этому предмету для того, чтобы, кромѣ практической цѣли, была достигнута также и цѣль развивательная, образовательная Въ руководствѣ по методикѣ учитель долженъ поэтому найти изложенiе какой либо *методы* и указанiя на цѣлесообразные *прiемы* обученiя ариѳметикѣ кромѣ того, въ немъ должны быть изложены *программа* и *распорядокъ* курса ариѳметики интересующаго его учебнаго заведенiя Учитель долженъ знать, какъ приняться за обученiе дѣтей данному предмету и какъ продолжать это обученiе при тѣхъ или другихъ условiяхъ, на различныхъ ступеняхъ этого обученiя

Въ странахъ и государствахъ, гдѣ начальное образованiе обязательно, курсы всѣхъ предметовъ обученiя могутъ быть распредѣлены по классамъ въ такъ называемой „поступательной" системѣ въ первый годъ обученiя въ такой школѣ можетъ быть пройдена одна часть предмета, во второй—слѣдующая, и т д , пока весь предметъ не будетъ такимъ образомъ исчерпанъ въ томъ или другомъ его объемѣ Но, даже и при поступательной системѣ расположенiя учебнаго матерiала, невозможно преподавателю пользоваться *только* учебникомъ учитель не можетъ самъ изобрѣсти *всѣ* прiемы обученiя

Въ Россiи должно принимать во вниманiе, что первый годъ обученiя въ начальной школѣ можетъ, вслѣдствiе нѣкоторыхъ, не зависящихъ отъ школы, причинъ, быть и единственнымъ для многихъ учащихся Поэтому наша школа обязана озаботиться сообщенiемъ ребенку, въ первый же годъ его пребыванiя въ школѣ, нѣкотораго круга (хотя и незначительнаго) необходимѣйшихъ законченныхъ свѣдѣнiй по закону Божiю, чтенiю, письму и ариѳметикѣ Это ведетъ къ такъ называемому концентрическому распредѣленiю и курса ариѳметики на три года, т е къ такому распредѣленiю при которомъ въ каждый изъ этихъ годовъ учащiйся прiобрѣтаетъ болѣе или менѣе законченный кругъ знанiй по предмету ариѳметики Поэтому *учителю необходимо имѣть въ своемъ распоряженiи не только полную программу курса, но также и такую методу, которая давала бы ему возможность совладать со всѣми трудностями, обусловливаемыми именно концентрическимъ распредѣленiемъ курса*

Основныя начала разумнаго обученiя

§ 4 Основныя начала разумнаго, соотвѣтствующаго природѣ дѣтскаго пониманiя и сущности предмета, обученiя ариѳметикѣ слѣдующiя 1) *наглядность* и 2) *сознательность работы* учащагося Отсюда вытекаютъ слѣдующiя, не подлежащiя спору правила

1) Учить дѣтей чему бы то ни было значитъ ставить ихъ въ

такія условія, чтобы они тому сами научились, чему ихъ хотятъ научить (Жакото)

2) Форма обученія должна быть подчинена тому вѣчному закону, по которому всякое знаніе начинается не съ понятій, а съ наглядныхъ представленіи, и только впослѣдствіи приходитъ къ понятіямъ (Песталоцци)

3) Каждый разъ надо стремиться къ преодолѣнію только одной трудности, не соединяя двухъ и болѣе трудностей въ одинъ и тотъ же моментъ обученія (Коменскій)

4) Вычисляя, ребенокъ долженъ *учиться* (Коменскій)

Кромѣ этихъ основныхъ началъ обученія, высказанныхъ истинными авторитетами въ области педагогики, надо помнить слѣдующее

5) Правила не должны быть даваемы учителемъ въ видѣ готовомъ, а напротивъ должны быть создаваемы и развиваемы *постепенно* самими учащимися, но, конечно, подъ *руководствомъ* учащаго

6) Изустныя вычисленія должны быть вычисленіями свободными, изобрѣтательными, письменныя же въ окончательномъ результатѣ обученія — пріурочиваемы къ извѣстнымъ, наиболѣе простымъ и изящнымъ, образцамъ

7) Задачи *простыя* должны играть не столько роль матеріала для *примѣненія* пріобрѣтенныхъ познаній, сколько роль *основы* вырабатываемыхъ представленій на задачахъ *сложныхъ* должны примѣняться пріобрѣтенныя познанія, при этомъ увлеченіе алгебраическими задачами (см ниже) не отвѣчаетъ цѣли обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ

8) Въ первый годъ обученія въ начальной школѣ должны быть положены *основанія* курса начальной ариѳметики, во второй—онъ долженъ быть *законченъ* въ своихъ главныхъ чертахъ, въ третій—*закругленъ* въ теоретическомъ отношеніи

9) Рѣчь простая и ясная, выполненіе письменныхъ работъ по возможности аккуратное и изящное—необходимыя условія всякаго обученія, а потому и обученія ариѳметикѣ каждый урокъ ариѳметики долженъ быть также урокомъ родного языка и пріучать къ аккуратности и серьезности въ выполненіи всякой работы

10) Задачи и примѣры, прорабатываемые учащимися *вмѣстѣ* съ учащимъ, *подъ его руководствомъ*, должны быть строго отдѣлены отъ задачъ и примѣровъ, прорабатываемыхъ учащимися *безъ помощи учащаго*, хотя бы даже въ его присутствіи *цѣль первыхъ—учить, цѣль вторыхъ—упражнять въ усвоенномъ и подготовлять учащихся къ предстоящимъ занятіямъ*

11) Учитель не долженъ самъ упражняться въ многоговореніи, а долженъ *дѣтей* упражнять *въ мышленіи* и связанномъ съ нимъ *разумномъ употребленіи родной рѣчи*, это справедливо относительно всѣхъ предметовъ обученія и, конечно, также относительно обученія ариѳметикѣ

12) Каждое изъ наглядныхъ пособій должно быть употребляемо лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда это именно наглядное пособіе, а

нечиное, въ состояніи оказать существенную и достовѣрную услугу на данной ступени курса

ГЛАВА I

Наглядныя пособія, ариѳметическія задачи и „метода цѣлесообразныхъ задачъ“

Воздѣйствіе на органы чувствъ

§ 1. Всѣ знанія объ *окружающемъ* должны, прежде чѣмъ сдѣлаться достояніемъ нашего ума, пройти чрезъ посредство нашихъ органовъ чувствъ Отсюда вытекаетъ необходимость также и *сообщенія* дѣтямъ знаній путемъ воздѣйствія на органы чувствъ обучаемыхъ Обученіе ариѳметикѣ должно опираться преимущественно 1) на осязательныя, 2) зрительныя и 3) на слуховыя впечатлѣнія

Начальная ариѳметика учитъ 1) считать сознательно и вѣрно 2) письменно обозначать числа по десятичной системѣ съ помощью такъ называемыхъ арабскихъ цифръ, 3) производить вѣрно, быстро и сознательно четыре дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами 4) рѣшать задачи изъ числа требующихъ большаго или меньшаго умѣнія разсуждать Въ ученіи объ именованныхъ числахъ ариѳметика предполагаетъ, что у учениковъ есть представленія о величинахъ разнаго рода и объ измѣреніи Принявъ все это во вниманіе, пришли къ заключенію, что къ помощи осязательныхъ и наглядныхъ пособій при обученіи ариѳметикѣ должно прибѣгать въ слѣдующихъ случаяхъ

1) При обученіи счету, если мы имѣемъ дѣло съ дѣтьми, не обладающими этимъ умѣніемъ, 2) при разъясненіи десятичной системы, 3) при уясненіи понятій о дѣйствіяхъ, 4) при уясненіи понятія о величинахъ и ихъ измѣреніи и 5) при выработкѣ представленій о дробяхъ

Наглядныя пособія при обученіи счету

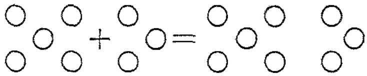
§ 2 При обученіи счету наилучшими *осязательными* пособіями, въ самомъ началѣ обученія, могутъ, кромѣ пальцевъ, служить кубики, а при устномъ ознакомленіи съ десятичною системою наиболѣе цѣлесообразнымъ осязательнымъ пособіемъ являются „спички“, такъ называемая „солома“ Употребленіе классныхъ торговыхъ счетовъ удобно только для разъясненія *письменнаго* обозначенія чиселъ помощью цифръ и при обученіи *производству* сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ Что же касается брусковъ для обозначенія десятковъ или досокъ для обозначенія сотенъ, то къ этимъ пособіямъ такъ называемаго ариѳметическаго ящика, на только что упомянутыхъ ступеняхъ обученія, лучше не обращаться, потому что при письменномъ обозначеніи чиселъ и письменномъ же производствѣ дѣйствій эти пособія не помогаютъ ученику составить себѣ вѣрное представленіе о десятичной системѣ счисленія и объ услугахъ, которыя система оказываетъ при письменномъ производствѣ дѣйствій — Остальныя пособія, какъ-то счеты разныхъ видовъ и названій,—за исключеніемъ русскихъ счетовъ, одинъ экземпляръ каковыхъ (въ большомъ форматѣ и на ножкѣ) долженъ бы быть въ каждой благоустроенной школѣ,— напр, доски съ дырочками и т п, совершенно излишни и дѣлу обученія ариѳметикѣ не могутъ оказать никакой особенной услуги, которой нельзя было бы достигнуть помощью уже названныхъ учебныхъ пособій

Остальныя наглядныя пособія.

§ 3 Изъ чисто-наглядныхъ пособій наиболѣе употребительны такъ называемыя числовыя фигуры Ариѳметическій ящикъ, торговые счеты большихъ противъ обыкновеннаго размѣровъ, шведскіе счеты и, наконецъ, такъ называемая „солома“ представляютъ собою пособія не только наглядныя, но и осязательныя Торговые счеты представляютъ собою, кромѣ того, *вычислительный инструментъ*

Числовыя фигуры

1) Числовыя фигуры могутъ служить пособіемъ при обученіи *счету* и при обозначеніи цифрами даннаго числа элементовъ данной фигуры Но ими отнюдь не слѣдуетъ пользоваться при прохожденіи *дѣйствій* надъ числами, если же почему либо фигуры нужны учащему, то дѣйствія онъ *на доскѣ* можетъ совершать, но непремѣнно на самомъ дѣлѣ, т е нарисовавъ фигуру въ пять кружковъ и спросивъ, сколько здѣсь кружковъ, нарисовать еще три кружка и спросить — сколько ихъ теперь, и т п Обозначенія же такого рода



безсмысленны, ибо знакъ плюсъ нельзя ставить между элементами числовыхъ фигуръ точно такъ же, какъ его нельзя ставить между двумя группами кубиковъ, между нѣсколькими человѣками, находящимися въ комнатѣ, или между полками книгъ въ библіотечномъ шкафу

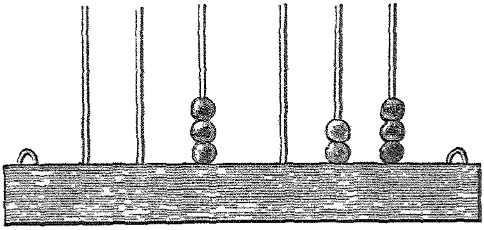
Ариѳметическій ящикъ

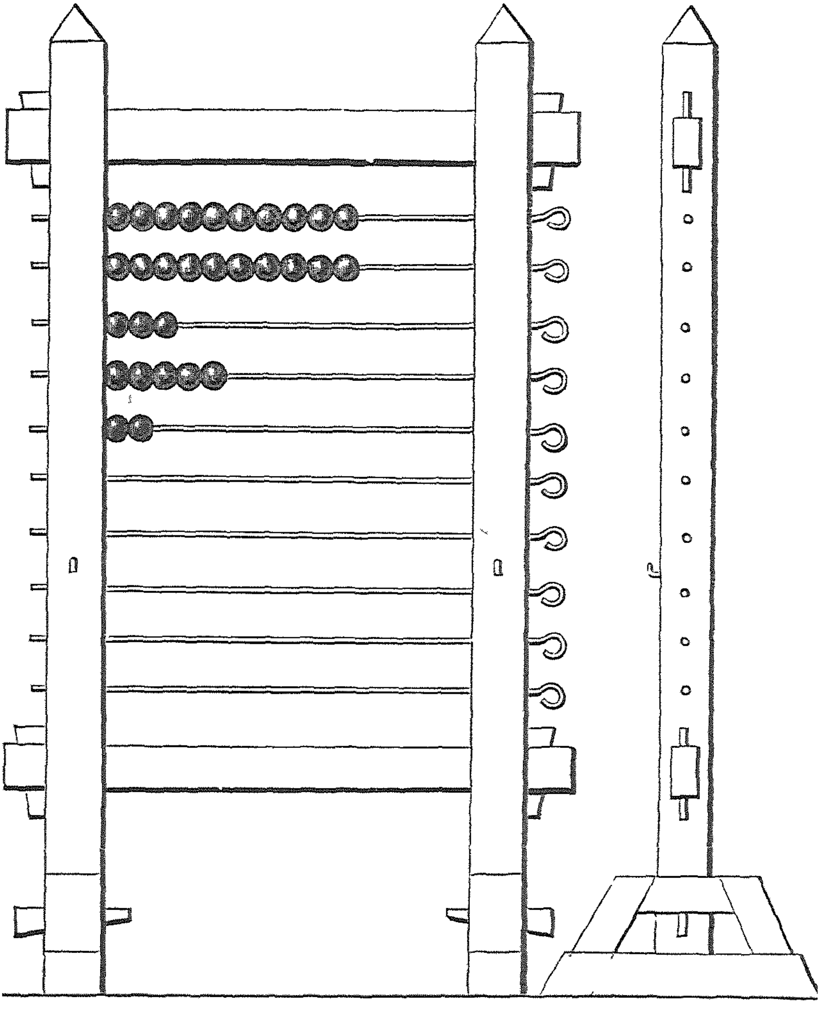
2) Ариѳметическій ящикъ заключаетъ въ себѣ а) 100 отдѣльныхъ *кубиковъ*, *б) 30 или 40* прямоугольныхъ брусковъ, основаніе каждаго изъ нихъ равно основанію, а высота—удесятеренной высотѣ кубика, в) 5 или 6 прямоугольныхъ досокъ, основаніе каждой изъ нихъ въ сто разъ больше основанія кубика, а высота равна высотѣ его —Изъ всѣхъ этихъ предметовъ полезны, какъ это выше уже замѣчено, преимущественно кубики Смѣло можно вмѣсто кубиковъ употреблять впрочемъ, какіе либо другіе, болѣе или менѣе одинаковые по формѣ, предметы камешки, еловыя или сосновыя шишки, деревянныя палочки, и т п

Шведскіе счеты

3) Шведскіе счеты состоятъ изъ четыреугольной рамки, стоящей на ножкахъ Въ ней продѣто восемь или болѣе горизонтальныхъ проволокъ на каждой изъ которыхъ свободно могутъ двигаться по десяти деревянныхъ шаровъ Кромѣ того, на отдѣльномъ брускѣ рамки находятся нѣсколько отвѣсныхъ проволокъ, на которыя могутъ быть надѣты отдѣльные шары, имѣющіеся при счетахъ На этихъ проволокахъ можетъ быть разработана нумерація (на слѣд стр обозначено число 3 203)

Ниже дано изображеніе простѣйшаго устройства шведскихъ разборныхъ счетовъ





Спички или солома

4) Что касается спичекъ такъ называемой „соломы", то это пособіе состоитъ изъ сотни-другой палочекъ одинаковой длины и можетъ оказать неоцѣненныя услуги при прохожденіи *нумераціи* и разъясненіи самаго *производства* дѣйствій сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ Лучше всего, если палочки имѣютъ въ длину около полуаршина, а толщину не болѣе толщины карандаша Конечно, изготовленіе этого учебнаго пособія для учителя не представитъ уже никакихъ затрудненіи Вмѣсто выструганныхъ или выточенныхъ палочекъ можно довольствоваться (въ мѣстностяхъ гдѣ ростутъ камыши или растенія съ подходящими стволами) палочками естественными (палочками изъ ракитника, липы, вербы, осины) Ихъ надо связывать въ пучки по десяти спичекъ въ каждомъ, а изъ этихъ пучковъ составлять, въ случаѣ надобности, новыя пачки по десяти пучковъ въ каждой

Модели единицъ мѣры

5) Къ числу осязательныхъ и наглядныхъ въ то же время пособій принадлежатъ также образцы единицъ мѣры Для выясненія и укрѣпленія въ умѣ учащагося понятій о величинахъ, единицахъ мѣры и измѣреніи необходима коллекція мѣръ длины и вѣса, хотя бы самыхъ важныхъ въ жизни 1) аршинъ съ подраздѣленіями на вершки и футъ съ подраздѣленіями на дюймы, 2) фунтовая гиря въ обычной въ торговлѣ формѣ, допускающей взвѣшиваніе и частей фунта, или же фунтовая и лотовая гири, 3) модель четверика Употребленіе этихъ пособій понятно само собою, что касается понятія объ измѣреніи, то оно не представляетъ затрудненій, если принципъ наглядности (по возможности осязательной) не будетъ забытъ учащимъ для кажущагося ускоренія дѣла Только въ крайнемъ случаѣ можно удовлетвориться *изображеніемъ* единицъ мѣры на доскѣ, что, впрочемъ, для единицъ вѣса не достаточно

Пиѳагорова таблица и способъ ея употребленія

6) Къ исключительно наглядным пособіямъ принадлежитъ такъ называемая Пиѳагорова таблица умноженія Но эта таблица полезна не въ обычной своей формѣ

Въ этой формѣ надо, какъ извѣстно, пользоваться правиломъ „чтобы найти 6 × 7, веди пальцемъ по строкѣ, начинающейся числомъ 6, до тѣхъ поръ, пока дойдешь до столбца, начинающагося числомъ 7", и т д Пиѳагорова таблица въ этой, обычной формѣ, къ сожалѣнію, не особенно полезна, на самомъ же дѣлѣ, если ее *развить* на глазахъ учащагося, то она полезна не только для ариѳметики, но и для

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

усвоенія свойства площади прямоугольнаго четырехугольника, а также и въ смыслѣ развивательномъ

Предположимъ, что надо разработать таблицу умноженія 6-ти на разныя цѣлыя числа Беру одну клѣтку и ставлю въ ней цифру 1, къ ней приставлю еще клѣтку, въ которую ставлю цифру 2, и т д вплоть до шестой клѣтки включительно

1	2	3	4	5	6

Можемъ этихъ цифръ не ставить Снизу приставлю къ первой еще одинъ рядъ изъ шести клѣтокъ и запишу—сколько ихъ всѣхъ, и т д Если это дѣлать постепенно, т е такъ, чтобы клѣтки съ

1	2	3	4	5	6
					12

цифрами постепенно, и притомъ съ разсужденіемъ появлялись на чертежѣ, и продолжать эту операцію до любого предѣла, то въ концѣ концовъ получатся части такъ называемой Пиѳагоровой таблицы, напр , та часть таблицы, гдѣ изображено четырежды шесть,

которая не только уму и воображенію учащагося будетъ гораздо болѣе говорить, но и уму и воображенію учащаго скажетъ гораздо болѣе, чѣмъ только та же таблица говоритъ въ готовомъ видѣ Упражненіе въ собственноручномъ изготовленіи учащимся (на глазахъ учащаго) подобной *развивающейся* таблицы, сослужитъ великую службу не только усвоенію наизусть таблицы умноженія, но и общему развитію учащагося, и онъ пойметъ, что изобрѣтеніе этой таблицы не напрасно приписывается „какому-то греческому мудрецу“ (по имени Пиѳагоръ), жившему въ VI в до Р Хр Развитію нѣкотораго геометрическаго смысла эта таблица, въ указанной формѣ, окажетъ также не мало услугъ и пользы измѣреніе площадей прямоугольниковъ, во всякомъ случаѣ, будетъ впослѣдствіи для учащагося не чѣмъ-то новымъ и труднымъ, а ученіемъ знакомымъ и легко доступнымъ Заключать Пиѳагорову таблицу въ утолщенную рамочку, какъ это обыкновенно дѣлается, не для чего Полезно, напротивъ, выяснить учащемуся, что такимъ образомъ, т е съ помощью *счета* клѣтокъ, можно составить таблицу произведеній какихъ угодно двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое значительно больше девяти, но что это было бы слишкомъ громоздко и долго Надо только соблюдать правило, чтобы учащійся, нарисовавъ два ряда клѣтокъ, сосчиталъ и сказалъ бы „дважды шесть двѣнадцать“, а нарисовавъ три ряда, сосчиталъ бы и сказалъ бы трижды шесть восемнадцать, и т д

Торговые счеты

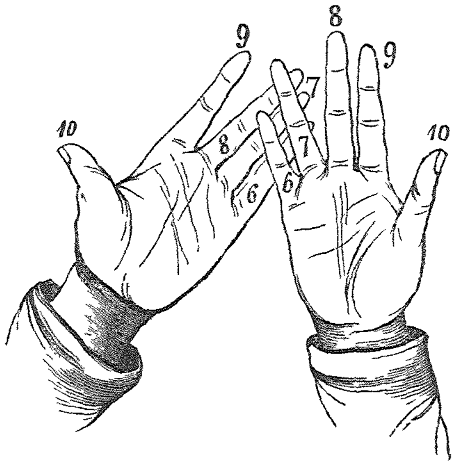
7) Не только нагляднымъ пособіемъ, но и вычислительнымъ инструментомъ *въ полномъ смыслѣ этихъ словъ*,—*инструментомъ*, замѣняющимъ изустное и письменное вычисленіе во многихъ случаяхъ,—являются такъ называемые торговые счеты Торговые счеты у насъ извѣстны всѣмъ и каждому, а потому ихъ описаніе было бы излишнимъ Должно также замѣтить, что большій (противъ обыкновеннаго) размѣръ счетовъ не только желателенъ, но даже просто необходимъ для того, чтобы ученики, сидящіе далеко отъ доски, могли ясно различать отдѣльныя косточки счетовъ Понятно, что тѣ школы, въ которыхъ нѣтъ такихъ счетовъ, но есть такъ называемые шведскіе, не должны пріобрѣтать непремѣнно торговые счеты, хотя шведскіе счеты не могутъ служить *инструментомъ* для вычисленія въ виду того, что въ шведскихъ счетахъ нельзя придавать проволокамъ, лежащимъ *горизонтально*, мѣстнаго разряднаго значенія значенія проволоки единицъ, десятковъ сотенъ и т д Но гдѣ нѣтъ ни тѣхъ, ни другихъ счетовъ и гдѣ пріобрѣтеніе счетовъ обоего рода невозможно, тамъ придется ограничиться пріобрѣтеніемъ торговыхъ счетовъ преимущественно предъ шведскими, такъ какъ первые сравнительно дешевле послѣднихъ и употребительны также въ жизни Но тогда мѣстное значеніе проволокъ должно быть введено послѣ того, какъ торговые счеты уже отслужили свою службу въ качествѣ нагляднаго пособія

Употребленіе торговыхъ счетовъ наиболѣе полезно при выясненіи 1) письменнаго обозначенія чиселъ съ помощью арабскихъ цифръ, въ особенности чиселъ болѣе, чѣмъ двузначныхъ, и 2) письменнаго производства сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ —Этотъ превосходный вычислительный инструментъ въ качествѣ учебнаго пособія признается и въ Западной Европѣ, но не слѣдуетъ увлекаться слишкомъ частымъ его примѣненіемъ въ тѣхъ случаяхъ школьной практики, когда смѣло можно обойтись *изустнымъ* вычисленіемъ и когда вычисленіе *письменное должно предпочитаться* вычисленію на счетахъ

Русскіе торговые счеты—вычислительный *инструментъ*, замѣняющій у насъ во многихъ случаяхъ письменное производство дѣйствій Но въ благоустроенной школѣ они могутъ и должны быть только *пособіемъ* при *обученіи* ариѳметикѣ, а въ курсѣ этого предмета должны занимать только мѣсто пособія Въ образованныхъ странахъ Европы (Англіи Франціи, Германіи) счеты, какъ учебное пособіе, признаются но въ каждой изъ этихъ странъ въ жизни, на практикѣ, предпочитаютъ вычисленіе письменное и умственное вычисленіямъ на счетахъ И у насъ школа должна распространять грамотность и просвѣщеніе, по предмету же ариѳметики учить *устному* и *письменному* производству четырехъ дѣйствій, а не проповѣдывать употребленіе счетнаго инструмента по лучившаго у насъ особенно большое распространеніе именно въ виду незначительнаго развитія у насъ грамотности и просвѣщенія.

Производство умноженія, въ случаѣ если множимое и множитель не менѣе 6 ти, на пальцахъ

8) Изъ вычислительныхъ инструментовъ заслуживаютъ вниманія также пальцы руки при усвоеніи дѣтьми второй половины таблицы умноженія, начиная съ произведенія 6×6 Конечно, прежде чѣмъ приступить къ усвоенію дѣтьми на-память таблицы умноженія, *должно убѣдиться въ томъ — понимаютъ ли они* 1) *цѣль дѣйствія умноженія и извѣстные имъ случаи его примѣненія,* и 2) *цѣль усвоенія таблицы на-память Добираться до произведеній* какимъ нибудь образомъ, притомъ изустно, *должны умѣть всѣ ученики,* какъ бы много на это ни потребовалось труда Объ этомъ рѣчь впереди Конечно, лучше всего вести упражненія въ усвоеніи таблицы умноженія хоромъ, и провѣрять познанія учащихся—на каждомъ въ отдѣльности Но есть *инструментальный* способъ усвоенія части таблицы умноженія, начинающейся съ произведенія 6×6, этотъ способъ употреблялся древними римлянами, у которыхъ вообще было развито инструментальное вычисленіе Онъ, будучи занимателенъ, даетъ дѣтямъ орудіе для *усвоенія* труднѣйшей части таблицы умноженія наизусть и на практикѣ приводитъ къ блестящимъ результатамъ Онъ состоитъ въ слѣдующемъ мизинецъ каждой руки обозначаетъ 6, безымянный палецъ—7, средній—8, указательный—9, большой—10 Чтобы узнать сколько будетъ, напр, 8×7, надо (какъ показано на рисункѣ) сложить пальцы, обозначающіе 6 и **7** одной руки, съ пальцами, обозначающими 6, 7 и **8** другой, тогда каждый изъ сложенныхъ пальцевъ обозначаетъ десятокъ, въ данномъ случаѣ десятковъ будетъ 5, число же *свободныхъ* пальцевъ одной руки надо помножить на число свободныхъ пальцевъ другой,—въ данномъ случаѣ, стало-быть, 2 надо помножить на 3 Затѣмъ 5 дес надо сложить съ полученнымъ произведеніемъ, и эта сумма (56) составитъ произведеніе 8×7 Другой примѣръ надо узнать, сколько будетъ 9×8, складываю пальцы обозначающіе 6 7 8 и **9** на одной рукѣ, съ пальцами, обозначающими 6, 7 и **8**, на другой, получимъ 7 *десятковъ* $+ 2 \times 1$, т е 72, каковое число и есть произведеніе 9×8 Третій примѣръ 6×6, складываю пальцы обѣихъ рукъ, обозначающіе 6, т е мизинцы, получаю 2 десятка $+ 4 \times 4$, т е $20 + 16$, или 36, каковое число обозначаетъ произведеніе 6×6 —



Этотъ способъ опредѣленія произведеній однозначныхъ чиселъ, не меньшихъ 6-ти, нерѣдко употребляется взрослыми и по-нынѣ въ южныхъ департаментахъ Франціи, въ Италіи, Испаніи и Румыніи Основанія этого способа, конечно, не должны быть объясняемы учащемуся, такъ какъ они не довольно просты и такъ какъ въ томъ и не представляется надобности, при должной постановкѣ этого правила Польза приведеннаго способа умноженія преимущественно практическая, хотя есть и педагогическая сторона дѣла учащійся не такъ скучаетъ усвоеніемъ на-память этой таблицы умноженія, благодаря введенію нагляднаго элемента и благодаря возможности всякій разъ, при надобности, обратиться къ пріему, для ребенка представляющему и самостоятельный интересъ По сдѣланнымъ наблюденіямъ, дѣти, по усвоеніи таблицы умноженія, перестаютъ этимъ пріемомъ пользоваться, хотя во время усвоенія онъ ихъ не мало интересуетъ

Относительно употребленія наглядныхъ **пособій** въ классѣ должно быть сдѣлано одно весьма важное **общее** замѣчаніе, котораго учитель никогда не долженъ забывать *Посредствомъ наглядныхъ пособій должно, въ виду самой цѣли обученія ариѳметикѣ, выяснять преимущественно* **дѣйствія** *надъ числами и* **способы** *ихъ производства, а не результаты этихъ дѣйствій* Кромѣ того, учащій долженъ помнить, что не отъ всѣхъ наглядныхъ пособій можно требовать однѣхъ и тѣхъ же услугъ каждое изъ нихъ умѣстно только на нѣкоторыхъ ступеняхъ обученія и только въ извѣстномъ направленіи На какихъ ступеняхъ какія именно пособія наиболѣе умѣстны— выяснено ниже

§ 4 Задачи, извѣстныя подъ именемъ ариѳметическихъ, несмотря на все свое разнообразіе, могутъ быть точно распредѣлены на два класса 1) задачи чисто-ариѳметическія и 2) задачи алгебраическія — Два рода задачъ

Для того чтобы уяснить себѣ разницу между чисто-ариѳметическими и алгебраическими задачами, лучше всего разрѣшить двѣ задачи, при чемъ, прибѣгнувъ къ обозначенію искомаго числа какою либо буквою (напр, буквою x), составить уравненія, т е равенства, выражающія связь данныхъ чиселъ съ искомымъ Задачи пусть будутъ слѣдующія

1) Нѣкто купилъ 7 аршинъ сукна по 3 руб за аршинъ и 5 аршинъ бархата по 7 р за аршинъ, послѣ этого у него осталось столько денегъ, что на нихъ онъ могъ бы купить еще два аршина сукна по 4 р и три аршина бархата по 6 р за арш Спрашивается—сколько у него было денегъ до покупки?

2) Торговецъ разсчиталъ, что если онъ весь остатокъ своего ситца станетъ продавать по 8-ми коп за аршинъ, то онъ понесетъ при этомъ убытку 92 р, если бы онъ сталъ продавать его по 10-ти коп, то онъ получилъ бы 28 руб прибыли Сколько у него оставалось ситца?

