С. И. Шохоръ-Троцкій.

ОПЫТЪ

МЕТОДИКИ АРИѲМЕТИКИ

для

преподавателей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ,

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ

Рѣшеній типическихъ ариѳметическихъ задачъ алгебраическаго характера.

ИЗДАНІЕ ТИПОГРАФІИ А. А. КАРЦЕВА
Коммиссіонера ИМПЕРАТОРСКАГО Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи.
Москва. Покровка, д. Егорова.
1888.
(106).

ПРЕДИСЛОВІЕ.

> L'art d'enseigner c'est l'art d'indiquer aux autres ce qu'ils doivent faire pour s'instruire.
>
> *Jacotot.*

Предлагая вниманію преподавателей математики въ ср. уч. зав. этотъ „Опытъ“, мы ни мало не намѣрены скрывать отъ себя всю трудность удовлетворенія требованіямъ, которыя могутъ быть предъявлены къ этому посильному труду нашему. Но насъ смущаетъ также обычное въ публикѣ, на вниманіе которой мы осмѣливаемся разсчитывать, высокомѣрное, какъ бы презрительное отношеніе ко всякаго рода руководствамъ по предмету методики. Очень можетъ быть, что и этотъ трудъ самъ по себѣ недостоинъ лучшаго отношенія по своимъ качествамъ; но осмѣливаемся, во имя вполнѣ законныхъ требованій педагогики, протестовать противъ такого отношенія къ методикѣ *вообще*, какъ одной изъ важнѣйшихъ въ практическомъ смыслѣ педагогическихъ дисциплинъ. Интересующагося подробностями нашего взгляда позволяемъ себѣ отослать къ § 5 главы первой этого сочиненія. По нашему крайнему разумѣнію, презрительное или даже только равнодушное отношеніе къ методикѣ преподаваемаго предмета со стороны преподавателя — очень печальное недоразумѣніе, хотя и объясняемое исторіею слишкомъ иногда неразсудительнаго увлеченія нѣмецкою педагогикою со всѣми ея частностями, но вовсе не простительное съ иныхъ точекъ зрѣнія.

Цѣль наша будетъ достигнута, если этому сочиненію удастся поднять въ средѣ преподавателей математики интересъ къ предмету, почему-то игнорируемому въ нашей педагогической и учебноматематической литературѣ; говоримъ „игнорируемому“ потому, что существующія у насъ по этому предмету руководства имѣютъ въ виду преимущественно потребности начальныхъ народныхъ школъ, а не ср. уч. заведеній, которыхъ потребности, какъ извѣстно, далеко не совпадаютъ съ потребностями школъ народныхъ.

Въ заключеніе считаемъ долгомъ замѣтить, что нѣкоторые (впрочемъ, немногіе) параграфы этого сочиненія взяты изъ другого сочиненія нашего, предназначеннаго для учителей народныхъ школъ, для учительскихъ семинарій и институтовъ и педагогическихъ классовъ женскихъ гимназій, подъ заглавіемъ: „Методика ариѳметики съ приложеніемъ Сборника упражненій для учащихся“ (М. 1886).

С. Шохоръ-Троцкій.

С.Петербургъ
Ноябрь 1887 г.

Глава I.

Задачи и предметъ Методики Ариѳметики.

Глава II.

Очеркъ методологіи ариѳметики и разъясненіе нѣкоторыхъ ариѳметическихъ понятій.

Глава III.

Основные методическіе принципы обученія ариѳметикѣ.

Стр.

Глава IV.

Первоначальное обученіе ариѳметикѣ.

Глава V.

Ариөметика какъ предметъ общаго и спеціальнаго образованія.

Глава I.

Задачи и предметъ Методики Ариѳметики.

§ 1. Различіе между наукою и учебнымъ предметомъ. — § 2. Что такое ариѳметика съ исторической точки зрѣнія? — § 3. Каковъ долженъ быть курсъ ариѳметики въ низшихъ классахъ ср. уч. зав. и курсъ повторительный въ одномъ изъ высшихъ? — § 4. Существованіе различія, но не противоположности, между учебнымъ предметомъ и наукою того же имени. — § 5. Нужно ли преподавателямъ математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ близкое знакомство съ основными вопросами методики ариѳметики? — § 6. Что такое методика ариѳметики?

§ 1. Всякая наука есть непремѣнно систематическій сводъ тѣхъ законовъ, которымъ подчиняются явленія одного какого либо рода. Она преслѣдуетъ при этомъ только одну, чисто научную, такъ сказать, теоретическую цѣль: *изслѣдованіе* явленій, *всестороннее изученіе* этихъ законовъ, не имѣя въ виду цѣлей практическихъ вообще и педагогическихъ въ частности. Учебный же предметъ излагаетъ рѣдко всѣ, а чаще—только нѣкоторые законы, которымъ подчиняется тотъ или иной разрядъ явленій, и вовсе не имѣетъ въ виду научное, теоретическое изслѣдованіе и всестороннее изученіе тѣхъ или иныхъ законовъ извѣстнаго порядка. Цѣль учебныхъ предметовъ совсѣмъ иная; учебный предметъ долженъ, во первыхъ, дать учащемуся нѣкоторый кругъ *практически* полезныхъ знаній и умѣній и, во вторыхъ, оказать на умственное его развитіе то или иное полезное *развивательное* вліяніе. Такимъ образомъ учебный предметъ преслѣдуетъ вообще практическія и въ частности педагогическія цѣли. Наука отъ учебнаго предмета отличается поэтому и объемомъ, и характеромъ изложенія, и даже содержаніемъ: что для науки интересно, то въ учебномъ предметѣ иногда и вовсе не умѣстно; что въ учебномъ предметѣ подлежитъ подробнѣйшему изученію и усвоенію, то въ наукѣ иногда играетъ роль второстепенную: наука стремится къ открытію новыхъ законовъ и методовъ изслѣдованія и къ расширенію области человѣческаго знанія, учебный же предметъ имѣетъ дѣло только съ установившимися уже ученіями и стремится только къ расширенію познанія учащагося. До чего различно смотрятъ на одинъ и тотъ же вопросъ учебный предметъ и *наука*—видно изъ слѣдующаго сопоставленія: грамматика, какъ учебный предметъ, весьма важное значеніе придаетъ правописанію, *руководясь при этомъ требованіями чисто практическими*; грамматика же, какъ отрасль науки языковѣдѣнія, правописанію придаетъ далеко не такое же и далеко не то же значеніе, которое ему придается въ учебникѣ грамматики. Съ другой стороны — тѣ законы, которые открываетъ въ языкахъ наука языковѣдѣнія, для грамматики, какъ учебнаго предмета въ той или иной школѣ, не только не интересны, но часто даже и не доступны. Все вышеизложенное легко освѣтить съ надлежащей точки зрѣнія, принявъ во вниманіе, что наукѣ нѣтъ дѣла ни до возраста лица, предающагося ея изученію, ни до *цѣлей, этимъ лицомъ* преслѣдуемыхъ при занятіяхъ ею, ни до его дарованій и способностей, и т. д., *въ то время какъ понятіе объ учебномъ предметѣ* тѣснѣйше связано именно съ этими условіями обученія: *съ возрастомъ и способностями учащагося*, съ этнографическими и общественными особенностями школы, а равно съ тѣми или *иными общеобразовательными и профессіональными* цѣлями, преслѣдуемыми учащимся при прохожденіи даннаго предмета обученія. Что касается интересующаго насъ предмета, то ариѳметика, какъ *наука*, есть систематическій сводъ ученій о четырехъ дѣйствіяхъ и необходимыхъ для обоснованія этихъ ученій аксіомъ, теоремъ и теорій *). Какъ учебный же предметъ, ариѳметика отличается отъ ариѳметики-науки, во 1-ыхъ, тѣмъ, что въ учебномъ предметѣ нѣтъ строго-научной системы, и во 2-ыхъ, тѣмъ,

---

*) Во избѣжаніе недоразумѣній должно замѣтить, что теорій научной ариѳметики гораздо многочисленнѣе, чѣмъ это можетъ показаться съ перваго взгляда. Къ ихъ числу принадлежатъ: теорія системъ счисленія, теорія возникновенія различныхъ ариѳметическихъ дѣйствій: умноженія — изъ сложенія и обратныхъ дѣйствій изъ соотвѣтствующихъ имъ прямыхъ, теорія дѣйствій надъ дробями, теорія дѣлителей, теорія десятичныхъ дробей, теорія числовыхъ пропорцій. Тѣмъ обстоятельствомъ, что ариѳметика съ давнихъ временъ сдѣлалась учебнымъ предметомъ, изучаемымъ въ юношескомъ и даже дѣтскомъ возрастахъ, весьма легко объяснить почему такъ мало имѣется сочиненій, въ которыхъ она излагалась бы только какъ наука. Въ то время какъ можно поименовать сотни сочиненій, въ которыхъ она излагается съ точки зрѣнія учебнаго предмета, только въ очень немногихъ сочиненіяхъ (напр., въ нѣкоторыхъ книгахъ „Началъ Евклида") ея ученіямъ приданъ строго научный характеръ.

что въ учебномъ предметѣ главное вниманіе обращается на пріобрѣтеніе учащимися умѣній и навыка въ толковомъ вычисленіи.

Итакъ, вообще между наукою и учебнымъ предметомъ есть глубокое различіе, обусловливаемое прежде всего различіемъ цѣлей, преслѣдуемыхъ первою и вторымъ, и этого различія не только не должно, но и непозволительно забывать при обученіи данному предмету: малѣйшая сбивчивость въ пониманіи различія между учебнымъ предметомъ и наукою ведетъ къ особенно печальнымъ послѣдствіямъ, когда имѣешь дѣло съ дѣтьми.

§ 2. Первый вопросъ, который можетъ быть предложенъ относительно занимающаго насъ предмета обученія, т. е. относительно ариѳметики, заключается въ томъ—что такое ариѳметика съ точки зрѣнія научной и что она такое, какъ предметъ обученія въ той или иной школѣ? Вѣрно судить о содержаніи данной науки или учебнаго предмета лишь по имени этой науки или учебнаго предмета да по этимологическому происхожденію и значенію этого имени часто невозможно и поэтому не благоразумно. Геометрія, напр., по прямому смыслу этого слова, должна была бы учить землемѣрію; на самомъ же дѣлѣ она извѣстнымъ образомъ излагаетъ ученія о линіяхъ, поверхностяхъ, тѣлахъ и фигурахъ почти безъ всякаго отношенія къ искусству землемѣрія. Подобное же разногласіе замѣчается между названіями и содержаніемъ также и другихъ отраслей знанія. Напр., слово математика, происходя отъ слова, обозначающаго по-гречески *вообще* знаніе, науку, на самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно, обозначаетъ только совокупность отдѣльныхъ наукъ о законахъ, управляющихъ міромъ *величинъ*. Это значеніе слово „математика“ имѣло также и въ старину, у самихъ грековъ.—Поэтому для уясненія себѣ сущности и содержанія данной науки или даннаго учебнаго предмета, необходимо обратить особенное вниманіе не на имя, не на названіе науки или учебнаго предмета и не на этимологическое происхожденіе этого имени, а на то, въ какомъ видѣ та или другая наука дана намъ въ твореніяхъ первостепенныхъ умовъ, которымъ она обязана своимъ существованіемъ, и въ какомъ видѣ данный учебный предметъ сложился въ историческомъ развитіи школы.

Первоначально,—въ древности, а именно у грековъ,—*ариѳметика была* **наукою** *о свойствахъ чиселъ*. Слово „ариѳметика“ происходитъ отъ греческаго слова, обозначающаго число: у грековъ, да и у нѣкоторыхъ новѣйшихъ авторовъ, напр. у Гаусса, *Ариѳметикою* называлась отрасль знанія, которая нынѣ болѣе извѣстна подъ именемъ *Теоріи чиселъ*. Изъ теоріи чиселъ, какъ извѣстно, въ современную ариѳметику вошли только очень немногія ученія о дѣлителяхъ и кратныхъ [illegible], объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ *). Таково первоначальное значеніе слова „ариѳметика“.

Сводъ *правилъ* о томъ, какъ дѣлать вычисленіе надъ числами, греки называли не ариѳметикою, а *Логистикой*. Это послѣднее слово вышло теперь изъ употребленія по той причинѣ, что греческое искусство вычисленія, вмѣстѣ съ выработанными въ Греціи способами вычисленія и изображенія чиселъ, должно было впослѣдствіи уступить индійско-арабскимъ способамъ изображенія числа и вычисленія надъ числами; съ введеніемъ во всеобщее употребленіе такъ называемыхъ арабскихъ цыфръ, греческая логистика потеряла все свое значеніе, если не считать того спеціальнаго интереса, который она представляетъ съ чисто-исторической точки зрѣнія. Въ естественной борьбѣ за свое существованіе и самое слово „логистика“, поэтому, уступило свое мѣсто слову „алгорисмъ“, или „алгориѳмъ“, обозначавшему на юго-западѣ Европы, начиная съ XI вѣка, механизмъ вычисленія численныхъ результатовъ, изображенныхъ по десятичной системѣ, при помощи лишь десяти знаковъ. Но слово „алгориѳмъ“ тоже не вошло во всеобщее употребленіе, и подъ этимъ именемъ иногда разумѣютъ всякій механизмъ вычисленія, независимо отъ его спеціальнаго характера.

Уже въ XVI вѣкѣ, *Вьетъ* (1540—1603) понималъ подъ ариѳметикой безразлично какъ *искусство вычисленія*, такъ и *науку о законахъ*, управляющихъ міромъ чиселъ. Въ отличіе отъ цыфирной ариѳметики (ars minor, arithmetica numerosa), онъ ту отрасль математики, что нынѣ обыкновенно не совсѣмъ точно называется алгеброй **), называлъ Общею Ариѳметикой (ars major, arithmetica speciosa). Для Вьета особенный интересъ представляла, вопро-

---

*) К. Ф. Гауссъ (1777 — 1855) одно изъ своихъ сочиненій по предмету теоріи чиселъ назвалъ „Disquisitiones arithmeticae“; оно появилось въ свѣтъ въ 1801 г.; другой славный германскій геометръ, К. Г. Я. Якоби (1804—1851), обнародовалъ въ 1839 году сочиненіе по тому же предмету подъ заглавіемъ „Canon arithmeticus“. Но, несмотря на это, въ большинствѣ случаевъ для обозначенія науки о свойствахъ чиселъ чаще употребляется не слово „ариѳметика“, а слова „Теорія чиселъ“. Только у французовъ довольно часто теорія чиселъ называется „Высшею ариѳметикою“ (arithmetique supérieure), въ отличіе отъ ариѳметики низшей, занимающейся вопросами о дѣйствіяхъ надъ числами.

**) Алгеброю нынѣ называютъ не совсѣмъ точно учебный предметъ, цѣль котораго заключается въ обученіи дѣтей общей ариѳметикѣ, анализу нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій и рѣшенію уравненій низшихъ степеней. На самомъ дѣлѣ алгеброю должна была бы называться часть анализа, имѣющая предметомъ своимъ ученіе объ уравненіяхъ: низшею—та отрасль алгебры, которая занимается уравненіями, корни которыхъ выражаются въ прямой зависимости отъ коэффиціентовъ, высшею — та, которая занимается свойствами и вопросами разрѣшенія всяческихъ алгебраическихъ уравненій.

чемъ, разница между способами обозначенія чиселъ въ цыфирной ариѳметикѣ и способами обозначенія ихъ въ ариѳметикѣ всеобщей, и больше всего его занимали уравненія и ихъ разрѣшеніе. *Вообще слову „ариѳметика“ съ XVI в. начали придавать смѣшанное значеніе*, хотя, впрочемъ, разница между искусствомъ вычисленія и научными основаніями этого искусства была болѣе или менѣе ясно сознаваема математиками всѣхъ вѣковъ. Такое значеніе и доселѣ придается этому слову, хотя современные геометры болѣе склонны смотрѣть на ариѳметику съ чисто-практической точки зрѣнія, а именно только какъ на сводъ *правилъ*, руководясь которыми можно совершать дѣйствія надъ опредѣленными цѣлыми и дробными числами. Этотъ взглядъ, впрочемъ, допускаетъ двоякое примѣненіе: французскіе геометры относятъ къ числу ариѳметическихъ вычисленій производство не только дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, но и производство также дѣйствій возвышенія въ степень, извлеченія корней и логариѳмированія; у насъ же ариѳметическими считаются только первыя четыре дѣйствія. Если ариѳметика излагаетъ только правила, мало или вовсе не останавливаясь на теоретическихъ вопросахъ, то она является какъ бы только *искусствомъ вычисленія*. Если же она особенно останавливается на теоретическихъ вопросахъ, то она приближается къ наукѣ.

Монферрье, составившій „Энциклопедію математическихъ наукъ“ согласно съ принципами Гоенэ Вронскаго (впрочемъ, не заслужившими всеобщаго признанія и считающими въ числѣ своихъ противниковъ Лагранжа), только въ видѣ уступки общепринятой системѣ предпосылаетъ изложеніе ученій ариѳметики изложенію ученій алгебры. Дѣло въ томъ, что авторъ этой энциклопедіи желалъ бы изложить *науку* ариѳметики, и ему кажется (не безъ нѣкотораго основанія), что это невозможно сдѣлать, не прибѣгая къ нѣкоторымъ пріемамъ общей ариѳметики, т. е. такъ наз. алгебры [1]). Зато онъ въ отдѣлѣ своей энциклопедіи, трактующемъ объ ариѳметикѣ, излагаетъ исключительно искусство вычисленія, предоставляя себѣ вернуться къ доказательствамъ ученій, лежащихъ въ основѣ этого искусства, въ статьѣ объ алгебрѣ.

Лагранжъ (1736—1813), авторитетъ котораго столь высоко цѣнится въ вопросахъ философски математическаго характера, желалъ бы видѣть въ ариѳметикѣ не только изложеніе всѣхъ дѣйствій надъ числами (включая сюда возвышеніе въ степень, извлеченіе корней и логариѳмированіе), но даже рѣшеніе численныхъ уравненій высшихъ степеней, предоставляя алгебрѣ дока-

---

[1]) M o n t f e r r i e r. Encyclopedie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des mathematiques d'apres les principes de la philosophie des mathematiques de Hoené Wronski.

зывать теорію этого рѣшенія. Подобныхъ взглядовъ держится частью также и Ог. Контъ въ своей „Позитивной философіи“ и въ „Synthèse subjective“ (сочиненіи, достойномъ всяческаго вниманія со стороны всякаго интересующагося вопросами философіи математическихъ наукъ). а также Амперъ (1775—1836) въ опытѣ философіи математическихъ наукъ. упоминаемомъ В. Я. Буняковскимъ въ „Лексиконѣ чистой и прикладной математики“ (къ сожалѣнію, намъ не удалось познакомиться съ сочиненіемъ Ампера).

Изъ русскихъ геометровъ В. Я. Буняковскій слѣдующимъ образомъ характеризуетъ въ упомянутомъ выше „Лексиконѣ“ ариѳметику: „Многіе писатели затрудняліись разграниченіемъ Алгебры отъ Ариѳметики, потому что первая изъ сихъ наукъ занимается тѣми же дѣйствіями, какъ и вторая. Но должно замѣтить, вопервыхъ. что Алгебра *доказываетъ* тѣ правила, которыми ариѳметика руководствуется, а во вторыхъ, что Алгебра имѣетъ предметомъ преобразованіе дѣйствій однихъ въ другія, чтобы ариѳметикѣ оставалось только исполненіе по возможности простѣйшихъ“. Этотъ взглядъ, впрочемъ, не раздѣляется большинствомъ составителей учебниковъ по предмету ариѳметики, изъ каковыхъ составителей большинство переполняетъ курсы ариѳметики доказательствами и разсужденіями по большей части неумѣстными при вышенамѣченной точкѣ зрѣнія.

Само собою разумѣется, что можно легко представить себѣ курсъ ариѳметики, излагающій всѣ правила безъ объясненій (и такіе курсы не были рѣдкостью до XVIII вѣка); но можно себѣ представить и такой курсъ, который излагаетъ правила съ объясненіями и мотивируетъ каждое изъ нихъ; наконецъ, возможенъ и такой курсъ, въ которомъ правила играютъ роль какъ бы второстепенную, главное же вниманіе обращено на научную сторону дѣла *). Ариѳметика, какъ искусство вычисленія, преслѣдуя цѣль—научить производству четырехъ дѣйствій, конечно, не доказываетъ теоремъ, лежащихъ въ основѣ ея простыхъ правилъ (ибо *доказательство* теоремъ совсѣмъ не ея дѣло). не останавливается также и на аксіомахъ, лежащихъ въ основѣ ея, и не стремится къ созданію *теоріи* дѣйствій. Ариѳметика въ этомъ смыслѣ, для полнаго своего усвоенія, требуетъ только умѣнія считать и *предполагаетъ* задачи, которыя дѣлали бы вычисленія необходимыми, неизбѣжными.

Во всякомъ случаѣ, когда рѣчь идетъ о курсахъ ариѳметики, преподаваемыхъ въ начальныхъ школахъ и въ низшихъ классахъ

---

*) Къ числу сочиненій, приближающихся къ курсу ариѳметики-науки, въ русской математической литературѣ могутъ быть причислены „Теоретическая ариѳметика“ Жозефа Бертрана, переводъ съ измѣненіями и дополненіями г. Н. Билибина, „Ариѳметика“ Серре въ переводѣ г Н. Юденича и нѣк. друг.

ср. уч. зав., то подъ именемъ ариѳметики у насъ обыкновенно разумѣютъ (и при томъ не безъ основанія, какъ мы это видѣли выше) только сводъ *правилъ* производства дѣйствій надъ числами. Мотивированы ли эти правила, или нѣтъ—это, строго говоря, уже несущественный для самаго искусства вычисленія вопросъ; за-то онъ, конечно, весьма существененъ въ случаѣ, если это искусство становится *предметомъ обученія*.

§ 3. Ариѳметика, *какъ искусство вычисленія*, должна и можетъ быть изучаема и дѣйствительно изучается въ начальной школѣ и въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній *). Это доказывается исторіею школы и обусловливается не только практическими, но также и многими педагогическими соображеніями, на которыхъ здѣсь по ихъ очевидности было бы неумѣстно останавливаться. Что же касается ариѳметики-науки,—то въ одномъ изъ среднихъ или даже высшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія краткое ознакомленіе съ содержаніемъ теоретической ариѳметики болѣе или менѣе умѣстно, и даже необходимо. Согласно „Учебнымъ планамъ" предметовъ, преподаваемыхъ въ мужскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ М. Н. Пр., ариѳметика должна быть повторена въ одномъ изъ высшихъ классовъ. Само собою разумѣется, что повтореніе курса, проходимаго въ низшихъ классахъ, тогда только очень полезно, если при этомъ особенное вниманіе обращается на теоретическіе элементы и основы этого курса. Ниже мы увидимъ — въ чемъ должно и можетъ заключаться внесеніе теоретическаго элемента въ ученія начальной ариѳметики. Здѣсь же должно замѣтить, что внесеніе строго-теоретическаго элемента въ курсъ ариѳметики умѣстно главнымъ образомъ въ одномъ изъ высшихъ классовъ среднихъ уч. зав. Что же касается курса ариѳметики низшихъ классовъ, то онъ, не игнорируя доступныхъ

---

*) Вслѣдствіе многихъ особенностей нашей начальной школы, а равно вслѣдствіе того, что она должна преслѣдовать сообщеніе дѣтямъ нѣкотораго *законченнаго* цикла знаній и умѣній, курсъ ариѳметики, въ ней проходимый, долженъ отличаться отъ курса первыхъ классовъ ср. уч. зав. (Ср. „Методику ариѳметики" моего сочиненія, гл. IV — X). Печальнымъ недоразумѣніемъ былъ поэтому тотъ взглядъ на преподаваніе ариѳметики въ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, который не такъ еще давно проводился въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ по методикѣ ариѳметики и въ самую жизнь нашей школы и по которому курсъ низшихъ классовъ (купно съ приготовительными) среднихъ учебн. зав. почти совершенно отожествлялся съ курсомъ ариѳметики, умѣстнымъ въ нашей начальной школѣ. Это недоразумѣніе тѣмъ печальнѣе, что и самое раздѣленіе курса ариѳметики на подготовительный и систематическій, лежащее въ основѣ сказаннаго взгляда, не выдерживаетъ критики съ логической и педагогической точекъ зрѣнія, и что и самый такъ называемый подготовительный курсъ (который рекомендовался, напр., г. Евтушевскимъ) оказался и для цѣлей средняго учебнаго заведенія, и для цѣлей начальной школы не вполнѣ пригоднымъ.

ученикамъ низшихъ классовъ теоретическихъ основъ ариѳметическихъ ученій, долженъ преимущественно имѣть въ виду чисто практическую и педагогическую цѣли обученія ариѳметикѣ.

§ 4. Различіе между наукою и учебнымъ предметомъ въ нашей методической литературѣ, вообще говоря, не игнорируется. Различія этого не признаютъ только тѣ преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній, которые въ своемъ увлеченіи научною стороною дѣла забываютъ или игнорируютъ то обстоятельство, что наука въ истинномъ значеніи этого слова почти совершенно недоступна учащимся не только низшихъ, но и высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Такое заблужденіе, конечно, прискорбно. Но къ сожалѣнію, въ методической литературѣ недавняго времени укоренился еще болѣе прискорбный обычай *рѣзко противополагать* учебный предметъ наукѣ того же имени, и это повлекло за собою массу недоразумѣній иного рода, иногда вредно отзывавшихся въ ходѣ учебнаго дѣла—не только въ начальной школѣ, но также и въ приготовительныхъ классахъ мужскихъ и такъ наз. гимназій женскихъ. Дѣло въ томъ, что *противоположности* между учебнымъ предметомъ и наукою, конечно, нѣтъ и не должно быть: между ними есть и должна быть только нѣкоторая, впрочемъ, весьма существенная разница, обусловливаемая исключительно различіемъ цѣлей, ими преслѣдуемыхъ. Учебный предметъ, безспорно, не можетъ (какъ это выяснено выше) совпадать во всѣхъ своихъ частяхъ и частностяхъ съ наукою того же имени: это, повторяемъ, безспорно, и противъ такого совпаденія протестуютъ прежде всего самыя условія обученія, — условія неустранимыя и вполнѣ нормальныя: возрастъ учащихся, цѣль обученія, цѣль и характеръ данной школы и т. п. Но отъ утвержденія, что учебный предметъ и наука не одно и то же, еще очень далеко до вывода, что чѣмъ больше между ними разногласій, тѣмъ лучше будто бы поставленъ учебный предметъ *). Одно условіе (къ сожалѣнію, не принимаемое во вниманіе очень многими составителями руководствъ и учебныхъ пособій, увлекающимися только педагогическою стороною дѣла) должно быть непремѣнно соблюдаемо: данныя учебнаго предмета ни въ какомъ случаѣ не должны ни противорѣчить даннымъ научнымъ, ни даже итти съ ними , въ какомъ либо отношеніи, въ разрѣзъ.

---

*) Это презрѣніе къ наукѣ заходитъ иногда такъ далеко, что въ нѣкоторыхъ руководствахъ по обученію ариѳметикѣ и учебныхъ пособіяхъ сознательно допущены обозначенія, не только не принятыя въ наукѣ, но даже прямо ею отвергаемыя. Такъ, напр., въ извѣстномъ сочиненіи г. Паульсона („Ариѳметика по Грубе", изд. 12-е) не только введены новые знаки для нѣкоторыхъ дѣйствій, но даже рекомендуется постановка дѣлителя ранѣе дѣлимаго, причемъ обыкновеніе ставить дѣлителя послѣ дѣлимаго считается чуть ли не „причудою нѣкоторыхъ гг. математиковъ".

Къ сожалѣнію, необходимость подобнаго согласія между данными учебнаго предмета и данными научными, какъ это замѣчено выше, иногда не сознается не только нѣкоторыми учителями приготовительныхъ классовъ мужскихъ учебныхъ заведеній и учительницами низшихъ классовъ заведеній женскихъ, но даже довольно многими составителями учебно-методическихъ руководствъ и пособій. Въ особенности незамѣтно это согласіе учебнаго предмета со справедливыми научными требованіями въ тѣхъ случаяхъ, когда въ основѣ обученія лежитъ такъ называемое „изученіе чиселъ“, и очень часто многія трудности, съ которыми приходится бороться учителю средняго учебнаго заведенія, обусловливаются почти исключительно тѣмъ, что въ приготовительныхъ классахъ данной мужской или въ низшихъ данной женской гимназіи въ основѣ обученія ариѳметикѣ лежало именно это пресловутое „изученіе чиселъ“, которое, какъ мы въ томъ убѣдимся ниже, не заслуживаетъ никакого сочувствія.

§ 5. Нужно ли учителямъ среднихъ учебныхъ заведеній болѣе или менѣе близкое знакомство съ основными вопросами методики ариѳметики — вотъ вопросъ, котораго разрѣшеніемъ въ положительномъ смыслѣ оправдывается появленіе въ свѣтъ предлагаемаго сочиненія.

О томъ, что учителю приготовительныхъ классовъ невозможно обойтись безъ нѣкотораго методико-ариѳметическаго міросозерцанія, спорить, конечно, никто не будетъ: далеко недостаточно только знать ариѳметику и ея ученія для того, чтобы научить ребенка, вовсе не учившагося еще ариѳметикѣ, тому, что составляетъ ея содержаніе. Для того чтобы это, такъ сказать, первоначальное обученіе пошло какъ слѣдуетъ, учитель приготовительнаго класса, не прошедшій по большей части той школы мысли, которую проходитъ лицо съ высшимъ образованіемъ, долженъ непремѣнно обладать извѣстнымъ количествомъ чисто-педагогическихъ навыковъ и методическихъ пріемовъ совершенно независимо отъ своихъ ариѳметическихъ познаній. Противъ необходимости методики ариѳметики для учителей и учительницъ приготовительныхъ классовъ не станетъ такимъ образомъ спорить и самый завзятый противникъ всяческихъ методикъ.

Но далеко не въ томъ же смыслѣ разрѣшается обыкновенно вопросъ о методикѣ курса ариѳметики первыхъ трехъ классовъ гимназіи и реальныхъ училищъ, а тѣмъ паче о методикѣ повторительнаго курса ариѳметики одного изъ высшихъ классовъ этихъ учебныхъ заведеній. Дѣло въ томъ, что курсъ ариѳметики среднихъ учебныхъ заведеній почему-то считается настолько близкимъ къ системѣ и изложенію учебника, что въ методикѣ этого курса какъ бы не чувствуется уже никакой потребности. На самомъ же дѣлѣ, однако это совпаденіе только кажущееся.

Всякій практикъ-учитель знаетъ—сколько труда приходится затрачивать съ учениками первыхъ трехъ классовъ при выясненіи самыхъ простыхъ ариѳметическихъ понятій и ученій. Въ особенности много трудностей приходится преодолѣвать начинающему учителю, прямо съ университетской скамьи попадающему въ преподаватели какого нибудь изъ низшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія. Все то, чему онъ учился въ университетѣ, оказывается весьма мало связаннымъ съ большинствомъ частныхъ вопросовъ *обученія ариѳметикѣ*. Читателю, безъ сомнѣнія, близко знакомъ тотъ міръ математическихъ идей, въ которомъ начинающій учитель средняго учебнаго заведенія жилъ во время своего пребыванія на математическомъ факультетѣ. Этотъ міръ очень далекъ отъ вопросовъ даже наилучшаго обученія четыремъ дѣйствіямъ, и неизмѣримо превосходитъ почти новый для учителя міръ ариѳметическихъ идей и по богатству своего содержанія, и по изобилію въ немъ широкихъ горизонтовъ (которыхъ въ ариѳметикѣ очень мало). Понятно поэтому, что учителю приходится ломать и себя, и дѣтскія головы, ему довѣренныя, и что ему приходится очень долго бродить ощупью, прежде чѣмъ онъ выработаетъ себѣ какое нибудь, хоть мало-мальски стройное, учебное міросозерцаніе. Дѣло у него сначала не клеится во многихъ направленіяхъ: то онъ возлагаетъ слишкомъ много надеждъ на способность дѣтей къ отвлеченному мышленію и терпитъ неудачу, если желаетъ провести въ классѣ курсъ вполнѣ систематическій—съ опредѣленіями, аксіомами, теоремами, доказательствами и всяческими обобщеніями; то онъ впадаетъ въ другую крайность и, извѣрившись въ способности дѣтей къ отвлеченному мышленію, стремится къ подробнѣйшему и полнѣйшему выясненію понятій и ученій, которыя въ подобномъ выясненіи вовсе не нуждаются; то для него оказывается неразрѣшеннымъ вопросъ о томъ—что онъ преподаетъ: науку-ли ариѳметики или только искусство вычисленія, то его затрудняетъ проведеніе въ классѣ цѣлаго ряда такъ называемыхъ „мелкихъ", „мелочныхъ", „частныхъ" ариѳметическихъ вопросовъ, вродѣ умноженія и дѣленія на дробь, дѣленія многозначнаго числа на многозначное-же, ученія о составныхъ именованныхъ числахъ, и т. д. Не подлежитъ, конечно, никакому спору, что при солидной подготовкѣ рано или поздно изъ него выработается хорошій и самостоятельно мыслящій учитель, если онъ только не станетъ лѣниться; но безспорно также и то, что руководство по методикѣ ариѳметики ему можетъ быть полезно къ скорѣйшему достиженію его цѣлей: оно ему можетъ раскрыть нѣкоторыя области, о которыхъ онъ въ университетѣ никогда не думалъ, натолкнуть на массу „мелкихъ" вопросовъ и заставить его критически отнестись не только къ самому себѣ и своимъ пріемамъ, но и къ чужимъ пріемамъ и чужимъ учебнымъ міросозерцаніямъ.

Для будущихъ учителей *низшихъ* учебныхъ заведеній, въ учительскихъ семинаріяхъ и институтахъ, а также въ духовныхъ семинаріяхъ, выработаны курсы педагогики и нѣкоторыхъ педагогическихъ дисциплинъ; не мало сдѣлано также и для пріученія будущихъ учителей *начальныхъ* школъ къ практическому приложенію, пріобрѣтенныхъ ими теоретически, педагогическихъ взглядовъ и пріемовъ. Что же касается учителей математики средняго учебнаго заведенія, то они предоставлены самимъ себѣ. Правда, у нихъ теоретическая подготовка неизмѣримо выше подготовки начальнаго учителя, и большинство учителей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ рано или поздно выходитъ съ честью изъ трудностей учительскаго поприща. Но нельзя также отрицать, что при этомъ начинающій учитель дѣлаетъ много ошибокъ, вполнѣ устранимыхъ, и приноситъ заведенію и учащимся нѣкоторый вредъ, далеко не неизбѣжный. Въ связи съ этимъ нельзя не прійти къ заключенію, что отрицать пользу руководствъ по методикѣ ариѳметики, а также по методикѣ другихъ дисциплинъ такъ называемой низшей математики для учителей среднихъ учебныхъ заведеній, было бы довольно рискованно. Однако нѣкоторые преподаватели математики относятся ко всякаго рода методикамъ съ большимъ или меньшимъ презрѣніемъ и высокомѣріемъ, въ лучшемъ же случаѣ—съ полнымъ равнодушіемъ

Презрительное и высокомѣрное или равнодушное отношеніе ко всякаго рода методикамъ и другимъ педагогическимъ дисциплинамъ,—отношеніе, замѣчаемое въ средѣ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній всякимъ безпристрастнымъ наблюдателемъ, объясняется, можетъ-быть, тѣмъ, что долгое время представительницей методики ариѳметики была пресловутая, неоднократно даже въ журналистикѣ бывшая предметомъ многочисленныхъ нападокъ, книга, вовсе не имѣющая въ виду требованій учителя средняго учебнаго заведенія. Мы говоримъ о книгѣ г. Евтушевскаго. Но, хотя такое отношеніе и объясняется частью качествами нѣкоторыхъ сочиненій по педагогикѣ и методикѣ, однако оно не можетъ быть оправдано въ принципѣ, потому что оно не основано на сколько нибудь серьезной критикѣ педагогики, какъ науки, и методики различныхъ предметовъ обученія, какъ одной изъ дисциплинъ ея. Поэтому нельзя придавать особеннаго значенія тому мнѣнію, согласно которому хорошій учебникъ по данному предмету (напр., по ариѳметикѣ) можетъ учителю съ успѣхомъ замѣнить руководство по методикѣ обученія этому предмету: учебникъ преслѣдуетъ чисто логическія цѣли, руководство же по методикѣ должно преслѣдовать цѣли педагогическія. Есть, правда, очень много такихъ учебниковъ, которые задаются также и цѣлями методической обработки даннаго учебнаго предмета; равнымъ образомъ есть и такія руководства по методикѣ ариѳметики, въ которыхъ излагаются данныя учебнаго предмета на томъ основаніи, что учителямъ де надо не только выяснить пріемы обученія, но также и самыя данныя учебнаго предмета. Подобное смѣшеніе понятій не приноситъ дѣлу никакой пользы, и основывать свое пренебреженіе къ методикѣ ариѳметики только на томъ, что есть учебники и руководства, нецѣлесообразно составленные, не вполнѣ логично. Для учителя математики вообще и ариѳметики въ частности, конечно, необходимо точное знакомство его съ принятымъ его учениками учебникомъ, но этого еще недостаточно: ему равнымъ образомъ необходимо составить себѣ нѣкоторое методико-математическое (въ частности методико-ариѳметическое) міросозерцаніе. О томъ, что ему необходимо также и близкое знакомство съ какимъ либо теоретическимъ курсомъ по его предмету говорить, конечно, тоже не для чего: это тоже понятно само собою *). Но все это, конечно, не избавляетъ его отъ необходимости составленія какого либо методико-ариѳметическаго міросозерцанія.

§ 6. Методикой того или иного учебнаго предмета называется примѣненіе дидактическихъ положеній къ обученію данному предмету. Въ методикѣ ариѳметики учитель долженъ найти изложеніе какой либо методы обученія и указанія на нѣкоторые наиболѣе цѣлесообразные пріемы преподаванія на различныхъ ступеняхъ обученія ариѳметикѣ; кромѣ того въ ней должны быть изложены программа и распорядокъ курса ариѳметики для даннаго учебнаго заведенія. Практическое и разумное выполненіе учителемъ его обязанностей по отношенію къ учащимся почти немыслимо, если онъ не будетъ заранѣе знать—какъ ему приняться за обученіе дѣтей данному предмету и какъ продолжать это обученіе при тѣхъ или другихъ условіяхъ. Въ виду того, что крайности громаднаго большинства нѣмецкихъ методъ обученія ариѳметикѣ, которымъ у насъ особенно посчастливилось, въ средѣ мыслящихъ нашихъ педагоговъ возбудили сомнѣнія въ необходимости даже и самой методики ариѳметики, мы позволили себѣ выше разъяснить, что безъ методики учебныхъ предметовъ учителю обойтись почти невозможно. Теперь еще остается вкратцѣ изложить—чего именно учитель средняго учебнаго заведенія вправѣ искать въ сочиненіи по предмету методики ариѳметики. Кромѣ болѣе или менѣе детальированнаго разбора трудностей и пріемовъ обученія на различныхъ ступеняхъ курса, онъ вправѣ

*) Какъ на наиболѣе подходящія для этой послѣдней цѣли сочиненія позволимъ себѣ указать на труды Серре и Комберуса, Серре, Бертрана, имѣющіеся въ русскомъ переводѣ.

требовать отъ руководства по методикѣ *ариѳметики* также и разъясненія всѣхъ методологическихъ вопросовъ ариѳметики, а равно полной программы курса и разъясненія роли учебника, задачника и *наглядныхъ пособій* при обученіи.

Во избѣжаніе недоразумѣній, считаемъ нужнымъ остановиться на существенномъ различіи, существующемъ между методологическими и методическими вопросами. Методологія занимается методами науки, методами *изслѣдованія* научныхъ вопросовъ даннаго рода, методика же—только вопросами обученія; методологія разсматриваетъ *науку* съ точки зрѣнія логики, психологіи и теоріи познаванія, методика же разсматриваетъ *учебный предметъ* съ точки зрѣнія наилучшаго усвоенія его учащимися. Однимъ словомъ, методологическими являются вопросы о методахъ изслѣдованія, открытія или нахожденія законовъ данной науки, методическими же—исключительно вопросы *обученія*.

Для болѣе ясной иллюстраціи различія между методологіею данной науки и методикою даннаго учебнаго предмета можетъ послужить слѣдующій примѣръ. Въ математическомъ анализѣ однимъ изъ плодотворнѣйшихъ орудій при изслѣдованіи свойствъ той или иной величины или функціи служитъ такъ называемый методъ предѣловъ; методологія математическихъ наукъ не имѣетъ права игнорировать его, а напротивъ должна съ различныхъ сторонъ охарактеризовать его особенности, разсмотрѣть разнообразные случаи его примѣненія, а равно охарактеризовать случаи, когда методъ этотъ неприложимъ, и ознакомить по возможности со всѣми разновидностями этого метода. Она, кромѣ того, обязана прослѣдить сферу дѣйствія этого метода въ различныхъ отрасляхъ математическихъ наукъ и такимъ образомъ дать намъ возможность судить о методѣ предѣловъ, какъ методѣ изслѣдованія и открытія законовъ, которымъ подчиняются величины и функціи. Методика же обученія должна, предоставивъ все вышеизложенное методологіи, показать—какъ наилучшимъ образомъ выяснить основанія этого метода въ различныхъ случаяхъ его примѣненія, какъ выяснить основныя теоремы этого метода, какія ученія о безконечно-малыхъ величинахъ должны быть предпосланы изложенію метода предѣловъ, какъ должно повести выясненіе учащемуся сущности этого метода, и т. п. Въ то время, стало-быть, какъ методологія можетъ коснуться исторіи метода, какъ таковой, со всѣми уклоненіями его отъ надлежащаго пути (не умалчивая, напр., о пресловутомъ спорѣ философовъ о безконечно-малой величинѣ и о попыткѣ Кавальери, разсматривавшаго линію какъ совокупность точекъ, площадь какъ совокупность линій, и т. п.), методика изъ исторіи интересующаго насъ метода должна извлечь только тѣ уроки, которые непосредственно ведутъ къ наилучшему выясненію учащемуся ученія о предѣлахъ, вовсе не вдаваясь въ историческія и философскія перспективы *).

По методологіи математическихъ наукъ, кромѣ упомянутыхъ выше сочиненій Ог. Конта, должно быть поименовано извѣстное сочиненіе Дюгамеля (о методахъ умозрительныхъ наукъ), имѣющееся отчасти и въ русскомъ переводѣ; вѣроятно, читатель знакомъ съ этимъ сочиненіемъ болѣе или менѣе близко. Останавливаться на сказанныхъ сочиненіяхъ здѣсь было бы нецѣлесообразно, но должно замѣтить, что чтеніе этихъ сочиненій во всякомъ случаѣ можетъ быть рекомендовано читателю самымъ настоятельнымъ образомъ: міръ идей, въ которомъ вращаются разсужденія помянутыхъ авторовъ, во всякомъ случаѣ заслуживаетъ полнаго вниманія и во всякомъ случаѣ можетъ оказать на міросозерцаніе учащаго весьма благотворное, возвышающее вліяніе.

Глава II.

Очеркъ методологіи ариѳметики и разъясненіе нѣкоторыхъ ариѳметическихъ понятій.

§ 1. Область вѣдѣнія ариѳметики.—§ 2. Методы ариѳметики-науки.—§ 3. Понятія единицы, счета и числа.—§ 4. Дѣйствіе сложенія.—§ 5. Методологическое значеніе опредѣленій остальныхъ дѣйствій и идея прямолинейнаго развитія прямыхъ дѣйствій изъ дѣйствія сложенія.—§ 6. Идея обращенія дѣйствій.—§ 7. Основные законы, которымъ подчиняются дѣйствія *надъ числами: перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный.*—§ 8. Отношеніе дѣйствій надъ числами къ дѣйствіямъ надъ величинами.—§ 9. Система опредѣленій дѣйствій надъ числами.—§ 10. Фиктивность дробныхъ чиселъ.—§ 11. Дѣйствія надъ дробными числами.—§ 12. Классификація въ ариѳметикѣ.—§ 13. *О числѣ значеній ариѳметическихъ функцій.*—§ 14. О методѣ ариѳметики-науки.—§ 15. Понятіе величины.

§ 1. Ариѳметика только въ очень незначительной степени занимается изслѣдованіемъ вопросовъ о свойствахъ чиселъ. Дѣло въ томъ, что она это почти вполнѣ предоставляетъ или теоріи

---

*) Въ русскомъ языкѣ выработались двѣ формы одного и того же, весьма употребительнаго, слова: методъ и метода. Уже самое употребленіе этихъ словъ въ живой рѣчи, а въ особенности въ литературѣ, указываетъ намъ на весьма существенный оттѣнокъ въ значеніи этихъ двухъ словъ. Говорятъ „индуктивный методъ", „дедуктивный методъ", „методъ Декарта", „методъ Бэкона", „методъ безконечно-малыхъ", а не „индуктивная и дедуктивная метода, метода безконечно-малыхъ" и т. п.; точно также говорятъ: „метода Л[illegible]", „метода Олендорфа", „метода Грубе" (кажется, одинъ только г. Воленсъ почему-то говоритъ „методъ Грубе"),

чиселъ, или алгебраическому анализу. Это и очень понятно. Вопросы о свойствахъ чиселъ требуютъ часто такихъ пріемовъ, которые въ правилахъ дѣйствій надъ числами не заключаются даже неявнымъ образомъ, даже implicite. Ариѳметика занимается письменнымъ, по десятичной системѣ, обозначеніемъ чиселъ и ученіемъ о производствѣ дѣйствій надъ числами. Какъ только дѣло коснется вопросовъ, выходящихъ за эти довольно тѣсные предѣлы, напр.: природы какого нибудь числа или какой либо числовой функціи, тотчасъ же въ свои права вступаютъ либо ученія теоріи чиселъ, либо же пріемы алгебраическаго анализа.

Въ этомъ отношеніи, для лучшаго освѣщенія вопроса, могутъ оказаться въ высшей степени поучительными тѣ упражненія, которыми сопровождается каждая глава классическаго сочиненія Бертрана по предмету теоретической ариѳметики—сочиненія, обязательно переведеннаго на русскій языкъ Н. Н. Билибинымъ и снабженнаго имъ рѣшеніями многихъ изъ предложенныхъ въ этомъ трудѣ упражненій. Подъ № 2, въ упражненіяхъ, которыми сопровождается глава первая этого сочиненія, помѣщено, напр. слѣдующее упражненіе:

„Написанъ натуральный рядъ чиселъ, начиная съ единицы и кончая числомъ, всѣ цыфры котораго суть 9. Числа эти не отдѣлены другъ отъ друга. Показать, что число цыфръ этого ряда имѣетъ цыфрою единицъ цыфру 9, слѣдующія цыфры влѣво суть 8, и наконецъ влѣво отъ этихъ цыфръ—число этихъ цыфръ, равныхъ 8“ *).

Для доказательства этой теоремы надо сначала эмпирически убѣдиться въ томъ, что это справедливо для ряда чиселъ отъ 1 до 99 и отъ 1 до 999, т. е. что въ первомъ случаѣ число цыфръ равно 189, а во второмъ—2889, а потомъ надо прибѣгнуть къ извѣстному методу „заключенія отъ m къ $m + 1$“, т. е. къ методу, изобрѣтенному, кажется, Бернулли, методу стало-быть, чисто алгебраическому, и во всякомъ случаѣ, даже implicite не лежащему въ основѣ ученія о нумераціи.

Такимъ же или подобнымъ, выходящимъ за предѣлы собственно ариѳметическихъ ученій, характеромъ отличаются и

„метода Фребеля“, говорятъ объ учителѣ, что онъ учитъ „по хорошей методѣ“ и т. д., но не говорятъ: „методъ Лешетицкаго“, „методъ Олендорфа“ и т. д. Это различіе въ употребленіи словъ „методъ“ и „метода“ на русскомъ языкѣ оказывается иногда весьма удобнымъ и свидѣтельствуетъ о томъ, что слово „методъ“ употребляется въ случаяхъ, когда имѣется въ виду наука и научныя точки зрѣнія, а слово „метода“—когда имѣется въ виду обученіе и пріемы его. Въ связи съ этимъ можно было охарактеризовать методологію какъ ученіе о методахъ наукъ, а методику—какъ изложеніе методъ обученія.

*) Теоретическая ариѳметика Ж. Бертрана, переводъ съ 7-го изданія съ нѣкот. измѣненіями и дополненіями Н. Билибина. Спб. 1885.

остальныя (къ слову сказать, превосходныя) упражненія, которыми сопровождается каждая глава занимающаго насъ сочиненія: для рѣшенія однихъ требуется болѣе или менѣе полное знакомство съ алгебраическимъ языкомъ, для рѣшенія другихъ — знакомство съ помянутымъ способомъ Бернулли, для рѣшенія третьихъ—достаточное умѣніе пользоваться анализомъ, какъ средствомъ рѣшенія вопросовъ, и т. д. Для примѣра приведемъ упражненія подъ №№ 3, 6 и 8, сопровождающія главу третью интересующаго насъ сочиненія, трактующую объ умноженіи. Изъ нихъ одно требуетъ доказательства употребительнаго въ Румыніи (Cantor, Gesch. d. Math.) инструментальнаго (на пальцахъ) способа перемноженія чиселъ, заключающихся между 5-ю и 10-ю; другое представляетъ доказательство того алгебраическаго предложенія, по которому

$$s.\ b + ac = (a + b)\ (b + c),$$

если:

$$s = a + b + c;$$

наконецъ, послѣднее изъ нихъ требуетъ доказательства извѣстнаго предложенія о максимумахъ, *по которому произведеніе* $a \times b$, при данной суммѣ

$$a + b = s,$$

принимаетъ наибольшее значеніе, когда $a = b$.

Легко видѣть, что всѣ подобныя свойства чиселъ и простѣйшихъ ариѳметическихъ функцій лежатъ внѣ тѣсныхъ предѣловъ ариѳметическихъ ученій, хотя и могутъ быть выведены сравнительно элементарнымъ (по большей части алгебраическимъ) способомъ.

Тѣмъ не менѣе есть въ ариѳметикѣ и такія ученія, которыя даютъ намъ возможность говорить о методахъ чисто ариѳметическаго изслѣдованія, есть теоріи чисто ариѳметическія, есть, наконецъ, научные пріемы, изученіе которыхъ подлежитъ методологіи ариѳметики, а не методологіи математики вообще.

§ 2. На первомъ планѣ, съ намѣченной выше точки зрѣнія, стоятъ самые методы ариѳметики-науки, какъ науки умозрительной: прежде всего построеніе системы нумераціи на совершенно произвольномъ условіи, построеніе *прямыхъ* дѣйствій на началѣ прямого восхожденія отъ сложенія къ умноженію, построеніе обратныхъ дѣйствій на началѣ обращенія прямыхъ вопросовъ (началѣ, играющемъ въ математикѣ столь важную роль и обогатившемъ анализъ столь блистательными открытіями, какъ теорія отрицательныхъ и комплексныхъ количествъ и теорія трансцендентныхъ функцій разнаго рода), далѣе—обобщеніе и распространеніе понятія о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами на дробныя, наконецъ, построеніе на нумераціи теоріи десятичныхъ дробей.

Ариөметика-наука есть наука умозрительная. Объектъ ея занятіи есть число, надъ которымъ совершаются дѣйствія. Согласно взгляду, установившемуся въ русской математической литературѣ, вѣдѣнію ариөметики подлежать только четыре дѣйствія надъ числами: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Число есть результатъ нѣкотораго субъективнаго психическаго процесса, немыслимаго безъ нѣкоторой дѣятельности нашего ума и извѣстнаго подъ именемъ счета. Уже и самая природа объекта ариөметики-науки доказываетъ, что въ ариөметикѣ-наукѣ получаютъ примѣненіе умозрительный (а не опытный) методъ изслѣдованія.

Что касается лежащей въ основѣ ариөметическихъ ученій о способахъ производства дѣйствій надъ числами идеи десятичной нумераціи, по мнѣнію такого корифея науки, какъ Лапласъ (1749—1827), представляющей одно изъ удивительнѣйшихъ и полезнѣйшихъ изобрѣтеній человѣческаго ума, то она представляетъ единственный въ своемъ родѣ случаи вполнѣ условнаго соглашенія относительно письменнаго обозначенія функціи извѣстнаго рода (число есть функція единицы, надъ которою совершенъ процессъ счета), —соглашенія столь простого и изящнаго и столь богатаго послѣдствіями, какъ можетъ-быть ни одно изъ математическихъ обозначеніи. Это соглашеніе съ методологической точки зрѣнія въ томъ отношеніи крайне интересно, что изъ него путемъ чистаго умозрѣнія могутъ быть выведены почти всѣ ученія о письменномъ производствѣ четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми числами, такъ какъ оно лежитъ въ самой основѣ ученія о производствѣ этихъ дѣйствій. Еще Лапласъ замѣтилъ, что о трудности додуматься до этого соглашенія можно судить по тому, что до него не додумались ни Архимедъ, ни Аполлоній Пергенскій, принадлежащіе, какъ извѣстно, къ числу величайшихъ и геніальнѣйшихъ людей древности.

§ 3. Обратимся къ понятіямъ единицы, счета и числа съ методологической и другихъ точекъ зрѣнія.

Съ точки зрѣнія психологической понятія единицы, счета и числа зарождаются въ умѣ человѣческомъ одновременно, и невозможно указать—какое изъ нихъ должно считать первоначальнымъ и какое производнымъ. „Понятіе о единицѣ есть фундаментъ, на которомъ построенъ весь анализъ,—говоритъ Гессе въ своей книгѣ „Die vier Species“ Lpz. 1872,—единица есть созданіе человѣческаго интеллекта, который для того, чтобы образовать это понятіе, долженъ набраться опыта... Понятіе о единицѣ невозможно заключить въ рамки опредѣленія“. Но столь же элементарнымъ характеромъ отличаются также и понятіе числа (конечно цѣлаго) и процессъ счета. Этимъ объясняется причина того, что несмотря на громадное значеніе опредѣленій въ умозрительныхъ наукахъ, опредѣленія единицы, счета и цѣлаго числа въ научноариѳметической системѣ не играютъ ровно никакой роли, ибо нигдѣ не приходится ссылаться и опираться на эти опредѣленія. Кромѣ того, должно замѣтить, что ни понятіе единицы, ни понятіе счета, ни даже понятіе числа не поддаются научному опредѣленію, отъ каковаго требуется сведеніе даннаго понятія къ понятіямъ болѣе простымъ, первоначальнымъ *). Что касается счета и единицы, то читателю, вѣроятно, вполнѣ ясно, что эти понятія дѣйствительно не поддаются удовлетворяющему научнымъ требованіямъ опредѣленію; ибо сказать, что считать значитъ называть числительныя имена въ извѣстномъ порядкѣ и что единицею называется каждый изъ считаемыхъ предметовъ, значитъ ничего не сказать. Дѣло въ томъ, что счетъ вовсе не исчерпывается однимъ только называніемъ извѣстныхъ словъ въ извѣстномъ порядкѣ и что всякій предметъ (столъ, карандашъ, монета) есть прежде всего такой-то предметъ (столъ, карандашъ или монета), но никакъ не единица: слово „единица", очевидно, не можетъ быть общимъ именемъ всѣхъ существующихъ предметовъ. Кромѣ того понятно, что единица и счетъ не поддаются опредѣленіямъ, на которыхъ можно было бы построить другую систему ариѳметики и изъ которыхъ вообще можно было бы извлечь какую либо пользу. Но читатель, можетъ быть, привыкъ встрѣчать опредѣленія понятія о цѣломъ числѣ и объ единицѣ въ учебникахъ; поэтому неизлишне, остановившись предварительно на употребительнѣйшихъ опредѣленіяхъ числа, перейти къ выясненію того факта, что точное опредѣленіе этого понятія невозможно.

Число (конечно, цѣлое) многіе опредѣляютъ какъ совокупность единицъ. Это опредѣленіе прямо не вѣрно, ибо совокупность единицъ далеко еще не есть число; для того чтобы получить число, необходимо кромѣ того *сосчитать*—сколько именно единицъ въ этой совокупности? Совокупность единицъ есть условіе, и притомъ условіе необходимое, для образованія понятія числа; но одного существованія совокупности еще недостаточно для того, чтобы число было образовано: для этого требуется примѣненіе къ совокупности психическаго, субъективнаго, вовсе не даннаго въ самой совокупности, процесса, который извѣстенъ подъ именемъ счета. Стало-быть, число не есть только совокупность единицъ. Другіе опредѣляютъ число какъ результатъ измѣренія. Не говоримъ уже о томъ, что понятіе измѣренія гораздо сложнѣе *понятія о числѣ и что въ процессъ измѣренія непремѣнно вхо-*

*) Болѣе или менѣе точныя опредѣленія счета и числа ведутъ къ такъ называемому кругу въ опредѣленіи: „счетъ есть процессъ полученія чиселъ", „число есть результатъ счета",—къ кругу, который доказываетъ, что если бы мы не знали—что такое число, то не понимали бы—что значитъ считать, и если бы не умѣли считать, то не знали бы — что такое число.

дитъ процессъ счета, какъ послѣдняя цѣль и ступень измѣренія; не говоримъ также и о томъ, что въ понятіе измѣренія такимъ образомъ входитъ также и подлежащее опредѣленію понятіе о числѣ. Но, не говоря уже обо всемъ этомъ, должно признать, что *результатомъ* измѣренія является не только число, а также и нѣкоторое знаніе, въ которомъ число играетъ одинаковую роль съ остальными элементами этого знанія. Если мы, измѣривъ длину стола, выражаемъ ее въ дюймахъ, то результатомъ этого измѣренія является не *число* $15^1/_8$, а вполнѣ опредѣленный *фактъ*, что именно длина и именно этого стола, а не какой либо другой размѣръ другого предмета, равна именно $15^1/_8$ дюйма, а не другому количеству какихъ либо иныхъ единицъ. Дѣло въ томъ, что результатъ измѣренія всегда имѣетъ совершенно спеціальное значеніе и далеко не совпадаетъ съ числомъ, и что любое данное число, напр. шестнадцать, есть не результатъ какого-то измѣренія, а только шестнадцать—ни болѣе, ни менѣе. Столь же неточно то опредѣленіе числа, по которому числомъ называется результатъ счета: если рѣчь идетъ о дѣйствительномъ счетѣ конкретныхъ предметовъ, то результатомъ его является опять-таки нѣкоторое спеціальное, касающееся даннаго случая, знаніе; если же рѣчь идетъ о счетѣ, такъ сказать, безпредметномъ, состоящемъ въ одномъ лишь механическомъ называніи числительныхъ именъ въ извѣстномъ порядкѣ, то результатомъ такого счета является нѣкоторый рядъ *словъ*, но вовсе не самое число.

Невозможность точнаго, съ логической точки зрѣнія, опредѣленія занимающаго насъ понятія доказывается, впрочемъ, не тѣмъ, что наиболѣе употребительныя опредѣленія не точны, а тѣмъ, что это понятіе принадлежитъ къ числу первоначальныхъ, будучи тѣснѣйше, органически, если можно такъ выразиться, связано съ другими двумя понятіями (о единицѣ и счетѣ), которыя въ свою очередь столь же тѣсно связаны съ понятіемъ числа. Число немыслимо безъ счета и единицы, счетъ—безъ единицы и числа, а единица немыслима безъ числа и безъ процесса счета *).

---

*) На вопросъ о томъ—какъ это могло случиться, чтобы столь точная наука, какъ математика, въ самомъ основаніи заключала столь зыбкое понятіе, какъ понятіе единицы, упомянутый выше Гессе (принадлежащій къ числу славнѣйшихъ германскихъ геометровъ средины текущаго столѣтія) прибѣгаетъ къ аналогіи: онъ напоминаетъ о томъ, что хотя въ мірѣ нѣтъ ни одной неподвижной матеріальной точки, но это не мѣшаетъ однако существованію прочныхъ построекъ: зданій, мостовъ и проч. Но дѣло однако не въ этомъ, ибо такая постановка вопроса не вполнѣ вѣрна. Понятія единицы, счета и числа не только не принадлежатъ къ числу зыбкихъ, а напротивъ представляютъ собою прочныя, опредѣленныя, хотя и вполнѣ отвлеченныя понятія: при невозможности безукоризненнаго въ логическомъ отношеніи опредѣленія ихъ умъ нашъ этими понятіями владѣетъ, если такъ можно выразиться, на психологи-

§ 4. Прежде чѣмъ перейти къ теоріи ариѳметическихъ дѣйствій съ методологической точки зрѣнія, мы должны разсмотрѣть первое изъ этихъ дѣйствій, а именно дѣйствіе сложенія съ точки зрѣнія логической. Изъ всѣхъ только это дѣйствіе возбуждаетъ сомнѣнія въ томъ, возможно ли точное, съ логической точки зрѣнія, опредѣленіе его. Обычныя опредѣленія этого дѣйствія, строго говоря, не выдерживаютъ критики. Но этимъ доказывается только то, что опредѣленіе этого понятія не играетъ важной роли въ наукѣ, ибо въ противномъ случаѣ послѣдняя, при неточномъ опредѣленіи, не сдѣлала бы тѣхъ успѣховъ, какіе ею на самомъ дѣлѣ сдѣланы. Съ методологической точки зрѣнія это въ высшей степени поучительно: это насъ убѣждаетъ въ томъ, что разъ какое либо понятіе не легко поддается опредѣленію, разъ обычныя опредѣленія, даваемыя этому понятію, страдаютъ болѣе или менѣе очевидными недостатками, то приходится обратиться къ вопросу не столько о качествахъ (это не дѣло методологіи), сколько о дѣйствительной методологической важности опредѣленія этого понятія. Въ большинствѣ случаевъ оказывается, что значеніе такихъ опредѣленій большею частью сильно преувеличивается и что это значеніе въ наукѣ не особенно велико, чего далеко нельзя сказать объ опредѣленіяхъ иныхъ математическихъ понятій. Въ геометріи, напр., что ни шагъ, то опредѣленіе, безъ котораго просто не обойдешься и на основаніи котораго строятся цѣлыя ученія высокой научной важности. Выше мы видѣли, что хотя точныя, съ логической точки зрѣнія, опредѣленія понятій единицы, счета и числа и невозможны, но это однако вовсе не такъ вредно отзывается на дальнѣйшемъ построеніи научной системы математическихъ наукъ, какъ этого можно было ожидать, если бы эти понятія не принадлежали къ числу основныхъ, первоначальныхъ, неопредѣлимыхъ. Къ числу такихъ же понятій принадлежитъ также и понятіе сложенія.

Одни опредѣляютъ сложеніе какъ соединеніе двухъ чиселъ въ одно, другіе—какъ дѣйствіе, съ помощью котораго узнаютъ сколько единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ, и т. д. Всѣ опредѣленія этого рода заключаютъ въ себѣ одну общую логико-методологическую ошибку: они замѣняютъ одно слово („сложеніе“) цѣлымъ рядомъ другихъ словъ, которыхъ смысла понять нельзя, пока намъ непонятны смыслъ и цѣль сложенія. Что, въ самомъ дѣлѣ, значатъ слова „соединеніе чиселъ *въ одно*“, или выраженіе „сколько всѣхъ единицъ *вмѣстѣ*“? Эти слова именно и предполагаютъ прежде всего возможность сложенія, и если кто ранѣе,

ческомъ основаніи, т. е. на основаніи самыхъ основныхъ свойствъ души человѣческой. И таковы всѣ понятія первоначальныя, хотя и не допускающія опредѣленій, но далеко не зыбкія, а напротивъ служащія основаніемъ для построенія другихъ понятій.

какимъ нибудь образомъ, не уяснилъ себѣ, что такое сложеніе, и какую цѣль преслѣдуетъ это дѣйствіе, тотъ не будетъ также въ состояніи понять—что означаетъ „соединеніе чиселъ въ одно" какова цѣль этого соединенія и что значатъ слова: „узнаютъ *сколько единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ*".

Съ психологической точки зрѣнія, *понятіе сложенія возникаетъ* въ умѣ человѣка если не одновременно съ понятіемъ счета, то по крайней мѣрѣ не значительно позже этого послѣдняго понятія. Этотъ процессъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, которые возникаютъ въ умѣ человѣка *въ очень раннюю пору его развитія*. Положите на столъ двѣ группы спичекъ, предложите ребенку пяти или шести лѣтъ узнать—сколько здѣсь всего спичекъ, и для него будетъ трудно не отожествленіе вашего вопроса съ требованіемъ сложенія, а только *примѣненіе* къ этому случаю еще недостаточно усвоеннаго имъ умѣнія считать; его можетъ смутить, что спичекъ на столѣ слишкомъ много; но уменьшите число спичекъ въ каждой группѣ, и вы увидите, что не самое понятіе сложенія, а трудности счета смущаютъ этого ребенка.

Все это важно съ методологической точки зрѣнія, еще разъ убѣждая насъ въ томъ, что ариѳметика построена на нѣсколькихъ понятіяхъ неопредѣлимыхъ, но такъ или иначе вполнѣ прочныхъ, и что изъ этихъ понятій тѣмъ не менѣе вытекаетъ, съ помощью чисто-умозрительныхъ пріемовъ, цѣлый рядъ въ высшей степени стройныхъ и логически неопровержимыхъ ученій. Но какъ невозможность логически безупречнаго опредѣленія понятія счета, числа и единицы не доказываетъ невозможности *выясненія* этихъ понятій (выясненіе и *опредѣленіе—двѣ вещи совершенно* различныя), точно такъ же невозможность и (какъ мы это видѣли) безполезность особенно щепетильнаго опредѣленія сложенія не доказываетъневозможности и безполезности выясненія значенія термина *„сложеніе" при обученіи дѣтей.*

Слово (терминъ) „сложеніе" ребенку все-таки неизвѣстно, и ребенка, такъ или иначе, рано или поздно, надо во-время познакомить съ значеніемъ этого слова. А какъ это сдѣлать — это ужъ вопросъ методическій, о которомъ рѣчь ниже.

§ 5. Методологическое значеніе *опредѣленій* другихъ ариѳметическихъ понятій за-то очень важно. Въ основѣ всѣхъ этихъ опредѣленій лежатъ, какъ объ этомъ вскользь упомянуто выше, двѣ идеи: 1) идея прямолинейнаго развитія понятій о прямыхъ дѣйствіяхъ изъ понятія о сложеніи, и 2) идея опредѣленія обратныхъ дѣйствій въ зависимости отъ соотвѣтствующихъ прямыхъ.

Идея прямолинейнаго развитія понятія о прямыхъ дѣйствіяхъ состоитъ въ томъ, что умноженіе вытекаетъ изъ сложенія, возвышеніе—изъ умноженія и что отъ возвышенія можно перейти къ новымъ (въ анализѣ неупотребительнымъ) дѣйствіямъ, какъ все это разъяснено Ганкелемъ въ его превосходномъ *сочиненіи по теоріи* функцій мнимаго перемѣннаго.