Для разрѣшенія первой задачи приходится прибѣгнуть къ дѣйствіямъ умноженія и сложенія надъ данными числами, вытекающимъ непосредственно изъ условій ея, для рѣшенія же второй необходимо подвергнуть задачу *анализу* условій (см ниже, § 6)

Чисто-ариѳметическими будетъ называть такого рода задачи при рѣшеніи которыхъ приходимъ прямо къ ряду дѣйствій надъ данными числами *Алгебраическими* же условимся называть такого рода задачи, при рѣшеніи которыхъ неизбѣжно приходится прибѣгать къ анализу условій Поэтому къ числу чисто-ариѳметическихъ задачъ надобно причислить всѣ тѣ задачи, у которыхъ неизвѣстное число является въ одной части только неизвѣстнымъ слагаемымъ, неизвѣстнымъ уменьшаемымъ, вычитаемымъ, множимымъ, множителемъ, дѣлимымъ, дѣлителемъ или остаткомъ, въ то время какъ остальные элементы извѣстны Такъ, напр задача „найти неизвѣстное число, которое, будучи прибавлено къ произведенію чиселъ 8 и 7, даетъ въ результатѣ частное, происходящее отъ раздѣленія 3400 на 17“ есть задача чисто-ариѳметическая Для знающихъ алгебру весьма полезно будетъ замѣтить себѣ слѣдующее если надъ неизвѣстнымъ числомъ не совершается по условіямъ задачи никакого дѣйствія или совершается только одно, причемъ результатъ этого дѣйствія извѣстенъ, то такая задача можетъ быть названа *ариѳметическою*, если надъ неизвѣстнымъ числомъ совершается болѣе одного дѣйствія и требуется по результату отыскать это неизвѣстное число, то такая задача принадлежитъ къ числу *алгебраическихъ* Кромѣ того замѣчательно, что 1) существуютъ такія задачи, на рѣшеніе которыхъ введеніе алгебраическаго обозначенія неизвѣстной величины нисколько не вліяетъ, 2) при рѣшеніи подобныхъ задачъ надъ введенною неизвѣстною величиною не производится никакихъ дѣйствій 3) алгебраическій способъ не приводитъ при своемъ приложеніи къ этому роду задачъ ни къ чему существенному Такова первая изъ предложенныхъ выше задачъ и таковы всѣ чисто-ариѳметическія задачи

Простыя задачи при обученіи ариѳметикѣ и метода цѣлесообразныхъ задачъ

§ 5 Чисто-ариѳметическія задачи можно различать двухъ родовъ 1) задачи, для разрѣшенія которыхъ требуется приложеніе только одного изъ четырехъ дѣйствій, и 2) задачи, для разрѣшенія которыхъ требуется приложеніе двухъ или болѣе дѣйствій Первый классъ чисто-ариѳметическихъ задачъ условимся называть *простыми*, второй—*сложными*

Чтобы понять все значеніе задачъ *простыхъ* въ дѣлѣ обученія ариѳметикѣ, должно принять къ свѣдѣнію слѣдующія соображенія Прежде чѣмъ учить дѣтей *производству* ариѳметическихъ дѣйствій, должно выяснить самую необходимость дѣйствій и ихъ право на существованіе, ихъ цѣль и внутренній смыслъ Въ старину учащемуся задавали примѣръ на то или иное дѣйствіе и при этомъ требовали, чтобы онъ твердо зналъ правило и правильно совершилъ заданное дѣйствіе Понимаетъ ли онъ самую цѣль дѣйствія, его внутренній смыслъ, понимаетъ ли онъ самую сущность дѣйствія и право этого послѣдняго на вниманіе, этимъ не интересовались, на простыя задачи поэтому не обращалось должнаго вниманія

На самомъ же дѣлѣ простыя задачи лучше, чѣмъ всяческія правила и опредѣленія, пригодны именно для того, чтобы съ ихъ помощью 1) *привести учащагося къ мысли о необходимости дѣйствія надъ числами,* 2) *уяснить ему цѣль и внутренний смыслъ того или другого дѣйствія,* 3) *ознакомить его съ различными въ логическомъ отношеніи случаями примѣненія этого дѣйствія,* 4) *сдѣлать ему понятными различные въ словесномъ отношеніи способы выраженія одного и того же ариѳметическаго требованія,* и 5) *привести его къ сознанію, что надо изобрѣсти пріемъ вычисленія болѣе простой, чѣмъ въ данную минуту ему извѣстный*

Какъ, въ самомъ дѣлѣ, убѣдить ребенка въ томъ, что и съ логической, и съ практической точки зрѣнія, необходимо создать, придумать такое-то ариѳметическое дѣйствіе, строго, точно и безошибочно различая его отъ другихъ? Какъ уяснить ему цѣль и смыслъ даннаго дѣйствія, случаи его примѣненія и различныя словесныя выраженія требованія, чтобы это дѣйствіе было совершено? Какъ убѣдить его въ томъ, что однимъ счетомъ нельзя обойтись и что необходимо умѣть складывать, что однимъ сложеніемъ трудно обойтись, а надо умѣть *умножать,* и т д? Никакія опредѣленія, разъясненія, правила, никакое *изложеніе* (въ видѣ лекціи) надобности того или иного дѣйствія, конечно, не въ состояніи этого сдѣлать такъ, какъ то въ состояніи сдѣлать методически подобранная группа задачъ, которыя преслѣдуютъ именно эти цѣли Ибо опредѣленія дѣти точно такъ же, какъ и взрослые, понимаютъ только тогда, когда всѣ понятія, входящія въ опредѣленіе, имъ хорошо извѣстны, когда имъ извѣстны цѣль опредѣленія и всѣ соприкасающіяся съ даннымъ опредѣленіемъ понятія и представленія А эти знанія у начинающаго отсутствуютъ Правило также надо понимать, а этого пониманія именно и нельзя предполагать у малолѣтняго учащагося Что же касается *изложенія* учителемъ того или иного ученія, то какой бы ясностью оно не отличалось, для малолѣтнихъ оно, при маломъ развитіи у нихъ вниманія и разумѣнія, совершенно безполезно

Результатомъ этихъ размышленій является слѣдующее основное положеніе *для развитія у учащихся правильныхъ идей о четырехъ дѣйствіяхъ соотвѣтствующія части курса начальной ариѳметики должны быть построены на* **опредѣленныхъ** *задачахъ и притомъ непремѣнно простыхъ* Ариѳметическія задачи должны при разумномъ обученіи быть не цѣлью, а только *средствомъ* обученія ариѳметикѣ, съ ихъ помощью должны быть *вырабатываемы* и *развиваемы* вѣрныя и ясныя представленія и понятія о четырехъ дѣйствіяхъ, внутреннемъ ихъ смыслѣ и о цѣли ихъ и т п, поэтому изъ десяти случаевъ въ девяти задача должна быть точкою исхода преподаванія, а не окончательною цѣлью его Вотъ что говоритъ извѣстный французскій педагогъ Жанъ Масе объ этомъ предметѣ „Развитіе человѣчества повторяется въ каждомъ малолѣтнемъ Первый, кому пришлось сдѣлать вычисленіе, началъ не съ отвлеченныхъ правилъ, излагаемыхъ въ учебникахъ Онъ, очевидно, прежде всего долженъ былъ не потеряться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ и задачъ, надъ которыми онъ могъ одержать побѣду, только пустивъ въ дѣло всѣ пружины своего ума, и онъ занимался этимъ искусствомъ вовсе не ради самаго искусства Заставлять ребенка начинать съ отвлеченнаго правила и затѣмъ предлагать ему задачи— это значитъ идти наперекоръ ходу развитія человѣческаго ума Истинная метода состоитъ въ томъ, чтобы ставить ребенка въ условія, при которыхъ умъ человѣческій началъ изобрѣтать ариѳметику, и сдѣлать его, такъ сказать, свидѣтелемъ этого изобрѣтенія" — Такова *метода цѣлесообразныхъ задачъ*, которую учащій долженъ прежде всего себѣ усвоить, прибѣгая къ задачамъ чаще для *выработки* ариѳметическихъ представленій, чѣмъ для ихъ *примѣненія*

Сложныя ариѳметическія задачи

§ 6 Что касается сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, то для цѣлей обученія ариѳметикѣ ихъ значеніе лишь постолько важно, посколько онѣ служатъ той же цѣли развитія у учащихся правильной идеи о четырехъ дѣйствіяхъ Для ихъ рѣшенія требуется чаще всего только большее развитіе вниманія и болѣе значительная мѣра пониманія родной рѣчи Но говоря о развивательномъ значеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, надо имѣть въ виду не умственное развитіе вообще, но развитіе навыка къ употребленію, а главное—къ пониманію ариѳметической рѣчи, рядомъ съ развитіемъ большаго вниманія и вкуса къ вопросамъ ариѳметическаго содержанія

При разрѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ представляется простѣйшій случай къ уясненію способа разложенія задачи со многими условіями на составляющія ее простыя Какъ бы многочисленны ни были условія такой задачи, разборъ задачи этого рода не требуетъ особенной сноровки въ уразумѣніи ея составныхъ частей При этомъ замѣчательно, что тѣ простыя задачи, къ разрѣшенію коихъ приводится задача сложная изъ класса чисто-ариѳметическихъ, всегда могутъ быть легко, вкратцѣ и точно формулированы, чего далеко нельзя сказать о задачахъ алгебраическихъ Если распредѣлить рѣшеніе этихъ задачъ въ видѣ т наз строчекъ, то каждая изъ нихъ отвѣчаетъ на какой нибудь частный вопросъ, не представляющій особенныхъ затрудненій при установленіи его содержанія

Приведенная выше сложная ариѳметическая задача, напр, располагается въ видѣ слѣдующихъ семи строчекъ

1) $3 \text{ р} \times 7$

2) $7 \text{ р} \times 5$

3) $3 \text{ р} \times 7 + 7 \text{ р} \times 5$

4) $4 \text{ р} \times 2$

5) $6 \text{ р} \times 3$

6) $4 \text{ р} \times 2 + 6 \text{ р} \times 3$

7) $(3 \text{ р} \times 7 + 7 \text{ р} \times 5) + (4 \text{ р} \times 2 + 6 \text{ р} \times 3)$

Эти строки по порядку выражаютъ 1) сколько заплачено за сукно 2) сколько за бархатъ, 3) сколько за то и за другое, 4) сколько лицо, о которомъ рѣчь, могло бы еще истратить на сукно, 5) сколько на бархатъ, 6) сколько оно могло всего истратить, кромѣ того, что имъ уже истрачено, и 7) сколько всего у этого лица было денегъ Далеко не въ такой же степени просты вопросы большинства алгебраическихъ задачъ Приведенная выше алгебраическая задача сводится, напр всего къ тремъ строчкамъ

1) 28 р + 92 р
2) 10 к − 8 к
3) (28 р + 92 р) (10 к − 8 к),

но за-то каждая изъ нихъ выражаетъ рядъ отвлеченныхъ мыслей, не поддающихся столь краткой и ясной формулировкѣ, какую допускаютъ выше разсмотрѣнныя семь строчекъ чисто-ариѳметической задачи Дѣйствительно первая строчка занимающей насъ алгебраической задачи отвѣчаетъ на слѣдующій весьма тонкій вопросъ *если торговецъ станетъ продавать ситецъ по десяти коп за аршинъ, то на сколько онъ больше выручитъ денегъ противъ того количества ихъ, которое онъ выручилъ бы, продавая ситецъ по восьми копеекъ?* Вторая строчка, включая въ себѣ мысль *о причинѣ* такой разницы въ выручкѣ, отвѣчаетъ на вопросъ *сколько торговецъ получаетъ лишку на каждомъ аршинѣ ситца, продавая его по 10-ти коп, противъ того, сколько онъ получалъ бы за аршинъ, продавая его по 8-ми коп?* Только третья строчка отвѣчаетъ на простой вопросъ *сколько у торговца осталось ситца?* Но очевидно, что самый характеръ и форма вопросовъ только-что разсмотрѣнной задачи совсѣмъ иные Это еще не все въ то время какъ въ сложной чисто-ариѳметической задачѣ между строчками (если можно такъ выразиться) лежатъ мысли очень понятныя и доступныя при одномъ взглядѣ на строчку, между строчками задачи алгебраической лежатъ мысли болѣе или менѣе скрытыя и для большинства дѣтей мало-доступныя Такъ, между строчками первою и второю нашей алгебраической задачи лежитъ, какъ выше замѣчено, мысль о *причинѣ* избытка, а между второй и третьею—мысль о томъ, что полученный избытокъ зависитъ *исключительно* отъ разности между цѣною аршина въ одномъ и цѣною аршина въ другомъ случаѣ Болѣе того самая постановка первой строчки уже предполагаетъ такой навыкъ въ такъ наз анализѣ задачи и такой рядъ разсужденій, къ какимъ никогда не приходится прибѣгать при разрѣшеніи задачи, хотя бы и очень сложной изъ числа чисто-ариѳметическихъ

§ 7 Послѣ всего вышеизложеннаго будетъ очень легко разобраться въ вопросѣ объ истинномъ значеніи алгебраическихъ задачъ Задачи сложныя изъ числа чисто-ариѳметическихъ могутъ, укрѣпляя вниманіе учащихся и развивая ихъ рѣчь и способность къ пониманію рѣчи, въ то же время имѣть нѣкоторое значеніе для обученія ариѳметикѣ какъ таковой, служа къ дальнѣйшему уясненію цѣли ариѳметическихъ дѣйствій и ихъ взаимныхъ отношеній Задачи же алгебраическія вообще не въ состояніи оказать при обученіи тѣхъ-же услугъ Ибо, при неспособности большинства дѣтей къ математическимъ пріемамъ мышленія и при недостаточномъ

Истинное значеніе алгебраическихъ задачъ развитiи у дѣтей стремленiй къ анализу, вниманiе дѣтей на алгебраическихъ задачахъ изощряется очень мало, столь же мало изощряется также и рѣчь ихъ, наконецъ, для обученiя ариѳметикѣ какъ таковой, эти задачи тоже мало полезны, нисколько не содѣйствуя ни уясненiю дѣйствiи и ихъ соотношенiй, ни выработкѣ чисто-ариѳметическихъ понятiй и представленiй

Понявъ даже всѣ слова, заключающiяся въ данной алгебраической задачѣ, понявъ даже и условiя ея, дѣти далеко еще не подготовлены къ анализу условiй задачи, если они не достаточно упражнялись въ этомъ специальномъ направленiи Дѣло въ томъ, что одно пониманiе и знанiе четырехъ дѣйствiй, будучи *необходимымъ условiемъ* рѣшенiя алгебраической задачи, далеко еще *недостаточны* для того, чтобы задача была вѣрно и логично разрѣшена Какъ, въ самомъ дѣлѣ, разрѣшить алгебраическую задачу, если къ ней приступить только съ знанiемъ четырехъ дѣйствiй и безъ болѣе или менѣе тонкаго анализа, который въ задачахъ простыхъ и даже сложныхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ отличается чрезвычайною краткостью и непосредственностью? Для рѣшенiя алгебраической задачи, кромѣ знанiя дѣйствiй, необходимъ еще особенный, специальный, большiй или меньшiй навыкъ въ изслѣдованiи вопроса, въ расчлененiи его, въ *анализѣ*

Изъ предыдущаго можемъ сдѣлать слѣдующiй, весьма важный, выводъ, что 1) *ученiя ариѳметики не оказываютъ особенныхъ услугъ при разрѣшенiи задачъ этого рода ученiя эти только необходимы для возможности рѣшенiя, но для того не достаточны*, и 2) *обученiю ариѳметикѣ, какъ таковой, задачи алгебраическiя въ свою очередь тоже не оказываютъ никакихъ услугъ, такъ какъ не относятся ни къ теорiи, ни къ практикѣ ариѳметическихъ дѣйствiй* Каково же въ такомъ случаѣ истинное значенiе этого рода задачъ въ школѣ? Ознакомленiе дѣтей съ аналитическою формою мышленiя, конечно, полезно въ развивательномъ отношенiи, если дѣти къ этому подготовлены и если данная школа имѣетъ въ распоряженiи своемъ достаточное для того количество времени Но увлеченiе задачами алгебраическими въ ущербъ самому курсу ариѳметики, конечно, не заслуживаетъ никакого сочувствiя, если на дѣло смотрѣть съ точки зрѣнiя требованiи только начальной школы Это тѣмъ справедливѣе, что *въ самомъ прохожденiи надлежащаго курса ариѳметики заключается гораздо болѣе развивательнаго матерiала, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда* Обученiе вообще оказываетъ на дѣтскiй умъ въ высшей степени важное и полезное воспитательное влiянiе оно внушаетъ дѣтямъ должное уваженiе къ уму человѣческому и прививаетъ имъ уму такъ много необходимыхъ навыковъ, что въ сравненiи съ послѣднимъ навыку въ рѣшенiи алгебраическихъ задачъ, по причинѣ крайней его односторонности, можно приписывать только второстепенное значенiе

Лучшимъ доказательствомъ безусловной справедливости этого взгляда можетъ служить то обстоятельство, что можно указать массу людей, имѣющихъ полнѣйшее право считать себя людьми истинно-образованными, но не могущихъ похвалиться ни малѣйшимъ умѣніемъ разрѣшать задачи алгебраическаго характера Къ тому же и практическая жизнь рѣдко предлагаетъ намъ такія задачи, которыя носили бы чисто-алгебраическій характеръ большинство задачъ, представляющихся въ практической жизни принадлежитъ къ числу ариѳметическихъ Итакъ, *алгебраическимъ задачамъ придается обыкновенно большинствомъ слишкомъ большое значеніе, и роль ихъ скорѣе преувеличивается, чѣмъ забывается*

Неоднократно можно видѣть учениковъ даже высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, которые, несмотря на довольно основательныя знанія среднеобразовательнаго курса математики, не въ состояніи безъ помощи уравненій, т е безъ алгебры, разрѣшить извѣстную задачу, гласящую такъ Одинъ пастухъ сказалъ другому „отдай мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у меня будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у тебя“ —Нѣтъ, отвѣчалъ ему другой отдай лучше ты мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у насъ будетъ поровну Сколько у каждаго изъ нихъ овецъ?—Трудность этой задачи заключается въ томъ, что по порядку надо изслѣдовать слѣдующіе семь вопросовъ 1) у котораго изъ пастуховъ больше? (у перваго), 2) если бы первый пастухъ одну овцу отдалъ *третьему* лицу, то у котораго изъ пастуховъ и на сколько было бы больше, чѣмъ у другого? (у перваго одною овцою было бы больше), 3) если бы онъ не отдавалъ никому ни одной овцы, то насколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на двѣ), 4) если бы второй пастухъ отдалъ *третьему* лицу одну овцу, то насколько у перваго было бы въ этомъ случаѣ больше овецъ, чѣмъ у второго? (на три овцы), 5) если бы онъ отдалъ эту овцу второму пастуху, то насколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на четыре), 6) но по условію у него въ этомъ случаѣ было бы вдвое болѣе, чѣмъ у второго, стало-быть, сколько у второго въ этомъ случаѣ овецъ? (четыре), 7) сколько у него было ранѣе? (пять), 8) а сколько у перваго? (семь) —Эти вопросы приведены для того, чтобы показать, какая длинная цѣпь ихъ необходима, чтобы привести къ рѣшенію задачи, повидимому, вовсе не особенно запутанной—ни въ числовомъ, ни въ словесномъ отношеніи

§ 8 Что касается роли такъ называемыхъ ариѳметическихъ *примѣровъ* при обученіи ариѳметикѣ, то ихъ значеніе чаще и прежде всего чисто практическое упражняясь въ вычисленіи примѣровъ, дѣти пріобрѣтаютъ навыкъ въ *производствѣ* дѣйствій Мы уже видѣли, что между производствомъ дѣйствій и ихъ логической стороною есть и глубокая разница, и тѣсная связь съ логической и спеціально-ариѳметической точки зрѣнія, всякое ариѳметическое дѣйствіе подчиняется только требованіямъ логики и обусловливается существованіемъ *таблицы* дѣйствія, въ вопросѣ же о производствѣ дѣйствій важную роль играютъ также и требованія *практическія* требованія удобства, быстроты, наглядности, изящества и т д На примѣрахъ дѣти научаются *располагать* вычисленія сообразно тѣмъ образцамъ, которые имъ даны учителемъ Понятно, что въ вычисленіи примѣровъ дѣти должны упражняться по возможности старательно и неустанно, и притомъ безъ непосредственной помощи учителя только тотъ научается вѣрному и быстрому вычисленію, кто самъ много упражнялся въ этомъ дѣлѣ, притомъ упражнялся настойчиво и энергично Въ практикѣ веденія занятій въ начальной школѣ ариѳметическіе примѣры для вычисленія оказываютъ величайшую услугу, представляя собою *наилучшій* матеріалъ для самостоятельныхъ, втихомолку, занятій двухъ отдѣленій ариѳметикою, когда остальные учащіеся работаютъ при участіи учителя и притомъ работаютъ вслухъ

Способы рѣшенія чисто-ариѳметическихъ задачъ

§ 9 Способы рѣшенія ариѳметическихъ задачъ могутъ быть подведены подъ три категоріи

1) Задачи простыя изъ числа чисто-ариѳметическихъ не требуютъ (какъ въ томъ легко убѣдиться) ни разбора, ни установленія плана рѣшенія, поэтому способъ ихъ рѣшенія зависитъ исключительно отъ смысла условій, и если учащійся только понимаетъ эти условія, то онъ безошибочно останавливается на томъ изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, которое должно быть примѣнено при рѣшеніи этой задачи Если же учащійся вмѣсто одного дѣйствія (напр, сложенія) прибѣгаетъ къ другому (къ вычитанію или умноженію), то этимъ доказывается только то, что онъ или условія задачи, или внутренняго смысла ариѳметическихъ дѣйствій еще не понимаетъ Замѣчательно при этомъ, что объясненіе *причины*, почему въ данномъ случаѣ, при рѣшеніи данной простой ариѳметической задачи, должно прибѣгнуть къ тому, а не иному ариѳметическому дѣйствію, возможно только на основаніи опредѣленія этого дѣйствія, а не на основаніи какихъ либо разсужденій Для разъясненія возьмемъ рядъ задачъ

а) Въ первомъ отдѣленіи школы 24 уч, во второмъ 17 Сколько учащихся *въ обоихъ* отдѣленіяхъ *вмѣстѣ*?

б) Въ другой школѣ къ началу года было 52 учащихся къ концу года изъ нея выбыло по разнымъ причинамъ 19 человѣкъ Сколько въ ней послѣ этого *осталось* учениковъ?

в) Въ началѣ урока каждому изъ 15 учениковъ второго отдѣленія было выдано по два листа бумаги Сколько бумаги выдано *всѣмъ 15-ти* учащимся?

г) 14 учениковъ старшаго отдѣленія получили въ началѣ года 154 пера, всѣ получили поровну По сколько перьевъ досталось *каждому* изъ нихъ?

д) Въ другой разъ 260 перьевъ были розданы ученикамъ младшаго отдѣленія каждый получилъ десять перьевъ Сколько въ школѣ было учениковъ младшаго отдѣленія?

Самыя *условія* задачъ и *вопросы* содержатъ въ себѣ чуть не прямое указаніе того — какое именно дѣйствіе надо произвести Для рѣшенія первой задачи, надо прибѣгнуть къ сложенію, для рѣшенія второй—къ вычитанію, и т д При обученіи дѣтей, еще недостаточно владѣющихъ рѣчью, неосновательно было бы на первыхъ ступеняхъ обученія требовать не только „анализа“ (расчлененія) подобныхъ задачъ и установленія „плана“ рѣшенія, но даже и объясненія—почему и для чего примѣняется сложеніе, почему вычитаніе, и т д На этой ступени обученія должно строжайше слѣдить только за тѣмъ, чтобы учащіеся понимали *смыслъ* дѣйствій и вполнѣ сознательно относились къ *условіямъ* простыхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ Поэтому, учащій всякій разъ долженъ удостовѣриться—понимаютъ ли учащіеся дѣйствительную зависимость дѣйствія отъ условія задачи, если понимаютъ, хорошо, если же пониманія не замѣчается, то должно прежде всего позаботиться объ уясненіи логическаго содержанія задачи и внутренняго смысла дѣйствія, упрощая форму выраженія задачи и сводя дѣло къ нагляднымъ пособіямъ

Для того чтобы уясненіе дѣтямъ, на первыхъ ступеняхъ обученія, представленій и понятіи объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ было возможно безъ помощи опредѣленій (которыхъ дѣти, на этой ступени обученія, понять не въ состояніи), необходимо имѣть въ распоряженіи *методически подобранный матеріалъ* для упражненія дѣтей въ рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ простыхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ На эти задачи учитель долженъ поэтому обратить особенное вниманіе, ибо на первыхъ ступеняхъ обученія задачи должны настолько разъяснять цѣль и смыслъ ариѳметическихъ дѣйствій, чтобы точное, научное опредѣленіе дѣйствія было, до поры до времени, совершенно не нужно

2) При рѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ учащіеся должны быть пріучены къ установленію плана ихъ рѣшенія Всякая сложная задача изъ числа чисто-ариѳметическихъ допускаетъ расчлененіе ея на извѣстное количество задачъ простыхъ, рѣшеніе которыхъ требуетъ примѣненія только одного изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій Расчлененіе это учащимся не представляетъ особенныхъ затрудненій, если учащій не вдругъ, а постепенно переходитъ отъ задачъ менѣе сложныхъ къ болѣе сложнымъ. Лучше всего, если въ рукахъ учащаго опять-таки находится *методически-подобранная совокупность задачъ* сложныхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ, ибо въ противномъ случаѣ учащему приходится постоянно подыскивать задачи болѣе или менѣе подходящія къ требованіямъ даннаго момента обученія Что же касается способовъ рѣшенія этого рода задачъ, то они допускаютъ не только установленіе плана рѣшенія, но и анализъ Но надо при этомъ замѣтить, что анализъ задачъ этого рода большею частью не отличается особенною естественностью условія настолько явно разбиваютъ данную сложную задачу на цѣлый рядъ задачъ простыхъ, что естественнѣе всего начинать дѣло прямо съ установленія плана рѣшенія Только очень немногія изъ числа чисто-ариѳметическихъ задачъ представляютъ такія затрудненія при установленіи плана рѣшенія, что лучше сначала прибѣгнуть къ пріемамъ анализа. При этомъ однако же умѣстно будетъ присовокупить, что значеніе задачъ дѣйствительно трудныхъ (изъ числа чисто-ариѳметическихъ) весьма незначительно какъ съ точки зрѣнія ариѳметиче-

ской, такъ и съ точки зрѣнія развитія въ дѣтяхъ какихъ либо особенно полезныхъ умственныхъ навыковъ

3) *Наконецъ*, что касается задачъ алгебраическаго характера, то, для рѣшенія ихъ, примѣненіе аналитическихъ пріемовъ прямо необходимо Само собою разумѣется, что такого общаго правила, пользуясь которымъ можно было бы разрѣшить любую ариѳметическую задачу алгебраическаго характера, не существуетъ Даже чисто алгебраическій способъ рѣшенія („помощью икса", какъ обыкновенно говорятъ объ этомъ способѣ) требуетъ такой сноровки и такой находчивости, которыя не могутъ быть включены въ рамки общаго правила, всегда способнаго выручить изъ затрудненій Тѣмъ въ большей степени это справедливо относительно тѣхъ аналитическихъ пріемовъ, которые устраняютъ алгебраическую сторону дѣла Здѣсь опять-таки важна „метода цѣлесообразныхъ задачъ" и методическое, а не случайное, расположеніе задачъ въ сборникѣ задачъ

Сборники для учащихся

§ 10 Іенике, извѣстный знатокъ методики ариѳметики, насчитываетъ среди тѣлесныхъ (пластическихъ, такъ сказать) наглядныхъ пособій двадцать два отдѣльныхъ пособія, среди изобразительныхъ наглядныхъ пособій (напечатанныхъ и нарисованныхъ) восемь, а среди пособій, служащихъ для упражненія—четыре Изъ числа послѣднихъ онъ особенно сочувствуетъ *сборникамъ упражненій для учащихся*, каковыхъ сборниковъ въ Германіи множество Особенно горячимъ сторонникомъ этого учебнаго пособія былъ Дистервегъ „Для одноклассной народной школы, говоритъ Іенике, въ которой должны быть заняты работою одновременно, по крайней мѣрѣ, четыре отдѣленія, сборникъ упражненій для *учащихся*, въ которомъ, по Дистервегу, не должно быть даваемо никакихъ правилъ, образцовыхъ вычисленій, и т п , а должны быть предлагаемы только упражненія въ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ, играетъ особенно важную роль Въ то время какъ два отдѣленія занимаются по такому сборнику, другія подъ руководствомъ учащаго или его помощника занимаются другимъ дѣломъ" (стр 147 его „Исторіи преподаванія ариѳметики") Въ Пруссіи, согласно приказу министерства отъ 15 Октября 1872 года, „*въ основаніе преподаванія ариѳметики должны быть во всѣхъ школахъ положены сборники для учащихся* (Schulerhefte), при чемъ въ рукахъ учащаго должны быть отвѣты на задачи этихъ сборниковъ" Этому нельзя не сочувствовать отъ всей души въ силу соображеній двоякаго рода а) чисто-педагогическихъ, приведенныхъ выше, и б) экономическихъ, въ силу которыхъ отдѣленіе самостоятельныхъ работъ въ отдѣльную книжку для учениковъ отъ работъ подъ руководствомъ учителя, въ состояніи значительно уменьшить расходы школы на учебныя пособія

ГЛАВА II

Концентрація курса ариѳметики, распредѣленіе его по годамъ начальной школы и форма обученія ариѳметикѣ.

Необходимость концентрическаго распредѣленія курса

§ 1 *Концентрація курса различныхъ учебныхъ предметовъ обусловливается тѣмъ практически важнымъ обстоятельствомъ, что каждый изъ годовъ обученія въ нѣкоторыхъ учебныхъ заведеніяхъ долженъ дать учащимся болѣе или менѣе законченныя свѣдѣнія по каждому изъ предметовъ обученія* Въ каждомъ учебномъ предметѣ есть болѣе существенное и менѣе существенное Пройденное въ теченіе перваго года должно быть центромъ, средоточіемъ всего курса,—средоточіемъ, вокругъ котораго должны быть расположены и къ которому, такъ сказать, должны тяготѣть остальныя ученія даннаго предмета

Курсъ ариѳметики, который сводится къ обученію производству ариѳметическихъ дѣйствій, долженъ опираться на постепенное развитіе соотвѣтствующихъ ариѳметическихъ *представленій* и *понятій* Поэтому въ первый годъ обученія, если это возможно, должны быть пройдены нумерація и четыре ариѳметическихъ дѣйствія въ примѣненіи къ простѣйшимъ случаямъ, во второй—тѣ же дѣйствія во всѣхъ своихъ частностяхъ и въ примѣненіи къ случаямъ, менѣе очевидно требующимъ этихъ дѣйствій, наконецъ, въ третій—болѣе или менѣе законченный курсъ ариѳметики по учебнику Таковымъ въ общихъ чертахъ *долженъ* быть курсъ занимающаго насъ предмета, если мы стремимся только къ тому, чтобы идея дѣйствительной концентраціи курса была точно и строго выполнена Но, къ сожалѣнію, въ нашей, даже вполнѣ правильно устроенной, начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ обученію посвящается не болѣе шести мѣсяцевъ въ теченіе всего учебнаго года, поэтому въ ней вполнѣ точно держаться вышенамѣченнаго плана невозможно безъ явнаго ущерба для дѣла Такая концентрація была бы возможна, если бы эта школа могла посвящать обученію, по крайней мѣрѣ, девять мѣсяцевъ

Какой же возможенъ выходъ изъ этого положенія? Весь вопросъ въ томъ — какія ариѳметическія познанія наиболѣе существенны какъ въ практическомъ, такъ и въ образовательномъ отношеніи Безъ всякаго сомнѣнія, такими познаніями являются *нумерація и первыя два ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами перваго класса эти знанія могутъ и должны быть усвоены учащимися младшаго отдѣленія* Кромѣ того, и притомъ изъ чисто-педагогическихъ соображеній, въ этотъ курсъ обязательно должны войти если не все ученія о дѣйствіяхъ умноженія и дѣленія на однозначное число, то по-крайней-мѣрѣ умноженіе и дѣленіе въ предѣлахъ такъ называемой таблицы умноженія, т е въ предѣлахъ первой сотни Наконецъ, въ тотъ же курсъ перваго года должны войти также нѣкоторыя представленія объ обыкновенныхъ дробяхъ *Пер-*

вая сотня должна быть въ концѣ перваго года въ полномъ распоряженіи учащагося, притомъ не только при письменномъ, но также при изустномъ вычисленіи школа, не дающая этого въ теченіе перваго года, не можетъ считать достигнутые ею результаты удовлетворительными

Во второй годъ курсъ ариѳметики долженъ быть закончень, а въ третій—приведенъ въ систему и дополненъ

Курсъ остальн лѣтъ и курсъ училищъ

§ 2 *Въ первое полугодіе второго года должны быть пройдены нумерація, сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе любыхъ многозначныхъ чиселъ и примѣненіе этихъ дѣйствій къ случаямъ не очевиднымъ, во второе полугодіе того же года должны быть пройдены ученія объ именованныхъ числахъ и о дробяхъ Наконецъ, въ теченіе третьяго года обученія должны быть пройдены болѣе систематическій курсъ по учебнику, пріемы рѣшенія наиболѣе типичныхъ задачъ чисто алгебраическаго характера и, если возможно, нѣкоторыя ученія геометріи*

Курсъ такъ называемыхъ училищъ (одноклассныхъ, двухклассныхъ, трехклассныхъ и четырехклассныхъ) гораздо выше трехгодичнаго курса тѣхъ начальныхъ школъ, къ типу которыхъ принадлежитъ большинство народныхъ школъ, сельскихъ и городскихъ По положенію о городскихъ училищахъ, Высочайше утвержденному 31-го мая 1872 г, всѣ училища (одноклассныя, двухклассныя и проч) въ томъ отношеніи сходны между собою, что курсъ ученія въ нихъ шестилѣтній, а разнятся они другъ отъ друга количествомъ лѣтъ ученія въ классахъ Въ т наз одноклассныхъ училищахъ, конечно, одинъ классъ съ тремя послѣдовательными отдѣленіями, но въ каждомъ дѣти остаются по два года, въ двухклассныхъ—два класса, изъ которыхъ въ первомъ ученіе продолжается четыре года подъ-рядъ, а во второмъ—два года, въ училищахъ трехклассныхъ—три класса, курсъ каждаго изъ которыхъ продолжается два года, наконецъ, въ четырехклассныхъ училищахъ курсъ первыхъ двухъ классовъ продолжается по два, а курсъ остальныхъ двухъ лѣтъ—по одному году

Само собою разумѣется, что не только многоклассное, но даже одноклассное училище, имѣя въ своемъ распоряженіи гораздо (вдвое) больше времени, вслѣдствіе этого, гораздо лучше можетъ исполнить свои задачи, чѣмъ обыкновенная начальная (сельская и даже городская) школа съ трехгодичнымъ курсомъ Понятно также, что въ курсѣ начальной ариѳметики одноклассного училища концентрація курса может быть лучше выдержана, чѣмъ въ начальной школѣ Въ первомъ отдѣленіи одноклассного училища, въ теченіе двухъ лѣтъ пребыванія въ немъ учащихся, можетъ быть пройдено то же, что проходится въ теченіе перваго года начальной школы, но познанія, пріобрѣтаемыя учащимися въ теченіе двухъ лѣтъ, будутъ отличаться большею степенью округленности, чѣмъ какою они отличаются при усвоеніи ихъ дѣтьми въ теченіе одного лишь года Можно безъ всякаго насилія надъ учащимъ и учащимися предположить, что въ теченіе первыхъ двухъ лѣтъ обученія въ одноклассномъ училищѣ съ шестилѣтнимъ курсомъ возможно пройти всѣ дѣйствія надъ числами перваго класса, т е числами трехзначными Во второмъ отдѣленіи одноклассного училища можетъ быть закончена ариѳметика цѣлыхъ чиселъ и заложено начало болѣе полнаго курса дробей и начальнаго курса практической геометріи Наконецъ, въ третьемъ отдѣленіи можетъ быть пройденъ, повторенъ, а также дополненъ, въ своихъ частностяхъ курсъ ариѳметики и геометріи какъ систематически, по учебнику, такъ и практически, въ примѣненіи къ задачамъ

Что касается концентраціи курса ариѳметики въ многоклассныхъ училищахъ въ теченіе первыхъ трехъ или четырехъ лѣтъ, то она очевидна въ нихъ обязательно долженъ быть пройденъ весь курсъ начальной школы съ трехгодичнымъ курсомъ

§ 3 Выше (въ § 3 этой же главы) въ курсъ перваго года обученія въ начальной трехгодичной школѣ отнесены Курсъ 1 го года

1) Нумерація и дѣйствія сложенія и вычитанія въ предѣлахъ чиселъ перваго класса, 2) дѣйствія умноженія и дѣленія въ предѣлахъ таблицы умноженія, 3) первоначальныя представленія о дробяхъ и 4) полная власть надъ числами первой сотни.

Дѣйствія сложенія и вычитанія въ примѣненіи къ простѣйшимъ случаямъ этихъ дѣйствій, а равно нумерація представляютъ собою существеннѣйшую часть курса перваго года Дѣйствія же умноженія и дѣленія отнесены въ этотъ курсъ преимущественно потому, что своевременныя упражненія въ этихъ дѣйствіяхъ вносятъ въ однообразный курсъ перваго года необходимое съ педагогической точки зрѣнія разнообразіе Кромѣ того, дѣтьми, благодаря этимъ упражненіямъ, будетъ усвоена таблица умноженія,—знаніе важное, съ практической точки зрѣнія, во-1-хъ, какъ знаніе, которое необходимо для дальнѣйшихъ ступеней курса, и во-2-хъ, какъ такое знаніе, безъ котораго крайне трудно обойтись въ практической жизни Что же касается элементарнаго представленія о дробяхъ, то выработка его въ теченіе перваго года обученія полезно главнымъ образомъ въ развивательномъ отношеніи для дальнѣйшаго курса выработка надлежащихъ представленій о дробяхъ также важна, какъ нумерація для ученія о производствѣ дѣйствій надъ цѣлыми числами Власть надъ *первою сотнею*—главнѣйшая цѣль курса перваго года, власть надъ *дѣйствіями* съ цѣлыми числами — конечная цѣль курса второго года, власть надъ *ученіями* начальной ариѳметики—цѣль курса третьяго года.

§ 4 Прежде чѣмъ перейти къ нѣкоторымъ указаніямъ относительно формы обученія, при слѣдованіи которой возможно выполненіе намѣченной выше программы, надобно остановиться на ученіи объ именованныхъ числахъ и на его мѣстѣ въ курсѣ начальной трехгодичной школы Вслѣдствіе кратковременности этого курса и по причинѣ оставленія школы многими учащимися до окончанія полнаго въ ней курса, *необходимо размѣстить ученія о такъ наз. именованныхъ числахъ такъ, чтобы въ курсъ каждаго года входили* Мѣсто ученій объ именов. числахъ и о тройныхъ правилахъ *доступныя на данной ступени части ея* Въ первый же годъ обученія необходимо своевременное и попутное ознакомленіе дѣтей съ нѣкоторыми мѣрами денегъ, длины и вѣса, хотя бы и не во всемъ ихъ объемѣ, и (въ предѣлахъ возможнаго) съ пріемами раздробленія нѣкоторыхъ именованныхъ чиселъ Эти знанія необходимо сообщить дѣтямъ опять-таки съ развивательной точки зрѣнія, такъ какъ жизнь и сама не преминетъ въ свое время сообщить эти знанія бывшему ученику начальной школы Кромѣ своего развивательнаго значенія, указанныя знанія въ курсѣ перваго года представляютъ то значеніе, что даютъ возможность полезнымъ образомъ расширить матеріалъ задачъ и упражненій какъ надъ цѣлыми, такъ и надъ дробными числами Въ курсъ второго года должно войти ознакомленіе съ остальными мѣрами, за исключеніемъ мѣръ поверхности, объемовъ и задачъ на время, но съ болѣе усиленною практикою надъ именованными числами Наконецъ, въ третій годъ изъ этого ученія должны быть пройдены не усвоенныя мѣры и задачи на вычисленія времени, поверхностей и объемовъ (послѣднее въ связи съ нѣкоторыми первоначальными ученіями геометріи), а также систематически проработавъ весь курсъ по учебнику

Что касается такъ называемыхъ тройныхъ правилъ, то нѣкоторыя задачи этого рода должны быть размѣщены въ курсѣ слѣдующимъ образомъ въ первый годъ дѣти должны освоиться съ простымъ тройнымъ правиломъ (эта часть курса послужитъ также и къ лучшему усвоенію таблицы умноженія), во второй годъ—съ правиломъ смѣшенія (перваго рода), въ третій—съ правиломъ процентовъ и, если то позволитъ время, съ правиломъ пропорціональнаго дѣленія и сложнымъ тройнымъ

Распредѣленіе курса дробей

§ 5 Нѣкоторыя затрудненія представляютъ также опредѣленіе границъ и распредѣленіе по годамъ курса дробей, умѣстнаго въ курсѣ начальной трехгодичной школы Не подлежитъ никакому сомнѣнію, что *болѣе или менѣе полное изложеніе теоріи дѣлителей въ начальной школѣ неумѣстно какъ по причинѣ трудностей этой статьи, такъ и по причинѣ недостатка времени, имѣющагося въ распоряженіи этой школы* Отсюда съ очевидностью вытекаетъ, что полное ученіе о дробяхъ тоже неумѣстно въ занимающемъ насъ краткомъ курсѣ ариѳметики Эта невозможность введенія теоріи дѣлителей въ курсъ сразу приводитъ къ тому, что въ немъ неумѣстны полныя ученія о сокращеніи и о приведеніи дробей къ общему *наименьшему* знаменателю, а вмѣстѣ съ симъ и о сложеніи и вычитаніи дробей, какъ эти дѣйствія проходятся въ курсѣ ариѳметики среднихъ учебныхъ заведеній

Дѣти въ начальной школѣ могутъ ознакомиться съ признаками дѣлимости чиселъ на 2, на 5 и на 10, въ предѣлахъ этого знанія они могутъ быть ознакомлены и съ сокращеніемъ дробей Далѣе дѣтей можно научить приведенію дробей къ одному знаменателю, равному (въ случаѣ крайности) хотя бы даже произведенію знаменателей данныхъ дробей, и въ предѣлахъ этого знанія они могутъ научиться производству сложенія и вычитанія дробей

Еще лучше ограничиваться вычисленіями надъ половинами, четвертями, восьмыми, шестнадцатыми, третями, шестыми, двѣнадцатыми, десятыми и сотыми, а не останавливаться надъ рѣдко употребительными въ жизни и наукѣ дробями седьмыми, семнадцатыми, двадцать первыми и т п

За-то, благодаря такой постановкѣ дѣла, дѣти съ успѣхомъ могутъ быть научены умноженію и дѣленію дроби на цѣлое число, а равно и отысканію частей даннаго цѣлаго и отысканію цѣлаго по данной части его (т е другими словами—умноженію и дѣленію на дробь) Но этотъ курсъ можетъ быть проведенъ только во второй и третій годы обученія—не ранѣе, и долженъ отличаться, конечно, возможно большею простотой

Что касается дробей десятичныхъ, то о нихъ *въ третій годъ обученія должно дать представленіе*, при чемъ можно стремиться лишь къ тому, чтобы учащіеся вынесли умѣніе прочесть десятичную дробь и понимали составъ десятичной дроби изъ десятичныхъ долей единицы Только въ школахъ, особенно благоустроенныхъ или съ высшимъ курсомъ, учитель можетъ задаваться сообщеніемъ большаго количества знаній изъ этой, хотя и не особенно трудной, но все-таки довольно обширной статьи

§ 6 Форма обученія ариѳметики при употребленіи „методы цѣлесообразныхъ задачъ" должна быть вопросо-отвѣтною (катехизическою) по преимуществу только при этой формѣ возможно участіе *всего* класса въ занятіяхъ Но изъ этого еще не слѣдуетъ, что надо *всегда* катехизировать увлеченіе исключительно этою формою ведетъ за собой и крайнюю искусственность уроковъ, и чрезмѣрную, притомъ невознаградимую, потерю времени Въ ариѳметикѣ есть цѣлая статья, при усвоеніи которой катехизація можетъ быть только контролирующею и повторительною такова статья о нумераціи вмѣстѣ со статьею о цифрахъ Никакіе вопросы, какъ бы разумно они поставлены ни были, не могутъ довести учащагося ни до начертанія цифръ, ни до нумераціи Такъ же мало катехизація примѣнима къ выработкѣ способовъ расположенія *письменныхъ* вычисленій и вообще къ выработкѣ условныхъ пріемовъ ариѳметическаго вычисленія,—способа обозначенія дробей, и т п Вообще у современныхъ педагоговъ катехизаціи иногда придается слишкомъ большое значеніе, и масса вопросовъ, предлагаемыхъ ими какъ бы съ цѣлью наведенія, на самомъ дѣлѣ только загромождаютъ урокъ совершенно безполезными подробностями и отнимаютъ у школы столь драгоцѣнное для нея время

Форма обученія

Ранѣе, чѣмъ приступать къ катехизаціи, учащій долженъ, пользуясь своимъ естественнымъ чутьемъ и не обращая вниманія ни на какіе педагогическіе рецепты, пойти по самому естественному, самому прямому пути уясненія учащемуся интересующаго его въ данную минуту ученія, *учащій не долженъ думать, что окольные пути мышленія дѣтямъ доступнѣе прямого* Онъ долженъ избѣгать только слишкомъ продолжительнаго изложенія (лекціонной формы) надо учениковъ *привлекать* къ работѣ по прямому пути и по путямъ косвеннымъ Отступленія отъ прямого пути дозволительны только тогда, когда они служатъ цѣлямъ развитія въ цѣляхъ рѣчи, но и въ этомъ случаѣ на отступленіе отъ прямого пути должно смотрѣть именно какъ на отступленіе, не возводя его въ правило и стараясь достигнуть развитія рѣчи иными способами, не увлекаясь разговоромъ, развивающимъ рѣчь учащаго и убивающимъ самодѣятельность дѣтей Обученіе, пока оно живо и разумно, не допускаетъ шаблонообразнаго примѣненія только одной формы обученія *Формы обученія*, поэтому, *должны чередоваться*, и слѣдованіе только одной изъ нихъ вредно отзывается не только на самомъ содержаніи урока, но также и на образовательномъ его значеніи

Въ связи съ формою обученія находится и вопросъ о томъ,—надо ли при обученіи ариѳметикѣ только развивать способность сужденія, или же также прибѣгать къ помощи воображенія, фантазіи живого представленія? Безъ участія воображенія никакое обученіе невозможно, и поэтому учащіеся должны во всѣхъ вопросахъ ариѳметическаго содержанія *пользоваться* этою драгоцѣнною способностью своею Ни одного изъ ученій ариѳметики невозможно развить предъ дѣтьми, не пользуясь работою ихъ воображенія Помогать этой работѣ должны б) наглядныя пособія, б) задачи и в) живое слово преподавателя

Порядокъ работы

§ 7. Порядокъ усвоенія любого ученія ариѳметики такимъ образомъ слѣдующій 1) задачи на наглядномъ пособіи, наиболѣе подходящимъ на данной ступени и работа органовъ чувствъ учениковъ надъ этими задачами, 2) задачи изъ обыденной жизни и работа *воображенія* учениковъ надъ этими задачами, 3) отвлеченныя задачи (если въ ней есть надобность!) и работа *сужденія* учениковъ надъ этими задачами, 4) логическій выводъ изъ всей работы (если таковой есть), со стороны учениковъ съ поправками учителя и выводъ учителя, наконецъ, 5) закрѣпленіе вывода въ представленіи и разумѣніи учениковъ и *словесныя* упражненія учениковъ въ этомъ направленіи

ГЛАВА III

Первый годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ.

1 я ступень счетъ

§ 1 Курсъ ариѳметики, который можетъ и долженъ быть пройденъ въ теченіе перваго же года обученія, распадается на четырнадцать ступеней

Прежде всего, учитель, на первомъ же урокѣ по предмету ариѳметики, долженъ уяснить себѣ—въ какой мѣрѣ и до какого предѣла ученики младшаго отдѣленія обладаютъ важнѣйшимъ для возможности обученія этому предмету умѣніемъ, а именно умѣніемъ *сознательно* считать Крестьянскія дѣти семи или восьмилѣтняго возраста, по большей части, не затрудняются произнесеніемъ нѣкотораго ряда числительныхъ именъ въ ихъ натуральномъ порядкѣ, но это не доказываетъ, что всѣ дѣти въ состояніи дѣйствительно сосчитать соотвѣтствующее ихъ словесному знанію количество *вещественныхъ* предметовъ Случается, что ребенокъ этого возраста отлично знаетъ слова, одинъ два, три, и т д, умѣетъ произносить ихъ въ надлежащемъ порядкѣ, и даже понимаетъ цѣль счета, но не въ *состояніи дѣйствительно сосчитать* соотвѣтствующее его словеснымъ знаніямъ число предметовъ, коль скоро это число превышаетъ нѣкоторый предѣлъ Этотъ предѣлъ часто значительно ниже предѣла извѣстныхъ ему числительныхъ именъ Вы даете ребенку болѣе или менѣе значительное количество кубиковъ и требуете отъ него, чтобы онъ *сосчиталъ сколько* ихъ Сначала дѣло идетъ довольно складно произнося то или другое числительное имя, ученикъ отдѣляетъ одинъ изъ сосчитываемыхъ предметовъ отъ остальныхъ, еще не сосчитанныхъ, но вскорѣ онъ начинаетъ отбирать либо больше, либо меньше чѣмъ слѣдуетъ предметовъ, сбивается, такъ сказать, въ темпѣ счета и, конечно, такимъ *образомъ дѣлаетъ* ошибку противъ самой цѣли, противъ сущности этого процесса Это значитъ, что онъ считать (сознательно считать) не умѣетъ Если же онъ ошибокъ не дѣлаетъ, то считать умѣетъ

Поэтому учащій долженъ убѣдиться не только въ знакомствѣ дѣтей со *словами*, сопровождающими счетъ, и натуральнымъ порядкомъ этихъ словъ, но также въ дѣйствительномъ *умѣніи сосчитать то или другое количество предметовъ* Если дѣти не умѣютъ сознательно и вѣрно считать до двадцати, то ихъ этому слѣдуетъ научить прежде всего Съ дѣтьми, не умѣющими считать до двадцати, никакія занятія по ариѳметикѣ не могутъ быть оправданы никакими соображеніями Не будучи тверды въ счетѣ, дѣти бываютъ невнимательны на урокахъ ариѳметики, такъ какъ имена числительныя ничего не говорятъ ихъ уму и воображенію и такъ какъ у нихъ нѣтъ привычки связывать называемое ими и учителемъ число съ неразрывно присущимъ послѣднему счетомъ

§ 2 Изъ числительныхъ именъ указаннаго предѣла (отъ одного до двадцати включительно) только первыя десять суть слова первообразныя (не производныя) Что же касается числительныхъ именъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, то ихъ происхожденіе въ русскомъ языкѣ подчиняется единообразному закону, но однако слова эти „одиннадцать", „двѣнадцать" и т д до „девятнадцати" (включительно) суть слова все-таки болѣе или менѣе новыя Въ русскомъ да и въ другихъ славянскихъ языкахъ въ составъ именъ числительныхъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно входитъ предлогъ „на". При усвоеніи этихъ числительныхъ именъ учащійся на первыхъ порахъ вовсе не обязанъ разбивать каждое изъ соотвѣтствующихъ даннымъ словами чиселъ на одинъ *десятокъ* и столько-то единицъ это знаніе можетъ явиться результатомъ дальнѣйшихъ занятій его Но необходимо, чтобы учащійся вѣрно *примѣнялъ* слова одиннадцать, двѣнадцать и т. д. до слова девятнадцать включительно

Упражненія въ счетѣ

§ 3 Чисто словесное знаніе числительныхъ именъ, конечно, *не достаточно* для дальнѣйшаго прохожденія курса ариѳметики, но оно уже сильно облегчаетъ учителю переходъ отъ счета исключительно словеснаго, отъ болѣе или менѣе безсодержательнаго произнесенія дѣтьми числительныхъ именъ въ извѣстномъ порядкѣ къ счету вполнѣ сознательному Въ раннемъ дѣтствѣ человѣкъ научается произносить слова, не понимая первоначально ихъ значенія, и только впослѣдствіи онъ постепенно научается связывать съ каждымъ словомъ болѣе или менѣе ясное представленіе То же справедливо и относительно числительныхъ именъ —Поэтому учащій, убѣдившись въ томъ, что дѣти обладаютъ умѣніемъ „механически" считать, этимъ долженъ непремѣнно воспользоваться для того, чтобы пріучить ихъ къ связыванію извѣстныхъ имъ словъ съ представленіями сознательнаго счета Если же дѣти не знакомы даже и съ механическимъ счетомъ, то ихъ надо научить уже прямо счету сознательному, сначала въ указанныхъ выше предѣлахъ Въ обоихъ случаяхъ *при обученіи сознательному счету обязательно должно пользоваться наглядными пособіями* кубиками, спичками и болѣе или менѣе простыми значками, изображаемыми учителемъ на классной доскѣ, и въ случаѣ надобности—дѣтьми въ тетрадяхъ или на грифельныхъ доскахъ

Порядокъ упражненій въ устномъ счетѣ можетъ быть слѣдующій упражненія въ хоровомъ счетѣ предметовъ отбираемыхъ учителемъ, или въ одиночномъ (поочередно каждымъ изъ учащихся, безъ участія остальныхъ), и упражненія въ такъ называемомъ обратномъ счетѣ Относительно обратнаго счета должно замѣтить, что это—прежде всего вовсе не счетъ и что онъ сводится лишь къ называнію числительныхъ именъ, начиная съ даннаго изъ нихъ, въ порядкѣ обратномъ натуральному Это упражненіе и не принадлежитъ къ числу необходимѣйшихъ на этой ступени Это—скорѣе упражненіе въ *вычитаніи* одной единицы, не относящееся до этой ступени

Въ качествѣ самостоятельныхъ упражненій на этой ступени обученія можетъ служить только изображеніе числовыхъ фигуръ отъ одного до десяти включительно, въ порядкѣ прямого и т наз обратнаго счета Рекомендовать въ качествѣ самостоятельнаго упражненія изображеніе дѣтьми числовыхъ фигуръ съ большимъ количествомъ значковъ нельзя, такъ какъ эти упражненія врядъ ли нужны и притомъ отличаются чрезвычайною громоздкостью Скорѣе такое упражненіе, если оно вообще умѣстно, умѣстно только при непосредственномъ участіи учащаго Во всякомъ случаѣ цѣль указанныхъ выше упражненій исключительно твердое усвоеніе дѣтьми самаго *процесса* счета

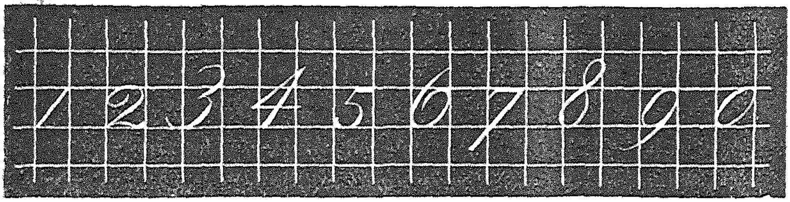
Что касается упражненій дѣтей въ счетѣ на задачахъ съ *условіями*, то ихъ рекомендовать нельзя, такъ какъ это—упражненія въ сложеніи чиселъ, а не въ счетѣ предметовъ Сложеніе же есть ариѳметическое дѣйствіе, съ которымъ дѣти ознакомятся только впослѣдствіи, и притомъ въ свое время Учитель долженъ упражнять дѣтей на занимающей насъ (1-й) ступени, повторяю, только въ счетѣ, стараясь по возможности разнообразить эти упражненія Должно замѣтить, что вводить повѣствовательный элементъ въ эти упражненія не слѣдуетъ еще и потому, что практическая жизнь предлагаетъ задачи счета вовсе не въ повѣствовательной формѣ *Естественность и простота—вотъ тѣ требованія, которыхъ не имѣетъ права забывать учитель на всѣхъ ступеняхъ обученія, а поэтому и на первой ступени, т е при упражненіяхъ дѣтей въ счетѣ.*

Наглядными пособіями могутъ служить всякіе предметы, кубики ариѳметическаго ящика, шарики шведскихъ счетовъ Пользоваться ими надо прибѣгая къ помощи не только зрѣнія, но и осязанія

§ 4 Когда устный счетъ дѣтьми болѣе или менѣе основательно усвоенъ, учитель можетъ приступить къ ознакомленію ихъ съ такъ называемыми арабскими цифрами Это—вторая ступень обученія. Многословныхъ разговоровъ о цѣли обозначенія чиселъ цифрами, конечно, вести не слѣдуетъ дѣти очень легко усвоиваютъ себѣ значеніе записи и пользу установленія условнаго знака для обозначенія числа Опасеніе, что ребенокъ станетъ смѣшивать число съ цифрою, тоже не основательно, если онъ ранѣе упражнялся въ *дѣйствительномъ счетѣ* предметовъ Порядокъ ознакомленія съ цифрами можетъ быть избранъ слѣдующій сначала могутъ быть дѣтямъ показаны три цифры 1, 2 и 3, и объяснено ихъ условное значеніе, потомъ еще двѣ цифры 4 и 5, и такъ далѣе до цифры 9 включительно При этомъ учитель долженъ упражнять классъ прежде всего въ хоровомъ и одиночномъ *называніи* цифръ, изображаемыхъ учителемъ на доскѣ Когда такимъ образомъ дѣти научились отличать одну отъ другой первыя три цифры, изображаемыя учителемъ на доскѣ по порядку и въ разбивку, они могутъ перейти уже и къ изображенію цифръ подъ диктовку и подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учителя, при чемъ цифру 1 можно изображать въ два такта (сначала тонкую черту снизу вверхъ, а потомъ толстую—сверху внизъ), цифру 2—въ два, а цифру 3—въ два или три такта (третій тактъ приходится на точку, которою можно заканчивать тонкій поворотъ цифры вверхъ) Убѣдившись въ томъ, что каждый изъ учащихся въ отдѣльности умѣетъ изображать каждую изъ этихъ трехъ цифръ, учитель можетъ задать *младшему отдѣленію* самостоятельное упражненіе (Иной порядокъ ознакомленія учащихся съ цифрами, обусловливаемый соображеніями чистописанія, не заслуживаетъ сочувствія) Ознакомленіе учащихся съ остальными цифрами и соотвѣтствующія самостоятельныя упражненія должны идти въ томъ же самомъ порядкѣ, при чемъ дѣтей надо пріучить къ изображенію цифры 4 въ три пріема, цифръ 5 и 7—въ три, цифръ 9, 6 и 8—въ два пріема

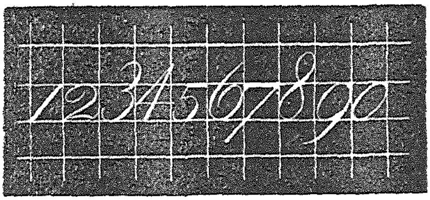
2-я ступень цифры

Сначала надо научить дѣтей изображать цифры, оставляя между ними промежутокъ въ одну клѣтку, и только впослѣдствіи можно показать возможность изображать ихъ рядомъ Форма этихъ цифръ проста, удобна и въ высшей степени характерна. Трудности представляются при изображеніи цифръ 3, 4, 6, 8 и 9,—цифръ, занимающихъ полторы клѣтки изгибы въ утолщаемыхъ частяхъ цифры 2 могутъ быть приближаемы къ прямымъ линіямъ



3-я ступень прибавленіе единицы и вычитаніе

§ 5 Ознакомленіе съ обозначеніемъ десятка должно быть отнесено къ числу затруднительнѣйшихъ статей курса удобнѣе перейти отъ цифръ прямо къ простѣйшему случаю сложенія чиселъ, представляемому задачами, требующими несомнѣннаго даже и для ребенка присоединенія, прибавленія къ данному числу, не большему восьми, одной единицы Это будетъ третья ступень Объ „увеличеніи“ даннаго числа на одну единицу не можетъ быть рѣчи въ такихъ задачахъ, ихъ словесное содержаніе въ общемъ видѣ не должна выходить за рамки слѣдующей задачи „дано 5 предметовъ, присоединенъ еще одинъ, сколько получилось?“ Было бы ошибочно вмѣстѣ съ нѣкоторыми задачниками считать задачу этого рода задачею на счетъ Она, конечно, можетъ быть рѣшена помощью счета и дѣти будутъ и имѣютъ право ихъ рѣшать такимъ именно образомъ, но въ очень скоромъ времени они сами оставляютъ этотъ пріемъ и прибѣгаютъ къ присчитыванію Пусть предложена задача „Вотъ лежать три спички, вотъ еще одна сколько здѣсь всего спичекъ?“ Только очень неразвитой ребенокъ семи-восьми лѣтъ начнетъ счетъ съ начала, съ единицы, большинство же дѣтей этого возраста прямо отвѣтитъ „четыре“, т е предпочтетъ *присчитываніе* и такимъ образомъ, самъ того не сознавая, произведетъ сложеніе, опустивъ процессъ счета, результатомъ котораго тоже можетъ явиться данное число Есть глубокая разница между требованіемъ „сосчитать—сколько здѣсь всего предметовъ“ и требованіемъ, которое выражается задачею, подобною вышеприведенной, такъ какъ въ послѣдней даны уже *извѣстныя* числа *Лучше всего задачи этого типа предлагать сначала на наглядныхъ пособіяхъ* Задачи надо брать самыя простыя, въ которыя не входили бы выраженія „больше на одинъ“, „увеличить на одинъ“ и т п это—выраженія условныя



На этой же, третьей, ступени курса вполнѣ умѣстно ознакомленіе дѣтей со знакомъ сложенія, причемъ учитель долженъ имъ выяснить, что если дано число напр. 4, и еще одна единица и требуется узнать—*сколько у насъ всего единицъ*, то это *записываютъ* такъ 4 + 1, а написанное можно *прочесть* такъ „четыре да одинъ“. Въ то же время умѣстно ознакомить дѣтей со знакомъ равенства, который отдѣляетъ запись отъ числа, получаемаго въ концѣ концовъ. Имъ должно выяснить смыслъ записей 4 + 1 = 5, 5 + 1 = 6 и т. подобныхъ, а равно должно и научить ихъ читать подобныя записи такъ: „четыре да *еще* одинъ будетъ (или же все равно что) пять“. Когда дѣти себѣ усвоили эти два знака, имъ можно предложить изъ самостоятельныхъ упражненія въ сложеніи числа съ единицей.

Должно замѣтить, что на этой ступени было бы преждевременно выясненіе учащимся того свойства суммы, что

$$5 + 1 = 1 + 5,\ 3 + 1 = 1 + 3, \text{ и т. д.,}$$

такъ какъ прибавленіе нѣсколькихъ единицъ, хотя бы даже и къ единицѣ, для дѣтей на этой ступени обученія представляетъ уже нѣкоторыя, несоотвѣтствующія ихъ развитію, трудности. Поэтому умѣстно, для внесенія разнообразія въ самостоятельныя занятія дѣтей, ознакомить послѣднихъ съ простѣйшимъ случаемъ вычитанія, а именно съ вычитаніемъ одной единицы изъ однозначнаго числа. При этомъ *задачи должны быть сначала задаваемы на наглядныхъ пособіяхъ*, можно ввести также и задачи повѣствовательныя съ двумя условіями, но должно при этомъ помнить, что на этой ступени умѣстны только задачи простѣйшаго типа: „было столько-то единицъ, отнята, отдѣлена, удалена одна единица, сколько осталось?“ Тутъ же умѣстно ознакомленіе со знакомъ вычитанія и со способомъ чтенія записи 4 — 1 = 3. Лучше всего читать ее такъ: „четыре безъ одного будетъ три“ или же „четыре безъ одного все равно, что три“. Матеріалъ для самостоятельныхъ работъ долженъ быть по возможности простъ.

Слова „плюсъ“ и „минусъ“, взятыя изъ латинскаго языка, на этихъ ступеняхъ, да и вообще раньше третьяго года, *не умѣстны*.

Наглядными пособіями могутъ служить кубики, всякіе предметы, косточки шведскихъ счетовъ; пользоваться ими надо прибѣгая не только къ зрѣнію, но и къ осязанію.

§ 6. Ознакомивъ дѣтей съ указанными выше *простѣйшими случаями* сложенія и вычитанія, учащій можетъ перейти къ обозначенію чиселъ большихъ девяти, помощью цифръ (это—четвертая ступень). *Цифра нуль, а главное—ея роль при обозначеніи чиселъ, должна на первыхъ порахъ совершенно отсутствовать.* Прежде всего дѣтямъ должно быть выяснено, что для обозначенія различныхъ чиселъ придумывать все новые и новые знаки, все новые цифры, было бы чрезвычайно неудобно, такъ какъ цифръ въ такомъ случаѣ скоро набралось бы слишкомъ много. Оставляя въ сторонѣ до поры до времени цифру нуль, учитель долженъ привести дѣтей къ сознанію, что они не умѣютъ однимъ знакомъ обозначить десять единицъ. Когда они вполнѣ сознаютъ свое неумѣніе, онъ, обративъ и часто обращая ихъ вниманіе на то, что число десять

4-ая ступень: числа 2-го десятка.

онъ умышленно пропускаетъ, долженъ научить ихъ помощью цифръ обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, неутомимо выясняя на примѣрахъ и упражненіяхъ, правила постановки единицы, т. е. цифры десятковъ, ранѣе цифры единицъ и напоминая, что десяти дѣти обозначать еще не умѣютъ. Эта ступень курса преодолѣвается дѣтьми не особенно быстро, но при нѣкоторой настойчивости вскорѣ благіе результаты непремѣнно будутъ достигнуты.

При этомъ придется *предварительно* разработать изустно, на счетахъ, сложенія: *десять да одинъ, десять да два*, и т. д. до суммы *десять да девять*, затѣмъ учащій долженъ выработать въ умѣ дѣтей представленіе о десяткѣ и научить ихъ сложеніямъ: десятокъ шишекъ да одна шишка, десятокъ яблокъ да два яблока, десятокъ кубиковъ да три кубика и т. д. до девятнадцати включительно. Затѣмъ надо научить разложенію каждаго изъ чиселъ этой области на десятокъ и нѣсколько единицъ. Выработка *понятія* и *представленія* о десяткѣ принадлежитъ къ числу задачъ довольно трудныхъ: дѣло въ томъ, что десять единицъ и десятокъ—одно и то же съ точки зрѣнія величины, но не съ точки зрѣнія логической.

Десятокъ.

§ 7. Для того, чтобы выработать это представленіе полезно взять десять кубиковъ въ безпорядкѣ, а потомъ тѣ же десять кубиковъ сложить въ рядъ или въ столбецъ, десять спичекъ взять отдѣльно и тѣ же десять связать въ пучекъ, десять кружковъ нарисовать въ безпорядкѣ, а другіе десять кружковъ нарисовать въ видѣ карточной фигуры. При этихъ упражненіяхъ слѣдуетъ добиваться (и возможно добиться) того, чтобы дѣти уяснили себѣ сами ту разницу между десяткомъ и десятью единицами, на которую легко указать, но которую трудно имъ выяснить себѣ. Для этой цѣли, хотя бы дѣти не умѣли считать далѣе двадцати, полезно взять нѣсколько десятковъ (пучковъ) „спичекъ“, и показать имъ, что они знаютъ сколько здѣсь *десятковъ* спичекъ, хотя и не могутъ сразу сказать, сколько отдѣльныхъ спичекъ во всѣхъ пучкахъ.

Если все это сдѣлано и знаніе этого счета усвоено дѣтьми какъ слѣдуетъ, то, съ помощью наглядныхъ пособій и пользуясь словеснымъ составомъ числительныхъ именъ занимающей насъ области чиселъ, возможно въ какихъ-нибудь два, много три урока научить дѣтей устному разложенію чиселъ этой области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ. Когда это достигнуто, можно перейти къ обозначенію ихъ помощью цифръ и къ выясненію значенія мѣста, занимаемаго единицею въ этомъ случаѣ. Наконецъ, *когда дѣти научились безошибочно обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, тогда можно перейти къ цифрѣ нуль, къ обозначенію—сначала одного десятка или десяти единицъ, а потомъ и двухъ десятковъ или двадцати, съ помощью этой крайне важной цифры*. Только такимъ образомъ у учащихся развивается привычка разлагать число сказанной области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ и смотрѣть на число большее девяти съ точки зрѣнія десятичной системы,—привычка, въ высшей степени важная, какъ въ развивательномъ отношенiи такъ и для будущихъ занятiй дѣтей ариѳметикою

Упражненiя въ разложенiи чиселъ занимающей насъ области на сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, и въ сложенiи двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, могутъ быть *только изустными*, но никакъ не письменными на этой (4-ой) ступени не вполнѣ умѣстны письменныя упражненiя вида

$$14 = 10 + 4,\ 15 = 10 + 5, \text{ и т д}$$

и вида $10 + 4 = 14,\ 10 + 5 = 15$, и т д,

за-то тѣмъ умѣстнѣе упражненiя вида

$$10 + 1 = 11\ \ 11 + 1 = 12, \text{ и т д}$$

и вида $11 - 1 = 10,\ 12 - 1 = 11$, и т д

На эти послѣднiя упражненiя впрочемъ, ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ смотрѣть какъ на упражненiя въ *письменномъ производствѣ* дѣйствiй сложенiя и вычитанiя, а только какъ на работы, преслѣдующiя усвоенiе *нумерацiи* чиселъ первыхъ двухъ десятковъ Выясненiе способа письменнаго обозначенiя „двадцать" помощью цифръ незатруднительно, если предыдущее усвоено

Очевидно, что никакихъ *правилъ* вовсе не нужно для сложенiя одного десятка съ единицею и для вычитанiя единицы изъ даннаго числа для этого достаточно, если учащiйся умѣетъ считать и усвоилъ себѣ сложенiе и вычитанiе, когда второе слагаемое и вычитаемое равно единицѣ,—дѣйствiя, сводящiяся къ *называнiю* числа слѣдующаго за даннымъ или ему предшествующаго.

Если дѣти для прибавленiя единицы прибѣгаютъ къ *счету* единицъ перваго слагаемаго, то это значитъ, что ими эта ступень не усвоена Наглядныя пособiя—тѣ же, что на предшествующихъ ступеняхъ

§ 8 По усвоенiи дѣтьми вышенамѣченныхъ умѣнiй можно приступить къ уясненiю имъ сложенiя всякихъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ не больше десяти (пятая ступень) До сихъ поръ дѣти прибавляли къ числу одну единицу, на этой (пятой) ступени обученiя ихъ надо прiучить къ мысли, что есть случаи, когда требуется прибавить и больше одной единицы Для этого могутъ быть предложены соотвѣтствующiя задачи сначала на наглядныхъ пособiяхъ, и потомъ—задачи съ условiями, которыя не должны, впрочемъ, выходить за предѣлы простѣйшаго случая сложенiя „дано 5 единицъ, прибавлено, присоединено еще 3 единицы, сколько послѣ этого получилось *всего* единицъ?"

5-ая ступень сумма не больше десяти

Когда дѣти поймутъ самый смыслъ требованiя подобныхъ задачъ и научатся на наглядныхъ пособiяхъ (лучше всего на пальцахъ) *присчитывать* единицы второго слагаемаго къ первому, они въ состоянiи будутъ также понять пользу усвоенiя на-память результатовъ, къ упражненiю въ которомъ учитель и можетъ въ такомъ случаѣ приступить на своихъ урокахъ съ младшимъ отдѣленiемъ Но, во всякомъ случаѣ, прежде чѣмъ перейти къ этимъ упражненiямъ, должно убѣдиться въ томъ, всѣ ли учащiеся вполнѣ поняли, какой смыслъ имѣютъ вопросы „сколько будетъ три да еще два“, „четыре да еще два“, „пять да два“, „три да три“, „четыре да три“, и т д Только въ случаѣ, если они вполнѣ ясно понимаютъ смыслъ подобныхъ вопросовъ, можно приступить къ усвоенію хорошо наизусть таблицы сложенія чиселъ, сумма которыхъ не болѣе девяти Что же касается задачъ на сложеніе такихъ чиселъ, сумма которыхъ равна десяти, то онѣ должны быть выдѣлены изъ задачъ для того, чтобы дѣти могли обратить *особенное* вниманіе на новую единицу счета, на десятокъ, играющій въ нумераціи и въ производствѣ дѣйствіи надъ двузначными числами такую роль, какой остальныя числа перваго десятка не играютъ Эти упражненія могутъ отличаться и отвлеченнымъ характеромъ На этой-же, пятой, ступени учитель долженъ довести учащихся до яснаго пониманія того закона, по которому сумма двухъ слагаемыхъ не зависитъ отъ порядка ихъ, для чего служатъ 1) наглядныя пособія, 2) осязательныя пособія и 3) задачи съ простыми условіями *)

Учащійся можетъ нарисовать числовую фигуру, а рядомъ— другую, потомъ записать сколько значковъ одного рода (крестиковъ или кружечковъ) нарисовано на каждой изъ фигуръ, сколько въ этой фигурѣ отдѣльныхъ значковъ въ каждой группѣ и сколько въ ней всѣхъ значковъ между цифрами, обозначающими число значковъ каждой группы и число *всѣхъ* знаковъ, онъ по самому смыслу задачи долженъ поставить въ надлежащихъ мѣстахъ знаки сложенія и равенства Самостоятельныя работы должны служить для укрѣпленія учениковъ въ твердомъ знаніи занимающей насъ части таблицы сложенія,—въ знаніи, которое они должны пріобрѣсти подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя

...ая ступень вычитаніе ...днозначнаго ...зъ однозначнаго

§ 9 Далѣе должна быть дѣтьми понята необходимость вычитанія одного однозначнаго числа отъ другого (шестая ступень) Для этой цѣли могутъ служить такія упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, цѣль которыхъ только выясненіе *необходимости* дѣйствія вычитанія при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ Условія задачъ и упражненій этого рода не должны выходить за предѣлы простѣйшаго требованія „отдѣлить нѣсколько единицъ отъ даннаго числа ихъ“ Распространеніе понятія о вычитаніи одной единицы изъ даннаго числа ихъ на случаи, когда требуется изъ числа вычесть болѣе одной единицы, для учащихся не представляетъ *особенныхъ трудностей Однако же было бы преждевременно* на этой, шестой, ступени обученія *напирать* на тонкую связь вычитанія со сложеніемъ это можетъ быть сдѣлано впослѣдствіи (лучше во второй годъ обученія), но этимъ не исключается польза упражненій, въ которыхъ эта связь проявляется довольно замѣтнымъ образомъ Преждевременнымъ точное формулированіе сказанной связи вычитанія со сложеніемъ на этой ступени надо признать потому, что семи или восьмилѣтнія дѣти съ большимъ тру-

*) Въ этихъ задачахъ дѣти имѣютъ случаи ознакомиться съ выраженіями „столько же“, „по сколько“, „поровну“, и т п

домъ уясняютъ себѣ, что задачи типа „сколько надо *прибавить* единицъ къ 5, чтобы получить 7“ и „къ какому числу надо *прибавить* 2, чтобы получить 9“ ведутъ къ *вычитанію* одного числа изъ другого, а не къ сложенію Но эти *изустныя* упражненія все-таки полезны такъ какъ вносятъ большое разнообразіе въ занятія

Усвоеніе дѣтьми таблицы вычитанія на-память должно вестись методически-послѣдовательно, начиная съ случая вычитанія, когда вычитаемое равно единицѣ, и переходя постепенно къ случаямъ вычитанія, когда вычитаемое равно двумъ, тремъ и т д, уменьшаемое на этой, шестой, ступени, конечно, не должно быть болѣе десяти Но приступать къ усвоенію на-память этой части таблицы вычитанія слѣдуетъ только въ томъ случаѣ, когда дѣти вполнѣ понимаютъ не только *цѣль* дѣйствія вычитанія, но также необходимость и пользу *запоминанія* результатовъ вычитанія однихъ чиселъ изъ другихъ Въ противномъ случаѣ заучиваніе, хотя бы даже и хоровое, этой части таблицы вычитанія будетъ въ нѣкоторомъ смыслѣ насиліемъ надъ дѣтскою природою

Пользоваться наглядными пособіями на этой ступени надо такъ, чтобы дѣти видѣли—*какъ отдѣляютъ* и сами отдѣляли бы вычитаемое отъ уменьшаемаго (см § 3 гл I) Дѣйствіе вычитанія и знакъ „минусъ“ вслухъ хорошо обозначать словомъ „долой“

§ 10 Прежде чѣмъ перейти къ сложенію чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, должно пріучить дѣтей къ сложенію одного десятка съ нѣсколькими единицами, не составляющими десятка, и къ разложенію чиселъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно на сумму одного десятка съ нѣкоторымъ однозначнымъ числомъ единицъ Это—*необходимая* седьмая ступень обученія На слѣдующей, восьмой, ступени можно приступить къ сложенію двухъ однозначныхъ чиселъ, дающему въ суммѣ болѣе десяти, а также къ сложенію двузначнаго числа, меньшаго двадцати, съ однозначнымъ, дающему въ суммѣ также менѣе двадцати Прежде всего должно убѣдить дѣтей, что сложеніе такихъ чиселъ иногда требуется съ ними это должно быть проработано сначала на наглядныхъ пособіяхъ, потомъ на самыхъ простыхъ задачахъ этого рода Когда они убѣдились въ возможности такихъ задачъ и поняли смыслъ ихъ, они поймутъ во 1-ыхъ, самую сущность процесса *сложенія* въ этомъ случаѣ, состоящую въ томъ, что сумма однихъ слагаемыхъ, напр, 6 и 7, сводится къ суммѣ другихъ 10 и 3, и во 2-ыхъ, необходимость запомнить *наизустъ* суммы происходящія отъ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ

7-ая и 8-ая ступени сумма и уменьш болѣе десяти.