Для того чтобы отъ сложенія перейти къ умноженію, необходима, прежде всего, нѣкоторая спеціализація слагаемыхъ, а именно необходимо положить всѣ данныя слагаемыя равными другъ другу; подобная же спеціализація производителей необходима для третьяго прямого дѣйствія, называемаго возвышеніемъ въ степень: для того чтобы прійти къ возвышенію, необходимо положить всѣ производители даннаго произведенія равными другъ другу. Такимъ *образомъ*, дѣйствіе сложенія

$$a+b+c+d+\ldots+k,$$

если положить

$$a=b=c=d=\ldots=k,$$

обращается сначала въ

$$a+a+a+\ldots+a$$

или же въ требованіе

$$a\times m,$$

гдѣ m обозначаетъ число равныхъ слагаемыхъ. Въ свою очередь дѣйствіе умноженія

$$a\times m\times n\times\ldots\times p,$$

если положить

$$a=m=n=\ldots=p,$$

обращается въ

$$a\times a\times a\times\ldots\times a$$

или въ

$$a^q,$$

гдѣ q обозначаетъ число равныхъ производителей. Но изъ того, что равенство данныхъ чиселъ любого прямого дѣйствія *необходимо* для возникновенія новаго дѣйствія, еще не слѣдуетъ, что этого одного равенства ихъ для того вполнѣ достаточно. Для того, чтобы новое дѣйствіе на самомъ дѣлѣ возникло, необходимо еще одно условіе: новое дѣйствіе тогда только становится дѣйствіемъ новымъ въ полномъ значеніи этого слова, когда способъ его производства чѣмъ нибудь отличается отъ способа производства низшаго прямого дѣйствія. Такъ, напр., недостаточно найти помощью сложенія сумму

$$365+365+365+365$$

или помощью умноженія произведеніе 365×365 для того, чтобы утверждать, что мы въ первомъ случаѣ имѣемъ дѣло съ умноженіемъ, а во второмъ съ возвышеніемъ; для этого необходимо имѣть также возможность пользоваться таблицею и формулою умноженія въ первомъ случаѣ, и таблицею степеней и формулами возвышенія—во второмъ.

Кромѣ того, не должно думать, что всѣ прямыя дѣйствія, какъ иные выражаются въ этомъ случаѣ, *сводятся* къ сложенію. Изъ сложенія возникаетъ только умноженіе, и то оно возникаетъ благодаря возможности построенія и запоминанія таблицы умноженія; возвышеніе же въ степень къ сложенію уже не имѣетъ никакого непосредственнаго отношенія и къ нему сводится только въ послѣдней своей инстанціи, такъ какъ оно возникаетъ изъ совершенно спеціальнаго случая умноженія, и опять-таки благодаря возможности примѣненія спеціальныхъ законовъ возвышенія (напр. формулы бинома Ньютона). Сложеніе, умноженіе и возвышеніе въ степень представляютъ собою естественный рядъ дѣйствій; изъ этихъ дѣйствій второе возникаетъ изъ перваго, если подчинить первое нѣкоторому условію и присоединить къ нему особенную, специфическую, идею о новомъ дѣйствіи; что же касается возвышенія въ степень, то это дѣйствіе возникаетъ уже не изъ сложенія, а изъ умноженія, и при этомъ также, для его возникновенія, необходимо не только нѣкоторое условіе, но опять-таки нѣкоторая новая идея, которой въ произведеніи равныхъ производителей, строго говоря, нѣтъ; ибо какъ бы долго мы ни разсматривали сумму $3+3+3+3$ и произведенія: 365×365 или $365\times365\times365$, разсмотрѣніе сказанной суммы насъ не приведетъ къ умноженію, какъ разсмотрѣніе этихъ произведеній не приведетъ насъ ни къ возвышенію въ квадратъ, ни къ возвышенію въ кубъ.

Для лучшей иллюстраціи этой идеи, построимъ новое прямое дѣйствіе, положивъ въ возвышеніи данныя числа равными другъ другу.

Пока мы имѣемъ

$$a^q,$$

это — возвышеніе въ степень; положивъ

$$q=a,$$

получимъ

$$a^a,$$

для обозначенія котораго изберемъ, вмѣстѣ съ Ганкелемъ, символъ a_1, такъ что

$$a^a=a_1.$$

Точно также обозначимъ символомъ a_2 количество

$$a^{a_1} \text{ или } a^{(a^a)};$$

скобки здѣсь необходимы, потому что $a^{(a^a)}$ не равно $(a^a)^a$.

И т. д. Сообразно съ этимъ получимъ новое дѣйствіе, которое назовемъ, напр., усиленнымъ возвышеніемъ. Оно опредѣляется слѣдующимъ рядомъ равенствъ:

$a_1 = a^a$

$a_2 = a^{a_1}$

$a_3 = a^{a_2}$

$\vdots$

$a_{n+1} = a^{a_n}$.

При этомъ легко можно опредѣлить значеніе символа a_0 и вообще возможно построить нѣкоторую теорію этого дѣйствія. Но дѣйствіе это дотолѣ не будетъ имѣть никакого практическаго значенія и дотолѣ ничѣмъ существеннымъ отъ возвышенія отличаться не будетъ, доколѣ не будетъ создано какого либо подобія таблицамъ умноженія и возвышенія и доколѣ не будетъ найдено формулъ, подобныхъ формуламъ умноженія и возвышенія, т. е. формуламъ, на основаніи которыхъ были бы опредѣлены значенія функцій:

$$a_m \times a_n\,,\ (a_m)_n\,,\ \frac{a_m}{a_n}\,,\ (a+b)_m\,,\ \left(\frac{a}{b}\right)_m \text{ и т. д.}$$

Но съ методологической точки зрѣнія также интересно и то, что этимъ дѣйствіемъ, названнымъ нами усиленнымъ возвышеніемъ, ряду прямыхъ дѣйствій не положено предѣла. Положивъ въ символѣ a_m указатель равнымъ основанію, получимъ новое число

$$a_a\,,$$

которое даетъ начало новому прямому дѣйствію. Если для обозначенія этого дѣйствія принять какой нибудь новый символъ, напр.,

$$\underset{1}{a}\,,$$

а для обозначенія числа

$$a_{(a_a)}$$

символъ

$$\underset{2}{a}\,,$$

и т. д., то новое дѣйствіе готово; но этому дѣйствію тоже недостаетъ ни формулъ, ни таблицъ, ни способовъ производства, т. е. недостаетъ того, чего недостаетъ также и предыдущему дѣйствію и что имѣется въ дѣйствіяхъ умноженія и возвышенія. Изъ этого читатель легко выведетъ, что число прямыхъ дѣйствій, съ методологической точки зрѣнія, неограниченно, хотя съ практической и научной точекъ зрѣнія до сихъ поръ изучены только три прямыя дѣйствія: сложеніе, умноженіе и возвышеніе въ степень, и хотя только эти три дѣйствія пока и играютъ роль въ анализѣ. Впрочемъ, по мнѣнію Ганкеля, дѣйствіе, слѣдующее за обыкновеннымъ возвышеніемъ въ степень, не имѣетъ ни практическаго, ни научнаго будущаго.

§ 6. Не менѣе интересна съ методологической точки зрѣнія идея обращенія прямыхъ дѣйствій, дающая возможность построить цѣлый рядъ новыхъ дѣйствій, называемыхъ обратными. Идея эта вообще играетъ въ математикѣ въ высшей степени важную роль: ею живетъ и дышитъ цѣлая масса ученій такъ называемаго высшаго анализа. Стоитъ вспомнить теоріи Абелевыхъ, эллиптическихъ и т. п. функцій, чтобы убѣдиться въ справедливости вышесказаннаго *); еще проще убѣдиться въ этомъ, если принять во вниманіе, что въ основѣ ученія о логариѳмическихъ, тригонометрическихъ и обратныхъ тригонометрическимъ (такъ наз. круговыхъ) функціи въ большей или меньшей степени лежитъ та же идея обращенія дѣйствій.

Логическое основаніе обращенія прямыхъ дѣйствій въ низшемъ анализѣ заключается въ слѣдующемъ.

При сложеніи дано два слагаемыхъ, а требуется опредѣлить сумму ихъ; при умноженіи дано два производителя, а требуется опредѣлить ихъ произведеніе; при возвышеніи въ степень даны основаніе и показатель степени, а требуется найти самую степень. При обратныхъ же дѣйствіяхъ даны: результатъ нѣкотораго прямого дѣйствія и одно изъ чиселъ, надъ которыми это прямое дѣйствіе произведено, а требуется опредѣлить другое изъ этихъ чиселъ. Сложеніе такимъ образомъ приводитъ къ двумъ, ничѣмъ существеннымъ другъ отъ друга не отличающимся, случаямъ вычитанія: 1) когда дана сумма двухъ слагаемыхъ и первое изъ нихъ, къ которому прибавлено второе, и 2) когда дана сумма и второе слагаемое, которое прибавлено къ первому. Умноженіе же приводитъ къ двумъ случаямъ дѣленія, отличающимся уже довольно существенно другъ отъ друга: 1) когда даны произведеніе двухъ чиселъ и множимое, а требуется отыскать множителя, и 2) когда даны произведеніе и множитель, а требуется отыскать множимое.

---

*) Эллиптическія функціи, какъ извѣстно, получили свое названіе отъ эллиптическаго интеграла

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx,$$

въ которомъ a обозначаетъ половину большей оси эллипса, а e есть числовой эксцентрицитетъ этого эллипса.

Выше данный интегралъ выражаетъ длину отрѣзка дуги эллипса, заключенной между концомъ малой оси и точкою эллипса, которой абсцисса равна x, если ось y—ковъ совпадаетъ съ малою осью эллипса, а ось x—овъ—съ большою. Интегралъ этотъ не можетъ быть выраженъ въ конечномъ видѣ, но за то разлагается въ сходящуюся строку, вообще довольно сложную.

Самый интегралъ s можетъ быть разсматриваемъ какъ функція x—а, т. е. верхней границы интеграла; но и x можетъ быть разсматриваемъ какъ функція самого интеграла, т. е. величины s. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы именно и имѣемъ дѣло съ идеею обращенія вопроса.

Наконецъ, возвышеніе въ степень приводитъ къ двумъ обратнымъ дѣйствіямъ, не имѣющимъ другъ съ другомъ ужъ рѣшительно ничего общаго: 1) когда дана степень и ея показатель, а требуется найти основаніе степени (случай извлеченія корней), и 2) когда дана степень и ея основаніе и требуется найти показателя степени (случай отысканія логариѳма степени, при извѣстномъ основаніи) *).

Долго останавливаться здѣсь на послѣдствіяхъ примѣненія выясненной выше идеи, конечно, не для чего. Важно только то, что каждое изъ прямыхъ дѣйствій даетъ по два обратныхъ и что, по мѣрѣ восхожденія отъ сложенія къ возвышенію, обратныя дѣйствія тоже усложняются.

Но, ради полноты, здѣсь должно быть упомянуто, что при созиданіи обратныхъ дѣйствій всегда исходятъ изъ прямого, въ которомъ даны два, но не болѣе чиселъ. Съ этой точки зрѣнія, вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію *двухъ* слагаемыхъ, дѣленіе—дѣйствіе обратное умноженію *двухъ* производителей, извлеченіе и логариѳмированіе — дѣйствія, обратныя возвышенію, при которомъ даны тоже только *два* числа (основаніе и показатель степени).

§ 7. Съ методологической точки зрѣнія также чрезвычайно интересно — какое изъ ариѳметическихъ дѣйствій подчиняется какому изъ трехъ законовъ: перемѣстительному, сочетательному и распредѣлительному.

Символомъ дѣйствія вообще изберемъ вопросительный знакъ, дабы не придумывать новаго знака, подобно Оюэлю, и избѣгнуть неудобствъ обозначенія, избраннаго Грасманомъ, употребляющимъ для этой цѣли знакъ сложенія. Стало-быть, запись

$$a \ ? \ b$$

будетъ обозначать, что надъ a и b совершено нѣкоторое дѣйствіе **). Если вообще

$$a \ ? \ b = b \ ? \ a \ ,$$

*) Построенное нами выше дѣйствіе усиленнаго возвышенія въ степень, даетъ существованіе двумъ обратнымъ дѣйствіямъ, опредѣляемымъ уравненіями:

$$x_a = b$$

и

$$a_x = b \ ,$$

гдѣ x есть искомая величина. Изъ этихъ двухъ дѣйствій, первое аналогично извлеченію корней, а второе — логариѳмированію Точно также и каждое изъ остальныхъ прямыхъ дѣйствій, данныхъ выше только въ перспективѣ, имѣетъ по два обратныхъ, что въ высшей степени интересно съ методологической точки зрѣнія.

**) Нѣкоторые авторы различаютъ активное число отъ пассивнаго, считая первое слагаемое при сложеніи, уменьшаемое при вычитаніи, множимое при умноженіи, дѣлимое при дѣленіи—числами пассивными, а второе слагаемое, множителя, дѣлителя и показателя степени — активными. Не то обозначаемое вопросительнымъ знакомъ дѣйствіе подчиняется закону перемѣстительному. Таковы не всѣ дѣйствія, а только дѣйствія сложенія и умноженія, ибо всегда

$$a + b = b + a\ ,$$

и

$$a\ .\ b = b\ .\ a\ ;$$

но далеко не таковы остальныя дѣйствія, ибо вообще

$$a - b \text{ не равно } b - a\ ,$$

$$a : b \quad „ \quad „ \quad b : a\ ,$$

$$a^b \quad „ \quad „ \quad b^a$$

$$\sqrt[b]{a} \quad „ \quad „ \quad \sqrt[a]{b}\ .$$

$$\log_a b \quad „ \quad „ \quad \log_b a\ .$$

Кромѣ того, должно замѣтить, что и при умноженіи a на b величина произведенія не зависитъ отъ порядка производителей только въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ отвлеченнымъ множимымъ: въ случаѣ же именованнаго множимаго это послѣднее не можетъ быть сдѣлано множителемъ, и для того, чтобы законъ этотъ остался справедливъ также и въ этомъ случаѣ, множителю должно приписать наименованіе прежняго множимаго, а множимое обратить въ число отвлеченное. Объ этомъ, впрочемъ, рѣчь впереди.

Если вообще

$$a\ ?\ b\ ?\ c$$

не измѣняетъ своего значенія, какое бы изъ данныхъ чиселъ ни было поставлено первымъ, вторымъ или третьимъ, то это дѣйствіе подчиняется закону сочетательному *). Таковы дѣйствія сложенія и умноженія (послѣднее только при отвлеченныхъ числахъ), но не остальныя дѣйствія, въ чемъ очень легко убѣдиться.

Интересно съ методологической точки зрѣнія, что каждый изъ вышеразсмотрѣнныхъ двухъ законовъ влечетъ за собою су-

---

смотря на нѣкоторыя удобства этой терминологіи, мы ея ниже не держимся, считая ее вообще не особенно важной и принимая во вниманіе, что этотъ взглядъ не можетъ быть съ успѣхомъ и съ нужною въ такихъ случаяхъ очевидностью распространенъ на логариѳмированіе и вообще на функціи высшаго порядка, напр., на корень уравненія, на функціи тригонометрическія, и проч.

*) Для краткости порядокъ дѣйствій выше обозначается безъ скобокъ. Это значитъ, что если намъ надо обозначить, что надъ числами a и b совершено какое либо дѣйствіе, а потомъ то же дѣйствіе совершено надъ полученнымъ результатомъ и третьимъ числомъ c, то это обозначается просто такъ:

$$a\ ?\ b\ ?\ c.$$

ществованіе другого и что это можно доказать въ самомъ общемъ видѣ. Кромѣ того, интересно, что если перемѣстительный законъ вообще справедливъ для двухъ любыхъ чиселъ, то сочетательный справедливъ для какого угодно числа данныхъ *).

Что касается третьяго закона (закона распредѣлительнаго), то онъ состоитъ въ томъ, что есть дѣйствія, для которыхъ

$$(a \pm b) \,?\, c = a \,?\, c \pm b \,?\, c.$$

Таковы дѣйствія умноженія и дѣленія, ибо

$$(a \pm b) . c = a . c \pm b . c$$

и

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c;$$

но далеко не таковы остальныя дѣйствія, ибо

$$(a \pm b) \pm c \text{ вообще не равно } a \pm c \pm (b \pm c)$$

$$(a \pm b)^c \quad „ \quad „ \quad „ \quad a^c \pm b^c \text{ **)}.$$

§ 8. Выше мы видѣли, что съ методологической точки зрѣнія не только самая идея, но и нѣкоторыя особенности производства дѣйствій составляютъ основу теоріи дѣйствій. Весь вопросъ только въ томъ, какія именно особенности этого производства существенны и какія несущественны для самыхъ понятій о дѣйствіяхъ. Легко убѣдиться, что въ идею каждаго изъ прямыхъ дѣйствій входитъ не только спеціализація данныхъ для дѣйствій чиселъ, но и идея о той или иной таблицѣ, а для умноженія и возвышенія—также идея о нѣкоторыхъ основныхъ формулахъ дѣйствія. Поэтому не вполнѣ правиленъ тотъ взглядъ, по которому дѣйствіе умноженія характеризуется только какъ сло-

---

*) Читатель, надѣемся, не посѣтуетъ на насъ за то, что мы не доказываемъ этихъ теоремъ: доказательства эти настолько просты, что при нѣкоторомъ желаніи онъ самъ выведетъ эти доказательства. Для большей ясности приведемъ эти теоремы въ систему: 1) Если вообще

$$a \,?\, b = b \,?\, c,$$

то величина выраженія $a \,?\, b \,?\, c$ не зависитъ отъ того, которое изъ чиселъ принято за первое, которое—за второе и которое—за третье; 2) Обратно: если величина выраженія $a \,?\, b \,?\, c$ не зависитъ отъ того, которое изъ нихъ принято за первое, за второе и за третье, то вообще

$$a \,?\, b = b \,?\, a.$$

3) Если вообще $a \,?\, b = b \,?\, a$, то величина результата этого дѣйствія, произведеннаго послѣдовательно надъ любымъ числомъ данныхъ, не зависитъ отъ того—какое изъ нихъ принято за первое, за второе и т. д. 4) Обратно: если величина результата дѣйствія, произведеннаго надъ любымъ числомъ данныхъ, не зависитъ и т. д.

**) Легко убѣдиться, что дѣйствія, слѣдующія за возвышеніемъ, да и самое возвышеніе, вмѣстѣ со всѣми возникающими изъ нихъ обратными дѣйствіями, не подчиняется *ни одному* изъ разсмотрѣнныхъ законовъ.

женіе равныхъ слагаемыхъ, а дѣйствіе возвышенія—только какъ перемноженіе равныхъ производителей. Не вполнѣ правиленъ также взглядъ (раздѣляемый, впрочемъ, очень многими авторитетами, напр., Бертраномъ) по которому всѣ четыре ариѳметическихъ дѣйствія надъ числами вытекаютъ изъ понятія о такихъ же дѣйствіяхъ надъ величинами. Этотъ взглядъ не вполнѣ правиленъ потому, что умноженіе величинъ, какъ таковое, никогда не встрѣчается и часто вообще не отличается отъ сложенія ихъ: умноженіе есть чисто ариѳметическая идея точно такъ же, какъ и возвышеніе въ степень и слѣдующія за возвышеніемъ прямыя дѣйствія; множитель есть всегда число (а не величина), а потому дѣйствіе умноженія носитъ специфически-ариѳметическій оттѣнокъ, не заключающійся въ обще-математическихъ понятіяхъ о дѣйствіяхъ сложенія и вычитанія. То же справедливо частью и относительно дѣйствія дѣленія и слѣдующихъ за нимъ обратныхъ дѣйствій. Поэтому съ методологической точки зрѣнія не важно и не вполнѣ правильно образованіе понятій о всѣхъ дѣйствіяхъ надъ числами изъ понятій о дѣйствіяхъ надъ величинами: важна эта идея только для образованія понятія о сложеніи, такъ какъ практическая необходимость сложенія величинъ и аггрегатовъ привела умъ человѣческій, съ психологической точки зрѣнія, къ понятію о сложеніи чиселъ. Прочія же дѣйствія надъ числами въ этомъ психологическомъ началѣ, съ методологической точки зрѣнія, не нуждаются; даже болѣе того: исходя изъ величинъ, нельзя прійти ко всѣмъ дѣйствіямъ, развивающимся (прямолинейно и согласно идеѣ обращенія) изъ дѣйствія сложенія.

§ 9. Перейдемъ теперь къ системѣ опредѣленій всѣхъ ариѳметическихъ дѣйствій, памятуя, что каждое изъ дѣйствій, кромѣ сложенія, предполагаетъ какой нибудь спеціально ему свойственный способъ его производства: безъ этого допущенія образованіе понятій объ остальныхъ дѣйствіяхъ было бы ничего не стоящею игрою ума, не имѣющею ни научнаго, ни практическаго, ни даже діалектическаго значенія. Несмотря, однако, на это, самыя понятія о дѣйствіяхъ ниже неоднократно отдѣляются отъ понятія ихъ производства и часто даже какъ бы противополагаются этимъ послѣднимъ. Понятіе дѣйствія принадлежитъ къ числу понятій, подчиняющихся логическимъ, психологическимъ и методологическимъ требованіямъ, хотя оно и заключаетъ въ себѣ implicite идею о различіи его производства отъ производства дѣйствія ему непосредственно предшествующаго (если оно принадлежитъ къ числу прямыхъ) и отъ производства прямого дѣйствія, изъ котораго оно возникло, если мы имѣли дѣло съ дѣйствіемъ обратнымъ. Производство же дѣйствія во многихъ его частностяхъ—вопросъ практическій, такъ сказать, техническій, предполагающій болѣе или менѣе искусственные пріемы, которыхъ въ самомъ понятіи даннаго дѣйствія не заключается. Понятіе дѣйствія существуетъ независимо отъ системы счисленія и отъ принятаго способа письменнаго или устнаго обозначенія чиселъ; кромѣ того складывать, вычитать и дѣлить можно и величины, совершенно независимо отъ ихъ числового значенія; производство же дѣйствія надъ числами предполагаетъ, во первыхъ, тѣ или иныя числа, во вторыхъ, ту или иную систему счисленія и, въ третьихъ, наконецъ, тѣ или иные искусственные пріемы.

Прямыя дѣйствія съ логической точки зрѣнія правильнѣе всего опредѣлять въ зависимости отъ результатовъ этихъ дѣйствій; что же касается дѣйствій обратныхъ, то ихъ опредѣленія должны быть построены на понятіяхъ о соотвѣтствующихъ прямыхъ дѣйствіяхъ. Тогда система относящихся сюда опредѣленій будетъ гласить:

1) *Суммою* двухъ чиселъ называется число, которое получилось бы, если бы мы сосчитали—сколько всего единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ, а *сложеніемъ*—дѣйствіе, цѣль котораго отысканіе этой суммы *).

2) *Произведеніемъ* одного числа на другое называется число, равное суммѣ, которая получится, если первое изъ этихъ чиселъ взять слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ, а *умноженіемъ*—дѣйствіе, цѣль котораго отысканіе этого произведенія.

3) *Степенью* какого либо числа называется число, равное произведенію какого либо числа равныхъ между собою производителей; число этихъ производителей называется показателемъ степени, а *возвышеніемъ въ степень* называется дѣйствіе, цѣль котораго отысканіе степени.

Эта лѣстница прямыхъ дѣйствій можетъ быть продолжена далѣе, но въ этомъ не представляется, вслѣдствіе маловажности остальныхъ прямыхъ дѣйствій, никакой надобности. Параллельно съ данными выше опредѣленіями прямыхъ дѣйствій можетъ быть построена система опредѣленій дѣйствій обратныхъ. При этомъ нѣтъ надобности исходить изъ опредѣленій результатовъ этихъ дѣйствій, а можно (съ логико-методологической точки зрѣнія это и правильнѣе) поставить опредѣленія обратныхъ дѣйствій въ непосредственную зависимость отъ понятій о дѣйствіяхъ прямыхъ; тогда получится слѣдующая система опредѣленій:

1) *Вычитаніемъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе, по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ, другого слагаемаго.

---

*) На это опредѣленіе должно, какъ это выяснено выше (въ § 4), смотрѣть не какъ на логически безукоризненное и методологически важное опредѣленіе этого понятія, а только какъ на разъясненіе того, въ какомъ именно значеніи употребляются термины: „сумма“ и „сложеніе.

2) *Дѣленіемъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго - отысканіе, по данному произведенію двухъ производителей и одному изъ нихъ, другого производителя.

Это дѣйствіе распадается на два: на дѣйствіе дѣленія числа на равныя части и дѣйствіе сравненія одного числа съ другимъ въ кратномъ отношеніи. Дѣленіе числа на равныя части имѣетъ цѣлью отысканіе множимаго по данному произведенію и множителю, а кратное сравненіе — отысканіе множителя по данному произведенію и множимому. Несмотря на рѣзкую логическую разницу между этими двумя видами дѣленія, они оба выше соединены въ одно опредѣленіе, такъ какъ, съ методологической точки зрѣнія, каждый изъ этихъ видовъ дѣйствія въ ариѳметикѣ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ числами, легко сводится къ другому *). Этого нельзя сказать о слѣдующихъ двухъ обратныхъ дѣйствіяхъ: извлеченіи корней и логариѳмированію.

3) *Извлеченіемъ корня* называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе основанія по данной степени и ея показателю,

4) *Логариѳмированіемъ же*—дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе показателя степени по данной степени и основанію ея.

Что касается остальныхъ обратныхъ дѣйствій, то можно ограничиться только выше (стр. 26) сдѣланнымъ указаніемъ на нихъ, тѣмъ болѣе, что для нихъ не выработано никакой терминологіи.

§ 10. Выше данная система опредѣленій имѣетъ въ виду только цѣлыя числа. Что касается чиселъ дробныхъ, то дѣйствія надъ ними представляютъ собою результатъ нѣкотораго вполнѣ необходимаго условія. Условіе это въ высшей степени важно съ методологической точки зрѣнія и проходитъ красною нитью чрезъ всѣ части математическаго анализа, имѣющія дѣло съ дѣйствіями надъ числами. Каждое изъ обратныхъ дѣйствій, за исключеніемъ логариѳмированія и слѣдующихъ за нимъ, даетъ начало происхожденію чиселъ, съ чисто ариѳметической точки зрѣнія фиктивныхъ, но тѣмъ не менѣе играющихъ въ математикѣ весьма важную роль. Вычитанію обязаны своимъ существованіямъ отрицательныя числа, дѣленію—дробныя, а извлеченію—несоизмѣримыя съ единицею и комплексныя или мнимыя. Для того чтобы не дѣлать цѣлой массы ограниченій, математическій анализъ, какъ извѣстно, распространяетъ на нихъ свое право производить надъ ними всѣ дѣйствія и при этомъ ограничиваетъ себя только въ

*) Дѣленіе *величины* на равныя части и сравненіе двухъ однородныхъ *величинъ* въ кратномъ отношеніи суть дѣйствія — съ методологической точки зрѣнія различныя. Не говоря уже о способахъ производства этихъ дѣйствій, которые для разнородныхъ величинъ вообще различны, должно замѣтить, что и самыя понятія этихъ дѣйствій надъ величинами не могутъ быть непосредственно сведены одно къ другому, пока мы находимся въ сферѣ общаго понятія о величинѣ.

одномъ отношеніи: онъ требуетъ только того, чтобы эти фиктивныя числа подчинялись законамъ переместительному, сочетательному и *распределительному въ техъ же пределахъ*, въ какихъ этимъ законамъ подчиняются числа целыя. Это ограниченіе налагаетъ на весь математическій анализъ свою печать и роковымъ образомъ влечетъ за собою известный рядъ определеній действій надъ фиктивными числами,—определеній, хотя и условныхъ, но темъ не менее совершенно необходимыхъ.

Отрицательныя и комплексныя числа лежатъ вне сферы ариѳметики въ обычномъ значеніи этого слова, и можетъ-быть отчасти по этой причине никто не сомневается въ ихъ фиктивности. Дробное же число находится въ иномъ положеніи: оно входитъ не только въ ариѳметику, но и въ обычное числовое міросозерцаніе человека, и поэтому довольно трудно себе усвоить, что числа этого рода, строго говоря, тоже фиктивны. Фиктивность числа обусловливается сферою случаевъ, въ которыхъ оно допускаетъ примененія: чемъ шире эта сфера, темъ реальнее, если можно такъ выразиться, кажется намъ число; наоборотъ: чемъ эта сфера уже, темъ фиктивнее оно намъ кажется. Сфера примененія целыхъ абсолютныхъ (положительныхъ) чиселъ громадна: считать можно предметы, явленія, величины, принимаемыя за единицы при измереніи однородныхъ съ ними величинъ, делимые объекты и неделимые. Сфера примененія целыхъ отрицательныхъ чиселъ не столь неограничена: отрицательнымъ можетъ быть значеніе иныхъ величинъ, но отрицательное число предметовъ делимыхъ (напр. хлебовъ), отрицательное число неделимыхъ предметовъ (напр., отрицательное число людей), отрицательное число явленій (напр., пушечныхъ выстреловъ или грозъ) — нелепость, non-sens, непостижимый для ума человеческаго. Узка и сфера примененія несоизмеримыхъ чиселъ. Но уже всехъ этихъ сферъ—сфера примененія комплексныхъ чиселъ: только съ большимъ трудомъ постигается возможность принимать всякую точку плоскости прямоугольныхъ координатъ за олицетвореніе (за аффиксъ, какъ говорятъ въ новейшей литературе этого предмета) комплекснаго числа, вещественная часть которой откладывается на оси x—овъ, а мнимая—на оси y—ковъ; мнимое же значеніе остальныхъ величинъ находится уже въ области сверхчувственной.

Спрашивается: какова сфера примененія дробныхъ чиселъ? Она тоже далеко не столь всеобъемлюща, какъ сфера чиселъ целыхъ: можно себе представить дробную часть величины, но никакъ не дробное число людей, не дробное число какихъ либо явленій, не дробное число зубьевъ въ зубчатомъ колесе, не дробное число клеточекъ въ яйце даннаго періода его развитія. Не подлежитъ, стало-быть, сомненію, что дробное число есть тоже фикція некотораго рода, если только согласиться съ вышеданнымъ критеріемъ для сужденія о фиктивности даннаго рода чиселъ. Только цѣлое абсолютное число есть неподлежащій ограниченіямъ результатъ одной изъ элементарнѣйшихъ дѣятельностей нашего ума; прочіе же роды чиселъ суть результаты исключительно аналитической и обобщающей дѣятельностей нашего ума, вовсе не обязательные для простого здраваго смысла.

§ 11. Сложеніе дробныхъ чиселъ, съ методологической точки зрѣнія, предполагаетъ одинаковость знаменателей данныхъ для сложенія дробей, или же, въ случаѣ различныхъ знаменателей, возможность выраженія всѣхъ дробей въ одинаковыхъ доляхъ; это послѣднее условіе предполагаетъ возможность выраженія дроби въ другихъ доляхъ безъ измѣненія ея величины. Отсюда уже легко видѣть, что понятіе сложенія дробныхъ чиселъ не только вытекаетъ изъ понятія сложенія чиселъ цѣлыхъ, но находится въ тѣсной связи и съ понятіемъ о доляхъ величины или единицы. Точно также понятіе умноженія на дробь вытекаетъ не непосредственно изъ понятія умноженія на цѣлое число, а также изъ понятія о сохраненіи, въ случаѣ дробныхъ чиселъ, неприкосновенности основныхъ законовъ умноженія. Что касается возвышенія въ дробную степень, то оно хотя тоже является обобщеніемъ понятія возвышенія въ степень съ цѣлымъ показателемъ, но все-таки не непосредственно вытекаетъ изъ понятія объ этомъ послѣднемъ дѣйствіи. Сообразно съ симъ получается слѣдующая система опредѣленій ариѳметическихъ дѣйствій:

1. Суммою двухъ дробныхъ чиселъ называется дробное число, равное суммѣ одинаковыхъ долей единицы, заключающихся во всѣхъ данныхъ дробяхъ вмѣстѣ, а сложеніемъ—дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе суммы данныхъ дробей *).—При этомъ понятіе суммы одинаковыхъ долей единицы предполагается извѣстнымъ.

*) Интересно замѣтить, что этимъ опредѣленіемъ ни мало не предрѣшается способъ производства дѣйствія. Такъ, напр., ничто не можетъ помѣшать намъ сдѣлать сложеніе

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$$

слѣдующимъ образомъ: сколько пятыхъ долей въ дроби—$\frac{3}{7}$?

$\frac{1}{7}$ единицы $=$ $\frac{5}{7}$ одной пятой,

$\frac{3}{7}$ единицы $=$ $\frac{15}{7}$ одной пятой $= 2\frac{3}{7}$ одной пятой;

но $2\frac{1}{7}$ одной пятой $+$ 2 пятыхъ составятъ $4\frac{1}{7}$ одной пятой, т. е.

$\frac{4}{5}$ единицы $+$ $\frac{1}{7}$ одной пятой или

$\frac{4}{5}$ единицы $+$ $\frac{1}{35}$ единицы

каковая сумма легко преобразовывается (на подобіе предыдущей) въ сумму

$\frac{28}{35} + \frac{1}{35}$ или въ $\frac{29}{35}$.

2. Произведеніемъ какого либо числа на дробь называется произведеніе его на числителя, раздѣленное на знаменателя даннаго множителя, а умноженіемъ—дѣйствіе, цѣль котораго заключается въ отысканіи этого произведенія *).

3. Степенью съ дробнымъ показателемъ называется корень, котораго показатель равенъ знаменателю показателя, а подкоренная величина—основанію, возвышенному въ степень числителя даннаго показателя; возвышеніемъ же въ степень называется дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе степени **).

Легко видѣть, что въ этой лѣстницѣ опредѣленій прямыхъ дѣйствій нѣтъ той зависимости между всякимъ дѣйствіемъ и ему не-

---

*) Въ видѣ формулы это опредѣленіе выражается такъ:

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \times m\right) : n.$$

При этомъ b можетъ равняться единицѣ, а произведеніе

$$\frac{a}{b} \times m$$

можетъ быть найдено на основаніи опредѣленія умноженія на цѣлое число; равнымъ образомъ и частное

$$\frac{a \times m}{b} : m$$

можетъ быть найдено на основаніи опредѣленія дѣленія на цѣлое число. Достойно притомъ вниманія, что выше данное опредѣленіе и всѣ возможныя (правильныя) опредѣленія умноженія на дробь отличаются въ самой основѣ своей стремленіемъ къ сохраненію закона перемѣстительнаго во всей его неприкосновенности. Дѣйствительно, что

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b},$$

вытекаетъ изъ понятія объ умноженіи на цѣлое число. Невозможно иначе (по сущности) опредѣлить умноженіе на дробь, чѣмъ какъ это сдѣлано выше, потому что, въ противномъ случаѣ, какъ бы мы ни опредѣлили это дѣйствіе, если только

$$\frac{a}{b} \times c \text{ не равно } c \times \frac{a}{b},$$

то и самое опредѣленіе не будетъ никуда годиться.

**) Въ видѣ формулы это опредѣленіе возвышенія въ дробную степень выражается такъ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Легко видѣть, что при этомъ опредѣленіи степени предполагается извѣстнымъ понятіе объ извлеченіи, какъ въ выше данномъ опредѣленіи умноженія предполагается понятіе о дѣйствіи дѣленія. Только понятіе сложенія дробей можетъ обойтись безъ понятія объ обратномъ дѣйствіи; но это такъ только до тѣхъ поръ, пока мы вращаемся въ сферѣ абсолютныхъ чиселъ: стоитъ намъ перейти въ сферу чиселъ съ относительными значеніями (положительными и отрицательными) и эта особенность сложенія тоже исчезнетъ.

посредственно предшествующимъ, которая замѣчается въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ. Что же касается системы опредѣленій обратныхъ дѣйствій, то она можетъ и, съ методологической точки зрѣнія, должна остаться совершенно та же, что и въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ. При этомъ должно замѣтить, что эта послѣдняя система опредѣленій обратныхъ дѣйствій не измѣняется ни въ какомъ изъ случаевъ, представляющихся въ анализѣ: ни въ случаѣ отрицательныхъ, ни въ случаѣ несоизмѣримыхъ, ни въ случаѣ комплексныхъ чиселъ. Это—одна изъ существеннѣйшихъ методологическихъ особенностей теоріи обратныхъ дѣйствій.

§ 12. Кромѣ теоріи дѣйствій, нѣкоторый методологическій интересъ представляютъ въ ариѳметикѣ и классификаціи разнаго рода. Вообще классификаціи въ наукахъ играютъ роль очень важную; но въ ариѳметикѣ, какъ мы это увидимъ ниже, значеніе обыкновенно практикуемыхъ классификацій не особенно велико.

Первая классификація, съ которою мы встрѣчаемся у нѣкоторыхъ авторовъ, это раздѣленіе предметовъ (не величинъ) на однородные и разнородные. Во введеніи къ одному изъ распространеннѣйшихъ учебныхъ руководствъ, а именно къ „Ариѳметикѣ“ гг. Малинина и Буренина, дается слѣдующее опредѣленіе однородныхъ и разнородныхъ предметовъ: „такіе предметы, которымъ мы можемъ дать одно названіе, наз. *однородными*, а тѣ, которымъ мы можемъ дать только разныя названія, напр. столъ и книга, перо и бумага, человѣкъ и дерево, наз. *разнородными*“ (стр. 4). Легко видѣть, что при этомъ составителями упущено изъ виду, едва ли не одно изъ самыхъ существенныхъ въ интересующемъ ихъ вопросѣ, обстоятельство, а именно то, что рѣшительно всѣ предметы однородны между собою какъ предметы, и что такихъ предметовъ нѣтъ, которымъ можно было бы дать *только* разныя названія. Ибо какъ ни разнородны составителямъ кажутся называемые ими столъ и книга, перо и бумага, человѣкъ и дерево, все это суть предметы, и какъ таковые—предметы непремѣнно однородные. Еще поучительнѣе окажется этотъ логическій недосмотръ, если принять во вниманіе, что для ариѳметики нужно вполнѣ точное понятіе объ однородныхъ предметахъ, если оно только вообще нужно. Интересно при этомъ, что сами составители, считая (въ дальнѣйшемъ изложеніи) качаніе маятника и пушечный выстрѣлъ явленіями разнородными, въ то же время говорятъ: „качанія маятника суть явленія однородныя; біенія пульса суть также явленія однородныя; но качаніе маятника и выстрѣлъ изъ пушки суть уже два разнородныхъ явленія“. Если качаніе маятника и пушечный выстрѣлъ суть явленія вполнѣ разнородныя, то откуда взялась возможность сосчитать ихъ, говорить о нихъ, какъ о *двухъ* разнородныхъ явленіяхъ? Не остается ли такимъ образомъ самая цѣль логическаго разграниченія однородныхъ и разнородныхъ предметовъ совершенно недостигнутою?

Съ методологической точки зрѣнія эта классификація, конечно, тоже не представляетъ никакой цѣнности: для возникновенія понятія числа *необходимъ счетъ какихъ угодно предметовъ, но вовсе* не необходима невѣрная съ логической точки зрѣнія классификація предметовъ на однородные и разнородные, отъ которой счетъ вовсе не зависитъ: для того чтобы сосчитать данные предметы, каковы бы они ни были, надобна объединяющая ихъ идея; но эта идея вовсе не въ однородности предметовъ, а въ самомъ процессѣ счета, въ данномъ случаѣ примѣняемаго къ нимъ.

Далеко не то же представляетъ собою классификація *величинъ* на однородныя и разнородныя; къ сожалѣнію, польза и необходимость этой классификаціи, кажется, увлекла многихъ составителей учебниковъ по предмету ариѳметики на путь построенія подобной же по формѣ, но далеко не столь же существенной по содержанію, классификаціи предметовъ.

Однородными называются величины, изъ которыхъ каждая можетъ быть составлена изъ частей каждой изъ остальныхъ, *разнородными* же—величины, которыя не обладаютъ этимъ свойствомъ. Это—единственная классификація величинъ, которая имѣетъ въ ариѳметикѣ нѣкоторое примѣненіе *). Но важность ея замѣчается только съ момента введенія въ ариѳметику разнаго рода приложеній, представляющихъ независимо отъ этой классификаціи весьма мало методологическаго интереса. Вышеизложенными замѣча-

---

*) Изъ остальныхъ классификацій можетъ быть упомянута классификація величинъ на протенсивныя (промежутки времени), экстенсивныя (пространственныя разнаго рода) и интенсивныя (силы и др. свойства, проявляющіяся въ разныхъ степеняхъ); далѣе могутъ быть упомянуты классификація величинъ на перемѣнныя и постоянныя и классификація ихъ на зависящія и не зависящія одна отъ другой. Первая изъ упомянутыхъ классификацій въ математикѣ никакой роли не играетъ, ибо изъ всѣхъ величинъ только *математическія* входятъ въ область вѣдѣнія математическихъ наукъ; остальныя-же величины въ ней не изучаются. Характеристичное свойство математической величины заключается въ возможности опредѣленія суммы двухъ величинъ этого рода: если невозможно опредѣлить, что понимается подъ суммою двухъ данныхъ величинъ, то къ этимъ величинамъ ученія математики непримѣнимы. Область величинъ математическихъ съ успѣхами знанія, впрочемъ, все болѣе и болѣе расширяется. — Достойна упоминанія классификація величинъ на прерывныя и непрерывныя: математическія науки занимаются непрерывными величинами (ихъ не должно смѣшивать съ непрерывными функціями); прерывныя величины даютъ въ результатѣ цѣлыя числа, выражающія количество отдѣльныхъ предметовъ или явленій, несоставляющихъ одного цѣлаго. Съ психологической точки зрѣнія эта классификація интересна въ томъ отношеніи, что ранѣе понятія о непрерывныхъ величинахъ умъ человѣческій вырабатываетъ понятіе о величинахъ прерывныхъ. Цѣлыя числа изучаются въ ариѳметикѣ и въ теоріи чиселъ.

ніями о дѣйствіяхъ ограничивается та часть методологіи математическихъ наукъ, въ вѣдѣніи которой находятся методы ариѳметики. Ученія о такъ наз. именованныхъ числахъ, тройныхъ правилахъ, десятичныхъ дробяхъ и т. п. представляютъ собою только приложенія ариѳметическихъ дѣйствій къ частнымъ вопросамъ. Единственный предметъ, представляющій здѣсь методологическій интересъ, заключается въ идеѣ замѣны дѣйствій надъ величинами соотвѣтствующими дѣйствіями надъ числами. Эта идея принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ въ анализѣ, такъ какъ ею проникнуты многія отрасли геометріи и большинство различныхъ отраслей такъ называемой математики прикладной. Пока мы имѣемъ дѣло съ величинами не измѣренными, наши знанія объ ихъ взаимныхъ отношеніяхъ иногда бываютъ съ практической точки зрѣнія недостаточны, и окончательную формулировку наши знанія получаютъ лишь въ тотъ моментъ, когда нами полученъ окончательный числовой результатъ, являющійся въ этомъ случаѣ какъ бы вѣнцомъ нашего знанія *).

Идея замѣны дѣйствій надъ величинами дѣйствіями надъ числами представляетъ собою основу ученій объ именованныхъ числахъ и о такъ называемыхъ тройныхъ правилахъ; но не только это важно съ методологической точки зрѣнія, а также то, что умъ человѣческій представляетъ себѣ дѣйствія только надъ однородными величинами. Здѣсь и кроется великое методологическое значеніе классификаціи величинъ на однородныя и разнородныя. Кромѣ того должно замѣтить, что сведеніе дѣйствій надъ величинами къ дѣйствіямъ надъ числами представляетъ собою одну изъ наиболѣе раннихъ, но тѣмъ не менѣе величайшихъ побѣдъ человѣческаго ума; мы не въ состояніи въ настоящую минуту достаточно оцѣнить ее, потому что эта идея неотдѣлима отъ всего нашего математическаго міросозерцанія.

Кромѣ упомянутыхъ, въ курсахъ по предмету ариѳметики встрѣчается еще классификація чиселъ на именованныя и отвлеченныя,—классификація, къ сожалѣнію, недостаточно научная, какъ мы въ томъ убѣдимся впослѣдствіи. Эта классификація не-

---

*) Это, впрочемъ, нисколько не умаляетъ значенія тѣхъ отраслей математической науки и науки вообще, которыя не имѣютъ дѣла съ числами. Ни та часть геометріи древнихъ, которая имѣетъ въ виду только форму, а не числовыя свойства фигуръ, ни т. наз. новая (синтетическая) геометрія, имѣющая въ виду проективныя и перспективныя свойства и положеніе фигуръ, ни качественный химическій анализъ (умышленно беремъ примѣръ изъ другой области вѣдѣнія), ни логика, ни языковѣдѣніе, ни психологія, ни другія науки, оперирующія надъ невыразимыми въ числахъ понятіями, не теряютъ правъ на уваженіе и изученіе, несмотря на то, что число въ нихъ не играетъ никакой роли. Выше имѣлась въ виду роль числа, какъ окончательнаго результата знанія нашего о величинахъ,—та роль, которая столь преувеличенно выражена извѣстнымъ мистическимъ изрѣченіемъ Пиѳагора о томъ, что вселенная управляется числами, а не роль числа въ знаніи вообще.

удовлетворительна въ двухъ отношеніяхъ. Во-первыхъ, кромѣ этихъ двухъ родовъ чиселъ, мы въ наукѣ и на практикѣ наталкиваемся еще на два вида чиселъ, которыхъ нельзя отнести ни къ именованнымъ, ни къ отвлеченнымъ: это—числа конкретныя, выражающія количества отдѣльныхъ предметовъ или явленій, какъ напр., числа «пять хлѣбовъ», «семь домовъ», «десять выстрѣловъ» и т. д., и числа существенно-отвлеченныя, которымъ не можетъ быть приписано никакое рѣшительно наименованіе: таковы, напр., множитель при умноженіи, дѣлитель при дѣленіи на равныя части, частное при кратномъ сравненіи, оба члена дроби, показатель степени и т. п. Во-вторыхъ, классификація чиселъ на отвлеченныя и именованныя подаетъ поводъ къ нѣкоторому недоразумѣнію, по которому на именованное число многіе склонны смотрѣть какъ на дѣйствительное число, въ то время какъ оно есть не иное что, какъ только извѣстная величина. Когда говорятъ о числѣ, то имѣютъ въ виду именно число отвлеченное,—исключительно то понятіе, которое связано съ именами числительными: ни больше, *ни меньше*. Пять аршинъ, строго говоря, составляютъ уже не число, а нѣкоторую длину; пять столовъ составляютъ тоже не число, а нѣкоторую совокупность извѣстныхъ предметовъ; самое же *число* аршинъ и *число* столовъ выражается только словомъ «пять». Эти соображенія, не мѣшая намъ иногда пользоваться сказанною классификаціею въ виду нѣкоторыхъ чисто-практическихъ удобствъ ея, все-таки не должны быть забываемы нами; мы должны всегда помнить: 1) что именованныя числа нецѣлесообразно и неправильно смѣшивать съ числами конкретными, не выражающими величины, не поддающимися тѣмъ преобразованіямъ, которымъ поддаются величины (превращенію и раздробленію) и не представляющими собою величинъ непрерывныхъ (каковыя величины выражаются числами именованными); и 2) что существуютъ такія отвлеченныя числа, которымъ по самой роли, ими исполняемой, по логическому и ариѳметическому смыслу ихъ, по самой сущности ихъ, нельзя приписывать никакого наименованія.

Чѣмъ выше мы станемъ подыматься по лѣстницѣ дѣйствій въ теорію употребительныхъ въ анализѣ функцій, тѣмъ неизбѣжнѣе станетъ для насъ необходимость признанія такихъ отвлеченныхъ чиселъ, которыхъ мы часто въ ариѳметикѣ не имѣемъ въ виду только по забывчивости. Стоитъ обратиться къ слагаемымъ какой нибудь суммы или къ разности какихъ либо отвлеченныхъ чиселъ, чтобы увидѣть, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ числами, допускающими возможность замѣны ихъ одноименными именованными или конкретными числами. Но при умноженіи множитель, при дѣленіи—дѣлитель, при возвышеніи оба числа, при извлеченіи и логариѳмированіи—тоже оба числа не могутъ принять никакого именованнаго или конкретнаго значенія: это числа отвлеченныя par excellence, числа, которыя дозволительно называть существенно-отвлеченными. Точно также $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др. тригонометрическія функціи суть числа существенно-отвлеченныя, которыхъ аргументъ x есть тоже число существенно-отвлеченное *).

Такимъ образомъ упоминаемая выше классификація. съ одной стороны, не полна въ виду того, что въ ней не приняты во вниманіе существенно-отвлеченныя числа. Что же касается неполноты ея въ другомъ направленіи, то она заключается въ томъ, что ею игнорируются числа конкретныя, которыя выражаютъ не непрерывныя величины, а не совокупности отдѣльныхъ предметовъ и явленій. Таковы числа: пятнадцать стакановъ, двадцать человѣкъ, семьдесятъ домовъ, пятьдесятъ грозъ, выстрѣловъ и т. п. Эти числа ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть причислены ни къ роду отвлеченныхъ, ни къ роду именованныхъ чиселъ.

§ 13. Въ высшей степени интересна та особенность ариѳметическихъ функцій (будемъ такъ называть сумму. разность, произведеніе и частное двухъ чиселъ), которая чрезвычайно важна для доказательства того, что область ариѳметики, строго говоря, не должна итти далѣе *четырехъ* дѣйствій надъ числами.

Когда мы имѣемъ какую либо функцію какихъ либо чиселъ (будь то функція алгебраическая или трансцендентная), одинъ изъ

---

*) Послѣднее утвержденіе можетъ показаться рискованнымъ, если подъ x-омъ разумѣть число градусовъ нѣкоторой дуги, которой синусъ, косинусъ или другая тригонометрическая линія берется въ данномъ случаѣ. Но это—взглядъ, не подходящій къ тому случаю, когда на эти функціи смотрять какъ на функціи нѣкоторыхъ *чиселъ* (а это сдѣлано выше) и притомъ какъ на функціи, опредѣляемыя либо въ видѣ основныхъ рядовъ.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{in inf.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3\,4} - \text{in inf.}\,,$$

либо въ видѣ Эйлеровыхъ формулъ:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \text{ и } \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\,,$$

гдѣ e есть натуральное основаніе, а i положительное значеніе $\sqrt{-1}$; изъ этихъ послѣднихъ формулъ, а равно изъ вышеданныхъ рядовъ, до очевидности ясно, что $\sin x$ и $\cos x$ суть числа существенно отвлеченныя, точно такъ же, какъ и самый аргументъ x. При этомъ, если мы имѣемъ дѣло съ синусомъ и косинусомъ дугъ или угловъ, то x въ такомъ случаѣ есть отвлеченное число, опредѣляемое равенствомъ

$$x = \frac{2\,\pi.\,n}{360}\,,$$

гдѣ π есть существенно-отвлеченное число, выражающее отношеніе окружности къ діаметру, а n—тоже отвлеченное число градусовъ дуги, которой синусъ или косинусъ берется въ данномъ случаѣ.

первыхъ вопросовъ, представляющихся при изслѣдованіи этой функціи, есть вопросъ о томъ—сколько значеній имѣетъ эта функція при данныхъ значеніяхъ ея аргументовъ. Легко видѣть, что степень съ цѣлымъ показателемъ, какъ функція, имѣетъ только одно значеніе, въ то время какъ корень съ цѣлымъ показателемъ имѣетъ столько значеній, сколько единицъ въ показателѣ корня. Такъ, квадратный корень имѣетъ два значенія, кубичный,—три, корень четвертой степени - четыре, и т. д. Не трудно доказать, какъ это и дѣлается въ анализѣ, что логариѳмъ положительнаго числа (цѣлаго или дробнаго) имѣетъ безчисленное множество значеній, изъ которыхъ практическую важность представляетъ только одно, а именно вещественное его значеніе; каждая изъ тригонометрическихъ функцій имѣетъ, правда, по одному значенію для даннаго значенія аргумента, но за то каждая изъ обратныхъ тригонометрическимъ (круговыхъ) функцій имѣетъ безчисленное множество значеній. Вообще, какъ извѣстно, вопросъ о количествѣ значеній данной функціи весьма важенъ для точной характеристики ея.

Что касается функцій ариѳметическихъ (суммы, разности, произведенія и частнаго), то всѣ онѣ имѣютъ только по одному значенію для данныхъ значеній ихъ аргументовъ. Съ методологической точки зрѣнія интересно выяснить —принадлежитъ ли это свойство ихъ къ числу очевидныхъ и не допускающихъ доказательства, или же къ числу хотя и очевидныхъ, но допускающихъ таковое.

Чтобы облегчить себѣ разрѣшеніе этого вопроса, предположимъ данныя числа, т. е. аргументы, цѣлыми.

Что сумма

$$a + b$$

имѣетъ только одно, а не болѣе значеній—принадлежитъ къ числу аксіомъ; никакими разсужденіями невозможно доказать, что въ натуральномъ рядѣ чиселъ не существуетъ двухъ различныхъ чиселъ s_1 и s_2, удовлетворяющихъ равенствамъ:

$$a + b = s_1$$

и

$$a + b = s_2.$$

Невозможность существованія двухъ различныхъ суммъ однихъ и тѣхъ же чиселъ непосредственно вытекаетъ изъ самаго понятія о числѣ и о суммѣ двухъ чиселъ, и притомъ вытекаетъ не логически (въ такомъ случаѣ мы имѣли бы дѣло съ доказательствомъ), а психологически *). Обратное предложеніе принадлежитъ уже къ

*) Считаемъ неизлишнимъ предостеречь внимательнаго читателя отъ одной методологической ошибки. Трудно противостоять желанію доказать сказанную истину, принявъ ее такимъ образомъ за теорему, которая допускаетъ будто бы слѣдующее доказательство отъ противнаго:

числу теоремъ, ибо его можно доказать. Оно гласитъ: если одно изъ слагаемыхъ суммы двухъ чиселъ равно одному изъ слагаемыхъ другой суммы двухъ слагаемыхъ и если эти суммы равны между собою, то и второе слагаемое первой суммы равно второму второй; дѣйствительно, если

$$a + b = a + c,$$

то непремѣнно

$$b = c,$$

ибо въ противномъ случаѣ b должно было бы быть либо больше, либо меньше c: а въ такомъ случаѣ $a+b$ не было бы равно $a+c$.

То свойство остальныхъ ариѳметическихъ функцій, по которому каждая изъ нихъ имѣетъ только по одному значенію при данныхъ значеніяхъ данныхъ чиселъ, допускаетъ для каждой изъ нихъ отдѣльное доказательство.

Такъ, что функція

$$a - b$$

имѣетъ только одно значеніе при данныхъ значеніяхъ a и b, можно доказать слѣдующимъ способомъ: пусть

$$a - b = d_1$$

и пусть, кромѣ того,

$$a - b = d_2;$$

тогда, съ одной стороны

$$a = b + d_1,$$

а съ другой

$$a = b + d_2;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$b + d_1 = b + d_2,$$

такъ какъ

$$a + b = s_1,$$

то мы, допустивъ, что

$$a + b = s_2,$$

получимъ будто бы, что

$$s_1 = s_2.$$

Но это было бы вѣрно, если бы мы знали, что $a-b$ въ обоихъ равенствахъ выражаетъ одно и то же число, а этого-то мы и не знаемъ. Прибѣгнувъ къ подобному доказательству, можно, пожалуй, доказать, что и

$$\sqrt{4}$$

имѣетъ только одно значеніе, а не два; ибо, положивъ, что

$$\sqrt{4} = 2$$

и что

$$\sqrt{4} = \alpha,$$

мы получили бы такимъ же точно путемъ, что

$$\alpha = 2$$

или что $\sqrt{4}$ имѣетъ только одно значеніе. Что невѣрно, ибо на самомъ дѣлѣ $\sqrt{4}$ можетъ имѣть во второмъ случаѣ значеніе α, которое равно (-2) и которое отличается отъ перваго значенія корня.

каковое равенство, по предъидущему, возможно только тогда, когда

$$d_1 = d_2.$$

Что и требовалось доказать.

Что функція

$$a \times b$$

имѣетъ только одно значеніе при цѣломъ b—можно доказать, принявъ во вниманіе, что

$$a \times b = a + a + a + \ldots + a,$$

гдѣ число слагаемыхъ равно b.—Обратное тоже справедливо: если

$$a \times b = a \times c,$$

то непремѣнно

$$b = c.$$

Ибо въ противномъ случаѣ, по предъидущему, $a \times b$ не могло бы равняться $a \times c$.

Что функція

$$a : b$$

имѣетъ только одно значеніе, доказывается способомъ, аналогичнымъ доказательству однозначности разности *).

Такимъ образомъ вопросъ о числѣ значеній ариөметическихъ функцій отъ цѣлыхъ чиселъ разсмотрѣнъ нами. Предоставляемъ читателю прослѣдить тотъ же вопросъ для чиселъ дробныхъ. Вопросъ о числѣ значеній ариөметическихъ функцій отъ чиселъ отрицательныхъ и комплексныхъ, представляя высокій методологическій интересъ, выходитъ однако за предѣлы методологіи ариөметики. Читатель, безъ сомнѣнія, не посѣтуетъ на насъ что мы не сочли нужнымъ формулировать противоположныя теоремы, лежащія въ основѣ теоремъ, которыя можно принять за обратныя.

Въ связи съ разсмотрѣнною особенностью функцій, названныхъ выше болѣе или менѣе произвольно ариөметическими, находится вопросъ объ ограниченіи объема ариөметики только четырьмя дѣйствіями. Несмотря на то, что многіе авторитетные геометры и составители курсовъ желали бы расширить предѣлы ариөметики далеко за предѣлы четырехъ дѣйствій, мы имѣемъ смѣлость присоединиться къ наиболѣе у насъ распространенному взгляду на объемъ ариөметики. Если мы выше дѣлали экскурсіи въ область другихъ дѣйствій, то только съ цѣлью выясненія и лучшей иллюстраціи основныхъ методологическихъ взглядовъ на теорію дѣйствій. Смѣемъ думать, что въ этой книгѣ приведено не одно

---

*) Только отъ двухъ ошибочныхъ пріемовъ считаемъ нужнымъ предостеречь: не должно думать, что при доказательствѣ однозначности функцій

$$a - b \text{ и } a : b$$

можно пользоваться въ первомъ случаѣ вычитаніемъ, а во второмъ — дѣленіемъ. Такое доказательство было бы petitio principii.

основаніе правильности того взгляда на ариѳметику, по которому эта послѣдняя и какъ наука, и какъ предметъ обученія занимается только *четырьмя* дѣйствіями надъ абсолютными (положительными) числами; но одно изъ убѣдительнѣйшихъ соображеній въ пользу этого взгляда заключается, думается намъ, въ томъ, что остальныя дѣйствія совершенно неумѣстны въ ариѳметикѣ, какъ дѣйствія, для полнаго пониманія которыхъ необходимы такія ученія анализа, которыя часто даже въ курсахъ т. наз. низшей алгебры опускаются по причинѣ ихъ трудностей. Мы не дѣлаемъ при этомъ исключенія даже для возвышенія въ степень, ибо для этого дѣйствія нужны не только формула Ньютонова бинома, но и ученіе о двоиственности значенія корня квадратнаго, тройственности кубическаго, и т. д. Ибо вопросъ о томъ сколько—значеній можетъ имѣть a въ равенствѣ

$$a^b = c$$

при дробномъ b—вопросъ очень естественный и вовсе не разрѣшаемый съ помощью однихъ ученій ариѳметики.

§ 14. Въ этой главѣ, преимущественно занимающейся вопросами методологическаго характера, необходимо коснуться еще двухъ вопросовъ: вопроса о методѣ ариѳметики-науки и вопроса о способахъ рѣшенія такъ называемыхъ ариѳметическихъ задачъ. Методъ ариѳметики науки, какъ легко убѣдиться изъ всего предъидущаго, вполнѣ дедуктивенъ, ибо въ ней изъ общихъ понятій (о числѣ, счетѣ, единицѣ и сложеніи) и изъ произвольно принятаго условія относительно нумераціи доходимъ путемъ дедуктивнымъ до всѣхъ ученій о числѣ, о дѣйствіяхъ надъ нимъ и о способахъ производства этихъ дѣйствій.

Что касается способовъ рѣшенія такъ называемыхъ ариѳметическихъ задачъ, то при рѣшеніи большинства задачъ этого рода примѣняются несомнѣнно обѣ формы нашего мышленія: и анализъ, и синтезъ. (Анализъ и синтезъ, какъ извѣстно, вообще суть формы мышленія, а не методы изслѣдованія, какъ это предполагаютъ нѣкоторые). Нѣтъ такой задачи, въ которой не нашли бы примѣненія и та, и другая форма: разница заключается только въ томъ, что въ нѣкоторыхъ задачахъ анализъ совершается столь быстро, что его не замѣчаешь, и онъ сливается съ синтезомъ какъ бы во-едино. Но, строго говоря, вопросъ о рѣшеніи ариѳметическихъ задачъ лишь постолько входитъ въ область вѣдѣнія методологіи ариѳметики, посколько мы имѣемъ дѣло съ задачами ариѳметическими, т. е. съ такими задачами, для разрѣшенія которыхъ требуется примѣненіе только четырехъ дѣйствій безъ всякаго явнаго или скрытаго примѣненія уравненій. Вопросъ же о рѣшеніи задачъ вообще выходитъ за предѣлы методологіи ариѳметики, а потому рѣчь объ этомъ вопросѣ впереди, поскольку онъ для насъ будетъ интересенъ съ методической точки зрѣнія.

§ 15. Въ заключеніе главы позволимъ себѣ остановиться на понятіи, лежащемъ въ основѣ математическихъ наукъ и играющемъ роль, конечно, и въ ариѳметикѣ. Это—понятіе о величинѣ. Слово „величина" употребляется въ жизни и наукѣ въ двоякомъ смыслѣ: одно изъ значеній этого слова неопредѣлимо, и въ этомъ случаѣ понятіе величины принадлежитъ къ числу первоначальныхъ. Это—то значеніе слово, въ которомъ оно употребляется въ случаяхъ, когда имѣется въ виду величина *чего-нибудь*, напр. величина поверхности поля, величина разстоянія, величина какого либо сосуда или тѣла, величина промежутка времени, величина числа. Что называется величиною промежутка времени, величиною числа, величиною объема сосуда — опредѣлить невозможно: это понятіе принадлежитъ къ числу основныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленію въ зависимости отъ другихъ понятій. (Дюгамель слѣдующимъ образомъ представляетъ себѣ то ученіе логики, по которому не всѣ понятія подлежатъ опредѣленію: опредѣленіе предполагаетъ зависимость между даннымъ понятіемъ и другими извѣстными: стало-быть нѣкоторыя понятія обязательно должны быть приняты за извѣстныя).

Но слово „величина" часто употребляется также въ другомъ, менѣе опредѣленномъ, условномъ смыслѣ. Въ этомъ смыслѣ говорятъ о самой длинѣ, о самой поверхности, о самомъ объемѣ тѣла, о самомъ промежуткѣ времени, даже о самомъ числѣ—какъ о величинахъ; въ этомъ же смыслѣ говорятъ о величинахъ однородныхъ и разнородныхъ, прерывныхъ и непрерывныхъ, зависимыхъ и независимыхъ, и т. п. Въ этотъ смыслѣ слово „величина" есть *терминъ*, употребляемый для краткости, общее названіе всего проявляющагося въ природѣ въ разной степени, всего, дающаго намъ поводъ къ количественному сравненію. Обычныя опредѣленія этого термина неточны и, къ сожалѣнію, не могутъ быть точны, пока они опираются не неосторожномъ и не-математичномъ, если можно такъ выразиться, употребленіи словъ „больше" и „меньше". Эти послѣднія свойства должны быть приписываемы не предметамъ и различнымъ ихъ свойствамъ, какъ это обыкновенно дѣлается, а только извѣстнымъ геометрическимъ и механическимъ и т. п. понятіямъ, отвлекаемымъ отъ вещественныхъ предметовъ, насъ окружающихъ. Такъ, строго говоря, не поле больше или меньше, а поверхность его, не стаканъ великъ или малъ, а объемъ или емкость его, и т. д. Всѣ подобныя геометрическія и механическія фикціи и носятъ общее названіе величины, если къ нимъ приложимы понятія о большемъ и меньшемъ. Наиболѣе часто встрѣчаются въ математикѣ слѣдующія величины: длина, поверхность и площадь, объемъ, промежутокъ времени, сила, работа. Это —

величины изъ области геометріи и механики; изъ области же взаимныхъ человѣческихъ отношеній въ роли величинъ чаще всего встрѣчаются цѣнности (о вѣсѣ не говоримъ, потому что это понятіе механическое). По нашему крайнему разумѣнію, вмѣсто сбивчивыхъ опредѣленіи величины, въ курсахъ ариѳметики слѣдовало бы просто давать болѣе или менѣе полное перечисленіе всего того, чему въ силу изложеннаго принято въ наукѣ придавать общее названіе величины.

Какъ ни велико значеніе опредѣленій въ математикѣ съ методологической и научной точки зрѣнія, значеніе опредѣленія величины, какъ мы это легко можемъ провѣрить и съ исторической, и съ методологической точки зрѣнія, ничтожно. Исторически легко доказать, что отсутствіе точнаго опредѣленія значенія этого термина нимало не подѣйствовало на успѣхи развитія математическихъ наукъ. Методологически же это легко доказать, занявшись пересмотромъ тѣхъ ученій, которыя зависятъ отъ этого опредѣленія: въ результатѣ окажется, что, строго говоря, въ математикѣ нѣтъ ни одного ученія, которое сколько нибудь зависѣло бы отъ опредѣленія величины *).

Ниже мы увидимъ, что не все то, что въ наукѣ съ методологической точки зрѣнія крайне важно, въ такой же степени пригодно при обученіи данному предмету, точно также мы убѣдимся и въ томъ, что не все то, что въ наукѣ неважно, неважно также и при обученіи. Здѣсь было бы неумѣстно доказывать сказанное и вдаваться въ разсужденія по методикѣ обученія; но мы сочли всетаки умѣстнымъ предостереженіе въ указанномъ направленіи. Цѣль этой главы была преимущественно методологическая; въ связи съ методологическими разсужденіями мы позволили себѣ разъясненіе нѣкоторыхъ понятій и съ иныхъ точекъ зрѣнія, рѣдко принимаемыхъ во вниманіе. Къ ариѳметикѣ, какъ предмету обученія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, мы перейдемъ въ слѣдующихъ главахъ.

---

*) Къ сожалѣнію, пишущій эти строки не всегда такъ смотрѣлъ на методологическіе вопросы, на вопросъ объ опредѣленіяхъ вообще и на вопросъ объ опредѣленіи величины въ частности. Въ №№ 3 и 4 отд. II „Семьи и Школы" за 1875 годъ помѣщена имъ обширная статья съ совершенно иною тенденціей, о чемъ онъ считаетъ долгомъ своимъ заявить.—Въ настоящее время мы поэтому не можемъ раздѣлять взглядовъ автора книги, въ основѣ которой лежатъ подобныя высказаннымъ нами въ упомянутой статьѣ мысли. Мы говоримъ объ „Ариѳметикѣ" г. Канаева (Спб. 1881), столь доброжелательно отнесшагося къ качествамъ помянутой статьи (за каковую доброжелательность выражаемъ автору свою благодарность). Во избѣжаніе недоразумѣній мы должны замѣтить, что не пишущій эти строки, а совсѣмъ другое лицо—авторъ болѣе или менѣе сочувственной рецензіи на эту книгу, помѣщенной въ свое время въ „Пед. Хроникѣ Семьи и Школы".

Глава III.

Основные методическіе принципы обученія ариѳметикѣ.

§ 1. Цѣль обученія ариѳметикѣ.—§ 2. Объ обученіи въ раннемъ дѣтскомъ возрастѣ.—§ 3. О задаваніи дѣтскому уму только одной работы за-разъ и о принципѣ труда.—§ 4. Взгляды на обученіе ариѳметикѣ въ разныя эпохи.—§ 5. Песталоцци и его значеніе для обученія вообще и ариѳметикѣ въ частности.—§ 6. Метода изученія чиселъ вообще и метода Грубе въ частности.—§ 7. Истинная цѣнность методы изученія чиселъ.—§ 8. Роль задачъ и примѣровъ при обученіи ариѳметикѣ.—§ 9. Способы рѣшенія задачъ.—§ 10. Наглядность обученія и наглядныя пособія.—§ 11. О катехитической формѣ обученія.—§ 12. Объ учебникѣ и роли его при обученіи.

§ 1. Методика всякаго учебнаго предмета, излагая способы практическаго примѣненія общихъ дидактическихъ положеній къ частнымъ вопросамъ обученія этому предмету, неизбѣжно должна имѣть въ виду не только содержаніе даннаго предмета обученія, какъ это содержаніе выработалось въ теченіе вѣковъ въ силу практическихъ требованій и благодаря совокупнымъ усиліямъ людей науки и педагоговъ, но также и основные законы разумнаго, отвѣчающаго требованіямъ дѣтской природы, обученія этому предмету. Эти законы находятся въ тѣснѣйшей связи съ тѣми условіями, которыя необходимы и достаточны для возможности усвоенія предмета умомъ ребенка и для надлежащаго умственнаго, подъ руководствомъ учителя, развитія учащагося въ данномъ направленіи.

Всякое обученіе можетъ имѣть въ виду либо практическую, либо развивательную, образовательную (формальную, какъ говаривали встарину) цѣль обученія, либо же какъ ту, такъ и другую цѣль его. Общія дидактическія положенія, смотря по тому, какая изъ цѣлей имѣется главнымъ образомъ въ виду, различны: когда мы имѣемъ при обученіи въ виду только практическую цѣль, то обученіе должно стремиться къ наискорѣйшему пріобрѣтенію дѣтьми наибольшей сноровки въ примѣненіи данныхъ знаній и умѣній; когда же мы имѣемъ въ виду образовательную цѣль обученія, то главнѣйшее наше вниманіе должно быть обращаемо на ту спеціальную школу мышленія, которая можетъ явиться результатомъ обученія данному предмету.

Мы имѣемъ въ виду среднее учебное заведеніе: цѣль обученія въ немъ ариѳметикѣ не исключительно практическая, но и не исключительно образовательная; ее можно охарактеризовать именно какъ двоякую: среднее учебное заведеніе должно и снабдить учащагося по занимающему насъ предмету обученія возможно твердымъ и быстрымъ умѣніемъ прилагать свои познанія по ариѳметикѣ къ частнымъ случаямъ, и открыть ему съ помощью ариѳметики нѣкоторые математическіе горизонты, прививъ, если можно такъ выразиться, его уму съ помощью обученія этому предмету возможно больше полезныхъ умственныхъ навыковъ въ направленіи точнаго мышленія вообще и математическаго мышленія въ частности.

§ 2. Среднее учебное заведеніе имѣетъ дѣло съ дѣтьми не моложе 10-ти лѣтъ; только въ приготовительныхъ классахъ, гдѣ таковые имѣются, учащему приходится имѣть дѣло съ дѣтьми, почти совсѣмъ еще не привыкшими къ класснымъ порядкамъ и къ какому бы то ни было систематическому обученію. Но даже ученики приготовительныхъ классовъ на столько обладаютъ нѣкоторыми умственными навыками, что бо̀льшая часть той черной психологической работы по образованію въ дѣтскомъ умѣ понятій и усвоенію дѣтьми условнаго литературнаго языка,—той работы, которая выпадаетъ на долю учителя народной школы,—сдѣлана до поступленія дѣтей въ учебное заведеніе. Такъ, дѣти, поступающія даже въ приготовительный классъ, выработали себѣ понятіе о счетѣ, о числахъ до нѣкотораго (довольно высокаго) предѣла и т. п. Нынѣ уже почти прошло то время, когда крестьянскихъ ребятишекъ считали необходимымъ учить—гдѣ верхъ, гдѣ низъ, и такъ называемому всестороннему „изученію“ чиселъ, начинавшемуся съ единицы и двухъ; но не должно забывать, что если у крестьянскихъ дѣтей есть предъ городскими, можетъ быть, какія либо преимущества въ отношеніи, такъ сказать, нѣкоторой непосредственности ума, то у городскихъ, поступающихъ въ среднее учебное заведеніе, за-то болѣе развиты чисто-діалектическая сторона мышленія и умѣніе считать до довольно высокихъ предѣловъ. Эти преимущества поступающихъ въ среднее заведеніе дѣтей зависитъ не только отъ мѣста жительства и окружающей ихъ среды, предъявляющей къ нимъ довольно высокія требованія, но также отъ возраста и условій ихъ домашняго воспитанія. Въ школьномъ возрастѣ не только годъ, но часто даже мѣсяцъ много значитъ: то, что̀ достигается въ извѣстномъ возрастѣ иногда въ мѣсяцъ почти безъ активнаго вліянія учащаго, въ болѣе раннемъ возрастѣ недостижимо при всѣхъ его усиліяхъ и въ гораздо бо̀льшій промежутокъ времени.

Къ счастію для среднихъ учебныхъ заведеній, имъ не приходится особенно много заботиться объ особенностяхъ ранняго дѣтскаго возраста (до 8-ми лѣтъ): дѣти, поступающія въ приготовительные классы, не бываютъ моложе восьми лѣтъ. Такимъ образомъ основное положеніе дидактики, которое не должно быть забываемо по отношенію къ дѣтямъ моложе 8-ми лѣтъ и по которому отъ дѣтей этого возраста можно требовать только постепенной выработки понятій и представленій, а не логической ихъ обработки,—*это положеніе только отчасти важно для среднихъ* учебныхъ заведеній. Это положеніе не должно быть забываемо учащимъ постольку, поскольку оно его можетъ избавить отъ грубыхъ ошибокъ въ случаѣ преувеличенія имъ способности дѣтей къ отвлеченному мышленію. Но все-таки самая черная психологическая работа дѣтей поступающихъ въ ср. уч. зав., уже сдѣлана ими внѣ этого заведенія. Если данное логическое ученіе того или другого учебнаго предмета вообще, а ариѳметики въ частности, учащемуся приготовительнаго класса по существу своему недоступно, то учащему легко изслѣдовать — доступны ли учащемуся съ психологической точки зрѣнія понятія, входящія въ это ученіе, и онъ очень скоро убѣдится, что главнѣйшія психологическія трудности этихъ понятій ребенкомъ преодолѣваются довольно скоро.

Для *выработки* понятій и представленій въ дѣтскомъ умѣ, сколько бы лѣтъ ребенку ни было, важна наглядность, но, конечно, лишь постольку, поскольку она вообще дозволительна въ данномъ случаѣ. Въ этомъ состоитъ второе основное дидактическое *положеніе первой важности*. Пока ребенокъ не умѣетъ считать—его нельзя учить ариѳметикѣ; покуда онъ не понимаетъ самаго смысла и самой цѣли сложенія, его нельзя учить производству этого дѣйствія; пока онъ не имѣетъ яснаго представленія о дроби, его нельзя учить нахожденію частей цѣлаго, и т. д.. При этомъ научныя опредѣленія данныхъ понятій не ведутъ ни къ чему, если понятіе не выработано путемъ психологической работы, вовсе не утомительной, но требующей нѣкоторой затраты времени. Для выработки подобныхъ понятій могутъ служить очень простые наглядные пріемы (но при этомъ нагляднымъ должно быть дѣлаемо только то, что можетъ быть сдѣлано нагляднымъ); не маловажны—въ качествѣ подготовки психологической почвы для воспріятія ученій логическаго характера—практическія, по возможности простыя задачи и рядъ вопросовъ, ставящихъ ребенка въ необходимыя и полезныя для выработки даннаго понятія условія. Какія наглядныя пособія умѣстны на какихъ ступеняхъ обученія, мы увидимъ ниже; но мы должны еще разъ повторить, что не всѣ понятія подлежатъ подобной выработкѣ, и что, напротивъ, въ ариѳметикѣ есть такія понятія, выработка которыхъ можетъ быть поведена только путемъ логическимъ, только путемъ болѣе или менѣе отвлеченныхъ пріемовъ и разсужденій, а не путемъ чисто-психологическимъ, грубо-нагляднымъ.

§ 3. Третье положеніе общей педагогической важности заключается въ томъ, что дѣтямъ надо задавать только одну работу для каждаго даннаго момента. Это положеніе, конечно, не нуждается въ разъясненіи. Наконецъ, четвертое положеніе заключается въ необходимости требованія со стороны дѣтей умственнаго труда хотя и посильнаго, но все-таки труда; что пріобрѣтено безъ труда, то можетъ имѣть только практическое (и то незначительное), но отнюдь не образовательное значеніе. Это, конечно, не значитъ, чтобы надо было непремѣнно по возможности затруднять ребенка, запутывая вопросъ, который самъ по себѣ ясенъ; изъ этого слѣдуетъ, что пріобрѣтеніе знанія не должно быть, въ ущербъ основательности, облегчаемо до послѣдней степени. Добытое ребенкомъ безъ его труда знаніе не имѣетъ почти никакой образовательной цѣнности, если онъ только не принадлежитъ къ числу особенно щедро одаренныхъ способностями. Но, къ сожалѣнію, этотъ принципъ признается не во всѣхъ педагогическихъ системахъ: есть даже системы, требующія, чтобы ребенокъ былъ обучаемъ играя. Если бы подъ этимъ разумѣлось необходимость избѣгать физическаго принужденія, наказанія и прочихъ аттрибутовъ стариннаго обученія, то эта система была бы вполнѣ раціональна; но, къ сожалѣнію, эту систему многіе понимаютъ въ слишкомъ буквальномъ смыслѣ, и въ этомъ-то именно смыслѣ она и не заслуживаетъ ни малѣйшаго сочувствія: ученіе—трудъ, который можно и должно сдѣлать болѣе или менѣе пріятнымъ для учащагося, но съ игрою, какъ таковою, этотъ трудъ не имѣетъ и не долженъ имѣть ничего общаго.

§ 4. Въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ изучается не наука ариѳметики: мы видѣли выше, что она и недоступна учащимся этихъ заведеній, и не цѣлесообразна въ роли учебнаго предмета. Кромѣ того, должно помнить, что очень велика разница между обученіемъ этому предмету, если обучаемый есть лицо взрослое, и обученіемъ ему дѣтей: у взрослаго, какъ бы мало онъ ни учился, всегда выработаны путемъ практическимъ тѣ понятія, которыя должны быть выработаны въ умѣ ребенка путемъ обученія. Понятно поэтому, что при обученіи дѣтей ариѳметикѣ приходится прибѣгать къ цѣлой совокупности особенныхъ пріемовъ, которые обыкновенно и излагаются въ сочиненіяхъ по методикѣ интересующаго насъ предмета обученія.

Но было бы ошибочно думать, что только въ новѣйшее время возникла потребность въ особенныхъ, наиболѣе соотвѣтствующихъ дѣтскому пониманію, пріемахъ обученія ариѳметикѣ. Въ одномъ изъ сочиненій Платона есть даже прямыя указанія на необходимость сдѣлать первоначальное обученіе счету пріятнымъ для дѣтей. Далѣе Платонъ придаетъ обученію ариѳметикѣ громадное воспитательное значеніе и указываетъ на пользу такого обученія дѣтей, которое основано на конкретномъ счетѣ плодовъ, вѣнковъ и т. п. предметовъ. Важность нѣкоторой наглядности въ обученіи ариѳметикѣ такимъ образомъ установлена еще въ древности; но въ средніе вѣка этотъ взглядъ былъ преданъ незаслуженному имъ забвенію, такъ что Песталоцци имѣетъ все-таки полное право считаться отцомъ новѣйшей педагогики, если не считать Руссо его предшественникомъ и даже учителемъ на этомъ поприщѣ.—У римлянъ, несмотря на весьма незначительное творчество этого народа на поприщѣ математики вообще и ариѳметики въ частности, обученіе ариѳметикѣ несомнѣнно занимало довольно важное мѣсто въ системѣ образованія; они, по свидѣтельству Квинтиліана, Горація и Сенеки, придавали этому обученію большое развивательное значеніе. Особенно сильно развито было у нихъ вычисленіе на пальцахъ и вообще инструментальное вычисленіе. Хотя въ литературѣ и нѣтъ подробныхъ историческихъ свѣдѣній объ обученіи ариѳметикѣ у грековъ и римлянъ, однако несомнѣнно то, что обученіе ариѳметикѣ у этихъ народовъ преслѣдовало не только практическія, но и развивательныя (формальныя) цѣли, что и древнихъ педагоговъ интересовали пріемы обученія и что только по винѣ неудобныхъ системъ письменнаго обозначенія чиселъ, ариѳметика у этихъ народовъ не знала тѣхъ ученій, которыя составляютъ сущность и особенность современной ариѳметики. Особенно много трудностей представляло для древнихъ дѣйствіе дѣленія, а частью и умноженія. Но во всякомъ случаѣ обученіе ариѳметикѣ у грековъ и римлянъ, какъ это замѣтно выше, отличалось стремленіемъ къ наглядности и къ развитію въ дѣтяхъ не только практически полезныхъ навыковъ, но и полезныхъ навыковъ сужденія.

Своимъ современнымъ развитіемъ ариѳметика обязана идеѣ обозначенія чиселъ помощью десяти цифръ по десятичной системѣ,—идеѣ, которою человѣчество обязано индусамъ. Одинъ изъ величайшихъ геометровъ начала нынѣшняго столѣтія, Лапласъ (род. въ 1749, ум. въ 1827 г.) говоритъ о значеніи этого изобрѣтенія въ слѣдующихъ восторженныхъ выраженіяхъ: „Мысль обозначенія чиселъ помощью десяти знаковъ, основаннаго на абсолютномъ и мѣстномъ значеніи цифръ, такъ проста, что только по этой причинѣ мы забываемъ какого она достойна удивленія. Но именно эта простота и та легкость, которою ей обязано ариѳметическое вычисленіе, дѣлаютъ ариѳметическую систему индусовъ однимъ изъ полезнѣйшихъ изобрѣтеній. На сколько трудно было изобрѣтеніе этой системы, можно судить по тому, что ее не могли изобрѣсти ни Архимедъ, ни Аполлоній Пергейскій, принадлежащіе къ числу величайшихъ и геніальнѣйшихъ людей древности.“—Не имѣя въ виду вдаваться въ особенности индійской ариѳметики, мы должны замѣтить, что и у индусовъ обученію ариѳметикѣ тоже придавалось громадное развивательное значеніе.—Впослѣдствіи у арабовъ получила развитіе ариѳметика, уже ближе стоящая къ ариѳметикѣ современной, а обученіе носило характеръ тоже несомнѣнно развивательный. Но въ западной Европѣ, по ознакомленіи ея съ ученіями арабской ариѳметики, обученіе начало придавать искусственнымъ пріемамъ вычисленія и практической неизбѣжности ариѳметическихъ умѣній гораздо болѣе значенія, чѣмъ теоріи ариѳметики и образовательной роли обученія этому предмету. Несмотря на массу похвалъ, въ особенности въ то время расточаемыхъ ариѳметикѣ составителями учебниковъ по этому предмету въ предисловіяхъ къ нимъ, *обученіе* отличалось все-таки обычною въ западно-европейской школѣ того времени сухостью и почти полнымъ игнорированіемъ потребностей дѣтской природы. Вплоть до XVIII вѣка въ Европѣ учебники ариѳметики преслѣдовали главнымъ образомъ практическія цѣли и разсматривались преимущественно съ точки зрѣнія пользы, краткости, удобства; тѣмъ же характеромъ отличалось и обученіе этому предмету, тѣснѣйше связанное съ выучиваніемъ наизусть текста того или другого учебника. Съ XVIII вѣка начинается стремленіе составителей учебниковъ къ основательности, ясности, доказательности, удобопонятности и легкости изложенія. Но все-таки обученіе этому предмету отличалось повсюду прежнею догматичностью до тѣхъ поръ, пока Песталоцци не вдохнулъ жизнь въ мертвое обученіе, унаслѣдованное школою отъ среднихъ вѣковъ.

§ 5. Гейнрихъ Песталоцци родился въ Цюрихѣ въ 1746 г.; двадцати восьми лѣтъ отъ роду онъ понялъ свое истинное призваніе, т. е. призваніе учителя; на этомъ поприщѣ Песталоцци оказалъ человѣчеству столько несомнѣнныхъ услугъ, что онъ не безъ основанія занимаетъ одно изъ почетнѣйшихъ, если не самое почетное мѣсто въ исторіи просвѣщенія народныхъ массъ при помощи народныхъ школъ. Замѣчательна любовь его къ простому темному люду, котораго потребность въ просвѣщеніи онъ едва ли не первый понялъ и оцѣнилъ своимъ безконечно добрымъ, всегда одушевляемымъ благороднѣйшими желаніями, сердцемъ. Онъ первый понялъ необходимость учрежденія начальныхъ народныхъ школъ; онъ едва ли не первый понялъ также и громадную воспитательную роль школы; онъ первый понялъ и непригодность до него практиковавшагося мертвящаго догматическаго обученія.—Къ сожалѣнію, методикѣ обученія интересующему насъ предмету онъ далъ не то направленіе, которое обусловливается самымъ характеромъ этого предмета, а направленіе, сильно уклоняющееся отъ требованій самаго предмета. Онъ, къ сожалѣнію, дошелъ до мысли о томъ, что для достиженія педагогическихъ цѣлей должно измѣнить не только пріемы обученія, но и самое содержаніе этого предмета. Песталоцци не былъ спеціалистомъ-математикомъ, и хотя это одно и не могло помѣшать ему создать надлежащую методу обученія ариѳметикѣ, но онъ не вполнѣ ясно понималъ, какъ это доказано Рудольфомъ

Кииллингомъ *), сущность, специальную природу ариѳметики науки и ариѳметики-искусства, что и оказало на *послѣдующее* развитіе методико-ариѳметическихъ системъ прямо вредное вліяніе.

„Нѣтъ предмета, говоритъ Книллингъ,—болѣе сухого и трезваго, чѣмъ ариѳметика, и именно въ этомъ предметѣ, какъ это ни странно, педагоги предавались мечтаніямъ и оргіямъ, самымъ безумнымъ, самымъ головокружительнымъ (sinnverwirrendste)“. Причиною этого страннаго явленія Книллингъ считаетъ мечтательный складъ Песталоцціевой натуры, а также отсутствіе у позднѣйшихъ составителей методико-ариѳметическихъ системъ критическаго *взгляда на заслуги Песталоцци*. По его мнѣнію, именно то, что великаго мечтателя сдѣлало великимъ реформаторомъ педагогики вообще, сдѣлало его также и очень плохимъ «методикомъ» ариѳметики. „Педагогическій реформаторъ высшаго порядка непремѣнно долженъ быть немножко мечтателемъ: его сердце должно быть преисполнено любовью къ дѣтямъ, къ народу, къ человѣчеству; его мысли и стремленія, чувства и желанія должны всецѣло поглощаться великою идеею воспитанія; только въ такомъ случаѣ онъ можетъ оставить людямъ въ наслѣдіе что-либо вѣчное, только въ такомъ случаѣ онъ можетъ своихъ современниковъ сдѣлать сколько нибудь причастными своимъ, возвышающимъ душу, благороднымъ и прекраснымъ мечтаніямъ. Творецъ же той или иной методико-ариѳметической системы долженъ прежде всего трезво и ясно смотрѣть на свое дѣло. Энтузіастъ можетъ быть выдающимся педагогомъ вообще, но отнюдь не хорошимъ спеціалистомъ по части ариѳметики“. Песталоцци, по мнѣнію Книллинга, нисколько не можетъ, поэтому, претендовать на непогрѣшимость въ вопросахъ обученія ариѳметикѣ, и его „наглядное изученіе числовыхъ соотношеній“ должно быть непремѣнно подвергнуто самой строгой критикѣ; всякаго рода мечтанія могутъ быть только переходною стадіей развитія, которая должна быть неизбѣжно смѣнена болѣе трезвымъ уясненіемъ себѣ цѣлей этихъ мечтаній и средствъ къ ихъ достиженію, если мечтанія того достойны, или же средствъ къ замѣнѣ ихъ чѣмъ нибудь болѣе реальнымъ.

Одного мы однако не должны забывать, что заслуга Песталоцци предъ обученіемъ ариѳметикѣ заключается не въ разнаго рода изобрѣтенныхъ имъ пріемахъ, а въ сознаніи, что догматическое по учебникамъ обученіе не отвѣчаетъ потребностямъ дѣтской природы. Что онъ достигалъ при своемъ обученіи блестя-

---

*) Rud. Knilling, Zur Reform des Rechenunterrichts, München. 1884. Ср. статью пишущаго эти строки, подъ заглавіемъ „На антигрубенистическомъ пути“ въ № 10 педагогическаго отдѣла „Семьи и Школы“ за 1885 годъ.

щихъ результатовъ, объясняется исключительно его высокими личными педагогическими качествами. Но что онъ принесъ дальнѣйшему развитію обученія ариѳметикѣ несомнѣнный вредъ, пріучивъ педагоговъ игнорировать требованія ариѳметики какъ таковой, и введя въ обиходъ педагогической мысли презрѣніе къ этимъ требованіямъ—тоже не подлежитъ сомнѣнію. Неудивительно поэтому, что не разъ цитованный нами Книллингъ говоритъ: „Грядущія поколѣнія, можетъ быть, даже въ ближайшемъ будущемъ, откажутся постигнуть—какъ это можно было въ теченіе цѣлаго столѣтія преклоняться предъ Песталоцци, какъ предъ замѣчательнѣйшимъ авторомъ по предмету методики ариѳметики. Только благодаря тому, что собственная метода нашего учителя давнымъ-давно забыта, такъ что на нѣсколько тысячъ человѣкъ, интересующихся этимъ предметомъ, лишь одинъ, можетъ быть, обладаетъ точнымъ знаніемъ ея, Песталоцци, какъ творецъ методы для обученія ариѳметикѣ, доселѣ не лишенъ еще своего почетнаго положенія (Ansehen) и доселѣ еще не оцѣненъ въ этомъ отношеніи сообразно своимъ дѣйствительнымъ заслугамъ, т. е. *болѣе правильно, но и менѣе восторженно*“ (стр. 64). Еще рѣзче Книллингъ формулируетъ свои мысли на 103-й стр.: „Песталоцци принесъ развитію обученія ариѳметикѣ болѣе вреда, чѣмъ пользы. Его принципы, въ томъ числѣ главнымъ образомъ принципъ наглядности, оказались колодками (Hemmschuhe), которыя могли только отсрочить *болѣе практичную форму обученія на многія десятилѣтія*“.

Главнѣйшія заслуги Песталоцци предъ обученіемъ интересующему насъ предмету состоятъ въ установленіи имъ принципа, по которому все изучаемое ребенкомъ должно быть имъ понимаемо, и въ формулировкѣ требованія, чтобы плоды обученія ариѳметикѣ были доступны *простому народу*, въ своей ежедневной жизни нуждающемуся въ ариѳметическихъ умѣніяхъ. Кромѣ того достойно упоминанія также и то, что Песталоцци едва ли не первый понялъ несомнѣнное значеніе умственныхъ вычисленій.

§ 6. Главнѣйшее заблужденіе Песталоцци, оказавшее на все послѣдующее развитіе методики ариѳметики далеко неблагопріятное вліяніе, заключалось въ ошибочномъ взглядѣ его на число и природу этого послѣдняго, съ одной стороны, и на цѣли обученія ариѳметикѣ, съ другой. Не разъ цитированный выше Книллингъ сопоставилъ всѣ относящіяся къ занимающему насъ вопросу убѣжденія Песталоцци: изъ обзора этихъ убѣжденій какъ нельзя болѣе явствуетъ, что Песталоцци далеко не вѣрно представлялъ себѣ психологическую природу и числа основы ариѳметики, какъ науки и предмета обученія. Наиболѣе печальныя послѣдствія повлекли за собою разсужденія Песталоцци о необходимости ясныхъ представленій о каждомъ числѣ въ отдѣльности и обо всѣхъ его числавыхъ отношеніяхъ къ другимъ числамъ. Эта идея, въ дальнѣйшемъ и весьма послѣдовательномъ своемъ развитіи, получила наиболѣе полное выраженіе въ методѣ такъ называемаго „всестороннаго" изученія чиселъ, придуманной нѣмецкимъ педагогомъ, А. В. Грубе. Большинство методъ начальнаго обученія, извѣстныхъ въ Россіи, болѣе или менѣе тѣсно соприкасаются съ методою Грубе. Мы не станемъ разсматривать каждую изъ наиболѣе распространенныхъ методъ въ отдѣльности, а позволимъ себѣ отослать читателя интересующагося литературою этого предмета къ сочиненію пишущаго эти строки, составленному преимущественно для народныхъ учителей и учительницъ, подъ заглавіемъ „Методика ариѳметики съ приложеніемъ Сборника упражненій по ариѳметикѣ для учащихъ" (М. 1886).

Здѣсь считаемъ нужнымъ только охарактеризировать методу Грубе безъ всякаго отношенія къ ея примѣнимости или непримѣнимости къ потребностямъ русской начальной школы, но не упуская изъ виду непригодность ея для приготовительныхъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній *).

Весь первый курсъ (весь курсъ ариѳметики распадается у Грубе на три отдѣла) состоитъ изъ цѣлыхъ ста ступеней (Stufen) по количеству тѣхъ чиселъ, надъ которыми производятся вычисленія: на первой ступени проходится число „одинъ", на второй число „два", на третьей—число „три", и т. д. до сотой ступени включительно. Методическія указанія Грубе относительно перваго курса заключаются, вкратцѣ, въ слѣдующемъ: 1) урокъ счета долженъ быть непремѣнно также и урокомъ родного языка; 2) учитель, отказываясь, воздерживаясь отъ многочисленныхъ вопросовъ, долженъ, по возможности, заставлять самихъ учащихся говорить и высказываться; 3) хоровые и отдѣльные отвѣты должны чередоваться между собою; 4) пособіями должны служить преимущественно пальцы и черточки; 5) *дѣйствія надъ числами состоятъ просто въ томъ, что каждое новое число сравнивается съ предыдущими*, при чемъ будто бы укрѣпляется (befestigt) представленіе каждаго числа; и 6) на красивое изображеніе цифръ и черточекъ должно быть употреблено достаточное количество времени. — Большинство этихъ указаній, благодаря своей общности и неопредѣленности, вообще справедливы, а нѣкоторыя даже заслуживаютъ полнаго одобренія, наприм., совѣтъ относительно воздержанія отъ многочисленныхъ вопросовъ; *серьезныя* же возраженія вызываются только 5-ымъ положеніемъ: центръ тяжести

---

*) Полное заглавіе послѣдняго изданія сочиненія Грубе гласитъ: Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht. von A. W. Grube. Berlin. 1881. Enslin.

обученія счету заключается въ подробномъ, „монографическомъ“, какъ этотъ способъ названъ, кажется, А. И. Гольденбергомъ, изученіи каждаго изъ чиселъ. Чтобы уяснить себѣ ходъ уроковъ какой либо ступени, какъ они понимаются самимъ изобрѣтателемъ методы, возьмемъ на удачу седьмую ступень и прослѣдимъ ту идею, которая лежитъ въ основѣ этой методы. Обратимся къ стр. 37-ой сочиненія Грубе; тамъ изображено (всѣ подстрочныя примѣчанія принадлежатъ пишущему эти строки):

СЕДЬМАЯ СТУПЕНЬ.

Семь.

1. a. | | | | | | | 7.

| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1	$1+1+1+1+1+1+1=7.$ $7\times1=7.$ $7-1-1-1-1-1-1=1.$ $1:7=7.$ *)
| | 2 | | 2 | | 2 | 1	$2+2+2+1=7.$ $3\times2+1=7.$ $7-2-2-2=1.$ $2:7=3\ (1).$ **)
| | | 3 | | | 3 | 1	$3+3+1=7.$ $2\times3+1=7.$ $7-3-3=1.$ $3:7=2\ (1).$ ***)
| | | | 4 | | | 3	$4+3=7,\ 3+4=7.$ $1\times4+3=7.$ $7-4=3,\ 7-3=4.$ $4:7=1\ (3).$
| | | | | 5 | | 2	$5+2=7,\ 2+5=7.$ $1\times5+2=7.$ $7-5=2.$ $5:7=1\ (2).$
| | | | | | 6 | 1	$6+1=7,\ 1+6=7.$ $1\times6+1=7.$ $7-6=1.$ $6:6=1\ (1).$

---

*) Эта часть таблицы изображаетъ изученіе числа семь въ связи съ единицею, при чемъ 1 : 7 изображаетъ то же, что въ болѣе или менѣе научныхъ курсахъ принято изображать знакоположеніемъ 7 : 1.

**) Здѣсь дана схема изученія семи по отношенію къ двумъ.

***) Это—схема изученія семи въ связи съ тремя, и т. д.

„Изобразите семь точекъ и считайте! Одна!—сколько еще не хватаетъ двоекъ? Двѣ!—сколько не хватаетъ единицъ? и т. д.

„Какъ отецъ роздалъ семь яблокъ двумъ, тремъ, четыремъ дѣтямъ?

$7=6+1$, $5+2$, $4+3$ и т. д.

$6=7-1$, $5+1$ и т. д.

$5=7-2$ и т. д. *)

„Изъ какихъ равныхъ чиселъ образовалось 7?

„b. Карлъ получилъ одинъ пятакъ (пять пфенниговъ) и одинъ пфеннигъ, и еще одинъ пфеннигъ, и отдалъ изъ своихъ денегъ 2 пф. и еще 1 пф. и еще одинъ пф. Сколько у него останется?

„c. Отъ какого числа ты можешь семь разъ отнять единицу **)?

„На слѣдующіе примѣры должны быть даваемы скорые отвѣты, если ихъ задавать не слишкомъ быстро, но и не прерывая рѣчи:

$3\times2+1-2\times3+4-3\times3+1$?

$2+1+2+1+1$? $1+2+1+2+1$?

$1+1+1+1+1+1+1$?

„Какое число заключается 7 разъ въ 7-ми?

„Къ какому числу я долженъ прибавить утроенную двойку, чтобы получить 7?

„Я беру нѣкоторое число 2 раза и получаю единицею меньше 7-и? Какое число я удвоилъ?

„Когда я беру число два раза и получаю единицею меньше 7-и, то я получаю 6. Но число, которое я взялъ два раза, есть 3, потому что $6=2\times3$, слѣдовательно, я долженъ 3 удвоить, чтобы получить единицею меньше семи ***).

---

*) Т. е. $4=7-3$, $3=7-4$, $2=7-5$ и т. д. Все намѣченное должно быть „изучено".

**) Вопросъ, могущій сбить съ толку учащагося; онъ неопредѣленъ и почти не допускаетъ того отвѣта, котораго Грубе добивается.

***) Совершенно невѣрное разсужденіе. Когда я беру число два раза и получаю единицею меньше семи, то я получаю 6 не потому, что я взялъ нѣкоторое число два раза, а потому, что я получаю число, меньшее семи на одну единицу, а такое число есть шесть.—Вторая часть разсужденія тоже не логична: „но число, которое я взялъ два раза, есть три",—говоритъ Грубе. А откуда извѣстно, что оно есть три? Что $6=2\times3$, вѣрно; но изъ этой формулы, безъ допущенія дѣйствія дѣленія, слѣдуетъ только то, что 6 есть дважды 3, но еще не слѣдуетъ, что *только* три есть то число, которое мы должны удвоить, чтобы получить 6. Такое разсужденіе совершенно не точно, не гарантируя опредѣленнаго отвѣта. Подобныя разсужденія не только въ математикѣ вообще, но даже и въ низшей ея отрасли, въ ея, такъ сказать, преддверіи, въ ариѳметикѣ, допускаемы быть не могутъ.

„На сколько единицъ 7 больше числа, вдвое большаго 2-хъ?

„Число вдвое большее 2-хъ есть 4. 7 больше 4-хъ на 3, заключаетъ въ себѣ, стало быть, на 3 единицы больше 4-хъ. Итакъ, 7 больше удвоенныхъ 2 хъ на 3×1 *).

„II. Въ недѣлѣ 7 дней. Первый, второй,.... седьмой день называются? Между третьимъ и пятымъ днемъ сколько дней? и т. д. **). Я однажды совершилъ путешествіе, которое длилось недѣлю. Сколько дней я былъ въ дорогѣ? Сколько денегъ я израсходовалъ, если каждый день расходовалъ по талеру? Если ты ежедневно будешь класть въ копилку по одному пфеннигу, сколько получится денегъ за цѣлую недѣлю? Сколько такимъ образомъ собралось бы цвейеровъ ***) (монета въ два пф.)? Сколько литровъ въ семи шоппенахъ (полуштофахъ)?

$$\left\{\begin{matrix} 1 \text{ литръ} \\ |\;|\;|\;| \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} 3 \text{ шоппена} \\ |\;|\;| \end{matrix}\right\}$$

„Сколько шоппеновъ не хватаетъ для второго литра? Маленькій Георгъ долженъ былъ принести изъ булочной два хлѣбца, по 3 пф. каждый, денегъ же получилъ—одну монету въ 5 пф. и одну въ два. Достаточно ли было денегъ? Сколько онъ принесъ сдачи?—Въ другой разъ его послали за пивомъ и дали ему одну монету въ пять зильбергрошей, другую—въ два. Сколько шоппеновъ пива онъ долженъ былъ принести, если 1 шоп. стоитъ 1 зильбергрошъ?“

Дѣло, понятно, не въ мелкихъ недосмотрахъ и ошибкахъ, на которые обращено вниманіе въ примѣчаніяхъ, а въ крайнемъ однообразіи упражненій и однообразіи изученія числа. Столь же тяжело и однообразно идетъ изученіе другихъ чиселъ. До 36-ти включительно ведется это, но меньшей мѣрѣ безплодное, изученіе подробно для каждаго числа въ отдѣльности. На числахъ отъ 37 до 49 включительно Грубе уже не останавливается, переходя прямо къ 50-ти, каковому числу посвящается больше страницы. Потомъ идетъ число 60 и, наконецъ, число 100, которому посвящено больше трехъ страницъ схемъ, „задачъ“ и упражненій.

Съ нѣкоторыми методическими указаніями, даваемыми Грубе, мы ознакомились выше; чтобы уяснить себѣ вполнѣ методу Грубе, должно ознакомиться съ его методическими указаніями относительно обученія счету на тѣхъ ступеняхъ курса, которыя посвящаются числамъ отъ 10 до 100: 1) наглядными пособіями остаются

---

*) Это не ясно.

**) Въ „задачахъ“ такого рода, кажется, есть моменты, могущіе нѣсколько сбить съ толку учащагося. Задачи на время должны быть задаваемы съ должною осторожностью и притомъ не на первыхъ ступеняхъ обученія.

***) Ни одного, — отвѣтитъ неглупый и незабитый ученикъ, и его отвѣтъ будетъ вѣрнѣе того, котораго добивается Грубе.

и здѣсь пальцы и черточки; 2) изученіе различныхъ ступеней ведется *совершенно такъ же*, какъ и изученіе предыдущихъ ступеней; и 3) способы выраженія задачъ и упражненій должно разнообразить для того, чтобы учащіеся мало-по-малу освобождались отъ схемъ.—Не для чего говорить, что эти указанія не прибавляютъ ничего существеннаго къ тому, что мы знаемъ изъ предыдущаго о методѣ Грубе; но они все-таки интересны въ томъ отношеніи, что Грубе стоитъ за наглядныя пособія, но прибѣгаетъ къ нимъ не въ тѣхъ случаяхъ и пользуется ими не такимъ образомъ, какъ это дѣлаютъ нѣкоторые русскіе грубеисты. Наибольшую же для насъ важность имѣетъ указаніе (стр. 44), что *не должно переходить отъ одной ступени къ другой, не исчерпавъ вполнѣ предыдущей ступени*. Это указаніе сразу характеризуетъ всѣ послѣдствія пристрастія Грубе къ изученію чиселъ.—На пристрастіи къ черточкамъ и точкамъ не будемъ останавливаться; оно было бы только странно, если бы, къ сожалѣнію, не находило въ средѣ нашихъ педагоговъ иногда слишкомъ ревностныхъ подражателей.

Теперь спрашивается: что же, собственно, можетъ быть пріобрѣтено по предмету ариѳметики-искусства по усвоеніи дѣтьми перваго курса, если держаться методы Грубе? По предмету научной ариѳметики, смѣло можно сказать, такимъ путемъ ничего не можетъ быть пріобрѣтено: этого не возможно отрицать если онъ подъ таковою разумѣетъ курсъ хотя бы, напр., въ объемѣ курса Серре или Бертрана. Но не менѣе вѣрно и то, что и *по ариѳметикѣ начальной* съ помощью этой методы тоже ничего пріобрѣтено быть не можетъ, потому что ариѳметика, какъ искусство вычисленія, одной своей стороною, а именно со стороны логической, т. е. наиболѣе существенною стороною все-таки тѣсно примыкаетъ къ ариѳметикѣ-наукѣ, а между тѣмъ эта-то именно сторона совершенно игнорируется Грубе. Съ помощью методы Грубе достигается лишь то, чего человѣкъ съ мало-мальски нормальными способностями всегда можетъ достигнуть, почти безъ всякой помощи школы или учителя,—а именно: съ помощью этой методы можетъ быть (максимумъ) достигнуто умѣніе кое-какъ считать и вычислять въ предѣлахъ первой сотни. Это въ особенности справедливо относительно 1-го курса.

Не больше и результаты, достигаемые прохожденіемъ второго курса. Сначала проходятся вычисленія надъ числами *въ предѣлахъ до тысячи*. Эта часть курса у Грубе распадается на шесть ступеней: первая—„измѣреніе“ чиселъ единицами, десятками и сотнями, вторая—простыя сотни, „измѣряемыя“ сотнями, третья—„измѣреніе“ трехзначныхъ чиселъ трехзначными же, четвертая—„измѣреніе“ сотенъ десяткомъ, пятая—„всестороннее (!) измѣреніе“ чиселъ ихъ производителями и, наконецъ, шестая—разложенія чиселъ отъ 1 до 1000 на „элементы“ (въ томъ числѣ нѣкоторыхъ на множители). Останавливаться на каждой ступени второго курса было бы тратой времени; достаточно замѣтить, что только на пятой ступени становится возможнымъ разрѣшить задачу: какова разница между 20-ою и 30-ою долею 60-ти, или задачу: на сколько единицъ сумма 326 и 418 больше суммы половинъ этихъ чиселъ?

Вотъ методическія указанія относительно этой части 2-го курса: 1) цѣль обученія въ теченіе 1-го *полугодія* (3-го или 4 го года обученія)—умѣніе разлагать числа, не превышающія тысячи, на составные элементы; 2) учащійся долженъ при этомъ „открыть секретъ“ быстраго умственнаго вычисленія, состоящій въ оперированіи надъ возможно малыми числами; (понятно, что слишкомъ долго приходится ждать открытія этого секрета); 3) но при этомъ, „для того чтобы привести къ всестороннему (!) представленію чиселъ (!!), ***не можетъ быть и рѣчи о четырехъ дѣйствіяхъ***; эти послѣднія (вмѣстѣ съ упражненіями въ быстромъ вычисленіи) появляются только во второе полугодіе 3-го или 4-го года обученія“ *); 4) въ необходимости отдѣльнаго изученія каждаго числа уже нѣтъ болѣе надобности.—Всѣ эти указанія доказываютъ, до чего можетъ быть извращено содержаніе занимающаго насъ предмета обученія, если излагать его съ точки зрѣнія методы Грубе. Такъ называемое у Грубе „всестороннее представленіе“ числа, если бы оно даже и было достижимо, необходимо должно было бы основываться на *дѣйствіяхъ* надъ числомъ; Грубе же именно дѣйствія-то и отрицаетъ вплоть до наступленія второго полугодія 3-го или 4-го года обученія. Далѣе, если бы это „всестороннее представленіе“ числа хоть заслуживало того, чтобы къ нему стремились (вѣдь стремится же человѣкъ иногда и къ недостижимому!), а то и этого сказать нельзя, ибо самое стремленіе къ всестороннему представленію числа неразумно, вслѣдствіе ничтожности услугъ, сказываемыхъ имъ ариѳметикѣ. Развивательное значеніе изученія чиселъ, конечно, тоже ничтожно. Многіе ищутъ оправданія этой методы именно въ этомъ направленіи. Они думаютъ, что самые пріемы изученія пріучаютъ дѣтей къ толковому слѣдованію разъ-на-всегда опредѣленной системѣ, разъ-на-всегда установленному шаблону. Если бы это не выдавалось за обученіе ариѳметикѣ, противъ этого, можетъ быть, и не слѣдовало бы спорить; но, къ сожалѣнію, игрѣ въ числа придается значеніе *ариѳметическаго* упражненія, и съ этимъ согласиться нельзя, если только принять къ свѣдѣнію истинныя требованія ариѳметики. Смотрѣть на изученіе чиселъ какъ на упражненіе, могущее быть полезнымъ при обученіи ариѳметикѣ, столь же основательно (или вѣрнѣе сказать—столь же неосновательно), какъ смотрѣть на игру въ меледу или

---

*) Собственныя слова Грубе!

солитеръ, какъ на упражненіе полезное при изученіи геометріи и механики. Разница есть въ этихъ случаяхъ большая, но и та скорѣе въ пользу игры въ меледу и солитеръ: эти игры, по крайней мѣрѣ, интересны.—По методѣ Грубе, только въ курсѣ второго полугодія 3-го или 4-го года обученія *появляются уже* дѣйствія: А) вычисленія надъ отвлеченными и В) вычисленія надъ числами именованными. Отмѣчать здѣсь, собственно говоря, нечего. Совершенно обыденное, избитое, такъ сказать, казенное, бездушное изученіе дѣйствій разнообразится тамъ и сямъ мелкими логическими ошибками, которыя, впрочемъ нисколько не зависятъ отъ сущности методы Грубе; останавливаться на нихъ, поэтому, не для чего.

Третій курсъ разсчитанъ всего на одинъ годъ. Для перваго полугодія полагается опять-таки всестороннее разсмотрѣніе дроби (allseitige Anschauung des Bruches), а для второго—дѣйствія надъ дробями. Методическія указанія опускаемъ, въ виду совершенно мнимой, призрачной систематичности этого курса. Первая половина этого курса распадается на шесть ступеней, и это разложеніе на „ступени" сдѣлано на 17-ти страницахъ: здѣсь и линеечки, и скобочки, и кругъ, и квадратики, и проч., и проч. Эта часть курса очень слаба и по мысли, и по исполненію; но для насъ она не особенно интересна.

Заканчивается сочиненіе Грубе слѣдующими словами: „Разъ учитель до сихъ поръ добросовѣстно слѣдилъ за нашимъ изложеніемъ, онъ можетъ взять какой-либо задачникъ *), конечно, методически толковый задачникъ,—и его ученики быстро и толково разрѣшатъ всѣ задачи отъ начала до конца. Такъ какъ, по нашему мнѣнію, самъ учитель долженъ быть вполнѣ самостоятеленъ, то онъ и не нуждается ни въ какихъ длинныхъ и объемистыхъ теоретическихъ указаніяхъ и руководствахъ. Впрочемъ, учитель не долженъ думать, что слѣдуетъ продѣлать рѣшительно всѣ задачи. Въ тѣхъ случаяхъ, когда можно пользоваться наглядным наблюденіемъ, нѣтъ нужды, даже для пріобрѣтенія навыковъ, въ слишкомъ большомъ количествѣ примѣровъ. Не многое, но основательно (nicht vielerlei, sondern viel)".

Хотя иные, дѣйствительно почтенные люди, напр., Дистервегъ, и относятся съ нѣкоторымъ уваженіемъ къ методѣ Грубе, но никто изъ этихъ же педагоговъ не сталъ бы проповѣдывать неподвижность въ дѣлѣ обученія, такъ что въ указаніи недостатковъ этой методы, конечно, невозможно найти что-либо предосудительное. Не только пишущій эти строки, но и многіе другіе, при всемъ своемъ уваженіи къ Дистервегу, не могутъ согласиться съ тѣмъ, чтобы метода Грубе была въ состояніи выдержать хотя бы снисходительную критику, если смотрѣть на дѣло съ точки зрѣнія

*) Въ примѣчаніи похвалены задачники Генчеля, Беме, Адама и Менцеля.

здравыхъ педагогическихъ требованій. Прежде и первѣе всего эта метода,—ужъ не говоримъ о принципахъ ариѳметики-науки,—извращаетъ самыя простыя ученія ариѳметики, какъ искусства вычисленія, до неузнаваемости и вполнѣ противорѣчитъ основнымъ ученіямъ педагогической психологіи.

„Что такое метода Грубе? спрашиваетъ Книллингъ. Какую пользу она принесла?—Въ положительномъ смыслѣ никакой, а въ отрицательномъ она была полезна только тѣмъ, что довела песталоцціевскій принципъ наглядности до крайностей, вслѣдствіе чего яснѣе проявилась его нецѣлесообразность въ дѣлѣ обученія ариѳметикѣ. Я вовсе не намѣренъ отрицать въ современной методѣ какую бы то ни было цѣнность. Я даже признаю, что она была необходимою стадіею развитія обученія ариѳметикѣ и что если намъ удастся дойти до болѣе правильныхъ взглядовъ и болѣе практичныхъ принциповъ, то мы обязаны этимъ частью методѣ Грубе. Ибо заблужденіе должно пройти цѣлый рядъ фазисовъ, прежде чѣмъ оно будетъ признано таковымъ, и поэтому, кто выводитъ изъ даннаго невѣрнаго принципа его крайнія послѣдствія, тотъ невольно способствуетъ раскрытію истины: онъ такимъ образомъ открываетъ намъ глаза; онъ, самъ того не желая, раскрываетъ скрытые недостатки и одностороннія ошибки мнимой истины, которой онъ служитъ; онъ своимъ примѣромъ свидѣтельствуетъ—къ чему она въ состояніи привести, какія нелѣпости (Ungereimtheiten) и безобразія (Ungeheuerlichkeiten) кроются въ ея основаніи, и такимъ образомъ облегчаетъ намъ возможность узрѣть заблужденіе и отыскать все то, что дѣйствительно истинно, разумно, практично. Не что иное, какъ именно чудовищность (die Wunderlichkeit, die Bizarrerie) всесторонняго изученія чиселъ, продолжаетъ Книллингъ, было побужденіемъ къ предлежащимъ методико-ариѳметическимъ изслѣдованіямъ моимъ. Моя книга не была бы написана, если бы ей не предшествовало „Руководство“ Грубе. Оригинальный образъ мыслей этого глубокомысленнаго (sic) автора меня несравненно болѣе принуждалъ къ этимъ изслѣдованіямъ, чѣмъ менѣе ошибочныя (благодаря только нѣкоторой счастливой непослѣдовательности), но зато и болѣе практичныя сочиненія Дистервега, Гейзера, Генчеля и др.“ (стр. 146 и 147).

Изъ русскихъ составителей курсовъ по предмету методики ариѳметики и различнаго рода учебныхъ пособій по ариѳметикѣ за Грубе послѣдовали гг. Паульсонъ, Воленсъ, Евтушевскій, Ислентьевъ и нѣкоторые другіе.

§ 7. На такъ называемое изученіе чиселъ можно смотрѣть только съ трехъ точекъ зрѣнія: 1) либо какъ на цѣль всего курса ариѳметики, 2) либо какъ на средство сдѣлать содержаніе ариѳметики доступнымъ малолѣтнему учащемуся, и 3) либо какъ на побочное, неимѣющее ничего общаго съ ариѳметикою, но тѣмъ не менѣе нужное для умственнаго развитія упражненіе. Другія точки зрѣнія, кажется, немыслимы.

1) Первая точка зрѣнія неосновательна, ибо содержаніе ариѳметики составляютъ, какъ мы видѣли, *дѣйствія* надъ числами. Ариѳметика безъ дѣйствій,—безъ дѣйствій, какъ таковыхъ,—такъ же невозможна, какъ химія безъ явленіи химическаго *взаимодѣйствія* тѣлъ другъ на друга, какъ механика безъ *явленій* движенія, какъ грамматика безъ изученія *формъ* языка и ихъ *измѣненій*, какъ исторія безъ прагматическаго изложенія историческихъ *событій*, какъ наука о жизни (біологія), основанная только на изученіи труповъ. Ариѳметика, какъ наука, есть наука не о числахъ, а о *дѣйствіяхъ* надъ числами; ариѳметика, какъ искусство вычисленія, поэтому излагаетъ и должна излагать правила и способы производства *дѣйствій*. Число въ ариѳметикѣ, понимаемой какъ въ смыслѣ науки, такъ и въ смыслѣ искусства вычисленія, есть только объектъ, надъ которымъ совершается дѣйствіе, а потому ею изучается и должно изучаться не самое число, а только дѣйствіе надъ числомъ и способъ его производства. Всѣ свойства чиселъ какъ въ томъ смыслѣ, который придается имъ высшею математикою, такъ и въ томъ, который имъ придается грубенстами различнаго рода—всѣ свойства чиселъ, повторяемъ, постигаются только при помощи дѣйствій надъ ними. Цѣлью обученія ариѳметикѣ можетъ быть, такимъ образомъ, только изученіе ариѳметическихъ дѣйствій, если на время отвлечься отъ формальныхъ цѣлей, преслѣдуемыхъ всякимъ учебнымъ предметомъ общеобразовательной школы. Если бы изученіе чиселъ даже и не было забавою грубенстовъ и безполезнымъ мученіемъ дѣтей, если бы оно приносило пользу хотя бы въ одномъ какомъ-либо отношеніи, то и тогда нельзя было бы считать его *цѣлью* обученія ариѳметикѣ, которая при этомъ изученіи была бы не причемъ. Принимать изученіе чиселъ за цѣль обученія ариѳметикѣ въ этомъ случаѣ было бы такъ же странно, какъ странно было бы принимать изученіе различныхъ типографскихъ шрифтовъ и ихъ особенностей за цѣль обученія грамотѣ. Но считать изученіе чиселъ *цѣлью* преподаванія ариѳметики невозможно еще и потому, что самое-то изученіе, безъ всякаго отношенія къ учебному и воспитательному значенію *ариѳметики*, не цѣлесообразно въ случаѣ, если оно *слѣдуетъ* за изученіемъ дѣйствій, и въ еще большей степени—въ томъ случаѣ, если оно *предшествуетъ* дѣйствіямъ; ибо въ первомъ случаѣ оно неразумно по своей безцѣльности (такъ какъ ничего не даетъ такого, чего нельзя было бы достигнуть съ помощью дѣйствій), а во второмъ—по своей неосновательности (такъ какъ оно не можетъ быть, какъ слѣдуетъ, проработано безъ помощи понятій о дѣйствіяхъ и безъ помощи самихъ дѣйствій надъ числами).

2) Не можетъ-ли, въ такомъ случаѣ изученіе чиселъ разсматриваться лишь какъ средство при обученіи ариѳметикѣ, лишь какъ вспомогательное средство, которое можетъ и должно быть оставлено къ тому времени, когда его услуги болѣе не нужны? Какъ средство, изученіе чиселъ можетъ быть, въ свою очередь, разсматриваемо съ трехъ точекъ зрѣнія: а) или съ точки зрѣнія чисто-психологической, б) или съ точки зрѣнія общепедагогической, или же, наконецъ, в) съ точки зрѣнія специіально-ариѳметической.

а) Съ точки зрѣнія чисто-психологической необходимость и пользу изученія чиселъ доказываютъ всѣ грубеисты. Къ несчастію, та психологія, на которую они при этомъ ссылаются, на каждомъ шагу противорѣчитъ основамъ дѣйствительно-научной психологіи. Г. Паульсонъ, напр., вмѣстѣ съ цитуемымъ имъ Грубе, настаиваютъ на томъ, „чтобы каждое число первыхъ двухъ разрядовъ, со всѣми свойствами и отношеніями своими, ясно представлялось воображенію ученика“ („Ар. по Грубе“, стр. 9), забывая при этомъ, что такое требованіе рѣшительно неисполнимо. Они думаютъ, что учащемуся доступнѣе число, чѣмъ дѣйствіе надъ нимъ, въ то время какъ на самомъ дѣлѣ именно числа-то и недоступны нашему воображенію, тогда какъ дѣйствія надъ ними — вполнѣ доступны. Они видятъ во всестороннемъ разсмотрѣніи числа средство къ *уясненію* представленія объ этомъ числѣ, въ то время какъ ясность представленія этомъ въ случаѣ, напротивъ, становится призрачною. Дѣйствительно, подумайте—когда представленіе о любомъ числѣ (напр., о 37) яснѣе: тогда-ли, когда мы его разсматриваемъ съ точки зрѣнія нумераціи, т. е. разсматриваемъ его такъ, какъ его разсматривать надлежитъ, или же тогда, когда мы его разсматриваемъ такимъ образомъ:

$$36 + 1 = 30 + 7,\ 31 + 6,\ 32 + 5, \text{ и т. д. и т. д.},$$

не имѣя еще точнаго понятія о логическомъ смыслѣ сложенія? Очевидно, что именно ясность-то представленія о числѣ и исчезаетъ, какъ только мы приступаемъ къ изученію его, ибо ясность представленія о данномъ предметѣ вовсе не тожественна съ изобиліемъ разнообразныхъ о немъ свѣдѣній. Словомъ, если смотрѣть на изученіе чиселъ съ психологической точки зрѣнія, то оно оказывается тоже не раціональнымъ.

б) Съ точки зрѣнія общепедагогической, формальной, изученіе чиселъ оказывается тоже въ высшей степени сомнительнымъ средствомъ для обученія ариѳметикѣ. Г. Паульсонъ вмѣстѣ съ Грубе говорятъ, что преподаваніе ариѳметики по этой методѣ дѣйствуетъ на учениковъ „нравственно“, возбуждая ихъ самодѣятельность и внушая имъ любовь къ ученію, что оно развиваетъ ихъ способности, „знакомитъ съ сущностью (!) науки (?)“ и сообщаетъ необходимыя въ жизни практическія знанія. На самомъ же дѣлѣ эта метода (метода изученія чиселъ) не обладаетъ, по очень многимъ причинамъ, ни однимъ изъ этихъ достоинствъ. Она крайне однообразна и утомительна и поэтому не можетъ дѣйствовать на учащагося сколько-нибудь развивающимъ образомъ, а тѣмъ болѣе развивать его въ „нравственномъ" отношеніи. Она требуетъ отъ учителя такой массы наводящихъ вопросовъ и вполнѣ искусственныхъ пріемовъ, что на долю именно самодѣятельности-то учащихся остается очень мало интересной и полезной въ какомъ бы то ни было смыслѣ работы. Такимъ образомъ, вовсе не справедливо, что эта метода возбуждаетъ любовь къ ученію и труду вообще. Внушать любовь къ ученію и труду вообще, можетъ быть, и удается инымъ учителямъ и учительницамъ, учащимъ по этой методѣ, но это имъ удается скорѣе вопреки методѣ, нежели благодаря ей; ибо, въ дѣлѣ развитія въ учащихся любви къ ученію и труду вообще, при обученіи не менѣе важную роль, чѣмъ метода, а можетъ-быть и гораздо болѣе важную роль, играетъ нравственная личность учителя. Сомнительно также и благотворное вліяніе этой методы на умственныя способности учащихся. Она въ состояніи скорѣе извратить пріемы мышленія учащихся, нежели правильно и цѣлесообразно „развить" ихъ, такъ какъ въ самой ея основѣ лежитъ фальшивая и противорѣчащая здравому смыслу идея. Остальныя же два притязанія, заявляемыя этой методой, а именно возможность при ея помощи ознакомленія „съ сущностью науки" и сообщенія учащимся необходимыхъ въ жизни практическихъ знаній, можно сказать, столь же неосновательны. Съ сущностью *науки* метода эта не имѣетъ и не можетъ имѣть ничего общаго. Хотя ариѳметика, какъ наука, и не заключаетъ въ себѣ ничего особенно мудренаго, но все-таки въ ней (какъ мы это видѣли выше) такъ много серьезныхъ математическихъ понятій и ученій, что не только метода Грубе, но и вообще никакая, хотя бы и вполнѣ раціональная, метода первоначальнаго обученія малолѣтнихъ ариѳметикѣ съ этой наукой познакомить дѣтей не въ состояніи. Что касается необходимыхъ въ жизни „практическихъ знаній", то метода эта не только ихъ не даетъ, но и дать не въ состояніи: необходимыя въ жизни практическія знанія по ариѳметикѣ сводятся, главнымъ образомъ, къ умѣнію толково, дѣльно и быстро производить вычисленія, а именно такого-то умѣнія изученіе чиселъ дать не въ состояніи — вслѣдствіе того, что оно вовсе не „беретъ быка за рога", т. е. вовсе не приступаетъ къ дѣлу кратчайшимъ и вѣрнѣйшимъ путемъ, и вслѣдствіе того, что изученіе чиселъ требуетъ громадной затраты времени.

в) Съ точки зрѣнія спеціально ариѳметической, всестороннее изученіе чиселъ — *вообще* и въ частности не можетъ быть разсматриваемо какъ средство къ дальнѣйшему обученію ариѳметикѣ. При прохожденіи того или другого дѣйствія иногда, въ видѣ упражненія, можетъ быть предложена ученику задача, какъ будто и напоминающая изученіе числа въ томъ или другомъ отношеніи. Такъ напр., при изученіи дѣйствія кратнаго сравненія можно задать въ видѣ упражненія задачу на разложеніе числа на равныя слагаемыя. Но это будетъ, во-первыхъ, не изученіе каждаго даннаго числа въ отдѣльности, а во-вторыхъ, изученіе въ этомъ случаѣ не будетъ средствомъ къ обученію ариѳметикѣ *вообще*. Это изученіе не можетъ быть полезнымъ въ роли универсальнаго *средства* въ дѣлѣ первоначальнаго обученія ариѳметикѣ по той же причинѣ, по которой оно не можетъ быть *цѣлью* обученія ариѳметикѣ, а именно по причинѣ невѣрности его съ чисто-ариѳметической, нецѣлесообразности съ педагогической и неосновательности съ психологической точки зрѣнія. Какъ это, надѣемся, уже разъяснено выше, не число, а дѣйствіе надъ нимъ интересуетъ ариѳметику, и не число, всесторонне изученное, для нея важно, а дѣйствіе надъ числомъ, разсматриваемое только съ двухъ точекъ зрѣнія, а именно: 1) съ точки зрѣнія логическаго его смысла и цѣли, и 2) съ точки зрѣнія его производства въ связи съ нумераціею.

3) Остается подробно разсмотрѣть еще значеніе изученія чиселъ, какъ упражненія хотя и не преслѣдующаго цѣли обученія ариѳметикѣ, но все-таки признаваемаго нѣкоторыми полезнымъ въ развивательномъ отношеніи.—Подобныхъ заблужденій въ исторіи педагогики не мало: очень часто специфической дрессировкѣ дѣтей въ какомъ нибудь совершенно спеціальномъ, крайне одностороннемъ направленіи педагоги склонны приписывать ни вѣсть какое общее, педагогическое значеніе. Достаточно вспомнить о крайностяхъ объяснительнаго чтенія, предметныхъ уроковъ, и нѣкоторыхъ другихъ педагогическихъ изобрѣтеній, чаще всего даже и въ основѣ своей довольно ошибочныхъ, чтобы убѣдиться въ томъ, что совершенно чуждымъ истинной цѣли образованія упражненіямъ иногда придается громадное, несоразмѣрное настоящей цѣнности ихъ, значеніе. Пріученіе дѣтей къ шаблонамъ изученія чиселъ принадлежитъ къ числу заблужденій того же рода: это — игра, отнимающая массу драгоцѣннаго времени, и въ этой игрѣ, можетъ быть, столько же, а скорѣе гораздо менѣе развивательныхъ моментовъ, чѣмъ сколько ихъ во всякой другой ариѳметической игрѣ. Относительно изученія чиселъ какъ игры, впрочемъ, особенно спорить не слѣдуетъ; но что эта игра не можетъ считаться обученіемъ ариѳметикѣ—въ томъ, надѣемся, читатель, убѣдился, если удостоилъ вышеизложенное своего вниманія.

Гр. *Л. Н. Толстой*, въ одной изъ своихъ педагогическихъ статей, по поводу обученія грамотѣ совершенно справедливо замѣчаетъ: „Для того, чтобы заимствовать пріемы европейскихъ школъ, мы обязаны отличать то, что въ нихъ основано на вѣчныхъ законахъ разума, отъ того, что родилось только вслѣдствіе историческихъ условій". („Сочиненія гр. Толстого", изд. V-ое, часть IV, стр. 27). Насколько вѣрны выводы, дѣлаемые гр. Толстымъ изъ этого положенія въ отношеніи къ обученію грамотѣ— не мѣсто здѣсь разбирать. Но вообще справедливость этого положенія невозможно не признать во всякомъ случаѣ. Весь вопросъ можетъ быть только о томъ — что считать вытекающимъ изъ „вѣчныхъ законовъ разума" и что — вытекающимъ изъ историческихъ условій. Смѣемъ надѣяться, что выше читатель найдетъ достаточно основаній для того, чтобы признать такъ называемое „изученіе чиселъ" однимъ изъ тѣхъ пріемовъ, которые возникли въ Германіи вовсе не въ силу „вѣчныхъ законовъ разума", а вѣроятно вслѣдствіе спеціальныхъ историческихъ условій, для русской школы нисколько не обязательныхъ *).

Въ заключеніе этого параграфа позволимъ себѣ привести мнѣніе Руд. Книллинга о методѣ изученія чиселъ, лежащей въ основѣ очень многихъ сочиненій по предмету методики начальной ариѳметики и очень многихъ учебныхъ пособій (въ томъ числѣ, напр., извѣстнаго собранія задачъ г. Евтушевскаго):

1) Трудъ, потраченный на то, чтобы привести дѣтей къ яснымъ представленіямъ о числахъ, напрасенъ. 2) Разложеніе чиселъ на составные элементы есть игра, умерщвляющая духъ (eine geisttödtende Spielerei). 3) Разнообразіе дѣйствій при такъ называемомъ всестороннемъ разсматриваніи числа сбиваетъ начинающаго съ толку и создаетъ путаницу, неурядицу въ его мышленіи. 4) Концентрація обученія при этомъ его методѣ невозможна. 5) Всестороннее изученіе каждаго числа первой сотни скучно, утомительно, безрезультатно и неосновательно ни съ психологической, ни съ ариѳметической точки зрѣнія (langweilig, ermüdend, resultatlos, und weder psychologisch gerechtfertigt, noch auch durch das Object begründet). 6) Метода Грубе требуетъ слишкомъ большой потери времени отъ школы, требуетъ слишкомъ большого

*) Ср. упоминаемую выше „Методику ариѳметики", составленную авторомъ этихъ строкъ. — Мы не стали бы такъ долго останавливаться на методѣ изученія чиселъ, если бы мы не разсчитывали, что наша книга попадетъ въ руки нѣкоторыхъ учителей городскихъ школъ, учителей приготовительныхъ классовъ мужскихъ учебныхъ заведеній, учительницъ женскихъ учебныхъ заведеній и другихъ лицъ безъ высшаго математическаго образованія: въ средѣ этихъ лицъ не мало, вѣроятно, сторонниковъ той или другой формы методы изученія чиселъ. Если кто нибудь изъ этихъ лицъ не убѣдился вышеизложенными соображеніями относительно методы изученія чиселъ, то мы того позволяемъ себѣ отослать къ упомянутому выше сочиненію нашему, изъ котораго частью извлечено вышеизложенное, но въ которомъ эти соображенія изложены гораздо полнѣе и подробнѣе.

искусства и терпѣнія отъ учителя и слишкомъ большихъ усилій отъ учениковъ, не давая взамѣнъ всего этого необходимаго дѣтямъ знанія ариѳметики.

§ 8. Прохожденіе съ дѣтьми курса начальной ариѳметики по учебнику, какъ мы видѣли выше, дискредитовано въ школьной практикѣ очень давно. Къ болѣе или менѣе самостоятельному чтенію учебника учащійся можетъ приступить только на высшихъ ступеняхъ обученія, никакъ не ранѣе второго, третьяго класса ср. уч. заведенія. О роли учебника при обученіи мы будемъ говорить ниже; здѣсь же достаточно только констатировать необходимость при классномъ и домашнемъ *первоначальномъ* обученіи обратиться къ какимъ либо другимъ средствамъ. Излагательная (акроаматическая) форма обученія при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ, какъ это само собою разумѣется, тоже неумѣстна и нецѣлесообразна: вниманіе и способность слѣдить за логикою излагаемаго въ малолѣтнемъ учащемся развиты въ слишкомъ ничтожной степени. На что же, въ такомъ случаѣ, можетъ опираться обученіе ариѳметикѣ? Обученіе ариѳметикѣ должно опираться на задачи и цѣлесообразное употребленіе наглядныхъ пособій; что же касается формы обученія, то она должна быть, хотя и не преимущественно, катехитическою. Прежде всего обратимся къ вопросу о задачахъ и ихъ роли при обученіи ариѳметикѣ.

Задачи, извѣстныя подъ именемъ ариѳметическихъ, несмотря на все свое разнообразіе, могутъ быть точно распредѣлены на два класса: 1) задачи чисто-ариѳметическія и 2) задачи алгебраическія. Всякая задача, для рѣшенія которой требуется примѣненіе только прямыхъ дѣйствій, можетъ быть названа *чисто-ариѳметическою*; задача же, для рѣшенія которой требуется примѣненіе хотя бы только одного изъ обратныхъ дѣйствій можетъ быть названа *алгебраическою*. Эти термины избраны по слѣдующимъ соображеніямъ: если при рѣшеніи задачи требуются только прямыя дѣйствія, то искомое, неизвѣстное число представляетъ собою, по составленіи уравненія, нѣкоторую явную функцію данныхъ чиселъ; при этомъ аналитическій способъ составленія уравненія для рѣшенія подобной задачи оказывается совершенно безполезнымъ. Далеко не то же можно сказать о задачахъ, для рѣшенія которыхъ требуется какое либо обратное дѣйствіе, какъ бы проста ни была данная задача этого рода: въ этихъ задачахъ неизвѣстное число является связаннымъ съ извѣстными такимъ образомъ, что его должно считать, съ алгебраической точки зрѣнія, неявною функціею данныхъ чиселъ; обращеніе послѣдней въ функцію явную является цѣлью рѣшенія полученнаго уравненія, либо же цѣлью особаго ряда разсужденій, если уравненіе не составлено.