Сущность процесса сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, суммы которыхъ больше десяти, какъ выше замѣчено, состоитъ въ томъ, что каждая такая сумма двухъ слагаемыхъ замѣняется суммою другихъ двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно равно десяти Такъ, напр, если дано сложить 7 и 8, то, отдѣливъ отъ 8-ми единицъ три и прибавивъ къ 7-ми эти три единицы, мы получимъ 10, а присоединивъ къ этой суммѣ остальныя пять единицъ числа 8, мы получимъ 10 + 5 или 15 Дѣти должны вполнѣ овладѣть этимъ прiемомъ, прежде чѣмъ перейти къ усвоенiю на-память подъ руководствомъ учителя, остальной, имъ еще не извѣстной, части таблицы сложенiя

Наглядными пособiями должны служить преимущественно шведскiе счеты или солома Здѣсь опять-таки важно, чтобы дѣти умѣли произвести осязательно, на самомъ дѣлѣ дѣйствiе, а не только безучастно сказать результатъ

Необходимо замѣтить, что упражненiя въ такомъ сложенiи числа, бо́льшаго десяти и меньшаго двадцати, съ однозначнымъ числомъ, которое (сложенiе) даетъ въ суммѣ число меньшее двадцати, не преждевременны на этой, восьмой, ступени обученiя Въ такой же мѣрѣ нельзя считать преждевременными изустныя упражненiя въ вычитанiи изъ двузначнаго числа, меньшаго двадцати, всякаго однозначнаго числа Откладывать *сознательное* изученiе таблицы сложенiя и вычитанiя до ознакомленiя дѣтей съ *правилами* письменнаго производства этихъ дѣйствiй невозможно, тѣмъ болѣе, что сознательное изученiе этихъ таблицъ безъ упражненiй, о которыхъ рѣчь, тоже не возможно Во-вторыхъ, ненормальнымъ должно считать такую постановку дѣла, при которой учащiйся не въ состоянiи, не пользуясь „правилами", выполнить наизусть дѣйствiе вычитанiя въ случаѣ 12—5, или, что еще хуже того, дѣйствiй сложенiя и вычитанiя въ случаяхъ $12 + 3$ *или* $19—7$ *и т д*

-ая ступень понятiя объ множенiи и о части

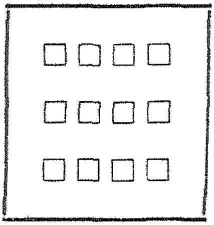
§ 11 На слѣдующей ступени обученiя было бы вполнѣ естественно *перейти къ нумерацiи* чиселъ большихъ двадцати и къ производству дѣйствiй сложенiя и вычитанiя надъ многозначными числами Но такимъ образомъ въ обученiе ариѳметикѣ было бы внесено чрезвычайное и весьма вредное въ педагогическомъ отношенiи однообразiе Во избѣжанiе этого, на девятой ступени курса надо ввести какiе-либо новые элементы и таковыми являются понятiе объ умноженiи, а также представленiя о простѣйшихъ дробяхъ Но, прежде чѣмъ перейти къ умноженiю, дѣти должны усвоить себѣ возможность и смыслъ сложенiя нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ, ибо умноженiе является на первыхъ порахъ только частнымъ случаемъ сложенiя нѣсколькихъ чиселъ,—частнымъ случаемъ, въ которомъ мы, пользуясь *таблицею* умноженiя, можемъ находить результаты сложенiя равныхъ слагаемыхъ, на самомъ дѣлѣ вовсе не производя этого послѣдняго дѣйствiя Итакъ въ виду чисто педагогическихъ соображенiй, на этой ступени обученiя умѣстно введенiе въ курсъ прежде всего сложенiя нѣсколькихъ слагаемыхъ и умноженiя такихъ чиселъ, произведенiе которыхъ не болѣе 20-ти столь же умѣстно представленiе о простѣйшихъ дробяхъ половинѣ, четверти и трехъ четвертяхъ независимое отъ дѣленiя *чиселъ*

Займемся прежде всего вопросами сложенiя нѣсколькихъ вообще неравныхъ, слагаемыхъ Необходимость этого дѣйствiя дѣти могутъ уяснить себѣ при помощи наглядныхъ пособiй и приличныхъ задачъ съ условiями Прежде всего они должны себѣ уяснить смыслъ вопросовъ, требующихъ *сложенiя нѣсколькихъ слагаемыхъ*, когда это достигнуто, они должны уяснить себѣ, что для производства дѣйствія можно первое слагаемое сложить со вторымъ, а полученную сумму—съ третьимъ, и т д Сюда относится выясненіе употребленія знака сложенія въ случаѣ сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ

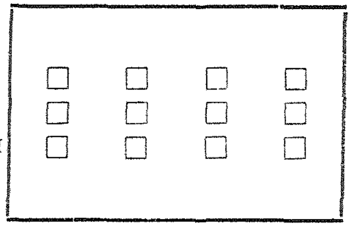
Что касается умноженія, то вначалѣ это дѣйствіе должно быть для учащихся и для учащаго только *частнымъ* случаемъ сложенія а запись умноженія — только болѣе *сокращенною* записью сложенія Выше подчеркнуты слова „частнымъ" и „сокращенною" для того, чтобы этимъ указать, что не самое дѣйствіе умноженія есть сокращенное (какъ это нѣкоторые утверждаютъ) сложеніе, а что только *запись* $5 + 5 + 5 + 5$ замѣняется болѣе короткою записью 5×4, и что для возникновенія понятія объ умноженіи недостаточно одного лишь равенства слагаемыхъ для этого необходимо еще и существованіе *таблицы умноженія* Засимъ должно пріучить дѣтей къ записыванію слагаемаго ранѣе всего, потомъ знака умноженія, и наконецъ—числа равныхъ слагаемыхъ Запись $5 \times 4 =$ ученикамъ должна быть сначала читаема „пять да пять да еще пять да еще пять, будетъ", затѣмъ такъ „пять да еще пять, да еще, да еще, будетъ", далѣе такъ „*четыре раза* пять будетъ" и, наконецъ „четырежды пять будетъ", а впослѣдствіи—такъ „пять, умноженное на четыре, будетъ" Должно строго соблюдать, чтобы дѣти пріучились число записанное *ранѣе* знака умноженія, всегда принимать *за множимое*, а число, обозначенное *послѣ* знака — *за множителя*, но отнюдь не обратно Поэтому записи 2×3, 2×4 2×5 и т д должно читать не „дважды три", „дважды четыре", „дважды пять", а непремѣнно такъ „*трижды два*", или „*четырежды два*", „два, помноженное на три", „два, помноженное на четыре" и т д

Съ рѣченіями „дважды", „трижды", „четырежды", „пятью", „шестью", „семью" и т д дѣти должны быть ознакомлены не сразу, причемъ они должны значеніе этихъ рѣченій усвоить себѣ вполнѣ точно Ихъ должно пріучить обозначать помощью цифръ рѣченія „пятью-два", „пятью-три" и т п слѣдующимъ образомъ 2×5, 3×5 и т д Должно замѣтить, что, ранѣе чѣмъ приступить къ усвоенію на-память таблицы умноженія чиселъ, произведенія которыхъ менѣе двадцати, учащіеся должны убѣдиться въ пользѣ и необходимости знанія этой таблицы при разрѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ Въ условія задачъ и упражненій, прорабатываемыхъ учениками при непосредственной помощи учителя, на этой ступени не должно входить „увеличеніе" числа въ нѣсколько разъ

Наглядныя пособія (счеты и кубики) должны служить только для пріученія дѣтей къ употребленію словъ „два раза", „дважды", „три раза", „трижды", и т д, а не для сосчитыванія результата кромѣ того съ помощью наглядныхъ пособій должно выяснить что $4 \times 3 = 3 \times 4$,— при томъ слѣдующимъ образомъ положить въ горизонтальный рядъ — четыре кубика, подъ ними на большемъ разстояніи, чѣмъ на какомъ находятся кубики одинъ отъ другого, еще четыре, а подъ этими—еще четыре, послѣ этого сдвинуть первые три кубика этихъ рядовъ, слѣдующіе три и т. д., а потомъ раздвинуть. Стало-быть сначала будетъ



а потомъ
получится



Первая изъ фигуръ есть фигура, дающая наглядное представленіе о формулѣ 3×4, вторая же—о формулѣ 3×4.

бозначеніе четверти, половины и трехъ четвертей

Прежде чѣмъ перейти къ нумераціи чиселъ, большихъ двадцати, которая необходима для дальнѣйшаго усвоенія дѣтьми дѣйствія сложенія чиселъ и для усвоенія ими таблицы умноженія во всемъ ея объемѣ, полезно ознакомить дѣтей съ дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Это ознакомленіе должно носить чисто наглядный, если возможно, даже осязательный характеръ. Упражненія должны идти въ слѣдующемъ порядкѣ. А) Изустно: вотъ листъ бумаги, разрываю его пополамъ, эта часть—*половина*. А эта? Полъ-листа да полъ-листа что составитъ? (Одинъ листъ).—Пока дѣти еще не усвоили себѣ понятія о единицѣ, какъ цѣломъ, не слѣдуетъ употреблять слова „цѣлый“. Дѣло въ томъ, что дѣти смѣшиваютъ слова „цѣлый“ и „цѣльный“, а поэтому учить ихъ тому, что полъ-листа да полъ-листа составляетъ *цѣлый* листъ, не цѣлесообразно да и не вѣрно, такъ какъ полъ-листа да полъ-листа не составляютъ цѣлаго листа, а составляютъ *одинъ* листъ.—Отецъ *раздѣлилъ* яблоко пополамъ (на двѣ одинаковыя части), одну часть отдалъ сыну, а другую—дочери. Какую часть яблока получилъ сынъ и какую—дочь? Мальчикъ получилъ отъ матери яблоко, *половину* его онъ съѣлъ. Какая часть яблока у него осталась? Вотъ два полулиста бумаги! Каждый изъ этихъ полулистовъ я разрываю пополамъ, получаю *четыре четвертушки* бумаги. Сколько въ полулистѣ *четвертушекъ*? (Слова „половина“ и „четверть“, обозначая отвлеченныя понятія, уму и воображенію дѣтей, недостаточно развитыхъ, не говорятъ столько, сколько рѣченія „*полъ-яблока*“, „*четвертушка*“ бумаги, и т. п.) Вотъ одна четвертушка бумаги, она составляетъ одну *четверть, одну четвертую долю* листа, вотъ еще одна четверть. Какую долю листа составляетъ четверть его и еще одна четверть? *(Половину)*. Вотъ четверть листа бумаги, вотъ еще одна четверть и вотъ еще одна. Сколько всего здѣсь четвертей листа? (Три). Къ тремъ четвертямъ листа прибавлю еще одну четверть. Сколько я получу листовъ бумаги? (Одинъ). Отъ полулиста отрѣжу четверть листа и отдамъ кому нибудь изъ васъ. Какая доля листа осталась у меня? Что больше: листъ бумаги или полъ-листа? полъ-листа или четверть, полъ-листа или три четверти? Б) Письменно. Можете-ли вы обозначить „три“ помощью цифры? (Можемъ). Запишемъ! Что здѣсь написано? (Три!) Я хочу обозначить три *четверти*, вотъ я и поставлю подъ цифрой 3 черточку, а подъ чертой—цифру 4 Эта черточка и цифра 4 обозначаютъ, что *цѣлое* раздѣлено на 4 одинаковыя (равныя) части Если вы увидите гдѣ нибудь въ книгѣ цифру 3, подъ ней черту, а подъ чертой цифру 4, то знайте, что все это обозначаютъ *три четверти* —Повторите—какъ обозначить три четверти помощью цифръ?—Что обозначаетъ цифра 3? Что обозначаютъ черта и цифра 4 подъ нею? А какъ написать двѣ четверти? Одну четверть? Четыре четверти? Шесть четвертей? Семь четвертей? и т д

Всѣ эти упражненія крайне полезны въ качествѣ подготовки къ воспріятію представленій 1) о долѣ, 2) о части, 3) о цѣломъ, 4) *о дѣленіи на части* и 5) о результатѣ дѣленія Кто не знаетъ хорошенько, что такое половина и четверть, отъ того странно было бы требовать яснаго представленія о дѣленіи и вѣрнаго пониманія этого дѣйствія и его результата

Кромѣ указанныхъ выше *наглядныхъ* пособій, служащихъ къ лучшему усвоенію таблицы умноженія надо прибѣгнуть къ *слуховому* и *ритмическому* ея усвоенію которое состоитъ въ слѣдующемъ „дважды два четыре", „дважды три шесть" и вообще формула, состоящая изъ трехъ словъ, должна произноситься въ три четверти счета, а формулы въ четыре слова (трижды семь двадцать одинъ и т п)—въ четыре четверти счета При разучиваніи таблицы хоромъ полезно дирижировать послѣднимъ, а отдѣльныхъ учениковъ научить маршировкѣ подъ звуки словъ таблицы

§ 12 Десятую ступень составляетъ дальнѣйшее усвоеніе нумераціи двузначныхъ чиселъ Порядокъ занятій слѣдующій прежде всего учащій долженъ убѣдиться въ томъ—умѣютъ ли дѣти считать дальше двадцати, а если какъ слѣдуетъ не умѣютъ, то долженъ научить ихъ этому счету—Особенныхъ трудностей здѣсь не представляется, хотя значительнаго единообразія въ русскихъ числительныхъ именахъ, обозначающихъ нѣсколько десятковъ, не замѣчается сходство одного рода есть въ словахъ „двадцать" и „тридцать" и сходство совсѣмъ другого рода—въ словахъ „пятьдесятъ", „шестьдесятъ", „семьдесятъ" и „восемьдесятъ", слова же „сорокъ" и „девяносто" чужды семьѣ остальныхъ именъ числительныхъ Несмотря однако же на это, дѣти очень быстро усваиваютъ себѣ самый счетъ десятками, т е смыслъ четырехъ, пяти и т д десятковъ, а равно легко усваиваютъ себѣ слова „двадцать", „тридцать" и т д, такъ какъ эти слова часто употребляются въ рѣчи всѣми окружающими

10 ая ступень нумерація двузначныхъ чиселъ

Въ то время какъ при усвоеніи дѣтьми устнаго счисленія отъ одного до девятнадцати включительно обязательно должны быть усвоены прежде всего самыя *имена* числительныя (т е. слова), а потомъ уже нумерація, дѣти при изученіи нумераціи отъ двадцати до ста могутъ идти также и путемъ обратнымъ, т. е. сначала усвоить себѣ счетъ десятками и даже письменное обозначеніе двузначныхъ чиселъ помощью арабскихъ цифръ, а потомъ уже перейти къ усвоенію словъ „двадцать“, „тридцать“ и т д

Небезполезно поэтому научить дѣтей (какъ это нѣкоторые дѣлаютъ) счету въ слѣдующей формѣ одинъ, два, три, восемь *девять, десять,* одинъ, два, три восемь, *девять, двадцать,* одинъ два, три восемь, *девять, тридцать,* одинъ, два три восемь *девять, сорокъ,* и т д

Упражненія въ счетѣ должны вестись на наглядныхъ пособіяхъ, изъ которыхъ лучшимъ оказываются на этой ступени „спички“ связываемыя въ пучки по десяти спичекъ въ каждомъ При усвоеніи нумераціи полезно прибѣгнуть и къ помощи обыкновенныхъ торговыхъ счетовъ

-ая ступень ожение и вычитаніе двузн ис и табл умноженія

§ 13 Одиннадцатую ступень курса составляютъ ученія о сложеніи и вычитаніи двузначныхъ чиселъ и объ умноженіи въ предѣлахъ таблицы умноженія Здѣсь упражненія съ учителемъ должны отличаться особенною систематичностью, а самостоятельныя упражненія—соотвѣтствовать пройденному учителемъ Многочисленныхъ *задачъ,* которыя должны бы убѣдить учащихся въ необходимости сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ, а равно въ умноженіи чиселъ, произведеніе коихъ болѣе двадцати, на этой ступени не требуется дѣти вполнѣ уяснили себѣ на предыдущихъ урокахъ необходимость, внутренній смыслъ и цѣль этихъ дѣйствій За-то тѣмъ тщательнѣе *изустное* производство сложенія и вычитанія должно быть пройдено на наглядныхъ пособіяхъ, пользуясь каковыми и возможно выяснить сущность „правилъ“ сложенія и вычитанія, сводящуюся къ дѣйствіямъ надъ разрядными числами, т е сначала (при изустномъ счетѣ, единственно дозволительномъ на этой ступени) надъ десятками и потомъ — надъ единицами Русскіе счеты и такъ наз „спички“ (солома) въ этихъ случаяхъ, какъ замѣчено, оказываютъ наибольшія услуги

Прежде всего должны быть пройдены дѣйствія сложенія и вычитанія въ тѣхъ случаяхъ, когда при сложеніи единицъ не получается ни одного десятка, а при вычитаніи единицъ вычитаемаго изъ единицъ уменьшаемаго не требуется раздробленія одного изъ десятковъ уменьшаемаго въ единицы Порядокъ упражненіи для сложенія можетъ быть слѣдующій а) прибавленіе единицъ не дающихъ новаго десятка 23+2, 24+3, 31+4 и т д, б) прибавленіе десятковъ къ десяткамъ 20+30, 40+30 30+10 и т д, в) прибавленіе десятковъ къ двузначному числу съ единицами 47+20, 42+10 и т д г) прибавленіе безъ образованія новаго десятка 35+22, 3+31 и т д, д) прибавленіе съ образованіемъ десятка 37+25, 48+17 и т д Для вычитанія порядокъ слѣдующій а) 20—10 40—20, и т д, б) 48—26, 57—32 и т д, в) 27—17, 38—18, 56—26, г) 30—2, 40—4, 50—7 д) 42—24 (42—22, 20—2)

Для того чтобы не терять времени, должно постепенно при этомъ изучить съ дѣтьми также еще неусвоенную ими часть таблицы умноженія до 5 × 10 включительно, и развить въ нихъ полное пониманіе закона, по которому произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей Этому неоцѣненную услугу оказываютъ тѣ части таблицы квадратиковъ, о которыхъ рѣчь въ пунктѣ 6 § 3 гл I Надо только наблюдать за тѣмъ, чтобы ученики видѣли либо горизонтальныя ленты, составленныя изъ квадратиковъ, либо вертикальныя До усвоенія всей таблицы умноженія на-память надо научить дѣтей (съ помощью наглядныхъ пособій, въ особенности квадратиковъ, а потомъ—и на-память) добираться до результатовъ умноженія 8-ю 7 разсчитываемъ такъ 2-жды 7 четырнадцать да еще 14 двадцать восемь, это—4-жды 7, 28+28 будетъ 56 Другой примѣръ 7×5, 7 да 7 четырнадцать, да еще 14 двадцать восемь, да еще 7, будетъ 35 Для снабженія дѣтей умѣніемъ самостоятельно добираться до результатовъ таблицы умноженія въ случаѣ, когда оба сомножителя не менѣе шести, можетъ служить пальцевой пріемъ составленія произведенія, изложенный въ § 3 главы I

§ 14 Когда эти трудности одиннадцатой ступени преодолѣны, учителю слѣдуетъ обратить вниманіе на рѣченія „на столько-то единицъ больше или меньше", „на сколько больше или меньше?" и „во столько то разъ больше или меньше" и „во сколько разъ больше или меньше?" Одни изъ этихъ рѣченій выражаютъ утвержденіе, другіе—вопросъ Упражненія въ усвоеніи рѣченій „на столько-то" и „на сколько?" должны идти въ слѣдующемъ порядкѣ Я ставлю на столъ 6 кубиковъ, въ сторонѣ ставлю тоже 6 и еще 3 кубика, здѣсь, стало быть, 6 куб, а здѣсь—тоже 6 кубиковъ да еще 3 Это говорятъ иначе, „здѣсь 6 кубиковъ, а здѣсь *на три кубика больше*" Теперь я кладу сюда 4 кубика, а сюда—4 да еще 2 и говорю „здѣсь 4 кубика, а здѣсь на два кубика больше" Такъ ли я сказалъ?—У меня въ одномъ карманѣ 4 коп, въ другомъ на двѣ копейки больше Что это значитъ? (Это значитъ, что въ другомъ карманѣ тоже 4 коп да еще двѣ) У одного крестьянина въ огородѣ 7 грядокъ, а у другого—на 4 грядки *больше Сколько грядокъ въ огородѣ другого* крестьянина? По одной сторонѣ улицы 9 домовъ, а на другой *тремя* домами больше Сколько домовъ на другой улицы? На одной полкѣ шкафа 14 книгъ, а на другой 5-тью книгами больше Сколько книгъ на другой полкѣ? Узнать число, которое на 2, на 4, на 6 болѣе 6 Узнать число, которое болѣе 7-ми на 4, на 7, на 8 на 6, на 10 и т д Для разработки рѣченій „на пять меньше" и „пятью меньше" Кладу на столъ 9 кубиковъ и на стулъ столько же, т е тоже 9 кубиковъ, здѣсь 9 и здѣсь тоже 9, снимаю 2 кубика со стула и кладу ихъ обратно въ ящикъ на столѣ стало быть, 9 кубиковъ, а на стулѣ *меньше*, если бы на стулѣ было еще два кубика, то на немъ было столько же, сколько ихъ на столѣ Въ этихъ случаяхъ говорятъ „на стулѣ меньше кубиковъ на два, чѣмъ на столѣ" Теперь кладу на столъ 10 кубиковъ и на стулъ столько же, снимаю со стула 4 кубика, на стулѣ меньше, чѣмъ на столѣ, на четыре кубика —Далѣе идетъ работа надъ во-

На столько-то и во столько-то разъ

просомъ „на сколько больше“ или „меньше?“ Для этого ну
рядъ задачъ, лучше всего на наглядныхъ пособіяхъ „здѣсь
кубиковъ, а здѣсь четыре, гдѣ больше? на сколько, т е ско
надо прибавить, чтобы здѣсь было столько же, сколько тамъ
т. д *Полезно сначала хорошенько изучить значеніе словъ при
верждении, а не при вопросѣ* т е сначала усвоить себѣ зна
выраженій „на столько-то больше“ и „на столько-то меньш
потомъ уже—значеніе *вопросовъ* „на сколько больше или мень

Для выясненія значенія рѣченій „во столько-то разъ“ и
сколько разъ?“ надо помнить, что сначала необходимо выяс
значеніе утвержденія „во столько-то разъ больше“ Упраж
должно брать въ слѣдующемъ родѣ Я кладу на столъ 4
бика, на стулъ же я кладу другіе 4 кубика, еще 4, да е
т е *три раза* по 4 кубика Въ такомъ случаѣ говорятъ „на с
4 кубика, а на столѣ *въ три раза* (или *втрое*) *больше*“ —У
въ одномъ карманѣ 5 копеекъ, а въ другомъ въ два раза бол
Что это значитъ? (Это значитъ, что въ другомъ карманѣ 5
да еще 5 копѣекъ) Выясненіе значенія выраженій „во сто
то разъ больше“ лучше всего вести въ связи съ *весьма мног
ленными* упражненіями на наглядныхъ пособіяхъ Неудач
усвоеніи дѣтьми этихъ *условныхъ* выраженій можетъ постиг
учителя только въ томъ случаѣ, если дѣтьми проработано
статочное количество практическихъ упражненіи въ требуе
направленіи Выясненіе значенія вопроса „во сколько разъ боль
и утвержденія „во столько то разъ *меньше*“ относится къ уч
частномъ и отношеніи и здѣсь не умѣстно

12 ая ступень дѣленіе на части

§ 15 Только на двѣнадцатои ступени возможно приступит
выясненію дѣтямъ понятія объ обоихъ случаяхъ дѣленія дѣл
числа на нѣсколько равныхъ частей и сравненія двухъ чи
въ кратномъ отношеніи Извѣстно, что между этими двумя сл
ями дѣленія есть не только глубокое ариометическое, но так
весьма рѣзкое логическое различіе Прежде всего дѣтямъ дол
быть предложены такія задачи, которыхъ рѣшеніе требуетъ
денія новаго дѣйствія, и притомъ перваго вида его, т е дѣл
на равныя части Такихъ задачъ, въ особенности если имъ п
послать подобныя же задачи на наглядныхъ пособіяхъ, по
буется не особенно много Для того, чтобы дѣти легче убѣди
въ необходимости новаго дѣйствія, задачи эти не должны по
ваться быстрому разрѣшенію съ помощью догадокъ, поэтому за
на раздѣленіе 2-хъ, 4-хъ, 6-ти, даже 8-ми единицъ на двѣ ра
части или 3-хъ и 6-ти единицъ на 3 равныя части неумѣстн
большомъ количествѣ на этой ступени обученія Когда
уяснили себѣ хоть какой нибудь пріемъ рѣшенія этого род
дачъ, имъ долженъ быть показанъ знакъ дѣленія на ра
части, за каковой можно принять знакъ |__ Помощью э
знака требованіе „раздѣлить 15 на три равныя части“ изо
зится такъ 15 |_3_ Эту запись ученики должны сначала чи

такъ 15 раздѣлить на 3 одинаковыя части" Связь дѣленія на равныя части съ умноженіемъ можетъ быть выяснена въ томъ смыслѣ, что множимое—*часть* произведенія Что же касается того какъ учащемуся читать (вначалѣ) запись 15 |3 = 5, то онъ приучится понимать это такъ 15—цѣлое, 3—число одинаковыхъ частей (на которое надо раздѣлить цѣлое), а 5—каждая часть или короче 15—цѣлое, частей 3, каждая часть—5 Можно за знакъ дѣленія принять двоеточіе но для кратнаго сравненія, т е для опредѣленія сколько разъ одно число содержится въ другомъ будетъ употребляться тотъ же знакъ, и учащійся вначалѣ не будетъ понимать—почему употребляется одинъ знакъ для двухъ разныхъ вопросовъ

Со словами „равно" и „равняется" или еще лучше (вначалѣ) „все равно, что" дѣти должны быть ознакомлены раньше, выше не указано, на какой именно ступени это должно быть сдѣлано, такъ какъ самъ учитель лучше можетъ судить — когда ознакомленіе съ значеніемъ этихъ словъ будетъ своевременно Скорѣе всего это можно сдѣлать на седьмой ступени, когда появляются первыя формулы разложенія ($12 = 10 + 2$), въ которыхъ знакъ равенства не можетъ быть удобно замѣненъ словомъ „будетъ"

Учащій не долженъ забывать, что внѣ таблицы умноженія на этой ступени не должно встрѣчаться ни одного случая дѣленія двузначнаго числа на однозначное, съ каковымъ дѣленіемъ (безъ остатка) онъ прежде всего долженъ познакомить учащагося Введеніе выраженія „уменьшить въ нѣсколько разъ" на этой ступени не представитъ особеннаго затрудненія На этой же ступени умѣстно ознакомленіе дѣтей съ нахожденіемъ одной какой-либо *доли* даннаго числа и съ обозначеніемъ долей Для упражненія же дѣтей въ дѣленіи на части съ большою пользою для дѣла могутъ быть проработаны задачи на простое тройное правило въ предѣлахъ таблицы умноженія Эти задачи должны быть таковы, чтобы для ихъ разрѣшенія необходимо было сначала раздѣленіе одной величины на равныя части, а потомъ уже умноженіе полученнаго частнаго на нѣкоторое отвлеченное число, въ нихъ не должно быть случая, когда для рѣшенія задачи требовалось бы найти сначала *отношеніе* двухъ величинъ, а потомъ уже нѣкоторая величина умножалась бы на это отношеніе Говоря иначе, здѣсь умѣстны задачи такого типа „5 арш ситцу стоитъ 35 коп что стоятъ 8 арш?" Неумѣстны же задачи типа „35 коп заплачено за ситецъ, за аршинъ уплачено по 7 коп, ск ситца можно купить на 25 коп?"