Для того чтобы уяснить себѣ разницу между чисто-ариметическими и алгебраическими задачами, займемся разрѣшеніемъ двухъ задачъ, при чемъ, прибѣгнувъ къ обозначенію искомаго числа какою либо буквою (напр., буквою x), составимъ уравненіе.

Задачи пусть будутъ слѣдующія:

1) Торговецъ разсчиталъ, что если онъ весь остатокъ своего ситца станетъ продавать по 8 ми коп. за аршинъ, то онъ понесетъ при этомъ убытку 92 р.; если бы онъ сталъ продавать его по 10-ти коп., то онъ получилъ бы 28 руб. прибыли. Сколько у него оставалось ситца?

2) Нѣкто купилъ 7 аршинъ сукна по 3 руб. за аршинъ и 5 аршинъ бархата по 7 р. за аршинъ; послѣ этого у него осталось столько денегъ, что на нихъ онъ могъ бы купить еще два аршина сукна по 4 р. и три аршина бархата по 6 р. за арш. Спрашивается—сколько у него было денегъ до покупки?

Первая изъ этихъ задачъ разрѣшается съ помощью уравненія слѣдующимъ образомъ: Пусть все число аршинъ ситца, оставшагося у торговца, равно x. Продавъ весь ситецъ по 8 коп. за аршинъ, онъ, по условію задачи, всего выручилъ бы $8\times x$ копеекъ и при этомъ понесъ бы 92 рубля убытка; стало быть, весь ситецъ стоилъ ему самому

$$8\times x + 9200$$

коп. Продавъ же весь ситецъ по 10 коп. за аршинъ, торговецъ, согласно другому условію задачи, выручилъ бы $10\times x$ копеекъ и при этомъ получилъ бы 28 руб. прибыли; стало быть, весь ситецъ ему самому стоилъ

$$10\times x - 2800$$

коп. Мы получили два выраженія:

$$8\times x + 9200 \text{ и } 10\times x - 2800,$$

которыя оба въ различной формѣ выражаютъ одну и ту же величину—стоимость всего оставшагося у торговца ситцу. Поэтому можемъ утверждать, что если буква x обозначаетъ количество аршинъ имѣющагося у торговца ситцу, то

$$8\times x + 9200 = 10\times x - 2800$$

Это выраженіе и представляетъ собою нѣкоторое *уравненіе*, на основаніи котораго можно различными способами вычислить величину числа x, т. е. количество аршинъ оставшагося у торговца ситца.

Перейдемъ ко второй задачѣ. Пусть количество рублей, бывшихъ у даннаго лица до покупки, было x. Изъ этихъ денегъ онъ истратилъ 3 р. $\times$ 7 на сукно и 7 р. $\times$ 5 — на бархатъ. Послѣ этого у него осталось

$$x - (3 \times 7 + 7 \times 5)$$

рублей. По другому условію, онъ на оставшіяся деньги могъ бы купить 2 арш. сукна по 4 р. и 3 арш. бархата по 6 р. за аршинъ; это значитъ, что у него осталось

$$4 \times 2 + 6 \times 3$$

рублей. Такимъ образомъ и здѣсь получаемъ одну и ту же величину, выраженную различнымъ образомъ, результатомъ чего является уравненіе:

$$x - (3 \times 7 + 7 \times 5) = 4 \times 2 + 6 \times 3. \text{ *)}.$$

Важно для насъ главнымъ образомъ то, что: 1) существуютъ такія задачи, на рѣшеніе которыхъ введеніе алгебраическаго обозначенія неизвѣстной величины нисколько не вліяетъ; 2) при рѣшеніи подобныхъ задачъ надъ введенною неизвѣстною величиною не производится никакихъ дѣйствій; 3) алгебраическій способъ не приводитъ при своемъ приложеніи къ этому роду задачъ ни къ чему существенному; 4) существуютъ задачи, на рѣшеніе которыхъ введеніе алгебраическихъ методовъ рѣшенія (т. е. составленіе уравненія) оказываетъ болѣе или менѣе большое вліяніе.

Сообразно съ этою точкою зрѣнія задача, требующая простого вычитанія или дѣленія, есть задача алгебраическая: ибо какъ бы она проста ни была, она приводитъ къ уравненію.

$$x + a = b$$

или къ уравненію

$$x \times a = b,$$

въ которомъ x подлежитъ опредѣленію. Но для краткости можно условиться задачи, для рѣшенія которыхъ требуется одно дѣйствіе, будь то дѣйствіе прямое или обратное, называть тоже ариеметическими; алгебраическими же условимся называть всѣ тѣ

*) Эта послѣдняя задача настолько проста, что пишущій эти строки въ другомъ своемъ сочиненіи для краткости считаетъ ее задачею чисто-ариеметической и даже приводитъ ее какъ примѣръ задачи чисто-ариеметической. Очень сожалѣя о столь неудачномъ выборѣ примѣра, мы считаемъ долгомъ своимъ заявить, что сказанная логическая ошибка указана намъ М. С. Гринбергомъ, учителемъ математики при Могилевской гимназіи, въ письмѣ его и что на изложенную здѣсь классификацію задачъ на чисто-ариеметическія и алгебраическія мы были наведены частью также и цѣнными для насъ замѣчаніями именно этого письма. Мы однако позволяемъ себѣ замѣтить, что классификація, изложенная въ нашей „Методикѣ ариеметики“ (М. 1886), для цѣлей тамъ намѣченныхъ, достаточно точна.

задачи, которыя подъ этимъ именемъ упоминаются въ выше данной классификаціи, за исключеніемъ задачъ, требующихъ только вычитанія или только дѣленія.

Чисто-ариѳметическія задачи можно различать двухъ родовъ: 1) задачи, для разрѣшенія коихъ требуется приложеніе только одного изъ четырехъ дѣйствій, и 2) задачи, для разрѣшенія коихъ требуется приложеніе двухъ или болѣе дѣйствій. Первый классъ чисто-ариѳметическихъ задачъ условимся называть *простыми*, второй—*сложными*.

Чтобы *понять* все значеніе задачъ простыхъ въ дѣлѣ обученія ариѳметикѣ, должно принять къ свѣдѣнію слѣдующія соображенія Прежде чѣмъ учить дѣтей *производству* ариѳметическихъ дѣйствій, имъ должно уяснить самую необходимость дѣйствій, ихъ право на существованіе, ихъ цѣль и логическій смыслъ. Встарину учащемуся задавали примѣръ на то или иное дѣйствіе и при этомъ требовали, чтобы онъ твердо зналъ правило и правильно совершилъ заданное дѣйствіе Понимаетъ ли онъ самую цѣль дѣйствія, его логическій смыслъ, понимаетъ ли онъ самую сущность дѣйствія и право этого послѣдняго на вниманіе, этимъ не интересовались; на простыя задачи тогда поэтому не обращалось должнаго вниманія. Не существенно измѣнилось дѣло и тогда, когда болѣе или менѣе безсмысленнымъ, безцѣльнымъ изученіемъ чиселъ было вытѣснено безсмысленное выучиваніе наизусть правилъ по учебнику и не болѣе осмысленное производство дѣйствій надъ заданными числами На самомъ же дѣлѣ простыя задачи лучше, чѣмъ всяческія правила и опредѣленія, лучше какого бы ни было изученія чиселъ пригодны именно для того, чтобы съ ихъ помощью: 1) привести учащагося къ мысли о необходимости дѣйствія надъ числами, 2) уяснить ему цѣль и логическій смыслъ того или другого дѣйствія, 3) ознакомить его съ различными въ логическомъ отношеніи случаями примѣненія этого дѣйствія и 4) сдѣлать ему понятными различные въ словесномъ отношеніи способы выраженія одного и того же ариѳметическаго требованія.

Какъ, въ самомъ дѣлѣ, убѣдить ребенка въ томъ, что и съ логической, и съ практической точки зрѣнія, необходимо создать, придумать такое-то ариѳметическое дѣйствіе, строго, точно и безошибочно различая его отъ другихъ? Какъ уяснить ему цѣль и смыслъ даннаго дѣйствія, случаи его примѣненія и различныя словесныя выраженія требованія, чтобы это дѣйствіе было совершено? Никакія опредѣленія, разъясненія, правила, никакое изученіе чиселъ, конечно, не въ состояніи этого сдѣлать такъ, какъ то въ состояніи сдѣлать методически подобранная группа задачъ, которыя преслѣдуютъ именно эти цѣли. Ибо опредѣленія дѣти точно такъ же, какъ и взрослые, понимаютъ только тогда, когда всѣ понятія, входящія въ опредѣленіе, имъ хорошо извѣстны, когда имъ извѣстны цѣль опредѣленія и всѣ соприкасающіяся съ даннымъ опредѣленіемъ понятія. Что же касается изученія чиселъ, то оно только тогда приводитъ къ дѣйствіямъ, когда эти дѣйствія извѣстны, если же идеи дѣйствій нѣтъ, то изученіе чиселъ, этой *правильной* идеи, какъ мы это видѣли выше, учащимся дать не въ состояніи.

Результатомъ этихъ размышленій является слѣдующее основное положеніе: для развитія у учащихся правильной идеи о четырехъ дѣйствіяхъ, соотвѣтствующія части курса начальной ариѳметики должны быть построены на задачахъ и притомъ на задачахъ простыхъ.

Что же касается сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, то для цѣлей обученія ариѳметикѣ ихъ значеніе лишь постолько важно, поскольку онѣ служатъ той же цѣли развитія у учащихся правильной идеи о четырехъ дѣйствіяхъ. Для ихъ рѣшенія требуется чаще всего только большее развитіе вниманія и большее пониманіе родной рѣчи. Въ этомъ смыслѣ значеніе сложныхъ чисто ариѳметическихъ задачъ скорѣе преслѣдуетъ развивательныя цѣли. Дѣло въ томъ, что раціональное обученіе вообще оказываетъ полезное вліяніе на умственное развитіе учащихся, и въ этомъ смыслѣ обученіе ариѳметикѣ, понятно, тоже можетъ быть полезно въ смыслѣ развивательномъ. Но говоря о развивательномъ значеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ, мы имѣемъ въ виду не развитіе вообще, но спеціально развитіе навыка къ употребленію, а главное—къ пониманію литературной математической рѣчи, рядомъ съ развитіемъ большаго вниманія.

При разрѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ представляется простѣйшій случай къ уясненію способа разложенія задачи со многими условіями на составляющія ее простыя. Какъ бы многочисленны ни были условія такой задачи, анализъ задачи этого рода не требуетъ особенной сноровки для уразумѣнія ея составныхъ элементовъ. При этомъ замѣчательно, что тѣ простыя задачи, къ разрѣшенію коихъ приводится задача сложная изъ класса чисто-ариѳметическихъ, всегда можетъ быть вкратцѣ и вполнѣ точно формулирована, чего далеко нельзя сказать о задачахъ алгебраическихъ. Если распредѣлять рѣшеніе задачъ ариѳметическихъ въ видѣ строчекъ, то каждая изъ строчекъ отвѣчаетъ на какой нибудь частный вопросъ, не представляющій особенныхъ затрудненій при своемъ формулированіи.

При разрѣшеніи, напр., второй изъ выше разсмотрѣнныхъ задачъ (которая безъ особенно большой погрѣшности можетъ быть принята за задачу чисто-ариѳметическую), получается слѣдующій рядъ строчекъ:

1) 3 р. × 7.
2) 7 р. × 5.
3) 3 р. × 7 + 7 р. × 5.
4) 4 р. × 2.
5) 6 р. × 3.
6) 4 р. × 2 + 6 р. × 3.
7) (3 р. × 7 + 7 р. × 5) + (4 р. × 2 + 6 р. × 3).

Эти строчки по порядку выражаютъ: 1) Сколько заплачено за сукно, 2) сколько за бархатъ, 3), сколько за то и за другое, 4) сколько лицо, о которомъ рѣчь, могло бы еще истратить на сукно, 5) сколько на бархатъ, 6) сколько оно могло всего истратить, кромѣ того, что имъ уже истрачено, и 7) сколько всего у этого лица было денегъ. Далеко не въ такой же степени просты вопросы большинства алгебраическихъ задачъ. Приведенная выше алгебраическая задача сводится всего къ тремъ строчкамъ:

1) 28 р. + 92 р.
2) 10 к. — 8 к.
3) (28 р. + 92 р.): (10 к.—8 к.),

но за-то каждая изъ нихъ выражаетъ рядъ идей и мыслей, не поддающихся столь краткой и ясной формулировкѣ, какую допускаютъ выше разсмотрѣнныя семь строчекъ чисто ариѳметической задачи. Дѣйствительно: первая строчка занимающей насъ алгебраической задачи отвѣчаетъ на слѣдующій, весьма сложный, вопросъ: *если торговецъ станетъ продавать ситецъ по десяти коп. за аршинъ, то на сколько онъ больше выручитъ денегъ противъ того количества ихъ, которое онъ выручилъ бы, продавая ситецъ по восьми копеекъ?* Вторая строчка, включая въ себѣ идею о *причинѣ* такой разницы въ выручкѣ, отвѣчаетъ на вопросъ: *сколько торговецъ получаетъ лишку на каждомъ аршинѣ ситца, продавая его по 10-ти коп., противъ того, сколько онъ получалъ бы за аршинъ, продавая его по 8-ми коп.?* И только третья строчка отвѣчаетъ на простой сравнительно вопросъ: *сколько у торговца оставалось ситца*, но очевидно, что самый характеръ и форма вопросовъ только что разсмотрѣнной задачи совсѣмъ иные. Это еще не все: въ то время какъ въ сложной чисто-ариѳметической задачѣ между строчками (если можно такъ выразиться) лежатъ идеи очень понятныя и доступныя при одномъ взглядѣ на строчку, между строчками задачи алгебраической надо прочесть идеи болѣе или менѣе скрытыя и для большинства дѣтей мало-доступныя. Такъ, между строчками первою и второю нашей алгебраической задачи лежитъ, какъ выше замѣчено, идея о *причинѣ* избытка, а между второй и третьею—идея о томъ, что полученный избытокъ зависитъ *исключительно* отъ разности между цѣною аршина въ одномъ и цѣною аршина въ другомъ случаѣ. Даже болѣе того: постановка *первой строчки* уже предполагаетъ такой рядъ разсужденій, къ какому никогда не приходится прибѣгать при разрѣшеніи задачи, хотя бы и очень сложной, изъ числа чисто-ариѳметическихъ.

Послѣ всего вышеизложеннаго намъ будетъ очень легко оріентироваться въ вопросѣ о значеніи алгебраическихъ задачъ. Задачи сложныя изъ числа чисто-ариѳметическихъ могутъ, укрѣпляя вниманіе учащихся и развивая ихъ рѣчь и способность къ пониманію рѣчи, въ то же время имѣть нѣкоторое значеніе для обученія ариѳметикѣ какъ таковой, служа къ дальнѣйшему уясненію цѣли ариѳметическихъ дѣйствій и ихъ взаимныхъ отношеній. Задачи же алгебраическія вообще не въ состояніи оказать при обученіи тѣхъ-же услугъ. Ибо, при неспособности большинства дѣтей къ математическимъ пріемамъ мышленія и при недостаточномъ развитіи въ нихъ стремленій къ анализу, вниманіе дѣтей на алгебраическихъ задачахъ изощряется очень мало; столь же мало изощряется также и рѣчь ихъ; наконецъ, для обученія ариѳметикѣ какъ таковой, эти задачи тоже мало полезны, не содѣйствуя уясненію дѣйствій и ихъ соотношеній.

Понявъ даже всѣ слова, заключающіяся въ данной алгебраической задачѣ, понявъ даже и условія ея, дѣти далеко еще не подготовлены къ анализу условій задачи, если они не достаточно упражнялись въ этомъ спеціальномъ направленіи. Дѣло въ томъ, что одно пониманіе и знаніе четырехъ дѣйствій, будучи вполнѣ необходимымъ условіемъ логическаго рѣшенія алгебраической задачи, далеко еще недостаточно для того, чтобы задача была вѣрно и логично разрѣшена. Какъ, въ самомъ дѣлѣ, разрѣшить алгебраическую задачу, если къ ней приступить только съ знаніемъ четырехъ дѣйствій и безъ болѣе или менѣе тонкаго анализа, который въ задачахъ простыхъ и даже сложныхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ отличается чрезвычайною краткостью и непосредственностью? Для рѣшенія алгебраической задачи, кромѣ знанія четырехъ дѣйствій, необходимъ еще особенный, спеціальный, большій или меньшій навыкъ въ анализѣ.

Не вдаваясь пока въ дальнѣйшее обсужденіе вопроса о роли задачъ алгебраическаго характера, мы тѣмъ не менѣе изъ предыдущаго можемъ сдѣлать тотъ выводъ: что 1) ученія ариѳметики не оказываютъ особенныхъ услугъ при разрѣшеніи задачъ этого рода: они только необходимы для возможности рѣшенія, но для того не достаточны, и 2) обученію ариѳметикѣ, какъ таковой, задачи алгебраическія, въ свою очередь, тоже не оказываютъ никакихъ услугъ, такъ какъ не относятся ни къ теоріи, ни къ практикѣ ариѳметическихъ дѣйствіи.

Каково же въ такомъ случаѣ истинное значеніе этого рода задачъ въ школѣ? Ознакомленіе дѣтей съ аналитическою формою мышленія, конечно, полезно въ развивательномъ отношеніи, если дѣти къ этому подготовлены и если данная школа имѣетъ въ распоряженіи своемъ достаточное для того количество времени. Увлеченіе задачами алгебраическими въ ущербъ самому курсу ариѳметики, поэтому, не заслуживаетъ никакого сочувствія, если на дѣло смотрѣть съ точки зрѣнія требованій обученія ариѳметикѣ. Это тѣмъ справедливѣе, что въ самомъ прохожденіи надлежащего курса ариѳметики заключается гораздо болѣе развивательныхъ моментовъ, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда. Обученіе вообще оказываетъ на дѣтскій умъ въ высшей степени важное и полезное воспитательное вліяніе: оно внушаетъ дѣтямъ должное уваженіе къ уму человѣческому и прививаетъ имъ такую массу умственныхъ навыковъ, что въ сравненіи съ ними навыкъ въ рѣшеніи алгебраическихъ задачъ, по причинѣ крайней своей специфичности, является навыкомъ, которому можно приписать только второстепенное значеніе. Лучшимъ доказательствомъ справедливости этого взгляда можетъ служить то обстоятельство, что можно указать массу людей, имѣющихъ полнѣйшее право считать себя людьми истинно образованными, но не могущихъ похвастать ни малѣйшимъ умѣніемъ разрѣшать задачи алгебраическаго характера. Къ тому же и практическая жизнь рѣдко предлагаетъ намъ такія задачи, которыя носили бы алгебраическій характеръ: большинство задачъ, представляющихся въ практической жизни, носятъ характеръ чисто ариѳметическій. Итакъ, чисто алгебраическимъ задачамъ придается обыкновенно скорѣе слишкомъ большое, чѣмъ слишкомъ малое, значеніе, роль ихъ скорѣе преувеличивается, чѣмъ игнорируется; а потому учитель скорѣе рискуетъ повредить успѣху школьнаго дѣла, чѣмъ быть ему полезнымъ, если онъ не отведетъ этимъ задачамъ подобающаго имъ мѣста *).

---

*) Намъ неоднократно приходилось видѣть учениковъ высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, которые не были, несмотря на довольно основательное знаніе среднеобразовательнаго курса математики, въ состояніи безъ помощи системы уравненій разрѣшить извѣстную задачу, гласящую:

Одинъ пастухъ сказалъ другому: „отдай мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у меня будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у тебя“.—Нѣтъ, отвѣчалъ ему другой: отдай лучше ты мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у насъ будетъ по-ровну. Сколько у каждаго изъ нихъ овецъ?

Трудность не-алгебраическаго рѣшенія этой задачи заключается въ томъ, что по порядку надо изслѣдовать слѣдующіе семь вопросовъ: 1) у котораго изъ пастуховъ больше? 2) если бы первый пастухъ одну овцу отдалъ *третьему* лицу, то у котораго изъ пастуховъ и на сколько было бы больше, чѣмъ у другого? (у перваго одною овцою больше) 3) если бы онъ не отдавалъ никому ни одной овцы, то на сколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на двѣ); 4) если бы второй пастухъ отдалъ *третьему* лицу одну овцу, на сколько у перваго было бы въ этомъ случаѣ больше овецъ, чѣмъ у второго? (на три овцы), 5) если бы онъ отдалъ эту овцу второму пастуху, то на сколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на четыре); 6) но по условію у него въ этомъ

Очевидно во всякомъ случаѣ, что въ приготовительныхъ классахъ среднихъ учебныхъ заведенiи задачи алгебраическаго характера неумѣстны ни съ какой точки зрѣнія. Къ сожалѣнію, въ большинствѣ употребительныхъ въ этихъ классахъ задачниковъ этотъ взглядъ не принятъ во вниманіе.

Что касается роли такъ называемыхъ ариѳметическихъ примѣровъ при обученіи ариѳметикѣ, то ихъ значеніе чаще всего чисто практическое: упражняясь въ вычисленіи примѣровъ, дѣти пріобрѣтаютъ навыкъ въ *производствѣ* дѣйствій. Мы уже видѣли, что между производствомъ дѣйствій и ихъ логической стороною есть глубокая разница: съ логической и спеціально-ариѳметической точки зрѣнія всякое ариѳметическое дѣйствіе подчиняется только требованіямъ логики и ариѳметики; въ вопросѣ же о производствѣ дѣйствій важную роль играютъ также и требованія практическія: требованія удобства, быстроты, наглядности, вразумительности и т. д. На примѣрахъ дѣти научаются *располагать* вычисленія сообразно тѣмъ образцамъ, которые имъ даны учителемъ. Понятно, что въ вычисленіи примѣровъ дѣти должны упражняться по возможности старательно и неустанно, и притомъ безъ непосредственной помощи учителя: только тотъ научается вѣрному и быстрому вычисленію, кто самъ много упражнялся въ этомъ направленіи. Такъ какъ, согласно „Учебнымъ планамъ" преподаванія въ классическихъ гимназіяхъ въ первомъ классѣ должны быть повторены ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами, то это доказываетъ, что въ приготовительномъ классѣ эти дѣйствія должны быть усвоены практически. По нашему крайнему разумѣнію, въ этомъ классѣ и при домашнемъ первоначальномъ обученіи особенное вниманіе должно быть обращено на выясненіе цѣлей дѣйствій и на усвоеніе дѣтьми практическаго умѣнія вычислять. Поэтому изобиліе работы учащихся надъ примѣрами въ этомъ классѣ и при домашнемъ первоначальномъ обученіи крайне желательно: оно возможно по сравнительной легкости техники дѣйствій, а желательно, между прочимъ, и въ виду требованій программы.

§ 9. Способы рѣшенія ариѳметическихъ задачъ могутъ быть подведены подъ три категоріи: 1) Задачи простыя изъ числа

случаѣ было бы вдвое болѣе, чѣмъ у второго, стало-быть сколько у второго въ этомъ случаѣ овецъ? (четыре); 7) сколько у него было ранѣе? (пять), 8) а сколько у перваго? (семь). Эти вопросы здѣсь приведены для того, чтобы показать, какая длинная цѣпь ихъ необходима, чтобы привести къ рѣшенію задачи, повидимому вовсе не особенно запутанной— ни въ числовомъ, ни въ словесномъ отношеніи. Кстати позволимъ себѣ при этомъ предложить читателю разсмотрѣть, къ какимъ „строчкамъ" ведетъ эта задача. Это будетъ ему полезно для лучшаго уясненія себѣ содержанія выше высказаннаго соображенія о трудности формулированія значенія каждой строчки, когда мы имѣемъ дѣло съ задачею алгебраическою.

чисто-ариѳметическихъ не требуютъ ни анализа, ни установленія плана рѣшенія; поэтому способъ ихъ рѣшенія зависитъ исключительно отъ смысла условій, и если учащійся только понимаетъ эти условія, то онъ безошибочно останавливается на томъ изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, которое должно быть примѣнено при рѣшеніи этой задачи. Если же учащійся вмѣсто одного дѣйствія (напр., сложенія) прибѣгаетъ къ другому (къ вычитанію или умноженію), то этимъ доказывается только то, что онъ или условія задачи, или логическаго смысла ариѳметическихъ дѣйствій еще не понимаетъ. При этомъ выясненіе *причины*, почему въ данномъ случаѣ, при рѣшеніи данной простой ариѳметической задачи, должно прибѣгнуть къ тому, а не иному ариѳметическому дѣйствію, возможно только на основаніи опредѣленія этого дѣйствія, а не на основаніи какихъ либо разсужденій. Для разъясненія возьмемъ рядъ задачъ:

а) Въ первомъ отдѣленіи школы 24 уч., во второмъ 17. Сколько учащихся въ обоихъ отдѣленіяхъ вмѣстѣ?

б) Въ другой школѣ къ началу года было 52 учащихся; къ концу года изъ нея выбыло по разнымъ причинамъ 19 человѣкъ. Сколько въ ней послѣ этого осталось учениковъ?

в) Въ началѣ урока каждому изъ 15 учениковъ второго отдѣленія было выдано по два листа бумаги. Сколько бумаги выдано всѣмъ 15-ти учащимся?

г) 14 учениковъ старшаго отдѣленія получили въ началѣ года 154 пера; всѣ получили поровну. По сколько перьевъ досталось каждому изъ нихъ.

д) Въ другой разъ 260 перьевъ были розданы ученикамъ младшаго отдѣленія; каждый получилъ по десяти перьевъ. Сколько въ школѣ было учениковъ младшаго отдѣленія?

Для рѣшенія первой задачи, надо прибѣгнуть къ сложенію, для рѣшенія второй—къ вычитанію, и т. д. При обученіи дѣтей, еще недостаточно владѣющихъ рѣчью вообще и діалектическими пріемами въ особенности (къ числу такихъ дѣтей принадлежитъ большинство учащихся въ приготовительныхъ классахъ), неосновательно было бы на первыхъ *ступеняхъ обученія* требовать не только „анализа“ подобныхъ задачъ и установленія „плана“ рѣшенія, но даже и объясненія—почему въ первой задачѣ примѣняется сложеніе, во второй вычитаніе и т. д. На этой ступени обученія учащій долженъ строжайше слѣдить только за тѣмъ, чтобы учащіеся понимали логическій смыслъ дѣйствій и вполнѣ сознательно относились къ условіямъ простыхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ. Дѣло въ томъ, что задачи этого рода поддаются только крайне искусственному анализу и что единственнымъ оправданіемъ примѣненія того или иного ариѳметическаго дѣйствія къ рѣшенію данной простой чисто-ариѳметической задачи можетъ служить подведеніе условій этой задачи подъ опредѣленіе того или иного дѣйствія. Иначе говоря: если у насъ есть рядъ болѣе или менѣе точныхъ опредѣленій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, то примѣненіе того или иного дѣйствія можетъ быть оправдано только ссылкою на опредѣленіе и подведеніемъ условій задачи подъ это опредѣленіе; если же такого ряда опредѣленій нѣтъ въ нашемъ распоряженіи, то никакія „разсужденія" не въ состояніи доказать, что въ данномъ случаѣ требуется сдѣлать сложеніе, а въ другомъ случаѣ вычитаніе или умноженіе, и т. д. Поэтому, повторяемъ, учащій въ этомъ послѣднемъ случаѣ всякій разъ долженъ только удостовѣриться—понимаютъ ли учащіеся фактическую зависимость дѣйствія отъ условій задачи: если понимаютъ, хорошо, если же пониманія не замѣчается, то онъ долженъ прежде всего позаботиться объ уясненіи логической стороны каждаго дѣйствія.

Для того чтобы уясненіе дѣтямъ, на первыхъ ступеняхъ обученія, понятій объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ было возможно безъ помощи опредѣленій (которыхъ ученики приготовительныхъ классовъ понять не въ состояніи), необходимо имѣть въ распоряженіи методически подобранный матеріалъ для упражненія дѣтей въ рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ простыхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ и раздѣлкѣ примѣровъ. На такія задачи учитель долженъ поэтому обратить особенное вниманіе, ибо на первыхъ ступеняхъ обученія задачи должны настолько разъяснять цѣль и смыслъ ариѳметическихъ дѣйствій, чтобы точное, научное опредѣленіе дѣйствія было, до поры до времени, совершенно не нужно.

2) При рѣшеніи сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ учащіеся должны быть пріучены какъ къ анализу задачъ, такъ и къ установленію плана ихъ рѣшенія. Всякая сложная задача изъ числа чисто-ариѳметическихъ допускаетъ расчлененіе ея на извѣстное количество задачъ простыхъ, рѣшеніе которыхъ требуетъ примѣненія только одного изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій. Расчлененіе это не только для учащаго, но и для учащихся не представляетъ особенныхъ затрудненій, если учащій не вдругъ, а постепенно переходитъ отъ менѣе сложныхъ къ болѣе сложнымъ. Лучше всего, если въ рукахъ учащаго находится методически-подобранная совокупность задачъ сложныхъ изъ числа чисто-ариѳметическихъ, ибо въ противномъ случаѣ учащему приходится постоянно подыскивать задачи, болѣе или менѣе подходящія къ требованіямъ даннаго момента обученія. Что же касается способовъ рѣшенія этого рода задачъ, то онѣ допускаютъ не только установленіе плана рѣшенія, но и анализъ. Но надо при этомъ замѣтить, что анализъ задачъ этого рода большею частью не отличается особенною естественностью; условія настолько явно разбиваютъ данную сложную задачу на цѣлый рядъ задачъ простыхъ, что естественнѣе всего начинать

дѣло прямо съ установленія плана рѣшенія. Только очень немногія изъ числа чисто-ариѳметическихъ задачъ представляютъ такія затрудненія при установленіи плана рѣшенія, что лучше сначала прибѣгнуть къ элементарнѣйшимъ пріемамъ анализа. При этомъ умѣстно присовокупить, что значеніе задачъ дѣйствительно трудныхъ (изъ числа чисто-ариѳметическихъ) весьма незначительно какъ съ точки зрѣнія ариѳметической, такъ и съ точки зрѣнія развитія въ дѣтяхъ какихъ либо особенно полезныхъ умственныхъ навыковъ, такъ какъ вся трудность ихъ можетъ заключаться только въ особенномъ изобиліи вычисленій.

3) Наконецъ, что касается задачъ алгебраическаго характера, то для рѣшенія ихъ примѣненіе аналитическихъ пріемовъ необходимо, такъ какъ въ противномъ случаѣ задачи эти являются ничѣмъ не мотивированнымъ и даже вреднымъ наростомъ на томъ вполнѣ стройномъ цѣломъ, которое извѣстно подъ именемъ ариѳметики. Единственное значеніе задачъ алгебраическаго характера заключается въ тѣхъ полезныхъ умственныхъ навыкахъ, которые могутъ быть пріобрѣтены при ихъ рѣшеніи. Само собою разумѣется, что такого общаго правила, пользуясь которымъ можно было бы разрѣшить любую ариѳметическую задачу алгебраическаго характера, не существуетъ. Даже чисто алгебраическій способъ рѣшенія („*помощью x'a*“, *какъ обыкновенно* характеризуютъ этотъ способъ) требуетъ иногда такой сноровки и такихъ спеціальныхъ пріемовъ, которые не могутъ быть включены въ рамки общаго правила, всегда выручающаго насъ изъ затрудненій. Тѣмъ въ большей степени это справедливо относительно тѣхъ аналитическихъ пріемовъ, которые игнорируютъ алгебраическую сторону дѣла.

Вообще на тотъ пріемъ мышленія, который извѣстенъ подъ именемъ анализа, не слѣдуетъ смотрѣть какъ на пріемъ, который будто бы чрезвычайно легко приложимъ, если только знаешь въ чемъ онъ состоитъ. Этого знанія далеко еще не достаточно для его приложенія. Анализъ есть такая умственная операція надъ даннымъ вопросомъ, примѣняя которую мы всегда должны имѣть въ виду индивидуальныя, совершенно специфическія особенности этого вопроса. Если вы знаете только то, что анализъ переходитъ отъ частнаго къ общему, то этого знанія еще далеко недостаточно для того, чтобы вы могли, въ каждомъ данномъ случаѣ, примѣнить (конечно, съ успѣхомъ и съ пользой для дѣла) этотъ пріемъ мышленія. Мы не говоримъ уже о томъ, что примѣняя его съ успѣхомъ къ ариѳметическимъ вопросамъ, вы не въ состояніи будете его примѣнить къ вопросамъ геометрическимъ или психологическимъ; въ предѣлахъ даже одной и той же области вы въ одномъ случаѣ сдѣлаете цѣлесообразное примѣненіе этого пріема, а въ другомъ окажется, что вы совершенно безсильны предъ трудностями даннаго вопроса. Возьмите для примѣра задачу объ овцахъ, разобранную выше въ примѣчаніи: она требуетъ такой массы операцій, что, обладая даже весьма большою опытностью въ самомъ искусствѣ анализированія, можно стать втупикъ предъ трудностями этой задачи, повидимому вовсе не замысловатой. Есть задачи алгебраическаго характера, которыя подводятся подъ нѣкоторыя категоріи, изъ коихъ каждая требуетъ своего особеннаго аналитическаго пріема: таковы задачи, когда даны сумма и разность, сумма и частное двухъ чиселъ и т. д. Каждая изъ задачъ этого рода (конечно, въ случаѣ надобности) должна быть подвергаема анализу, послѣ чего долженъ быть установленъ и планъ ея рѣшенія. Но это важно вовсе не въ смыслѣ обученія ариѳметикѣ, какъ таковой, т. е. не въ смыслѣ обученія четыремъ дѣйствіямъ; это важно даже не въ смыслѣ пріобрѣтенія дѣтьми умѣнія и навыка въ рѣшеніи задачъ алгебраическаго характера, каковыхъ задачъ имъ жизнь можетъ быть не станетъ задавать; это важно только для пріученія дѣтей къ одной, весьма существенной въ развивательномъ отношеніи, мысли, — къ мысли о существованіи особенныхъ, спеціальныхъ искусственныхъ пріемовъ мышленія. Важно, чтобы учащійся на дѣлѣ, во-очію, убѣдился въ возможности и существованіи особенныхъ пріемовъ мышленія, при помощи которыхъ можно, что называется, „распутать“ задачу *на основаніи ея условій*, пользуясь при этомъ только неустаннымъ разсужденіемъ надъ этими условіями.

Легко видѣть, что при тѣхъ обязанностяхъ, которыя лежатъ на учащихъ и учащихся въ приготовительныхъ классахъ, и при тѣхъ незначительныхъ требованіяхъ, которыя могутъ быть съ нѣкоторымъ правомъ предъявлены къ умственному и діалектическому развитію учащихся приготовительныхъ классовъ,—легко видѣть, что при этихъ условіяхъ задачи изъ числа алгебраическихъ, какъ это замѣчено выше, въ этихъ классахъ и при первоначальномъ домашнемъ обученіи нецѣлесообразны ни съ практической, ни съ педагогической точки зрѣнія. Главнѣйшая цѣль обученія ариѳметикѣ въ этихъ случаяхъ должна состоять въ усвоеніи дѣтьми самыхъ простыхъ, очевидныхъ примѣненій четырехъ дѣйствій и усвоенія ими *обычныхъ способовъ* производства этихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами.

§ 10. Однимъ изъ основныхъ принциповъ современной дидактики, *какъ это выяснено выше, является принципъ наглядности всяческаго обученія, точно установленный Яномъ Коменскимъ и* Гейнрихомъ Песталоцци. Этотъ принципъ вообще подтверждается также и тѣми ученіями психологіи, которыя могутъ найти примѣненіе къ этому спеціальному вопросу педагогики, ибо хотя не всѣ наши знанія вытекаютъ изъ опыта, но всѣ знанія пріобрѣтаются нами *на-ряду* съ опытомъ, такъ сказать, рука объ руку съ нимъ (Кантъ). Однако само собою разумѣется, что въ каждой области обученія и воспитанія принципъ этотъ непремѣнно долженъ считаться со специфическими особенностями этой области и что справедливые выводы, къ которымъ этотъ принципъ приводитъ въ одномъ предметѣ обученія, къ другому предмету могутъ оказаться вполнѣ непримѣнимыми. Каждый предметъ обученія представляетъ случаи къ примѣненію этого важнѣйшаго въ дидактикѣ принципа; но въ разныхъ предметахъ эти случаи въ этомъ отношеніи различны: одинъ предметъ обученія требуетъ болѣе или менѣе постояннаго и непосредственнаго обращенія къ органу зрѣнія (письмо, рисованіе), другой—такого же обращенія къ органамъ зрѣнія и слуха, третій вовсе не допускаетъ вполнѣ нагляднаго разсмотрѣнія даннаго предмета (напр., логика), а четвертый прибѣгаетъ главнымъ образомъ къ воображенію, только изрѣдка пользуясь картинкою, чертежомъ, и т. д.

Въ главѣ II-й этого сочиненія мы уяснили себѣ характеръ тѣхъ ученій, съ которыми должна считаться ариѳметика. Мы видѣли, что разъ только понятія числа, единицы, счета, сложенія и величины существуютъ, то остальныя ученія вытекаютъ уже чисто-логическимъ путемъ изъ этихъ понятій и изъ системы счисленія. Въ то время какъ послѣдняя принадлежитъ къ ученіямъ, основаннымъ исключительно на нѣкоторомъ произвольномъ условіи, которое должно быть разъяснено, остальныя упомянутыя понятія принадлежатъ къ числу элементарныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленіямъ и составляемыхъ человѣческимъ умомъ на пути психологическомъ, а не логическомъ: умъ долженъ набраться извѣстной массы *опыта* для того, чтобы стало возможно образованіе этихъ понятій. Принявъ это во вниманіе, мы легко придемъ къ заключенію, что при обученіи ариѳметикѣ къ помощи наглядныхъ пособій безусловно необходимо прибѣгать въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) При обученіи счету, если мы имѣемъ дѣло съ дѣтьми, не обладающими вполнѣ этимъ умѣніемъ и не понимающими цѣли и особенностей этого процесса;

2) При выясненіи понятія о сложеніи;

3) При выясненіи понятія о величинѣ и ея измѣреніи и понятія о единицахъ мѣры.

Но такъ какъ система счисленія есть не иное что, какъ нѣкоторое изобрѣтеніе человѣческаго ума, которое вовсе само собою не разумѣется, то къ этимъ тремъ случаямъ присоединяется еще четвертый: наглядныя пособія необходимы также и

4) При выясненіи десятичной системы, если мы имѣемъ дѣло съ ребенкомъ, ея не знающимъ.

Счетъ, строго говоря, предполагается ариѳметикою извѣстнымъ, но при домашнемъ, а иногда и при школьномъ обученіи, приходится включить и это умѣніе въ число умѣній, которыя должны быть усвоены на урокахъ ариѳметики. При обученіи счету наилучшими наглядными пособіями, въ самомъ началѣ обученія, могутъ, кромѣ пальцевъ, служить числовыя фигуры, какія-нибудь однородные предметы (камешки, монеты, кубики), а при устномъ ознакомленіи съ десятичною системой наиболѣе цѣлесообразнымъ пособіемъ являются палочки, спички, такъ называемая „солома". Употребленіе классныхъ и торговыхъ счетовъ удобно только для разъясненія *письменнаго* обозначенія чиселъ помощью цыфръ и при обученіи *производству* сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ. Что же касается брусковъ для обозначенія десятковъ или досокъ для обозначенія сотенъ, то къ этимъ пособіямъ такъ называемаго ариѳметическаго ящика, на только что упомянутыхъ ступеняхъ обученія, лучше не обращаться. Дѣло въ томъ, что при письменномъ обозначеніи чиселъ и письменномъ же производствѣ дѣйствій эти пособія скорѣе искажаютъ, чѣмъ укрѣпляютъ вѣрное представленіе объ *условности* десятичной системы счисленія и услугахъ, которыя условность эта оказываетъ при письменномъ производствѣ дѣйствій; при обученіи же устному счету эти пособія ровно никакой полезной роли играть не могутъ, такъ какъ это обученіе сводится только къ усвоенію дѣтьми извѣстныхъ словъ и ихъ натуральнаго порядка и къ усвоенію ими понятія о самой цѣли этого процесса.

Вообще дѣло вовсе не въ изобиліи и разнообразіи часто далеко не остроумныхъ учебныхъ пособій, рекомендуемыхъ тѣмъ или инымъ педагогомъ: на занимающей насъ ступени обученія совершенно излишни счеты разныхъ видовъ и названій, доски съ дырочками и т. п.; а на слѣдующихъ эти пособія не нужны по той простой причинѣ, что дальнѣйшія ученія ариѳметики строятся на логическихъ основаніяхъ и притомъ съ помощью цѣлесообразнаго подбора задачъ и упражненій въ вычисленіи. Важное значеніе чаще всего имѣютъ, такъ сказать, естественныя учебныя пособія, и чѣмъ ближе какое-либо пособіе къ одному изъ естественныхъ, которыми человѣкъ пользовался испоконъ-вѣковъ, тѣмъ лучше. Лучшими изъ искусственныхъ пособій несомнѣнно являются: такъ называемый ариѳметическій ящикъ (безъ досокъ и брусковъ), торговые счеты, а для класснаго употребленія—торговые счеты большихъ противъ обыкновеннаго размѣровъ, шведскіе счеты, представляющіе собою только видоизмѣненіе торговыхъ, и наконецъ такъ называемая „солома".

Ариѳметическій ящикъ обыкновенно заключаетъ въ себѣ: а) 100 отдѣльныхъ кубиковъ; б) 30 или 40 прямоугольныхъ параллелепипедовъ, брусковъ; основаніе каждаго изъ нихъ равно основанію, а высота—удесятеренной высотѣ кубика; в) 5 или 6 прямоугольныхъ параллелепипедовъ, досокъ; основаніе каждой изъ нихъ въ сто разъ больше основанія кубика, а высота равна высотѣ его.—Изъ всѣхъ этихъ предметовъ полезны, какъ это выше уже замѣчено, только кубики; бруски же и доски не оказываютъ полезной помощи при обученіи ариѳметикѣ. Въ виду этого, школы, въ которыхъ нѣтъ ариѳметическаго ящика, строго говоря, и не должны бы покупать его въ магазинахъ учебныхъ пособій: всякій плотникъ или столяръ, по указаніямъ учащаго, а то и самъ учащій, могутъ приготовить сотню-другую кубиковъ.

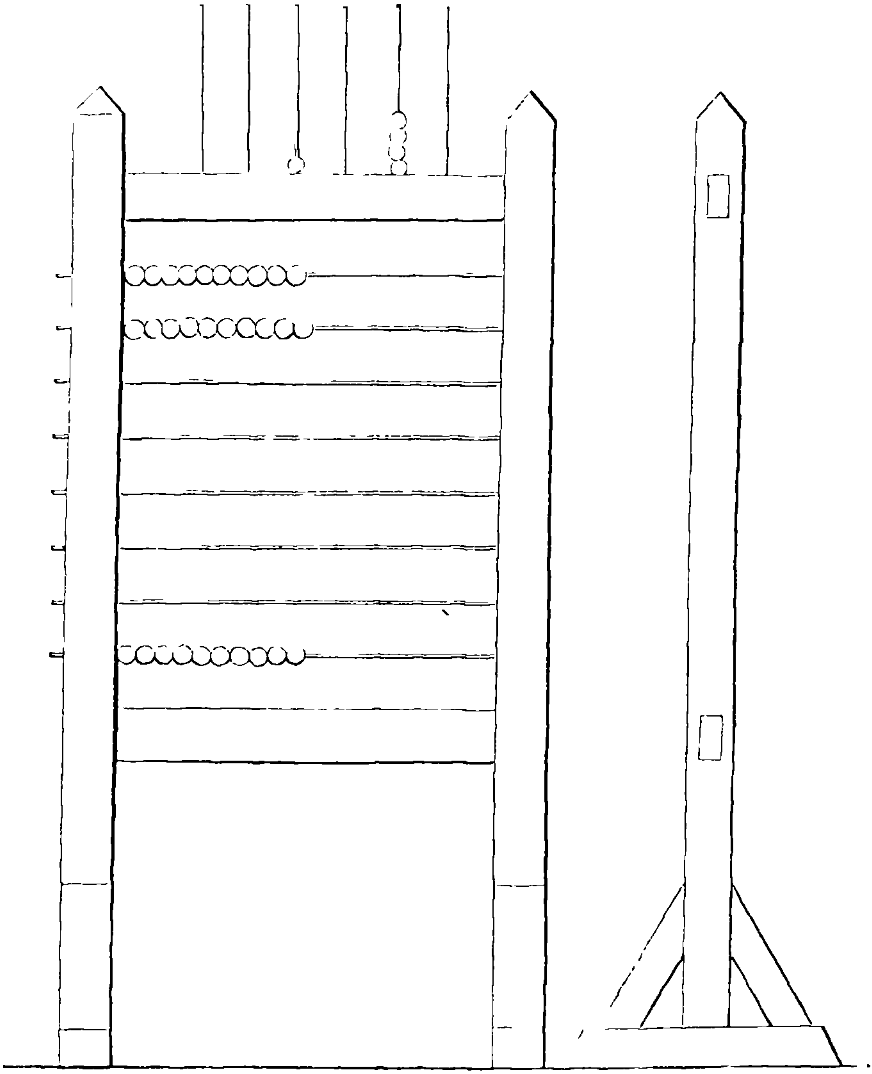
2) Торговые счеты извѣстны всѣмъ и каждому, а потому ихъ описаніе было бы излишнимъ. Должно только замѣтить, что больщій размѣръ счетовъ при классномъ обученіи не только желателенъ, но даже просто необходимъ для того, чтобы ученики, сидящіе далеко отъ доски, могли ясно различать отдѣльныя косточки счетовъ. Понятно, что тѣ школы, въ которыхъ нѣтъ такихъ счетовъ, но есть такъ называемые шведскіе, не должны пріобрѣтать непремѣнно торговые счеты. Но гдѣ нѣтъ ни тѣхъ, ни другихъ, тамъ желательно пріобрѣтеніе торговыхъ счетовъ преимущественно предъ шведскими, такъ какъ первые сравнительно дешевле и въ жизни употребительнѣе послѣднихъ *).

3) Шведскіе счеты (см. черт.) состоятъ изъ четыреугольной рамки, стоящей на ножкахъ. Въ ней продѣто восемь или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, на каждой изъ которыхъ свободно можетъ двигаться по десяти деревянныхъ шаровъ. Кромѣ того, на верхнемъ брускѣ рамки находятся нѣсколько вертикальныхъ проволокъ, на которыя могутъ быть надѣты отдѣльные шары, имѣющіеся при счетахъ. Шведскіе счеты, равно какъ и торговые, не принадлежатъ къ числу тѣхъ учебныхъ пособій, которыя могутъ быть приготовлены самимъ учителемъ, въ особенности, если онъ не знаетъ столярнаго мастерства; но плотникъ или столяръ, при указаніяхъ учащаго, можетъ изготовить раму со штативомъ, или безъ онаго, которая составляетъ остовъ этого пособія. Вмѣсто шаровъ, если ихъ некому выточить, можно прибѣгнуть къ полымъ цилиндрамъ съ закругленными краями; проволока можетъ быть всегда куплена для счетовъ по болѣе или менѣе дешевой цѣнѣ, и соединеніе всѣхъ этихъ частей въ одно цѣлое не пред-

---

*) До какого увлеченія иногда доходятъ изобрѣтатели различныхъ учебныхъ пособій, можно видѣть изъ слѣдующаго извѣстнаго въ исторіи педагогики факта. По мнѣнію Песталоцци, квадратъ есть лучшее учебное пособіе, какое только можно себѣ представить. Оно, по его мнѣнію, можетъ служить цѣлямъ обученія рисованію, письму, чтенію, геометріи и ариѳметикѣ; теперь квадрату не приписывается подобнаго значенія, но самъ Песталоцци выразился объ этомъ своемъ изобрѣтеніи слѣдующимъ образомъ: „если жизнь моя имѣетъ какую либо цѣну, то только благодаря тому, что я положилъ квадратъ въ основу воззрѣній, которыми досель никто не пользовался“. Комментаріи, конечно, излишни.

ставить трудностей для человѣка, даже и не особенно искуснаго въ мастерствахъ.



4) Что касается, наконецъ, „соломы“, то это пособіе состоитъ изъ сотни-другой палочекъ одинаковой длины и можетъ оказать неоцѣненныя услуги при прохожденіи нумераціи и разъясненіи самаго производства дѣйствій сложенія и вычитанія двузначныхъ

чиселъ. Лучше всего, если палочки имѣютъ въ длину около полуаршина, а толщину не менѣе толщины карандаша. Конечно, изготовленіе этого учебнаго пособія для учителя не представитъ уже никакихъ затрудненій. Вмѣсто выструганныхъ или выточенныхъ палочекъ можно довольствоваться (въ мѣстностяхъ, гдѣ растутъ камыши или растенія съ подходящими стволами) палочками естественными (палочками изъ ракитника, липы, вербы, осины).

Выше указаны только случаи, когда употребленіе наглядныхъ пособій необходимо. Во избѣжаніе недоразумѣній укажемъ случаи, когда оно только дозволительно, а также случаи, когда оно даже вовсе недозволительно по своей безполезности и по прямому вреду, который можетъ быть ими оказанъ на умъ учащихся. На первомъ планѣ стоятъ въ числѣ случаевъ, когда прибѣгать къ нагляднымъ пособіямъ дозволительно, случаи, требующіе выясненія нѣкоторыхъ понятій, для которыхъ оказывается почему-либо недостаточнымъ рядъ задачъ, но требуется помощь наглядныхъ пособій; такіе случаи могутъ при недостаточномъ развитіи класса представиться при выясненіи цѣли и смысла ариѳметическихъ дѣйствій. Но при этомъ наглядныя пособія и, если можно такъ выразиться, *наглядныя дѣйствія* должны употребляться исключительно для *выясненія цѣли*, *логическаго смысла* дѣйствія, но не для опредѣленія ихъ результата. Далѣе дозволительно употребленіе наглядныхъ пособій при выясненіи понятія о дроби, какъ о части цѣлаго и о взаимномъ соотношеніи простѣйшихъ дробей: $^1/_2$, $^1/_4$ и $^3/_4$. За-то отнюдь недозволительно употребленіе наглядныхъ пособій въ случаяхъ чисто-логическаго характера; оно недозволительно тогда потому, что оно нецѣлесообразно, вредя надлежащему усвоенію дѣтьми ученій этого рода и давая имъ извращенное представленіе объ этихъ ученіяхъ. Все то, чему по части ученій ариѳметики человѣкъ не можетъ научиться самъ собою, что требуетъ особенной, специфической работы мысли, чаще всего не допускаетъ также и при обученіи дѣтей употребленія наглядныхъ пособій, и надежды на то, что наглядныя пособія въ этомъ случаѣ могутъ оказать особенныя услуги, чаще всего оказываются напрасными. Возьмите хотя бы ученіе объ умноженіи и дѣленіи на дробь, о дѣлителяхъ, о наименьшемъ кратномъ, о періодическихъ дробяхъ; какія услуги могутъ быть при прохожденіи этихъ статей оказаны наглядными пособіями и какія именно изъ этихъ послѣднихъ могутъ быть при этомъ употребляемы? Очевидно, что принципъ наглядности обученія не всегда примѣнимъ въ прямомъ смыслѣ этого принципа. Выше указаны, между прочимъ тѣ случаи, когда необходимо и когда дозволительно прибѣгать къ нагляднымъ пособіямъ; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ надо пользоваться цѣлесообразнымъ подборомъ задачъ и упражненій и помнить изреченіе, служащее эпиграфомъ къ этому сочиненію и къ обѣимъ частямъ нашего „Методическаго Сборника ариѳметическихъ задачъ для ср. уч. зав.". Смыслъ этого изреченія заключается въ томъ, что учащій долженъ всегда ставить учащагося въ такія условія, при которыхъ умъ этого послѣдняго былъ бы возбуждаемъ къ болѣе или менѣе самостоятельной работѣ въ данномъ направленіи. Гдѣ къ этому не ведутъ наглядныя пособія, тамъ надо прибѣгнуть къ задачамъ и примѣрамъ; гдѣ къ этому не ведутъ задачи и примѣры, тамъ учитель долженъ прибѣгнуть къ катехизаціи. Гдѣ и катехитическая форма обученія ничего не можетъ сдѣлать, тамъ надо примириться съ необходимостью простого выясненія учащимся даннаго неподатливаго ученія въ краткой и возможно простой формѣ. Впрочемъ, катехитической формѣ обученія при этомъ не должно быть приписываемо то значеніе, котораго она не имѣетъ, а односторонняго, исключительнаго пользованія этою формою должно даже избѣгать по причинамъ, которыя изложены ниже.

§ 11. Относительно катехитической формы обученія существуютъ нѣкоторые вкоренившіеся въ сознаніе многихъ изъ учителей, въ особенности начальныхъ, такіе предразсудки, отъ которыхъ учащій по возможности долженъ освободиться, если онъ отъ нихъ не совершенно свободенъ.

Встарину обученіе ариѳметикѣ велось такъ, что весь трудъ при этомъ обученіи падалъ почти исключительно на учащагося: это имѣло мѣсто какъ при обученіи, основанномъ на выучиваніи наизусть текста учебника, такъ и при излагательной (акроаматической) формѣ обученія, основанной на словесномъ изложеніи учителемъ ученій этого предмета, которое похоже скорѣе на неумѣстное чтеніе лекцій, чѣмъ на дѣйствительное обученіе дѣтей. Нѣтъ сомнѣнія, что акроаматическая форма обученія все-таки выше той формы его, которая зиждется на самостоятельномъ, безъ всякой со стороны учителя помощи, выучиваніи дѣтьми наизусть параграфовъ учебника. Но во всякомъ случаѣ результаты обученія въ обоихъ случаяхъ поражаютъ крайнею незначительностью какъ въ матеріальномъ, такъ и въ формальномъ отношеніи. Это, конечно, вполнѣ естественно съ психологической точки зрѣнія; столь же естественно, что отъ указанныхъ формъ обученія пришлось отказаться. Но къ сожалѣнію—вообще нѣтъ и не можетъ быть такой формы обученія, которая могла бы претендовать на исключительное господство въ школѣ! Даже такъ называемая катехитическая форма обученія со всѣми ея разновидностями, — форма, которая пользуется особеннымъ сочувствіемъ въ новѣйшихъ курсахъ педагогики, — далеко не можетъ претендовать на безусловную и не допускающую исключеній примѣнимость ея при обученіи ариѳметикѣ. Въ недавнее время несомнѣнныя достоинства этой формы обученія до такой степени были преувеличены, а предѣлы ея примѣненія до такой степени расширены, что не безполезно сдѣлать критическую оцѣнку случаевъ, когда катехизація мало или вовсе не примѣнима при обученіи ариѳметикѣ.

A priori понятно, что всякое увлеченіе *одною только формою* обученія неизбѣжно ведетъ за собою крайнюю искусственность уроковъ и чрезмѣрную, ничѣмъ не вознаградимую, трату золотого времени. Понятно поэтому также и то, что изъ ста случаевъ исключительнаго примѣненія катехитической формы обученія не менѣе девяноста представляютъ собою ничѣмъ неоправдываемую, безсодержательную трату времени, не ведущую ни къ какимъ сколько-нибудь цѣннымъ результатамъ.

Прежде всего укажемъ въ курсѣ ариѳметики цѣлую статью, при прохожденіи которой катехизація можетъ быть только контролирующею, повторительною: такова статья о нумераціи вмѣстѣ со статьею о цыфрахъ. Точно также неумѣстна болѣе или менѣе усердная катехизація въ тѣхъ случаяхъ, когда данное ученіе заключаетъ въ себѣ большую или меньшую условность, какое нибудь произвольное соглашеніе, вовсе не лежащее въ самой природѣ предмета, какую нибудь логическую тонкость, которая можетъ быть учащимся только тогда понята, когда на нее вполнѣ ясно и опредѣлительно указалъ учащій.

Но даже и въ случаяхъ, когда катехизація дозволительна, учащій обязательно долженъ, пользуясь своимъ естественнымъ чутьемъ и не обращая вниманія ни на какіе педагогическіе рецепты, пойти по самому естественному, самому прямому пути уясненія учащемуся интересующаго его въ данную минуту ученія; онъ не долженъ думать, что окольные пути мышленія дѣтямъ почему-то доступнѣе прямого. Отступленія отъ прямого пути дозволительны только тогда, когда они служатъ цѣлямъ развитія въ дѣтяхъ рѣчи; но и въ этомъ случаѣ на отступленіе отъ прямого пути должно смотрѣть именно какъ на отступленіе, не возводя его въ правило и стараясь достигнуть развитія рѣчи иными способами, не увлекаясь болтовнею, правда, развивающею рѣчь учащаго, но за-то убивающею самодѣятельность дѣтей. Обученіе, пока оно ведется живо и разумно, не допускаетъ шаблоно-образнаго примѣненія только одной формы обученія. Формы обученія должны чередоваться, и слѣдованіе только одной изъ нихъ вредно отзывается не только на матеріальномъ содержаніи урока, но также и на формальномъ, развивательномъ его значеніи.

При малѣйшемъ злоупотребленіи катехизаціею замѣчаются слѣдующія явленія: 1) отсутствіе самодѣятельности учащихся; 2) надежда ихъ на цѣлый рядъ вопросовъ; 3) большая или меньшая неспособность ихъ къ отвѣтамъ безъ ряда вопросовъ; 4) неизбѣжность подсказывающихъ вопросовъ, разъ катехитическая форма получила преобладающее значеніе при обученіи, и 4) въ результатѣ несоотвѣтствующая достигнутому знанію усталость учителя и учащихся.

Къ счастію среднихъ учебныхъ заведеній, учащіе въ нихъ не столь склонны къ увлеченіямъ катехитическою формою обученія, какъ это замѣчается у нѣкоторыхъ учителей начальныхъ школъ. Поэтому вышеизложенное рекомендуется особенному вниманію учащихъ въ приготовительныхъ классахъ и учительницъ женскихъ учебныхъ заведеній, хотя пишущему эти строки небезизвѣстно, что чрезмѣрное увлеченіе катехитическою формою не есть повсемѣстное явленіе.—Думаемъ, что на насъ не посѣтуютъ и тѣ изъ помянутыхъ учителей и учительницъ, которымъ вышеизложенное извѣстно изъ собственнаго опыта или другихъ источниковъ. Еще Гёте замѣтилъ, что „когда желаешь говорить о вещахъ, которыя считаешь неизвѣстными, неизбѣжно скажешь также и что-нибудь извѣстное".

Наилучшею формою обученія является форма смѣшанная, но лишь постолько, посколько она безыскусственна и неодностороння, посколько она является результатомъ творчества учащаго въ связи съ выработанными имъ педагогическими навыками и присущимъ каждому учащему педагогическимъ тактомъ. Перескакивать сознательно отъ одной формы къ другой безъ всякой къ тому надобности, конечно, тоже не слѣдуетъ. Но одно надо помнить, а именно, что имѣешь дѣло съ живыми дѣтьми, которыя не знаютъ никакихъ педагогическихъ рецептовъ и которыя должны быть обучаемы живо и съ интересомъ къ дѣлу со стороны учащаго. Учитель, самъ не интересующійся каждымъ отдѣльнымъ урокомъ, не можетъ внушить къ нему интереса въ учащихся; шаблоны же и рецепты интереса не могутъ возбуждать ни въ учащемъ, ни тѣмъ менѣе въ учащемся, хотя бы форма обученія была катехитическая или даже смѣшанная.

§ 12. Въ то время какъ предыдущій параграфъ имѣетъ въ виду преимущественно обученіе первоначальное домашнее и школьное—въ первомъ и вообще низшихъ классахъ учебныхъ заведеній, нижеслѣдующій трактуетъ объ учебникѣ и его роли при обученіи, т. е., о вопросѣ, интересномъ для учащаго преимущественно во второмъ и въ третьемъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, ибо употребленіе учебника при первоначальномъ обученіи невозможно, а въ первомъ и даже частью во второмъ классахъ—не всегда желательно. Для того, чтобы употребленіе учебника было возможно, необходимо имѣть дѣло съ учащимися, находящимися на болѣе высокой степени умственнаго развитія, чѣмъ на какой находятся всѣ учащіеся приготовительныхъ училищъ и многіе ученики перваго класса ср. уч. зав.

Прежде чѣмъ заняться ролью учебника въ классѣ и при домашнемъ обученіи, мы позволимъ себѣ вспомнить о той роли, которую учебникъ игралъ въ сравнительно недавнее время, когда учебникъ былъ фундаментомъ всего преподаванія.

Въ такъ называемое „доброе" старое время, когда свѣтъ здравыхъ педагогическихъ идей еще не успѣлъ къ намъ проникнуть даже преломленнымъ чрезъ призму нашего часто рабскаго поклоненія всяческимъ иностраннымъ авторитетамъ,—въ „доброе" старое время учебникъ ариѳметики игралъ ужасную роль мучителя малолѣтнихъ, не обладавшихъ огромною памятью, почти необходимою при тогдашнемъ преподаваніи для дословнаго усвоенія учебника наизусть. Тогда всѣ предметы обученія усваивались наизусть, а содержаніе учебника ариѳметики - и подавно. Вся разница между требованіями, предъявлявшимися различными учителями въ то время, заключалась почти только въ *количествѣ* „отмѣченнаго", а отмѣчали подлежащее усвоенію въ данномъ (по большей части довольно краткомъ) учебникѣ—почти всѣ преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній. Пресловутое „отъ сихъ до сихъ поръ", какъ это ни странно въ настоящее время, принадлежитъ къ числу тѣхъ фактовъ недавней сравнительно старины, которые, къ сожалѣнію, не могутъ подлежать ни малѣйшему сомнѣнію. Но съ проникновеніемъ нѣкоторыхъ лучей свѣта въ темное царство, которое въ то время представляли собою пріемы *класснаго* преподаванія всѣхъ предметовъ среднеобразовательнаго курса, а курса ариѳметики въ особенности,—съ проникновеніемъ лучей свѣта въ это темное царство возникло и у преподавателей ариѳметики смутное сознаніе въ необходимости нѣкоторыхъ реформъ въ дѣлѣ обученія. Къ тому же времени относится почти не практиковавшееся дотолѣ объясненіе учителемъ всѣхъ или нѣкоторыхъ статей курса, чтеніе „лекцій" въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, а также дозволеніе учащимся отвѣчать урокъ такъ называемыми „своими словами". Вскорѣ всяческіе учебники въ прежнемъ значеніи слова были почти совершенно дискредитованы,—въ особенности „сухіе" и „казенные", а таковыми въ то время были всѣ учебники. Составители тоже пошли на встрѣчу назрѣвшему недовольству „казенщиной", и къ этому-то времени именно и относится появленіе въ свѣтъ всякаго рода руководствъ, болѣе самоучительнаго, чѣмъ учебнаго рода, а равно составленіе учителями подробнѣйшихъ, чаще всего весьма слабыхъ, „записокъ" по своимъ предметамъ и также нѣкоторое, весьма отрадное въ основѣ своей, оживленіе учебной и педагогической литературы. Составители учебниковъ въ „новомъ" духѣ постарались прежде всего освободиться отъ слога своихъ предшественниковъ и замѣнить всякія „ибо", „сей", „оный", „дабы" и т. п. соотвѣтствующими имъ „литературными" реченіями; кромѣ того, они позаботились о внесеніи въ учебники повѣствовательнаго элемента, отъ чего, по ихъ мнѣнію, учебникъ дѣлался будто бы доступнѣе дѣтскому пониманію.

Но при этомъ, вполнѣ законномъ, стремленіи къ лучшей постановкѣ дѣла обученія въ среднихъ и др. учебныхъ заведеніяхъ, къ сожалѣнію, забыто было одно, а именно, что вся сила здраваго въ педагогическомъ отношеніи преподаванія заключается вовсе не въ томъ, какимъ слогомъ (новымъ ли, или старымъ, „казеннымъ") изложенъ учебникъ, а въ томъ—какъ именно ведется самое преподаваніе въ *классѣ*, т. е. въ томъ, учится ли *весь* классъ на урокахъ по данному предмету обученія, или же этому послѣднему учатся только наиболѣе способные и наиболѣе старательные ученики. При этомъ забыто было и то, что учебникъ, по самому существу своему, долженъ быть кратокъ и точенъ по изложенію и, вмѣстѣ, полонъ по содержанію, и что онъ можетъ играть только роль, такъ сказать, регулятора классныхъ занятій; что статьи учебника должны усваиваться учащимися послѣ того, какъ уже ими съ помощью учителя сознательно проработано въ классѣ содержаніе этой статьи; что учебникъ долженъ представлять собою только синтезъ всѣхъ ученій даннаго предмета, изложенныхъ въ немъ по возможности сжато и, если того требуетъ предметъ, то синтетически же. Этотъ взглядъ на сущность и цѣли учебника, къ сожалѣнію, и доселѣ усвоенъ не всѣми составителями многочисленныхъ учебныхъ руководствъ и пособій и не всѣми гг. преподавателями.

Коснувшись этого вопроса, мы наталкиваемся на одинъ изъ многихъ случаевъ, въ тысяча первый разъ доказывающихъ, что вполнѣ справедливый протестъ противъ формы, въ которой проявляется та или другая дѣйствительная потребность школы, несправедливо распространяется и на самую эту потребность. Такое легко объяснимое, но ничѣмъ не оправдываемое распространеніе несочувствія формѣ на самую сущность дѣла привело, какъ извѣстно, къ многимъ далеко не глубокомысленнымъ педагогическимъ системамъ, за которыми можно признать лишь ту заслугу, что онѣ были результатомъ желанія ихъ изобрѣтателей освободить человѣчество отъ несимпатичныхъ сторонъ и формъ современнаго имъ воспитанія и обученія. Дабы не слишкомъ отдалиться отъ ближайшаго предмета этой работы, напомнимъ читателю пресловутую методу „изученія" чиселъ, которая создана, главнымъ образомъ, потому, что несочувствіе къ несимпатичнымъ пріемамъ, практиковавшимся дотолѣ при обученіи дѣтей производству четырехъ дѣйствій надъ числами, было, безъ всякаго къ тому основанія, перенесено на самую сущность ариѳметики, т. е. на самыя ариѳметическія дѣйствія, которыя, конечно, ни въ чемъ неповинны предъ тѣми или другими вполнѣ законными требованіями педагогики.