Когда *смыслъ* дѣленія на части усвоенъ, можно перейти къ словесному обозначенію записей *сначала въ повелительной формѣ* а) 15 раздѣлить на 3 части, каждая часть будетъ 5, б) 15 раздѣлить на 3 *получится* 5, и наконецъ въ обычной „15, дѣленное на 3, равно 5" (самое краткое, но весьма *условное* словесное обозначеніе, ибо 15-ть останется пятнадцатью, а только *каждая часть* равна пяти)

3 ая ступень кратное сравненіе

§ 16 Тринадцатую ступень обученія составляетъ ознакомленіе дѣтей съ другимъ случаемъ дѣленія—съ кратнымъ сравненіемъ Эта ступень представляетъ въ началѣ весьма большія трудности, а потому нагядныя пособія должны лежать въ основѣ выясненія самаго смысла вопроса „во сколько разъ одно число больше или меньше другого“ Связь кратнаго сравненія съ умноженіемъ и отличіе его отъ дѣйствія дѣленія на равныя части не должны быть учащимъ забываемы ни на одну минуту въ противномъ случаѣ онъ рискуетъ напрасно потратить много времени Въ помощь разъясненіямъ могутъ явиться сопоставленіе слѣдующихъ трехъ формулъ а) $7 \times 3 = 21$ б) $21 \underline{|\ 3} = 7$ и в) $21 : 7 = 3$ Въ первой *записано* 7—каждая часть, 3—число частей, 21 цѣлое, во второй 21—цѣлое, 3—число частей, 7—каждая часть, въ третьей 21—цѣлое, 7—каждая часть, 3—число такихъ частей Здѣсь же умѣстны задачи на тройное правило, которыя требуютъ кратнаго сравненія именованныхъ чиселъ въ предѣлахъ таблицы умноженія За знакъ кратнаго сравненія выше принято двоеточіе (:), и запись $15 : 5 = 3$, учащій долженъ сначала читать такъ „пятнадцать единицъ содержатъ пять три раза“ или „15—цѣлое, 5—каждая часть, 3—число такихъ частей“ или, наконецъ „пять содержатся въ 15-ти 3 раза“ Что кратное сравненіе есть не что иное, какъ видъ *дѣленія*—ученики младшаго отдѣленія понять не могутъ, и поэтому добиваться отъ нихъ этого пониманія было бы излишне Само собою разумѣется, что и на этой ступени въ упражненія не должно входить данныхъ, которыхъ нѣтъ въ таблицѣ умноженія Задачи съ простыми условіями въ числѣ *самостоятельныхъ* упражненій, по причинѣ недостаточнаго развитія грамотности у дѣтей младшаго отдѣленія, умѣстны только при большомъ развитіи грамотности Когда рѣшительно всѣ трудности 13-ой ступени пройдены, можно ознакомить дѣтей на задачахъ и упражненіяхъ, съ значеніемъ вопроса „во сколько разъ одно число больше или меньше другого?“

14 ая ступень трехзначныя четырехзначныя числа

§ 17 Упражняя дѣтей на самостоятельныхъ занятіяхъ въ дѣленіи числа на равныя части и въ кратномъ сравненіи чиселъ, а также въ остальныхъ дѣйствіяхъ, при чемъ дѣти знакомятся также съ дѣленіемъ, дающимъ остатокъ, учитель можетъ перейти къ нумераціи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ, къ сложенію чиселъ трехзначныхъ и вычитанію четырехзначныхъ это—тѣ ариѳметическія знанія и умѣнія, безъ которыхъ школа не вправѣ выпустить ученика, почему либо ограничивающагося въ своемъ образованіи однимъ годомъ обученія въ этой школѣ Это—четырнадцатая ступень обученія Не только нумерація четырехзначныхъ чиселъ, но даже дѣйствія сложенія и вычитанія чиселъ трехзначныхъ и четырехзначныхъ на этой ступени не представятъ уже для учащагося такихъ трудностей которыя потребовали бы отъ учителя какихъ-либо особенныхъ, не очевидныхъ пріемовъ обученія Онъ можетъ совершенно свободно прибѣгнуть къ изобрѣтающей (эвристической) формѣ обученія, и учащійся будетъ въ состояніи распространить пріобрѣтенныя имъ ранѣе умѣнія и знанія на случаи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ Въ слѣдующей главѣ эти соображенія разсмотрѣны съ точки зрѣнія нумераціи вообще Одно не излишне замѣтить, что при обозначеніи четырехзначныхъ чиселъ должно пріучить дѣтей къ отдѣленію цифры тысячъ отъ цифры сотенъ промежуткомъ почти въ цѣлую цифру Постановка запятой послѣ цифры тысячъ не можетъ быть оправдана, потому что запятая имѣетъ (при обозначеніи десятичныхъ дробей) еще одно значеніе, а также потому, что при числахъ меньшихъ милліона въ ней нѣтъ и особенной надобности, точка же неудобна потому, что она иногда замѣняетъ знакъ умноженія

Если время и другія условія дозволяютъ, то въ концѣ перваго года обученія дѣти могутъ быть научены умноженію трехзначныхъ чиселъ на однозначное и обоимъ случаямъ дѣленія на однозначное Методическія указанія отнесены также къ слѣдующей главѣ

Для того, чтобы курсъ перваго года вполнѣ удовлетворялъ требованіямъ истинной концентраціи, необходимо было бы (какъ это разъяснено въ другомъ мѣстѣ) въ теченіе перваго же года пройти также и ученія о производствѣ умноженія и дѣленія на многозначное число, но это по причинамъ, изложеннымъ тамъ же, почти невозможно безъ явнаго ущерба для дѣла, а потому статьи эти входятъ въ курсъ второго года, методическія же указанія относительно этихъ статей курса даны поэтому въ слѣдующей главѣ

Разрабатывая съ дѣтьми *письменные* способы производства сложенія и вычитанія трехзначныхъ чиселъ, учащій долженъ помнить, что эти способы требуютъ отъ ученика 1) знанія *таблицы* сложенія для двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ второе менѣе 10-ти (*для сложенія*), и 2) знаніе *таблицы* вычитанія числа, меньшаго 10-ти, изъ чиселъ, не большихъ 18-ти Поэтому учащій долженъ предварительно въ порядкѣ и въ безпорядкѣ повторить съ учениками (хоромъ и въ одиночку) эти таблицы

I а) второе слагаемое 1, 1+1, 2+1, 3+1, 4+1 и т д до неопредѣленнаго предѣла,

б) второе слагаемое 2, 1+2, 2+2, 3+2, 4+2 и т д 30+2 или до 90+2, смотря по ученикамъ и ихъ надобностямъ,

в) второе слагаемое 3, 1+3, 2+3, 3+3, 4+3 и т д также смотря по классу,

г) второе слагаемое 4, 1+4, 2+4, 3+4, 4+4 и т далѣе также смотря по надобности

и) второе слагаемое 9 1+9, 2+9, 3+9, 4+9 и т далѣе

II а)	1—1,	2—1,	3—1	4—1,	и	т	д	до	9—1,
б)	2—2	3—2,	4—2,	5—2,	„	„	„	„	11—2,
в)	3—3,	4—3	5—3	6—3	„	„	„		12—3
и)	9—9,	10—9,	11—9,	12—9	„	„		„	18—9

Безъ твердаго знанія этихъ таблицъ нѣтъ письменнаго производства сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ

Наглядными и осязательными пособіями при усвоеніи таблицъ на-память могутъ служить кубики и шведскіе счеты, а при усвоеніи письменнаго производства сложенія и вычитанія — спички, связанныя въ пучки по десять спичекъ въ каждомъ, и въ пачки по десяти десятковъ въ каждой пачкѣ

имскія и др. цифры и ариѳм. терминологія

§ 18 Выше ничего не говорено объ ознакомленіи учащихся младшаго отдѣленія съ римскими, а равно со славянскими цифрами Точно также ничего не сказано о времени объясненія имъ терминовъ *слагаемое, сумма, уменьшаемое, вычитаемое, остатокъ, множимое, множитель, произведеніе, дѣлимое, дѣлитель, частное, дѣлимое, дѣлитель и отношеніе*

Первый годъ обученія въ школѣ долженъ преслѣдовать преимущественно усвоеніе дѣтьми главнѣйшихъ ариѳметическихъ *представленій и умѣній* Чѣмъ менѣе, стало-быть, курсъ загроможденъ научными терминами, тѣмъ лучше Поэтому вполнѣ на усмотрѣніе учащаго долженъ быть предоставленъ выборъ ступеней, на которыхъ онъ сочтетъ за благо ознакомить дѣтей съ этими названіями Ничего нельзя имѣть даже противъ полнаго исключенія терминологіи изъ курса перваго года обученія, такъ какъ далеко не въ ней сила предложеннаго выше курса Но во всякомъ случаѣ ознакомленіе съ терминологіею сложенія неумѣстно ранѣе пятой, съ терминологіею вычитанія—ранѣе шестой, умноженія—ранѣе девятой, и дѣленія на равныя части—ранѣе двѣнадцатой ступени обученія Кратное сравненіе, какъ извѣстно отдѣльной терминологіей не обладаетъ, и это нисколько не мѣшаетъ усвоенію дѣтьми *умѣнія* находить кратное (т наз геометрическое) отношеніе двухъ чиселъ Въ виду этого и вслѣдствіе того что подведеніе обоихъ видовъ дѣленія подъ общее понятіе въ первый годъ обученія невозможно, а введеніе новыхъ названій (терминовъ) безполезно, учащему дозволительно совсѣмъ не называть въ этомъ случаѣ первое число—дѣлимымъ, второе дѣлителемъ, а результатъ кратнаго сравненія — отношеніемъ Учащій, безъ всякаго сомнѣнія, самъ увидитъ въ теченіе второго же полугодія перваго года обученія—можетъ ли онъ и долженъ ли, хотя бы для краткости рѣчи, ознакомить дѣтей съ терминологіею кратнаго сравненія, если ему это ранѣе почему либо не удалось

Что касается ознакомленія дѣтей съ римскими и славянскими цифрами, то самъ учитель замѣтитъ, когда наступило время для сообщенія дѣтямъ свѣдѣній объ этихъ цифрахъ и для упражненія дѣтей въ обозначеніи чиселъ съ помощью цифръ Лучше всего избрать для этого такіе уроки, когда дѣтямъ нельзя сообщить ничего новаго, такъ какъ они еще не усвоили себѣ предыдущаго, и когда почему либо особенно понадобится внесеніе разнообразія въ занятія Относительно объема тѣхъ свѣдѣній о цифрахъ римскихъ и славянскихъ, которыя могутъ быть усвоены учащимися въ первый годъ обученія, должно замѣтить, что практическую важность имѣетъ обозначеніе, помощью римскихъ цифръ, всѣхъ чиселъ первыхъ двухъ десятковъ (эти цифры встрѣчаются на циферблатѣ часовъ и при обозначенiи столѣтiй въ книгахъ), да обозначенiе чиселъ славянскими цифрами Но для усвоенiя этихъ нумерацiй въ теченiе перваго года, можетъ быть, окажется слишкомъ мало времени А потому учащiй въ первый годъ обученiя долженъ, въ случаѣ надобности, ограничиться, при ознакомленiи дѣтей съ цифрами славянскими и римскими, только самымъ необходимымъ, отложивъ подробное прохожденiе всей славянской нумерацiи до болѣе благопрiятнаго времени, а въ римской нумерацiи—не идя далѣе тысячи. Ознакомленiе дѣтей съ римскою нумерацiею во всемъ ея объемѣ вообще не нужно для начальной школы Оно и не относится къ предмету ариѳметики

§ 19 Относительно *устныхъ* вычисленiй въ теченiе перваго года обученiя должно замѣтить, что главное вниманiе учащаго должно быть обращаемо а) на сложенiе двухъ или нѣсколькихъ однозначныхъ чиселъ, б) на умноженiе и дѣленiе въ предѣлѣ первой сотни и в) на сложенiе и вычитанiе двузначныхъ чиселъ Задачъ съ многочисленными условiями должно избѣгать при упражненiяхъ въ устномъ вычисленiи введенiе подобныхъ задачъ въ курсъ перваго года было бы только помѣхою при прохожденiи курса, поддающагося проработкѣ только при соблюденiи большой экономiи во времени Устныя вычисленiя

Ученики въ теченiе перваго года прiобрѣтаютъ нѣкоторую снаровку въ быстромъ устномъ вычисленiи, въ указанныхъ предѣлахъ умѣнiе болѣе или менѣе быстро вычислять наизусть дается дѣтямъ легко, а потому отягчать младшее отдѣленiе многочисленными искусственными упражненiями было бы нецѣлесообразно какъ съ точки зрѣнiя практической (курсъ не будетъ пройденъ), такъ и съ точки зрѣнiя педагогической (всему—свое время) *Въ способности учащаго къ нѣкоторому самоограниченiю заключается одна изъ трудно-выполнимыхъ, но за-то несомнѣнныхъ обязанностей его по отношенiю къ начальной школѣ и къ младшему отдѣленiю ея въ особенности* Отъ выполненiя этой обязанности зависитъ очень многое во всемъ дальнѣйшемъ ходѣ курса начальной ариѳметики

ГЛАВА IV

Второй годъ обученiя ариѳметикѣ въ начальной школѣ.

§ 1 Курсъ ариѳметики, подлежащiй проработкѣ въ теченiе перваго года обученiя, распадается, какъ мы это видѣли раньше, на четырнадцать ступеней Курсъ же второго года распадается на семнадцать Ступени курса 2-го года

Ниже счетъ ступеней курса поставленъ въ зависимость отъ четырнадцати ступеней курса перваго года обученiя, такъ что первая ступень курса второго года является пятнадцатою ступенью всего курса Эту, пятнадцатую, ступень курса ариѳметики со 15 я ступень нумерацiя.

ставляетъ нумерація по десятичной системѣ, — но во всемъ ея объемѣ Въ основѣ нумераціи вообще лежитъ только идея о томъ, что отношеніе единицы одного разряда къ единицѣ слѣдующаго разряда равно десяти, но какъ только мы переходимъ отъ письменнаго счисленія къ счисленію устному, то появляется необходимость разбить число также и на классы Такимъ образомъ въ основѣ *устной* нумераціи по десятичной системѣ лежатъ, строго говоря, двѣ мысли 1) о десятичномъ отношеніи единицъ смежныхъ разрядовъ, и 2) о необходимости введенія нѣкотораго единообразія въ группировкѣ разрядныхъ чиселъ, т е о необходимости введенія классовъ единицъ, тысячъ, милліоновъ, билліоновъ, и т д Съ первою мыслью дѣти достаточно свыклись, имѣя дѣло съ трехзначными числами, вторая же проявляется, хотя сначала и въ не довольно рѣзкой формѣ, съ переходомъ отъ трехзначныхъ чиселъ къ четырехзначнымъ Та послѣдовательность, какой должно держаться при ознакомленіи дѣтей съ единицами первыхъ трехъ разрядовъ, на дальнѣйшихъ ступеняхъ уже не цѣлесообразна, такъ какъ, при обозначеніи тысячъ, милліоновъ и т д, примѣняются то же правило и тѣ же *словесныя* обозначенія, съ которыми связано обозначеніе трехзначныхъ чиселъ Говоря иначе, дѣти должны понять 1) что придумывать для единицъ каждаго слѣдующаго разряда (они знаютъ только разряды *единицъ, десятковъ, сотенъ* и *тысячъ*) новыя названія было бы неудобно, 2) что эти неудобства *устранены,* благодаря тому, что число тысячъ считается такъ же, какъ считается любое число единицъ перваго разряда, меньшее тысячи и что 3) поэтому съ помощью цифръ принято обозначать число тысячъ на тѣхъ же точно основаніяхъ, на какихъ обозначаются числа перваго класса Для того, чтобы дѣти поняли единообразіе въ обозначеніи цифрами единицъ различныхъ классовъ, ихъ весьма полезно пріучить къ отдѣленію тысячъ отъ сотенъ промежуткомъ величиною не много менѣе ширины одной цифры Когда дѣти вполнѣ усвоили себѣ способъ обозначенія четырехъ, пяти и шестизначныхъ чиселъ, ихъ можно ознакомить съ милліонами и т д, хотя лучше ранѣе поупражнять ихъ въ сложеніи и вычитаніи многозначныхъ чиселъ

Учитель (ср § 17 гл III) не долженъ забывать, что безъ знанія упоминаемыхъ выше *таблицъ* сложенія однозначныхъ чиселъ съ однозначными же и съ двузначными нѣтъ *письменнаго производства сложенія,* а безъ знанія таблицы вычитанія однозначныхъ чиселъ изъ однозначныхъ же и изъ двузначныхъ, меньшихъ 19-ти, нѣтъ *письменнаго производства вычитанія* Кромѣ того, онъ долженъ *всегда* помнить слѣдующее

Значеніе десятичной системы

Своимъ современнымъ развитіемъ ариѳметика обязана исключительно обозначенію чиселъ помощью десяти цифръ по десятичной системѣ,—идеѣ, которою человѣчество обязано индусамъ Одинъ изъ величайшихъ математиковъ начала нынѣшняго столѣтія, Лапласъ (род въ 1749, ум въ 1827 г) говоритъ о значеніи этого изобрѣтенія въ слѣдующихъ восторженныхъ выраженіяхъ

„Мысль обозначенiя чиселъ помощью десяти знаковъ, основанная на абсолютномъ и мѣстномъ значенiи цифръ, такъ проста, что только по этой причинѣ мы забываемъ—какого она достойна удивленiя Но именно эта простота и та легкость, которою ей обязано ариѳметическое вычисленiе, дѣлаютъ ариѳметическую систему индусовъ однимъ изъ полезнѣйшихъ изобрѣтенiй Насколько трудно было изобрѣтенiе этой системы, можно судить по тому, что ея не могли изобрѣсти ни Архимедъ, ни Аполлонiй Пергейскiй, принадлежащiе къ числу величайшихъ людей древности“ *) Все значенiе этого великаго изобрѣтенiя постигается только при *производствѣ* дѣйствiй, но даже на 15-й ступени дѣтямъ должно быть указано — какъ важенъ нуль при обозначенiи чиселъ и какъ ясно обозначенiе чиселъ съ помощью арабскихъ цифръ по сравненiю съ цифрами римскими и церковно-славянскими

§ 2 Въ теченiе перваго года дѣтьми должно быть усвоено также и производство дѣйствiй сложенiя и вычитанiя трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ (см § 1 гл III-й) Поэтому во второй годъ можно въ такомъ случаѣ тотчасъ послѣ нумерацiи приступить къ умноженiю двузначнаго, трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное Большихъ методическихъ трудностей это не представляетъ, большую услугу здѣсь оказываетъ приведенiе умноженiя къ сложенiю равныхъ слагаемыхъ За-то, тѣмъ значительнѣе трудности слѣдующихъ (семнадцатой и восемнадцатой) ступеней, для преодолѣнiя которыхъ требуется строгая методичность и постепенный переходъ отъ чиселъ двузначныхъ къ трехзначнымъ, отъ этихъ послѣднихъ къ четырехзначнымъ, и т д **16 ая, 17-ая и 18-ая ступени**

17-ую ступень составляетъ дѣленiе чиселъ на однозначное число Чѣмъ лучше дѣти усвоятъ способъ производства дѣленiя двузначнаго числа на однозначное въ случаяхъ, дающихъ въ результатѣ число двузначное, тѣмъ, конечно, легче будетъ преодолѣнiе остальныхъ трудностей этой ступени Поэтому на указанный случай должно обратить особенное вниманiе Дѣло въ томъ, что въ первый годъ обученiя дѣти научились только изустному раздѣленiю двузначнаго числа на однозначное которое сводится къ болѣе или менѣе непосредственной помощи данныхъ таблицы умноженiя, поэтому они, будучи въ состоянiи раздѣлить довольно большое двузначное число, напр 74, на другое крупное число, напр, на 8 или на 9 затрудняются *письменно* раздѣлить небольшое, сравнительно, число, напр, 28 или 34, на другое небольшое, напр, на 2, или 45 и 48 на 3, и т д Къ этимъ новымъ случаямъ дѣти не умѣютъ прилагать умноженiя, а потому ихъ прежде всего должно научить раздѣленiю двузначнаго числа на однозначное,

*) Архимедъ, какъ извѣстно, вѣрно вычислилъ число песчинокъ, которое заключалось бы въ шарѣ, составленномъ изъ песчинокъ и имѣющемъ въ поперечникѣ удвоенное разстоянiе земли до солнца, и при этомъ пользовался составленными имъ десятичными единицами высшихъ разрядовъ Однако же до десятичной *нумерацiи* съ помощью десяти цифръ этотъ великiй геометръ не додумался

дающему въ частномъ болѣе десяти При этомъ учащій не долженъ забывать, что не только при выясненіи *идеи* о дѣйствіи дѣленія, но даже при производствѣ этого дѣйствія, онъ долженъ строго отличать дѣйствіе дѣленія на части отъ дѣйствія кратнаго сравненія такъ какъ на этой ступени дѣти еще не могутъ выработать себѣ точное понятіе о причинѣ, почему каждый изъ этихъ случаевъ можетъ быть приведенъ къ другому изъ нихъ

Пріемъ методическаго распредѣленія упражненій въ дѣленіи очень простъ раньше всего надо научить дѣленію четныхъ десятковъ на 2, затѣмъ нечетныхъ десятковъ на 2, наконецъ нечетныхъ десятковъ съ единицами—на 2 Далѣе надо научить раздѣленію чиселъ 30, 60 и 90 на 3, потомъ раздѣленію суммы этихъ чиселъ съ 3-мя, 6-ю и 9-ью наконецъ, дѣленію всякихъ двузначныхъ чиселъ на 3 Подобное же справедливо относительно дѣленія на 4 (сначала научить дѣленію 40 и 80-ти на 4), на 5 (сначала научить дѣленію 50-ти на 5) и т д При этомъ надо смотрѣть на двузначное число какъ на сумму *десятковъ* съ единицами и всякій разъ дѣлить извѣстное число десятковъ (2 *десятка*, 3 *десятка*, а не двадцать или 30) дѣлить на части

18-ая ступень обученія содержитъ дѣленіе трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное *Основанія* письменнаго производства дѣйствія въ случаѣ многозначнаго дѣлимаго тѣ же, что въ случаѣ дѣлимаго двузначнаго, дающаго при раздѣленіи на даннаго дѣлителя двузначное же частное А потому особенныхъ трудностей на восемнадцатой ступени обученія ариѳметикѣ уже не предвидится Прежде всего дѣти должны научиться раздѣленію (изустному) двузначныхъ чиселъ на однозначное, не требующему раздробленія десятка въ единицы, затѣмъ—дѣленію, требующему раздробленія, далѣе—дѣленію, требующему, кромѣ раздробленія, еще и прибавленія

а) 20 | 3, 30 | 3, 60 | 2, 60 | 3 и т п

б) 30 | 2, 80 | 5, 60 | 5, 50 | 2 и т п

в) 34 | 2, 85 | 5, 64 | 4, 56 | 2 и т п

Когда это вполнѣ усвоено, можно перейти къ дѣленію многозначныхъ чиселъ на однозначныя

а) 468 | 2 884 | 4, 550 | 5, и т п

б) 480 | 3 655 | 5 328 | 2, и т п (одно раздробленіе!)

в) 402 | 3, 372 | 2 875 | 5, и т п (два раздробленія!)

и г) 145 | 5, 356 | 4, 368 | 4, и т п (начин съ раздробл !)

Послѣднее въ методическомъ отношеніи мѣсто долженъ занимать случай, когда первая цифра дѣлимаго обозначаетъ число меньшее, чѣмъ дѣлитель При этомъ большую услугу можетъ сослужить а) солома (на первыхъ порахъ!) и б) представленіе о размѣнѣ денегъ 145 рублей раздѣлить между пятью человѣками поровну, при этомъ у насъ есть одна сотенная бумажка, четыре десятирублевыя и пять рублевокъ, сначала придется сотенную размѣнять на десятирублевки, а потомъ четыре десятирублевки— на рублевки

§ 3 На девятнадцатой ступени обученія умѣстно ознакомленіе дѣтей съ умноженіемъ на одну единицу любого разряда Здѣсь надо не только показать учащемуся, что письменное производство умноженія всякаго числа на 10, на 100 и т д приводитъ къ приписыванію нуля или нѣсколькихъ нулей къ письменному обозначенію множимаго, но и сдѣлать для него вполнѣ яснымъ—почему это именно такъ, а не иначе Умноженіе на 10 должно вести такъ, какъ умноженіе на однозначное число, требуется умножить 27×10 десятью-семь 70, нуль пишу 7 (десятковъ) въ умѣ, десятью-два 20 (десятковъ) да еще 7 (десятковъ) 27, получится 270 Точно также надо умножать 385 на 10 десятью-пять 50, нуль пишу, 5 въ умѣ, десятью-восемь 80, да 5 восемьдесятъ пять, пять пишу, 8 въ умѣ, десятью-три 30, да 8 тридцать-восемь получится 3 850 или же такъ десятью-пять 50 запишу, десятью-восемь—800, запишу слѣва цифру 8 десятью-триста—3 000, запишу слѣва цифру 3, получу 3 850 *Правило надо вывести помедливъ!* 19 ая, 20 ая и 21 ая ступени

Что касается умноженія на однозначное число десятковъ (на 20, 30, 40, 90) и на однозначное число сотенъ (200, 300, 400, 900), то и въ этомъ случаѣ надо смотрѣть на умноженіе какъ на сложеніе одинаковыхъ слагаемыхъ, и тогда дѣти вскорѣ научатся понимать, что при умноженіи на 40, надо множимое сначала помножить на десять, а *полученное* на 4, и т д

Что же касается умноженія на многозначное число съ нѣсколькими значащими цифрами, то если предыдущія двѣ ступени проработаны вполнѣ основательно, эта (двадцатая счетомъ) ступень обученія преодолѣвается сравнительно легко Возможно и должно, *ни разу не формулировавъ правила*, достигнуть того, чтобы учащіеся вполнѣ уяснили и сознательно усвоили себѣ тѣ промежуточныя разсужденія, которыя впослѣдствіи приводятъ къ окончательному правилу умноженія многозначнаго числа на многозначное Порядокъ же и характеръ упражненій, которыя на этихъ ступеняхъ должны быть проработаны при непосредственной помощи учителя, достаточно характеризуются слѣдующимъ 1) ученикъ долженъ сообразить, что для того чтобы помножить 435 на 238, ему надо сначала 435 помножить на 200, потомъ 435 помножить на 30, и наконецъ—на 8, когда все это сдѣлано, полученныя числа надо сложить 2) крайне важно, чтобы учащійся пріучился понимать умноженіе на многозначное число, какъ дѣйствіе, замѣняющее цѣлую массу сложеній, которыхъ выполненіе крайне затруднительно

Путемъ цѣлесообразныхъ упражненій, въ основѣ которыхъ лежитъ связь умноженія со сложеніемъ, учащихся возможно довести до пониманія всѣхъ ученій, которыхъ уразумѣніе необходимо для вполнѣ сознательнаго производства умноженія многозначнаго числа на многозначное же 21-ую ступень занимаютъ раздробленіе и вычитаніе составныхъ именованныхъ чиселъ, требующія, какъ извѣстно, только умноженія

22-я, 23-я, 4-ая и 25-ая ступени

§ 4 Ученіе о производствѣ дѣленія на многозначное число распадается на двѣ ступени двадцать вторую и двадцать-третью, изъ которыхъ первая включаетъ а) дѣленіе на однозначнаго дѣлителя. б) дѣленіе на единицу какого либо разряда, в) дѣленіе на однозначное число единицъ какого либо разряда, и г) дѣленіе на многозначное, легко закругляемое до однозначнаго числа единицъ какого либо разряда Двадцать третья ступень включаетъ дѣленіе на незакругляемаго дѣлителя Закругляемыми дѣлителями надо считать такіе, вторая цифра которыхъ, считая отъ лѣвой руки къ правой, не менѣе 7-ми или же не больше 3-хъ, къ числу закругляемыхъ принадлежатъ числа 37, 48, 59 672 483, 296, которыя, по порядку близки къ числамъ 40, 50, 60, 700, 500, 300, и числа 21, 32, 53, 739, 626, 819, которыя близки къ числамъ 20, 30, 50, 700, 600, 800 Такія же числа, какъ 35, 46, 54 341, 452, 268, принадлежатъ къ классу чиселъ не закругляемыхъ Какъ учить дѣленію на многозначное число? Раньше всего должна быть разработана двадцать-третья ступень, причемъ подъ-ступень, занимающаяся дѣленіемъ на закругляемое число, должна быть усвоена на особенно многочисленныхъ упражненіяхъ При дѣленіи же на незакругляемое число надо научить дѣтей къ *двумъ* изустнымъ пробамъ (напр., при дѣленіи на 45, къ изустной пробѣ раздѣленія на 40 и къ изустной пробѣ дѣленія на 50) и къ отысканію либо частнаго, лежащаго между пробными частными, либо къ отысканію наибольшаго, какое возможно въ данномъ случаѣ, частнаго Важно только, чтобы учитель, самъ не торопясь, пріучалъ и учащагося къ неторопливому, спокойному и особенно сознательному производству интересующаго насъ дѣйствія Необходимо, чтобы проработка упражненій неизбѣжно привела ученика къ усвоенію главнѣйшихъ *техническихъ* трудностей этой ступени обученія Но для того, чтобы во время проработки этихъ упражненій учащіеся средняго отдѣленія имѣли въ своемъ распоряженіи матеріалъ также и для самостоятельныхъ работъ, полезно предварительно выяснить раздробленіе, а потомъ и вычитаніе именованныхъ чиселъ *)

Такимъ образомъ на двадцать первой ступени должны быть, изъ чисто-практическихъ соображеній, пройдены раздробленіе и вычитаніе именованныхъ чиселъ, только на двадцать третьей будетъ пройдено дѣленіе многозначнаго числа на незакругляемое многозначное, на двадцать четвертой—кратное сравненіе и превращеніе, наконецъ, на двадцать пятой—сложеніе, умноженіе и дѣленіе составныхъ именованныхъ чиселъ Методическая связь кратнаго

*) Сложеніе именованныхъ чиселъ неумѣстно до тѣхъ поръ, пока превращеніе ихъ дѣтямъ еще неизвѣстно, ибо безъ знанія этого преобразованія правильное производство сложенія именованныхъ чиселъ не всегда возможно

сравненія чиселъ съ превращеніемъ очевидна при превращеніи простого именованнаго числа въ составное приходится узнавать сколько единицъ непосредственно высшаго разряда содержится въ данномъ числѣ единицъ низшаго,—сначала сколько фунтовъ въ данномъ числѣ лотовъ, затѣмъ—сколько пудовъ въ данномъ числѣ фунтовъ, и т д Что же касается сложенія, умноженія и дѣленія составныхъ именованныхъ чиселъ, то, кромѣ дѣйствій, требуемыхъ въ каждомъ частномъ случаѣ, иногда требуется сдѣлать превращеніе а иногда (при дѣленіи на составное именованное число) раздробленіе чиселъ

§ 5 Относительно ученія о двоякаго рода преобразованіяхъ именованныхъ чиселъ и о дѣйствіяхъ надъ ними, впрочемъ, не безполезно замѣтить еще слѣдующее Прежде всего учащій и учащійся не должны забывать, что раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ суть не дѣйствія надъ этими числами, а лишь извѣстныя *преобразованія,* помощью ариѳметическихъ дѣйствій, однѣхъ величинъ въ другія, съ ними однородныя и *вполнѣ равныя имъ по своему значенію* Далѣе должно замѣтить, что прежде чѣмъ перейти къ общепринятому расположенію вычисленій этого рода, дѣти должны усвоить себѣ самую сущность этихъ преобразованій и первоначально располагать вычисленія сообразно ихъ *логическому* смыслу Наконецъ, что касается дѣйствія кратнаго сравненія именованныхъ чиселъ, т е кратнаго сравненія двухъ величинъ, то только на этой ступени обученія учащіеся постигаютъ всю громадную важность разграниченія дѣленія на равныя части и дѣленія по содержанію (т е собственно дѣленія и кратнаго сравненія) Само собою разумѣется, что дѣти должны быть постепенно ознакомляемы съ различными мѣрами и что дроби $^1/_2$, $^1/_4$ и $^3/_4$ не должны быть упускаемы изъ виду ни на одной изъ вышерасмотрѣнныхъ ступеней Знакомство съ мѣрами должно быть, какъ это тоже разумѣется само собою, по возможности нагляднымъ, и въ особенности ясное представленіе дѣти должны имѣть о мѣрахъ длины Полезно, чтобы мѣры длины были разъ навсегда нанесены на классной доскѣ, на стѣнѣ, на столахъ и всегда находились бы въ распоряженіи учащихся

Преобразованія и дѣйствія надъ именованными числами

§ 6 Слѣдующія двѣ ступени (26-ая и 27-ая) посвящены упражненіямъ, цѣль которыхъ—выработка въ учащихся болѣе точныхъ понятій о четырехъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами и о всѣхъ случаяхъ ихъ примѣненія Доселѣ дѣти смотрѣли на каждое въ отдѣльности дѣйствіе съ точки зрѣнія простѣйшихъ примѣненій его къ практическимъ случаямъ, безъ взаимной связи дѣйствій другъ съ другомъ и безъ всякаго отношенія даннаго случая къ общему опредѣленію Въ концѣ перваго полугодія второго года обученія ариѳметическій кругозоръ дѣтей можетъ быть расширенъ далеко за предѣлы тѣхъ практическихъ требованій, изъ которыхъ вытекаютъ дѣйствія надъ цѣлыми числами Для этой цѣли требуется, чтобы учитель и учащіеся поглубже вникли въ самую сущность ариѳметическихъ дѣйствій и вы-

26 ая и 27-ая ступени

работали болѣе точныя опредѣленія дѣйствій, какъ они даны напр., въ „Краткомъ Учебникѣ ариѳметики“, приложенномъ къ моему „Сборнику для учащихся“

Единственный пунктъ, который можно на этой (26-ой) ступени не затрогивать, это—подведеніе обоихъ случаевъ дѣленія подъ одно общее *опредѣленіе* Весьма легко оказаться можетъ, что вся эта работа будетъ не подъ-силу учащемуся средняго отдѣленія Тогда она должна быть отложена до болѣе благопріятнаго времени хотя бы даже на цѣлый годъ На занимающихъ насъ ступеняхъ обученія во всякомъ случаѣ умѣстна за-то проработка сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ Къ 27-ой ступени относится также и выработка въ дѣтяхъ яснаго представленія о дроби, какъ о частномъ, выраженномъ въ доляхъ единицы Практика показала, что если не уснащать ученіе о дробяхъ терминами (числитель, знаменатель, приведеніе дробей къ одному знаменателю, сокращеніе и т п), то *представленія* о дробяхъ дѣтьми усваиваются безъ особенныхъ затрудненій

28-ая—31-ая ступени § 7 Второе полугодіе второго года обученія распадается на четыре ступени 28-ая—измѣненія дроби въ зависимости отъ измѣненія членовъ ея, 29-ая—отысканіе частей цѣлаго и отысканіе цѣлаго по данной части его, 30-я—приведеніе дробей къ какому нибудь (не непремѣнно наименьшему) общему знаменателю и первыя два дѣйствія надъ дробями, и 31-ая—приложеніе этихъ ученій къ рѣшенію задачъ на тройныя правила

Особенныхъ трудностей курсъ второго полугодія второго года обученія не представляетъ Единственный пунктъ несогласія вышенамѣченной программы этого курса съ курсомъ вполнѣ систематическимъ заключается въ отсутствіи въ первомъ изъ нихъ ученій объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и о наименьшемъ кратномъ числѣ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ Эти послѣднія ученія очень тѣсно связаны съ нѣкоторыми ученіями о дѣлителяхъ, которыя недоступны пониманію не только ученика трехгодичной начальной школы, но и ученика средняго учебнаго заведенія Ихъ прохожденіе въ начальной школѣ представляется вообще нецѣлесообразнымъ и малополезнымъ Тѣмъ больше вниманія на этихъ ступеняхъ должно обращать за-то на ясность представленій и сознательность рѣчи учащагося, такъ какъ въ будущемъ всякія отступленія отъ требованій сознательности, допущенныя на этихъ ступеняхъ, отзовутся очень вредно Учитель не долженъ забывать, что *если первый годъ обученія посвящается пріобрѣтенію дѣтьми важнѣйшихъ ариѳметическихъ* **представленій** *и* **умѣній**, *а третій—пріобрѣтенію ими по учебнику систематическихъ* **познаній** *по интересующему насъ предмету, то второй годъ обученія ариѳметикѣ долженъ быть посвященъ развитію въ учащемся вполнѣ доступной ему* **вдумчивости** *въ вопросы ариѳметическаго характера*

Единицы мѣры § 8 Относительно нѣкоторыхъ единицъ мѣры, не подлежащихъ проработкѣ съ учениками средняго отдѣленія, должно сказать нѣсколько словъ Ознакомленіе съ мѣрами поверхностей и объемовъ во второй годъ обученія наврядъ ли цѣлесообразно Дѣло въ томъ, что ознакомленіе съ этими мѣрами предполагаетъ у учащихся нѣкоторыя геометрическія свѣдѣнія, требующія для своего усвоенія затраты довольно большого количества времени, котораго у средняго отдѣленія вовсе не много Неумѣстны по той же причинѣ во второй годъ также и задачи на вычисленіе времени, на вычисленіе процентовъ и въ особенности задачи алгебраическаго характера, которыми вообще не должно особенно увлекаться За-то тѣмъ умѣстнѣе оказывается ознакомленіе учениковъ ср отдѣленія съ рѣшеніемъ такихъ задачъ на тройныя правила, которыя имѣютъ дѣло съ величинами обратно-пропорціональными Задачи этого рода вполнѣ отвѣчаютъ и духу, и содержанію всего курса занимающаго насъ второго года обученія ариѳметикѣ

Курсъ двухгодичной школы.