Прежде чѣмъ перейти къ вопросу о формѣ употребленія учебника ариѳметики, мы должны принять слѣдующія положенія, которыя въ доказательствахъ, надѣемся, не нуждаются:

1) Учебникъ ариѳметики долженъ быть полонъ по содержанію, точенъ и кратокъ по *изложенію* и во всѣхъ своихъ частяхъ вполнѣ согласенъ какъ съ научными данными, такъ и съ требованіями логики.

2) Подробнымъ разъясненіямъ различныхъ ученій въ учебникѣ поэтому не мѣсто; за-то тѣмъ умѣстнѣе они въ классѣ, при непосредственномъ *воздѣйствіи учащаго на умы учащихся*.

3) При классномъ преподаваніи долженъ работать весь классъ.

4) Классная проработка учебнаго матеріала должна отличаться ясностью и живостью понятій и представленій, возбуждаемыхъ и вырабатываемыхъ въ умахъ учащихся.

5) *Регуляторомъ классной работы долженъ* быть учебникъ, котораго руководящія идеи никогда не должны забываться учащимъ, дабы впослѣдствіи учебникъ могъ быть не только понятъ, *но и вполнѣ* усвоенъ учащимися.

Усвоеніе же учащимися учебника не только должно быть въ большинствѣ случаевъ контролируемо учащимъ, но должно вестись подъ непосредственнымъ его руководствомъ. Ибо въ противномъ случаѣ все образовательное значеніе учебника сводится къ нулю, и учебникъ является только весьма мало подходящимъ учебнымъ пособіемъ для пропустившаго тотъ или иной урокъ учащагося. Къ сожалѣнію, *въ настоящее время понятія объ учебникѣ*, руководствѣ, самоучителѣ и курсѣ сильно смѣшались другъ съ другомъ, такъ что рѣдко дѣлается рѣзкое разграниченіе между этими, строго говоря, различными понятіями: курсъ имѣетъ въ виду цѣли научныя, самоучитель—взрослаго читателя, руководство - учителя, а учебники—учащагося, и притомъ учащагося подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя. Безъ учителя учебникъ чаще приноситъ вредъ, чѣмъ *пользу, разочаровывая учащагося въ* его умственныхъ силахъ и внушая ему нелюбовь къ предмету.

Учебникъ не можетъ быть для учащагося I-го, II-го, III-го классовъ книгою *для чтенія*; читать учебникъ такъ, какъ мы читаемъ газету или романъ, воспитанники этихъ классовъ не въ состояніи, да и вообще кто *читаетъ* учебникъ, кромѣ лицъ, вовсе не нуждающихся въ его матеріальномъ содержаніи, кромѣ тѣхъ, для кого онъ не есть собственно учебникъ? Разъ учебникъ не можетъ и не долженъ быть читаемъ, то ясно, что въ немъ умѣстно только лишь то, что подлежитъ непремѣнному усвоенію; хорошъ, истинно хорошъ, только тотъ учебникъ, изъ котораго нельзя вычеркнуть не только ни одной статьи, не только ни одного параграфа, но даже ни одной строки, ни одного слова, и къ которому также нельзя прибавить ни одного параграфа, ни одной строки и ни одного слова. Большинство же современныхъ учебниковъ, къ сожалѣнію, составлено такъ, какъ будто учащійся приступитъ къ ихъ чтенію безъ надлежащей классной подготовки и какъ будто книга можетъ замѣнить учителя. Въ томъ-то и состоитъ одна изъ важнѣйшихъ, главнѣйшихъ, существеннѣйшихъ задачъ и одно изъ громадныхъ преимуществъ классныхъ занятій, что дѣти, послѣ основательной проработки въ классѣ какой-либо статьи курса, могутъ сознательно, толково, съ разумѣніемъ усвоить себѣ относящіеся къ этой статьѣ параграфы учебника, что всякое мѣсто, всякое слово учебника можетъ быть для нихъ не только понятно, но и необходимо, какъ резюме, какъ послѣдніе штрихи, какъ окончательная редакція уже ранѣе усвоенныхъ ими, но еще не приведенныхъ въ стройную и строгую систему, еще, такъ сказать, не окристаллизованныхъ знаній и умѣній.

Роль учебника и задача его заключаются именно въ приведеніи въ систему усвоенныхъ дѣтьми, подъ руководствомъ учителя и безъ помощи учебника, умѣній, познаній, понятій и логическихъ навыковъ. Что касается способа проработки курса по учебнику, то подробная о немъ рѣчь будетъ впереди, въ главѣ V-ой: здѣсь же умѣстно только замѣтить, что вообще учебникъ долженъ быть читаемъ на спеціально для того назначенныхъ урокахъ, въ классѣ, въ присутствіи и подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, при разъясненіяхъ со стороны читающаго, слушателей и, въ случаѣ надобности, самого учащаго. Но читать такимъ образомъ можно только тѣ статьи учебника, которыхъ матеріальное содержаніе дѣтьми усвоено вполнѣ основательно и съ полнымъ разумѣніемъ. Цѣль же этого чтенія очевидна: она заключается въ приданіи ранѣе пріобрѣтеннымъ знаніямъ и умѣніямъ учащагося вполнѣ законченной, логически строгой и архитектонически прочной и изящной формы. При этомъ учебникъ не только долженъ быть читаемъ, но также изучаемъ, и текстъ его не только долженъ быть изученъ, но также совершенно усвоенъ учащимися. Если дѣло усвоенія учебника поставлено учащимъ надлежащимъ образомъ, то легко достигнуть того, чтобы многіе параграфы учебника были усвоены (не вызубрены, а усвоены) учащимися почти слово-въ-слово. О важности такого усвоенія рѣчь будетъ впереди; здѣсь же умѣстно замѣтить, что въ дословномъ усвоеніи текста учебника не только нѣтъ ничего предосудительнаго, но даже ничего напоминающаго практиковавшееся въ старину долбленіе и зубреніе, если только курсъ построенъ надлежащимъ образомъ.

§ 3. Постараемся теперь объяснить—почему дѣтей слѣдуетъ прежде всего научить устному счету именно до двадцати включительно, а не до десяти, тридцати или иного какого предѣла. Изъ числительныхъ именъ указаннаго выше предѣла (отъ одного до двадцати включительно) только первыя десять суть слова первообразныя (не производныя). Что же касается числительныхъ именъ отъ одиннадцати до двадцати включительно, то хотя ихъ этимологическое происхожденіе въ русскомъ языкѣ и подчиняется извѣстному единообразному закону, но однако слова „одиннадцать“, „двѣнадцать“ и т. д. до „девятнадцати“ включительно суть слова все-таки болѣе или менѣе новыя, и при томъ законъ образованія ихъ не имѣетъ ничего общаго, съ этимологической точки зрѣнія, съ закономъ образованія словъ, обозначающихъ числа большія девятнадцати. Въ русскомъ, да и во всѣхъ славянскихъ языкахъ, въ составъ именъ числительныхъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно входитъ предлогъ „на“, придающій словамъ этимъ довольно специфическій характеръ, который долженъ быть усвоенъ учащимся, и игнорировать эту особенность сказанныхъ числительныхъ, конечно, не слѣдуетъ *). При усвоеніи этихъ числительныхъ именъ учащійся на первыхъ порахъ вовсе не обязанъ разбивать каждое изъ соотвѣтствующихъ даннымъ словамъ чиселъ на одинъ десятокъ и столько-то единицъ. Это знаніе должно явиться результатомъ дальнѣйшихъ занятій его, и этого результата вовсе не слѣдуетъ добиваться на занимающей насъ ступени обученія счету.

Существуетъ мнѣніе, будто знаніе однихъ только числительныхъ именъ въ ихъ натуральномъ порядкѣ не имѣетъ съ дидактической точки зрѣнія никакого значенія. Это мнѣніе далеко не основательно. Чисто словесное знаніе числительныхъ именъ, конечно, недостаточно для дальнѣйшаго прохожденія курса ариѳметики; но оно уже сильно облегчаетъ учителю переходъ отъ счета исключительно словеснаго, отъ болѣе или менѣе безсодержательнаго произнесенія дѣтьми числительныхъ именъ въ извѣстномъ

*) Впрочемъ, и въ другихъ европейскихъ языкахъ слова для обозначенія чиселъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, большею частью суть слова болѣе или менѣе особенныя, не представляющія аналогіи ни съ письменнымъ обозначеніемъ соотвѣтствующихъ чиселъ помощью т. наз. арабскихъ цифръ, ни съ остальными именами числительными, обозначающими числа, большія девятнадцати. На исключеніяхъ здѣсь, конечно, не для чего останавливаться. Но за-то на одной особенности русскихъ числительныхъ именъ этой области чиселъ необходимо остановиться. Мы говоримъ о томъ, что въ то время, какъ въ словесныхъ обозначеніяхъ чиселъ большихъ двадцати названіе единицъ высшаго разряда предшествуетъ названію единицъ разряда низшаго, въ словахъ „одиннадцать, двѣнадцать“ и т. д. до „девятнадцати“ включительно названіе единицъ предшествуетъ названію десятковъ.

порядкѣ, къ счету вполнѣ сознательному. Въ раннемъ дѣтствѣ человѣкъ научается произносить слова, не понимая первоначально ихъ значенія, и только впослѣдствіи онъ научается связывать съ каждымъ словомъ болѣе или менѣе содержательное представленіе. То же справедливо и относительно числительныхъ именъ, и отрицать естественный ходъ развитія человѣческаго ума только потому, что онъ начинается съ безсознательнаго, было бы неблагоразумно. Поэтому учащій, убѣдившись въ томъ, что дѣти обладаютъ умѣніемъ „механически“ считать, этимъ долженъ очень дорожить, такъ какъ это его освобождаетъ отъ очень трудной и черной работы усвоенія дѣтьми словъ. Если дѣти не знакомы съ механическимъ счетомъ, то ихъ надо научить уже прямо счету сознательному, сначала въ указанныхъ выше предѣлахъ. Въ обоихъ случаяхъ обязательно должно пользоваться наглядными пособіями: кубиками, спичками и болѣе или менѣе простыми значками, изображаемыми учителемъ на классной доскѣ, и въ случаѣ надобности—дѣтьми въ тетрадяхъ или на грифельныхъ доскахъ.

Порядокъ упражненій въ устномъ счетѣ можетъ быть слѣдующій: при классномъ обученіи упражненія въ хоровомъ счетѣ знаковъ, изображаемыхъ учителемъ, упражненіе поочередно каждаго изъ учащихся въ счетѣ безъ участія остальныхъ, и упражненія въ обратномъ счетѣ; при одиночномъ же обученіи важнѣе всего упражненіе въ счетѣ какихъ либо предметовъ. Только относительно т. наз. обратнаго счета должно замѣтить слѣдующее. Обратный счетъ прежде всего вовсе не счетъ и сводится лишь къ называнію числительныхъ именъ, начиная съ даннаго изъ нихъ, въ порядкѣ обратномъ натуральному. Къ обратному счету почти никогда не приходится прибѣгать, и вмѣсто него гораздо естественнѣе и съ гораздо большею выгодою можно прибѣгнуть къ дѣйствію вычитанія. Дѣйствительно, пусть у насъ на столѣ девять перьевъ и мы хотимъ узнать, сколько останется, если изъ нихъ возьмутъ напр. четыре штуки; никто не станетъ дѣлать этого помощью такъ называемаго обратнаго счета, ибо, прибѣгнувъ къ нему, мы должны не только произносить слова: „девять, восемь, семь“ и т. д., но въ то же время также и не упускать изъ виду числа отдѣленныхъ предметовъ, что сдѣлать въ одно и то же время не только трудно, но при большомъ количествѣ отсчитываемыхъ предметовъ даже и невозможно. Единственный случай, когда обратный счетъ можетъ оказать услугу, это случай, когда, зная какое число какого мѣсяца сегодня, требуется опредѣлить—какое число было, напр., въ среду, въ четвергъ или другой какой день на прошлой недѣлѣ. Но услуга эта именно и доказываетъ, что процессъ, называемый обратнымъ счетомъ, на самомъ дѣлѣ не есть какой либо видъ дѣйствительнаго, т. наз. прямого, счета, а лишь процессъ чисто словесный. Таковымъ онъ долженъ быть также и при обученіи счету: упражненія въ называніи числительныхъ именъ въ порядкѣ обратномъ ихъ натуральной послѣдовательности могутъ служить либо для провѣрки —насколько усвоены числительныя имена, либо же для упражненія ихъ въ этомъ именно направленіи.

Должно замѣтить, что при упражненіи дѣтей въ счетѣ иногда можно задавать задачи на сложеніе съ тѣмъ, чтобы дѣти рѣшали ихъ непосредственнымъ счетомъ. Но при этомъ должно брать числа болѣе или менѣе крупныя, совершенно игнорируя способы сложенія, какъ таковые. Кромѣ того, не должно забывать, что фабула задачъ этого рода должна быть абсолютно проста и не должна заключать ни условныхъ выраженій, ни какихъ либо аналитическихъ требованій. Въ особенности дозволительно обращаться къ задачамъ при домашнемъ обученіи, гдѣ гораздо большій просторъ можетъ быть отведенъ употребленію наглядныхъ пособій и инструментальному счету.

Но не должно при этомъ забывать, что цѣлью всѣхъ подобныхъ упражненій должно быть исключительно усвоеніе дѣтьми процесса счета, а не какого либо иного умѣнія.

Есть еще одинъ видъ упражненія въ счетѣ, состоящій въ томъ, что дѣтямъ предлагается рядъ задачъ слѣдующаго типа: „въ комнатѣ было 8 человѣкъ; потомъ пришелъ еще одинъ; затѣмъ еще одинъ, да еще одинъ. Сколько послѣ этого стало человѣкъ въ комнатѣ?“ Упражненія этого рода не заслуживаютъ сочувствія по двумъ причинамъ: 1) это—упражненія въ прибавленіи единицъ, и 2) эти упражненія крайне однообразны, скучны и въ стилистическомъ отношеніи не совершенно безупречны и не довольно естественны. Учитель долженъ упражнять дѣтей на занимающей насъ ступени, повторяемъ, только въ счетѣ, стараясь по возможности разнообразить эти упражненія. Вводить повѣствовательный элементъ въ эти упражненія не слѣдуетъ еще и потому, что практическая жизнь предлагаетъ задачи счета вовсе не въ повѣствовательной формѣ. Если бы на это замѣтили, что повѣствовательный элементъ служитъ дѣлу развитію въ дѣтяхъ умѣнія владѣть рѣчью, то на это можно возразить, что учителю и безъ этихъ задачъ вполнѣ возможно развивать рѣчь ребенка на каждой степени курса вообще и на интересующей насъ въ частности. Естественность и простота—вотъ тѣ требованія, которыхъ не имѣетъ права забывать учитель на всѣхъ ступеняхъ обученія, а задачи съ условіями для упражненія въ счетѣ, конечно, не удовлетворяютъ этимъ требованіямъ.

§ 4. Когда устный счетъ дѣтьми болѣе или менѣе основательно усвоенъ, учитель можетъ приступить къ ознакомленію ихъ съ такъ называемыми арабскими цыфрами. Длинныхъ разговоровъ о цѣли обозначенія чиселъ цыфрами, конечно, вести не слѣдуетъ:

дѣти очень легко усвоиваютъ себѣ значеніе записи и пользу установленія условнаго знака для обозначенія числа. Только при домашнемъ обученіи, гдѣ учащій находится съ учащимся, такъ сказать, съ глазу на глазъ и гораздо свободнѣе въ выборѣ пріемовъ, можно позволить себѣ нѣкоторое разъясненіе пользы общеупотребительныхъ знаковъ для обозначенія однихъ и тѣхъ же чиселъ; въ классѣ же это разъясненіе въ большинствѣ случаевъ пропадаетъ безъ всякой пользы для дѣла. Ибо дѣти и безъ разъясненій понимаютъ (такъ сказать, инстинктивно) возможность и пользу общепринятыхъ обозначеній. Опасеніе, что ребенокъ станетъ смѣшивать число съ цыфрою тоже не основательно, если онъ ранѣе упражнялся въ дѣйствительномъ счетѣ предметовъ; поэтому на этой ступени ознакомленіе дѣтей съ цыфрами не можетъ считаться преждевременнымъ.

Порядокъ ознакомленія съ цыфрами можетъ быть избранъ слѣдующій: сначала могутъ быть дѣтямъ показаны три цыфры: 1, 2 и 3, и объяснено ихъ условное значеніе, потомъ еще двѣ цыфры: 4 и 5, и такъ далѣе до цыфры 9 включительно. При этомъ можно упражнять дѣтей прежде всего въ хоровомъ и одиночномъ *называніи* цыфръ, изображаемыхъ учителемъ на доскѣ. Когда такимъ образомъ дѣти научились отличать одну отъ другой первыя три цыфры, изображаемыя на доскѣ учителемъ по порядку и въ разбивку, они могутъ перейти уже и къ изображенію цыфръ подъ диктовку и подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учителя, при чемъ цыфру 1 должно изображать въ два такта (сначала тонкую черту снизу вверхъ, а потомъ толстую — сверху внизъ), цыфру 2—въ два, а цыфру 3—въ три такта (третій тактъ приходится на точку, которою заканчивается тонкій поворотъ вверхъ этой цыфры). Убѣдившись въ томъ, что каждый изъ учащихся въ отдѣльности умѣетъ изображать каждую изъ этихъ трехъ цыфръ, учитель можетъ задать дѣтямъ упражненіе въ обозначеніи цыфрами числа значковъ разныхъ числовыхъ фигуръ, числа буквъ въ разныхъ словахъ, и т. п.

Ознакомленіе учащихся съ остальными цыфрами и соотвѣтствующія самостоятельныя упражненія должны итти въ томъ же порядкѣ, при чемъ дѣтей надо пріучить къ изображенію цыфръ 4 и 9 въ три пріема, цыфры 5 и 7—въ четыре пріема, цыфръ 6 и 8 — въ два пріема. (Въ ч. I нашего „Методическаго Сборника ариѳметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній“ подъ №№ 1—10 указаны упражненія, умѣстныя на этой ступени первоначальнаго курса *).

---

*) Ниже мы для краткости всѣ ссылки на обѣ части нашего „Методическаго Сборника“ будемъ дѣлать въ скобкахъ, причемъ римскою цыфрою будемъ обозначать часть Сборника, а арабскими—упражненія.

§ 5. Ознакомленіе съ обозначеніемъ десятка должно быть отнесено къ числу затруднительнѣйшихъ статей курса; удобнѣе перейти отъ цыфръ прямо къ простѣйшему случаю сложенія чиселъ, представляемому задачами, требующими несомнѣннаго даже и для ребенка присоединенія, прибавленія къ данному числу, не большему восьми, одной единицы. (I. 11—20). Объ „увеличеніи“ даннаго числа на одну единицу не можетъ быть рѣчи въ такихъ задачахъ; ихъ фабула (словесное содержаніе) въ общемъ видѣ не должна выходить за рамки слѣдующей схемы: „дано a предметовъ; присоединенъ еще одинъ; сколько получилось?“ Было бы ошибочно вмѣстѣ съ нѣкоторыми авторами считать задачу этого рода задачею исключительно на счетъ. Она, конечно, можетъ быть рѣшена, какъ мы это видѣли выше, помощью счета и дѣти имѣютъ право ихъ рѣшать такимъ именно образомъ; но въ очень скоромъ времени они сами оставляютъ этотъ примитивный пріемъ и прибѣгаютъ къ присчитыванію. Пусть предложена задача: „Вотъ лежатъ три спички; вотъ еще одна; сколько здѣсь всего спичекъ?“ Только очень неразвитой ребенокъ семи-восьми лѣтъ начнетъ счетъ съ начала, съ единицы; большинство же дѣтей этого возраста прямо отвѣтитъ: „четыре“, т. е. предпочтетъ *присчитываніе* и такимъ образомъ, самъ того не сознавая, произведетъ сложеніе, опустивъ процессъ счета, результатомъ котораго тоже можетъ явиться данное число. Есть глубокая разница между требованіемъ „сосчитать — сколько здѣсь всего предметовъ“ и требованіемъ, которое выражается задачею, подобною вышеприведенной, такъ какъ въ послѣдней даны уже *извѣстныя* числа. Лучше всего задачи этого типа предлагать на наглядныхъ пособіяхъ. Но если бы учащій захотѣлъ повести эти упражненія непремѣнно на задачахъ съ условіями, то онъ таковыя всегда можетъ придумать и самъ.

На этой же ступени курса вполнѣ умѣстно ознакомленіе со знакомъ сложенія, при чемъ дѣтямъ учитель долженъ выяснить, что если дано число, напр. 4, и еще одна единица и требуется узнать—сколько у насъ всего единицъ, то это изображаютъ такъ: $4+1$, а изображенное можно прочесть такъ: „четыре да одинъ“. Въ то же время умѣстно ознакомить дѣтей со знакомъ равенства, который отдѣляетъ запись отъ числа, получаемаго въ концѣ концовъ. Имъ должно выяснить смыслъ записи:

$$4+1=5,$$

а равно должно и научить ихъ читать подобныя записи такъ: „четыре да одинъ составляетъ пять“. (I, 21—24).

Должно замѣтить, что на этой ступени было бы преждевременно выясненіе учащимся закона, по которому

$$a+1=1+a,$$

такъ какъ прибавленіе нѣсколькихъ единицъ, хотя бы даже и къ единицѣ, для дѣтей на этой ступени обученія представляетъ уже нѣкоторыя, не соотвѣтствующія, можетъ быть, ихъ развитію, трудности. Поэтому умѣстно, для внесенія разнообразія въ занятія дѣтей, ознакомить ихъ съ простѣйшимъ случаемъ вычитанія одной единицы изъ однозначнаго числа. (I, 11—20). При этомъ задачи должны быть сначала задаваемы на наглядныхъ пособіяхъ; можно ввести также и задачи съ повѣствовательнымъ элементомъ, съ фабулою; но должно при этомъ помнить, что на этой ступени умѣстны только задачи простѣйшаго типа: „было столько-то единицъ; отнята, отдѣлена, удалена одна единица; сколько осталось?“ Тутъ же умѣстно ознакомленіе со знакомъ вычитанія и со способомъ чтенія записи

$$4 - 1 = 3.$$

Лучше всего читать эту запись такъ: „четыре безъ единицы составляетъ три“ *). (I, 25—30).

§ 6. Ознакомивъ дѣтей съ указанными выше простѣйшими случаями сложенія и вычитанія, учащій можетъ перейти къ обозначенію чиселъ большихъ девяти помощью цыфръ. Цыфра нуль, а главное ея роль при изображеніи чиселъ, можетъ быть на первыхъ порахъ совершенно игнорируема. Прежде всего дѣтямъ должно быть выяснено, что для обозначенія различныхъ чиселъ придумывать *все новые и новые знаки, все новыя цыфры, было* бы прежде всего неудобно, такъ какъ цыфръ въ такомъ случаѣ набралось бы слишкомъ много. Игнорируя до поры до времени цыфру нуль, учитель долженъ привести дѣтей къ сознанію, что они не умѣютъ обозначать десяти единицъ. Когда они вполнѣ сознаютъ свое неумѣніе, онъ, обративъ и постоянно обращая вниманіе на то, что число десять онъ умышленно пропускаетъ, долженъ научить ихъ помощью цыфръ обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, неутомимо выясняя на примѣрахъ и упражненіяхъ правила постановки единицы, т. е. цыфры десятковъ, ранѣе цыфры единицъ и констатируя, что десяти дѣти изображать еще не умѣютъ. Эта ступень курса пре-

*) Въ то время какъ у французовъ, нѣмцевъ и др. народовъ формулы вида $a+b$ и $a-b$ читаются такъ, что вмѣсто знака сложенія или вычитанія произносится соотвѣтствующее слово родного языка (plus, moins, mehr, weniger и т. д.), у русскихъ установилась, къ сожалѣнію, привычка читать эти формулы прибѣгая къ латинскимъ словамъ „плюсъ“ и „минусъ“. Не стремясь къ искорененію этой привычки, думаемъ однако, что на интересующихъ насъ ступеняхъ обученія было бы нецѣлесообразно знакомить дѣтей съ этими названіями, ничего не говорящими ни уму ихъ, ни воображенію. Смѣемъ также думать, что вышеуказанные способы чтенія формулъ и употребленіе слова „составляетъ“ въ третьемъ лицѣ единственнаго, а не множественнаго числа, можно считать вполнѣ правильными.

одолѣвается дѣтьми не особенно быстро, но при нѣкоторой настойчивости вскорѣ результаты непремѣнно будутъ достигнуты.

Съ этою цѣлью учащій долженъ научить дѣтей разложенію каждаго изъ чиселъ этой области на десятокъ и нѣсколько единицъ. Если умѣніе счета усвоено дѣтьми какъ слѣдуетъ, то, съ помощью наглядныхъ пособій и пользуясь этимологическимъ составомъ числительныхъ именъ занимающей насъ области чиселъ, возможно въ какихъ-нибудь два, три, много четыре урока научить дѣтей устному разложенію чиселъ этой области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ. Когда это достигнуто, можно перейти къ обозначенію ихъ помощью цыфръ и къ выясненію значенія мѣста, занимаемаго единицею въ этомъ случаѣ. Наконецъ, когда дѣти научились безошибочно обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, тогда можно перейти къ цыфрѣ нуль, къ обозначенію—сначала десяти, а потомъ и двадцати съ помощью этой крайне важной цыфры. Только такимъ образомъ въ учащихся развивается привычка разлагать число сказанной области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ и смотрѣть на число большее девяти съ точки зрѣнія десятичной системы,—привычка въ высшей степени важная, какъ въ развивательномъ отношеніи, такъ и для будущихъ занятій дѣтей ариѳметикою. (I, 31—55).

Не для чего, конечно, разъяснять, что упражненія въ разложеніи чиселъ занимающей насъ области на сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, и въ сложеніи двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти,—что эти упражненія на данной ступени обученія могутъ быть только изустными, но никакъ не письменными. Дѣло въ томъ, что дѣти на этой ступени обученія еще не успѣли распространить пріобрѣтеннаго ими понятія о сложеніи на случай, когда второе слагаемое больше единицы Короче сказать: на этой (четвертой) ступени неумѣстны упражненія вида

$14 = 10 + 4,\ 15 = 10 + 5$ и т. д.

и вида: $10 + 4 = 14,\ 10 + 5 = 15$ и т. д.

За-то тѣмъ умѣстнѣе упражненія вида:

$10 + 1 = 11,\ 11 + 1 = 12$ и т. д.

и вида: $11 - 1 = 10,\ 12 - 1 = 11$ и т. д.

На эти послѣднія упражненія (I, 46—55), впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ смотрѣть какъ на упражненія въ *письменномъ производствѣ* дѣйствій сложенія и вычитанія, а только какъ на работы, преслѣдующія усвоеніе нумераціи чиселъ первыхъ двухъ десятковъ.

Было бы ошибочно думать, что упражненія въ сложеніи цѣлаго десятка съ одною единицею и въ вычитаніи одной единицы изъ числа большаго десяти и меньшаго двадцати является на этой ступени курса преждевременнымъ потому, что они будто бы требуютъ знанія частью также тѣхъ правилъ сложенія и вычитанія, по которымъ единицы складываются съ единицами и вычитаются изъ единицъ и т. д. Приложеніе этого пункта общихъ правилъ къ частнымъ случаямъ вышеуказаннаго рода, конечно, возможно; но знаніе правилъ вовсе не необходимо для сложенія одного десятка съ единицею и для вычитанія одной единицы изъ даннаго числа: для возможности этихъ дѣйствій достаточно, если учащійся умѣетъ считать, понимаетъ сущность нумераціи и усвоилъ себѣ понятія сложенія и вычитанія, когда второе слагаемое и вычитаемое равно единицѣ.

§ 7. По усвоеніи дѣтьми вышенамѣченныхъ умѣній можно приступить къ выработкѣ у нихъ понятія о дѣйствіи сложенія всякихъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ не больше десяти. До сихъ поръ дѣти прибавляли къ числу только одну единицу; на этой (I, 56—70) ступени обученія ихъ надо пріучить къ мысли, что есть случаи, когда требуется прибавить и больше одной единицы. Для этого могутъ быть предложены соотвѣтствующія задачи на наглядныхъ пособіяхъ и задачи съ повѣствовательнымъ элементомъ, фабула которыхъ не должна, впрочемъ, выходить за предѣлы простѣйшаго случая сложенія: „дано *a* единицъ, прибавлено, присоединено еще *b* единицъ; сколько послѣ этого получилось *всего* единицъ?“ Когда дѣти поймутъ смыслъ требованія подобныхъ задачъ и научатся на наглядныхъ пособіяхъ (лучше всего на пальцахъ) присчитывать единицы второго слагаемаго къ первому, они въ состояніи будутъ также понять пользу запоминанія *наизусть* результатовъ, къ упражненію въ которомъ учитель и можетъ въ такомъ случаѣ приступить на своихъ урокахъ съ учащимися. Но, повторяемъ еще разъ, прежде чѣмъ перейти къ этимъ упражненіямъ, должно убѣдиться въ томъ, всѣ ли учащіеся вполнѣ поняли, какой смыслъ имѣютъ вопросы: „сколько будетъ три да два“, „четыре да два“, „пять да два“, „три да три“, „четыре да три“ и т. д. Только въ случаѣ, если они вполнѣ ясно понимаютъ смыслъ подобныхъ вопросовъ, можно приступить къ заучиванію хоромъ наизусть таблицы сложенія чиселъ, сумма которыхъ не болѣе девяти. Что же касается задачъ на сложеніе чиселъ, сумма коихъ равна десяти, то въ нихъ дѣти должны обратить особенное вниманіе на новую единицу счета, такъ какъ десятокъ играетъ въ нумераціи и въ производствѣ дѣйствій надъ двузначными числами такую роль, какой остальныя числа перваго десятка не играютъ. Поэтому упражненія въ сложеніи двухъ чиселъ, сумма которыхъ равна десяти, должны принадлежать къ числу тѣхъ устныхъ и письменныхъ упражненій, на которыя учащій долженъ обратить особенное вниманіе. Эти упражненія могутъ отличаться отвлеченнымъ характеромъ. На этой же ступени учитель долженъ довести учащихся до яснаго пониманія перемѣстительнаго закона, по которому сумма двухъ слагаемыхъ не зависитъ отъ порядка ихъ. (I, 65—70).

§ 8. Далѣе должна быть дѣтьми понята необходимость вычитанія одного однозначнаго числа изъ другого. Для этой цѣли особенно пригодны соотвѣтствующія упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, - упражненія, цѣль которыхъ только выясненіе *необходимости* дѣйствія вычитанія при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ. Фабула задачъ (I, 91—100) и упражненій этого рода не должна выходить за предѣлы требованія: „отдѣлить нѣсколько единицъ отъ даннаго числа ихъ" Распространеніе понятія о вычитаніи одной единицы изъ даннаго числа ихъ на случай, когда требуется изъ числа вычесть болѣе одной единицы, для учащихся не представитъ особенныхъ трудностей. При этомъ было бы преждевременно на этой ступени обученія связывать понятія вычитанія съ понятіемъ сложенія: это можетъ быть сдѣлано только впослѣдствіи. Преждевременнымъ точное формулированіе сказанной связи вычитанія со сложеніемъ признаемъ на этой ступени потому, что семи- или восьмилѣтнія дѣти съ большимъ трудомъ уясняютъ себѣ, что задачи типа „сколько надо прибавить единицъ къ a, чтобы получить b" и „къ какому числу надо прибавить a, чтобы получить b" ведутъ къ *вычитанію* одного числа изъ другого, а не къ сложенію.

Усвоеніе дѣтьми таблицы вычитанія наизусть должно вестись методически-послѣдовательно, начиная съ случая вычитанія, когда вычитаемое равно единицѣ, и переходя постепенно къ случаямъ вычитанія, когда вычитаемое равно двумъ, тремъ и т. д.; уменьшаемое на этой, шестой, ступени, конечно, не должно быть болѣе десяти. Но приступать къ усвоенію наизусть этой части таблицы вычитанія слѣдуетъ только въ томъ случаѣ, когда учащій вполнѣ убѣжденъ въ томъ, что дѣти понимаютъ не только цѣль дѣйствія вычитанія, но также необходимость и пользу запоминанія результатовъ вычитанія однихъ чиселъ изъ другихъ. Въ противномъ случаѣ заучиваніе, хотя бы даже и хоромъ, этой части таблицы вычитанія будетъ въ нѣкоторомъ смыслѣ ненужнымъ насиліемъ надъ дѣтскою природою.

§ 9. Прежде чѣмъ перейти къ сложенію чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, должно пріучать дѣтей къ сложенію одного десятка съ нѣсколькими единицами, не составляющими десятка, и къ разложенію чиселъ отъ одиннадцати до девятнадцати включительно на сумму одного десятка съ нѣкоторымъ однозначнымъ числомъ единицъ. (I. 111—155). На слѣдующей ступени можно приступить къ сложенію двухъ однозначныхъ чиселъ, дающему въ суммѣ также менѣе двадцати. Прежде всего должно убѣдить дѣтей, что сложеніе такихъ чиселъ иногда требуется; съ ними это можетъ быть проработано сначала на наглядныхъ пособіяхъ, потомъ на задачахъ. Когда они убѣдились въ возможности такихъ задачъ и поняли смыслъ ихъ, они поймутъ, во 1-хъ, самую сущность процесса сложенія въ этомъ случаѣ, состоящую въ томъ, что сумма однихъ слагаемыхъ, напр., 6 и 7, сводится къ суммѣ другихъ: 10 и 3, и во 2-хъ, необходимость запомнить *наизусть* суммы, происходящія отъ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ.

Сущность процесса сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, какъ выше замѣчено, состоитъ въ томъ, что каждая такая сумма двухъ слагаемыхъ замѣняется суммою другихъ двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ одно равно десяти. Такъ, напр., если дано сложить 7 и 8, то, отдѣливъ отъ 8-ми единицъ три и прибавивъ къ 7-ми эти три единицы, мы получимъ $10 + 5$ или 15. Дѣти должны вполнѣ овладѣть этимъ пріемомъ, прежде чѣмъ перейти къ заучиванію, подъ руководствомъ учителя, остальной, имъ еще неизвѣстной, части таблицы сложенія. (I. 156—165 и 166 177). При усвоеніи указаннаго пріема дѣти впервые пользуются сочетательнымъ закономъ сложенія, и если этого и не слѣдуетъ разъяснять учащемуся, то самъ учитель о томъ не долженъ забывать ни въ какомъ случаѣ. *)

Считаемъ необходимымъ замѣтить, что упражненія въ такомъ сложеніи числа, большаго десяти и меньшаго двадцати, съ однозначнымъ числомъ, которое (сложеніе) даетъ въ суммѣ число меньшее двадцати, не преждевременны на этой ступени обученія, хотя они и могутъ быть разсматриваемы съ точки зрѣнія примѣненія къ нимъ общаго правила сложенія многозначныхъ чиселъ. Въ такой же мѣрѣ нельзя считать преждевременными упражненія въ вычитаніи изъ двузначнаго числа, меньшаго двадцати (вида $10 + a$), всякаго однозначнаго числа. Откладывать сознательное изученіе таблицы сложенія и вычитанія до ознакомленія дѣтей съ правилами этихъ дѣйствій невозможно, а сознательное изученіе этихъ таблицъ безъ упражненій, о которыхъ идетъ рѣчь, тоже невозможно. Это разъ. А во вторыхъ—ненормальнымъ должно считать такую постановку дѣла, при которой учащійся не въ состояніи, не пользуясь „правилами", выполнить дѣйствія вычитанія въ случаѣ $12 - 5$, или, что еще хуже того, дѣйствій сложенія и вычитанія въ случаяхъ: $12 + 3$ или $19 - 7$ и т. п. (I, 201—220).

*) Въ обѣихъ частяхъ нашего „Методическаго Сборника" встрѣчается много задачъ, въ которыхъ какое-либо слово или выраженіе набрано курсивомъ. Эти выраженія либо принадлежатъ къ числу терминовъ, либо же отмѣчены такимъ образомъ для того, чтобы на нихъ обратить вниманіе учащихся.

§ 10. На слѣдующей ступени обученія было бы естественно перейти къ нумераціи чиселъ большихъ двадцати и къ производству дѣйствій сложенія и вычитанія надъ *многозначными числами.* Но такимъ образомъ въ обученіе ариѳметикѣ было бы внесено чрезвычайное и весьма вредное въ педагогическомъ отношеніи однообразіе. Во избѣжаніе этого, на этой же ступени курса надо ввести какіе-либо новые элементы и таковымъ является понятіе объ умноженіи. Но прежде чѣмъ перейти къ умноженію дѣти должны усвоить себѣ возможность и смыслъ сложенія нѣсколькихъ цѣлыхъ чиселъ; ибо умноженіе является на первыхъ порахъ только частнымъ случаемъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ,—частнымъ случаемъ, въ которомъ мы, пользуясь *таблицею* умноженія, можемъ находить результаты сложенія равныхъ слагаемыхъ, на самомъ дѣлѣ вовсе не производя этого послѣдняго дѣйствія. Итакъ, въ виду чисто педагогическихъ соображеній, на этой ступени обученія умѣстны не только нумерація двузначныхъ чиселъ (I, 221—230), но и введеніе въ курсъ сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ и умноженія такихъ чиселъ, произведеніе которыхъ не болѣе 20-ти.

До выясненія нумераціи всякихъ двузначныхъ чиселъ слѣдуетъ удостовѣриться—умѣютъ ли дѣти безошибочно считать до ста и понимаютъ ли они законъ этого чисто-словеснаго процесса. Но во всякомъ случаѣ ихъ надо пріучить къ разложенію всякаго двузначнаго числа на десятки и единицы, и обратно: къ соединенію всякаго однозначнаго числа десятковъ съ однозначнымъ числомъ единицъ въ одно число. При этомъ въ качествѣ нагляднаго пособія могутъ служить: при классномъ обученіи кубики и спички, а при одиночномъ—предпочтительно спички („солома"). Дѣло въ томъ, что спички, принадлежа вообще къ числу наилучшихъ наглядныхъ пособій, въ классѣ не особенно удобны, если онѣ не довольно крупны. Что же касается кубиковъ такъ наз. ариѳметическаго ящика, то только они (но не столбики) должны быть употребляемы при обученіи. Когда устная нумерація усвоена, можно приступить къ письменной, которая тогда не затруднительна для учащихся, если они усвоили себѣ десятичный взглядъ на всякое двузначное число. (I, 221—230). *)

---

*) Особенныхъ трудностей здѣсь не представляется, хотя значительнаго единообразія въ русскихъ числительныхъ именахъ, обозначающихъ нѣсколько десятковъ, не замѣчается: этимологическое сходство одного рода есть въ словахъ „двадцать" и „тридцать", и сходство совсѣмъ другого рода—въ словахъ „пятьдесятъ", „шестьдесятъ", „семьдесятъ" и „восемьдесятъ"; слова же „сорокъ" и „девяносто" являются элементами совершенно чуждыми семьѣ остальныхъ именъ числительныхъ. Несмотря однако на это, дѣти очень быстро усваиваютъ себѣ понятіе о счетѣ десятками, т. е. о смыслѣ четырехъ и т. д. десятковъ, а равно легко усваиваютъ себѣ слова: „двадцать", „тридцать" и т. д., такъ какъ эти сло-

Что касается сложенія нѣсколькихъ, вообще не равныхъ между собою слагаемыхъ, то необходимость этого дѣйствія дѣти могутъ уяснить себя при помощи наглядныхъ пособій и приличныхъ задачъ съ условіями. (I. 231—240). Прежде всего они должны уяснить себѣ, что для производства дѣйствія можно первое слагаемое сложить со вторымъ, а полученную сумму—съ третьимъ и т. д. На этой же ступени должно быть выяснено употребленіе знака плюсъ въ случаѣ сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ, если это ранѣе (I. 178—185) не было выяснено.

Что касается умноженія, то вначалѣ это дѣйствіе должно быть для учащихся только спеціальнымъ *частнымъ* случаемъ сложенія, а запись умноженія—*сокращенною* записью сложенія. Мы подчеркнули слова „частнымъ“ и „сокращенною“ для того, чтобы напомнить читателю, что не самое дѣйствіе умноженія есть сокращенное (какъ это нѣкоторые утверждаютъ) сложеніе, а что только запись $5+5+5+5$ замѣняется болѣе короткою записью 5×4 и что для возникновенія понятія объ умноженіи недостаточно одного лишь равенства слагаемыхъ: для этого необходимо еще нѣкоторая спеціальная идея и существованіе таблицы умноженія. Засимъ должно пріучать дѣтей къ записыванію ранѣе всего слагаемаго, потомъ знака умноженія, и наконецъ—числа равныхъ слагаемыхъ. (I, 251—275). Запись $5\times4=$ ученикамъ должна быть читаема такъ: „пять, умноженное на четыре, составляетъ“. Должно строго соблюдать, чтобы дѣти пріучились число, изображаемое ранѣе знака умноженія, всегда принимать за множимое, а число, стоящее послѣ знака—за множителя, но отнюдь не обратно. Поэтому записи:

$$2\times3,\ 2\times4,\ 2\times5$$

ва имъ вовсе не незнакомы и часто употребляются въ рѣчи всѣми окружающими. Но должно замѣтить, что въ то время какъ при усвоеніи дѣтьми устнаго счисленія отъ одного до девятнадцати включительно обязательно должны быть усвоены прежде всего самыя имена числительныя (т. е. слова), а потомъ уже нумерація, дѣти при изученіи нумераціи отъ двадцати до ста могутъ идти также и путемъ обратнымъ, т. е. сначала усвоить себѣ счетъ десятками и даже письменное обозначеніе двузначныхъ чиселъ помощью арабскихъ цыфръ, а потомъ уже перейти къ усвоенію словъ „двадцать“, „тридцать“ и т. д. Этотъ послѣдній путь не только сокращаетъ трудъ по усвоенію нумераціи на ряду съ устнымъ счисленіемъ, не только удобнѣе въ чисто практическомъ отношеніи, но иногда цѣлесообразнѣе и въ развивательномъ, въ особенности при обученіи домашнемъ. Дѣло въ томъ, что механическое называніе именъ числительныхъ въ натуральномъ порядкѣ, начиная съ двадцати (двадцать одинъ, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре и т. д.) чрезвычайно утомительно и весьма мало говоритъ дѣтскому уму и воображенію. Небезполезно поэтому научить дѣтей (какъ это нѣкоторые и дѣлаютъ) счету въ слѣдующей формѣ: одинъ, два, три ... десять; одинъ, два, три.... восемь, девять, двадцать; одинъ, два, три. .. восемь, девять, тридцать; одинъ, два, три.... восемь, девять, сорокъ; и т. д.

и т. д. должно читать не „дважды три“, „дважды четыре“, „дважды пять“, а непремѣнно такъ: „два, помноженное на три“, „два, помноженное на четыре“ и т. д. Съ реченіями же „дважды“, „трижды“, „четырежды“, „пятью два“, „пятью три“, „шестью два“ и т. д. дѣти должны быть ознакомлены позже, при чемъ они должны значеніе этихъ реченій усвоить себѣ вполнѣ точно. Ихъ должно поэтому пріучить обозначать помощью цыфръ реченія „пятью два“, „пятью три“ и т. п. слѣдующимъ образомъ:

$$2 \times 5, \quad 3 \times 5 \text{ и т. д.}$$

Должно замѣтить, что ранѣе чѣмъ приступить къ заучиванію наизусть таблицы умноженія чиселъ, произведеніе которыхъ менѣе двадцати, учащіеся должны убѣдиться въ пользѣ и необходимости знанія этой таблицы при разрѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ.

Въ фабулу задачъ и упражненій, прорабатываемыхъ учениками при непосредственной помощи учителя, на этой ступени не должно входить ни увеличеніе числа въ нѣсколько разъ, ни другія условныя выраженія, за исключеніемъ реченій: „дважды“, „трижды“ и т. д.

На этой ступени обученія изобиліе устныхъ упражненій представляетъ собою необходимое условіе усвоенія всѣхъ ея элементовъ: учащій неутомимо долженъ упражнять въ быстромъ устномъ сложеніи, вычитаніи и умноженіи небольшихъ отвлеченныхъ чиселъ.

§ 11. Слѣдующую ступень курса составляютъ ученія о сложеніи и вычитаніи двузначныхъ чиселъ и объ умноженіи въ предѣлахъ всей таблицы умноженія. Здѣсь упражненія должны отличаться особенною систематичностью. Задачъ, которыя должны бы убѣдить учащихся въ необходимости сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ, а равно умноженія чиселъ, произведеніе коихъ болѣе двадцати, на этой ступени, строго говоря, не надо: дѣти вполнѣ уяснили себѣ на предыдущихъ урокахъ необходимость, логическій смыслъ и цѣль этихъ дѣйствій. За-то тѣмъ тщательнѣе статьи о сложеніи и вычитаніи должны быть пройдены на наглядныхъ пособіяхъ, пользуясь каковыми только и возможно выяснить сущность „правилъ“ сложенія и вычитанія, сводящуюся къ дѣйствіямъ надъ разрядными числами, т. е. сначала надъ единицами и потомъ—надъ десятками, или сначала надъ десятками, а потомъ—надъ единицами.

Въ высшей степени полезны на этой ступени упражненія въ сложеніи и вычитаніи, на счетахъ и на „спичкахъ“. Если учащій не желаетъ, чтобы дѣти, усвоивъ себѣ только механическую сторону дѣйствій, въ скоромъ времени совершенно разучились съ полнымъ разумѣніемъ совершать эти дѣйствія, то онъ обязательно долженъ обратиться къ сказаннымъ нагляднымъ пособіямъ. Къ сожалѣнію, необходимость раздробленія въ нѣкоторыхъ случаяхъ одного десятка въ единицы при вычитаніи наиболѣе цѣлесообразно выясняется на спичкахъ. каковое пособіе, какъ это замѣчено выше, при классномъ обученіи не всегда удобно. Это, впрочемъ, нимало не должно смущать учащаго: со своей стороны онъ долженъ сдѣлать все для нагляднаго усвоенія дѣтьми идеи сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ. Трудъ, имъ на это потраченный, будетъ вознагражденъ сторицею при дальнѣйшемъ прохожденіи курса.

При усвоеніи дѣтьми таблицы умноженія замѣчаются двѣ трудности: одна состоитъ въ трудности усвоенія ея памятью, а другая—въ усвоеніи дѣтьми перемѣстительнаго закона. Противъ первой трудности единственное средство въ своевременномъ вытверживаніи таблицы по частямъ и постоянныхъ письменныхъ и устныхъ упражненіяхъ въ этомъ направленіи. При этомъ должно принять къ свѣдѣнію, что таблицу умноженія дѣти должны же когда нибудь усвоить себѣ на-память, и чѣмъ раньше достигнуто твердое знаніе ея, тѣмъ лучше. Но само самою разумѣется, что къ ея усвоенію не надо приступать ранѣе усвоенія дѣтьми точной идеи объ умноженіи; учащій кромѣ того долженъ добиться того, чтобы дѣти поняли пользу и необходимость твердаго, на-память, знанія таблицы.—Что касается перемѣстительнаго закона, то дѣти не только должны себѣ его усвоить, но также быть въ состояніи (сначала на наглядныхъ пособіяхъ, а потомъ, если возможно, и на отвлеченныхъ примѣрахъ) выяснить его причину. Лучше всего для этого брать числа не очень малыя: одно изъ чиселъ должно быть равно не менѣе 6-ти или 7-ми *). Выясненіе закона можетъ быть поведено слѣдующимъ образомъ: пусть дано 9 связокъ спичекъ по 7-ми штукъ въ каждой связкѣ; взявъ по одной спичкѣ изъ каждой связки, получимъ 9 спичекъ; свяжемъ ихъ въ одну связку; взявъ изъ оставшихся связокъ еще по одной спичкѣ, получимъ снова 9 спичекъ; свяжемъ и эти 9 спичекъ въ одну связку; и т. д. (остальное опускается въ виду простоты дальнѣйшихъ разсужденій). Лучше всего выясненіе закона вести на наглядныхъ пособіяхъ; при этомъ можетъ оказаться, что дѣти не сразу увидятъ самый первъ доказательства. Но учащій этимъ не долженъ смущаться: онъ долженъ помнить, что не только доказательство, но и самая необходимость его чаще всего дѣтямъ совершенно недоступны. Поэтому упражненія въ этомъ направленіи должны вестись до тѣхъ поръ, пока каждый изъ учащихся будетъ въ состояніи съ полнымъ разсужденіемъ, хотя бы на на-

---

*) На мысль о пользѣ большихъ чиселъ мы случайно наведены П. К. Соколовымъ, преподавателемъ математики въ Спб. учительскомъ институтѣ, о чемъ считаемъ пріятнымъ долгомъ своимъ заявить.

глядныхъ пособіяхъ, доказать справедливость перемѣстительнаго закона для всѣхъ чиселъ перваго десятка *).

§ 12. По усвоеніи таблицы умноженія и всѣхъ прочихъ элементовъ пройденнаго курса можно приступить къ обоимъ случаямъ дѣленія: дѣленію числа на равныя между собою части и кратному сравненію цѣлыхъ чиселъ (въ предѣлахъ, конечно, таблицы умноженія). Для убѣжденія дѣтей въ недостаточности пройденнаго при разрѣшеніи практическихъ вопросовъ и на этой ступени необходимы задачи. (I, 361—390). Но для того чтобы дѣти скорѣе и основательнѣе убѣдились въ необходимости новаго дѣйствія, задачи эти не должны поддаваться быстрому разрѣшенію съ помощью догадокъ; поэтому задачи на раздѣленіе 2-хъ, 4-хъ, 6-ти, даже 8-ми единицъ на двѣ равныя части или 3-хъ и 6-ти единицъ на 3 равныя части неумѣстны въ большомъ количествѣ на этой ступени обученія. При несложной фабулѣ задачи должны быть большею частью таковы, чтобы только немногіе ученики могли легко разрѣшить ихъ на-угадъ, не сознавая того процесса мысли, который вообще въ такихъ случаяхъ можетъ привести къ разрѣшенію задачи. Когда дѣти усвоили себѣ хоть какой нибудь пріемъ рѣшенія этого рода задачъ, имъ долженъ быть показанъ знакъ дѣленія на равныя части, за каковой можно принять знакъ __. Помощью этого знака требованіе „раздѣлить 15 на три равныя части" изобразится такъ:

$$15 \underline{\;3\;}.$$

Эту запись ученики должны сначала читать такъ: „пятнадцать, раздѣленное на три равныя части, равно пяти" **). Связь дѣйствія дѣленія на равныя части съ умноженіемъ можетъ быть выяснена на любыхъ задачахъ, но при этомъ не должно особенно торопиться.

Учащій никогда не долженъ забывать, что внѣ таблицы умноженія на этой ступени не должно встрѣчаться ни одного случая

---

*) Въ нашемъ „Учебникѣ ариѳметики" (М. 1887) законъ перемѣстительный принятъ безъ доказательства, такъ какъ на самомъ дѣлѣ онъ принадлежитъ къ числу довольно очевидныхъ и такъ какъ изложеніе выше даннаго доказательства для учебника не достаточно обще, а болѣе научное доказательство, предложенное въ одной изъ „Дополнительныхъ статей" нашего Учебника, мало говоритъ воображенію малолѣтняго учащагося. Мы съ тѣмъ большимъ правомъ рѣшились на такую постановку вопроса, что учебникъ нашъ не преслѣдуетъ цѣлей самоучителя и предполагаетъ непремѣнное руководительство учителя.

**) Со словами „равно" и „равняется" дѣти должны быть ознакомлены раньше; мы не указываемъ на какой именно ступени это должно быть сдѣлано, такъ какъ самъ учитель лучше можетъ судить когда именно ознакомленіе съ значеніемъ этихъ словъ будетъ своевременно. Скорѣе всего это можетъ быть сдѣлано, кажется, на той ступени, когда появляются формулы разложенія (12=10+2), въ которыхъ знакъ равенства не можетъ быть въ устной рѣчи удобно замѣненъ словомъ „составляетъ".

дѣленія двузначнаго числа на однозначное, съ каковымъ дѣленіемъ (безъ остатка) онъ прежде всего и долженъ познакомить учащагося. Введеніе понятія объ уменьшеніи въ нѣсколько разъ на этой ступени неумѣстно, такъ какъ это выходитъ за предѣлы первоначальнаго обученія. а представляетъ уже одно изъ приложеній дѣйствія дѣленія. Но за-то на этой ступени умѣстно ознакомленіе дѣтей съ нахожденіемъ одной какой либо доли даннаго числа и даже съ обозначеніемъ долей. Для упражненія же дѣтей въ дѣленіи на части съ большою пользою для дѣла могутъ быть проработаны задачи на простое тройное правило въ предѣлахъ таблицы умноженія (I, 481—482), но притомъ такого рода, чтобы приходилось прибѣгать только къ дѣленію на равныя части и умноженію, а не къ кратному сравненію (I, 483 и т. п.); такія задачи учащій безъ труда придумаетъ и самъ. Эти задачи должны быть составлены такъ, чтобы для ихъ разрѣшенія необходимо было сначала раздѣленіе одной величины на равныя части, а потомъ умноженіе полученнаго частнаго на нѣкоторое отвлеченное число: въ нихъ, какъ это замѣчено выше, должно избѣгать случаевъ, когда для рѣшенія задачи на тройное правило требуется найти сначала отношеніе двухъ величинъ, а потомъ уже нѣкоторое число или величина умножается на это отношеніе.

При первоначальномъ обученіи, по нашему мнѣнію, полезно и даже почти необходимо для обозначенія дѣйствія дѣленія на равныя части прибѣгать къ знаку, отличному отъ знака, обозначающаго дѣйствіе сравненія двухъ чиселъ въ кратномъ отношеніи. Дѣло въ томъ, что подведеніе двоякаго смысла дѣленія подъ одну общую формулу, подъ одну рубрику и одно опредѣленіе при первоначальномъ обученіи, справедливо избѣгающемъ примѣненія опредѣленій, невозможно. А потому въ I-ой части нашего „Методическаго Сборника задачъ“ мы, по примѣру очень многихъ авторовъ, ввели для обозначенія дѣленія на равныя части знакъ |__. Думаемъ, что противъ этого нельзя сдѣлать какія либо вѣскія возраженія, тѣмъ болѣе, что при систематическомъ курсѣ, который имѣется въ виду въ ч. II нашего «Методическаго сборника» и нашемъ «Учебникѣ ариѳметики для сред. уч. зав.» принятъ взглядъ, болѣе отвѣчающій требованіямъ научнымъ.

§ 13. Слѣдующую ступень обученія составляетъ ознакомленіе дѣтей съ другимъ случаемъ дѣленія—съ кратнымъ сравненіемъ. Для этой цѣли могутъ служить задачи на наглядныхъ пособіяхъ. Эта ступень представляетъ весьма большія трудности, а потому наглядныя пособія не должны быть игнорируемы при выясненіи смысла вопроса: «сколько разъ одно число содержится въ другомъ». Связь кратнаго сравненія съ умноженіемъ и отличіе его отъ дѣйствія дѣленія на равныя части не должны быть учащимъ забываемы ни на одну минуту; въ противномъ случаѣ онъ рискуетъ напрасно потратить слишкомъ много времени. Въ особенности полезны для этой цѣли задачи, требующія кратнаго сравненія именованныхъ чиселъ въ предѣлахъ таблицы умноженія. За знакъ кратнаго сравненія принято (:), и запись

$$15 : 5 = 3$$

учащій долженъ сначала читать такъ: «пятнадцать единицъ содержатъ пять три раза». Что кратное сравненіе есть не что иное, какъ видъ *дѣленія*—ученики на этой ступени понять не могутъ, и поэтому добиваться отъ нихъ этого пониманія было бы излишне. Само собою разумѣется, что и на этой ступени въ упражненія не должно входить такихъ данныхъ, которыхъ нѣтъ въ таблицѣ умноженія. (1, 421—505).

Упражняя дѣтей въ дѣленіи числа на равныя части и въ кратномъ сравненіи чиселъ, а также въ остальныхъ дѣйствіяхъ, для каковой цѣли могутъ служить упражненія, проработанныя ранѣе, учащій долженъ обратить вниманіе при устныхъ вычисленіяхъ на случаи, когда дѣленіе и кратное сравненіе даютъ остатокъ. Въ первой части нашего «Методическаго сборника» мы въ началѣ пренебрегали этими случаями и возложили эту работу исключительно на учащаго. Мы позволили себѣ это сдѣлать по двумъ соображеніямъ: 1) мы такимъ образомъ даемъ большой просторъ урокамъ учащаго, 2) мы не считаемъ возможнымъ на первыхъ ступеняхъ задавать при первоначальномъ обученіи задачи, не разрѣшимыя въ цѣлыхъ числахъ.

Тѣмъ не менѣе считаемъ необходимымъ ознакомленіе дѣтей съ случаями дѣленія и кратнаго сравненія, дающими остатокъ. Весь вопросъ можетъ заключаться только въ томъ, когда это сдѣлать и какъ вести записи примѣровъ, дающихъ остатки. По нашему мнѣнію, лучше всего этимъ не торопиться, формулы же писать такъ:

„27 : 4 = 6, а въ остаткѣ 3“,

„39 : 5 = 7, а въ остаткѣ 4“, и т. п.

Всякіе иные способы обозначенія намъ кажутся не достаточно вразумительными и точными.

§ 14. Относительно устныхъ вычисленій при первоначальномъ обученіи должно замѣтить, что главное вниманіе учащаго должно быть имъ обращаемо на сложеніе двухъ или нѣсколькихъ однозначныхъ чиселъ, на умноженіе и дѣленіе въ предѣлѣ первой сотни и на сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ. Задачъ же съ условіями, какія встрѣчаются въ изобиліи въ сборникѣ задачъ для устныхъ вычисленій г. *Малинина (по Церингеру)*, да и вообще задачъ съ условіями, должно по возможности избѣгать при упражненіяхъ въ устномъ вычисленіи. Введеніе подобныхъ задачъ въ первоначальный курсъ было бы только помѣхою при прохожденіи его, такъ какъ онъ подается основательной проработкѣ только при соблюденіи большой экономіи во времени. Если учитель самъ хорошій счетчикъ и если онъ въ состояніи живо и безошибочно вычислять въ умѣ, то и его ученики даже въ теченіе короткаго промежутка времени пріобрѣтутъ нѣкоторыя умѣнія въ быстромъ устномъ вычисленіи; если же онъ самъ счетчикъ не совсѣмъ ловкій и энергичный, то при нѣкоторомъ желаніи онъ сдѣлаетъ большіе успѣхи именно благодаря своимъ ученикамъ. Пренебрегать устными вычисленіями онъ во всякомъ случаѣ не имѣетъ права. Форма упражненій въ устныхъ вычисленіяхъ должна быть по возможности простая, напр., въ слѣдующемъ родѣ:

2 да 8 сколько будетъ? Да 3! Долой 6! помножь на 3! долой 7! прибавь 10! и т. д., смотря по знаніямъ учащихся.

При этомъ отъ учащихся должно требовать по возможности немедленныхъ отвѣтовъ, что конечно дозволительно тогда, когда упражненія этого рода совершенно по силамъ учащихся. Кромѣ того само собою разумѣется, что на каждой ступени обученія возможны и обязательны устныя вычисленія на-ряду съ усваиваемымъ въ данную минуту письменнымъ аппаратомъ того или другого дѣйствія.

§ 15. При рѣшеніи задачъ отъ учащихся обыкновенно требуютъ, во 1-хъ, объясненія причины — почему они поступаютъ съ данными числами такъ, а не иначе и, во 2-хъ, непремѣнно полнаго отвѣта на вопросъ. Оба эти требованія вовлекаютъ учащаго въ крайности, отъ которыхъ учебное дѣло только страдаетъ.

Объясненіе причины примѣненія даннаго дѣйствія чаще всего невозможно, если ранѣе не дано опредѣленія этого дѣйствія и такимъ образомъ не дано учащемуся возможности опираться въ своихъ отвѣтахъ на опредѣленія. Но при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ опредѣленія невозможны, а потому и требованіе отъ учащагося вѣрнаго отвѣта на вопросъ о причинѣ примѣненія дѣйствія не вполнѣ законно. Въ проектируемомъ же нами первоначальномъ курсѣ это даже просто не цѣлесообразно; по нашей системѣ задачи разрѣшаются не въ видѣ примѣненія уже извѣстныхъ дѣйствій, а часто исключительно для выработки надлежащаго понятія о неизвѣстномъ еще дѣйствіи. Такимъ образомъ при нашей системѣ вопросъ о причинѣ, почему въ результатѣ получается то, а не иное число, почему въ данномъ случаѣ учащійся прибавилъ, а въ другомъ отнялъ данное число — такой вопросъ, повторяемъ, прямо противорѣчитъ цѣли задачъ и ихъ значенію какъ средства для выработки понятія о дѣйствіи. Единственный вопросъ, дозволительный при рѣшеніи задачи со стороны учащаго, можетъ быть слѣдующій: „какъ ты это узналъ?“ На такой вопросъ можетъ быть данъ отвѣтъ: „прибавилъ“, „отнялъ“, „откинулъ“, „сосчиталъ“, „сложилъ“, „помножилъ“, и т. п.

Дѣйствительно пусть предложена задача: „торговецъ продалъ пять штукъ гусей и двѣ утки, сколько онъ всего продалъ птицы?“ Здѣсь вопросъ о томъ—почему учащійся думаетъ, что торговецъ продалъ 7 штукъ разной птицы, не умѣстенъ, тѣмъ болѣе, что малолѣтній учащійся еще не доросъ до вѣрнаго пониманія закона причинности.

Что касается полныхъ отвѣтовъ, то требовать ихъ постоянно, какъ это дѣлаютъ нѣкоторые, ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ. Принципъ полныхъ отвѣтовъ ведетъ къ крайней искусственности рѣчи и лишаетъ ее, если можно такъ выразиться, жизни и простоты. Дѣтей не слѣдуетъ учить такому способу изъясняться, какой не употребляется никѣмъ, кромѣ педантически слѣдующихъ этому принципу учителей. Ибо никто на вопросъ о томъ — не знаетъ ли онъ, который теперь часъ, не отвѣтитъ полнымъ отвѣтомъ: „я знаю, что теперь половина третьяго“. Требовать полнаго отвѣта отъ дѣтей можно и даже должно только тогда, когда только полный отвѣтъ удовлетворителенъ и естественъ. Но еще чаще слѣдуетъ отъ учащагося требовать самаго краткаго отвѣта, какой только возможенъ: это укрѣпляетъ его мысль и можетъ оказать на его сужденіе хорошее воспитательное вліяніе. Такъ, напр., на вопросъ о томъ—сколько десятковъ въ 50-ти, учащійся долженъ отвѣтить: „пять“, либо же самымъ полнымъ отвѣтомъ: въ 50-ти пять десятковъ. Середина очень часто оказывается въ подобныхъ случаяхъ не удовлетворительной. Природный педагогическій тактъ учащаго можетъ быть наилучшимъ руководителемъ при сужденіи объ удовлетворительности и умѣстности полнаго отвѣта.

§ 16. Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ ступенямъ первоначальнаго курса ариѳметики, позволимъ себѣ остановиться на вопросѣ о терминахъ. Научныя опредѣленія въ этомъ курсѣ надозволительны, какъ мы объ этомъ имѣли случай не разъ говорить ранѣе. Но съ терминами дѣти все-таки должны и могутъ быть ознакомлены. Такъ, ими можетъ быть, безъ помощи опредѣленій, усвоено, что значатъ слова: „сложить“, „вычесть“, „умножить“, „раздѣлить“, „сколько разъ содержится“, „слагаемое“, „сумма“, „уменьшаемое“, „вычитаемое“ и „остатокъ“, „множимое“, „множитель“ и „произведеніе“, „дѣлимое“, „дѣлитель“, „частное“ и „отношеніе“. Но при этомъ съ терминологіей каждаго дѣйствія дѣтей надо знакомить уже послѣ того, какъ это дѣйствіе *понято* учащимся, послѣ того какъ ими усвоена цѣль, логическій смыслъ, простѣйшій случай примѣненія и какой либо пріемъ совершенія дѣйствія хотя бы надъ однозначными числами. При этомъ не должно давать опредѣленій, а должно только *выяснить*, что сложить одно число съ другимъ значитъ прибавить второе къ первому, и т. п.

Только относительно кратнаго сравненія должно соблюсти нѣкоторую осторожность: называть въ этомъ случаѣ данныя числа дѣлимымъ и дѣлителемъ не слѣдуетъ при первоначальномъ обученіи; не слѣдуетъ также называть результатъ кратнаго сравненія частнымъ, ибо эта терминологія не довольно обоснована въ этомъ курсѣ. Мы поэтому считаемъ болѣе удобнымъ слѣдующую терминологію кратнаго сравненія: дѣлимое можно называть первымъ числомъ, дѣлителя—вторымъ, а частное—отношеніемъ перваго числа ко второму.

§ 17. Когда четыре дѣйствія усвоены дѣтьми въ намѣченномъ выше объемѣ, можно перейти къ нумераціи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ. (I, 521—530). Выясненіе примѣненія уже усвоенной дѣтьми идеи нумераціи къ трехзначнымъ числамъ не представляетъ особенныхъ затрудненій, если прибѣгнуть къ счетамъ, а въ особенности къ спичкамъ, и если дѣти прочно усвоили себѣ нумерацію двузначныхъ чиселъ и счетъ отъ ста до 999-ти. Болѣе трудностей представляетъ введеніе новой единицы счета—тысячи. Трудности эти зависятъ, впрочемъ, главнымъ образомъ отъ того, что еще недостаточно развитое воображеніе ребенка не сразу соглашается обособить десять сотенъ въ одну единицу, а непривычка къ обобщеніямъ препятствуетъ распространить законъ нумераціи далѣе. Изъ наглядныхъ пособій при этомъ наибольшую услугу оказываютъ, конечно, „солома" и счеты. Но учащій не долженъ особенно огорчаться первоначальными неуспѣхами дѣтей въ этомъ направленіи: прежде чѣмъ ребенокъ не совершенно свыкся съ идеею тысячи, ему очень трудно оріентироваться въ нумераціи четырехзначныхъ чиселъ. Для внесенія разнообразія въ занятія нумераціею четырехзначныхъ чиселъ полезно заняться сложеніемъ большихъ двузначныхъ и небольшихъ трехзначныхъ чиселъ, а также сложеніемъ и вычитаніемъ трехзначныхъ чиселъ. (I, 531—547). При домашнемъ обученіи полезно прибѣгать къ соломѣ и наглядному составленію суммы и разности данныхъ чиселъ по закону нумераціи, при классномъ же—къ счетамъ торговымъ и шведскимъ, если счеты послѣдняго рода имѣются въ распоряженіи класса и если употребленіе спичекъ почему либо неудобно *).