§ 9 Изъ всего вышеизложеннаго легко усмотрѣть, что въ первые два года обученія учащіеся трехгодичной начальной школы должны и могутъ усвоить себѣ всѣ тѣ главнѣйшія ариѳметическія умѣнія, представленія и сужденія, которыя наиболѣе важны съ точки зрѣнія не только практическихъ, но и педагогическихъ требованій, предъявляемыхъ къ начальной школѣ Само собою разумѣется, что тотъ же курсъ начальной ариѳметики, хотя бы и съ нѣкоторыми сокращеніями, можетъ и долженъ быть пройденъ также и въ двухгодичныхъ начальныхъ школахъ Практика можетъ потребовать только того, чтобы нѣкоторыя изъ вышеразсмотрѣнныхъ ученій были, *по недостатку времени*, исключены изъ курса двухгодичной школы Такихъ статей довольно много, и къ ихъ числу принадлежатъ статьи а) о четырехъ дѣйствіяхъ надъ составными именованными числами и б) о дробяхъ вообще (не включая сюда необходимыхъ ребенку познаній о взаимныхъ отношеніяхъ $^1/_2$, $^1/_4$ и $^3/_4$ и о результатахъ дѣйствіи надъ этими дробями) Исключеніе этихъ статеи изъ курса ариѳметики второго года, конечно, даетъ громадное сбереженіе времени, которое можетъ пойти на осторожную проработку параграфовъ учебника Дозволительно такое сокращеніе курса ариѳметики второго года обученія въ двухгодичной школѣ по той причинѣ, что до производства первыхъ двухъ дѣйствій надъ составными именованными числами можно добраться въ крайнемъ случаѣ и самому и что въ производствѣ остальныхъ двухъ дѣйствій надъ именованными числами и всѣхъ дѣйствій надъ числами дробными въ практической жизни надобность представляется, сравнительно говоря, довольно рѣдко Педагогическія же цѣли, преслѣдуемыя курсомъ ариѳметики, отъ подобнаго сокращенія пострадали-бы весьма незначительно

Весьма возможно, что и въ болѣе благоустроенной трехгодичной школѣ потребуется подобное сокращеніе намѣченнаго выше курса второго года обученія Но если бы какія либо исключительныя обстоятельства и обусловливали необходимость подобнаго, вообще нежелательнаго сокращенія, то учащіи, и безъ подробныхъ указаній, будетъ въ состояніи, на основаніи всего изложеннаго, сдѣлать необходимыя ему измѣненія въ разработанномъ выше курсѣ

Пособія въ курсѣ второго года

§ 10 Въ заключеніе необходимо сказать нѣсколько словъ об употребленіи наглядныхъ пособій при прохожденіи курса, намѣченнаго выше Эти пособія должны быть двухъ родовъ 1) пособія преслѣдующія цѣль ознакомленія дѣтей съ разными единицам *мѣръ*, и 2) пособія, помогающія проработкѣ тѣхъ или иныхъ *ста тей* курса О пособіяхъ перваго рода выше уже замѣчено было что дѣти должны имѣть о нѣкоторыхъ единицахъ мѣры непремѣнн наглядное представленіе таковы величина фута, аршина, дюйма вершка и т п Извѣстно, что большинство взрослыхъ не обладают такимъ глазомѣромъ, чтобы безошибочно отложить на бумагѣ или на веревочкѣ длину аршина, фута, дюима, вершка и т п Было бы поэтому неосновательно требовать отъ дѣтей подобнаго глазо мѣра но о его развитіи должно позаботиться при обученіи ариѳме тикѣ Прямо необходимо, чтобы дѣти *изъ опыта* знали—что больше футъ или аршинъ, дюимъ или вершокъ и знали это не только теоретически и благодаря своей памяти, но также и благодаря наглядному знакомству съ этими мѣрами Желательно, съ практической точки зрѣнія, подобное ознакомленіе ихъ также и съ величиною метра (при чемъ вовсе не необходимо посвящать ихъ во всѣ частности метрической системы), съ вѣсомъ фунта, лота и т п

Что касается наглядныхъ пособіи второго рода, преслѣдующихъ цѣли лучшаго усвоенія статей ариѳметики то наилучшимъ изъ нихъ должно, *рядомъ со „спичками“*, считать обыкновенные русскіе счеты Всякой школѣ слѣдовало бы имѣть одинъ экземпляръ счетовъ такого устройства, чтобы, во 1-хъ, они были значительн больше обычныхъ торговыхъ счетовъ и, во 2-хъ, чтобы проволоки различныхъ классовъ были отдѣлены другъ отъ друга болѣе значительнымъ промежуткомъ, чѣмъ проволоки разныхъ разрядовъ одного и того же класса Такъ называемая „солома“ (спички) можетъ быть полезна преимущественно на первыхъ ступеняхъ курса второго года обученія, хотя къ помощи этого пособія не предосудительно прибѣгать и на дальнѣйшихъ ступеняхъ обученія, если въ томъ представляется надобность

Наконецъ, относительно дробныхъ счетовъ различнаго устройства должно сказать, что они могутъ быть отнесены къ числу пособій, преслѣдующихъ наглядное усвоеніе дѣтьми скорѣе *величин* долей, чѣмъ тѣхъ или иныхъ *ученій* о дробяхъ Такъ какъ *представленіе* дроби и сужденіе о *величинѣ* различныхъ долеи (т е такихъ дробей, которыхъ числитель равенъ единицѣ) принадлежи къ числу не представляющихъ, при усвоеніи ихъ дѣтьми, как іхъ либо особенныхъ затрудненій, и такъ какъ, кромѣ того, такъ называемые дробные счеты довольно дороги то ихъ пріобрѣтені не необходимо Наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ при прохожденіи курса дробей можетъ служить листъ или даже лента бумаги которую можно весьма легко раздѣлить на 2, на 4, на 8 и т д частей и которой раздѣленіе на иное число частеи тоже можетъ быть, при нѣкоторомъ развитіи глазомѣра, произведено болѣе ил менѣе удачно Полезно раздать учащимся подобныя ленты разно длины, но полезно это, конечно, не для упражненія ихъ въ раздѣленіи подобныхъ лентъ по глазомѣру (это умѣніе не имѣетъ прямого отношенія къ ариѳметикѣ), а только для нагляднаго усвоенія ими мысли о *возможности* подобнаго раздѣленія данной длины на равныя между собою части и для развитія *представленій* о взаимномъ отношеніи *нѣкоторыхъ* дробей другъ къ другу, о приведеніи дробей къ одному знаменателю, и т п

ГЛАВА V

Третій годъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ.

§ 1 Курсъ *начальной* ариѳметики, какъ мы уже это видѣли выше, можетъ и долженъ быть пройденъ въ первые два года обученія въ начальной трехгодичной школѣ Возможность эта однако обусловливается двумя характерными особенностями рекомендуемаго и разработаннаго выше курса 1) отсутствіемъ такъ называемаго „изученія“ чиселъ, въ какой бы оно формѣ ни проявлялось, и 2) отсутствіемъ въ числѣ задачъ такихъ, къ рѣшенію которыхъ должны быть приложены алгебраическіе пріемы, т е задачъ на уравненія При этомъ отъ учащихся, прошедшихъ этотъ курсъ, нельзя, конечно, требовать *теоретическихъ познаній* по предмету ариѳметики Главное вниманіе въ теченіе первыхъ двухъ лѣтъ обученія было обращаемо на *умѣніе* учениковъ справляться съ ариѳметическими вычисленіями и на то, чтобы вычисленія дѣлались вѣрно, и *болѣе или менѣе быстро, по сознательно и твердо* усвоеннымъ образцамъ, чтобы дѣти умѣли вѣрно исполнять то или иное вычисленіе не только машинально, но съ толкомъ и съ возможно большимъ разумѣніемъ Изъ этого, впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ, что быстрое машинальное производство вычисленій есть умѣніе, недостойное отведенія ему мѣста въ курсѣ начальной ариѳметики это умѣніе представляетъ практическую важность, которой нельзя отрицать ни въ какомъ случаѣ а потому нѣкоторая машинальность въ концѣ-концовъ должна быть учащимися пріобрѣтена Но не надо преувеличивать значеніе быстраго вычисленія, хотя отвести надлежащее мѣсто этому вычисленію въ курсѣ отнюдь не безполезно,— и притомъ мѣсто это необходимо ему отвести особенно въ курсѣ третьяго года обученія

Характер курса 3 го года

Курсъ этого года обученія слагается вообще изъ немногихъ элементовъ, но ихъ усвоеніе должно удовлетворять слѣдующимъ требованіямъ 1) рекомендуемому выше курсу начальной ариѳметики слѣдуетъ въ третій годъ обученія придать болѣе или менѣе *теоретическій* характеръ, для чего можетъ служить руководство въ родѣ моего „Краткаго учебника начальной ариѳметики“, 2) въ этомъ курсѣ не должно, упускать изъ виду умѣніе *быстро* на счетахъ, 3) ученія, соприкасающіяся съ коммерческими вычисленіями (въ особенности правила процентовъ и пропорціональнаго дѣленія), а равно сокращенные способы вычисленія, когда они просты и удобны, тоже не должны быть забываемы, 4) курсъ первыхъ двухъ лѣтъ обученія долженъ быть по возможности дополняемъ умѣніями, которыя дѣтьми ранѣе не усвоены, напр умѣніемъ рѣшать задачи на вычисленіе времени поверхностей и объемовъ и т п, 5) дѣти должны быть ознакомлены съ нѣкоторыми геометрическими терминами и основными представленіями и ученіями геометріи измѣрительной, для чего можетъ служить руководство въ родѣ „Краткаго изложенія нѣкоторыхъ ученій геометріи", приложеннаго къ моему„ Краткому учебнику ариѳметики", наконецъ, 6) дѣтей въ теченіе третьяго года обученія, если останется время, можно ознакомить также со способами рѣшенія наиболѣе типичныхъ задачъ алгебраическаго характера

Курсъ третьяго года здѣсь не раздѣленъ на ступени, такъ какъ это дѣленіе для него не было бы цѣлесообразно методическая послѣдовательность, подобная той, которая необходима въ курсѣ двухъ лѣтъ обученія, здѣсь не была бы возможна Одно должно помнить, а именно, что весь курсъ долженъ по возможности приноравливаться, такъ сказать, примыкать къ изученію учебника въ классѣ въ этомъ—руководящее начало занимающаго насъ курса.

потребленіе учебника

§ 2 Внесеніе большаго количества теоретическихъ ученій въ курсъ ариѳметики третьяго года обученія, какъ это уже замѣчено выше, можетъ быть облегчено, главнымъ образомъ, благодаря учебнику Чтеніе въ классѣ текста болѣе или менѣе толковаго и возможно краткаго учебника, притомъ чтеніе медленное, толковое и сопровождаемое цѣлесообразными разъясненіями учениковъ и учителя, въ состояніи внести очень много полезной сознательной работы въ занятія учащихся даннымъ предметомъ Для этого можно а) заставлять учащихся поочередно читать текстъ учебника (отъ точки до точки) и связывать съ прочитаннымъ цѣлесообразныя разъясненія со стороны читающаго, его слушателей, а въ случаѣ надобности и со стороны самого учителя б) самому учителю читать и привлекать учащихся къ работѣ надъ прочитаннымъ Опредѣленія и правила при этомъ должны быть (конечно, *послѣ* предварительной классной проработки и разъясненіи) усвоиваемы по учебнику, по возможности слово-въ-слово, даже на-память Важно не то, что „ лучше учебника не скажешь",—какъ говаривали въ старину учителя, для которыхъ методическія цѣли обученія не существовали,—а то, что учащихся слѣдуетъ пріучать къ точной рѣчи и къ сжатому изложенію, примѣромъ и образцомъ которыхъ должно быть изложеніе учебника

Само собою при этомъ разумѣется, что только то можетъ быть въ благоустроенной начальной школѣ усваиваемо на-память, что уже вполнѣ, такъ сказать, до тонкости извѣстно ученику и что имъ въ совершенствѣ усвоено на практикѣ (таковы правила производства дѣйствій) или во время урока (таковы опредѣленія и разсужденія ариѳметическаго содержанія) Начальному учителю отнюдь не должно забывать а) что заучиваніе наизусть не усвоеннаго и не понятаго учащимся текста—не только безполезно, но даже прямо вредно, и б) что съ другой стороны, новѣйшая педагогика осудила только *безсмысленное* заучиваніе наизусть, вовсе не будучи склонна отрицать необходимость *разумнаго* усвоенія на-память нѣкоторыхъ элементовъ курса во многихъ случаяхъ учебной практики

Въ учебникѣ каждое ученіе, каждая фраза и даже каждое слово должны учащемуся напоминать цѣлый рядъ практическихъ умѣній и ариѳметическихъ мыслей, имъ уже *ранѣе усвоенныхъ* на урокахъ Поэтому, при проработкѣ подъ руководствомъ учителя текста того или иного учебника, должно выяснять этотъ текстъ вполнѣ подробно, отыскивая съ учащимся причины—почему данное ученіе *выражено* такъ, а не иначе, почему употреблено то, а не иное слово, и т д Такъ напр, при прохожденіи текста моего „Краткаго учебника начальной ариѳметики" придется обратить вниманіе на опредѣленія, на различіе между общепринятыми, для удобства, техническими *правилами* (способами производства дѣйствія) и ученіями, не заключающими въ себѣ ничего условнаго, и т д Разъясненій потребуютъ также ученія о провѣркѣ дѣйствій, о происхожденіи дроби, и т п

Особенно внимательно учитель долженъ отнестись, во 1-хъ, къ различію между тѣми ученіями, которыя *необходимо* вытекаютъ изъ основныхъ понятій о дѣйствіяхъ, и тѣми, которыя отличаются большею или меньшею условностью, во 2-ыхъ, также вообще къ различію между необходимостью и полезностью или дозволительностью чего-либо Напр, при умноженіи числа на 10 письменное обозначеніе произведенія *непремѣнно* будетъ отличаться отъ письменнаго обозначенія множимаго нулемъ на мѣстѣ единицъ, число, дѣлящееся на 4, непремѣнно дѣлится по-поламъ на-цѣло, и т д Не необходимо, но *полезно* подписывать многозначныя слагаемыя одно подъ другимъ, полезно, но не необходимо приводить дроби, при сложеніи ихъ, къ общему *наименьшему* знаменателю и т п Обращать вниманіе на подобныя различія возможно, конечно, только тогда, когда въ дѣтяхъ вообще и въ особенности при проработкѣ ими текста учебника, поддерживался и развивался инстинктъ *сознательнаго* отношенія къ дѣлу Только при соблюденіи этого условія усвоеніе дѣтьми текста учебника совершится какъ бы само собою и принесетъ несомнѣнную пользу дѣлу, только при соблюденіи этого условія возможно, чтобы текстъ учебника былъ вполнѣ усвоенъ учащимися не только въ своемъ словесномъ выраженіи, но также со всѣмъ внутреннимъ его смысломъ, во всемъ внутреннемъ его значеніи

§ 3 Въ быстромъ вычисленіи можно упражнять дѣтей, конечно, только между прочимъ, но каждомъ урокѣ должно посвятить нѣкоторую его часть спеціально упражненіямъ въ быстромъ вычисленіи Этимъ упражненіямъ должно придавать видъ по возможности простой Но извѣстно, что вычислять численные примѣры, зада- **Быстрота вычисленій и употребленіе скобокъ** ваемые ученикамъ вторымъ лицомъ, имъ гораздо легче, чѣмъ дѣлать хотя бы и вслухъ, тѣ же вычисленія безъ всякаго посторонняго участія Вотъ почему необходимо въ третій годъ ознакомить учащихся съ употребленіемъ скобокъ ранѣе, чѣмъ приступить къ проработкѣ учениками подъ непосредственнымъ контролемъ учащаго тѣхъ или иныхъ изустныхъ вычисленій Записанное съ помощью скобокъ вычисленіе, подлежащее изустному выполненію, заставитъ учениковъ поупражняться въ *самостоятельномъ* изустномъ вычисленіи

Проработка ученія о скобкахъ можетъ быть двоякаго рода 1) Можно пріучить дѣтей ставить скобки во *всѣхъ* случаяхъ, когда требуется совершить дѣйствіе надъ ариѳметическимъ выраженіемъ тогда ученіе о скобкахъ для нихъ очень доступно, но формулы получаются при этомъ часто крайне громоздкія и неудобныя вслѣдствіе того, что въ нихъ слишкомъ много скобокъ Такъ напр, вообще не принято употреблять скобки для обозначенія выраженій $2+7+5+9$, $2\times8+7\times9-4$ и т п, т е не принято писать

$$[(2+7)+5]+9,\ [(2\times8)+(7\times9)]-4, \text{ и т д}$$

учащіеся же будутъ прибѣгать къ скобкамъ во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, если ихъ учили писать скобки всегда, когда надо обозначить дѣйствіе надъ сложнымъ выраженіемъ 2) Можно ихъ научить общепринятому употребленію скобокъ, т е научить ихъ прибѣгать къ скобкамъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда безъ скобокъ запись получаетъ иной смыслъ Но это сдѣлать гораздо труднѣе, потому что тогда дѣтямъ приходится усвоить себѣ не только случаи, когда скобки *можно* ставить и когда ихъ ставить нельзя, но и тѣ случаи, когда скобокъ *не принято* писать —Изъ изложеннаго выше явствуетъ, что проработка ученія о скобкахъ, рекомендуемаго въ первомъ пунктѣ, требуетъ меньшаго количества времени, что дѣлаетъ ее и болѣе удобною въ начальной трехгодичной школѣ Во всякомъ случаѣ лучше, если учащійся поставитъ лишнюю, но не искажающую смысла записи, пару скобокъ, чѣмъ если онъ не поставитъ скобокъ тамъ, гдѣ это необходимо, это послѣднее и можетъ имѣть мѣсто въ случаѣ не вполнѣ основательной проработки ученія о скобкахъ по программѣ второго пункта

Когда скобки пройдены, то можно приступить къ упражненіямъ, цѣль которыхъ выработка умѣнія быстро вычислять уже безъ всякой посторонней помощи Къ этимъ упражненіямъ можно возвращаться каждый разъ, когда это будетъ въ интересахъ внесенія разнообразія въ занятія учениковъ подъ непосредственнымъ контролемъ учителя

Сокращеніе вычисленій

§ 4 Но, во избѣжаніе недоразумѣній, должно отличать упражненія въ быстромъ вычисленіи отъ упражненій въ вычисленіи сокращенномъ, упражненія этихъ двухъ родовъ по самому существу своему различны

Сокращеніе вычисленій обусловливается исключительно лишь величиною данныхъ чиселъ и тѣми или иными свойствами даннаго дѣйствія Такъ, напр, при прибавленіи 99 къ 34 можно прибавить къ 34 цѣлую сотню, а отъ полученной суммы отнять единицу, результатомъ чего явится число 133, такое производство сложенія величины одного изъ слагаемыхъ, а также зависитъ отъ того, что отъ прибавленія къ одному изъ слагаемыхъ одной единицы сумма увеличивается равнымъ образомъ на одну единицу Другое дѣло— вычисленіе быстрое его возможность обусловливается хорошимъ знаніемъ пріемовъ, правилъ дѣйствія и таблицъ и умѣніемъ ихъ быстро, не теряя времени, прилагать

Само собою разумѣется, что перечислять тѣ свойства, на которыхъ основано производство сокращенныхъ вычисленій, пока эти свойства очевидны, не слѣдуетъ при обученіи ариѳметикѣ, разсчитанномъ на потребности начальной школы, ибо такое перечисленіе дѣтямъ непосильно, а времени отняло бы много Сами по себѣ законы этого рода дѣтямъ понятны, поэтому гораздо лучше *пользоваться* тѣми знаніями учащихся, которыя могутъ быть причислены къ инстинктивнымъ, если можно такъ выразиться, (правильнѣе— несознаннымъ) умѣніямъ Каждый изъ учащихся старшаго и даже средняго отдѣленія начальной школы пойметъ, что мы имѣемъ право, также и съ помощью вышеуказаннаго пріема, прибавить 99 единицъ къ 34-мъ, и этого совершенно достаточно То же справедливо большею частью и относительно остальныхъ случаевъ сокращеннаго производства нѣкоторыхъ дѣйствій надъ числами, допускающими подобныя „удобства"

Само собою разумѣется, что возможность сокращеній въ вычисленіяхъ должна быть показана учащимся въ связи съ соотвѣтствующими параграфами „Краткаго учебника"—либо въ видѣ исключенія изъ какого-нибудь общаго правила, либо въ видѣ его подтвержденія, либо же въ видѣ вывода или слѣдствія, вытекающаго изъ даннаго правила или ученія

§ 5 Изъ такъ называемыхъ тройныхъ правилъ, кромѣ простого, особенно важны для учащихся начальной школы правило процентовъ и правило пропорціональнаго дѣленія Что же касается остальныхъ, то изъ нихъ а) сложное тройное (не считая примѣненія его къ правилу процентовъ) не особенно важно по своимъ приложеніямъ, б) правило смѣшенія 1-го рода не заслуживаетъ выдѣленія въ особую статью, в) правило смѣшенія 2-го рода не имѣетъ ничего общаго съ ариѳметикою, если занимается вопросами неопредѣленными, точное рѣшеніе которыхъ возможно только съ помощью алгебраическаго анализа, наконецъ, г) цѣпное правило неумѣстно въ курсѣ начальной ариѳметики по причинѣ крайне рѣдкаго примѣненія къ практическимъ вопросамъ и ничтожнаго развивательнаго значенія Развивательный элементъ задачъ на сложное тройное правило заключается въ возможности на этой почвѣ показать учащимся—какъ громадно вліяніе *условій* при рѣшеніи такихъ задачъ, которыя имѣютъ дѣло съ величинами особаго рода, такъ называемыми въ наукѣ пропорціональными величинами Само собою разу-

Тройныя правила

мѣется, что въ виду этой цѣли не для чего задачи этого рода особенно загромождать условіями и что силa не въ числѣ условіи вполнѣ достаточно подчиненіе величины искомой двумъ, много тремъ, условіямъ Во всякомъ удовлетворительномъ учебникѣ ариѳметики можно найти изложеніе способовъ рѣшенія задачъ на сложное правило и на правило процентовъ съ помощью „приведенія къ единицѣ“, и учителю надо, только не увлекаясь продолжительнымъ изложеніемъ, а привлекая учениковъ къ участію въ рѣшеніи задачи, показать учащимся пріемы, излагаемые въ учебникахъ чтобы добиться болѣе или менѣе удовлетворительныхъ результатовъ Небезполезно, однако, при рѣшеніи задачъ на сложное тройное правило, всегда повторять, что обозначаетъ каждый новый результатъ, чего обыкновенно не дѣлаютъ съ столь рѣзкой формѣ, какъ слѣдуетъ Пусть, напр , предложена задача (умышленно приводится задача съ шестью величинами, для того, чтобы яснѣе выступила особенность ея рѣшенія отмѣченная курсивами) „Партія землекоповъ въ 26 человѣкъ можетъ вырыть каналъ въ 45 саженей длины, 9 саж ширины и 4 сажени глубины въ теченіе 40 дней, работая по 12 часовъ въ день Какой длины каналъ могутъ вырыть 39 землекоповъ, если ширина канала должна быть 5 саженей, а глубина 9 саженей, работая въ теченіе 80 дней по 10 часовъ въ день?“—Разсуждаемъ такъ каналъ въ 45 саженей длины могутъ, при извѣстныхъ изъ задачи условіяхъ, вырыть каналъ длиною въ

$$\frac{45}{26}\text{ саж },$$

а 39 человѣкъ при тѣхъ же условіяхъ выроютъ каналъ длиною въ

$$\frac{45\times 39}{26}\text{ саж },$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ въ теченіе 40 дней, въ теченіе же одного дня можетъ быть вырытъ каналъ длиною въ

$$\frac{45\times 39}{26\times 40}\text{ саж}$$

а въ теченіе 8-ми дней можетъ быть вырытъ каналъ длиною въ

$$\frac{45\times 39\times 80}{26\times 40}\text{ саж },$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ при 12-ти-часовои ежедневной работѣ, а при часовой работѣ можетъ быть вырытъ каналъ, при тѣхъ же условіяхъ, длиною въ

$$\frac{45\times 39\times 80}{26\times 40\times 12}\text{ саж },$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ при часовой работѣ, а при десятичасовой ежедневной работѣ можетъ быть вырытъ каналъ длиною въ

$$\frac{45\times39\times80\times10}{26\times40\times12} \text{ саж},$$

такой длины каналъ можетъ быть вырытъ, если ширина канала равна 9 саж, если требовалось вырыть каналъ въ одну сажень шириною то длина канала была бы, очевидно, въ 9 разъ больше, чѣмъ при длинѣ канала, равной 9-ти саж, т е была бы равна

$$\frac{45\times39\times80\times10\times9}{26\times40\times12} \text{ саж},$$

такой длины каналъ былъ бы вырытъ, если бы ширина была равна одной саж, но ширина канала должна быть равна 5-ти саж, потому длина канала, очевидно, будетъ

$$\frac{45\times39\times80\times10\times9}{26\times40\times12\times5} \text{ саж},$$

такой длины каналъ былъ бы вырытъ, если бы глубина должна была быть равна 4-мъ саж, а при глубинѣ въ одну сажень былъ бы вырытъ каналъ въ 4 раза длиннѣе, т е въ

$$\frac{45\times39\times80\times10\times9\times4}{26\times40\times12\times5} \text{ саж},$$

такой длины каналъ былъ бы вырытъ, если бы глубина его должна была бы равняться одной сажени, но глубина канала на самомъ дѣлѣ должна быть равна 9 саж, а потому длина его, очевидно, будетъ въ 9 разъ меньше, или равняется

$$\frac{45\times39\times80\times10\times9\times4}{26\times40\times12\times5\times9} \text{ саж, т е } 90 \text{ саж}$$

При рѣшеніи задачъ на тройное правило и проценты не только въ трехгодичной начальной школѣ, но и въ школахъ съ болѣе обширнымъ курсомъ, не вполнѣ цѣлесообразно прибѣгать къ пропорціямъ, ученіе о которыхъ умѣстнѣе въ курсѣ начальной алгебры, чѣмъ въ курсѣ начальной же ариѳметики Это тѣмъ справедливѣе, что и развивательныхъ элементовъ въ томъ способѣ рѣшенія задачъ этого рода, который извѣстенъ подъ именемъ способа приведенія къ единицѣ, гораздо болѣе, чѣмъ въ способѣ рѣшенія тѣхъ же задачъ помощью пропорцій

§ 6 Задачи на правила процентовъ для учащихся старшаго отдѣленія представляютъ нѣкоторыя трудности лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда вопросъ касается времени, процентной таксы и величины капитала, но онѣ вполнѣ преодолимы, если только дѣтьми усвоено понятіе процента и если они не затрудняются примѣненіемъ дѣйствія дѣленія къ частнымъ случаямъ Задачи на учетъ векселей совершенно неумѣстны въ курсѣ начальной ариѳметики прежде всего потому, что теорія этого правила не вполнѣ доступна дѣтямъ, практическая же важность задачъ этого рода велика только въ чисто-коммерческихъ вычисленіяхъ, въ числѣ каковыхъ на первомъ планѣ и стоитъ это правило Кромѣ того, случаевъ примѣненія этихъ правилъ въ жизни окончившихъ курсъ начальной школы, конечно, представляется очень мало, а развивательное значеніе ихъ, если правило учета векселей проходится не во всемъ его объемѣ, весьма незначительно

При ученіи о процентѣ и задачахъ на проценты полезно обратить вниманіе на самую плодотворную точку зрѣнія на эти ученія, состоящую въ слѣдующемъ

1) слово „процентъ" замѣняетъ собою слова „сотая доля", такъ, найти 6% какого нибудь числа значитъ найти $\frac{6}{100}$ этого числа, узнать, сколько процентовъ 36-ти составляетъ 27 значитъ узнать—сколько сотыхъ долей 36-ти составляетъ 27, и т п

2) слова „*отдать деньги взаймы* (или *въ ростъ*) *по пяти % годовыхъ*" означаютъ, что ихъ надо отдать съ тѣмъ, чтобы по прошествіи года получить, кромѣ отданной суммы, еще $\frac{5}{100}$ этой суммы, точно также, *взять* извѣстную сумму денегъ взаймы *изъ 6% годовыхъ* значитъ взять эту сумму съ тѣмъ, чтобы по прошествіи года кромѣ этой суммы, уплатить еще $\frac{6}{100}$ взятой суммы (Ср „Учебникъ ариѳметики для ср уч зав" Шохоръ-Троцкаго, изд 2-ое)

Гораздо труднѣе въ курсѣ ариѳметики начальной школы задачи на пропорціональное дѣленіе, или такъ называемое правило товарищества Съ простѣйшими случаями этого правила дѣти должны быть ознакомлены, конечно, ранѣе всего, а именно со случаями, въ которыхъ изъ всѣхъ искомыхъ частей одна въ какое нибудь цѣлое число разъ менѣе остальныхъ Степень трудности возрастаетъ съ появленіемъ, если можно такъ выразиться, безпорядка во взаимныхъ отношеніяхъ искомыхъ величинъ другъ къ другу На этой ступени обученія дѣти впервые знакомятся со смысломъ выраженія „такая-то величина относится къ такой-то, какъ 2 къ 3-мъ", и т п Здѣсь не мало труда учителю приходится положить на то, чтобы они вполнѣ поняли самый смыслъ и сущность подобнаго отношенія и возможность выразить это отношеніе въ видѣ отвлеченной дроби Если проработка задачъ съ болѣе сложными отношеніями искомыхъ величинъ отниметъ у учащихся слишкомъ много времени, то можно ограничиться проработкою задачъ наименѣе сложныхъ, къ числу каковыхъ принадлежатъ задачи, въ коихъ искомыя величины относятся между собою по порядку какъ нѣкоторыя числа

Задачи на время поверхности и объемы

§ 7 Относительно задачъ на вычисленіе времени, поверхностей и объемовъ должно помнить только то, что изъ нихъ наиболѣе часто встрѣчаются задачи на вычисленіе времени и что задачи на переводъ календарныхъ данныхъ въ числовыя и обратно—требуютъ не только нѣкотораго навыка, но также большого усилія воображенія и развитія нѣкоторой способности къ отвлеченному мышленію

Только „метода цѣлесообразныхъ задачъ и упражненій" въ этомъ случаѣ можетъ привить учащимся должное пониманіе задачъ на время Надо при этомъ стремиться къ тому, чтобы для учениковъ величина промежутковъ времени не была пустымъ звукомъ, а связывалась съ представленіями живыми и ясными

Упражненія въ раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ, выражающихъ величину промежутковъ времени, доступны учащимся, впрочемъ, не менѣе упражненій въ упомянутыхъ преобразованіяхъ именованныхъ чиселъ другого рода Точно также и четыре дѣйствія надъ этими числами доступны дѣтямъ и даже во второй годъ обученія Но много трудностей представляется при вычисленіи величинъ, выраженныхъ въ календарныхъ данныхъ, напр. при рѣшеніи задачи о томъ, сколькихъ лѣтъ отъ роду умеръ человѣкъ, родившіися 26 Декабря 1843 года, а скончавшійся 7 Іюля 1878 года Для уразумѣнія задачъ этого рода дѣти должны уяснить себѣ—*что это значитъ* 1843-ій годъ, 1878-ой годъ и т д

Задачамъ на вычисленіе поверхностей и объемовъ, конечно, также не слѣдуетъ придавать особеннаго значенія, пока онѣ не связаны болѣе или менѣе опредѣленнымъ образомъ съ соотвѣтствующими ученіями начальной геометріи Какія изъ этихъ ученій умѣстны въ начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ и какъ ихъ сдѣлать наиболѣе соотвѣтствующими и количеству времени, далеко недостаточному для прохожденія (болѣе или менѣе полнаго) этого предмета, и умственному развитію учащихся—мы ознакомимся нѣсколько ниже Здѣсь однако умѣстно замѣтить, что на этой ступени ознакомленіе не только съ мѣрами поверхностей и объемовъ, но и съ самымъ измѣреніемъ обязательно должно отличаться возможно большею наглядностью, ибо въ противномъ случаѣ рѣшеніе задачъ на измѣреніе поверхностей и объемовъ будетъ для учащихся дѣломъ крайне не интереснымъ, а для ихъ умственнаго развитія—безполезнымъ

§ 8 Что касается тѣхъ геометрическихъ понятій и познаній, которыя умѣстно и слѣдовало бы сообщать ученикамъ начальной школы съ трехгодичнымъ курсомъ, то ихъ можно перечислить не иначе, какъ только выяснивъ характеръ и цѣль сообщенія какихъ бы то ни было геометрическихъ познаній въ курсѣ начальной школы Элементарная геометрія въ объемѣ среднеобразовательнаго курса представляетъ собою учебный предметъ, требующій отъ школы для своего прохожденія очень много времени, а отъ учащагося—болѣе или менѣе обширнаго умственнаго развитія Уже одно то, что въ подобномъ курсѣ геометріи должно пріучить ученика къ мысли о необходимости *доказывать* всякую истину,—если она только не принадлежитъ къ числу немногочисленныхъ истинъ, не требующихъ и не допускающихъ доказательства, т е къ числу аксіомъ,—ужъ одно это представляетъ собою такую внутреннюю особенность среднеобразовательнаго курса геометріи, которая является источникомъ цѣлой массы методическихъ трудностей Далѣе, не менѣе трудностей представляетъ собою стремленіе геометріи къ опредѣленію почти всѣхъ понятій, лежащихъ въ ея основѣ, хотя бы эти понятія съ логической и психологической точки зрѣнія и не особенно нуждались въ опредѣленіяхъ Само собою разумѣется по-

Геометрическія понятія

этому, что тѣ немногія ученія геометріи, которыя подлежатъ усвоенію въ начальной школѣ въ ней не должны и не могутъ быть проработаны въ томъ же духѣ, въ какомъ они изложены въ среднеобразовательныхъ курсахъ этого предмета Цѣль сообщенія учащимся въ начальной школѣ съ трехгодичнымъ курсомъ нѣкоторыхъ познаній по предмету геометріи можетъ заключаться 1) въ ознакомленіи ихъ съ нѣкоторыми геометрическими названіями, которыя часто употребляются въ ремеслахъ и въ жизни (уголъ, квадратъ параллельный, перпендикулярный, и т п), а также 2) въ ознакомленіи съ измѣреніемъ нѣкоторыхъ геометрическихъ протяженій прямыхъ, угловъ, окружности, площадей прямоугольника, параллелограмма, прямолинейнаго треугольника и круга, а также объемовъ прямоугольнаго параллелепипеда, треугольной пирамиды цилиндра, конуса и шара Тѣ ученія, которыя дѣтямъ не могутъ быть разъяснены, должны быть приняты ими на-вѣру, точно такъ же какъ ими принимаются на-вѣру нѣкоторыя ученія изъ другихъ областей знанія, сообщаемыя имъ на другихъ урокахъ Вообще отъ принятія учениками на-вѣру нѣкоторыхъ ученій вреда нѣтъ если только необходимость его сознана учащимся и если онъ при этомъ пріученъ къ пониманію различія между знаніемъ, принятымъ на-вѣру, и знаніемъ, провѣрка котораго доступна его уму

Указанною выше цѣлью обусловливается также и характеръ сообщенія учащимся упомянутыхъ выше геометрическихъ познаній Преподаваніе должно отличаться прежде всего полною осязательностью, наглядностью и ясностью Къ нагляднымъ пособіямъ и чертежу надо прибѣгать съ разумѣніемъ, съ толкомъ—вотъ правило, котораго не долженъ забывать учитель, если онъ не желаетъ впасть въ крайность излишняго многоговоренія (Ср § 13 гл II-й) Притомъ начинать дѣло съ тѣлъ и уже отъ нихъ переходить къ поверхностямъ и линіямъ нѣтъ особенной необходимости Начать можно съ *черченія* прямой линіи, не безпокоитесь при этомъ, что ученикъ будетъ приписывать ей толщину и ширину—этого онъ дѣлать не будетъ, а если бы это и случилось, то онъ и самъ очень скоро пойметъ, что когда говорятъ о длинѣ прямой, то при этомъ не имѣютъ въ виду ни толщины, ни ширины ея Въ „Краткомъ изложеніи нѣкоторыхъ ученій геометріи", приложенномъ къ „Сборнику упражненій по ариѳметикѣ для учащихся", учитель увидитъ—чего онъ не долженъ разъяснять, на чемъ остановиться подолѣе, когда прибѣгнуть къ наглядному пособію, и прочее Для него руководящей нитью долженъ всегда служить здравый смыслъ въ связи съ тѣмъ основнымъ педагогическимъ принципомъ, по которому дѣтямъ должно сообщать только доступное ихъ пониманію Съ другой стороны, не должно забывать, что разъясненіе ученій, которыя понятны и безъ разъясненій, не только излишне съ практической точки зрѣнія, но даже прямо вредно съ точки зрѣнія педагогической Черченіе отъ руки разныхъ прямолинейныхъ фигуръ и окружностей съ помощью нитки—основа этого курса *Дѣти должны этому научиться*

Въ концѣ § 2 этой же главы выяснено—какъ прорабатывать текстъ учебника съ учащимся третьяго отдѣленія Текстъ „Краткаго изложенія нѣкоторыхъ ученій геометріи“ можетъ быть проработанъ такимъ же точно образомъ, но съ тою разницею, что критическій смыслъ учащагося при этомъ работать не будетъ За-то тѣмъ сильнѣе ученикъ долженъ поработать надъ усвоеніемъ совершенно неизвѣстной ему терминологіи и незнакомыхъ ему *словъ* Каждая фраза „Краткаго изложенія“ *должна слѣдовать за предварительнымъ* разъясненіемъ со стороны учителя и за соотвѣтствующимъ *предварительнымъ* упражненіемъ избѣгать разъясненій онъ долженъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣтъ въ нихъ никакой надобности Напечатанное въ „Краткомъ изложеніи“ мелкимъ шрифтомъ ни въ какомъ случаѣ не можетъ считаться обязательнымъ для начальной школы, да и весь курсъ, данный въ этомъ „Краткомъ изложеніи“, не обязателенъ онъ разсчитанъ только на потребности школы, поставленной въ болѣе или менѣе благопріятныя условія

§ 9 Что касается изустныхъ вычисленій, то главные принципы, которымъ учащій долженъ слѣдовать, сводятся къ слѣдующимъ а) они не должны быть сложны и должны сообразовываться съ требованіями здраваго смысла ненормальна та школа, въ которой дѣти затрудняются въ умѣ сдѣлать сложеніе какихъ бы то ни было двузначныхъ чиселъ или найти $\frac{3}{4}$ какого угодно двузначнаго числа, дѣлящагося на 4, но дрессировать дѣтей въ изустномъ вычисленіи *сложныхъ* примѣровъ отнюдь не цѣлесообразно, б) вестись должны упражненія въ изустномъ вычисленіи особенно живо и энергично, дабы изустный счетъ представлялся учащемуся болѣе удобнымъ и скорымъ, чѣмъ вычисленіе письменное, и предлагать изустное вычисленіе можно поэтому только тогда, когда оно ведетъ къ цѣли быстрѣе, чѣмъ письменное, в) въ то время какъ письменныя вычисленія въ концѣ-концовъ должны вестись по возможности единообразно, вычисленія изустныя могутъ и должны воспитать въ учащемся вкусъ къ самостоятельному творчеству и самостоятельному пользованію особенностями данныхъ чиселъ Поэтому даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ вычисленія полезно требовать отъ учащихся различныхъ пріемовъ, напр $7 + 8$ они должны вычислять либо такъ $7 + 3 = 10$, $10 + 5 = 15$, либо такъ $8 + 2 = 10$, $10 + 5 = 15$, либо такъ $7 + 7 = 14$, $14 + 1 = 15$, либо такъ $8 + 8 = 16$, долой одинъ 15, либо такъ $10 + 8 = 18$, долой 3 пятнадцать, либо такъ $7 + 10 = 17$, долой 2 пятнадцать, и такъ далѣе г) на возможность самостоятельнаго творчества въ этихъ случаяхъ и на необходимость *всегда* пользоваться своимъ здравымъ смысломъ, а стало-быть, и при изустномъ вычисленіи, должно обращать вниманіе учащихся Для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ мною выпущена „Таблица“, которой употребленіе описано на оборотѣ ея и примѣненіе приводитъ къ отличнымъ результатамъ Надо помнить, что курсъ ариѳметики перваго года обученія въ начальной школѣ есть курсъ ариѳметики почти исключительно изустной

Изустныя вычисленія

огда предлагать задачи?

§ 10 Ариѳметическія задачи должны какъ это выяснено выше, быть вообще не цѣлью, а *средствомъ* обученія ариѳметикѣ, съ ихъ помощью должны быть *вырабатываемы* и *развиваемы* вѣрныя и ясныя представленія и понятія о четырехъ дѣйствіяхъ, внутреннемъ ихъ смыслѣ и о цѣли ихъ и т п, поэтому изъ десяти случаевъ въ девяти задача должна быть точкою исхода преподаванія, а не окончательною цѣлью его Вотъ что говоритъ извѣстный французскій педагогъ Жанъ Масе объ этомъ предметѣ „Развитіе человѣчества повторяется въ каждомъ малолѣтнемъ Первый, кому пришлось сдѣлать вычисленіе, началъ не съ отвлеченныхъ правилъ, излагаемыхъ въ учебникахъ Онъ, очевидно, прежде всего долженъ былъ не потеряться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ и задачъ, надъ которыми онъ могъ одержать побѣду, только пустивъ въ дѣло всѣ пружины своего ума, и онъ занимался этимъ искусствомъ вовсе не ради самого искусства Заставлять ребенка начинать съ отвлеченнаго правила и затѣмъ предлагать ему задачи—это значитъ идти наперекоръ ходу развитія человѣческаго ума Истинная метода состоитъ въ томъ, чтобы ставить ребенка въ условія, при которыхъ умъ человѣческій началъ изобрѣтать ариѳметику, и сдѣлать его, такъ сказать, свидѣтелемъ этого изобрѣтенія“ —Такова метода цѣлесообразныхъ задачъ, которую учащій долженъ прежде всего себѣ усвоить, прибѣгая къ задачамъ чаще для *выработки* ариѳметическихъ представленій, чѣмъ для ихъ *примѣненія*,—методы, въ духѣ которой составлены и настоящій учебникъ по предмету методики ариѳметики, и приноровленные къ этой методѣ сборники упражненій *для учащихъ* и *для учащихся*, составляющій отдѣльную книжку, содержаніе которой однако же вполнѣ согласовано со „Сборникомъ для учащихъ“ Только въ третій годъ обученія задачи могутъ являться обширнымъ полемъ для *примѣненія* учащимися ихъ ариѳметическихъ умѣній и познаній къ частнымъ случаямъ, и этимъ постановка задачъ въ курсѣ третьяго года отличается отъ постановки ихъ въ курсахъ первыхъ двухъ лѣтъ

какъ дѣлать вычисленія?

§ 11 Какъ дѣлать вычисленія?

1) Въ предѣлахъ первой сотни всѣ вычисленія должны дѣлаться изустно, а записывать надо только данныя числа и результаты, напр,

$$27+68=95 \quad 67-38=29$$
$$27\times3=81, \quad 57 \quad 3=19$$

2) Умноженіе и дѣленіе на однозначное число должны производиться изустно,

$$354\times7=2478, \quad 5396 \quad 4=1349$$

3) Изустно надо дѣлать вычисленія въ родѣ слѣдующихъ

$$376+99=475, \quad 878+999=1877$$
$$376-99=277, \quad 3567-999=2568$$
$$488+298=786, \quad 3864-499=3365$$
$$599+398=1000-3=997, \quad 599+299+398=1300-4$$

4) При сложеніи очень многихъ слагаемыхъ,—во избѣжаніе необходимости начинать все вычисленіе сначала, если что нибудь помѣшало довести вычисленіе до конца, — полезно прибѣгать къ такому расположенію вычисленій, при которомъ записываются суммы единицъ отдѣльныхъ разрядовъ

495		
896	76	(сотенъ, т е единицъ наивысшаго разряда)
389	84	(десятковъ, т е единицъ слѣдующаго разряда)
564	75	(единицъ, т е единицъ перваго разряда)
975	8505	
898		
698		
539		
984		
836		
597		
638		

При этомъ единицы одинаковыхъ разрядовъ надо подписывать въ надлежащихъ мѣстахъ Ср „Учебникъ ариѳметики для ср уч зав“ Шохоръ-Троцкаго (изд 2-е), стр 12 § 17 Особенно велики выгоды такого производства дѣйствія, если сумма единицъ какого либо разряда больше ста

5) При сложеніи чиселъ, изъ которыхъ каждое близко къ единицѣ какого либо разряда или къ какому либо однозначному числу единицъ какого либо разряда, полезно записать всѣ приближенныя величины этихъ слагаемыхъ и числа, подлежащія прибавленію, въ одинъ, а числа, подлежащія вычитанію—въ другой столбецъ съ тѣмъ, чтобы изъ суммы однихъ вычесть сумму другихъ Напр

Данныя числа	Слагаемыя	Вычитаемыя
9 896	10 000	4
3 998	4 000	2
7 996	8 000	4
7 029	7 000	0
8 700	9 000	300
1 920	2 000	40
	29	
	40 029	

40 029
— 350
39 679 искомая сумма

6) При возможности соединенія нѣкоторыхъ слагаемыхъ въ круглыя числа надо предварительно это сдѣлать, и затѣмъ уже дѣлать сложеніе Для этого однако же требуется навыкъ въ отысканіи подобныхъ слагаемыхъ и хорошее „ариѳметическое“ зрѣніе

279	400
356	900
121	215
215	357
357	1872
544	

7) Столь любимые нѣкоторыми преподавателями ариѳметики примѣры на вычитанiе, въ которыхъ вычитаемое обозначено только девятками, а въ уменьшаемомъ встрѣчаются только единицы и нули, наиболѣе пригодны какъ-разъ не для обычнаго производства вычитанiя, а для болѣе краткаго и сообразнаго съ природою чиселъ *изустнаго* производства этого дѣйствiя

10 100 101	10 100 101	(уменьшаемое безъ перемѣны)
— 9 999 999	— 10 000 000	(приближенное вычитаемое)
	100 101	(невѣрная разность)

Разность же истинная на единицу болѣе, т е равна 100 102

Вообще закругленiе уменьшаемаго и вычитаемаго иногда можетъ быть крайне полезно, въ такихъ случаяхъ нельзя считать обычные способы производства вычитанiя болѣе согласными съ требованiями здраваго смысла, чѣмъ примѣненiе закругленiя данныхъ

8) *Помимо сокращенiя въ производствѣ умноженiя*, обусловливаемыхъ особенностями данныхъ чиселъ (ст § 56 второго изданiя „Учебника ариѳметики" Шохоръ-Троцкаго), въ *методическомъ* отношенiи заслуживаетъ вниманiя слѣдующiи способъ расположенiя вычисленiй при производствѣ умноженiя

$$\begin{array}{r}
\underline{878 \times 382 = 335\,396} \\
87800 \times 3 = 263\,400 \\
8780 \times 8 = \ \ 70\,240 \\
878 \times 2 = \ \ \ 1\,756
\end{array}$$

Этотъ способъ записи дѣйствiй крайне облегчаетъ внесенiе простоты въ объясненiе логическихъ причинъ и логической сущности умноженiя Впослѣдствiи надо записывать такъ

$$\begin{array}{r}
\underline{587 \times 473 = 277\,651} \\
234\,8 \\
41\,09 \\
1\,761
\end{array}$$

9) Расположенiе вычисленiй при производствѣ дѣленiя на многозначнаго дѣлителя полезно практиковать такое, при которомъ непригодная цифра частнаго и непригодное вычитаемое не подвергались бы поправкамъ, а прямо зачеркивались бы (цифры частнаго косою чертою слѣва и сверху внизъ направо, а вычитаемое—горизонтальною чертою, если оно велико) Если же вычитаемое мало, то опредѣливъ остатокъ, надо изъ него вычесть дѣлителя, повтореннаго столько разъ, сколькими единицами увеличена слишкомъ „слабая" цифра частнаго

10) Въ виду того, что дѣленiе на многозначнаго дѣлителя—дѣйствiе, рѣдко примѣняемое въ ежедневномъ быту и требующее очень большого навыка, полезно научить дѣленiю съ помощью таблицы Этотъ способъ дѣленiя особенно полезенъ когда дѣлитель многозначное незакругляемое число (напр 7 561, 3 498 и т п), а въ частномъ много цифръ, онъ примѣняется слѣдующимъ обра-

зомъ Пусть требуется найти частное отъ раздѣленія 6 678 561 на 548

Составляемъ таблицу

548 × 1 = 548
548 × 2 = 1 096
548 × 3 = 1 644
548 × 4 = 2 192
548 × 5 = 2 740
548 × 6 = 3 288
548 × 7 = 3 836
548 × 8 = 4 384
548 × 9 = 4 932

```
 6678561 | 548 = 12186
— 548
  1198
— 1096
   1025
—   548
    4776
—   4384
     3921
—    3388
      233
```

Вычисленія очевидны мы отыскиваемъ послѣдовательно всѣ цифры частнаго, подбирая наиболѣе близкія произведенія При этомъ исключается неувѣренность въ нѣкоторыхъ цифрахъ частнаго и часто встрѣчающаяся на практикѣ необходимость поправокъ въ случаѣ, когда мы невѣрно „задались“ цифрою частнаго

11) Обычные способы расположенія вычисленій при раздробленіи составныхъ именованныхъ чиселъ, недостаточно изящны и слишкомъ растягиваютъ запись сверху внизъ, кромѣ того оно (это — самая вредная сторона сказаннаго способа расположенія вычисленій) вноситъ путаницу въ наименованія и требуетъ слишкомъ много предосторожностей Поэтому полезно располагать вычисленія болѣе согласно съ сущностью этого преобразованія, напр, такъ

3 пуда 17 ф 26 лот 2 зол 81 доля = 1 270 353 доли

3 пуда = 40 ф × 3 = 120 ф, 120 ф + 17 ф = 137 *фунтовъ*

137 ф = 32 л × 137 = 137 л × 32 = 4384 л, 4384 л + 26 л = 4410 *лот*

4110

274

4410 л = 3 з × 4410 = 4410 з × 3 = 13230 з, 13230 з + 2 з = 13232 *зол*

13232 з = 96 д × 13232 = 13232 д × 96 = 1270272 *доли*

1323200

— 52928

1 270 272 д + 81 д = 1 270 353 доли

Отвѣтъ „1270353 доли“ можно записать послѣ знака равенства, слѣдующаго за записью даннаго именованнаго числа

12) Кромѣ обычнаго способа письменнаго производства дѣйствія вычитанія, есть еще способъ производства того же дѣйствія, основанный на томъ, что уменьшаемое есть сумма вычитаемаго съ искомою разностью Пусть требуется вичислить разность

28 789 — 14 365

Разсуждаемъ такъ пять да 4—девять, стало-быть цифра единицъ разности есть 4, далѣе шесть да 2 — восемь, стало-быть цифра десятковъ 2, три да 4 — семь, стало-быть, цифра сотенъ 4, затѣмъ четыре да 4 — восемь, стало-быть цифра тысячъ 4, наконецъ одинъ да 1—два, стало-быть, цифра десятковъ тысячъ 1 Такимъ образомъ мы постепенно опредѣлили цифры разности, начиная съ единицъ перваго разряда, и ихъ надо только записать

28 789	
14 365	
15 424	

Для большей ясности мы въ нашемъ расужденіи цифры уменьшаемаго и вычитаемаго на письмѣ замѣнили словами, и число единицъ каждаго разряда искомой разности обозначали цифрами Того же правила будемъ держаться и при нахожденіи разности чиселъ 427 235 и 249 578

Разсматриваемъ 249 578 какъ первое слагаемое, искомую разность—какъ второе, а уменьшаемое—какъ ихъ сумму и для разъясненія дѣла, изображаемъ это слѣдущимъ образомъ

249 578	
+	
427 235	

Затѣмъ разсуждаемъ такъ восемь да **7** пятнадцать, пишу цифру **7** подъ восемью и, эта цифра есть цифра единицъ разности, далѣе продолжаю такъ восемь да семь пятнадцать, пять записано, одинъ въ умѣ, одинъ да семь—восемь, да **5** тринадцать, пишу подъ семью цифру **5**, и эта цифра есть цифра десятковъ разности, затѣмъ разсуждаю такъ семь да одинъ—восемь, да **5**—тринадцать, три записано, одинъ въ умѣ, одинъ да пять шесть, шесть да **6** — двѣнадцать, подъ пятью пишу цифру **6**, и эта цифра есть цифра сотенъ разности И т д Вся трудность этого способа состоитъ въ томъ, что каждую цифру разности надобно написать въ тотъ моментъ, когда произносится ея значеніе Т е восемь да 7 (точасъ же надо изобразить 7 подъ цифрою 8) пятнадцать, пять записано одинъ въ умѣ, одинъ да семь восемь, восемь да 5 (тотчасъ же написать цифру 5 подъ цифрою 7) тринадцать, три записано, одинъ въ умѣ, одинъ да пять шесть, шесть да 6 (тотчасъ же надо изобразить цифру 6 подъ цифрою 5) двѣнадцать, два записано, одинъ въ умѣ, одинъ да девять—десять, десять да 7 (тотчасъ же цифру 7 записать подъ цифрою 9) семнадцать, семь записано, одинъ въ умѣ одинъ да четыре—пять, да 7 (тотчасъ же надо цифру 7 подписать подъ цифрою 4) двѣнадцать, два записано, одинъ въ умѣ, одинъ да два—три, три да 1 (тотчасъ же надо изобразить цифру 1 подъ цифрою два) Такимъ образомъ подъ числомъ

249 578

будетъ подписано 177 657,

изъ каковыхъ чиселъ послѣднее и есть разность между числами 427 235 и 249 578 Само собою разумѣется, что нѣтъ надобности, при этомъ способѣ производства вычитанія уменьшаемое писать непремѣнно подъ чертою, а вычитаемое надъ нею, какъ это сдѣлано выше, и что можно также найти цифры разности въ случаѣ, если запись сдѣлана такъ, какъ она обыкновенно дѣлается

13) Письменное производство дѣленія можно производить не записывая всякiи разъ произведенія, получаемаго отъ умноженія дѣлителя на число, обозначаемое отысканною цифрою частнаго

При этомъ изустно производимъ такія вычисленія 18 въ 63-хъ содержится 3 раза, трижды восемь двадцать четыре, да 9—тридцать три, трижды одинъ три, да три—шесть Сношу цифру 8, 18 въ 98-ми содержится 5 разъ, пятью восемь сорокъ, да 8 сорокъ восемь, пятью одинъ пять

1)	63 810	18
	9 8	3545
	81	
	90	
	0	

2) 74 561 | 83
   8 16 | 898
   691
   27

да четыре девять, и т д —При этомъ пользуются тѣмъ способомъ производства вычитанія, который изложенъ выше, въ пунктѣ 11-мъ, ср „Учебникъ ариѳметики“ Шохоръ-Троцкаго (изд 2-е, § 21) Такъ же выполнено второе вычисленіе

14) Достоинъ вниманія инструментальный способъ умноженія многозначнаго числа на многозначное съ подвижнымъ множителемъ и вспомогательными (изустными или письменными) вычисленіями Требуется помножить 876 на 543 Записываемъ это такъ

$876 \times 543 =$

| 3 4 5 |

с т	д т	т	с	д	ед
4	3	2	2	1	8
	3	2	2	1	
	0	3	4	4	
		2	8		
		5	0		

Затѣмъ переписываемъ на отдѣльную бумажку цифры множителя, но въ обратномъ порядкѣ, и кладемъ бумажку, какъ это показано въ рамочкѣ, такъ, чтобы цифра единицъ истиннаго множителя приходилась подъ цифрою единицъ множимаго, потомъ умножаемъ единицы на единицы, получаемъ $6 \times 3 = 18$, 8 записываемъ въ столбцѣ единицъ, 1—въ столбцѣ десятковъ Потомъ передвигаемъ подвижную бумажку влѣво на одну цифру, получимъ что цифра 3 (единицъ) будетъ подъ цифрою 7 (десятковъ), а цифра 4 (десятковъ) подъ цифрою 6 (единицъ), перемножимъ $7 \times 3 = 21$ $6 \times 4 = 24$, цифры 1 и 4 запишемъ въ столбцѣ десятковъ, а цифры 2 и 2—въ столбцѣ сотенъ Передвигаемъ множителя еще на одну цифру влѣво, получимъ, что подъ 876 будетъ подписано 345 легко видѣть, что отъ перемноженія цифръ, *состоящихъ въ одномъ и томъ же столбцѣ*, получимъ сотни Умножаемъ

$$8 \times 3 = 24 \quad 7 \times 4 = 28, \quad 6 \times 5 = 30,$$

въ столбецъ сотенъ записываемъ 4, 8 и 0, а въ столбцѣ тысячъ 2, 2 и 3 Передвигаемъ множитель еще на одну цифру влѣво тогда подъ 87 будутъ стоять цифры 45 Перемножаемъ цифры, стоящія въ одномъ столбцѣ

$$8 \times 4 = 32 \; , \; 7 \times 5 = 35,$$

Цифры 2 и 5 записываемъ въ столбецъ тысячъ, а 3 и 3—въ столбецъ десятковъ тысячъ Наконецъ, передвигаемъ множителя еще на одну цифру, и подъ 8-мью *окажется* цифра 5 Перемножимъ $8 \times 5 = 40$ Въ столбецъ десятковъ тысячъ записываемъ 0, а въ столбецъ сотенъ тысячъ 4 Сложивъ всѣ результаты, получимъ окончательный результатъ который можно записать рядомъ со знакомъ равенства $876 \times 543 = 476668$ Точно также можно начать съ высшей цифры множителя, поставивъ цифру его сотенъ подъ цифру сотенъ множимаго и подвигая множителя вправо

Этотъ способъ умноженія быстро и вѣрно приводитъ къ результату и не представляетъ собою никакихъ особенныхъ логическихъ и методическихъ трудностей для усвоенія учениками даж начальной школы, если самъ учитель пожелаетъ подучиться и усвоить его себѣ вполнѣ Этотъ способъ основанъ на томъ, что отъ умноженiя единицъ на единицы получаются единицы, единицъ на десятки и десятковъ на единицы—десятки единицъ на сотни сотенъ на единицы, и десятковъ на десятки—сотни отъ умноженiя единицъ на тысячи, тысячъ на единицы, сотенъ на десятки и десятковъ на сотни—тысячи И т д

Духъ обученiя

§ 12 Во всѣ моменты обученiя ариѳметикѣ, на всѣхъ его ступеняхъ, т е при обученiи изустнымъ и письменнымъ вычисленiямъ, при рѣшенiи задачъ и выполненiи письменныхъ работъ при изученiи учебника, учащiйся долженъ быть воспитываемъ въ духѣ уваженiя и любви къ вѣчной правдѣ, въ духѣ уваженiя къ здравому смыслу, къ сознательной работѣ и къ доброй волѣ человѣка въ преодолѣнiи препятствiй на пути къ знанiю Онъ долженъ быть воспитываемъ въ духѣ уваженiя къ истинному знанiю, къ искреннему и безкорыстному стремленiю прiобрѣсти его и къ стремленiю сохранить знанiе на всю жизнь Безъ воспитанiя въ дѣтяхъ *этого уваженiя* преподаванiе предметовъ, не соприкасающихся прямо съ нравственностью, ограничивается лишь малоцѣнною, съ точки зрѣнiя истинныхъ требованiй разумнаго воспитанiя, выучкою и дрессировкою дѣтей въ тѣхъ или иныхъ спецiальныхъ направленiяхъ, эта дрессировка не всегда къ тому же заслуживаетъ полнаго сочувствiя, являясь иногда лишь слѣдствiемъ недоразумѣнiя или временнаго увлеченiя Школа должна стремиться къ болѣе несомнѣннымъ, высокимъ, вѣчнымъ идеальнымъ цѣлямъ, которыя недостижимы безъ воспитанiя дѣтей въ намѣченномъ выше направленiи

ДОБАВЛЕНIЕ

Краткiй очеркъ методико-ариѳметическихъ системъ

Преподаванiе ариѳметики у Грековъ и Римлянъ

Было бы ошибочно думать, что только въ новѣйшее время возникла потребность въ соотвѣтствующихъ дѣтскому пониманiю прiемахъ обученiя ариѳметикѣ Въ одномъ изъ сочиненiй Платона уже есть прямыя указанiя на необходимость сдѣлать первоначальное обученiе счету *прiятнымъ* для дѣтей Далѣе Платонъ придаетъ обученiю ариѳметикѣ и громадное *воспитательное* значенiе и указываетъ на пользу обученiя дѣтей, которое основано на *счетѣ* плодовъ, вѣнковъ и т под предметовъ Важность наглядности при выработкѣ представленiй въ обученiи ариѳметикѣ такимъ образомъ установлена еще въ глубокой древности, но впослѣдствiи этотъ взглядъ былъ преданъ полному и незаслуженному забвенiю, такъ что Песталоцци имѣетъ все-таки полное право считаться отцомъ новѣйшей методики, если не считать Яна Аммоса Коменскаго, Дж Локка и Руссо его предшественниками и даже учителями на этомъ поприщѣ *) —У римлянъ обученіе ариѳметикѣ несомнѣнно занимало довольно важное мѣсто въ образованіи, они, по свидѣтельству Квинтиліана, Горація и Сенеки, придавали этому обученію большое *развивательное* значеніе Хотя въ литературѣ и нѣтъ достаточно подробныхъ историческихъ свѣдѣній объ обученіи ариѳметикѣ у грековъ и римлянъ, однако несомнѣнно то, что *обученіе у этихъ народовъ преслѣдовало не только практическія, но и развивательныя цѣли,* и что только по винѣ неудобныхъ системъ письменнаго обозначенія чиселъ, ариѳметика у этихъ народовъ не знала тѣхъ ученій, которыя составляютъ сущность современной ариѳметики Особенно много трудностей представляли для древнихъ дѣйствія дѣленія и умноженія Во всякомъ случаѣ обученіе ариѳметикѣ у грековъ и римлянъ отличалось нѣкоторымъ стремленіемъ въ наглядности и къ развитію въ дѣтяхъ не только практически полезныхъ навыковъ, но и способности сужденія

Промежутокъ времени между VIII и XV столѣтіями представляетъ собою переходный періодъ, когда происходила борьба между VIII—XV вѣка
средневѣковыми пріемами вычисленія (крайне трудными и хлопотливыми) и пріемами вычисленія *индійскаго*, которое разрабатывали арабы съ особенною любовью Въ началѣ нѣкоторыя ариѳметическія познанія встрѣчались только въ монастыряхъ и монастырскихъ школахъ, но съ XIII вѣка въ европейскихъ школахъ стали обозначаться пріемы практическаго вычисленія, которыя, благодаря торговымъ сношеніямъ нѣмцевъ съ италіянскими купцами, достигли нѣкотораго развитія Обученіе страдало отсутствіемъ наглядности и вообще не процвѣтало Съ XV и XVI столѣтій, благодаря влі- XV—XVII вѣка
янію эпохъ возрожденія и реформаціи на народное образованіе, въ государствахъ, подпавшихъ вліянію реформаціи, возникли, кромѣ латинскихъ школъ (гимназій), также и школы другихъ родовъ, въ которыхъ ариѳметикѣ уже стали отводить нѣкоторое мѣсто въ курсѣ (часъ въ недѣлю и даже болѣе того) Ариѳметическими вычисленіями и улучшеніемъ пріемовъ самаго вычисленія заинтересовались въ тому времени и люди науки, но на *обученіе ариѳметикѣ* это не оказало особеннаго вліянія Все обученіе продолжало основываться на *правилахъ* (безчисленныхъ и крайне неудобныхъ) и на примѣрахъ, которые должны были выучиваться наизусть безъ всякаго разумѣнія и пользы XVII вѣкъ не принесъ тоже ничего существеннаго дѣлу *обученія*, хотя къ тому времени относятся многочисленныя учебныя пособія (нѣкоторыя—въ стихахъ) и усовершенствованія въ вычисленіяхъ коммерческаго характера (правила процентовъ, учета) Только съ XVIII столѣтія, и то въ странахъ, гдѣ укрѣпилось лютеранство, съ улучшеніемъ и распространеніемъ *народнаго* образованія, стали постепенно улучшаться *пріемы обученія*, а также пріемы ариѳметическаго вычисленія —Что касается Россіи, то только въ XVII и XVIII вѣкахъ народились нѣ-

---

*) *Я А Коменскій род въ 1592, ум въ 1671 г, Джонъ Локкъ род въ 1632, ум въ 1704 г, Жанъ Жакъ Руссо род въ 1712, ум въ 1778 г*

которые, преимущественно переводные и подражательные учебники Но по причинѣ малой распространенности народнаго образованія, только, начиная приблизительно съ средины текущаго столѣтія, можно отмѣтить разработку (впрочемъ, весьма подражательную и лишь изрѣдка самостоятельную) пріемовъ *обученія* ариөметикѣ, которому теперь отводится у насъ мѣсто не только въ курсѣ ср уч. заведеній и благоустроенной трехгодичной начальной школы, но даже въ школахъ грамотности, располагающихъ, какъ извѣстно, весьма малыми матеріальными средствами и небольшимъ количествомъ учебнаго времени

ятичная ема, араб і цифры чебники Своимъ современнымъ развитіемъ ариөметика обязана идеѣ обозначенія чиселъ помощью десяти цифръ по десятичной системѣ,—идеѣ, которою человѣчество обязано индусамъ У арабовъ получила развитіе ариөметика, ближе чѣмъ ариөметика греческая и римская стоящая къ ариөметикѣ современной, обученіе носило характеръ тоже несомнѣнно развивательный Только съ ознакомленіемъ западной Европы съ ученіями арабской ариөметики, обученіе также начало придавать особеннымъ пріемамъ вычисленія и практической ариөметикѣ гораздо болѣе значенія, чѣмъ теоріи и даже чѣмъ образовательной роли обученія этому предмету Несмотря на массу похвалъ, въ то время расточенныхъ ариөметикѣ составителями учебниковъ по этому предмету въ предисловіяхъ къ этимъ учебникамъ, *обученіе* отличалось все-таки крайнею сухостью и полнымъ непониманіемъ потребностей дѣтской природы Вплоть до XVIII вѣка въ Европѣ учебники ариөметики преслѣдовали главнымъ образомъ практическія цѣли и разсматривали все преимущественно съ точки зрѣнія пользы, краткости, удобства, тѣмъ же характеромъ отличалось и обученіе этому предмету, тѣснѣйше связанное съ выучиваніемъ *наизусть* текста того или другого учебника Съ XVIII вѣка начинается стремленіе составителей учебниковъ къ основательности, ясности, доказательности, удобопонятности и легкости изложенія Но все-таки обученіе этому предмету отличалось повсюду прежнею сухостью до тѣхъ поръ, пока Песталоцци не вдохнулъ жизнь въ мертвое обученіе, унаслѣдованное школою отъ среднихъ вѣковъ

галоцци Гейнрихъ Песталоцци родился въ Цюрихѣ въ 1746 году, двадцати восьми лѣтъ отъ роду онъ понялъ свое истинное призваніе, призваніе учителя, на этомъ поприщѣ Песталоцци оказалъ человѣчеству столько несомнѣнныхъ услугъ, что онъ не безъ основанія занимаетъ одно изъ почетнѣйшихъ, если не самое почетное мѣсто въ исторіи *народнаго* просвѣщенія Замѣчательна любовь его къ простому темному народу, котораго потребность въ просвѣщеніи онъ едва-ли не первый понялъ и оцѣнилъ своимъ безконечно-добрымъ, всегда одушевляемымъ благороднѣйшими желаніями, сердцемъ Онъ первый понялъ необходимость учрежденія начальныхъ *народныхъ* школъ, онъ первый понялъ громадную *воспитательную* роль школы, онъ понялъ также непригодность до него практиковавшагося мертвящаго *книжнаго* обученія

Въ своемъ сочиненіи „Лингардъ и Гертруда" Песталоцци высказываетъ слѣдующія два желанія относительно обученія ариѳметикѣ 1) усвоеніе ариѳметическихъ умѣній (Rechnen) должно быть сдѣлано доступнымъ всѣмъ сословіямъ, т е также и простому народу, 2) обученіе должно быть упрощено настолько, чтобы всякая мать могла научить этому предмету своихъ дѣтей Ясно, что желанія Песталоцци были въ высшей степени почтенны *Онъ первый требуетъ, чтобы дѣти ясно представляли себѣ самыя числа* Для этой цѣли имъ изобрѣтено очень много пріемовъ и пособій, которымъ онъ придаетъ весьма большое значеніе Песталоцци достигалъ при своемъ обученіи блестящихъ практическихъ результатовъ, это объясняется его прямо-геніальными педагогическими способоностями

Главнѣйшія заслуги Песталоцци, которыхъ не должно забывать, предъ обученіемъ интересующему насъ предмету состоятъ въ установленіи имъ принципа, по которому все изучаемое ребенкомъ должно быть имъ понимаемо, и въ формулировкѣ требованія, чтобы плоды обученія ариѳметикѣ были доступны простому народу, въ своей ежедневной жизни нуждающемуся въ ариѳметическихъ умѣніяхъ Кромѣ того, достойно упоминанія и то, что Песталоцци едва-ли не первый понялъ несомнѣнное значеніе умственныхъ (изустныхъ) вычисленій

Наиболѣе извѣстной методою обученія является метода Грубе, изложенная этимъ педагогомъ въ сочиненіи подъ заглавіемъ „Руководство къ обученію вычисленію въ начальной школѣ, обработанное по принципамъ эвристической (изобрѣтательной) методы" Метод[а] Грубе

Во „Введеніи" къ этому руководству изложены психологическія основанія методы Грубе

Курсъ ариѳметики въ начальной школѣ (конечно, нѣмецкой) у Грубе, собственно, распадается на *три* отдѣльныхъ курса Первый изъ нихъ состоитъ въ вычисленіяхъ надъ цѣлыми числами отъ единицы до ста включительно, второй—въ вычисленіяхъ надъ цѣлыми числами, большими ста, третій—въ вычисленіяхъ надъ дробными числами *Первый курсъ* долженъ быть пройденъ въ теченіе первыхъ двухъ, а въ случаѣ надобности, въ теченіе первыхъ трехъ лѣтъ обученія *Второй курсъ* продолжается годъ въ теченіе перваго полугодія дѣти упражняются въ вычисленіяхъ надъ цѣлыми числами отъ ста до тысячи, при чемъ эти числа должны быть „всесторонне разсмотрѣны", а во второе полугодіе—надъ числами любой величины Второй курсъ, при этомъ, проходится въ теченіе третьяго или четвертаго, а на практикѣ даже и пятаго года обученія *Третій курсъ* (это ужъ четвертый, или пятый, или даже шестой годъ обученія) долженъ быть, по Грубе, пройденъ въ теченіе одного года въ теченіе 1-го полугодія—„всестороннее разсмотрѣніе чиселъ", а въ теченіе 2-го — дѣти приступаютъ уже къ упражненіямъ „въ дѣйствіяхъ, какъ таковыхъ"

Весь первый курсъ распадается ровно на сто ступеней на первой ступени проходится число „одинъ", на второй — число

„два“, на третьей—число ‚три‘, и т д до сотой ступени включительно Методическія указанія Грубе относительно перваго года обученія заключаются, вкратцѣ, въ слѣдующемъ 1) урокъ счета долженъ быть непремѣнно также и урокомъ родного языка, 2) учитель, отказываясь, воздерживаясь отъ многочисленныхъ вопросовъ, долженъ, по возможности, заставлять самихъ учащихся говорить и высказываться, 3) хоровые и отдѣльные отвѣты должны чередоваться между собою, 4) пособіями должны служить преимущественно пальцы и черточки 5) *дѣйствія надъ числами состоятъ просто въ томъ, что каждое новое число сравнивается съ предыдущими,* и 6) на красивое изображеніе цифръ и черточекъ должно быть употреблено достаточное количество времени Сущность обученія ариѳметикѣ заключается въ подробномъ „изученіи“ каждаго изъ чиселъ Чтобы уяснить себѣ ходъ уроковъ какой либо ступени какъ онъ понимается самимъ Грубе, возьмемъ седьмую ступень и прослѣдимъ ту идею, которая лежитъ въ основѣ этой методы Обратимся къ стр 37-ой, тамъ изображено (всѣ подстрочныя примѣчанія принадлежатъ автору этихъ строкъ)

Седьмая ступень

Семь

I a | | | | | | | 7

| 1
| 1
| 1 — 1+1+1+1+1+1+1=7
| 1 — 7×1=7
| 1 — 7–1–1–1–1–1–1=1
| 1 — 1 7=7 *)
| 1

| | 2 — 2+2+2+1=7
| | 2 — 3×3+1=7
| | 2 — 7–2–2–2=1
| 1 — 2 7=3(1) **)

| | | 3 — 3+3+1=7
| | | 3 — 2×3+1=7
| 1 — 7–3–3=1
3 7=2(1) ***)

4+3=7, 3+4=7
| | | | 4 — 1×4+3=7
| | | 3 — 7–4 –3, 7–3=4
4 7=1 (3)

*) Эта часть таблицы изображаетъ изученіе числа семь въ связи съ единицею, при чемъ 1 7 изображаетъ то же, что нынѣ изображается такъ 7 1

**) Здѣсь дана схема изученія семи по отношенію къ двумъ

***) Это схема изученія семи въ связи съ тремя и т д

| | | | | 5 | | 2	$5+2=7$, $2+5=$' $1\times5+2=7$ $7-5=2$ $5\ \ 7=1$ (2)
| | | | | | 6 | 1	$6+1=7$, $1+6=7$ $1\times6+1=7$ $7-6=1$ $6\ \ 7=1$ (1)

„Изобразите семь точекъ и считайте! Одна!—сколько еще не хватаетъ двоекъ? Двѣ!—сколько не хватаетъ единицъ? и т д

„Какъ отецъ роздаіъ семь яблокъ двумъ, тремъ, четыремъ дѣтямъ?