Само собою разумѣется, что для пріученія дѣтей къ сознательному, толковому, съ полнымъ разумѣніемъ, производству дѣйствій сложенія и вычитанія необходимо, чтобы они умѣли вслухъ объяснять процессъ производства дѣйствія. При этомъ надо стре-

*) При обозначеніи чиселъ четырехзначныхъ должно пріучить дѣтей къ отдѣленію цыфры тысячъ отъ остальныхъ большимъ промежуткомъ, чѣмъ какимъ отдѣляются цыфры сотенъ, десятковъ и единицъ одна отъ другой. Запятая въ этомъ случаѣ неумѣстна по понятнымъ причинамъ.

миться къ тому, чтобы дѣти сложеніе однозначныхъ чиселъ производили безъ записки и не повторяя каждый разъ полученныхъ суммъ. Такъ, должно пріучить дѣтей къ слѣдующему способу сложенія: 3 да 7—десять, да 4—четырнадцать, да 2—шестнадцать, да 8—двадцать четыре и т. д. Что же касается вычитанія, то при первоначальномъ обученіи должно пріучать къ способу, основанному на раздробленіи единицы ближайшаго разряда въ единицы низшаго, когда вычитаніе иначе невозможно. Трудности представляются только при стеченіи двухъ или нѣсколькихъ нулей въ уменьшаемомъ. Но если усвоена самая идея такъ называемаго займа или, вѣрнѣе, раздробленія одной единицы высшаго разряда, то дѣти легко себѣ усваиваютъ не только технику, но и самую сущность производства вычитанія,—въ особенности, если сущность этого производства выяснена на наглядныхъ пособіяхъ (спичкахъ и счетахъ). При этомъ замѣчательна слѣдующая разница между сложеніемъ и вычитаніемъ: въ то время какъ при сложеніи въ наглядномъ видѣ даны оба числа, при вычитаніи въ наглядномъ видѣ дано только уменьшаемое, вычитаемое же либо удерживается въ умѣ, либо записывается на бумагѣ или доскѣ.

§ 18. Слѣдующую ступень обученія составляетъ умноженіе многозначныхъ чиселъ (меньшихъ десяти тысячъ) на однозначныя. Первоначально, притомъ довольно долго, надо разсматривать это дѣйствіе съ точки зрѣнія равныхъ между собою слагаемыхъ. Такъ должны быть разсматриваемы, напр., всѣ упражненія подъ №№ 561—575 въ первой ч. нашего „Методическаго Сборника“: потеря времени при этомъ получится не большая, а для выясненія сущности дѣла это окажется крайне полезнымъ. Особенныхъ трудностей на этой ступени не представляется. Упражненія письменныя (I, 576—600) должны чередоваться изустными упражненіями въ умноженіи небольшихъ двузначныхъ на небольшія однозначныя числа. При этомъ вниманіе дѣтей должно быть обращено также и на разницу между изустнымъ и письменнымъ производствомъ умноженія на однозначное число: разница эта заключается въ томъ, что при устномъ вычисленіи начинаютъ съ единицъ высшаго, а при письменномъ—съ единицъ низшаго разряда. Если учащій не слишкомъ спѣшитъ перейти къ механическому производству умноженія, дѣти необыкновенно основательно усваиваютъ себѣ смыслъ умноженія и способъ его производства. По большей части они сами, безъ указанія учителя, доходятъ до пользы предварительнаго сложенія равныхъ между собою разрядныхъ чиселъ съ цѣлью прибавленія къ полученному оставшихся отъ предшествующаго сложенія единицъ того же разряда. Поэтому сначала не должно мѣшать сложенію въ порядкѣ менѣе удобномъ, при которомъ оставшееся отъ сложенія число даннаго высшаго разряда прибавляется къ первому изъ равныхъ между собою единицъ того же разряда. Время, потерянное при этомъ выжиданіи, нельзя считать потеряннымъ безслѣдно *).

§ 19. Умноженіе многозначныхъ чиселъ на многозначныя, по нашему крайнему разумѣнію, выходитъ за предѣлы первоначальнаго курса ариѳметики, равно какъ и дѣленіе многозначныхъ на многозначныя. Но во всякомъ случаѣ послѣ умноженія чиселъ на однозначное число слѣдуетъ перейти къ дѣленію чиселъ на однозначное число. Начать должно съ вычисленія частныхъ, въ которыхъ число цыфръ равно числу цыфръ дѣлимаго, при чемъ каждая цыфра дѣлимаго обозначаетъ число кратное дѣлителя; таковы примѣры:

286 | 2 , 369 | 3 , 693 | 3 , 864 | 2 и т. п.

(такихъ примѣровъ въ ч. I-й нашего „Сборника“ не предложено); затѣмъ можно перейти къ рѣшенію задачъ на дѣленіе съ болѣе трудными данными (I, 601—615) и къ вычисленію соотвѣтствующихъ примѣровъ (I, 616—640). Здѣсь учителю приходится много работать надъ случаями, когда число цыфръ частнаго меньше числа цыфръ дѣлимаго и вообще когда не каждая цыфра дѣлимаго дѣлится на дѣлителя. При этомъ наиболѣе затруднительнымъ является для учащихся ученіе о дѣленіи, если учитель имѣетъ привычку говорить: 3 сотни нельзя раздѣлить на 4 равныя части и т. п. Поэтому ему, если у него есть эта привычка, прежде всего надо отдѣлаться отъ нея и пріучить дѣтей отыскивать *не цыфры* частнаго, а *разряды* его. Въ этомъ заключается центръ трудностей дѣленія. На этой ступени требуется строгая методичность и постепенный переходъ отъ чиселъ двузначныхъ къ трехзначнымъ, отъ этихъ послѣднихъ къ четырехзначнымъ и т. д. Чѣмъ лучше дѣти себѣ усвоятъ способъ производства дѣленія двузначнаго числа на однозначное въ случаяхъ, дающихъ въ результатѣ число двузначное, тѣмъ, конечно, легче будетъ преодолѣніе остальныхъ трудностей этой ступени. Поэтому на указанный случай должно обратить особенное вниманіе. Дѣло въ томъ, что ранѣе дѣти научились только тѣмъ случаямъ дѣленія двузначнаго числа на однозначное, которые сводятся къ болѣе или менѣе непосредственной помощи данныхъ таблицы умноженія; поэтому они, будучи въ состояніи раздѣлить довольно большое двузначное число, напр., на 8 или на 9, не въ состояніи раздѣлить небольшое, сравнительно, число, напр., 28 или 34, на дру-

*) Очень полезно при этомъ упражнять дѣтей въ примѣненіи перемѣстительнаго закона къ случаямъ, когда множитель есть число однозначное, а множимое—число многозначное. Помимо болѣе твердаго усвоенія этого закона и пользы, которая при этомъ можетъ быть извлечена для цѣлей изученія умноженія, это оказывается почти необходимымъ при кратномъ сравненіи многозначныхъ чиселъ съ однозначными. См. ниже.

гое очень небольшое, напр., на 2, или 45 и 48 на 3, и т. д. *) Къ этимъ случаямъ дѣти не умѣютъ прилагать своего знанія таблицы умноженія, а потому ихъ прежде всего должно научить производству дѣленія двузначнаго числа на однозначное, дающему въ результатѣ болѣе десяти. При этомъ учащій, конечно, не долженъ забывать, что не только при выясненіи *идеи* о дѣйствіи дѣленія, но даже при производствѣ этого дѣйствія, онъ долженъ строго отличать дѣйствіе дѣленія на части отъ дѣйствія кратнаго сравненія, такъ какъ на этой ступени дѣти еще не могутъ выработать себѣ точное понятіе о причинѣ почему каждый изъ этихъ случаевъ можетъ быть логически приведенъ къ другому изъ нихъ. Что касается дѣленія трехзначнаго и четырехзначнаго числа на однозначное, то принципъ производства этого дѣйствія въ случаѣ многозначнаго дѣлимаго тотъ же, что въ случаѣ дѣлимаго двузначнаго, дающаго при раздѣленіи на даннаго дѣлителя двузначное же частное А потому, если этотъ послѣдній случай дѣтьми ранѣе усвоенъ основательно, то особенно большихъ трудностей на этой ступени обученія ариѳметикѣ уже не предвидится.

Когда мы имѣемъ дѣло съ дѣленіемъ числа на нѣсколько равныхъ частей, напр., 3744 на 6, то при этомъ первоначально ходъ разсужденій можетъ быть слѣдующій: въ каждой изъ этихъ частей не можетъ быть ни одной тысячи, потому что если бы въ ней была хоть одна тысяча, то во всемъ числѣ было бы не меньше 6-ти тысячъ а въ немъ тысячъ всего 3. Далѣе: во всемъ числѣ сотенъ 37; въ каждой шестой долѣ этого числа болѣе, чѣмъ одна сотня, потому что и т. д; въ ней болѣе чѣмъ 3 сотни, болѣе чѣмъ 4 сотни, болѣе, чѣмъ 5 сотенъ, но не болѣе, чѣмъ 6 сотенъ, потому что и т. д. Дальнѣйшее совершенно аналогично только что изложенному Должно замѣтить, что въ началѣ не мѣшаетъ приучить дѣтей къ слѣдующему обозначенію частнаго: 600 + + 20 + 4

Когда же мы имѣемъ дѣло съ кратнымъ сравненіемъ, напр., 3744-хъ съ 6-тью, то разсуждать можно такъ: въ 3-хъ тысячахъ шесть единицъ не могутъ содержаться тысячу разъ, потому что если взять 6 единицъ тысячу разъ, то при этомъ получится то

---

*) Этотъ фактъ дѣлаетъ, между прочимъ, возможною практическую и научную оцѣнку тѣхъ методъ обученія ариѳметикѣ, въ основѣ которыхъ лежитъ такъ называемое „изученіе“ чиселъ и которыя, поэтому, особенное значеніе приписываютъ величинѣ самыхъ чиселъ, а не сущности и способамъ производства надъ ними ариѳметическихъ дѣйствій Онъ доказываетъ, что при производствѣ дѣленія даже на однозначное число, трудность заключается вовсе не въ величинѣ дѣлимаго, т. е. числа „изучаемаго“, а въ самой логикѣ ариѳметическаго дѣйствія и его производства

же, что получилось бы, если бы мы взяли одну тысячу 6 разъ, т. е получилось бы 6000, а у насъ всего 3000. Остальное можетъ быть поведено сообразно съ только что изложеннымъ и притомъ аналогично съ дѣйствіемъ дѣленія на равныя части.

Взаимное соотношеніе дѣйствій дѣленія на равныя части и кратнаго сравненія не должно, повторяемъ, на этой ступени затрагивать: первоначальное обученіе ариѳметикѣ можетъ преслѣдовать только близъ лежащія цѣли, не задаваясь научными перспективами и ограничиваясь только первоначальными, основными ариѳметическими понятіями, умѣніями и знаніями.

Всѣмъ выше изложеннымъ съ присоединеніемъ рѣшенія простыхъ чисто ариѳметическихъ задачъ въ соотвѣтствующемъ пройденному объемѣ (I, 641—700) можно бы ограничиться при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ, такъ какъ нумерація во всемъ объемѣ и дѣйствія (во всемъ объемѣ) надъ многозначными числами съ *одной стороны* выходятъ за предѣлы первоначальнаго курса, а съ другой стороны составляютъ существеннѣйшій элементъ курса систематическаго. Тѣмъ не менѣе мы здѣсь изложимъ нѣкоторыя соображенія о первоначальномъ прохожденіи и этихъ статей, такъ какъ установленный нами выше взглядъ на первоначальное обученіе не принадлежитъ къ числу общепризнанныхъ.

§ 20. Въ основѣ нумераціи вообще (по какой угодно системѣ счисленія) лежитъ только идея о томъ, что отношеніе единицы одного разряда къ единицѣ слѣдующаго разряда есть число постоянное. Въ десятичной системѣ счисленія отношеніе это равно десяти; но какъ только мы переходимъ отъ письменнаго счисленія къ счисленію устному, то вскорѣ появляется необходимость разбить число также и на классы, каковой необходимости остальныя системы счисленія вовсе не подчиняются. Такимъ образомъ въ основѣ нумераціи по десятичной системѣ лежатъ, строго говоря, двѣ идеи: 1) идея о десятичномъ отношеніи единицъ смежныхъ разрядовъ, и 2) идея о необходимости введенія нѣкотораго единообразія въ группировкѣ разрядныхъ чиселъ, т. е. о необходимости введенія классовъ: единицъ, тысячъ, милліоновъ, билліоновъ и т. д. Съ первою идеею дѣти достаточно свыклись, имѣя дѣло съ трехзначными числами, вторая же проявляется, хотя сначала и въ не довольно рѣзкой формѣ, съ переходомъ отъ трехзначныхъ чиселъ къ четырехзначнымъ. Та послѣдовательность, какой должно держаться при ознакомленіи дѣтей съ единицами первыхъ трехъ разрядовъ, на дальнѣйшихъ ступеняхъ уже не цѣлесообразна, такъ какъ, при обозначеніи тысячъ, милліоновъ и т. д. примѣняются то же правило и тѣ же словесныя обозначенія, съ которыми связано обозначеніе трехзначныхъ чиселъ. Говоря иначе, дѣти должны понять: 1) что придумывать для единицъ каждаго изъ еще не извѣстныхъ имъ разрядовъ (они знаютъ только разряды единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ) было бы очень неудобно. и 2) что эти неудобства устранены благодаря тому, что число тысячъ считается такъ же, какъ считается любое число единицъ перваго разряда, меньшее тысячи, и что поэтому съ помощью цыфръ принято обозначать число тысячъ на тѣхъ же точно основаніяхъ, на какихъ обозначаются числа перваго класса. Для того чтобы дѣти поняли единообразіе въ обозначеніи цыфрами единицъ различныхъ классовъ, ихъ весьма полезно пріучить къ отдѣленію тысячъ отъ сотенъ промежуткомъ величиною не много менѣе ширины одной цыфры. Запятая не вполнѣ пригодна для этой цѣли, такъ какъ этотъ знакъ имѣетъ спеціальное значеніе при обозначеніи десятичныхъ дробей. Кромѣ того, въ жизни и даже въ наукѣ числа рѣдко *превышаютъ милліоны*, а для распознаванія чиселъ съ большимъ количествомъ цыфръ и запятыя оказываются недостаточно отдѣляющими различные классы. Когда дѣти вполнѣ усвоили себѣ способъ изображенія помощью цыфръ шестизначныхъ чиселъ, ихъ можно ознакомить съ милліонами и т. д., хотя лучше ранѣе поупражнять ихъ въ соотвѣтствующемъ сложеніи и вычитаніи.(I, 701—740). Считаемъ при этомъ умѣстнымъ замѣтить, что въ нашихъ сочиненіяхъ принята такъ называемая трехразрядная (французская) система классовъ: тысяча тысячъ—милліонъ, тысяча милліоновъ—билліонъ, тысяча билліоновъ—трилліонъ, и т. д. Эта система за послѣднее время пріобрѣла право гражданства и заслуженныя ею симпатіи въ большинствѣ учебниковъ и учебныхъ пособій предпочтительно предъ другими весьма основательны.

Съ твердымъ усвоеніемъ нумераціи усвоеніе дѣтьми первыхъ двухъ дѣйствій не представляетъ такихъ трудностей, на которыхъ здѣсь стоило бы останавливаться.

§ 21. За-то тѣмъ больше трудностей представляютъ дѣйствія умноженія и дѣленія на многозначное число и кратное сравненіе многозначныхъ чиселъ.

Главнѣйшая трудность выясненія умноженія многозначнаго числа на многозначное состоитъ въ пріученіи дѣтей къ сознательному, хотя и инстинктивному отчасти примѣненію распредѣлительнаго закона, по которому

$(a+b+c+\ .\ .\ \ +m)\times A=a\times A+b\times A+c\times A+\ .\ .\ .\ +m\times A$;

ибо для того, чтобы вывести, что

$$375\times10=3750$$

надо принять къ свѣдѣнію, что

$$375\times10=(300+70+5)\times10=(10\times300)+(10\times70)+(10\times5),$$

т. е. равняется

$$3000+700+50 \text{ или } 3750.$$

Еще больше трудностей на той ступени обученія, на которой дѣти знакомятся съ умноженіемъ на нѣсколько единицъ одного разряда. Здѣсь, кромѣ сказанныхъ двухъ законовъ, находитъ примѣненіе также и законъ сочетательный, по которому произведеніе не мѣняется отъ перемѣны въ группировкѣ производителей, т. е. законъ, по которому

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

дѣйствительно, умноженіе 375 на 70 (т. е. на 7×10) сводится къ умноженію этого числа сначала на 7, а потомъ на 10, или сначала на 10 а потомъ на 7.

Что же касается умноженія на многозначное число съ нѣсколькими значащими цыфрами, то здѣсь прилагается законъ распредѣлительный въ болѣе обширномъ его примѣненіи, а именно законъ, по которому произведеніе изъ одной суммы на другую можетъ быть выражено въ видѣ суммы частныхъ произведеній каждаго слагаемаго первой суммы на каждое слагаемое второй *).

Если предыдущее проработано основательно, то это преодолѣвается сравнительно легко. О сказанныхъ законахъ говорить, конечно, не слѣдуетъ, такъ какъ они въ общемъ видѣ дѣтямъ недоступны и такъ какъ, къ счастію, возможно, даже ни разу не формулировавъ ихъ, легко достигнуть того, чтобы учащіеся вполнѣ уяснили и сознательно усвоили себѣ тѣ промежуточныя разсужденія, которыя впослѣдствіи приводятъ къ окончательному правилу умноженія многозначнаго числа на многозначное. Но при этомъ долженъ быть соблюденъ нѣкоторый порядокъ, и характеръ упражненій, которыя на этихъ ступеняхъ должны быть проработаны при непосредственной помощи учителя.

Прежде всего должны быть усвоены: умноженіе многозначнаго числа на 10, умноженіе однозначнаго числа единицъ какого либо разряда на 10, и умноженіе любого многозначнаго числа на 10. (I, 741—750). Затѣмъ должно быть усвоено умноженіе на однозначное число десятковъ (I, 751—755). Далѣе тѣ же умѣнія должны быть усвоены по отношенію къ единицамъ высшихъ разрядовъ (I, 756—763). Послѣ этого можетъ быть пройдено умноженіе многозначнаго на многозначное же и притомъ по слѣдующей схемѣ: пусть требуется умножить 4283 на 245. Изобразивъ это требованіе такъ:

245 разъ:
4283 отберемъ сначала только пять слагаемыхъ, потомъ
4283 40, и наконецъ — 200. Пять слагаемыхъ дадутъ въ
4283 суммѣ
: 4283×5, т. е. 21415,
: сорокъ слагаемыхъ дадутъ
: 4283×40, т. е. $(4283\times10)\times4$,
—4283 наконецъ 200 слагаемыхъ дадутъ
4283×200, т. е. $(4283\times100)\times2$.

*) Законъ этотъ въ видѣ алгебраической формулы можетъ быть выраженъ такъ: $(A+B+\ldots+M)(a+b+\ldots+m)=$
$=Aa+Ab+\ldots+Am+Ba+Bb+\ldots+Bm+\ldots+Ma+Mb+\ldots+Mm$.

Само собою разумѣется, что дѣтямъ непонятны такія символическія обозначенія, а потому съ ними должны быть эти пріемы пройдены путемъ болѣе нагляднымъ, на которомъ не считаемъ необходимымъ останавливаться по его очевидности.

§ 22. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ на многозначныя представляетъ больше техническихъ трудностей, —въ особенности при крупныхъ дѣлителяхъ. Дѣтямъ (да и не только дѣтямъ, но и взрослымъ, не достигшимъ большей или меньшей опытности въ вычисленіяхъ) наиболѣе трудностей представляетъ необходимость „задаваться“ цыфрою частнаго. Пусть требуется раздѣлить 11205 на 1245; не только ребенокъ, но, повторяемъ, и довольно опытный счетчикъ не сразу скажетъ цыфру частнаго и даже не опредѣлитъ съ перваго взгляда—раздѣлится ли первое число на второе. Но это не должно помѣшать выясненію общаго пріема опредѣленія частнаго и сущности этого пріема. Сущность этого пріема состоитъ въ равномѣрномъ закругленіи дѣлителя и дѣлимаго. Такъ въ нашемъ примѣрѣ высшій предѣлъ цыфры частнаго опредѣляется такъ: 11205, раздѣленныя на 1245 единицъ, не могутъ дать больше, чѣмъ 11200, раздѣленныя на 1200, а 11200, раздѣленныя на 1200, не могутъ дать больше, чѣмъ сколько дадутъ 11000, раздѣленныя на 1000, т. е. не можетъ дать болѣе 11-ти. Хотя мы это и знали ранѣе, но это число (11) показываетъ намъ, что мы имѣемъ дѣло съ довольно крупнымъ частнымъ. Насколько справедливо это разсужденіе, можно судить по тому, что если бы первая цыфра дѣлителя была 2, то и тогда мы получили бы въ частномъ число, близкое къ 5-ти; здѣсь, стало быть, имѣемъ число, большее 5-ти.

Само собою разумѣется, что подобныя разсужденія кажутся только сначала очень трудными для дѣтскаго пониманія; но нельзя отрицать, что техническія трудности дѣленія далеко не могутъ быть пренебрегаемы при первоначальномъ обученіи.

§ 23. Въ заключеніе считаемъ необходимымъ сказать нѣсколько словъ по поводу нѣкоторыхъ условныхъ выраженій и нѣкоторыхъ примѣненій четырехъ дѣйствій къ частнымъ случаямъ. Къ числу этихъ условныхъ выраженій принадлежатъ выраженія: „на столько-то больше или меньше“, „увеличить“ и „уменьшить“ число „на столько-то“, „во столько-то разъ больше или меньше“, „увеличить“ и „уменьшить число во столько-то разъ“ и т. п. Ознакомленіе дѣтей съ этими выраженіями и пріученіе ихъ къ примѣненію случаевъ, характеризуемыхъ этими выраженіями, отнесено нами подъ самый конецъ первоначальнаго курса ариѳметики. Ранѣе усвоенія дѣтьми самаго смысла и цѣли ариѳметическихъ дѣйствій, ранѣе пріобрѣтенія ими умѣнія справляться съ техническими трудностями устнаго и письменнаго производства, невозможно основательное усвоеніе ими этихъ выраженій и примѣненіе дѣйствій даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ, при которыхъ употребительны эти выраженія. (I. 861—971). Само собою разумѣется, что и при проработкѣ этихъ новыхъ, хотя и чисто словесныхъ элементовъ курса, небезполезно прибѣгать къ нагляднымъ пособіямъ и почти необходимо исходить изъ задачъ. Но не должно забывать, что эти элементы выходятъ за предѣлы рамокъ, назначенныхъ нами первоначальному обученію.

По нашему крайнему разумѣнію первоначальное обученіе ариѳметикѣ въ намѣченныхъ нами предѣлахъ умѣстно: 1) въ приготовительныхъ классахъ средн. учебн. завед., въ коихъ эти классы имѣются; 2) въ школахъ, приготовляющихъ дѣтей къ первому классу средн. учебн. завед., и при домашнемъ обученіи, преслѣдующемъ ту же цѣль, и 3) въ низшихъ классахъ тѣхъ учебныхъ заведеній, которыхъ курсъ выше курса начальной народной школы съ трехлѣтнимъ курсомъ, какъ то: въ училищахъ городскомъ, двуклассномъ и т. п.

Для выясненія значенія условныхъ выраженій въ родѣ вышеупомянутыхъ, отъ учащаго не требуется никакихъ особенныхъ пріемовъ, если онъ къ нимъ приступитъ не слишкомъ рано. Только въ случаѣ большой поспѣшности и игнорированія принципа, по которому учащемуся въ каждый моментъ обученія должно быть задаваемо только по одной работѣ за-разъ, можетъ оказаться, что дѣтямъ недоступно пониманіе разницы между значеніемъ выраженій: „на столько-то“ и „во столько-то разъ больше“ и т. п.

Глава V.

Ариѳметика какъ предметъ общаго и спеціальнаго образованія.

§ 1. Курсы ариѳметики: первоначальный—цѣлыхъ чиселъ, полный практическій и повторительный теоретическій. — § 2. Содержаніе полнаго практическаго курса ариѳметики.—§ 3. О роли задачъ при прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики.—§ 4. О наглядныхъ пособіяхъ при прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики.—§ 5. Изученіе нумераціи. -§ 6. О сложеніи цѣлыхъ чиселъ.—§ 7. О вычитаніи.—§ 8. Объ умноженіи.-§ 9. О дѣленіи —§ 10. Объ измѣненіи искомыхъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненія данныхъ.—§ 11 О случаяхъ, допускающихъ сокращеніе въ вычисленіяхъ.—§ 12. Употребленіе скобокъ.—§ 13. О рѣшеніи задачъ ариѳметическихъ и алгебраическаго характера.—§ 14. Преобразованіе именованныхъ чиселъ и четыре дѣйствія надъ ними.—§ 15. О задачахъ на вычисленіе времени и геометрическихъ.—§ 16. Ученіе о дѣлителяхъ и соприкасающіяся съ ними ученія —§ 17. Понятіе о дробяхъ, обозначеніе ихъ, измѣненіе и преобразованіе ихъ.—§ 18. Нахожденіе частей цѣлаго и цѣлаго по частямъ —§ 19. Четыре дѣйствія надъ обыкновенными дробями.—§ 20. О десятичныхъ дробяхъ и дѣйствіяхъ надъ ними.—§ 21. О періодическихъ дробяхъ. -§ 22. Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ.—§ 23. Задачи на простое и сложное тройное правило.—§ 24. Задачи на правило процентовъ и учета векселей.—§ 25. Задачи на *правило пропорціональнаго дѣленія и смѣшенія*.—§ 26. Задачи на правило сроковъ.—§ 27. О непрерывныхъ дробяхъ.—§ 28. Употребленіе учебника при прохожденіи курса ариѳметики въ низшихъ классахъ среднихъ и др. учебныхъ заведеній, близкихъ по своему курсу ариѳметики къ среднимъ.—§ 29. О дополнительныхъ статьяхъ по предмету ариѳметики.—§ 30. Статьи объ измѣреніи, числѣ и нумераціи.—§ 31. Статья о четырехъ дѣйствіяхъ надъ числами.—§ 32. Статьи о дѣлителяхъ, первоначальныхъ числахъ, общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ числѣ.—§ 33. *Статья о дробяхъ*.—§ 34. *Статья о пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ*.—§ 35. Статья о сокращенныхъ вычисленіяхъ.—§ 36. Курсъ ариѳметики въ учительскихъ семинаріяхъ, институтахъ, реальныхъ, коммерческихъ и техническихъ училищахъ.—§ 37. Методика ариѳметики какъ педагогическая дисциплина въ курсѣ учительскихъ семинарій и институтовъ.—§ 38. Польза, которую принесло бы введеніе методики преподаванія различныхъ отраслей низшей математики въ число необязательныхъ предметовъ отдѣленія физико-математическихъ наукъ математическихъ факультетовъ.

§ 1. Первоначальный курсъ ариѳметики представляетъ собою основу и фундаментъ всего курса ариѳметики, подлежащаго прохожденію въ ср. уч. зав., хотя онъ и заключаетъ въ себѣ только простѣйшія ученія о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами въ самыхъ простыхъ случаяхъ ихъ примѣненія. Мы умышленно не употребляемъ при этомъ термина „пропедевтическій курсъ ариѳметики“, такъ какъ съ этимъ терминомъ связаны нѣкоторыя представленія, совершенно чуждыя идеямъ выше развитаго и разсмотрѣн наго первоначальнаго курса. Цѣль этого послѣдняго заключается: 1) въ методической выработкѣ въ умѣ учащихся вѣрныхъ и правильныхъ идей о счетѣ и четырехъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, и 2) въ обогащеніи ихъ совокупностью такихъ первоначальныхъ ариѳметическихъ представленій, на почвѣ которыхъ могла бы быть впослѣдствіи построена система ариѳметическихъ понятій и ученій, возможно близкая къ системѣ учебника практической ариѳметики,—системѣ, несомнѣнно содержащей въ себѣ нѣкоторыя научно-теоретическія идеи и перспективы.

Курсъ ариѳметики, подлежащій прохожденію въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, согласно тѣмъ требованіямъ, которыя къ нему могутъ быть предъявлены съ педагогической и практической точекъ зрѣнія и которыя къ нему на самомъ дѣлѣ представляются учебными планами преподаванія интересующаго насъ предмета въ заведеніяхъ М. Н. Пр., — этотъ курсъ содержитъ въ себѣ ученіе объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ во всемъ его объемѣ, но безъ изложенія всѣхъ теорій во всей ихъ полнотѣ. Стоитъ разсмотрѣть программу курса I и II классовъ классическихъ гимназій, чтобы убѣдиться въ справедливости выше сказаннаго. Программы эти гласятъ:

„Нумерація десятичной системы. Повтореніе дѣйствій надъ цѣлыми отвлеченными числами. Таблица русскихъ мѣръ наглядно и съ объясненіемъ. Раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ. Дѣйствія надъ составными именованными числами. Устное и письменное рѣшеніе задачъ. Ознакомленіе съ простѣйшими дробями.“

„Признаки дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и 10. Разложеніе чиселъ на простые множители. Дѣйствія надъ обыкновенными и десятичными дробями какъ отвлеченными, такъ и именованными. Періодическія дроби. Ознакомленіе учащихся съ метрическою системою мѣръ. Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ. Устное и письменное рѣшеніе задачъ, относящихся ко всему пройденному.“

Курсъ перваго класса, очевидно, не содержитъ никакихъ особенно затруднительныхъ теоретическихъ элементовъ; не много теоретическихъ элементовъ содержитъ также и курсъ второго класса: въ немъ даже не упомянуты теоріи общаго наибольшаго дѣлителя, наименьшаго кратнаго числа и первоначальныхъ чиселъ. Вообще и слова „теорія“ не находимъ въ программахъ этихъ двухъ классовъ, что убѣждаетъ насъ вмѣстѣ съ тѣмъ необыкновенно простымъ взглядомъ на курсъ, которымъ проникнуты эти программы, что курсъ низшихъ классовъ ср. уч. зав. не долженъ быть загромождаемъ теоретическими элементами интересующаго насъ предмета обученія. Что касается курса третьяго класса, то его составляютъ ученія о такъ называемыхъ тройныхъ правилахъ, о которыхъ рѣчь будетъ ниже и которыя, во всякомъ случаѣ, не вносятъ въ курсъ низшихъ классовъ ничего существенно новаго въ смыслѣ ариѳметическихъ теорій.

Нельзя не признать поэтому, что выше охарактеризованный взглядъ оффиціальной програмы, какъ мы о томъ не разъ имѣли случай говорить въ нѣкоторыхъ своихъ работахъ, весьма значительно расходится со взглядами большинства составителей учебниковъ и учебныхъ пособій по предмету ариѳметики. Большинство гг. составителей учебниковъ склонно вносить въ курсъ массу, часто недоступныхъ ученикамъ низшихъ классовъ, теоретическихъ элементовъ, а составители учебныхъ пособій вносятъ въ число задачъ такія, которыя вовсе не относятся ко всему пройденному въ низшихъ классахъ, напр., задачи алгебраическаго характера, методы рѣшенія которыхъ лежатъ за предѣлами практическаго курса ариѳметики. Мы лично всегда были склонны смотрѣть на курсъ ариѳметики низшихъ классовъ ср. уч. зав., какъ на курсъ далеко не теоретическій, и неоднократно въ своихъ работахъ обращали вниманіе на самую цѣль и характерныя особенности этого курса. Цѣль эта заключается въ полномъ и сознательномъ усвоеніи всѣхъ, если можно такъ выразиться, ариѳметическихъ умѣній, не выходящихъ за предѣлы четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами; характерная его особенность заключается въ отсутствіи въ немъ ариѳметическихъ теорій въ ихъ научной формѣ.

Что же касается внесенія теоретическихъ элементовъ въ обиходъ ариѳметической мысли учащихся, то оно наиболѣе умѣстно при такъ называемомъ повтореніи ариѳметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія. Этотъ взглядъ легъ въ основу нашего „Методическаго сборника ариѳметическихъ задачъ“ (ч. II), а равно „Учебника ариѳметики съ приложеніемъ дополнительныхъ статей по предмету ариѳметики“. Повторительный теоретическій курсъ ариѳметики (отнесенный въ нашемъ Учебникѣ въ отдѣлъ „дополнительныхъ статей“) долженъ въ себѣ содержать изложеніе всѣхъ теорій, лежащихъ въ основѣ ариѳметики-искусства, и долженъ по отношенію къ курсу ариѳметики низшихъ классовъ играть приблизительно ту же роль, какую этотъ послѣдній играетъ по отношенію къ первоначальному курсу ариѳметики цѣлыхъ чиселъ.

Такимъ образомъ курсъ ариѳметики можно различать троякій: 1) первоначальный, основанія и сущность котораго изложены въ предыдущей главѣ и который долженъ быть учащимся усвоенъ до поступленія въ первый классъ ср. уч. зав., 2) полный практическій, который долженъ быть пройденъ въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, и 3) повторительный теоретическій, подлежащій прохожденію въ одномъ изъ высшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія. — Во избѣжаніе недоразумѣній мы должны замѣтить, что въ цѣломъ курсъ такъ наз. начальныхъ (сельскихъ и городскихъ) школъ, а равно двуклассныхъ и другихъ училищъ, долженъ болѣе или менѣе совпадать съ полнымъ практическимъ курсомъ ариѳметики, выше нами охарактеризованнымъ, причемъ курсъ перваго года обученія въ подобныхъ учебн. зав., конечно, долженъ быть первоначальнымъ *).

§ 2. Въ курсъ ариѳметики низшихъ классовъ, кромѣ ученій о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, входятъ: ученіе объ именованныхъ числахъ, ученіе о дѣлителяхъ, о дробяхъ обыкновенныхъ и десятичныхъ, объ отношеніяхъ и пропорціяхъ и, наконецъ, о такъ называемыхъ тройныхъ правилахъ.

Ученіе о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами должно быть пройдено во всемъ своемъ объемѣ, со всею терминологіею ихъ и въ примѣненіи къ рѣшенію какъ простыхъ, такъ и сложныхъ чисто-ариѳметическихъ (а по обычаю—и алгебраическихъ) задачъ. Хотя эти ученія не могутъ быть пройдены въ низшихъ классахъ со всѣмъ аппаратомъ аксіомъ, теоремъ и слѣдствій, характеризующимъ то же ученіе въ теоретическомъ курсѣ, но опредѣленія въ этомъ курсѣ тѣмъ не менѣе должны отличаться совершенною научностью и точностью.

Ученіе объ именованныхъ числахъ представляетъ собою не иное что, какъ только примѣненіе ученій о дѣйствіяхъ надъ отвлеченными числами къ случаямъ, когда величины выражены въ видѣ именованныхъ чиселъ. Существенно новыхъ элементовъ ученіе объ именованныхъ числахъ не представляетъ. Даже болѣе того: весь курсъ именованныхъ чиселъ можно разсматривать какъ рядъ задачъ чисто-ариѳметическихъ, разрѣшаемыхъ съ помощью весьма простыхъ разсужденій и посредствомъ четырехъ дѣйствій надъ числами отвлеченными. Дѣйствительно: тѣ преобразованія именованныхъ чиселъ, которыя извѣстны подъ именами раздробленія и превращенія именованныхъ чиселъ, представляютъ собою весьма незамысловатыя примѣненія ученій объ умноженіи и дѣленіи чиселъ отвлеченныхъ; что же касается четырехъ дѣйствій надъ составными именованными, то они представляютъ собою тѣ же дѣйствія надъ числами отвлеченными, осложненныя необходимостью прибѣгать при этомъ иногда къ раздробленію (при вычитаніи и дѣленіи составныхъ именованныхъ чиселъ) и къ превращенію (при сложеніи и вычитаніи ихъ).

Совсѣмъ инымъ характеромъ отличаются тѣ статьи о цѣлыхъ числахъ, которыя въ учебникахъ обыкновенно предшествуютъ ученію о дробяхъ: эти статьи представляютъ собою осколки такъ называемой Теоріи чиселъ и притомъ не находятся въ явной зависимости отъ ученія о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми чи-

*) Ср. „Методика ариѳметики, съ приложеніемъ Сборника упражненій по ариѳметикѣ для учащихъ", составленную нами для учителей преимущественно народныхъ школъ (М. 1886).

слами: и методы здѣсь, и руководящія идеи совершенно особенныя. Нѣкоторыя изъ этихъ статей находятся въ тѣснѣйшей связи съ принятою системою нумераціи и такими свойствами ариѳметическихъ функцій (суммы, разности, произведенія и частнаго), которыя не входятъ въ ученіе о четырехъ дѣйствіяхъ: таково ученіе о признакахъ дѣлимости чиселъ. Другія статьи, напротивъ, совершенно не зависятъ отъ системы счисленія и касаются, такъ сказать, самой природы чиселъ: таковы ученія о первоначальныхъ числахъ, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ. Статьи обоихъ родовъ не могутъ быть, по слишкомъ понятнымъ причинамъ, пройдены въ низшихъ классахъ съ надлежащею, въ научномъ отношеніи, полнотою и точностью. Понятно поэтому, что охарактеризованныя статьи проходятся тоже только практически, кромѣ того этимъ объясняется также причина, почему въ „Учебныхъ планахъ предметовъ, преподаваемыхъ въ классическихъ гимназіяхъ" всѣ эти статьи включены всего подъ двѣ рубрики: „признаки дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и 10" и „разложеніе чиселъ на простые множители" и почему въ „Планахъ" ничего не сказано о *теоріяхъ* общаго наибольшаго дѣлителя, наименьшаго кратнаго, первоначальныхъ чиселъ и т. п.

Ученіе объ обыкновенныхъ дробяхъ тѣснѣе соприкасается съ ученіемъ о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, чѣмъ помянутыя ученія изъ теоріи чиселъ. Хотя въ основѣ ученія о дробяхъ лежитъ вообще независимое отъ ученія о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами понятіе о доляхъ единицы, но дальнѣйшее развитіе ученія о дробяхъ вытекаетъ изъ ученія о полномъ частномъ, происходящемъ отъ раздѣленія одного цѣлаго числа на другое, и о дѣйствіяхъ надъ числами цѣлыми. Что же касается ученія о дробяхъ десятичныхъ, то оно всецѣло основано на ученіи о нумераціи и дѣйствіяхъ надъ цѣлыми отвлеченными числами. Только ученіе о періодическихъ дробяхъ не можетъ быть изложено со всей научной строгостью, съ какою оно можетъ быть изложено въ теоретическомъ курсѣ, свободно располагающемъ всѣми ученіями (изъ теоріи чиселъ и изъ теоріи предѣловъ), которыя необходимы для научнаго обоснованія теоріи періодическихъ дробей.

Что касается ученія объ отношеніяхъ и пропорціяхъ, то оно выходитъ за предѣлы чисто ариѳметическихъ ученій, а отличается скорѣе аналитико-алгебраическимъ характеромъ. Ариѳметикѣ, строго говоря, чужды ученія о формулахъ и уравненіяхъ, а отношенія и пропорціи, въ особенности послѣднія, представляютъ собою не иное что какъ именно нѣкоторыя формулы, обладающія извѣстными аналитическими свойствами. Небезоснователенъ поэтому тотъ взглядъ на ученія объ отношеніяхъ и пропорціяхъ, по которому эти ученія неумѣстны въ курсѣ ариѳметики. Этого взгляда держится большинство германскихъ педагоговъ-математиковъ, а равно и многіе русскіе авторы (напр., Гурьевъ, Мазингъ). Но во всякомъ случаѣ, если когда либо эти ученія и будутъ исключены изъ курса ариѳметики, то отъ этого нимало не проиграетъ ученіе о такъ наз. тройныхъ правилахъ, такъ какъ всѣ безъ исключенія задачи на эти правила разрѣшаются съ помощью способа приведенія къ единицѣ гораздо проще и естественнѣе, чѣмъ съ помощью *пропорцій*. *Впрочемъ, нельзя не признать,* что самое ученіе о пропорціяхъ и рѣшеніе задачъ на тройныя правила съ помощью пропорцій заключаютъ въ себѣ не мало моментовъ, могущихъ сыграть нѣкоторую роль въ развивательномъ отношеніи.

§ 3. При первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ задачи, какъ мы видѣли выше, играютъ очень важную роль основного руководящаго начала, дающаго почву для выработки въ умѣ учащихся, путемъ нагляднымъ и психологическимъ, тѣхъ понятій, которыя составляютъ предметъ дальнѣйшей логической работы надъ ученіями ариѳметики. Кромѣ того мы видѣли, что при первоначальномъ обученіи главнѣйшимъ образомъ важны задачи простыя изъ числа чисто ариѳметическихъ. При прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики въ низшихъ трехъ классахъ ср. уч. зав. роль задачъ не исключительно наглядно-психологическая: хотя очень многія понятія подлежатъ и въ этомъ курсѣ выработкѣ именно съ помощью *простыхъ* задачъ, но за-то въ немъ не могутъ быть также игнорируемы: 1) задачи съ болѣе или менѣе искусственными выраженіями и условіями, 2) задачи на примѣненіе пріобрѣтенныхъ логическимъ путемъ ученій ариѳметики, и 3) задачи, въ чисто практическія условія которыхъ облечены тѣ или другія теоретическія ученія ариѳметики. Кромѣ того силою обычая установлены также упражненія въ не-алгебраическомъ рѣшеніи въ низшихъ классахъ задачъ строго-алгебраическаго характера. При этомъ, какъ это само собою разумѣется, является потребность въ *методической* проработкѣ задачъ, преслѣдующей строго-методическія цѣли. Позволяемъ себѣ замѣтить, что при составленіи нами ч. II нашего „Методическаго Сборника ариѳметическихъ задачъ для ср. уч. заведеній“ пишущимъ эти строки руководило стремленіе къ строго-методическому расположенію задачъ и упражненій. Таковое ихъ расположеніе даетъ возможность учащему выполнить то требованіе разумной педагогики, по которому „обучать другихъ чему нибудь значитъ показать имъ, что они должны сдѣлать для того, чтобы этому научиться“ *).

---

*) Да позволено намъ будетъ здѣсь замѣтить, что въ обоихъ частяхъ нашего „Методическаго Сборника“ задачи одного рода соединены вмѣстѣ и что учащему не трудно въ нихъ разыскать задачи одного типа, такъ

Ибо, строго говоря, дѣтеи очень трудно, если не невозможно, основательно научить чему нибудь, не поставивъ ихъ предварительно въ условія, психологически необходимыя для выработки въ ихъ умѣ данныхъ понятій и логическихъ навыковъ.

Само собою разумѣется, что руководящею при проработкѣ задачъ можетъ быть только методическая точка зрѣнія; остальныя же точки зрѣнія должны играть второстепенную роль. Испоконъ вѣка какъ-то установилось совмѣстное съ обученіемъ ариѳметикѣ рѣшеніе задачъ болѣе или менѣе доступнаго дѣтскому пониманію содержанія. Отсутствіе у нѣкоторыхъ изъ гг. преподавателей и составителей учебниковъ и задачниковъ вполнѣ ясной идеи какъ о главнѣйшей роли задачъ было причиною того, что ариѳметика проходилась часто, да и нынѣ иногда проходится, какъ бы сама по себѣ, а задачи рѣшаются сами по себѣ, и что связь между курсомъ и задачами часто пребывала и доселѣ иногда пребываетъ лишь чисто внѣшняя. Въ большинствѣ, чтобы не сказать—во всѣхъ задачникахъ, если не считать весьма почтенныхъ работъ г. Воронова, г. Гики и нѣкотор. другихъ, методическая связь задачъ съ проходимыми въ данный моментъ ученіями ариѳметики почти совершенно игнорируется, и если изъ всѣхъ употребительныхъ задачниковъ одинъ отличается чѣмъ нибудь особенно отъ другого, такъ чаще всего только степенью хаотичности нагроможденнаго въ немъ матеріала. Одни, сторонники такъ называемаго „*изученія*“ чиселъ ввергаютъ

какъ число задачъ каждаго типа у насъ есть число непремѣнно круглое (5, 10, 15, 20 и т. д.) и такъ какъ задачи смѣшанныя либо совсѣмъ выдѣлены въ отдѣльную рубрику, либо помѣщены въ концѣ каждаго отдѣла. Мы считали долгомъ своимъ позаботиться преимущественно о методическомъ распредѣленіи задачъ, возложивъ на учащаго заботу о томъ, чтобы дѣтямъ не принесла вреда такая группировка задачъ по типамъ, и тѣмъ смѣлѣе мы надѣемся въ этомъ отношеніи на учащаго, что вредъ, который можетъ принести сказанная группировка, весьма призраченъ, если отъ учащагося постоянно требовать сознательнаго, съ полнымъ разумѣніемъ, каждый разъ мотивируемаго, примѣненія даннаго ариѳметическаго ученія. Кромѣ того да будетъ намъ позволено здѣсь же замѣтить, что наши задачи алгебраическаго характера выдѣлены въ отдѣльныя рубрики и что онѣ тоже расположены по типамъ, а не какъ попало. Считаемъ также своимъ пріятнымъ и несомнѣннымъ долгомъ заявить, что ни съ чѣмъ несравнимую услугу намъ принесли, въ дѣлѣ предпочтенія принятой нами методы цѣлесообразныхъ задачъ другимъ методамъ обученія ариѳметикѣ, бесѣды съ достопочтеннымъ К. Д. Краевичемъ, авторитетными совѣтами котораго мы неоднократно пользовались также и при составленіи нѣкоторыхъ другихъ сочиненій нашихъ. Но само собою разумѣется, что при этомъ вся отвѣтственность за качества нашихъ посильныхъ трудовъ лежитъ, конечно, исключительно на авторѣ и что только хорошія качества ихъ, буде таковыя есть въ нашихъ работахъ, должны быть объяснены добрыми совѣтами и указаніями лицъ, совѣтами и мнѣніями которыхъ мы пользовались или были наведены на нѣкоторые изъ высказываемыхъ и проводимыхъ нами взглядовъ.

учащаго и учащагося въ хаосъ, составленный изъ различныхъ дѣйствій, и думають, что лучемъ, освѣщающимъ этотъ хаосъ, является величина числа. Другіе, составители задачниковъ для гимназій и др. среднихъ учебныхъ заведеній, не увлекающіеся этимъ принципомъ, иногда ввергаютъ насъ въ конгломератъ такихъ задачъ съ условіями, которыя изощряють находчивость только немногихъ учениковъ, наиболѣе и особенно способныхъ къ разсужденіямъ о величинахъ и ихъ взаимныхъ отношеніяхъ, но при этомъ ни мало не приносятъ осязательной пользы большинству, стремящемуся къ усвоенію ариѳметики, какъ искусства вычисленія. Эти составители думають, что они своими рубриками: „задачи на сложеніе", „задачи на всѣ дѣйствія" и т. п., учащему даютъ руководящую идею при выборѣ задачъ, и не замѣчаютъ при этомъ, что въ предлагаемой ими системѣ почти нѣтъ никакого луча свѣта. Третьи думають вполнѣ удовлетворить васъ исключительно количествомъ задачъ и пишутъ по англійскимъ, французскимъ и др. источникамъ задачники, которыхъ „не поднять и не понять", какъ выразился одинъ нашъ ученый по поводу наиболѣе распространеннаго въ его время объемистаго учебника по предмету геометріи. Эти послѣдніе, вѣроятно, думаютъ, что не въ методическомъ расположеніи, а въ количествѣ ихъ вся сила. Легко понять, что и этотъ взглядъ не вполнѣ согласенъ съ истинно-педагогическими и научными требованіями, которымъ всякій сборникъ ариѳметическихъ задачъ долженъ удовлетворять, хотя не подлежитъ сомнѣнію, что задачникъ долженъ представлять достаточный выборъ упражненій. Наконецъ, четвертые думаютъ, что главная сила въ томъ словесномъ матеріалѣ, который дается въ этихъ задачникахъ. Къ числу подобныхъ сочиненій принадлежатъ, кромѣ сочиненій г. Лубенца, проф. Бугаева и Верещагина, также почтенный трудъ гг. Арбузова, Мининыхъ и Назарова. Изъ поименованныхъ составителей нѣкоторые (въ томъ числѣ и г. Лубенецъ) опираются на указанный Бэномъ психологическій фактъ попутнаго усвоенія памятью какъ-разъ тѣхъ данныхъ, на усвоеніе которыхъ менѣе всего обращалось вниманіе. Руководясь этимъ, упомянутые составители берутъ числовыя данныя для своихъ задачъ изъ области различныхъ наукъ, дабы дѣти такимъ образомъ невольно усвоили себѣ тѣ или другія интересныя числовыя данныя. Это былъ бы вполнѣ достойный вниманія взглядъ, если бы цѣль ариѳметическихъ задачъ не была цѣлью вполнѣ спеціальною, если бы, далѣе, числовыя данныя на самомъ дѣлѣ легко запоминались независимо отъ нашей воли и отъ нашего вниманія, и если бы, наконецъ, сторонники этого взгляда не слишкомъ преувеличивали важность запоминанія (хотя бы и попутнаго) числовыхъ данныхъ изъ разныхъ областей знанія. Къ сожалѣнію, числовыя данныя вовсе не легко запоминаются: для ихъ запоминанія требуется спеціальная память, къ развитію которой вовсе не должны стремиться никакіе сборники ариѳметическихъ задачъ, такъ какъ цѣль этихъ пособій — обученіе ариѳметикѣ, а не усвоеніе (безсознательнымъ путемъ случайнаго запоминанія или же сознательнымъ — выучиванія) числовыхъ данныхъ изъ разныхъ областей знанія. Числовой матеріалъ ариѳметическихъ задачъ — вполнѣ второстепенная частность, которой нѣкоторыми придается столь большое значеніе вслѣдствіе не довольно правильнаго взгляда на роль ариѳметическихъ задачъ какъ таковыхъ. Это — одна изъ тѣхъ внѣшнихъ особенностей нѣкоторыхъ задачниковъ, которымъ слѣдуетъ приписывать гораздо меньшее значеніе, чѣмъ какимъ обладаютъ: слогъ и изложеніе задачъ, ихъ расположеніе и методическая послѣдовательность и т. д. Важно, правда, чтобы области, изъ коихъ берется матеріалъ для задачъ, были доступны пониманію учащихся, чтобы числовыя данныя не противорѣчили истинѣ и дѣйствительности, чтобы, напримѣръ, фунтъ сахару не стоилъ 2 руб., чтобы разстояніе отъ Москвы до Петербурга не равнялось двумъ тысячамъ верстъ, чтобы отецъ не былъ старше своего сына на 6 лѣтъ, и т. д. Но отъ этихъ требованій здраваго смысла до приписыванія числовому составу задачи какого-то особеннаго, частью мистическаго (бар. Корфъ), частью научно-практическаго значенія (гг. Лубенецъ и мн. др.) очень далеко *).

Итакъ, роль задачъ при прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики должна быть, да чаще всего и бываетъ преимущественно методическая. Что касается роли задачъ при повторительномъ теоретическомъ курсѣ, то она, сравнительно, не значительна: здѣсь гораздо важнѣе упражненія въ доказательствѣ теоремъ, подобныя тѣмъ, которыми снабжены сочиненія Бертрана,

---

*) Усвоеніе на-память числовыхъ данныхъ едва ли не требуетъ спеціальной памяти, иногда не зависящей даже отъ научной спеціальности даннаго лица. На-ряду съ Эмилемъ Дюбуа-Рэмономъ (проф. физіологіи Берлинскаго университета), помнящимъ наизусть массу числовыхъ данныхъ изъ астрономіи, химіи, физики, географіи, исторіи и литературы, возможно, чтобы даже превосходный математикъ помнилъ спрямленіе окружности (число π) только съ двумя цыфрами послѣ запятой, а натуральное основаніе — съ семью цыфрами, несмотря на то, что спрямленіемъ окружности онъ пользовался (именно мимоходомъ) несравненно чаще, чѣмъ натуральнымъ основаніемъ. Вѣроятно, и среди читателей этихъ строкъ не мало найдется лицъ, которыя не тверды въ таблицѣ мѣръ аптекарскаго вѣса и не помнятъ величины стадіи и греческаго таланта, несмотря на то, что они десятки разъ мимоходомъ читали о взаимномъ отношеніи единицъ аптекарскаго вѣса и о величинѣ стадіи или таланта. Обученіе ариѳметикѣ и рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ не должны и, кажется, даже не могутъ преслѣдовать усвоеніе дѣтьми цыфровыхъ данныхъ, которыя имъ, можетъ быть, никогда не понадобятся. Но, кромѣ того, едва ли полезное вліяніе на умъ учащагося должно оказать загроможденіе условій сравнительно простыхъ задачъ чуждыми умственному горизонту его цыфровыми и словесными данными.

Серре (въ пер. г. Юденича) и нѣк. другія. Къ сожалѣнію, нельзя не замѣтить, что по недостатку времени подобнымъ упражненіямъ не можетъ быть отведено достаточно мѣста въ повторительномъ теоретическомъ курсѣ ариѳметики.

§ 4. Прежде чѣмъ перейти къ детальированнымъ методическимъ указаніямъ относительно различныхъ статей полнаго курса ариѳметики низшихъ классовъ, считаемъ необходимымъ сдѣлать общее замѣчаніе на-счетъ употребленія при прохожденіи этого курса наглядныхъ пособій. Эти послѣднія надо различать двухъ родовъ: 1) пособія, преслѣдующія цѣль ознакомленія дѣтей съ разными единицами мѣръ, и 2) пособія, помогающія проработкѣ тѣхъ или иныхъ статей курса. О пособіяхъ перваго рода должно замѣтить, что дѣти должны имѣть о нѣкоторыхъ единицахъ мѣры непремѣнно наглядное представленіе: таковы величина фута, аршина, дюйма, вершка и т. под. Извѣстно, что большинство взрослыхъ не обладаютъ такимъ глазомѣромъ, чтобы безошибочно отложить на бумагѣ или на веревочкѣ длину аршина, фута, дюйма, вершка. Было бы поэтому ошибочно требовать отъ дѣтей подобнаго глазомѣра, и не объ его развитіи должно заботиться при обученіи ариѳметикѣ. Но необходимо, чтобы дѣти изъ опыта знали — что̀ больше: футъ или аршинъ, дюймъ или вершокъ, и знали это не только теоретически и благодаря своей памяти, но также и благодаря наглядному ознакомленію съ этими мѣрами. Желательно было бы, съ практической точки зрѣнія, подобное ознакомленіе ихъ также и съ величиною метра и десиметра, съ вѣсомъ фунта, лота и т. п.

Что касается наглядныхъ пособій второго рода, преслѣдующихъ цѣли лучшаго усвоенія статей ариѳметики, то наилучшимъ изъ нихъ должно считать обыкновенные русскіе счеты. Очень полезны счеты такого устройства, чтобы, во 1-хъ, они были значительно больше обычныхъ торговыхъ счетовъ и, 2-хъ, чтобы проволоки различныхъ классовъ были отдѣлены другъ отъ друга болѣе значительнымъ промежуткомъ, чѣмъ проволоки разныхъ разрядовъ одного и того же класса. Такъ называемая „солома“ (спички) тоже могутъ быть небезполезны на всѣхъ ступеняхъ обученія, если въ томъ представляется надобность. За-то употребленіе всѣхъ элементовъ такъ называемаго ариѳметическаго ящика врядъ ли можетъ быть оправдано, такъ какъ бруски и доски, какъ объ этомъ не разъ заявлено выше, не представляютъ собою той аналогіи десяткамъ и сотнямъ, которая желательна при прохожденіи нумераціи и первыхъ двухъ дѣйствій надъ двузначными и трехзначными числами, а отдѣльные кубики тоже на врядъ ли могутъ годиться для какихъ либо учебныхъ цѣлей, когда имѣешь дѣло съ учащимися старше 10-ти лѣтъ.

Наконецъ, относительно дробныхъ счетовъ различнаго устройства должно сказать, что они могутъ быть отнесены къ числу пособій, преслѣдующихъ наглядное усвоеніе дѣтьми скорѣе величины долей, чѣмъ тѣхъ или иныхъ ученій о дробяхъ. Такъ какъ понятіе дроби и сужденіе о величинѣ различныхъ аликвотныхъ долей (т. е. такихъ дробей, которыхъ числитель равенъ единицѣ) принадлежитъ къ числу понятій и сужденій, вовсе не представляющихъ при своемъ усвоеніи какихъ либо особенныхъ затрудненій, и такъ какъ, кромѣ того, такъ называемые дробные счеты довольно дороги, то ихъ пріобрѣтенію для школъ нельзя сочувствовать. *Болѣе того:* гдѣ такіе счеты даже имѣются на-лицо, тамъ, думается намъ, учителю тоже чрезвычайно рѣдко приходится къ нимъ прибѣгать. Наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ при первоначальномъ усвоеніи дѣтьми основныхъ представленій о дробяхъ можетъ служить листъ или даже лента бумаги, *которую можно* весьма легко раздѣлить на 2, на 4, на 8 и т. д. частей и которой раздѣленіе на иное число частей тоже можетъ быть, при нѣкоторомъ развитіи глазомѣра, произведено болѣе или менѣе удачно. Полезно раздать учащимся подобныя ленты разной длины, но это полезно, конечно, вовсе не для упражненія ихъ въ раздѣленіи подобныхъ лентъ по глазомѣру (это умѣніе не имѣетъ никакого отношенія къ ариѳметикѣ), а только для нагляднаго усвоенія ими мысли о возможности подобнаго *раздѣленія данной длины на равныя между собою части* и самыхъ основныхъ понятій о дробяхъ.

§ 5. Трудности изученія десятичной системы нумераціи могутъ обусловливаться тремя причинами: 1) либо дѣти не усвоили себѣ устнаго счета во всемъ его объемѣ, 2) либо они не научились находить быстро и безошибочно отношеніе между устными и письменными обозначеніями, 3) либо наконецъ для нихъ непонятны двѣ идеи, лежащія въ основѣ десятичной системы нумераціи, а именно идея о единицахъ разныхъ разрядовъ и идея о единицахъ разныхъ классовъ.

Въ первомъ случаѣ дѣтей надо пріучить къ мысли, что тысячи и милліоны (объ остальныхъ классахъ можно сначала умолчать) считаются *точно такъ же, какъ единицы простыя: это одинъ* изъ затруднительнѣйшихъ моментовъ ученія о десятичной нумераціи. Эти упражненія могутъ и должны быть исключительно устными. Въ случаѣ если отношеніе между устною и письменною нумераціею не вполнѣ усвоено учащимися, то надо обратить особенное вниманіе на этимологическую сторону числительныхъ именъ. Система упражненій (причемъ тоже непремѣнно устныхъ) можетъ совпадать съ системою намѣченною въ §§ 1—7 нашего „Учебника ариѳметики съ приложеніемъ дополнительныхъ статей по предмету ариѳметики, для сред. учеб. зав." М. 1887 *). Сначала надо выяснить тождественность натуральныхъ числительныхъ именъ (напр. совокупности словъ „двѣсти пятнадцать") съ соотвѣтствующею совокупностью именъ числительныхъ съ именами существительными (напр. съ совокупностью словъ: „двѣ сотни, одинъ десятокъ и пять единицъ"). Когда это сдѣлано, выясненіе способа обозначенія какого нибудь однозначнаго, двузначнаго или трехзначнаго числа единицъ какого либо изъ высшихъ классовъ не представитъ особенныхъ затрудненій, тѣмъ болѣе, что практически десятичная система нумераціи усвоена дѣтьми до поступленія въ I-й классъ сред. учеб. зав.—Что касается, наконецъ, усвоенія идеи о разницѣ между разрядомъ и классомъ, то трудности этой идеи только въ такомъ случаѣ значительны, когда все предшествующее этой идеѣ въ ученіи о нумераціи не достаточно основательно усвоено.

Когда все вышеохарактеризованное усвоено, можно приступить къ систематическимъ письменнымъ упражненіямъ въ нумераціи („Мет. Сб." ч. II, №№ 1—15). Отъ одной методической ошибки считаемъ долгомъ предостеречь учащаго: отъ предложенія учащимся на этой ступени обученія задачъ на умноженіе и дѣленіе вида: сколько единицъ въ *a* сотняхъ или *b* единицахъ какого либо другого разряда и сколько всего единицъ какого либо высшаго разряда содержится въ столькихъ-то единицахъ даннаго низшаго разряда. Задачи этихъ типовъ на данной ступени обученія неумѣстны по причинѣ того, что онѣ не могутъ быть съ достаточною и необходимою точностью разрѣшены учащимся безъ помощи умноженія и кратнаго сравненія.

На интересующей насъ ступени умѣстны задачи, въ которыхъ упоминаются наименьшія и наибольшія числа о данномъ числѣ цыфръ (II, 8, 9, 11 и 12) и задачи на распознаніе—какое изъ данныхъ двухъ чиселъ больше (II, 15). Дѣтей обыкновенно сначала затрудняютъ задачи перваго рода. Поэтому, предложивъ имъ обозначить помощью цыфръ, напр., наименьшее пятизначное число, надо, чтобы они (въ случаѣ если они затрудняются) сначала обозначили какое либо пятизначное число. Какъ бы оно мало ни было, надо имъ предложить вопросъ: не могутъ ли обозначить число о пяти цыфрахъ, но меньшее даннаго числа. Дальнѣйшій путь понятенъ самъ собою, но должно воздерживаться по возможности долго отъ правила, по которому наименьшее число о данномъ числѣ цыфръ есть единица даннаго разряда, а наибольшее—число, каждая изъ цыфръ котораго обозначаетъ девять; воздерживаться отъ правила надо для того,

*) Ниже мы ссылки на эту книгу будемъ сокращать такъ: „Уч. ар." §§ 1—8, а ссылки на ту или иную изъ „дополнительныхъ статей" такъ: „Доп. ст." II, § 3, и т. п.

чтобы дѣти не слишкомъ механично усвоили себѣ одну изъ особенностей десятичной системы.

При письменномъ и словесномъ (не цифровомъ) обозначеніи чиселъ, само собою разумѣется, необходимо, хотя это и не относится непосредственно къ числу обязанностей учителя ариѳметики, обращать вниманіе на ороографію числительныхъ чиселъ. Но при этомъ вопросъ (столь любимый нѣкоторыми составителями учебниковъ и преподавателями) о числѣ словъ, необходимыхъ для обозначенія чиселъ отъ единицы до какого либо предѣла, долженъ быть оставляемъ безъ вниманія, какъ вопросъ недостаточно точный и вовсе не ариѳметическаго характера. Это тѣмъ справедливѣе, что въ вопросахъ такого рода недостаточно твердо установлено—надо ли слова „сто“ и „триста“ считать различными или второе считать происходящимъ отъ словъ „три“ и „сто“, и т. п. О великихъ удобствахъ устной и письменной десятичной нумераціи дѣтямъ, если бы это понадобилось, можно разсказать безъ помощи занимающаго насъ упражненія, не совсѣмъ ариѳметическаго, но не достаточно точнаго также и въ лингвистическомъ отношеніи характера.

§ 6. Первоначальное понятіе о сложеніи дѣти составили себѣ до поступленія въ I-й классъ, какова бы ни была ихъ подготовка. Поэтому учащій долженъ только удостовѣриться—насколько оно основательно, понимаютъ ли дѣти, что сложеніе замѣняетъ собою счетъ, знаютъ ли они различные случаи, требующіе примѣненія сложенія, усвоили ли они себѣ до поступленія въ I-й классъ идею о цѣли и производствѣ дѣйствія сложенія надъ разрядными числами, знаютъ ли они таблицу сложенія и т. п. Оказавшіеся при этомъ пробѣлы, конечно, должны быть устранены, причемъ въ одинаковой степени необходимо обращать вниманіе какъ на таблицу сложенія, такъ и на условныя выраженія: увеличить на столько-то, больше на столько-то и т. п.

Наибольшее развивательное значеніе имѣютъ при упражненіяхъ въ сложеніи (II, 16—40) слѣдующіе два момента: 1) логическая идея подведенія всѣхъ возможныхъ случаевъ, требующихъ сложенія, подъ одну общую рубрику этого дѣйствія, и 2) идея производства дѣйствія надъ одноименными разрядными числами. Первая идея можетъ быть, при прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики, усвоена съ помощью опредѣленія суммы и сложенія, а вторая—путемъ цѣлесообразныхъ и разнообразныхъ способовъ производства сложенія. Въ главѣ этого сочиненія, трактующей о методологіи ариѳметики, надѣемся, съ достаточною ясностію обоснованы логико-методологическія выгоды тѣхъ опредѣленій прямыхъ дѣйствій, которыя опираются на опредѣленія суммы и произведенія. Сложеніе есть только одинъ изъ способовъ (притомъ, конечно, самый цѣлесообразный) нахожденія числа, которое можетъ быть получено съ помощью счета. Суммою двухъ или нѣсколькихъ называется то число, которое можно получить, *сосчитавъ*—сколько всѣхъ единицъ въ данныхъ числахъ; ее *можно* получить съ помощью счета—въ томъ нѣтъ сомнѣнія; но ариѳметика учитъ иному способу ея нахожденія: она даетъ возможность обойтись безъ непосредственнаго счета и показываетъ, что хотя сумму можно находить и съ помощью счета, но этого дѣлать *не должно*. При прохожденіи курса въ первомъ классѣ можно, если классъ достаточно развитъ, требовать умѣнія подводить всѣ требованія задачъ на сложеніе подъ то опредѣленіе сложенія, по которому сложеніе есть дѣйствіе, цѣль котораго заключается въ отысканіи суммы. Пусть, напр., предложена задача (II, 32): „Продавъ нѣкоторую партію товара за 18400 рублей, оптовый торговецъ получилъ 1465 руб. убытку; спрашивается, что стоилъ ему этотъ товаръ?“ Отъ ученика перваго класса можно требовать приблизительно слѣдующаго разсужденія: торговецъ получилъ убытокъ; стало-быть, онъ получилъ за товаръ меньше, чѣмъ сколько онъ самъ за него заплатилъ; сколько же ему стоилъ этотъ товаръ? онъ стоилъ торговцу столько, сколько онъ за него выручилъ, да еще столько, сколько онъ не довыручилъ (сколько онъ понесъ убытку); стало-быть, надо найти сумму двухъ чиселъ 18400 и 1465, т. е. надо сложить эти два числа“. Мы умышленно взяли задачу съ болѣе сложною фабулой, чтобы по этому учащій могъ судить о степени трудности требуемаго примѣненія опредѣленія къ частному случаю; при этомъ само собою разумѣется, что примѣненіе опредѣленія въ случаяхъ болѣе простыхъ требуетъ отъ учащагося и большей степени пониманія *принципа* сложенія. Ибо учащемуся гораздо понятнѣе дозволительность вопроса—почему онъ въ данномъ сложномъ случаѣ хочетъ примѣнить дѣйствіе сложенія, чѣмъ дозволительность и смыслъ подобнаго вопроса при случаяхъ простыхъ—вродѣ слѣдующаго: „у меня 7 руб., а у тебя 8, сколько у насъ денегъ у обоихъ вмѣстѣ?“ Такъ какъ учащій при этомъ имѣетъ дѣло не съ совершенно малолѣтними дѣтьми, то онъ долженъ озаботиться развитіемъ въ учащихся діалектическихъ пріемовъ, особенное преслѣдованіе которыхъ въ первоначальномъ курсѣ недозволительно ни въ какомъ случаѣ.

Что касается трудностей второго рода, то учащимся должна быть выяснена разница между слѣдующими тремя случаями: а) когда неизвѣстно сколько единицъ въ данной совокупности ихъ, б) когда извѣстно одно изъ слагаемыхъ и мы съ помощью *счета* присоединяемъ къ нему единицы второго, извѣстнаго слагаемаго, и в) когда мы къ единицамъ одного слагаемаго помощью *сложенія* присоединяемъ единицы другого. Въ первомъ случаѣ мы ничего не знаемъ и вся наша задача сводится къ счету, къ простому сосчитыванію; во второмъ часть суммы уже сосчитана и мы, хотя и *знаемъ второе слагаемое, но этимъ знаніемъ* не желаемъ или не можемъ пользоваться (ибо, присчитывая единицы какого либо числа къ другому, мы величину перваго числа оставляемъ безъ вниманія и поступаемъ такъ, какъ будто мы ея и не знаемъ); въ третьемъ же случаѣ мы пользуемся нашимъ знаніемъ обоихъ чиселъ или же большаго числа ихъ, если намъ дано больше двухъ слагаемыхъ; кромѣ того мы пользуемся нѣкоторыми свойствами суммы, изъ которыхъ важнѣйшее состоитъ въ дозволительности разной группировки слагаемыхъ.

При этомъ очень полезно заставлять дѣтей производить дѣйствія: а) въ принятомъ всѣми порядкѣ, б) въ разбивку, *причемъ* частныя суммы должны быть прилично подписываемы одна подъ другою съ нулями, в) по порядку отъ единицы къ высшимъ разрядамъ, но съ приличнымъ записываніемъ частныхъ суммъ другъ подъ другомъ, съ нулями и безъ нулей, и г) по порядку отъ единицъ высшаго разряда къ низшимъ, но съ частными суммами тоже съ нулями и безъ нулей. Такъ, напр., при нахожденіи суммы чиселъ: 275, 487 и 564, пріемы вычисленія, кромѣ обычнаго, могутъ быть слѣдующіе:

275	275	275	275	275
487	487	487	487	487
+ 564	+ 564	+ 564	+ 564	+ 564
210	16	16	1100	11
1100	210	21	210	21
+ 16	+ 1100	+ 11	+ 16	+ 16
1326	1326	1326	1326	1326

Болѣе того: очень полезно заставить дѣтей продѣлать сложеніе также и по слѣдующему образцу, показывающему, что сложеніе чиселъ имѣетъ цѣлью замѣну ихъ такими слагаемыми, изъ которыхъ каждое есть нѣкоторое однозначное число единицъ нѣкотораго разряда:

```
  2567
  3781
  9209
+ 17356
-------
    23
   190
  1700
 21000
+10000
-------
   113
   800
  3000
+30000
-------
     3
    10
   900
  3000
+30000
-------
 33913
```

Цѣль всѣхъ этихъ и имъ подобныхъ упражненій заключается въ лучшемъ выясненіи учащимся самой сущности письменнаго (а также устнаго) способа производства *сложенія*. Дѣти должны понять, что сущность эта состоитъ въ постепенномъ, послѣдовательномъ нахожденіи цыфръ искомой суммы не по величинѣ каждаго изъ слагаемыхъ, а по цыфрамъ, обозначающимъ въ этихъ слагаемыхъ единицы одинаковыхъ разрядовъ. Что такое нахожденіе возможно—вытекаетъ изъ самой системы счисленія. Излагаемый же въ учебникахъ ариѳметики способъ нахожденія этихъ цыфръ есть вообще простѣйшій способъ, хотя примѣненіе его въ случаяхъ, когда дано очень много слагаемыхъ, не очень удобно. Въ *отношеніи увѣренности* въ правильности каждой изъ полученныхъ цыфръ должно замѣтить, что при значительномъ количествѣ слагаемыхъ наиболѣе цѣлесообразенъ способъ постепеннаго опредѣленія и приличнаго записыванія частныхъ суммъ, получаемыхъ отъ сложенія единицъ одинаковыхъ разрядовъ („Уч. ар." § 14). Противъ подобныхъ упражненій могутъ заявить, что они представляютъ собою одинъ изъ видовъ дѣйствительно незаслуживающаго сочувствія бумагомаранія; но это было бы такъ, если бы мы рекомендовали постоянно производить дѣйствіе сложенія такъ, какъ это изображено выше. Мы же рекомендуемъ это упражненіе только для выясненія самой сущности принятаго способа письменнаго производства сложенія. Кромѣ того мы смѣемъ думать, что способъ сложенія по частнымъ суммамъ, не смотря на кажущуюся трату бумаги и времени, чрезвычайно удобенъ при подведеніи итоговъ значительнаго числа слагаемыхъ, такъ какъ этотъ способъ допускаетъ очень быструю и надежную провѣрку интересующаго насъ дѣйствія *).

§ 7. Усвоивъ всю терминологію и всѣ частности (какъ устнаго, такъ и письменнаго) производства сложенія, можно перейти къ вычитанію. Въ основу ученія о вычитаніи въ курсѣ I-го класса можетъ и должно быть положено опредѣленіе вычитанія какъ дѣйствія обратнаго сложенію, т. е. какъ дѣйствія, цѣль котораго заключается въ отысканіи по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ—другого слагаемаго. Хотя съ точки зрѣнія методологической и прямолинейнаго развитія идеи *о прямыхъ дѣйствіяхъ, идея объ обращеніи* дѣйствія возникаетъ, можетъ быть, и позже идеи о спеціализаціи сложенія, *но въ практическомъ отношеніи* удобнѣе перейти (для внесенія большаго разнообразія въ занятія) къ ученію о вычитаніи. Первая методическая трудность заключается при этомъ въ пріученіи дѣтей къ подведенію всѣхъ возможныхъ весьма различныхъ по формѣ своей задачъ, требующихъ вычитанія, подъ рубрику одного дѣйствія, всѣхъ случаевъ, когда дано уменьшаемое и вычитаемое, подъ рубрику случаевъ, когда дана сумма двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, а требуется найти другое. При этомъ важна слѣдующая особенность дѣйствія вычитанія: въ то время какъ этого дѣйствія безразлично требуютъ оба случая обращенія дѣйствія сложенія (т. е. и случай, когда дано первое слагаемое, а требуется найти второе, и случай противоположный), дѣйствительное вычитаніе въ логическомъ (но не ариѳметическомъ)

---

*) На вышеизложенный пріемъ подведенія итоговъ по частнымъ суммамъ обратилъ наше особенное вниманіе А. В. Дамскій, завѣдывающій химическою лабораторіею Имп. Техническаго Общества; отъ него же мы узнали, что въ коммерческихъ вычисленіяхъ очень многіе прибѣгаютъ къ этому способу. *Вообще считаемъ своимъ пріятнымъ долгомъ* выразить г. Дамскому свою благодарность за то, что онъ обратилъ наше вниманіе на нѣкоторые сокращенные способы ариѳметическаго вычисленія.

отношенія отличается отъ разностнаго сравненія довольно значительно. При дѣйствительномъ вычитаніи дана дѣйствительная сумма двухъ чиселъ, изъ которыхъ величина одного извѣстна, а величина другого подлежитъ отысканію; это дѣйствіе состоитъ *въ отдѣленіи* нѣкоторой извѣстной части даннаго числа. При разностномъ же сравненіи уменьшаемое число не есть дѣйствительная сумма вычитаемаго съ искомою разностью; это дѣйствіе сводится къ отдѣленію нѣкоторои не данной части даннаго числа, и при этомъ отдѣляемая часть этого числа не тожественна съ другимъ даннымъ числомъ, а только по величинѣ своей равна ему. Для разъясненія этой логико-ариѳметической тонкости возьмемъ двѣ задачи: 1) у книгопродавца было 150 экз. нѣкотораго сочиненія; онъ продалъ изъ нихъ 76 экз.; сколько у него осталось? 2) у одного книгопродавца было 150 экз., а у другого—76 экз. нѣкотораго сочиненія; спрашивается на сколько экземпляровъ этого сочиненія у перваго изъ нихъ было болѣе, чѣмъ у второго?—Очевидно, что въ первой задачѣ 150 экз. представляетъ собою нѣкоторое *цѣлое*, дѣйствительную часть которой требуется отдѣлить отъ него; во второй же задачѣ число экземпляровъ, принадлежащихъ второму книгопродавцу, очевидно вовсе не представляетъ собою дѣйствительной части числа экземпляровъ, принадлежащихъ первому. Въ первой задачѣ одно число представляетъ собою *дѣйствительную сумму* двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно дано; во второй же одно число можетъ быть только разсматриваемо какъ сумма двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно *только равно* другому данному числу, но съ нимъ вовсе не тожественно. Въ первой задачѣ отъ одного числа экземпляровъ дѣйствительно требуется отдѣлить нѣкоторое число ихъ; во второй же невозможно отдѣлить число экземпляровъ, принадлежащихъ второму книгопродавцу изъ числа экземпляровъ, принадлежащихъ первому, а можно только отъ одного числа экземпляровъ отдѣлить такое число ихъ, которое равно другому данному числу ихъ.

Ошибочно было бы думать, что подобная тонкость излишня и недоступна уму учащагося: она неизлишня потому, что она сразу облегчаетъ учащемуся пониманіе самой сущности всѣхъ задачъ, требующихъ вычитанія или разностнаго сравненія; она не недоступна, потому что, благодаря ей, учащійся скорѣе уясняетъ себѣ сходство въ различіи всѣхъ различныхъ случаевъ, требующихъ вычитанія, и потому, что въ ней не заключается ничего такого, чего нельзя было бы выяснить съ помощью задачъ. Даже болѣе того: гораздо труднѣе и недоступнѣе учащемуся обыкновенно практикуемое смѣшеніе этихъ двухъ видовъ задачъ на вычитаніе во-едино,—смѣшеніе, которое позволительно только тогда, когда учащійся выяснилъ себѣ ихъ ариѳметическое сходство, вовсе не очевидное безъ дальнѣйшихъ разговоровъ. (II. 41—80).

Что касается способовъ производства вычитанія, то, кромѣ усвоеннаго дѣтьми до поступленія въ учебное заведеніе способа должно научить ихъ способу, при которомъ нѣтъ такъ называемаго „займа“ единицъ, а все дѣйствіе совершается съ помощью сложенія. Этотъ послѣдній способъ, къ сожалѣнію, весьма мало распространенъ въ Россіи, хотя (какъ это замѣчено еще Лагранжемъ въ его превосходныхъ лекціяхъ въ Нормальной Школѣ) онъ дѣлаетъ почти невозможными тѣ ошибки въ вычисленіи, которыя дѣлаются при такъ наз. „займѣ“ единицъ. Способъ, интересующій насъ, состоитъ въ томъ, что, начиная съ цыфры простыхъ единицъ, мы ставимъ цыфру, сумма которой съ цыфрою единицъ вычитаемаго даетъ число, единицы котораго равны единицамъ уменьшаемаго; если при этомъ сумма единицъ разности и вычитаемаго даетъ въ суммѣ число двузначное, то цыфра десятковъ прибавляется къ цыфрѣ слѣдующаго разряда вычитаемаго. Точно такъ же поступаютъ съ остальными цыфрами. Для большей ясности сдѣлаемъ вычитаніе по этому способу на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$\begin{array}{r} 5092766 \\ -\underline{1123584} \\ 69182 \end{array}$$

При этомъ разсуждаемъ такъ: 4 да 2—шесть; 2 пишу и перехожу къ десяткамъ. 8 да 8—шестнадцать, 8 пишу, 1 въ умѣ; 1 да 5—шесть да 1 - семь, 1 пишу и перехожу къ тысячамъ, 3 да 9—двѣнадцать, 9 пишу, 1 въ умѣ; 1 да 2—три да 6—девять, 6 пишу и перехожу къ сотнямъ тысячъ; 1 да 9—десять, 0 пишу, 1 въ умѣ; 1 да 4—пять, да 0—пять. Такимъ образомъ мы получили въ разности число 69182.

При нѣкоторомъ навыкѣ этотъ способъ вычитанія приводитъ вѣрнѣе къ правильнымъ результатамъ, чѣмъ обыкновенно практикуемый. Кромѣ этого способа, полезно ознакомить дѣтей съ тѣмъ, при которомъ, когда сдѣланъ „заемъ“ единицы, не уменьшаютъ соотвѣтственный разрядъ уменьшаемаго, а увеличиваютъ на единицу тотъ же разрядъ вычитаемаго. При подобномъ вычисленіи выше предложеннаго примѣра разсуждаютъ слѣдующимъ образомъ: 4 изъ 6-ти 2; 8 изъ 16-ти 8; 6 изъ 7-ми 1; 3 изъ 12-ти 9; 3 изъ 9-ти 6. При этомъ для памяти надъ цыфрою разряда, изъ котораго дѣлается заемъ, полезно ставить точку. Но этотъ способъ, очевидно, уже не представляетъ никакихъ преимуществъ предъ обыкновенно практикуемымъ и интересенъ только въ отношеніи выясненія дѣтямъ сущности обыкновеннаго способа производства вычитанія и его основной идеи. Что же касается производства вычитанія съ помощью такъ наз. ариѳметическаго дополненія, то оно наврядъ-ли можетъ привиться въ низшихъ классахъ ср. уч. зав., несмотря на всѣ удобства и преимущества этого способа и на то, что впослѣдствіи, при логариѳмическихъ вычисленіяхъ, ариѳметическое дополненіе играетъ столь важную роль Хотя Лагранжъ въ одной изъ своихъ лекцій въ Нормальной школѣ и придаетъ этому способу особенно большое значеніе, но въ I кл. ср. уч. зав. способъ ариѳметическаго дополненія наврядъ ли умѣстенъ.

Когда намѣченное выше съ учащимися пройдено основательно, слѣдуетъ обратиться къ смѣшаннымъ задачамъ на оба дѣйствія (II, стр. 13), причемъ особенное вниманіе должно быть обращено на слѣдующіе элементы пройденной части курса: примѣненіе дѣйствій къ случаямъ прибыли и убытка, полное ознакомленіе съ искусственными выраженіями („больше и меньше на столько-то единицъ или столькими то единицами“, „увеличить“, „уменьшить“. „превышаетъ“, и т. п.) и чисто-теоретическія задачи (II, 26 - 30, 56, 61—65 и особенно №№ 66—73).

§ 8. Основное понятіе объ умноженіи дѣти составили себѣ до поступленія въ I-й классъ; тѣмъ не менѣе однако учащій долженъ сначала убѣдиться: 1) въ пониманіи дѣтьми самой идеи дѣйствія умноженія и его роли при нахожденіи суммы равныхъ между собою слагаемыхъ, и 2) въ знаніи таблицы умноженія. Когда то и другое *знаніе вполнѣ достигнуто*, дѣтьми, кромѣ обычнаго *способа производства* дѣйствія умноженія, долженъ быть *усвоенъ тотъ способъ*, который отличается отъ обычнаго тѣмъ, что умноженіе начинается съ единицъ высшаго разряда множителя, а равно и способъ, по которому каждое частное произведеніе каждой цыфры множимаго умножается на каждую цыфру множителя, приличнымъ образомъ записывается подъ другимъ вполнѣ, безъ удерживанія въ умѣ высшей цыфры этого частнаго произведенія. При этомъ послѣднемъ способѣ получается рядъ двузначныхъ чиселъ отъ умноженія всѣхъ цыфръ множимаго на цыфру единицъ множителя, затѣмъ—рядъ двузначныхъ чиселъ отъ умноженія всѣхъ цыфръ множимаго на цыфру десятковъ множителя и т. д. Полученныя такимъ образомъ *частныя произведенія* должны быть потомъ приличнымъ *образомъ* сложены. Кромѣ того, въ особенности *при умноженіи* на двузначнаго множителя, дѣти должны *научиться* умноженію, при которомъ все произведеніе *пишется* сразу, благодаря возможности распознанія—какія цыфры по умноженіи другъ на друга должны дать въ результатѣ десятки, какія—сотни, и т. д. При трехзначномъ множителѣ (не говоря уже о многозначныхъ) подобный способъ производства умноженія, конечно, весьма затруднителенъ и весьма легко допускаетъ возможность ошибокъ; особенно удобенъ этотъ способъ при умноженіи двузначнаго числа на двузначное же, съ котораго, конечно, и должно начать выясненіе этого способа производства умноженія. Цѣль упражненій въ производствѣ умноженія намѣченными выше различными способами, конечно, исключительно развивательная, такъ какъ научить дѣтей въ одинаковой степени умѣло и быстро пользоваться всѣми этими способами навряд-ли возможно и необходимо. Усвоить себѣ навыкъ въ быстромъ выполненіи умноженія дѣти могутъ себѣ только въ томъ случаѣ, если они однимъ изъ нихъ будутъ пользоваться преимущественно предъ другими. Но наиболѣе цѣлесообразнымъ должно признать довольно распространенный въ Германіи и Франціи способъ умноженія, который отличается отъ принятаго у насъ только порядкомъ беромыхъ цыфръ множителя: въ то время какъ у насъ принято начинать съ низшихъ разрядовъ множителя, гораздо цѣлесообразнѣе начинать съ высшихъ его разрядовъ. Еще Лагранжъ замѣтилъ, что такимъ образомъ сразу получаются наивысшія цыфры произведенія (что часто важнѣе всего) и что благодаря этому способу особенные, искусственные пріемы и довольно запутанныя ученія сокращеннаго умноженія (по правилу Ухтреда) становятся почти совершенно излишними. Когда у насъ будетъ рѣчь объ умноженіи десятичныхъ дробей, мы убѣдимся, что великій геометръ былъ совершенно правъ, предпочитая сейчасъ указанный, вполнѣ естественный, способъ умноженія обыкновенно у насъ практикуемому, а равно и способу Ухтреда. Въ лекціяхъ Лагранжа, упоминаемыхъ выше, съ ясностью и опредѣлительностью, какія всегда характеризуютъ изложеніе великаго геометра, говорится: „Прежде всего замѣчу, что при обыкновенномъ способѣ умноженія вычисленіе начинается съ единицъ: единицы множимаго умножаются на единицы множителя и т. д. Но ничто не принуждаетъ насъ начинать непремѣнно съ правой стороны множителя: столь же дозволительно начинать съ лѣвой его стороны и я, право, не постигаю—почему обыкновенно не предпочитается этотъ послѣдній способъ, который обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, что съ его помощью скорѣе можно опредѣлить высшіе разряды произведенія. При умноженіи большихъ чиселъ насъ по большей части интересуютъ высшіе разряды произведенія, и часто все умноженіе дѣлается съ цѣлью опредѣленія одной или двухъ цыфръ наивысшаго разряда его“. *)

---

*) Цитату эту беремъ изъ нѣмецкаго перевода Лагранжевыхъ лекцій, которыхъ мы въ оригиналѣ, къ сожалѣнію, не могли достать: Lagrange's mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. Niedermüller. Lpz. 1880“. Равнымъ образомъ всѣ ссылки на лекціи Лагранжа, читанныя имъ въ нормальной школѣ, сдѣланы нами по этой книгѣ.—Въ трудѣ г. Киселева („Систематическій курсъ ариѳметики для ср. уч. зав.“ СПБ. 1884) на вопросъ о порядкѣ умноженія обращено вниманіе, но преимущество, находимое г. Киселевымъ въ обычномъ способѣ предъ рекомендуемымъ выше, такъ ничтожно въ сравненіи съ преимуществами послѣдняго, что навряд-ли можно согласиться съ почтеннымъ авторомъ. Это преимущество обычнаго способа авторъ видитъ въ трудности записыванія частнаго произведенія на цыфру множителя, слѣдующую за нѣсколькими нулями этого множителя; но эта трудность весьма легко можетъ быть устранена приписаніемъ къ предшествующему этимъ нулямъ произведенію всѣхъ этихъ нулей.

При прохожденіи ученія о производствѣ дѣйствія умноженія особенное вниманіе учащихся должно быть обращено на тѣ законы, которые лежать въ основѣ ученія о производствѣ умноженія, и на то правило, которое, къ сожалѣнію, слишкомъ скоро можетъ обратиться въ безсознательное, механическое умѣніе и по которому умноженіе на единицу какого либо разряда сводится къ приписанію нѣкотораго числа нулей къ множимому. Для того чтобы правило умноженія на единицу какого либо разряда не примѣнялось дѣтьми слишкомъ механически, мало убѣдить ихъ въ логическомъ основаніи этого правила и научить ихъ „доказывать“ это правило: надо разъ-навсегда установить, что при умноженіи на единицу какого либо разряда полезно перемѣщать производителей. Такъ, что $137 \times 10 = 1370$ надо доказывать на томъ основаніи, что

$$137 \times 10 = 10 \times 137.$$

При этомъ встрѣтится необходимость въ цѣломъ рядѣ упражненій, система которыхъ слѣдующая: 1) умноженіе на десять одной единицы любого разряда (правило, соприкасающееся съ нумераціею), 2) умноженіе на 10 любого однозначнаго числа единицъ перваго, второго и высшихъ разрядовъ, 3) умноженіе на однозначное число единицъ второго разряда любого однозначнаго числа единицъ другого разряда, 4) подобная же система упражненій для единицъ третьяго и др. разрядовъ. (II, 81—95). При этомъ на разсматриваемой нами ступени наиболѣе умѣстны упражненія въ опредѣленіи числа всѣхъ единицъ перваго разряда, заключающихся въ данномъ числѣ единицъ разряда высшаго, хотя эти упражненія многими составителями учебныхъ пособій и преподавателями считаются упражненіями въ нумераціи. Этотъ послѣдній взглядъ далеко неправиленъ, потому что напр., вопросъ о томъ сколько единицъ въ 753-хъ сотняхъ, вовсе не вопросъ счисленія, а исключительно вопросъ, требующій, для логическаго своего разрѣшенія, примѣненія умноженія.

Но, несмотря на то, что въ самой основѣ всѣхъ способовъ производства умноженія лежатъ исключительно законы перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный этого дѣйствія, въ I кл. ср. уч. зав. навряд ли возможна словесная формулировка этихъ законовъ и ихъ формальное примѣненіе къ интересующему учащаго моменту обученія. Гораздо поэтому удобнѣе и цѣлесообразнѣе пріучить дѣтей къ сознательному употребленію этихъ законовъ, избѣгая при этомъ ихъ формулировки. При этомъ не слѣдуетъ прибѣгать *къ формуламъ* вродѣ, напр. слѣдующей:

$$300 \times 70 = (3 \times 100) \times (7 \times 10) = (100 \times 10) \times (3 \times 7),$$

которая выражаетъ примѣненіе сочетательнаго закона къ умноженію нѣсколькихъ единицъ одного разряда на нѣсколько единицъ другого, а надо пріучить ихъ къ разсужденіямъ болѣе нагляднымъ вродѣ, напр., слѣдующаго: 300 надо взять слагаемымъ 70 разъ; возьмемъ множимое слагаемымъ 10 разъ: получимъ 3000 (это должно быть ранѣе усвоено); возьмемъ еще 10 разъ, и т. д. Научныя формулы для ученика перваго класса слишкомъ отвлеченны и недоступны во всей своей логической силѣ, а потому и неумѣстны при прохожденіи и повтореніи съ ними ученія о производствѣ умноженія.

Въ качествѣ задачъ на умноженіе (II, 96—110) можно предложить съ большою пользою для дѣла также и задачи на раздробленіе простыхъ (не составныхъ) именованныхъ чиселъ, которое представляетъ собою не иное что, какъ одно изъ самыхъ обычныхъ и простыхъ примѣненій дѣйствія умноженія. Что же касается задачъ на умноженіе съ какою либо теоретическою идеею, облеченною въ условія задачи, то онѣ наиболѣе умѣстны по усвоеніи дѣйствія дѣленія.—Въ заключеніе этого параграфа позволимъ себѣ сказать нѣсколько словъ объ опредѣленіяхъ. Въ основу опредѣленія сложенія, изъ чисто діалектическихъ соображеній (дабы опредѣленіе не было слишкомъ громоздко), лучше всего положить понятіе суммы, а въ основу опредѣленія умноженія—понятіе произведенія. Но каковы бы ни были опредѣленія дѣйствій, они непремѣнно должны быть научны, и усвоеніе ихъ (послѣ надлежащей психологической подготовки учащихся)—conditio sine qua non среднеобразовательнаго курса ариѳметики. Лучше всего прибѣгать къ такимъ опредѣленіямъ, въ которыхъ не предрѣшается способъ производства дѣйствія. См. „Уч. ар." § 11, 16, 21. Въ I кл. ср. уч. зав. дозволительно при этомъ требовать отъ учащагося умѣнія подводить условія задачи подъ опредѣленія.

§ 9. Самыя понятія дѣленія числа на равныя между собою части и кратнаго сравненія двухъ чиселъ не заключаютъ въ себѣ никакихъ особенно трудно усвоиваемыхъ элементовъ: всѣ трудности ученія объ этихъ видахъ дѣйствія дѣленія сконцентрированы, съ одной стороны, въ подведеніи этихъ видовъ дѣленія подъ понятіе объ одномъ дѣйствіи, и съ другой — въ ученіи о производствѣ дѣйствія. Прежде всего дѣти должны до тонкости усвоить себѣ *различіе* между дѣленіемъ числа на равныя части и сравненіемъ двухъ чиселъ въ кратномъ отношеніи. Лучше всего для этой цѣли прибѣгнуть къ рѣшенію задачъ на кратное сравненіе именованныхъ чиселъ въ такомъ случаѣ, когда требуется узнать сколько единицъ какого либо высшаго наименованія содержится въ данномъ числѣ единицъ наименованія низшаго. (II, 114). Въ pendant къ задачамъ этого рода могутъ быть предложены задачи на дѣленіе числа на нѣсколько равныхъ частей. Но при этомъ не должно задавать такія упражненія, которыя непосильны для учащихся по причинѣ трудности выполненія вычисленій: въ этомъ случаѣ получаетъ примѣненіе тотъ обще-педагогическій принципъ, по которому должно избѣгать стеченія нѣсколькихъ трудностей при усвоеніи даннаго ученія. Для внесенія въ ученіе объ интересующихъ насъ видахъ дѣйствія дѣленія полезно научить дѣтей, ранѣе усвоенія ими способа производства кратнаго сравненія, сведенію одного изъ этихъ видовъ къ другому; надо добиться того, чтобы задачу на раздѣленіе, напр. 640 на 8 равныхъ частей, дѣти умѣли сводить къ кратному сравненію 640 съ 8-мью и обратно, чтобы задачу на кратное сравненіе двухъ чиселъ они умѣли сводить къ дѣйствію дѣленія на равныя части. Для этого можно пріучить ихъ къ разсужденіямъ слѣдующаго рода: 640 надо раздѣлить на 8 равныхъ между собою частей; представимъ себѣ, что число 640 разбито на группы по 8-ми единицъ въ каждой, т. е. что оно состоитъ изъ восьмерокъ; взявъ отъ каждой восьмерки по единицѣ, мы получимъ столько единицъ, сколько разъ 8 содержится въ 640; но, взявъ по одной единицѣ изъ каждой восьмерки, мы получимъ столько единицъ въ результатѣ, что это число единицъ составляетъ одну восьмую долю 640-ка. Стало-быть, и т. д. Не подлежитъ сомнѣнію, что разсужденія такого рода очень не легко усвоиваются учащимися въ отвлеченномъ видѣ; а потому для выясненія этой стороны ученія объ обоихъ видахъ дѣленія должно прибѣгнуть къ цѣлому ряду упражненій на наглядныхъ пособіяхъ, — упражненій, въ которыхъ долженъ принять участіе весь классъ, а также каждый ученикъ въ отдѣльности. Время, потраченное на эту частность ученія о дѣленіи, будетъ потрачено не даромъ; эта частность принадлежитъ къ числу тѣхъ, на которыхъ первоначальный курсъ ариѳметики не можетъ останавливаться по причинѣ представляющихся при этомъ трудностей. Но, въ то время какъ въ первоначальномъ курсѣ ариѳметикѣ оба вида дѣленія разсматриваются отдѣльно одинъ отъ другого, въ 1-мъ классѣ ср. уч. зав. обязательно открыть дѣтямъ перспективу объединенія обоихъ видовъ дѣленія въ одно дѣйствіе. Когда вышенамѣченный способъ проработки понятія взаимной связи дѣйствій дѣленія и кратнаго сравненія усвоенъ, можно перейти къ производству дѣйствія. Но если бы усвоеніе взаимной связи обоихъ видовъ дѣленія по причинѣ низкаго уровня развитія даннаго класса оказалось въ данный моментъ не по силамъ большинства, то можно прямо отъ понятія объ интересующихъ насъ видахъ дѣленія перейти къ производству дѣйствія, при чемъ каждый изъ видовъ дѣйствія должно производить согласно спеціальнымъ требованіямъ даннаго вида его. (II, 111—135, 136—150).

Въ то время какъ при прохожденіи ученій о первыхъ трехъ дѣйствіяхъ полезно и даже необходимо ознакомить дѣтей съ различными способами ихъ производства и пріучить ихъ къ употребленію этихъ способовъ, при прохожденіи ученія о производствѣ дѣленія на равныя части и кратнаго сравненія наврядъ ли полезно прибѣгать къ такимъ способамъ, которые должно считать крайне искусственными и неудобными въ практическомъ отношеніи; а таковы всѣ способы производства дѣленія, за исключеніемъ общепринятаго. Такъ, напр., способъ послѣдовательнаго вычитанія меньшаго изъ данныхъ двухъ чиселъ изъ бо́льшаго, при кратномъ ихъ сравненіи. не только не приближаетъ учащагося къ пониманію общепринятаго способа, но даже не состоитъ съ этимъ послѣднимъ ни въ какой методической связи; кромѣ того, онъ просто малополезенъ въ развивательномъ и крайне неудобенъ въ практическомъ отношеніи. Небезполезно, можетъ быть, въ методическомъ отношеніи прибѣгать вначалѣ къ вычитанію лишь въ томъ случаѣ, когда мы вычитаемъ сразу увеличеннаго въ 1000, 100 или 10 разъ дѣлителя, смотря по тому — каковъ наивысшій разрядъ искомаго частнаго; но послѣдовательное вычитаніе дѣлителя изъ дѣлимаго совершенно безполезно въ случаяхъ многозначнаго частнаго. Умѣнію опредѣлять наивысшій разрядъ частнаго, въ случаѣ если оно есть число многозначное, дѣти должны и могутъ быть безъ особеннаго труда научены. Тогда дѣленіе по содержанію можетъ быть совершаемо, для лучшаго выясненія обычнаго способа его производства, по слѣдующему образцу: пусть требуется узнать сколько разъ 19 содержится въ 1086097-ми. Разсуждаемъ такъ: 19 въ данномъ числѣ не содержится ни одного милліона разъ, ни ста тысячъ разъ, потому что и т. д., но 19 содержится въ данномъ дѣлимомъ болѣе 10-ти тысячъ разъ; вычтемъ 19×10000, т. е. 190000, изъ даннаго числа. Вычитаемъ изъ полученнаго остатка еще разъ 190000, получаемъ 706097; вычтя еще разъ то же число, получимъ, и т. д. Такимъ образомъ, вычитая произведеніе изъ 19 на 1000 ровно столько разъ, сколько это необходимо, чтобы въ остаткѣ получилось менѣе, чѣмъ это произведеніе, мы получимъ такимъ образомъ, что это произведеніе содержится въ дѣлимомъ столько-то разъ. Отсюда выведемъ, сколько десятковъ тысячъ разъ 19 заключается въ 1086097-ми. Точно такъ же можно узнать — сколько тысячъ разъ 19 содержится въ послѣднемъ остаткѣ, и т. д. Но этотъ способъ дѣленія можетъ быть полезенъ не для усвоенія дѣтьми еще одного способа производства, а только для выясненія общепринятаго способа производства дѣйствія и для указанія его преимуществъ, на которыя должно быть обращено особенное вниманіе учащихся.

$$\begin{array}{r} 1086097 \\ -\ 190000 \\ \hline 896097 \\ -\ 190000 \\ \hline 706097 \\ -\ 190000 \\ \hline 516097 \end{array}$$

Но способомъ отысканія всѣхъ цифръ многозначнаго частнаго не исчерпываются трудности ученія о производствѣ дѣленія: эти трудности значительны также при отысканіи однозначнаго или двузначнаго числа, если число цифръ дѣлителя болѣе или менѣе значительно. Выше, въ § 22 главы IV-ой, мы коснулись этихъ трудностей; здѣсь же намъ остается замѣтить только то, что при обученіи не должно бороться съ обѣими трудностями за-разъ: надо сначала научить дѣтей отысканію многозначнаго частнаго при небольшомъ дѣлителѣ, затѣмъ—отысканію однозначнаго частнаго при болѣе или менѣе крупныхъ дѣлителяхъ, съ тѣмъ чтобы потомъ перейти къ отысканію многозначнаго частнаго при многозначномъ же дѣлителѣ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ не безполезно научить дѣтей также и тому способу производства дѣленія который основанъ на томъ, что, ранѣе чѣмъ приступить къ этому производству, опредѣляютъ произведеніе даннаго дѣлителя на 2, 3, 4, и т. д. до 9 ти включительно, каковою таблицею произведеній можно съ большимъ успѣхомъ пользоваться въ очень многихъ случаяхъ. См. „Уч. Ар.", отдѣлъ „Дополнительныхъ статей", § 7,ст. III, о дѣйствіяхъ. Для вящшаго укрѣпленія теоретическихъ ученій должно выяснить учащимся на задачахъ (II, 121 – 130) взаимную зависимость произведенія, множимаго и множителя съ одной, и дѣлимаго, дѣлителя и частнаго—съ другой стороны.

Что касается научнаго опредѣленія дѣленія, то оно умѣстно лишь по предварительномъ усвоеніи учащимися теоретическихъ и техническихъ трудностей интересующаго насъ дѣйствія. Кромѣ того должно замѣтить, что задачи (нѣкоторыми составителями помѣщаемыя въ отдѣлѣ нумераціи) на опредѣленіе числа всѣхъ единицъ даннаго разряда, заключающихся въ данномъ числѣ, суть задачи на кратное сравненіе и вполнѣ умѣстны только на интересующей насъ ступени обученія. (II, 131—135).

§ 10. Изъ различныхъ измѣненій искомыхъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненій данныхъ, тѣ, которыя являются результатомъ одновременнаго измѣненія данныхъ чиселъ, иногда представляютъ собою довольно большія затрудненія. Когда мы имѣемъ дѣло съ суммою и разностью, дѣло еще кое-какъ идетъ на-ладъ, ибо особенныхъ затрудненій измѣненія суммы и разности не представляютъ ни въ логическомъ отношеніи, ни въ отношеніи выкладокъ. (II, 151—200) Далеко не то же должно замѣтить относительно тѣхъ измѣненій произведенія и частнаго, которыя являются окончательнымъ результатомъ одновременнаго увеличенія или уменьшенія множимаго и множителя въ какое нибудь число разъ, отъ одновременнаго увеличенія множимаго въ нѣкоторое число разъ и уменьшенія множителя — въ то же или иное число разъ и одновременнаго измѣненія дѣлимаго и дѣлителя въ какое нибудь число разъ.

Прежде всего для учащихся не вполнѣ понятно, что отъ увеличенія множимаго въ m разъ, а множителя въ n разъ произведеніе увеличивается не въ $m + n$, а въ $m \times n$ разъ. Научное доказательство этого свойства произведенія, конечно, очень просто и вразумительно; оно основано на сочетательномъ законѣ умноженія, по которому

$$(a \times m) \times (b \times n) = (a \times b) \times (m \times n).$$

Но этотъ способъ отличается слишкомъ большою отвлеченностью и говоритъ очень мало уму и воображенію учащагося. Поэтому необходимо сказанное свойство сдѣлать доступнымъ воображенію съ помощью разсужденій, подобныхъ, напр., слѣдующимъ. Пусть множимое 360, а множитель 17; требуется опредѣлить во сколько разъ произведеніе этихъ чиселъ меньше произведенія чиселъ, изъ которыхъ множимое въ 5 разъ больше даннаго множимаго, а множитель въ 4 раза больше даннаго множителя: требуется найти — во сколько разъ произведеніе произведеній 360×5 и 17×4 болѣе произведенія 360×17. Это послѣднее произведеніе равно суммѣ 17-ти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 360-ти. Отъ увеличенія каждаго слагаемаго въ 5 разъ сумма должна увеличиться въ 5 разъ; стало-быть,

$$(360 \times 5) \times 17 : (360 \times 17) = 5.$$

Теперь умножаемъ множителя, т. е. 17, на 4; вслѣдствіе этого увеличится дѣлимое нашей формулы въ 4 раза, а въ такомъ случаѣ и интересующее насъ отношеніе тоже увеличится въ 4 раза, т. е

$$(360 \times 5) \times (17 \times 4) : 360 \times 17 = 5 \times 4,$$

— что и требовалось доказать. Это доказательство гораздо вразумительнѣе и нагляднѣе работаетъ надъ логическою основою интересующаго насъ свойства, чѣмъ выше охарактеризованное, какъ бы внѣшнее, преобразованіе функціи $(a \times m) \times (b \times n)$ въ функцію $(a \times b) \times (m \times n)$.

Въ ученіи объ измѣненіи произведенія и частнаго (II, 201—230) есть, какъ извѣстно, такіе случаи, которыхъ изученіе невозможно ранѣе усвоенія дѣтьми курса дробей, вслѣдствіе чего это ученіе страдаетъ неполнотою и пробѣлами. Дѣти, будучи въ состояніи отвѣтить на вопросъ — какъ измѣнится произведеніе отъ одновременнаго увеличенія множимаго въ 5 разъ и уменьшенія множителя въ 15 разъ, не въ состояніи справиться съ вопросомъ объ одновременномъ умноженіи множимаго на 4 и раздѣленіи множителя на 3, и т. п. По нашему крайнему разумѣнію, этихъ пробѣловъ отъ учащагося скрывать не слѣдуетъ; напротивъ: дѣти должны понять, что при умноженіи они умѣютъ разрѣшать вопросъ объ измѣненіи произведенія въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) при одновременномъ увеличеніи множимаго и множителя въ какое либо число разъ, 2) при одновременномъ ихъ уменьшеніи и 3) при одновременномъ увеличеніи множимаго въ m и уменьшеніи множителя — въ n разъ, если $m : n$ или $n : m$ есть число цѣлое; кромѣ того, они должны понять, что при дѣленіи они умѣютъ разрѣшать вопросы въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) при одновременномъ увеличеніи одного изъ данныхъ чиселъ и уменьшеніи другого — въ любое число разъ, и 2) при одновременномъ увеличеніи (или уменьшеніи) одного числа въ m, а другого — въ n разъ, если $m:n$ или $n:m$ есть число цѣлое. Относительно остальныхъ измѣненій дѣти должны знать, что они не умѣютъ опредѣлять измѣненій въ такихъ то и такихъ-то случаяхъ. Знаніе предѣловъ нашихъ знаній очень важно. Если дѣти этихъ предѣловъ не усвоили себѣ путемъ надлежащихъ упражненій, то все ученіе объ измѣненіи произведенія и частнаго является недоконченнымъ и не можетъ претендовать на цѣльность и закругленность, а на умственные навыки учащагося не можетъ оказать достаточно полезнаго развивательнаго вліянія.

Кромѣ того, при прохожденіи ученія объ измѣненіи результатовъ четырехъ дѣйствій полезно обратить вниманіе на слѣдующіе факты. 1) Въ случаѣ примѣненія дѣйствій умноженія и дѣленія къ числамъ, даннымъ для сложенія и вычитанія, измѣненія суммы и разности не зависятъ отъ величины данныхъ чиселъ только въ случаяхъ, когда всѣ слагаемыя (или уменьшаемое и вычитаемое) умножены или раздѣлены на одно и то же число; въ остальныхъ же случаяхъ примѣненія умноженія и дѣленія измѣненія результатовъ вообще зависятъ и отъ данныхъ чиселъ. 2) Въ случаѣ примѣненія дѣйствій сложенія и вычитанія къ числамъ, даннымъ для умноженія или дѣленія, измѣненія результатовъ вообще зависятъ не только отъ вновь введенныхъ, но также и отъ данныхъ чиселъ. — Особеннаго вниманія заслуживаютъ слѣдующіе случаи, въ которыхъ дѣти, при недостаточной подготовкѣ, склонны видѣть случаи неизмѣняемости искомыхъ чиселъ: 1) одновременное умноженіе одного изъ слагаемыхъ на нѣкоторое число и раздѣленіе другого — на то же число; 2) одновременное увеличеніе уменьшаемаго и вычитаемаго въ одно и то же число разъ; 3) одновременное прибавленіе къ множимому нѣкотораго числа и вычитанія изъ множителя того же числа, и наконецъ 4) одновременное увеличеніе или уменьшеніе дѣлимаго и дѣлителя на одно и то же число. Въ особенности поддаются дѣти заблужденіямъ въ послѣднемъ случаѣ, на который поэтому должно обратить особенное вниманіе.

§ 11. Въ тѣсной связи съ разсмотрѣннымъ въ предыдущемъ параграфѣ ученіемъ находятся случаи, допускающіе сокращеніе въ вычисленіяхъ при отысканіи суммы, разности и произведенія чиселъ, представляющихъ нѣкоторыя индивидуальности *). Эти

---

*) Случаи сокращенія вычисленій при дѣленіи находятся по большей части въ связи съ ученіемъ о пропорціяхъ (ср. „Учебникъ ариѳметики“ §§ 99 и 100, а равно отдѣлъ „Дополнительныхъ статей“).

случаи (II, 231—300) представляются при сложеніи и вычитаніи, когда одно изъ данныхъ чиселъ близко къ единицѣ или однозначному числу единицъ какого либо разряда (II, 231—232), а при умноженіи - либо когда множитель близокъ къ единицѣ какого либо разряда (II, 233—238), либо когда онъ равенъ одному изъ слѣдующихъ чиселъ: 5, 11, 15, 25, 75, 125, 175, 225, 275, 375, 525, 675, 875 и 1125. Здѣсь не считаемъ необходимымъ вдаваться въ подробности о томъ, въ чемъ собственно состоятъ сокращенія, достигаемыя въ этихъ случаяхъ въ „Мет. Сборникѣ“ и „Учебникѣ ариѳметики“ на сказанные случаи обращено должное вниманіе. Но считаемъ нужнымъ замѣтить, что цѣль подобныхъ упражненій заключается не только въ пріученіи дѣтей къ вычисленію быстрому и не согласному съ общими правилами умноженія, но также въ уясненіи имъ самой сути дѣйствія независимо отъ обычныхъ правилъ его производства. Въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ статей“ нашего „Учебника ариѳметики“ приведены еще нѣкоторые случаи сокращенія вычисленій, и цѣль ихъ - опять-таки не исключительно практическая, но также и теоретическая.

Покойный издатель извѣстнаго ученаго нѣмецкаго журнала, Крелле (Crelle), составилъ превосходныя таблицы особеннаго, нелогариѳмическаго, устройства, благодаря которымъ умноженіе и дѣленіе трехзначныхъ чиселъ совершается очень быстро *), ознакомленіе учениковъ ср. уч. зав. съ правилами этихъ таблицъ, конечно, было бы нецѣлесообразно. Но что касается умноженія на двузначныя числа, то не безполезно учащихся упражнять въ умноженіи не только по обычнымъ правиламъ. Умноженіе на двузначныя числа меньшія 15-ти можетъ быть производимо, напр., по слѣдующему образцу:

$$\begin{array}{r} 7168 \times 13 \\ + \; 21494 \\ \hline 93174, \end{array}$$

гдѣ произведеніе множимаго на 10 не переписано; умноженіе на 15 можетъ быть производимо по слѣдующему образцу:

$$\begin{array}{r} 7167 \times 15 \\ + \; 35835 \\ \hline 107505, \end{array}$$

гдѣ произведеніе изъ множимаго на 5 найдено путемъ раздѣленія увеличеннаго въ 10 разъ множимаго, умноженіе на число, большее 15-ти, можетъ быть производимо по слѣдующему образцу:

*) Crelle, Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Berlin. 1820

$$
\begin{array}{r}
7879 \times 17 \\
39395 \\
7879 \\
+\ 7879 \\
\hline
133943
\end{array}
$$

При умножении на всякое двузначное число можно прибѣгнуть къ какому либо искусственному пріему, цѣль котораго заключается не въ сокращеніи вычисленія, а въ пріученіи дѣтей смотрѣть на производство дѣйствія умноженія не только съ узкой точки зрѣнія обычнаго правила этого производства. Напр., при умноженіи на 27, на 36, на 45 можно поступить такъ:

$$
\begin{array}{r}
7168 \times 27 \\
7168 \\
+\ 1792 \\
\hline
193536
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{r}
7178 \times 36 \\
\hline
286720 \\
-\ 28672 \\
\hline
258048
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
237 \times 45 \\
\hline
11850 \\
-\ 1185 \\
\hline
10665
\end{array}
$$ *).

Повторяемъ, сокращенія, получаемыя при всѣхъ подобныхъ вычисленіяхъ, весьма проблематичны, за исключеніемъ случаевъ, указанныхъ нами ранѣе; но цѣль подобныхъ упражненій, повторяемъ, вовсе не въ сокращеніи вычисленій, а только въ пріученіи дѣтей къ пониманію сущности дѣйствія и къ болѣе широкому взгляду на обыкновенно практикуемый письменный способъ производства умноженія: ихъ надо пріучить къ живому, свободному отъ рутины, взгляду на производство дѣйствій.

§ 12. Скобки, какъ извѣстно, употребляются не только въ тѣхъ случаяхъ, когда онѣ необходимы, когда безъ нихъ ариѳметическая запись выражаетъ совсѣмъ другое количество, но также и тогда, когда безъ нихъ обойтись возможно безъ всякаго вреда для дѣла (отъ употребленія скобокъ въ этихъ случаяхъ учащійся вскорѣ и самъ отучается), а равнымъ образомъ въ такихъ случаяхъ, когда скобки помогаютъ лучшему оттѣненію особеннаго смысла данной записи, иногда и безъ скобокъ довольно очевиднаго, а иногда и не очевиднаго. Практика показываетъ, что учащемуся гораздо легче научиться употребленію скобокъ въ случаяхъ, когда онѣ необходимы, чѣмъ отучиться отъ употребленія ихъ, когда онѣ не необходимы. Еще болѣе трудностей представляютъ для учащагося тѣ случаи, когда скобки употребляются исключительно для цѣлей болѣе нагляднаго оттѣненія смысла данной записи

---

*) Первый примѣръ вычисленъ такъ: взято 2 раза множимое, потомъ множимое умножено на 100 и взята четверть произведенія, второй—такъ: множимое умножено на 40, а изъ полученнаго вычтенъ тотъ же результатъ безъ послѣдняго нуля, а третій—такъ: множимое умножено на 100, полученное раздѣлено на 2, а изъ вновь полученнаго вычтенъ тотъ же результатъ безъ послѣдняго нуля.

Упражненія на употребленіе скобокъ, кромѣ спеціальнаго своего предназначенія, оказываются очень полезными для твердаго усвоенія учащимися ариѳметической терминологіи и развитія точной рѣчи, когда дѣло касается результатовъ различныхъ дѣйствій. Эти двѣ стороны данной ступени курса, конечно, не должны быть игнорируемы, но при этомъ не должно слишкомъ насиловать мышленіе и рѣчь дѣтей. Такъ, напр., отъ нихъ можно требовать, чтобы они могли сказать, что запись

$$(3 + 5) \times (18 - 13)$$

представляетъ собою произведеніе суммы 3-хъ и 5-ти на разность между 18-ью и 13-ью; но было бы нецѣлесообразно требовать отъ нихъ, чтобы они запись

$$(3 \times 5 + 8 \times 7) \times 4$$

читали такъ: произведеніе изъ суммы произведеній 3-хъ и 5-ти и 8-ми и 7-ми на 4; ибо такое чтеніе крайне неестественно и невразумительно; гораздо лучше, если они прочтутъ эту запись такъ: 3 помножить на 4, 8 помножить на 7, полученныя произведенія сложить, а полученную сумму умножить на 4. Педагогическому такту и вкусу учащаго предоставляется опредѣленіе мѣры требованій, дозволительныхъ для даннаго случая: отъ особенно запутанныхъ, хотя бы и совершенно вѣрныхъ, способовъ чтенія ариѳметическихъ выраженій должно по возможности воздерживаться.

Нѣкоторые преподаватели требуютъ, чтобы дѣти умѣли отвѣтъ задачи изображать прямо въ явной функціи данныхъ задачи съ помощью знаковъ дѣйствій и скобокъ. Подобныя упражненія, конечно, небезполезны, но при этомъ не должно увлекаться этими умѣніями. Когда задача уже рѣшена, можно потребовать отъ учащагося охарактеризованнаго способа обозначенія отвѣта; требовать же отъ нихъ такого обозначенія всегда и, притомъ, думать, что они всегда должны умѣть безъ предварительнаго рѣшенія задачи выражать неизвѣстное задачи въ видѣ явной функціи данныхъ чиселъ, отнюдь не слѣдуетъ. Такихъ результатовъ добиться, конечно, возможно при нѣкоторой настойчивости, но потраченные на такое специфическое умѣніе трудъ и время не соотвѣтствуютъ цѣнности достигнутаго результата: это—дрессировка въ слишкомъ спеціальномъ направленіи, слишкомъ далекомъ отъ истинныхъ цѣлей образованія.

Во II части нашего „Мет. Сборника" есть цѣлый рядъ упражненій, цѣль которыхъ заключается въ пріученіи дѣтей къ составленію аналитическихъ равенствъ, въ которыхъ скобки играютъ роль служебную, а именно служатъ для лучшаго оттѣненія извѣстныхъ ученій ариѳметики (II, 381—400). Первая изъ задачъ этого рода гласитъ: „Обозначить помощью знаковъ, что если дана сумма чиселъ 279 и 753, то, отъ уменьшенія перваго изъ слагаемыхъ на 84, сумма уменьшается на столько же единицъ". Задачи этого рода могутъ оказаться для учащихся на первыхъ порахъ затруднительными по винѣ того, что они сначала неясно понимаютъ вопросъ и не знаютъ—какъ справиться съ условнымъ выраженіемъ: „если дана сумма". Отвѣтъ на эту задачу долженъ быть слѣдующій:

$$(279 + 753) - 84 = (279 - 84) + 753.$$

Хотя это равенство выражаетъ также и тотъ фактъ, что для уменьшенія суммы чиселъ 279 и 753 на 84 единицы можно уменьшить на 84 единицы первое изъ слагаемыхъ, но это—не бѣда; надо только стараться о томъ, чтобы учащійся понималъ во всемъ объемѣ подобныя равенства и умѣлъ ихъ истолковывать. Для лучшаго выясненія требованій, которыя могутъ быть предъявлены къ учащимся, замѣтимъ, что задача (подъ № 393) гласящая такъ: „Обозначить помощью скобокъ, что если дано произведеніе чиселъ 504 и 84, то, отъ увеличенія множимаго въ 12 разъ и отъ уменьшенія множителя въ 3 раза, произведеніе увеличится во столько разъ, сколько единицъ въ частномъ, происходящемъ отъ раздѣленія 12 на 3",—что эта задача разрѣшается такъ:

$$(504 \times 12) \times (84 : 3) = (504 \times 84) \times (12 : 3).$$

§ 13. Рѣшеніе такъ называемыхъ „задачъ на всѣ четыре дѣйствія" часто бываетъ очень затруднительно съ учащимися, если учащій предлагаетъ задачи какъ ни попало, не дѣлая различія между задачами чисто-ариѳметическими и задачами алгебраическаго характера. Во избѣжаніе обычной пестроты этого отдѣла задачниковъ, мы во II ч. „Методическаго Сборника" (№№ 401—560) задачи алгебраическаго характера выдѣлили въ отдѣльную рубрику. То же самое мы сдѣлали съ задачами алгебраическаго характера съ дробными данными или дробными результатами.

На способѣ рѣшенія сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ мы здѣсь останавливаться не будемъ, такъ какъ этотъ способъ не представляетъ ни для учащихся, ни для учащаго особенныхъ затрудненій. Должно только замѣтить, что по составленіи плана рѣшенія и разложеніи данной задачи на рядъ простыхъ задачъ дѣти могутъ быть пріучены къ составленію такъ наз. „строчекъ" рѣшенія: это пріучаетъ учащихся къ нѣкоторому порядку и единообразію пріемовъ. Но было бы ошибочно приписывать какое либо особенное значеніе „строчкамъ": если учащіеся легко обходятся безъ нихъ, то было бы излишнею тратою времени постоянное веденіе строчекъ, которое можетъ оказать на развитіе мысли болѣе или менѣе замедляющее вліяніе и пріучить учащихся къ безполезному многописанію, къ которому они и безъ того могутъ оказаться приверженными, если учащій не постарается задержать развитіе этого недостатка (II. 401—445).

Когда рѣшенію такъ называемыхъ ариѳметическихъ задачъ большинствомъ приписывается особенно развивательное на умъ учащихся вліяніе, то при этомъ имѣются въ виду задачи преимущественно изъ числа алгебраическихъ, потому что даже весьма сложныя чисто-ариѳметическія задачи отличаются отъ менѣе сложныхъ только по количеству вычисленій, которыя требуется выполнить при ихъ рѣшеніи. Далеко не то же можно сказать о задачахъ алгебраическаго характера: иногда, при очень простомъ словесномъ и числовомъ содержаніи, для ихъ рѣшенія требуется прибѣгнуть къ такимъ разсужденіямъ, которыя дѣйствительно возможны только при довольно высокомъ умственномъ развитіи учащагося въ направленіи точнаго математическаго мышленія. Но не должно забывать, что это направленіе умственнаго развитія есть направленіе безусловно спеціальное, зависящее въ весьма значительной степени отъ индивидуальности учащагося. Читателю, вѣроятно, извѣстны два діаметрально противоположныхъ взгляда на ариѳметику: одни думаютъ, что для усвоенія этого предмета не требуется никакихъ спеціальныхъ способностей, другіе—напротивъ, что онъ требуетъ спеціально математической головы. Первые склонны видѣть причину недостаточныхъ успѣховъ въ ариѳметикѣ, замѣчаемыхъ въ данномъ субъектѣ, исключительно въ учителѣ и постановкѣ обученія этому предмету, другіе—только въ учащемся и, если можно такъ выразиться, въ устройствѣ его головы. Само собою разумѣется, что каждый изъ этихъ взглядовъ не вполнѣ правиленъ. Для возможности усвоенія курса ариѳметики *какъ таковой*, т. е. для усвоенія чисто-ариѳметическихъ умѣній и познаній, составляющихъ содержаніе этого предмета, отъ учащагося не требуется никакихъ особенныхъ спеціальныхъ способностей: онъ не будетъ особенно ловкимъ счетчикомъ и большимъ знатокомъ ариѳметическихъ теорій; но онъ можетъ усвоить себѣ не только правила производства ариѳметическихъ дѣйствій, но также и теоретическіе элементы того или иного курса ариѳметики. Съ другой стороны для тонкаго пониманія ея теорій, конечно, требуется математическій складъ мышленія и интересъ учащагося къ вопросамъ отвлеченнаго мышленія въ направленіи математическомъ. Но, къ сожалѣнію, умѣніе рѣшать всяческія задачи на четыре дѣйствія почему то принято относить къ числу умѣній, которыя тѣсно связаны съ курсомъ ариѳметики; поэтому, когда говорятъ, что для усвоенія среднеобразовательнаго курса ариѳметики необходимы какія-то особенныя математическія способности, то имѣютъ въ виду главнымъ образомъ умѣніе разрѣшить всякую такъ наз. ариѳметическую задачу изъ даннаго сборника ихъ. При этомъ дѣлается грубая логическая ошибка мальчикъ или дѣвочка могутъ отлично знать *ариѳметику* и не быть въ состояніи справиться съ данною задачею (въ особенности если она принадлежитъ къ числу алгебраическихъ); обратно: учащійся можетъ быть очень ловокъ въ рѣшеніи задачъ и довольно плохо знать курсъ ариѳметики.

Поэтому можно установить слѣдующій принципъ: для возможности усвоенія курса ариѳметики *какъ таковой* достаточны самыя обыкновенныя способности къ отвлеченному математическому мышленію; для быстраго же усвоенія всѣхъ методовъ неалгебраическаго рѣшенія всяческихъ задачъ алгебраическаго характера необходимъ нѣкоторый логико-математическій складъ ума. Если этимъ складомъ учащійся не отличается, то усвоеніе методовъ рѣшенія алгебраическихъ задачъ для него представитъ большія или меньшія затрудненія. Но учебное заведеніе должно считаться преимущественно со среднимъ ученикомъ, а потому при усвоеніи дѣтьми методовъ рѣшенія алгебраическихъ задачъ должно держаться строгой системы и заботиться о методической проработкѣ этихъ методовъ, при чемъ рѣшеніе задачъ, слѣдующихъ одна за другою какъ ни попало, дозволительно только при повтореніи. Мы лично стояли бы за прохожденіе ариѳметическихъ задачъ алгебраическаго характера при усвоеніи дѣтьми ученія объ уравненіяхъ первой степени и ихъ составленіи; но, въ виду установившагося на практикѣ обычая прохожденія этихъ задачъ въ низшихъ классахъ ср. уч. зав. и даже въ учебныхъ заведеніяхъ съ болѣе низкимъ курсомъ, мы не могли рѣшиться на игнорированіе этого рода задачъ въ трудахъ нашихъ. Здѣсь позволимъ себѣ коснуться методовъ рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ алгебраическаго характера неалгебраическими способами, обращая иногда вниманіе также и на способъ алгебраическій.

Задачи алгебраическія, обыкновенно предлагаемыя въ употребительныхъ сборникахъ ариѳметическихъ задачъ, могутъ быть подведены подъ категоріи: а) задачи-загадки: задумано число, надъ нимъ совершенъ рядъ ариѳметическихъ дѣйствій, послѣ чего получился такой-то окончательный результатъ (II, 446—474); б) по данной суммѣ и разности двухъ неизвѣстныхъ чиселъ найти эти послѣднія (II, 475—484); в) даны сумма большого количества чиселъ и достаточныя для разрѣшенія задачи разностныя отношенія нѣкоторыхъ изъ нихъ (II, 485—489); г) по данной суммѣ и кратному отношенію (частному) двухъ неизвѣстныхъ чиселъ найти каждое изъ нихъ (II, 490—494); д) по даннымъ разности и кратному отношенію двухъ чиселъ найти каждое изъ нихъ (II, 495—514); е) задачи, которыя при переводѣ на алгебраическій языкъ, даютъ непосредственно систему уравненій

$$x \times a + y \times b = c$$
$$x \times m + y \times n = p,$$

причемъ a, b, m и n суть числа положительныя (II. 515—524); ж) задачи, которыя, при переводѣ на алгебраическій языкъ, даютъ непосредственно систему уравненій:

$$x \times a + y \times b = c$$
$$mx = ny$$

гдѣ m и n суть числа цѣлыя (II, 524—529); з) задачи, дающія систему уравненій:

$$x + y = a$$
$$x + z = b$$
$$y + z = c,$$

и вообще задачи, сводящіяся къ отысканію двухъ неизвѣстныхъ по суммѣ ихъ и разности (II, 530—539). Кромѣ того, въ задачникахъ встрѣчаются такъ наз. задачи „о курьерахъ", далѣе задачи, въ которыхъ даны сумма или разность чиселъ и достаточныя для разрѣшенія ихъ отношенія однихъ чиселъ къ другимъ, а также задачи на измѣненіе кратнаго отношенія двухъ чиселъ при постоянной разности между ними. (II, 540—560).

Въ приложеніи къ этой книгѣ изложены способы рѣшенія задачъ каждаго изъ выше охарактеризованныхъ типовъ. Здѣсь же позволимъ себѣ коснуться также взаимной связи между алгебраическими и не-алгебраическими способами рѣшенія.

Задачи, въ которыхъ требуется по данной суммѣ и разности двухъ чиселъ найти каждое изъ нихъ, допускаютъ, какъ извѣстно, двоякое алгебраическое рѣшеніе: съ помощью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ и съ помощью системы уравненій о двухъ неизвѣстныхъ. Неалгебраическое же рѣшеніе такого рода задачи implicite содержитъ въ основѣ своей законы, по которымъ:

$$(a + b) + (a - b) = 2a \quad \text{и} \quad (a + b) - (a - b) = 2b.$$

Само собою разумѣется, что дѣтямъ, незнакомымъ съ алгебраическимъ языкомъ, эти законы не могутъ быть достаточно ясны; а потому приходится прибѣгать къ разсужденіямъ болѣе искусственнымъ. Пусть S обозначаетъ сумму, а d — разность двухъ чиселъ. Хотя бы учащемуся и было даже вполнѣ понятно, что сумма меньшаго числа съ разностью между большимъ и меньшимъ равна большему, но ему чаще всего непонятно, почему $S + d$ ровно вдвое больше большаго изъ нихъ. Говоря иначе: пусть большее число обозначено буквою M, а меньшее — буквою m; ему понятно, что $m + d = M$, но далеко не понятно, что $S + d = 2M$, потому что это равенство основано на томъ, что

$$S + d = (M + m) + d = M + (m + d),$$

а это послѣднее равенство предполагаетъ довольно высокое умственное развитіе въ направленіи отвлеченнаго мышленія,—тѣмъ болѣе, что употребленіе алгебраическаго языка наврядъ-ли умѣстно до ознакомленія дѣтей съ сущностью этого закона. Разсужденія, къ которымъ прибѣгаютъ обыкновенно въ случаѣ неалгебраическаго рѣшенія задачи интересующаго насъ типа, такимъ образомъ, по необходимости, не довольно ясны. Дѣйствительно, пусть предложена задача (II, 475): „сумма двухъ чиселъ 364, а разность 48; какъ велико каждое изъ нихъ?“ Обыкновенно разсуждаютъ такъ: въ 364-хъ содержатся оба числа, и большее и меньшее; если къ меньшему прибавить 48, то получится большее; если къ большему и меньшему прибавить 48, то получится два большихъ; если къ суммѣ обоихъ прибавить 48, то тоже получится два большихъ, и т. д. Но при этомъ для дѣтей, какъ это выяснено выше, остаются не достаточно ясными два пункта: 1) получится ли два большихъ и въ томъ случаѣ, когда мы разность прибавимъ къ большему, а къ полученной суммѣ—меньшее? и 2) все ли это равно: прибавить къ суммѣ обоихъ чиселъ 48 или же только къ одному изъ нихъ, а именно къ меньшему,—съ тѣмъ чтобы потомъ прибавить полученное къ большему? Эти пункты неясны для дѣтей, повторяемъ, только вслѣдствіе недостаточно твердаго навыка къ отвлеченному мышленію, болѣе или менѣе неизбѣжнаго. Поэтому мы позволяемъ себѣ задачи этого типа считать совсѣмъ неумѣстными въ I кл. ср. уч. зав. Но ужъ если упражнять дѣтей въ рѣшеніи задачъ этого типа, то полезнѣе прибѣгать къ другому способу ихъ рѣшенія, причемъ дѣтей надо предварительно поупражнять въ рѣшеніи задачъ слѣдующихъ четырехъ типовъ: 1) у двоихъ поровну денегъ; насколько у второго станетъ больше, чѣмъ у перваго, если первый отдастъ второму 1 р., 2 р., 15 р., 17 р.? 2) даны два неравныхъ между собою числа; отъ большаго отнята 1 единица (2 ед., 15 ед.), а къ меньшему прибавлено столько же; на сколько уменьшилась разность между числами? 3) даны два неравныхъ между собою числа; отъ меньшаго отнята 1 единица (2 ед., 15 ед.), а къ большему прибавлено столько же; на сколько увеличилась разность? 4) разность между двумя числами 2, 8, 46; сколько надо отнять отъ большаго и въ то же время прибавить къ меньшему, чтобы оба числа стали равны между собою?—Цѣль всѣхъ этихъ упражненій—убѣдить дѣтей въ томъ, что если разность между двумя числами равна какому либо числу, то для того, чтобы эти числа стали равны между собою, достаточно уменьшить большее изъ нихъ и увеличить меньшее на половину данной разности *). Тогда всякая задача интересующаго насъ типа можетъ быть разрѣшена по слѣдующему образцу: сумма двухъ чиселъ S, а разность d; если большее

*) Методическія упражненія въ указанномъ направленіи не помѣщены въ нашемъ „Метод. Сборникѣ“ изъ боязни чрезмѣрнаго увеличенія его объема и въ виду того, что учащій легко можетъ придумать и самъ такія упражненія, если онъ раздѣляетъ нашъ взглядъ на нихъ.

уменьшить на $\frac{d}{2}$, а меньшее — увеличить на $\frac{d}{2}$, то оба числа станутъ равны одно другому и каждое изъ нихъ будетъ равно $\frac{S}{2}$; прежняя же величина большаго числа и меньшаго въ такомъ случаѣ соотвѣтственно равна

$$\frac{S}{2}+\frac{d}{2} \text{ и } \frac{S}{2}-\frac{d}{2}.$$

Къ сожалѣнію, предложенный способъ тоже не вполнѣ свободенъ отъ неудобствъ, изъ которыхъ важнѣйшее проявляется въ томъ случаѣ, когда сумма и разность искомыхъ чиселъ суть числа нечетныя; но съ этимъ неудобствомъ, кажется, легче примириться и сладить, чѣмъ съ трудностями обычнаго способа рѣшенія задачъ интересующаго насъ типа. Въ основѣ предложеннаго выше способа лежитъ законъ, по которому сумма двухъ чиселъ, при одновременномъ увеличеніи одного изъ нихъ и уменьшеніи другого на одно и то же число, не измѣняется,—законъ, конечно, вполнѣ доступный дѣтскому пониманію.