$7=6+1$, $5+2$, $4+3$ и т д
$6=7-1$, $5+1$, и т д
$5=7-2$ и т д

„Изъ какихъ равныхъ чиселъ образовалось 7?

„b Карлъ получилъ одинъ пятакъ (пять пфенниговъ) и одинъ пфенниг, и еще одинъ пфеннигъ, и отдалъ изъ своихъ денегъ 2 пф и еще 1 пф и еще одинъ пф Сколько у него останется?

„c Отъ какого числа ты можешь семь разъ отнять единицу?

„На слѣдующіе примѣры должны быть даваемы скорые отвѣты если ихъ задавать не слишкомъ быстро, но и не прерывая рѣчи

$3\times2+1-2\times3+4-3\times3+1$?
$2+1+2+1+1$? $1+2+1+2+1$?
$1+1+1+1+1+1+1$?

„Какое число заключается 7 разъ въ 7 и?

„Къ какому числу я долженъ прибавить утроенную двойку, чтобы получить 7?

„Я беру нѣкоторое число 2 раза и получаю единицею меньше 7 и? Какое число я удвоилъ?

„Когда я беру число двѣ раза и получаю единицею меньше 7-и, то я получаю 6 Но число, которое я взялъ два раза, есть 3, потому что $6=2\times3$, слѣдовательно, я долженъ 3 удвоить, чтобы получить единицею меньше семи

„На сколько единицъ 7 больше числа вдвое большаго 2 хъ?

„Число вдвое большее 2-хъ есть 4 7 больше 4-хъ на 3, заключаетъ въ себѣ, стало быть, на 3 единицы больше 4 хъ

„Итакъ, 7 больше удвоенныхъ 2 хъ на 3×1

„II Въ недѣлѣ 7 дней Первый, второй, , седьмой день называются? Между третьимъ и пятымъ днемъ сколько дней? и т д —Я однажды совершилъ путешествіе, которое длилось недѣлю Сколько дней я былъ въ дорогѣ? Сколько денегъ я израсходовалъ, если каждый день расходовалъ по талеру? Если ты ежедневно будешь класть въ копилку по одному пфеннигу сколько получится денегъ за цѣлую недѣлю? Сколько такимъ образомъ собралось бы цвейферовъ (монета въ два пф)? Сколько литровъ въ семи шоппенахъ (полуштофахъ)?

{ 1 литръ | | | | 3 шоппена | | | }

„Сколько шоппеновъ не хватаетъ для второго литра?
Маленькій Георгій долженъ былъ принести изъ булочной два хлѣбца, по 3 пф каждый, денегъ же получилъ—одну монету въ 5 пф и одну въ два Достаточно ли было денегъ? Сколько онъ принесъ сдачи?—Въ другой разъ его послали за пивомъ и дали ему одну монету въ пять зильбергрошей, другую-въ два Сколько шоппеновъ пива онъ долженъ былъ принести, если 1 шоп стоитъ 1 зильбергрошъ?"

Въ томъ же направленіи идетъ изученіе и другихъ чиселъ До 36-ти включительно ведется это изученіе подробно для каждаго числа въ отдѣльности На числахъ отъ 37 до 49 включительно Грубе уже не останавливается, переходя прямо къ 50-ти, каковому числу посвящается больше страницы Потомъ идетъ число 60 и, наконецъ, число 100, которому посвящено больше трехъ страницъ образцовъ (схемъ), „задачъ" и упражненій

Съ методическими указаніями относительно перваго года обученія мы ознакомились выше, чтобы уяснить себѣ вполнѣ методу Грубе, должно ознакомиться съ его методическими указаніями относительно обученія счету во 2-й и 3-й годы, которые посвящаются числамъ отъ 10 до 100 1) наглядными пособіями остаются и здѣсь пальцы и черточки 2) изученіе различныхъ ступеней ведется *совершенно такъ же*, какъ и изученіе предыдущихъ ступеней, и 3) способы выраженія задачъ и упражненій должно разнообразить для того, чтобы учащіеся мало-по-малу освобождались отъ схемъ Нужно замѣтить, что Грубе хотя и стоитъ за наглядныя пособія, но прибѣгаетъ къ нимъ не во всѣхъ случаяхъ и пользуется ими весьма осмотрительно Наибольшую важность имѣетъ указаніе (стр 44), что *не должно переходить отъ одной ступени къ другой, не исчерпавъ вполнѣ предыдущей ступени*

Въ теченіе перваго полугодія третьяго или четвертаго (а то и пятаго,—смотря по продолжительности *всего* курса учебнаго заведенія) года обученія проходятся вычисленія надъ числами *въ предѣлахъ до тысячи* Эта часть курса у Грубе распадается на шесть ступеней, первая—„измѣреніе" чиселъ единицами, десятками и сотнями, вторая — простыя сотни, „измѣряемыя" сотнями, третья—„измѣреніе" трехзначныхъ чиселъ трехзначными же, четвертая—„измѣреніе сотенъ десяткомъ, пятая—„всестороннее измѣреніе" чиселъ ихъ множителями и наконецъ шестая—разложенія чиселъ отъ 1 до 1000 на „элементы" (въ томъ числѣ нѣкоторыхъ на множителей) Только на пятой ступени становится возможнымъ разрѣшить задачу какова разница между 12-ою и 30-ою долею 60-и, или задачу на сколько единицъ сумма 326 и 418 больше суммы половинъ этихъ чиселъ?

Вотъ методическія указанія относительно этой части 2-го курса 1) цѣль обученія въ теченіе 1-го полугодія (3-го или 4-го года)—умѣніе разлагать числа, не превышающія тысячи, на составные элементы, 2) учащійся долженъ при этомъ „открыть секретъ„ быстраго умственнаго вычисленія, состоящій въ оперированіи надъ возможно малыми числами, 3) для того, чтобы привести къ всестороннему представленію чиселъ, *не должно быть и рѣчи о четырехъ дѣйствіяхъ*, эти послѣднія (вмѣстѣ съ упражненіями въ быстромъ вычисленіи) появляются только во второе полугодіе 3-го или 4-го года 4) въ отдѣльномъ „изученіи" каждаго числа уже нѣтъ болѣе особой надобности

Къ сожалѣнію, практика показываетъ, что „всестороннее представленіе" числа необходимо должно бы основываться непремѣнно на *дѣйствіяхъ* надъ числомъ, Грубе же именно дѣйствія отрицаетъ вплоть до наступленія второго полугодія 3-го или 4-го года обученія Поэтому методъ Грубе не быстро приводитъ къ хорошимъ результатамъ и въ русской начальной школѣ, въ чистомъ своемъ видѣ, не можетъ считаться цѣлесообразною

Только въ курсѣ второго полугодія 3-го или 4-го года обученія появляются дѣйствія А) вычисленія надъ отвлеченными и В) вычисленія надъ числами именованными

Третій курсъ разсчитанъ всего на одинъ годъ Для перваго полугодія полагается опять-таки „всестороннее разсмотрѣніе дроби", а для второго—дѣйствія надъ дробями Первая половина этого курса распадается на шесть ступеней, наглядными пособіями служать—линеечки, скобочки, кругъ, квадратики, и т д под

Заканчивается курсъ Грубе слѣдующими словами „Разъ учитель до сихъ поръ добросовѣстно слѣдилъ за нашимъ изложеніемъ онъ можетъ взять какой либо задачникъ конечно, методически толковый задачникъ,—и его ученики быстро и толково разрѣшатъ всѣ задачи отъ начала до конца Такъ какъ, по нашему мнѣнію самъ учитель долженъ быть вполнѣ самостоятеленъ, то онъ не нуждается ни въ какихъ длинныхъ и объемистыхъ теоретическихъ указаніяхъ и руководствахъ Впрочемъ, учитель не долженъ думать, что слѣдуетъ продѣлать рѣшительно всѣ задачи Въ тѣхъ случаяхъ, когда можно пользоваться нагляднымъ наблюденіемъ, нѣтъ нужды даже для пріобрѣтенія навыковъ въ слишкомъ большомъ количествѣ примѣровъ Не многое, но основательно" Надо отдать справедливость Грубе въ томъ смыслѣ, что онъ создалъ, во всякомъ случаѣ, *методу* обученія ариѳметикѣ, что до него и послѣ него почти никому не удавалось

Изъ русскихъ авторовъ наиболѣе извѣстными послѣдователями Грубе являются I О Паульсонъ, В П Воленсъ и покойный В А Евтушевскій *) „Методика ариѳметики" и задачники Евтушевскаго достаточно извѣстны „Введеніе" въ „Методику" Евтушевскаго составляютъ разсужденія его о разнаго рода психологическихъ и педагогическихъ вопросахъ Метода Евтушевска

Курсъ, рекомендуемый Евтушевскимъ, пятилѣтній, возрастъ дѣтей, „приступающихъ къ обученію ариѳметикѣ" (стр 117), предполагается у Евтушевскаго семилѣтній Первый годъ посвящается изученію чиселъ отъ 1 до 20, второй — изученію чиселъ отъ 21 до 100, третій годъ—нумераціи чиселъ любой величины, четыремъ дѣйствіямъ надъ отвлеченными и именованными числами и элементарному курсу дробей Четвертый и пятый годъ обученія въ школѣ посвящены у Евтушевскаго *т наз систематическому курсу ариѳметики* „Центръ учебнаго матеріала ариѳметики есть *изученіе состава и свойствъ числа и дѣйствій съ числомъ*"—говоритъ Евтушевскій (стр 77) Разница между методой Евтушевскаго и

*) Изъ остальныхъ сторонниковъ методы Грубе слѣдуетъ нѣкоторыхъ поименовать Беме, Бонсдорфъ, Латышевъ, Истентьевъ, Староградскій, Невскій, Нагорскій, Пѣшехонова, Арнольдъ и Леве Къ числу ихъ принадлежалъ въ свое время также г Тубенецъ, нынѣ впрочемъ, освободившiй отъ шаблоновъ изученія чиселъ

методою Грубе заключается, стало-быть 1) въ частностяхъ распредѣленія курса по годамъ и 2) въ томъ, что дѣйствіе надъ числомъ Евтушевскій не въ такой мѣрѣ отодвигаетъ на задній планъ, какъ Грубе. Въ *сущности своей* обѣ методы сходны по главнѣйшему своему общему признаку: онѣ обѣ *основаны* исключительно на изученіи числа. Число четыре Евтушевскій совѣтуетъ изучать такъ:

„1) *Образованіе числа.*

„На верхней планкѣ доски учитель ставитъ три кубика вмѣстѣ ■ ■ ■. Сколько здѣсь кубиковъ? (Потомъ приставляетъ четвертый кубикъ). А теперь сколько? ■ ■ ■ ■. Какъ же составляются четыре кубика изъ трехъ и одного?—Нужно къ тремъ кубикамъ прибавить одинъ кубикъ.

„2) *Разложеніе на слагаемыя.*

„Какъ можно составить четыре кубика? или Какъ четыре кубика можно разложить?—Четыре кубика можно разложить на два и два ■ ■ ■ ■. Четыре кубика можно составить изъ одного, одного, одного и еще одного, или взять четыре раза по одному кубику ■ ■ ■ ■. Четыре кубика можно разложить на три и одинъ ■ ■ ■ ■. Можно составить изъ одного, одного и двухъ ■ ■ ■ ■. Можно ли еще какъ нибудь иначе разложить четыре кубика? Ученики убѣждаются, что никакого другого отличнаго отъ этихъ разложеній, быть не можетъ. Если ученики станутъ еще разлагать четыре кубика такимъ образомъ: одинъ, два и одинъ, или два, одинъ и одинъ, или одинъ и три, то учителю легко имъ показать, что эти разложенія составляютъ повтореніе уже имѣющихся разложеній, только въ другомъ порядкѣ.“

„3) *Разложеніе въ порядкѣ.*

„Весьма можетъ случиться, что дѣти сразу укажутъ разложеніе числа на слагаемыя въ порядкѣ, но и тогда третье упражненіе *нельзя считать лишнимъ*. Для установленія порядка въ разложеніи предлагаются классу такіе вопросы: Вотъ вы составили четыре кубика изъ двоекъ, изъ отдѣльныхъ кубиковъ и изъ троекъ, въ какомъ порядкѣ лучше поставить намъ кубики на доскѣ? Съ чего начать разложеніе четырехъ кубиковъ? Съ разложенія на отдѣльные кубики. Какъ составить четыре кубика изъ отдѣльныхъ кубиковъ?—Надо взять четыре раза по одному. Какъ составить четыре кубика изъ двоекъ, изъ паръ?—Нужно взять двѣ двойки, два раза по два кубика, двѣ пары кубиковъ.—Какъ потомъ составить четыре кубика?—Можно составить изъ троекъ, для этого взять три и одинъ, или одинъ и три. Учитель во время разговора съ учениками располагаетъ постепенно на классной доскѣ эти разложенія уже въ порядкѣ, то есть:

На первой планкѣ ■ ■ ■ ■
На второй ■ ■ ■ ■
На третьей ■ ■ ■ ■
На четвертой ■ ■ ■ ■

„Такъ какъ *это упражненіе есть основное и самое важное при изученіи числа*, то для закрѣпленія въ памяти учениковъ сдѣланныхъ разложеній имъ предлагаются упражненія письменныя на доскахъ или въ тетрадяхъ. Письменная работа учениковъ состоитъ въ разложеніи того же числа посредствомъ черточекъ, крестиковъ, кружковъ и проч. Кубики снимаются съ классной доски, и по требованію учителя: „возьмите ваши доски и разложите *четыре* посредствомъ крестиковъ такъ какъ, мы разлагали на классной доскѣ четыре кубика, „дѣти на память разлагаютъ четыре такимъ образомъ:

✕ ✕ ✕ ✕
✕ ✕ ✕ ✕
✕ ✕ ✕ ✕
✕ ✕ ✕ ✕

„Въ случаѣ ошибки или безпорядка въ разложеніи, или наконецъ упущенія одного изъ разложеній, учитель поправляетъ учениковъ, повѣряя ихъ работу. Провѣрка эта производится такъ (слѣдуютъ нѣкоторыя важныя методическія указанія).

„4) *Выводы изъ предыдущаго упражненія.*—Третье упражненіе хорошо исполненное, положило прочное основаніе для всей дальнѣйшей работы съ числомъ. Послѣдующія упражненія состоятъ только въ расширеніи пониманія учениками сущности сдѣланныхъ ими разложеній числа, въ обобщеніи этихъ разложеній и въ упрощеніи самыхъ выраженій и пріемовъ вычисленій Для выводовъ ученикамъ предлагаются слѣдующіе вопросы. *На сложеніе* Сколько надо прибавить къ одному, чтобы получить 4? (Это—задача на вычитаніе *) Сколько къ двумъ, тремъ? (то же) Сколько будутъ 2 да 2? Одинъ да три? да 1? *На вычитаніе* Сколько разъ отъ четырехъ можно отнять по одному? (Это—задача на дѣленіе) Сколько разъ по 2, по 3? (то же) Сколько останется, если отъ четырехъ отнять 1, 2, 3? Сколько единицъ недостаетъ одному, двумъ, тремъ до четырехъ? Чѣмъ четыре больше одного, двухъ трехъ? Сколько останется, если отъ четырехъ отнять 4 раза по одному 2 раза по 2? *На умноженіе* Сколько разъ нужно взять по одному, по два, чтобы получить 4? (Это—задача на дѣленіе) Сколько разъ нужно повторить 2, чтобы составить 4? (то же) Сколько будетъ дважды два? Четырежды одинъ? *На дѣленіе* Сколько разъ 1, 2, 3 содержится въ четырехъ? Во сколько разъ 4 болѣе одного, двухъ? Какъ велика четвертая часть четырехъ, половина четырехъ? Сколько получится, если взять въ два раза, въ четыре раза меньше четырехъ? Такимъ образомъ всѣ отношенія числа четыре къ предшествовавшимъ числамъ вытекаютъ сами собою изъ разложенія числа на слагаемыя и слѣдовательно изъ знакомства чрезъ то учениковъ съ составомъ числа Въ случаѣ затрудненія ученика въ отвѣтѣ на предложенный вопросъ, учитель пользуется кубиками для наглядного представленія ученику того, что его затруднило"

Принимая во вниманіе кратковременность курса русской начальной школы, Евтушевскій совершенно справедливо говоритъ „Въ народной школѣ, полный курсъ которой долженъ состоять въ изложенномъ элементарномъ курсѣ, и этотъ курсъ придется нѣсколько сократить, не по содержанію, а по количеству упражненій Оканчивающій обученіе въ народной школѣ долженъ пріобрѣсть хорошій навыкъ и пріемъ въ вычисленіи съ числами цѣлыми любой величины и простѣйшими дробями а потому, не имѣя въ виду на первомъ планѣ развитія учениковъ для прохожденія дальнѣйшаго гимназическаго обученія, *не слѣдуетъ въ народной школѣ долго останавливаться на такомъ подробномъ изученіи чиселъ первой сотни, какъ это необходимо въ виду извѣстной подготовки ученика* Въ школѣ, въ которой обученіе продолжается только три года, достаточно на изученіе чиселъ первой сотни употребить одинъ первый годъ обученія во второй годъ нужно пройти нумерацію и дѣйствія съ цѣлыми числами любой величины, въ третій — въ первое полугодіе элементарный курсъ дробей и во второе полугодіе повторить дѣйствія съ цѣлыми числами отвлеченными и именованными, если возможно, по самому краткому учебнику" Практика современной начальной школы показала, что если изученіе чиселъ практикуется только въ теченіе одного года, то дѣти четырехъ дѣйствій надъ числами первой сотни не усваиваютъ

Книлингъ, въ своей книгѣ посвященной вопросу о необходимости реформы преподаванія ариѳметики, слѣдующимъ образомъ характеризуетъ грубеистическія методы 1) Трудъ привести дѣтей къ яснымъ представленіямъ о самыхъ числахъ напрасенъ 2) Разложеніе чиселъ на составные элементы есть игра, умерщвляющая духъ 3) Разнообразіе дѣйствій при такъ называемомъ все- Недоста методы из ния чисе

*) Въ скобкахъ помѣщены замѣчанія, которые авторъ настоящей книги считаетъ необходимыми, дабы читатели не усвоили себѣ не вполнѣ отвѣчающихъ современнымъ взглядамъ на дѣйствія пріемовъ

стороннемъ разсматриваніи числа сбиваетъ начинающаго и создаетъ неурядицу въ его мышленіи 4) Концентрація обученія при этой методѣ невозможна 5) Всестороннее изученіе каждаго числа первой сотни скучно, утомительно, безрезультатно и неосновательно ни съ психологической, ни съ ариѳметической точки зрѣнія 6) Метода Грубе требуетъ слишкомъ большой потери времени отъ школы, требуетъ слишкомъ большого искусства и терпѣнія отъ учителя и слишкомъ большихъ усилій отъ учениковъ, не давая, взамѣнъ всего этого, необходимаго дѣтямъ знанія ариѳметики —Эти взгляды нынѣ принадлежатъ къ числу неоспоримыхъ и весьма распространенныхъ

Методы Грубе и Евтушевскаго въ настоящее время не признаются примѣнимыми къ потребностямъ начальной школы Въ Германіи ее подвергли критикѣ Книллингъ, Танкъ, Іенике и др; въ Россіи—покойный П С Гурьевъ, гр Л Н Толстой и мн др

Метода Генчеля

Въ Германіи большимъ авторитетомъ пользуется имя Генчеля, автора пособій по преподаванію ариѳметики отличающихся здравымъ смысломъ, примѣнимостью къ потребностямъ нѣмецкой начальной школы, хотя и не чуждыхъ иногда пріемовъ изученія чиселъ На русскомъ языкѣ имѣется переводъ „Руководства“ Генчеля, обнародованный въ 1884 году В А Семекой На русскую методическую литературу Генчель оказалъ весьма незначительное вліяніе, хотя много лѣтъ тому назадъ, распространено было заблужденіе, будто послѣдователемъ Генчеля въ числѣ русскихъ авторовъ по предмету методики ариѳметики можно считать Гурьева, на самомъ дѣлѣ послѣдній совершенно самостоятельно, руководясь данными хорошо извѣстной ему нѣмецкой литературы, придумалъ, притомъ, гораздо раньше Генчеля, методу, лишь въ нѣкоторыхъ частностяхъ совпадающую съ методой Генчеля Метода Генчеля состоитъ главнымъ образомъ въ изученіи чиселъ одновременно съ точки зрѣнія сложенія и вычитанія, а затѣмъ—съ точки зрѣнія умноженія и дѣленія

Труды Гурьева

„Практическая Ариѳметика“ П С Гурьева представляетъ трудъ самостоятельный Въ предисловіяхъ (1-ой и 2-ой книги) есть масса весьма цѣнныхъ замѣчаній Далѣе, у Гурьева можно найти немало полезныхъ указаній на литературу занимающаго насъ предмета, съ которою покойный былъ знакомъ основательно Наконецъ, П С Гурьева, должно считать едва-ли не первымъ русскимъ педагогомъ, энергически возставшимъ противъ догматическаго обученія ариѳметикѣ и подарившимъ учебную литературу трудомъ, для своего времени весьма замѣчательнымъ*)

*) Желающихъ познакомиться съ критикою Гурьева, направленною противъ грубеистическаго направленія,—съ критикою представляющею большой интересъ во многихъ отношеніяхъ, — отсылаю къ предисловію и къ „конспекту“ по обученію ариѳметикѣ, которымъ начинается книга II „Практической Ариѳметики“ Изъ остальныхъ трудовъ Гурьева заслуживаютъ вниманія „Ариѳметическіе листки“ (Спб , 1832) и „Руков къ препод ариѳм малолѣтнимъ“ (Спб 1839 и 1842)

„Изученію“ чиселъ, согласно программѣ Гурьева, въ курсѣ ариѳметики не должно быть мѣста Начинается курсъ со счисленія чиселъ отъ одного до десяти, затѣмъ Гурьевъ переходитъ къ сложенію такихъ чиселъ которыхъ сумма не превышаетъ десяти, сдѣлавъ все, что можно сдѣлать въ такихъ тѣсныхъ предѣлахъ, Гурьевъ переходитъ къ разложенію чиселъ съ цѣлью уясненія понятія о четныхъ и нечетныхъ числахъ Далѣе слѣдуетъ понятіе о доляхъ и ознакомленіе съ цифрами и со знаками сложенія, вычитанія, равенства и неравенства Когда все вышенамѣченное пройдено, Гурьевъ переходитъ уже къ дѣйствіямъ надъ числами 1 до 100, предварительно научивъ обозначенію этихъ чиселъ цифрами Къ этой (второй) ступени своего курса Гурьевъ дѣлаетъ слѣдующее, довольно ясно характеризующее его методу

„*Общее примѣчаніе* Учащіеся *прежде всего должны научиться считать* числа отъ 1 до 100 не только въ томъ случаѣ, когда эти числа будутъ расположены въ извѣстномъ послѣдовательномъ порядкѣ, но научиться считать и въ разбивку, съ точностью и увѣренностію *Они должны также умѣть разлагать эти числа на единицы и десятки* и, наконецъ, на какія угодно 2, 3, 4 и болѣе равныхъ и неравныхъ частей Далѣе, вникнуть во всѣ тѣ измѣненія, какимъ эти числа могутъ быть подвергнуты, поэтому знать, какимъ образомъ вообще можно ихъ увеличивать и уменьшать Какъ увеличеніе, такъ и уменьшеніе чиселъ бываетъ двоякаго рода число увеличится, если къ нему прибавить другое, и также увеличится, если взять его два и болѣе разъ То же можно сказать и объ уменьшеніи чиселъ Отсюда происходятъ четыре различныя дѣйствія *сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе* Дѣйствія эти можно производить какъ надъ цѣлыми, такъ и надъ дробными числами, а равно прилагать ихъ къ такъ-наз *именованнымъ* числамъ Наконецъ, сюда-же можно приложить и задачи для совокупнаго дѣйствія умноженія и дѣленія, или иначе задачи тройного правила Такимъ образомъ въ разностороннемъ разсматриваніи чиселъ отъ 1 до 100 можно понять всю сущность Ариѳметики“ (стр 13)

Гурьевъ такимъ образомъ въ основу этой ступени курса кладетъ счисленіе, что доказывается подчеркнутыми мѣстами Но далѣе онъ идетъ по пути изученія числа Третья ступень (или, какъ говоритъ Гурьевъ, третья степень) заключаетъ ужъ дѣйствія надъ цѣлыми числами вообще Таково содержаніе первой части „Практической Ариѳметики“ Вторая часть состоитъ изъ четырехъ отдѣловъ въ 1-мъ трактуется о дѣлителяхъ, во 2-мъ—о простыхъ дробяхъ, въ 3-мъ—о десятичныхъ, въ 4-мъ (заключительномъ отдѣлѣ) — о пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ Особеннаго вниманія заслуживаетъ 75 страницъ того конспекта, изъ котораго выше сдѣлана выписка

Противугрубеистическое направленіе считаетъ въ числѣ своихъ сторонниковъ не только Гурьева, но также славнаго русскаго писателя гр Л Н Толстого, который въ одной изъ статей своихъ подвергъ критикѣ нѣмецкія методы обученія ариѳме- Противугр истическо правлен тикѣ *) Въ то время большинство нашихъ педагоговъ отнеслось къ критикѣ гр Толстого съ нѣкоторымъ пренебреженіемъ, руководясь тѣмъ, что гр Толстой не спеціалистъ Спустя нѣсколько лѣтъ, А И Гольденбергъ въ „Учебно-воспитательной библіотекѣ" по поводу „Медотики" Евтушевскаго высказалъ свои тогдашнія сомнѣнія въ пользѣ изученія чиселъ Изъ русскихъ педагогическихъ журналовъ, кажется, только одинъ (нынѣ не существующій болѣе журналъ „Семья и Школа", съ 1878 года) началъ подвергать критикѣ самыя основы методы изученія чиселъ **)

Изъ первыхъ отдѣльныхъ сочиненій негрубеистическаго направленія должно назвать „Методику ариѳметики", „Задачникъ", „Собраніе самостоятельныхъ работъ" и „Учебникъ ариѳметики для народныхъ школъ" г Мартынова, „Методику ариѳметики" и „Сборникъ самостоятельныхъ упражненій" Житкова и Шохоръ-Троцкаго (Спб 1886), „Краткое руководство ариѳметики" г Егорова, „Методику ариѳметики" и „Сборникъ задачъ и примѣровъ" г Гольденберга Изъ новѣйшихъ сочиненій этого рода можно назвать „Методику" г Лубенца и „Записки по медотикѣ ариѳметики" г Вишневскаго Родоначальниками противугрубеистическаго направленія въ Россіи такимъ образомъ являются Гурьевъ и гр Толстой, хотя по справедливости должно заявить, что среди составителей пособій, руководствъ и брошюръ, имѣющихъ предметомъ начальное обученіе ариѳметикѣ, есть нѣсколько почтенныхъ педагоговъ, никогда особенно не сочувствовавшихъ методѣ Грубе, но не подвергавшихъ критикѣ эту методу Къ ихъ числу принадлежатъ прежде всего гг Крымскій, Вороновъ и Гика

Необходимо также отмѣтить, что въ Германіи противугрубеистическое направленіе проявилось гораздо позже, чѣмъ въ Россіи Первое нѣмецкое сочиненіе этого рода, рѣзко поставившее вопросъ, опубликовано въ 1885 году Книллингомъ подъ заглавіемъ „Къ реформѣ обученія ариѳметикѣ"

Взамѣнъ методы изученія чиселъ въ настоящемъ „Учебникѣ методики ариѳметики" и въ новомъ и предыдущихъ изданіяхъ „Методики ариѳметики" того же автора предлагается „метода цѣлесообразныхъ задачъ и цѣлесообразныхъ ариѳметическихъ упражненій", связанная съ раздѣленіемъ курса ариѳметики на ступени, изъ которыхъ каждая предшествуетъ другой въ зависимости отъ содержанія этой послѣдней

---

*) Статья эта была помѣщена въ „Отечественныхъ запискахъ" за 1875 г См также т XII „Сочиненій гр Л Н Толстого"

**) *Въ исторіи возникновенія противугрубеистическихъ взглядовъ почтенное* мѣсто занимаетъ г Бобровниковъ, бывшій преподаватель Казанскаго учительскаго института, въ отчетѣ о съѣздѣ учителей въ Казани (1883) находимъ весьма рѣзко формулированное недовольство г Бобровникова практикуемымъ по Евтушевскому обученіемъ ариѳметикѣ Я обязанъ г Бобровникову нѣкоторыми размышленіями, въ которыхъ я нашелъ подтвержденіе многихъ своихъ взглядовъ на цѣли обученія ариѳметикѣ

КНИГИ С. И. ШОХОРЪ-ТРОЦКАГО

1) **СБОРНИКЪ** упражненій по ариѳметикѣ **для учащихся**, съ приложеніемъ краткаго учебника нач ариѳметики и краткаго изложенія нѣкоторыхъ ученій геометріи **ДЛЯ НАРОДНЫХЪ ШКОЛЪ** Стр $106+34$ Ц 25 коп

Уч Ком М Нар Просв **одобренъ** для народныхъ школъ

2) **МЕТОДИКА АРИѲМЕТИКИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ НАРОДНЫХЪ ШКОЛЪ**, съ прил а) Сборника упражненій по ариѳметикѣ для учащихъ, б) списка отвѣтовъ на задачи «Сборника для учащихся», и в) Таблицы для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ Изд 4-ое, вновь переработанное и примѣненное къ требованіямъ практики Спб, 1896 Цѣна 80 коп

3) **СБОРНИКЪ**, съ методическими указаніями, *упражненій по ариѳметикѣ,* **ДЛЯ УЧАЩИХЪ** въ народныхъ школахъ, съ прилож а) списка отвѣтовъ на задачи «Сборника для учащихся» и б) таблицы для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ Спб, 1896 Цѣна 55 коп

4) **ТАБЛИЦА** *для классныхъ упражненій* въ изустныхъ вычисленіяхъ СПБ, 1896 Цѣна (на веленевой бумагѣ) 10 коп

5) **МЕТОДИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ** для ср уч зав

Ч I Для приготовительныхъ классовъ *ср уч зав для первоначальнаго домашняго обученія* Изд 2-е, значит испр и доп Стр $VIII+75$ Ц 20 к

Ч II Для низшихъ классовъ **Изд 2-ое, значительно исправленное и дополненное** Стр $IX+214$ Ц 50 к

Ученымъ Ком М Нар Просв **одобренъ** къ качествѣ весьма полезнаго учебнаго пособія для ср уч зав, мужскихъ и женскихъ, а Учебнымъ Ком при Св Синодѣ—для употребленія въ духовныхъ и женскихъ епархіальныхъ учил

6) **УЧЕБНИКЪ АРИѲМЕТИКИ, ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧ ЗАВ**, съ приложеніемъ **дополнительныхъ статей Изд 2-ое, значит исправл и заново обработанное** Ц 65 к

Уч Ком М Нар Просв **одобренъ** въ качествѣ учебнаго руководства при прохожденіи ариѳметики въ ср уч заведеніяхъ, мужскихъ и женскихъ

7) **ОПЫТЪ МЕТОДИКИ АРИѲМЕТИКИ** для преподавателей математики въ ср уч завед, съ прилож «Рѣшеній типическихъ ариѳметическихъ задачъ алгебраическаго характера» Стр VII + 208 Ц 1 р

Уч Ком Мин Нар Просв рекомендованъ для фундаментальныхъ библіотекъ ср уч заведеній

8) **ЦѢЛЬ И СРЕДСТВА** преподаванія низшей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ съ точки зрѣнія требованій общаго образованія Цѣна 60 коп (Изданіе журнала «Русская Школа»)

Уч Ком Мин Нар Просв допущено для фунд библіотекъ ср уч зав («Ж М Н Пр», Іюнь 1894 г)

9) **ЧЕМУ И КАКЪ УЧИТЬ НА УРОКАХЪ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ АРИѲМЕТИКИ** въ школѣ и дома? (Указанія относительно того— какъ пользоваться первою частью «Методическаго сборника») Для учителей приготовительныхъ классовъ для родителей и воспитателей СПБ, 1896 Цѣна 20 коп

10) **УЧЕБНИКЪ МЕТОДИКИ АРИѲМЕТИКИ** для тѣхъ учебныхъ заведеній, гдѣ преподается этотъ предметъ Спб, 1896 Цѣна 50 к

11) **УЧЕБНИКЪ ГЕОМЕТРІИ ДЛЯ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ**, съ приложеніемъ дополнительныхъ статей Стр XIV + 311 (305 политипажей въ текстѣ) Ц 1 р 25 к

Складъ изданій С И Шохоръ-Троцкаго у г Думнова (торгующаго подъ фирмою «Насл бр Салаевыхъ») 1) Москва Мясницкая, д Обидиной, и 2) Спб, Больш Конюшенная, д № 1

Адресъ автора СПБ, Бассейная 15