На такъ наз. задачахъ загадкахъ мы здѣсь останавливаться не будемъ. Достаточно замѣтить, что при рѣшеніи этихъ задачъ дозволительно ниже рекомендуемая запись условій; хотя эта запись не вполнѣ научна, но всетаки она не предосудительна какъ запись сокращенная. Пусть предложена задача (II, 461): „Къ задуманному числу прибавлено 25; полученное умножено на 4; изъ произведенія вычтено 100; разность умножена на 5; произведеніе раздѣлено пополамъ; въ окончательномъ результатѣ получилось 10; какъ велико задуманное число?“ Запомнить условія этой задачи конечно довольно затруднительно; ихъ надо записать и наиболѣе удобна сокращенная запись этихъ условій въ слѣдующей формѣ:

$$+25; \times 4; -100; \times 5; :2; =10.$$

За-то тѣмъ большаго вниманія, съ методической точки зрѣнія, заслуживаютъ задачи, представительницею которыхъ является извѣстная задача о пастухахъ (II, 509): „Дай мнѣ одну изъ своихъ овецъ, сказалъ одинъ пастухъ другому,—и у меня будетъ вдвое болѣе овецъ, чѣмъ у тебя.—Нѣтъ, лучше ты мнѣ дай одну изъ своихъ, отвѣчалъ тотъ,—тогда у насъ будетъ поровну; сколько овецъ у каждаго изъ нихъ?“ При рѣшеніи всѣхъ задачъ этого типа въ высшей степени важную роль играютъ тѣ умѣнія, которыя мы выше рекомендовали до прохожденія задачъ на сумму и разность. Самый трудный моментъ этой задачи состоитъ въ опредѣленіи разности искомыхъ двухъ чиселъ и преодолѣвать эту трудность дѣти научаются быстро только въ томъ случаѣ, если они ранѣе усвоили условія, при которыхъ два неравныхъ между собою числа можно сдѣлать равными одно другому, не измѣняя ихъ суммы. Въ интересующей насъ задачѣ эта разность можетъ быть найдена съ помощью второго условія, по которому первый пастухъ долженъ отдать второму одну изъ своихъ овецъ для того, чтобы у обоихъ стало одинаковое ихъ количество. Изъ этого условія прямо вытекаетъ, что у перваго пастуха на самомъ дѣлѣ *двумя* овцами болѣе, чѣмъ у второго.

Въ приложеніи къ настоящему сочиненію, посвященномъ рѣшенію задачъ алгебраическаго характера, указаны случаи, когда рѣшеніе задачъ этого послѣдняго рода неалгебраическимъ способомъ скорѣе ведетъ къ цѣли, чѣмъ рѣшеніе ихъ съ помощью уравненія. Здѣсь позволимъ себѣ однако замѣтить, что обычай, по которому рѣшеніе алгебраическихъ задачъ неалгебраическими способами практикуется въ низшихъ классахъ ср. уч. зав. и даже въ начальныхъ народныхъ школахъ, не заслуживаетъ особеннаго сочувствія не только по причинѣ трудностей задачъ этого рода, но также и по слѣдующимъ причинамъ: 1) Неалгебраическіе способы рѣшенія задачъ не всегда приложимы, и поэтому нѣтъ возможности дать дѣтямъ понятіе объ общемъ пріемѣ рѣшенія задачъ алгебраическаго характера; 2) впослѣдствіи этотъ способъ предается учащимися начальной школы совершенному забвенію, по причинѣ рѣдкаго примѣненія рѣшенія алгебраическихъ задачъ въ жизни, а учащимися ср. уч. зав. неалгебраическіе способы забываются, какъ *только они овладѣли* уравненіемъ и анализомъ, приводящимъ къ уравненію; 3) развивательная сторона не-алгебраическихъ способовъ ничтожна въ сравненіи съ тѣмъ вліяніемъ на умственное развитіе, которое можетъ быть достигнуто усвоеніемъ курса ариѳметики какъ таковой помимо задачъ алгебраическаго характера, которыя, какъ извѣстно, съ этимъ курсомъ не находятся ни въ какой связи.

Во избѣжаніе недоразумѣній мы однако считаемъ необходимымъ повторить, что изъ среднеобразовательнаго курса математики не совершенно должно быть исключено упражненіе дѣтей въ рѣшеніи алгебраическихъ задачъ не-алгебраическими способами. По нашему крайнему разумѣнію, къ нему полезно обращаться не въ низшихъ, а напротивъ въ одномъ изъ высшихъ классовъ, а именно въ то время, когда въ курсѣ алгебры проходится рѣшеніе задачъ съ помощью уравненіи. Тогда учащіеся въ состояніи вполнѣ сознательно усвоить себѣ сущность не-алгебраическихъ способовъ, понять ихъ недостатки и преимущества, оцѣнить ихъ тонкость и остроуміе, а равно убѣдиться въ изобрѣтательности неалгебраическихъ способовъ, съ одной стороны, и въ удобствѣ алгебраическаго способа, его общности и удопримѣнимости въ гораздо большемъ числѣ случаевъ, съ другой. Рѣшеніе алгебраическихъ задачъ неалгебраическими способами въ pendant къ алгебраическому ихъ рѣшенію гораздо умѣстнѣе, чѣмъ самостоятельное неалгебраическое рѣшеніе сказанныхъ задачъ въ низшихъ классахъ, которое, какъ показываетъ практика и какъ въ томъ легко можно было-бы убѣдиться a priori, большинству учащихся чаще всего совсѣмъ не подъ-силу и которое поэтому на ихъ умственное развитіе не оказываетъ никакого особенно замѣтнаго полезнаго вліянія *).

§ 14. Переходя къ ученію объ именованныхъ числахъ, учащіеся не должны думать, что это ученіе представляетъ собою что нибудь существенно новое: кромѣ того, они должны уяснить себѣ глубокую разницу между тѣми *преобразованіями*, къ которымъ прибѣгаютъ иногда, когда рѣчь идетъ объ именованныхъ числахъ, и *дѣйствіями* надъ ними *). Преобразованія имѣютъ цѣлью полученіе новыхъ *чиселъ*, но не новыхъ величинъ, а дѣйствія—полученіе новыхъ *величинъ*—суммы, разности и т. д. Кромѣ того учащимися должны быть усвоены прежде прохожденія ученія о преобразованіяхъ и дѣйствіяхъ надъ именованными числами два взгляда, лежащіе въ основѣ ученія объ именованныхъ числахъ и объ ариѳметическихъ числахъ: 1) тотъ взглядъ на такъ называемое именованное число, по которому *именованное* число есть, строго говоря, не число, а *величина*, и 2) тотъ, единственно правильный, взглядъ на умноженіе, по которому множитель можетъ быть числомъ только *отвлеченнымъ*. **) Когда правильный взглядъ на сущ-

---

*) Несмотря на высказанное выше несочувствіе наше къ рѣшенію алгебраическихъ задачъ въ низшихъ классахъ, мы во II ч. „Мет. Сбор." нашего не сочли себя вправѣ игнорировать задачи этого рода. Единственное отступленіе отъ обычая, которое мы позволили себѣ *по отношенію* къ нимъ, заключается въ томъ, что онѣ выдѣлены въ отдѣльную рубрику „задачи алгебраическаго характера" (II, 446—500, 1521—1650, а равно „смѣшанныя задачи" подъ №№ 101—110), и что мы, кромѣ того, по отношенію къ этимъ задачамъ строго держались принципа методическаго и болѣе или менѣе единообразнаго расположенія ихъ.

**) Въ механикѣ, математической физикѣ и даже въ геометріи встрѣчаются величины, для численнаго опредѣленія которыхъ употребляется умноженіе, и притомъ какъ бы умноженіе именованнаго числа на именованное же. Въ геометріи площади разсматриваются какъ произведенія нѣкоторыхъ длинъ, а объемы нѣкоторыхъ тѣлъ—какъ произведенія трехъ длинъ или произведеніе площади на длину. Въ механикѣ встрѣчаются понятія работы, силы, живой силы, а въ физикѣ, кромѣ того, понятія количества электричества, магнитной силы и т. п., величины которыхъ разсматриваются какъ нѣкоторыя произведенія. Такъ, если длина обозначена буквою l, масса тѣла m, а промежутокъ времени t, то площадь квадрата, котораго сторона есть l, равна l^2, объемъ куба, ребро котораго есть l, равенъ l^3, скорость равномѣрнаго движенія при извѣстныхъ условіяхъ выражается частнымъ $l:t$, работа—выраженіемъ $m.\ l^2:t^2$, плотность—выраженіемъ $m:l^3$, количество магнитизма—выраженіемъ $\frac{l}{t}\sqrt{ml}$, и т. д.—Но всѣ эти выраженія суть выраженія символическія, а отнюдь не дѣйствительныя ариѳметическія произведенія или частныя: умножить длину на ту же или другую длину, или массу на ность дѣйствія умноженія усвоенъ, дѣти очень легко усвоиваютъ себѣ также соотвѣтственный взглядъ на дѣлителя при дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное и на частное (отношеніе) при кратномъ сравненіи двухъ именованныхъ чиселъ.

При прохожденіи ученія о такъ называемыхъ раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ учащіеся должны понять, что раздробленію могутъ подлежать какъ простыя, такъ и составныя именованныя числа, и что въ результатѣ превращенія можетъ получиться тоже либо простое, либо составное именованное число. Если же не обращать ихъ вниманія на это, то они легко подпадаютъ той ошибкѣ сужденія, которая встрѣчается даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ и которая состоитъ въ томъ, что когда говорятъ о раздробленіи, то имѣютъ въ виду преимущественно раздробленіе составныхъ именованныхъ чиселъ, а когда говорятъ о превращеніи, то результатъ этого преобразованія представляютъ себѣ непремѣнно въ видѣ составного именованнаго числа.

Вполнѣ умѣстна, по нашему мнѣнію, такая постановка дѣла, при которой ученіе объ именованныхъ числахъ является лишь однимъ изъ многочисленныхъ приложеній усвоеннаго уже учащимися ученія о дѣйствіяхъ надъ числами отвлеченными. (II, 461—750 и „Смѣшанныя задачи“ №№ 111—120). Этотъ взглядъ на ученіе объ именованныхъ числахъ, особенно распространенный во Франціи (благодаря, главнымъ образомъ, метрической системѣ), дозволителенъ и правиленъ также въ школахъ другихъ странъ, такъ какъ это—взглядъ вполнѣ отвѣчающій самой сущности дѣла. Наилучшею должна быть признана такая постановка дѣла, при которой ученику невозможно было бы оправдывать свое неумѣніе рѣшить данную задачу на преобразованіе именованнаго числа или дѣйствіе надъ нимъ тѣмъ, что имъ не пройдены еще именованныя числа. Вполнѣ умѣстнымъ считаемъ мы на интересующей насъ ступени обученія также и ознакомленіе не только съ основными единицами мѣры метрической системы, но даже съ нѣкоторыми выгодами этой послѣдней и дѣйствіями надъ именованными числами, выраженными въ мѣрахъ этой системы. (II, 641—650). На этой ступени было бы не неумѣстно рѣшеніе не

квадратъ длины, раздѣлить длину на время и т. п. на самомъ дѣлѣ невозможно и немыслимо. Возможно умножить отвлеченное число, выражающее, напр., длину образующей прямого конуса, на число, выражающее, въ тѣхъ же непремѣнно единицахъ, длину окружности его основанія, и при этомъ получится число, выражающее, въ совершенно опредѣленныхъ единицахъ поверхности, удвоенную боковую поверхность конуса; но при этомъ вовсе не была умножена самая длина окружности на самую длину образующей, ибо это такъ же невозможно, какъ невозможно умноженіе ножницъ на чернильницу. Аналогичное справедливо для всѣхъ возможныхъ произведеній и частныхъ въ наукѣ, выражающихъ какія либо специфическія величины: работу, количество тепла, живую силу, количество движенія, силу тока, и т. д.

особенно сложныхъ чисто ариѳметическихъ задачъ, въ которыхъ всѣ данныя выражены въ мѣрахъ метрической системы, къ сожалѣнію, упражненіямъ этого рода *невозможно посвятить* столько времени, сколько надо для того, чтобы дѣти болѣе или менѣе освоились съ единицами метрической системы, привыкли къ нимъ, если можно такъ выразиться. Въ настоящее время метрическая система получаетъ все большее и большее право гражданства въ разнообразнѣйшихъ отрасляхъ науки, и оставлять дѣтей со смутными представленіями о единицахъ этой системы было бы крайне нежелательно. Кромѣ того, крайне полезно выяснить дѣтямъ на примѣрахъ ту выгоду метрической системы, которая состоитъ въ томъ, что преобразованіе чиселъ, выраженныхъ въ единицахъ метрической системы (раздробленіе и превращеніе), а равно и дѣйствія надъ такими числами значительно проще случая именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ иныхъ мѣрахъ (II, 641—650, 666—670 и т. п.), а именно: преобразованія составныхъ именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ единицахъ метрической системы, сводятся къ свойствамъ десятичной системы счисленія, а дѣйствія — къ дѣйствіямъ надъ отвлеченными числами, получаемыми очень легко.

Въ заключеніе этого параграфа необходимо напомнить, что хотя развитіе вѣрнаго глазомѣра и не можетъ быть одной изъ цѣлей обученія ариѳметикѣ, но тѣмъ не менѣе дѣти должны быть ознакомлены со всѣми единицами мѣры наглядно, такъ какъ въ случаѣ полнаго незнакомства съ величиною этихъ единицъ, задачи на именованныя числа становятся для дѣтей мало интересными и такъ какъ они въ этомъ случаѣ пріучаются относиться къ задачамъ на именованныя числа крайне формально, безучастно и, если можно такъ выразиться, сухо и безсознательно.

§ 15. Изъ числа задачъ на составныя именованныя числа особенное мѣсто занимаютъ задачи на вычисленіе времени и геометрическія—на вычисленіе поверхностей прямоугольниковъ и объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ. Задачи на вычисленіе времени представляютъ нѣкоторыя трудности благодаря общепринятому, календарному, если можно такъ выразиться, способу обозначенія моментовъ времени. Такъ, простое сложеніе двухъ составныхъ именованныхъ чиселъ, выражающихъ промежутки времени, или вычитаніе какого либо промежутка времени изъ другого, вообще не затруднительнѣе такихъ же дѣйствій надъ длинами или вѣсами, за-то рѣшеніе задачи, въ которой дано число мѣсяцъ и годъ чьего-либо рожденія и число лѣтъ, мѣсяцевъ и дней, выражающее — сколько времени это лицо прожило (задача на сложеніе) довольно затруднительна для начинающаго. Вся трудность задачъ на вычисленіе времени, впрочемъ, заключается только, повторяемъ, въ переводѣ календарнаго числа въ составное именованное и, обратно, составного именованнаго, выражающаго данный промежутокъ времени, въ соотвѣтствующее ему календарное. (II, 751—800). При этомъ должно быть дано совершенно точное понятіе объ эрѣ счисленія и объ условномъ обозначеніи разныхъ моментовъ дня и ночи. Разъ это понятіе дано, остальныя трудности преодолѣваются довольно скоро. — Изъ числа довольно часто встрѣчающихся задачъ на вычисленіе времени должны быть упомянуты задачи на переводъ чиселъ новаго стиля въ числа стараго и обратно. (II, 782—785). При этомъ причина разницы въ стиляхъ учащимися I-го кл. наврядъ-ли можетъ быть понята какъ слѣдуетъ; поэтому особенно стремиться къ полному выясненію причины этой разницы не слѣдуетъ. Лучше всего такая постановка этой ступени курса, при которой дѣти *на вѣру* принимаютъ существованіе простыхъ и високосныхъ годовъ и сказанной разницы между новымъ и старымъ стилями. „Уч. ар.", § 6 ст. Это несомнѣнно лучше, чѣмъ искаженное понятіе объ истинной причинѣ существованія високосныхъ годовъ и разницы между Григоріанскимъ и Юліанскимъ стилями; къ сожалѣнію, большее или меньшее искаженіе этого понятія почти неизбѣжно при бѣгломъ выясненіи его учащимся низшихъ классовъ *).

Что касается задачъ геометрическихъ на опредѣленіе площади прямоугольниковъ и объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, то задачи этого рода могли бы быть, безъ всякаго вреда для дѣла, исключены изъ курса низшихъ классовъ ср. уч. зав., такъ какъ впослѣдствіи рѣшеніе этихъ задачъ можетъ быть пріурочено и дѣйствительно пріурочивается съ гораздо большею пользою къ соотвѣтствующимъ статьямъ курса геометріи. Тѣмъ не менѣе задачи этого рода вошли во II ч. нашего „Методическаго Сборника ариѳм. задачъ"; онѣ, впрочемъ, не отнесены въ

---

*) Хотя снабженіе дѣтей специфическими умѣніями, неимѣющими прямого отношенія къ ариѳметикѣ, не можетъ быть обязательно для учащихъ ариѳметикѣ, но тѣмъ не менѣе дѣтей мимоходомъ очень легко и не безполезно научить весьма простому и распространенному способу опредѣленія — какіе изъ мѣсяцевъ года имѣютъ по 30-ти и какіе — по 31 дню. Этотъ, весьма распространенный, способъ состоитъ въ слѣдующемъ: начиная мизинцемъ лѣвой руки каждый палецъ ея, за исключеніемъ большого, и каждый промежутокъ между этими четырьмя пальцами соотвѣтствуютъ какому либо мѣсяцу: мизинецъ — январю, промежутокъ между мизинцемъ и безымяннымъ пальцемъ — февралю, безымянный — марту, второй промежутокъ — апрѣлю, третій (средній) палецъ — маю, третій промежутокъ — іюню, указательный — іюлю; потомъ счетъ начинается снова съ мизинца: мизинецъ — августу, первый промежутокъ — сентябрю, и т. д. до средняго пальца включительно, соотвѣтствующаго декабрю. При этомъ мѣсяцъ, соотвѣтствующій пальцу, содержитъ 31, а соотвѣтствующій промежутку — менѣе 31-го дня, т. е. 30 дней (февраль — 28 или 29). — Не безполезно иногда также помнить, что во второмъ полугодіи всегда 184 дня, а въ первомъ 181 или 182.

отдѣльную рубрику. Не считая умѣстнымъ въ курсѣ ариѳметики низшихъ классовъ ср. уч. зав. изложеніе отрывочныхъ геометрическихъ понятій и теоремъ, мы даже въ нашемъ „Учебникѣ ариѳметики" не посвятили измѣренію поверхности и объемовъ ни одного параграфа. Такое отступленіе мы позволили себѣ въ видѣ опыта, тѣмъ болѣе, что „Уч. планы" предметовъ, преподаваемыхъ въ классическихъ гимназіяхъ и въ реальныхъ училищахъ, не касаются прохожденія интересующихъ насъ ученій геометріи въ низшихъ классахъ, и повидимому, при ихъ составленіи, эта статья и соотвѣтствующія задачи не считались обязательными. Само собою разумѣется, что въ курсѣ ариѳметики тѣхъ учебныхъ заведеній (низшихъ), въ которыхъ не преподается геометрія, интересующія насъ ученія этой послѣдней и задачи на вычисленіе поверхностей и объемовъ не могутъ быть безъ нѣкотораго вреда для дѣла совершенно исключены. Въ такихъ школахъ (съ трехгодичнымъ или даже съ двухгодичнымъ курсомъ) упражненія въ рѣшеніи задачъ этого отдѣла вычисляющей геометріи можно пріурочить къ усвоенію дѣтьми основныхъ геометрическихъ представленій и понятій *), чего нельзя да и не слѣдуетъ дѣлать въ I-мъ классѣ ср. уч. заведеній, такъ какъ въ I-мъ классѣ ср. уч. зав., по изложеннымъ выше соображеніямъ, сказанные элементы курса геометріи неумѣстны какъ по недостатку времени, такъ и потому, что впослѣдствіи учениковъ ср. уч. зав. ждетъ болѣе или менѣе основательное изученіе Евклидовой геометріи, систематическому курсу которой пройденное въ I-мъ классѣ не только не можетъ быть особенно полезно, но можетъ оказаться даже прямо вреднымъ **).

§ 16. Ознакомленіе дѣтей съ тѣми ученіями о дѣлителяхъ и первоначальныхъ числахъ, которыя необходимы для построенія болѣе или менѣе серьезнаго курса дробей, представляетъ едва ли не самую трудную ступень всего курса ариѳметики низшихъ классовъ. Все затрудненіе состоитъ въ трудности такой постановки этихъ ученій, чтобы она вполнѣ удовлетворяла требованіямъ научности и въ то же время была доступна ученикамъ второго класса. Само собою разумѣется, что это возможно только при одномъ условіи, а именно при усвоеніи дѣтьми нѣкоторыхъ ученій (изъ теоріи чиселъ) *на-вѣру*. Въ подобномъ усвоеніи ученій, которыя во всей своей научно-доказательной силѣ недоступны учащимся, нѣтъ ничего предосудительнаго, если

*) Ср. § 8 гл. IX нашей „Методики ариѳметики", имѣющей въ виду начальную школу (М. 1886).

**) Въ курсъ I-го класса ср. уч. заведенія входитъ еще „ознакомленіе съ простѣйшими дробями". Въ чемъ можетъ состоять это ознакомленіе— см. § 17 этой главы.

только дѣти понимаютъ, что они такія-то и такія-то ученія принимаютъ на-вѣру и что они, понимая ихъ смыслъ, все-таки доказывать ихъ не умѣютъ.

Въ ученіи о признакахъ дѣлимости чиселъ („Уч. ар." § 53—59) безъ доказательства могутъ и должны быть приняты основныя предложенія, на которыхъ зиждется ученіе о признакахъ дѣлимости, а равно признакъ дѣлимости чиселъ на 6. Сказанныя теоремы состоятъ въ слѣдующемъ:

1) Если каждое изъ чиселъ a, b, c и т. д. дѣлится на m, то сумма

$$a+b+c+\ldots..$$

тоже дѣлится на m;

2) Если дано $m\times n$, и если m дѣлится на какое-нибудь число a, то и произведеніе $m\times n$ дѣлится на a.

3) Если a дѣлится, а b не дѣлится на m, то сумма $a+b$ тоже не дѣлится на m.

Эти теоремы могутъ и должны быть на интересующей насъ ступени обученія (во II-мъ классѣ) принимаемы, повторяемъ, безъ доказательства по слѣдующимъ причинамъ: а) онѣ вполнѣ очевидны, и б) доказательства ихъ, именно вслѣдствіе очевидности самыхъ теоремъ, совершенно непонятны дѣтямъ; болѣе того: дѣтямъ, какъ извѣстно, непонятна возможность и необходимость доказательства такихъ истинъ, которыя до очевидности понятны, а выше намѣченныя предложенія принадлежатъ именно къ числу очевидныхъ.

Не останавливаясь на всѣхъ признакахъ дѣлимости чиселъ, мы должны о признакѣ дѣлимости на 6 замѣтить, что онъ можетъ и долженъ быть усвоенъ учащимся тоже на-вѣру (если только вообще невозможно его исключить изъ курса); но причина этого совсѣмъ иная: дѣло въ томъ, что для его *строгаго* доказательства требуется полное пониманіе условія дѣлимости цѣлаго числа на произведеніе двухъ взаимно-первыхъ чиселъ,—что почти невозможно для ученика II кл.; не строгое же доказательство этого признака, если только считать нестрогое доказательство—доказательствомъ, никакой логически-развивательной силы въ себѣ не заключаетъ и можетъ оказать на умъ учащагося довольно вредное, расшатывающее мысль его, вліяніе вслѣдствіе своей неполноты и неточности. Путемъ такъ наз. „простыхъ" разсужденій можно убѣдиться только въ томъ, что если число дѣлится на 6, то оно дѣлится и на 2, и на 3; но обратнаго предложенія путемъ такихъ же разсужденій доказать нельзя, а именно нельзя доказать, что если число дѣлится и на 2, и на 3, то оно непремѣнно дѣлится также и на 6 безъ остатка. Если бы дѣти могли понять, что они могутъ доказать необходимость извѣстнаго признака дѣлимости на 6, но не могутъ доказать его достаточность, то логическая сторона дѣла была бы въ нѣкоторой, весьма значительной степени, достигнута. Но, къ сожалѣнію, учащіеся второго класса именно этой логической тонкости понять не въ состояніи, а потому гораздо лучше такая постановка дѣла, при которой признакъ дѣлимости на 6 принимается учащимися на-вѣру (разъ ужъ безъ него, повторяемъ, нельзя обойтись подобно тому, какъ это дѣлается во французскихъ учебникахъ, гдѣ онъ до-поры до-времени чаще всего совершенно игнорируется). Изъ остальныхъ признаковъ дѣлимости чиселъ достойны особеннаго вниманія преподавателя тѣ особенные признаки дѣлимости на 4 и на 8, на которыхъ мы не останавливаемся, такъ какъ они изложены въ замѣчаніяхъ 2-мъ и 3-мъ къ § 55 нашего „Уч. ар.“

Но, кромѣ ученія о признакахъ дѣлимости чиселъ, въ курсъ II-го класса обыкновенно входятъ первоначальныя понятія объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ. Теорія общаго наибольшаго дѣлителя имѣетъ весьма мало приложеній къ тому ученію о дробяхъ, которое подлежитъ усвоенію во II-мъ классѣ; поэтому лучше всего было бы совершенно исключить эту теорію изъ курса низшихъ классовъ. Но если невозможно обойтись безъ осколковъ этой теоріи (она, впрочемъ, не можетъ считаться обязательною, такъ въ программахъ ср. уч. зав. о ней даже не упоминается), то несомнѣнно должно стремиться къ возможной экономіи времени и силъ учащихся при прохожденіи первоначальныхъ ученій объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ. Учащій долженъ по возможности себя ограничивать: онъ не имѣетъ права забывать, что научныя основы теоріи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ или нѣсколькихъ чиселъ дѣтямъ совершенно недоступны и что только *искусство* нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя, практическіе его пріемы, болѣе или менѣе доступны учащемуся II-го класса. Такое самоограниченіе со стороны учащаго тѣмъ дозволительнѣе, что ученіе объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ рѣдко примѣняется, какъ это замѣчено выше, въ дальнѣйшемъ практическомъ курсѣ ариѳметики, хотя теоретическое его значеніе громадно. Онъ не имѣетъ права забывать, что увлеченіе теоретическими перспективами этой теоріи было бы совершенно не согласно ни съ требованіями программъ, ни съ имѣющеюся налицо, на данной ступени обученія, подготовкою дѣтей къ отвлеченному математическому мышленію. Теоріи общаго наибольшаго дѣлителя и даже правиламъ его нахожденія, строго говоря, мѣсто при повтореніи ариѳметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ ср. уч. зав. (Ср. „Доп. Ст.“ нашего „Уч. ар.“). Что касается ученія о наименьшемъ кратномъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, то и оно должно быть пройдено во II-мъ кл. чисто-практически, безъ теоремъ и безъ выясненія зависимости между общимъ наибольшимъ дѣлителемъ и наименьшимъ кратнымъ числомъ. Обойтись безъ ученія о наименьшемъ кратномъ числѣ при прохожденіи статьи о приведеніи дробей къ одному знаменателю почти невозможно; но тѣмъ не менѣе, при изложеніи ученія о наименьшемъ кратномъ числѣ, не должно особенно увлекаться теоретическими элементами этого ученія. Точно такимъ же, практическимъ, характеромъ должны отличаться тѣ свѣдѣнія изъ теоріи первоначальныхъ чиселъ, которыя при этомъ могутъ и должны быть излагаемы. (II, 826—900, и Смѣш. зад. №№ 121 — 130). Особенныхъ методическихъ указаній эта ступень курса не требуетъ. Въ видѣ упражненія надъ разложеніемъ чиселъ на первоначальныхъ множителей могутъ быть, съ большою пользою, предложены слѣдующія двузначныя и трехзначныя числа, кажущіяся съ перваго взгляда первоначальными:

$51=3\times17$	$117=9\times13$	$133=7\times19.$
$57=3\times19$	$119=7\times17$	$141=3\times47.$
$87=3\times27$	$121=11\times11$	$143=11\times13.$
$91=7\times13$	$123=3\times41$	$147=3\times49.$
	$129=3\times43$	

Въ особенности полезно въ устныхъ вычисленіяхъ брать числа изъ этой небольшой таблицы.

Изъ всего выше изложеннаго очень легко вывести, что наиболѣе умѣстна такая постановка ученія о дѣлителяхъ и соприкасающихся съ нимъ ученій, при которой въ низшихъ классахъ проходится только практическая сторона этихъ ученій, а теорія всецѣло отнесена въ повторительный курсъ ариѳметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ.

§ 17. Въ курсъ ариѳметики I-го класса классической гимназіи и реальнаго училища отнесено, согласно „Уч. Планамъ", ознакомленіе съ простѣйшими дробями. Это требованіе допускаетъ весьразнообразное толкованіе, но несомнѣнно, что подъ „ознакомленіемъ" съ простѣйшими дробями нельзя разумѣть систематическое изученіе дробей, ихъ основныхъ свойствъ и дѣйствій надъ ними. Отъ этого ознакомленія можно требовать только слѣдующаго: 1) усвоенія представленія о дроби какъ совокупности равныхъ между собою долей единицы, 2) усвоенія дѣтьми способа письменнаго обозначенія дробей, и 3) усвоенія простѣйшихъ взаимныхъ отношеній между дробями $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$. Въ „Метод. Сборникѣ" нашемъ мы не нашли возможнымъ помѣстить, кромѣ тѣхъ упражненій, которыя имѣютъ въ виду полный курсъ дробей, также и отдѣльныя первоначальныя упражненія надъ дробными числами. Но мы надѣемся, что въ числѣ упражненій надъ обыкновенными дробями (II, 901—1520) найдутся и такія, которыя преподаватель, можетъ быть, сочтетъ умѣстными для „ознакомленія съ простѣйшими дробями"; вообще указанныя упражненія преслѣдуютъ совсѣмъ иную цѣль.

Для лицъ, которыя пожелали бы уяснить себѣ, въ чемъ состоитъ интересующее насъ ознакомленіе учениковъ I-го класса съ простѣйшими дробями, представляемъ примѣрный порядокъ относящихся сюда упражненій, каковыхъ учащій можетъ придумать очень много, если онъ только уяснитъ себѣ цѣль ихъ:

Вотъ листъ бумаги; разрываю его пополамъ; эта часть—*половина*. А эта? Полъ-листа да полъ-листа что составятъ? *) Отецъ *раздѣлилъ* яблоко на двѣ одинаковыя части; одну часть отдалъ сыну, а другую—дочери. Какую часть яблока получилъ сынъ и какую—дочь? Мальчикъ получилъ отъ матери яблоко; *половину* его онъ съѣлъ. Какая часть яблока у него осталась? Вотъ два полулиста бумаги! Каждый изъ этихъ полулистовъ я разрываю пополамъ; получаю четыре четвертушки бумаги. Сколько было въ полулистѣ четвертушекъ? Вотъ одна четвертушка бумаги, она составляетъ одну *четверть, одну четвертую долю* листа: вотъ еще одна четверть. Какую долю листа составляетъ четверть его и еще одна четверть? Вотъ четверть листа бумаги; вотъ еще одна четверть и вотъ еще одна. Сколько всего здѣсь четвертей листа? (Три). **) Къ тремъ четвертямъ листа прибавляю еще одну четверть. Сколько я получу листовъ бумаги? Отъ полулиста отрѣзана четверть листа и отдана кому нибудь изъ васъ. Какая доля листа осталась у меня? Что больше: одинъ листъ бумаги или полъ-листа? полъ-листа или четверть его? полъ-листа или три четверти? Можете-ли вы изобразить число „три" помощью цыфры? (Можемъ). Запишите! Что здѣсь написано? (Три!) Я хочу изобразить три *четверти*; вотъ я и поставлю подъ цыфрой 3 черточку, а подъ чертой—цыфру 4. Эта черточка и цыфра 4 обозначаютъ, что цѣлое раздѣлено на 4 одинаковыя (равныя) части. Если вы увидите гдѣ нибудь въ книгѣ цыфру 3, подъ ней черту, а подъ чертой цыфру 4, то знайте, что все это обозначаютъ *три четверти.*— Повторите—какъ изобразить три четверти помощью цыфръ.—Что обозначаетъ цыфра 3? Что обозначаютъ черта и цыфра 4 подъ нею? А какъ написать двѣ четверти? Одну четверть? Четыре четверти? Шесть четвертей? Семь четвертей? ***) А сколько половинъ составляютъ двѣ чет-

---

*) Пока дѣти еще не усвоили себѣ понятія о единицѣ, какъ цѣломъ, не слѣдуетъ употреблять слова „цѣлый". Дѣло въ томъ, что дѣти смѣшиваютъ слова „цѣлый" и „цѣльный"; а поэтому учить ихъ тому, что полъ-листа да полъ-листа составляетъ цѣлый листъ, не цѣлесообразно да и не вѣрно, такъ какъ полъ-листа да полъ-листа составляютъ вовсе не цѣлый листъ, а только *одинъ* листъ.

**) Дѣти должны отвѣчать либо полнымъ отвѣтомъ, либо самымъ сокращеннымъ, какой только возможенъ: средина въ этихъ случаяхъ не заслуживаетъ сочувствія. Дѣло въ томъ, что если спрашиваютъ сколько четвертей въ половинѣ, то отвѣтъ „двѣ четверти" можетъ быть истолкованъ такъ, что въ половинѣ четвертей двѣ четверти, что не вѣрно или, по меньшей мѣрѣ, нескладно. Вообще не совсѣмъ полный и не совсѣмъ краткій отвѣтъ, какъ мы о томъ уже говорили въ другомъ мѣстѣ, можетъ подавать и часто подаетъ многочисленные поводы къ недоразумѣнію.

***) Болѣе всего неудобствъ представляетъ этотъ урокъ, если ученикъ знаетъ слово „четверть", какъ слово, обозначающее мѣру сыпучихъ тѣлъ. Эти неудобства должны быть устранены съ самаго начала. Кромѣ того, должно замѣтить, что всѣ дроби должны быть обозначаемы какъ учащимися, такъ и учащимъ съ помощью горизонтальной черты, а не косой.

верти? Четыре четверти? Чтобы получить одну половину, на сколько одинаковыхъ частей надо раздѣлить *цѣлое?* (На двѣ одинаковыя части). Половина помощью цыфръ изображается такъ: $\frac{1}{2}$. Цыфра 1 обозначаетъ, что взята *одна* половина, а цыфра 2, что цѣлое раздѣлено на двѣ равныя части. *Я* пишу: $\frac{3}{4}$. Что здѣсь обозначаетъ цыфра 3? (Цыфра 3 обозначаетъ, что вы хотѣли изобразить *три* четверти). А что обозначаютъ черта и цыфра 4 подъ чертою? (Черта и цыфра 4 подъ нею обозначаютъ, что цѣлое раздѣлено на 4 одинаковыя части). Какъ изобразить одну половину? двѣ половины? три половины? Сколько въ половинѣ четвертей? (Двѣ). Запишите: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Сколько составятъ: $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$? $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$? $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$? $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$? $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$? $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$? $2\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$? $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$? $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$? $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$? $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$? $1-\frac{1}{2}$? $1-\frac{1}{4}$? $1-\frac{3}{4}$?
Сколько составитъ: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$? $1-\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$? $1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$?
Сколько составятъ: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$? $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$? $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$? $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$? $1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$? $2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$? $2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$? $2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$? $2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}$? $2\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}$? $2\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}$? $2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$? Сколько будетъ: $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}$? $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$? $1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ и т. д.

Способъ обозначенія обыкновенныхъ дробей не требуетъ какихъ либо отдѣльныхъ замѣчаній: онъ усваивается учащимися сравнительно скоро. Гораздо болѣе трудностей представляетъ ученіе объ измѣненіи и о преобразованіяхъ дробей, извѣстныхъ подъ именемъ сокращенія и приведенія дробей къ одному знаменателю. Въ особенности трудности эти велики, когда на дробь смотрятъ только какъ на совокупность нѣкотораго числа равныхъ между собою долей единицы. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ легко выясняется только увеличеніе и уменьшеніе дроби во столько же разъ, во сколько разъ увеличенъ или уменьшенъ числитель ея; всѣ же прочія измѣненія дроби, при сказанномъ взглядѣ на нее, очень медленно поддаются усвоенію, такъ какъ разсужденія, при этомъ употребляемыя, не отличаются особенною ясностью и доказательностью. То же справедливо относительно упомянутыхъ выше преобразованій обыкновенной дроби. Въ виду вышеизложеннаго ранѣе прохожденія ученій объ измѣненіяхъ и преобразованіяхъ дробей слѣдуетъ ознакомить съ тѣмъ взглядомъ на дробь, по которому каждая дробь можетъ быть разсматриваема какъ частное, происходящее отъ раздѣленія числа, равнаго числителю, на столько равныхъ между собою частей, сколько единицъ въ знаменателѣ. Для этой цѣли лучше всего сначала брать дроби именованныя, а не отвлеченныя, и за точку исхода принимать дроби *аликвотныя*, т. е. дроби, числители которыя равны единицѣ. Что $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ какой либо единицы мѣры (аршина, фунта и т. п.) представляютъ собою частное, происходящее отъ раздѣленія одного аршина, фунта и т. п. на 3, 4 или 5 равныхъ между собою частей—въ томъ дѣти убѣждаются скоро, если ими усвоено хотя бы только самое первоначальное представленіе о *долѣ*. На дроби неаликвотныя должно быть въ такомъ случаѣ распространено ученіе объ измѣненіи частнаго въ зависимости отъ измѣненія дѣлимаго, — что, съ логической точки зрѣнія, не особенно затруднительно. За то весьма затруднительно для дѣтей ясное пониманіе факта, что $\frac{1}{3}$ пяти аршинъ *дѣйствительно* равна $\frac{5}{3}$ одного аршина, что $\frac{1}{7}$ трехъ фунтовъ *дѣйствительно* то же, что $\frac{3}{7}$ одного фунта, и т. п. Для прочнаго установленія этого факта, къ сожалѣнію, недостаточно однихъ только логическихъ пріемовъ, когда имѣешь дѣло съ дѣтьми; дѣти склонны разсуждать совсѣмъ иначе: такъ-то оно такъ (отъ увеличенія дѣлимаго частное увеличивается, и т. д.), но непонятно—почему оно на самомъ дѣлѣ такъ, а не иначе. Хотя бы они даже и не формулировали своихъ сомнѣній въ такой именно формѣ (для чего требуется довольно высокое діалектическое развитіе), но это сомнѣніе тѣмъ не менѣе ихъ угнетаетъ, и увѣренности въ справедливости равенствъ:

2 руб.: $7 = \frac{2}{7}$ р., 3 ар.: $4 = \frac{3}{4}$ ар. и 5 фунт.: $7 = \frac{5}{7}$ фунт.

у нихъ нѣтъ до тѣхъ поръ, пока они не убѣдились путемъ долгихъ упражненій въ ихъ справедливости. Причина этихъ трудностей заключается въ томъ, что учащимся на этой ступени не вполнѣ ясно распредѣлительный (дистрибутивный) законъ дѣленія по отношенію къ сложенію,—законъ, по которому вообще

$$(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m)$$

и по которому въ частности

$$(1 + 1 + 1) : 4 = (1 : 4) + (1 : 4) + (1 : 4).$$

Для выясненія затрудняющаго насъ момента въ ученіи о дробяхъ нѣкоторые прибѣгаютъ къ слѣдующимъ разсужденіямъ: пусть требуется раздѣлить 3 аршина на 7 равныхъ частей; если бы мы раздѣлили каждый аршинъ на 7 равныхъ частей, то мы получили бы въ результатѣ $\frac{1}{7}$ аршина; стало-быть, отъ каждаго аршина получается $\frac{1}{7}$ аршина, а отъ 3-хъ аршинъ должно получиться $\frac{3}{7}$ арш. Но это „разсужденіе", строго говоря, почти ничего не выясняетъ, такъ какъ учащійся представляетъ себѣ 3 аршина какъ одно цѣлое, а не какъ совокупность трехъ отдѣльныхъ единицъ. Гораздо лучше обратиться къ распредѣлительному закону и, исходя изъ случая, когда каждое изъ частныхъ, происходящихъ отъ раздѣленія каждаго изъ слагаемыхъ, есть число цѣлое, перейти прямо къ случаю, когда каждое изъ слагаемыхъ есть единица, а частное аликвотная доля. Кромѣ того, conditio sine qua non рекомендуемой постановки курса дробей является цѣлый рядъ устныхъ упражненій, преслѣдующихъ усвоеніе дѣтьми свѣдѣній слѣдующаго типа: $\frac{1}{3}$ пяти единицъ равна $\frac{5}{3}$ одной единицы, $\frac{1}{5}$ трехъ единицъ равна $\frac{3}{5}$ одной единицы, $\frac{6}{11}$ одной единицы равны $\frac{1}{11}$ шести единицъ, и т. п. (II, 901—930). Такимъ образомъ усвоеніе богатаго последствіями и полезнаго для дальнѣйшихъ ступеней обученія понятія о дроби, какъ частномъ, тѣснѣйше связано съ умѣніемъ отыскивать любыя аликвотныя доли любыхъ цѣлыхъ чиселъ. На этой же ступени умѣстны упражненія въ такъ назыв. исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби, обращеніе смѣшаннаго числа въ неправильную дробь и выраженіе цѣлыхъ чиселъ въ разныхъ доляхъ единицы. (II, 931—940).

Ученіе объ увеличеніи и уменьшеніи обыкновенныхъ дробей въ цѣлое число разъ весьма легко усвоивается. если въ основу этого ученія положено разсмотрѣнное выше понятіе о дробномъ числѣ какъ частномъ, происходящемъ отъ раздѣленія числа, равнаго числителю дроби, на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ; поэтому мы на сказанномъ ученіи не останавливаемся, присовокупивъ, что всякая иная постановка дѣла влечетъ за собою часто непреодолимыя помощью разсужденій затрудненія. Ибо несомнѣнно, что дѣтямъ далеко недоступно ясное пониманіе того факта, что $\frac{1}{15}$, напр., въ 5 разъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{3}$, такъ какъ ихъ воображенію и сужденію весьма мало помогаетъ разсужденіе, основанное на томъ, что $\frac{1}{15}$ содержится въ единицѣ 15 разъ, а $\frac{1}{3}$—только 3 раза, что въ $\frac{1}{3}$ поэтому пять пятнадцатыхъ и что, *стало-быть*, $\frac{1}{15}$ меньше одной трети ровно въ 5 разъ. Не меньше трудностей представляетъ собою также выясненіе сокращенія дроби и дозволительности умноженія членовъ ея на одно и то же цѣлое число, если въ основу этихъ ученій не положено понятіе о дроби, какъ объ извѣстнымъ образомъ полученномъ частномъ. Въ этихъ случаяхъ, равно какъ и въ нѣкоторыхъ другихъ, можетъ, правда, оказаться весьма полезною аналогія между дробью и именованнымъ числомъ, при чемъ сокращеніе дроби тогда аналогично превращенію, а умноженіе числителя и знаменателя на одно и то же число раздробленію именованнаго числа; но, къ сожалѣнію, этотъ взглядъ на дробное число не обладаетъ такою же примѣнимостью ко всякаго рода вопросамъ, какою отличается строго-научный взглядъ на дробь какъ на частное. Впрочемъ, въ рукахъ опытнаго преподавателя сближеніе ученія о дробяхъ съ ученіемъ объ именованныхъ числахъ, безъ сомнѣнія, иногда можетъ привести къ весьма хорошимъ результатамъ *). Усвоеніе ученія объ измѣненіяхъ и неизмѣняемости дробей должно во всякомъ случаѣ со-

*) Считаемъ пріятнымъ долгомъ своимъ выразить свою искреннюю благодарность достопочтенному *В. Л. Розенбергу*, *обратившему* наше

провождаться весьма многочисленными упражненіями (II, 941—1015 и 1016—1030).

Изо всѣхъ измѣненій дроби особенныя затрудненія представляетъ то измѣненіе, которое является результатомъ прибавленія къ обоимъ членамъ или вычитанія изъ нихъ одного и того же числа. Теорія этого измѣненія можетъ быть изложена либо въ связи съ ученіемъ о пропорціяхъ, либо же съ помощью алгебраическаго языка; поэтому полное изложеніе этого ученія неумѣстно на интересующей насъ ступени обученія. Но тѣмъ не менѣе, въ виду необычайной склонности учащихся къ ошибочному пониманію фактовъ этого ученія и во избѣжаніе неясностей, получающихся при игнорированіи этого ученія во всемъ курсѣ дробей, необходимо ознакомить учащихся съ двумя фактами (которые они должны усвоить себѣ на упражненіяхъ, чисто эмпирически): 1) что отъ прибавленія къ обоимъ членамъ дроби или отъ вычитанія изъ нихъ одного и того же числа отличающаяся отъ единицы дробь (правильная или неправильная) *измѣняется*, и 2) что это измѣненіе зависитъ отъ измѣненія частнаго при одновременномъ прибавленіи къ дѣлимому и дѣлителю и при одновременномъ вычитаніи изъ дѣлимаго и дѣлителя одного и того же числа.— Предоставляя дальнѣйшее развитіе интересующаго насъ измѣненія такту преподавателя, мы должны замѣтить, что во всякомъ случаѣ полное игнорированіе этого измѣненія недозволительно ни въ какомъ случаѣ. Въ „Мет. Сб." нашемъ и въ нашемъ „Уч. ар." мы, впрочемъ, не посвятили этому ученію ни одной строки, желая предоставить въ этомъ дѣлѣ преподавателю полную свободу дѣйствій *).

вниманіе на многочисленныя выгоды этого послѣдняго взгляда и вообще не отказывавшему намъ въ своихъ компетентныхъ совѣтахъ и указаніяхъ.

*) Изъ аналитическихъ изслѣдованій интересующаго насъ вопроса наиболѣе изящнымъ является то, которое основано на алгебраическомъ изслѣдованіи *условій*, при которыхъ

$$1)\ \frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b},\quad 2)\ \frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b},\quad 3)\ \frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b},$$

$$4)\ \frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b},\quad 5)\ \frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b} \text{ и } 6)\ \frac{a-c}{b-c} < \frac{a}{b}.$$

Съ помощью весьма простыхъ преобразованій (приведенія обѣихъ частей равенства или неравенства къ одному знаменателю и уничтоженія общаго знаменателя и т. п.) необычайно просто приходимъ къ заключенію, что только неправильная дробь равная единицѣ не измѣняется отъ прибавленія или отниманія поровну, что только правильная дробь увеличивается, а неправильная уменьшается отъ прибавленія къ обоимъ членамъ ея поровну, и что, наконецъ, только неправильная дробь увеличивается, а правильная уменьшается отъ вычитанія изъ членовъ ея одного и того же числа.—Къ сожалѣнію ариѳметика не знаетъ ничего подобнаго этому изслѣдованію, и это послѣднее приходится отложить до ознакомленія учащихся съ алгебраическою теоріею дробей.

§ 18. Ученіе о нахожденіи опредѣленной части даннаго цѣлаго и всего цѣлаго по данной части его принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ на практикѣ и въ теоріи дробей: на практикѣ эти умѣнія важны по причинѣ часто встрѣчающейся въ нихъ надобности, въ теоріи же—по причинѣ тѣснѣйшей связи этого ученія съ теоріею умноженія и дѣленія на дробное число. Кромѣ того ученіе о нахожденіи частей цѣлаго крайне важно для прочнаго установленія понятія о дроби какъ частномъ,—понятія, какъ мы это видѣли выше, крайне важнаго для построенія дальнѣйшаго курса. Интересующія насъ ученія принадлежатъ къ числу разработаннѣйшихъ и простѣйшихъ съ методической точки зрѣнія, а потому на методической проработкѣ ихъ останавливаться не будемъ, напомнивъ только о томъ, что учащій никогда не долженъ забывать, что рѣшеніе задачи на нахожденіе части цѣлаго можетъ быть разсматриваемо и впослѣдствіи разсматривается какъ умноженіе, а нахожденіе цѣлаго по частямъ — какъ дѣленіе. Только на два пункта считаемъ необходимымъ обратить вниманіе учащаго: во 1-хъ, на то, что раздробленіе и превращеніе простыхъ и составныхъ именованныхъ чиселъ тѣснѣйше соприкасаются съ интересующими насъ ученіями и, во 2-хъ, что особенное вниманіе должно быть обращено на дозволительность перемѣны порядка множителей, т. е. на то, что $\frac{3}{7}$ пяти шестыхъ то же, что $\frac{5}{6}$ трехъ седьмыхъ, что $\frac{3}{6}$ пяти седьмыхъ и что $\frac{5}{7}$ трехъ шестыхъ, и т. п. Кромѣ развивательнаго значенія, это свойство оказывается весьма полезнымъ для разъясненія дозволительности сокращенія каждаго изъ множителей числителя полученнаго результата съ любымъ изъ множителей знаменателя его. Само собою разумѣется, что вся эта статья требуетъ неустаннаго и методическаго упражненія дѣтей въ вычисленіяхъ и что безъ соотвѣтствующихъ упражненій всяческія разъясненія и теоретическія перспективы могутъ только отнять много времени, не давъ достаточнаго количества полезныхъ навыковъ и умѣній. (II, 1031—1180).

§ 19. Ученію о первыхъ двухъ дѣйствіяхъ надъ дробными числами должно предшествовать ученіе о приведеніи дробей къ одному знаменателю. Прежде чѣмъ приступить къ упражненіямъ этого рода, учащіеся должны понять: 1) что всякая данная не во всякихъ доляхъ можетъ быть выражена и 2) что нѣтъ такихъ двухъ дробей, которыхъ нельзя было бы выразить въ одинаковыхъ доляхъ, умноживъ члены каждой изъ дробей на нѣкоторыхъ опредѣленныхъ, приличнымъ образомъ выбранныхъ, множителей. Упражненія въ опредѣленіи измѣненій дроби достаточно подготовили учащихся къ пониманію этихъ двухъ фактовъ, а потому достаточно нѣсколькихъ примѣровъ для того, чтобы учащіеся поняли ихъ сущность. Послѣ этого можно перейти къ соотвѣтствующимъ упражненіямъ. (II, 1181—1225).

Сложеніе и вычитаніе дробей не представляетъ никакихъ методическихъ трудностей, но при этомъ не должно забывать, что большинство упражненій надъ простѣйшими дробями (половинами, третями, четвертями и восьмыми) должны быть обязательно устными. Ибо крайне ненормальнымъ надо считать такую постановку дѣла, при которой учащійся для того, чтобы сложить половину съ третью или вычесть $\frac{1}{2}$ изъ трехъ четвертей, прибѣгаетъ къ приведенію дробей къ одному знаменателю и вообще выказываетъ слишкомъ большое пристрастіе къ письменному производству. Подобные примѣры учащійся должны раздѣлывать быстро, не прибѣгая къ совершенно излишнему въ данномъ случаѣ многописанію. (II, 1251 — 1260). Небезполезно упражнять учащихся на интересующей насъ ступени обученія въ разложеніи дробей на аликвотныя дроби съ разными знаменателями. Извѣстно, что всякая дробь, которой числитель больше 1-цы, можетъ быть разсматриваема какъ сумма двухъ или нѣсколькихъ аликвотныхъ дробей съ различными знаменателями. Такъ напр.,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}, \text{ и т. п.}$$

Упражненія въ подобномъ разложеніи дробей на аликвотныя части весьма занимательны да и даютъ не мало поводовъ къ развитію быстраго соображенія и быстрыхъ умственныхъ вычисленій. (II, 1271—1275, 1676—1685).

Наибольшее количество методическихъ трудностей теоріи дѣйствій надъ дробными числами сосредоточено въ ученіяхъ о дѣйствіяхъ умноженія и дѣленія. Случаи цѣлаго множителя и цѣлаго дѣлителя, конечно, не представляютъ никакихъ особенныхъ затрудненій; за-то крайне затруднительно для учащихся усвоеніе того взгляда на отысканіе частей цѣлаго, по которому оно представляетъ собою умноженіе, и тотъ взглядъ на отысканіе цѣлаго по частямъ его, по которому на это отысканіе можно смотрѣть какъ на дѣленіе. Для нѣкотораго облегченія этой трудности можно прибѣгнуть къ аналогіи, существующей между всѣми задачами на умноженіе и задачами на отысканіе части цѣлаго, а равно къ аналогіи между задачами на дѣленіе и задачами на отысканіе цѣлаго по частямъ его. („Уч. ар.“ § 73 и II, 1351 — 1365, 1369—1375, 1386—1400 и т. п.).

Съ помощью упражненій, подобныхъ указаннымъ выше, можно добиться совершенно правильнаго взгляда на дѣйствія умноженія и дѣленія на дробное число. Но при этомъ не должна быть забываема *условность* распространенія терминовъ „умноженіе“ и „дѣленіе“ на случаи, повидимому совершенно чуждые первоначальному смыслу этихъ терминовъ. Нахожденіе части цѣлаго и цѣлаго по частямъ его—это не дѣйствія надъ числами, а совокупность двухъ дѣйствій; но такой взглядъ вѣренъ только до тѣхъ поръ, пока нахожденіе частей цѣлаго не подведено подъ категорію умноженія, а нахожденіе цѣлаго по частямъ его — подъ категорію дѣленія. Сущность теоріи умноженія при дробномъ множителѣ и дѣленія при дробномъ дѣлителѣ до тѣхъ поръ не понята учащимися, пока они не вполнѣ ясно понимаютъ, что

1) нахожденіе $\frac{1}{n}$-ой числа p есть умноженіе числа p на $\frac{1}{n}$,

2) „ $\frac{m}{n}$-хъ „ p „ „ „ p на $\frac{m}{n}$,

3) „ цѣлаго, $\frac{1}{n}$-ая котораго равна p, есть дѣленіе p на $\frac{1}{n}$,

и 4) „ „ $\frac{m}{n}$-ыхъ „ „ p, „ „ p на $\frac{m}{n}$.

Главнѣйшая трудность всего ученія объ умноженіи и дѣленіи на дробь обусловливается тѣмъ, что дѣти привыкли съ умноженіемъ связывать понятіе объ увеличеніи множимаго, а съ дѣленіемъ—понятіе объ уменьшеніи дѣлимаго. Поэтому на сказанную трудность учащій долженъ обращать особенное вниманіе учащихся, и притомъ не должно переходить къ новымъ упражненіямъ, пока вполнѣ, до тонкости, не разсмотрѣнъ вопросъ о величинѣ произведенія и частнаго для каждаго изъ упражненій.

Ученіе о кратномъ сравненіи дробныхъ чиселъ должно быть пройдено отдѣльно отъ ученія о томъ случаѣ дѣленія, котораго цѣль заключается въ отысканіи множимаго по данному произведенію и данному множителю. Выше нами изложенное относится только къ этому послѣднему случаю дѣленія (т. е., если можно такъ выразиться, къ дѣленію на равныя части), ученіе же о кратномъ сравненіи двухъ дробныхъ именованныхъ (или отвлеченныхъ) чиселъ предполагаетъ непремѣнно отвлеченное частное и хотя находится въ довольно тѣсной связи съ разсмотрѣннымъ случаемъ дѣленія, но можетъ быть разсматриваемо въ связи съ приведеніемъ дробей къ одному знаменателю. Въ нашемъ „Уч. ар." (§ 74, замѣчаніе 4-е) изложена съ достаточною подробностью та точка зрѣнія на кратное сравненіе, при которой этотъ видъ дѣленія ставится въ тѣснѣйшую связь съ другимъ видомъ этого дѣйствія. Не останавливаемся на методическихъ трудностяхъ этого, единственно вѣрнаго съ научной точки зрѣнія, взгляда въ виду того, что учащій несомнѣнно легко ихъ устранитъ; при этомъ позволяемъ себѣ прямо сослаться на указанное мѣсто нашего „Учебника". Что же касается способа кратнаго сравненія съ помощью приведенія дробей къ одному знаменателю, то совершенно его игнорировать не слѣдуетъ; но не слѣдуетъ также, если только возможно, ограничиваться однимъ только этимъ способомъ;

онъ слишкомъ специаленъ и не стоитъ въ достаточно тѣсной зависимости къ общей теоріи дѣленія какъ ариѳметическаго дѣйствія.

Кромѣ того, считаемъ нужнымъ замѣтить, что точное ученіе о крайномъ сравненіи приводитъ также къ тому взгляду на отвлеченную дробь, по которой дробь есть крайное отношеніе числа, равнаго числителю, къ числу равному ея знаменателю, — къ взгляду, въ высшей степени плодотворному въ математикѣ вообще въ и ариѳметикѣ въ частности. („Уч. ар.“ § 74, замѣчаніе 5-е.)

§ 20. Ученіе о десятичныхъ дробяхъ можетъ быть пройдено сначала въ зависимости отъ обозначенія десятичныхъ дробей въ видѣ дробей обыкновенныхъ. Такой способъ, безъ сомнѣнія, въ состояніи принести учащимся большую пользу, не отнявъ у нихъ слишкомъ много времени: учащіеся свыкаются съ мыслью о томъ, что дроби, знаменатели которыхъ представляютъ собою степень 10-ти, обладаютъ многими особенностями, и что дѣйствія надъ такими дробями допускаютъ большія упрощенія. При этомъ не слѣдуетъ, впрочемъ, обыкновенную дробь, знаменатель которой есть какая нибудь степень 10-ти, называть *десятичною*, такъ какъ съ этимъ послѣднимъ терминомъ должно быть тѣснѣйше связываемо понятіе объ особенномъ (по десятичной системѣ счисленія) обозначеніи ея. Когда учащіеся вполнѣ освоились съ интересующимъ насъ особеннымъ видомъ дробей и съ особенностями производства дѣйствій надъ ними, можно перейти къ обозначенію этихъ дробей въ видѣ десятичныхъ (т. е. безъ знаменателя и съ помощью приличнымъ образомъ поставленной запятой) и къ дѣйствіямъ надъ изображенными такимъ образомъ дробями.

Можно избрать и иной путь прохожденія ученія о десятичныхъ дробяхъ: можно начать со способовъ обозначенія (словеснаго и письменнаго) десятичныхъ дробей и съ дѣйствій надъ ними, когда они уже обозначены общепринятымъ способомъ, а потомъ перейти къ оправданію выведенныхъ правилъ на дробяхъ обыкновенныхъ. При этомъ способѣ прохожденія ученія о десятичныхъ дробяхъ въ основу всего обученія должна быть положена десятичная система счисленія со всѣми ея особенностями и свойствами; потомъ на этой системѣ уже путемъ дедуктивнымъ строятся всѣ ученія о десятичныхъ дробяхъ. Не подлежитъ сомнѣнію, что, несмотря на научныя достоинства этого пути, ему долженъ быть, хотя бы только въ самомъ началѣ, предпочитаемъ при недостаточномъ развитіи класса способъ, намѣченный выше.

Изъ методическихъ особенностей каждаго изъ указанныхъ путей должна быть упомянута необходимость выработки совершенно ясныхъ представленій о различныхъ способахъ устнаго и письменнаго обозначенія десятичныхъ дробей („Уч. ар.“ §§ 75 и 76) и объ измѣненіяхъ десятичной дроби въ зависимости отъ мѣста запятой. На этомъ основано все ученіе о дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями, а потому временемъ, посвященнымъ выработкѣ ясныхъ представленій объ указанныхъ элементахъ курса, особенно скупиться не слѣдуетъ. Указавъ выше въ общихъ чертахъ сущность двухъ путей, которые могутъ быть избраны при прохожденіи въ ср. учебн. зав. ученія о десятичныхъ дробяхъ, мы должны перейти къ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями. Но изъ всѣхъ четырехъ дѣйствій мы подольше остановимся только на умноженіи, такъ какъ ученія о сложеніи и вычитаніи очень легко поддаются усвоенію.

Обычные способы производства умноженія и дѣленія основаны на ученіяхъ объ измѣненіи произведенія при измѣненіяхъ множимаго и множителя и объ измѣненіи частнаго при измѣненіяхъ дѣлимаго и дѣлителя. На этихъ способахъ здѣсь останавливаться, конечно, не мѣсто. Мы желаемъ коснуться здѣсь того способа умноженія, о которомъ Лагранжъ говоритъ въ одной изъ своихъ не разъ упоминаемыхъ выше лекцій. Этотъ способъ основанъ на ***неизмѣняемости*** произведенія при одновременномъ увеличеніи множителя и уменьшеніи множимаго въ одно и то же число разъ; притомъ, этотъ способъ отличается тою особенностью, что если множитель есть число смѣшанное, то не надобно прибѣгать ни къ какимъ измѣненіямъ данныхъ чиселъ, и все дѣло сводится, можно сказать, только къ приличной записи множителя подъ множимымъ. Лагранжъ приводитъ слѣдующій примѣръ: пусть требуется умножить 437,25 на 27,34. При этомъ подпишемъ множителя подъ множимое такъ, чтобы цѣлыя единицы перваго разряда множителя были записаны подъ послѣднею цыфрою множимаго; кромѣ того умноженіе начинаемъ съ наивысшей цыфры множителя и низшую цыфру произведенія записываемъ подъ соотвѣтствующею цыфрою множителя. Тогда очевидно, что запятая въ произведеніи должна находиться въ одномъ столбцѣ съ запятою множимаго. Обращаемъ особенное вниманіе благосклоннаго читателя на этотъ способъ умноженія десятичной дроби на десятичную, тѣмъ болѣе, что въ „Учебникѣ“ нашемъ мы его не излагаемъ.

$$
\begin{array}{r@{}l}
437&,25\\
\times\;\;&27,34\\
\hline
8745&,0\\
3060&,75\\
131&,175\\
17&,4900\\
\hline
11954&,4150
\end{array}
$$

Преимущества этого способа громадны: онъ требуетъ только правильной записи и весьма удобенъ даже для приближеннаго вычисленія, такъ какъ при этомъ способѣ весьма легко увидѣть—какія цыфры частныхъ произведеній не подлежатъ опредѣленію при данной степени точности. Въ случаѣ если оба числа суть дроби правильныя, въ одномъ изъ нихъ (гдѣ это удобнѣе) можно перенести запятую на столько знаковъ вправо, чтобы получилось число смѣшанное; въ другомъ же, во избѣжаніе поправокъ въ полученномъ такимъ образомъ произведеніи, въ такомъ случаѣ надо неренести занятую влѣво на столько же знаковъ. Напр., пусть требуется умножить 0,3758 на 0,255. Перенеся занятую въ множителѣ вправо, а въ множимомъ — влѣво на одинъ знакъ, и записавъ оба числа приличнымъ образомъ (т. е. единицы множителя подъ послѣднею цыфрою множимаго), получимъ въ первомъ частномъ произведеніи 0,07516, а во всемъ произведеніи 0,0958290, причемъ занятыя вовсе не отбрасывались и причемъ, вообще, можно достигнуть большихъ выгодъ въ вычисленіи.

$$\begin{array}{r} 0{,}03758 \\ \underline{2{,}55} \\ 0{,}07516 \\ 18790 \\ \underline{18790} \\ 0{,}0958290 \end{array}$$

Этотъ способъ умноженія тѣмъ удобнѣе и педагогичнѣе, что обычный способъ дѣленія десятичной дроби на десятичную же основанъ тоже на принципѣ неизмѣняемости. Но на этомъ способѣ дѣленія мы не считаемъ нужнымъ останавливаться: онъ сводится къ перенесенію занятой въ дѣлимомъ и дѣлителѣ вправо ровно на столько знаковъ, на сколько это необходимо для того, чтобы дѣлитель сдѣлался числомъ цѣлымъ, а частное получилось совершенно равное искомому. Считаемъ нужнымъ только предупредить, что способъ дѣленія, основанный на приведеніи дѣлимаго и дѣлителя къ одному знаменателю, не можетъ считаться способомъ вообще удобнымъ, такъ какъ въ случаяхъ, когда въ дѣлителѣ послѣ занятой меньше десятичныхъ знаковъ, чѣмъ въ дѣлимомъ, этотъ способъ влечетъ за собою излишніе нули въ дѣлителѣ и вообще излишнее многописаніе. Кромѣ того замѣтимъ, что при прохожденіи ученія о дѣленіи десятичной дроби на десятичную же необходимо учащимся сначала принять на-вѣру, что *иногда* дѣленіе приводитъ къ безконечному ряду цыфръ въ частномъ. Несмотря на то, что эта особенность дѣленія можетъ быть довольно хорошо выяснена, сначала, повторяемъ, можно удовлетвориться знаніемъ факта, такъ какъ загромождать ученіе о производствѣ дѣйствій теоретическими трудностями на-врядъ ли цѣлесообразно. Впослѣдствіи, когда трудности самаго производства дѣйствій будутъ всѣ преодолѣны и поняты учащимися, можно — въ связи съ ученіемъ объ обращеніи обыкновенныхъ дробей въ десятичныя—выяснить не только возможность, но и причину того, что въ частномъ получилась періодическая дробь: тогда это будетъ вполнѣ умѣстно.

§ 21. Ученіе объ обращеніи обыкновенныхъ дробей въ десятичныя не представляетъ трудностей, пока не появились вопросы о числѣ цыфръ въ періодѣ, о числѣ цыфръ до періода въ смѣшанныхъ періодическихъ дробяхъ и вообще вопросы, соприкасающіеся съ теоретическими основами этого ученія. Еще труднѣе въ этомъ отношеніи ученіе объ отысканіи основной дроби, отъ обращенія которой въ десятичную получилась данная періодическая. Что періодическая дробь можетъ быть въ вычисленіяхъ замѣняема основною дробью, отъ обращенія которой въ десятичную получилась данная періодическая, можетъ быть вполнѣ строго доказано, какъ извѣстно, только съ помощью теоріи предѣловъ,—теоріи, обыкновенно и не безъ основанія не излагаемой въ курсахъ ариѳметики. Но, помимо этого, не легко поддается усвоенію также и самый способъ отысканія основныхъ дробей, отъ обращенія которыхъ въ десятичныя получаются данныя періодическія дроби. Одинъ изъ этихъ способовъ, основанный на увеличеніи данной чистой періодической дроби во столько разъ, сколько это необходимо для полученія смѣшаннаго числа съ такимъ же періодомъ, не заслуживаетъ сочувствія по слѣдующимъ двумъ причинамъ: 1) мы не имѣемъ права увеличивать безконечную дробь по тому же правилу, по которому достигается увеличеніе дробей конечныхъ, и—что еще важнѣе 2) мы не знаемъ ни того—одинаково ли или неодинаково число періодовъ въ обѣихъ дробяхъ, нами получаемыхъ при этомъ способѣ, ни того—имѣемъ ли мы право дѣлать вычитаніе безконечныхъ дробей по тѣмъ же правиламъ, по которымъ дѣлается вычитаніе дробей конечныхъ. Съ помощью теоріи предѣловъ можно оправдать и выяснить дозволительность интересующаго насъ способа; но безъ этого оправданія способъ этотъ такъ или иначе долженъ быть болѣе или менѣе принятъ на-вѣру. Поэтому гораздо удобнѣе способъ эмпирическій, который хотя тоже долженъ быть принятъ на вѣру, но отличается гораздо большею очевидностью: это—способъ, основанный на разсмотрѣніи періодическихъ дробей, получаемыхъ отъ обращенія въ десятичныя дробей обыкновенныхъ вида:

$$\frac{a}{9},\ \frac{b}{99},\ \frac{c}{999},\ \text{и т. д.}$$

гдѣ a, b, c суть числа меньшія соотвѣтствующихъ имъ знаменателей. Лучше всего начать съ дробей

$$\frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{6}{9},\ \frac{7}{9}\ \text{и}\ \frac{8}{9}$$

съ тѣмъ, чтобы потомъ перейти къ дробямъ, напр., слѣдующаго вида:

$$\frac{1}{99},\ \frac{7}{99},\ \frac{10}{99},\ \frac{17}{99},\ \frac{83}{99}\ \text{и}\ \frac{90}{99}.$$

Послѣ достаточнаго количества упражненій въ этомъ направленіи можно перейти къ разсмотрѣнію чистыхъ періодическихъ дробей съ одною и двумя цыфрами въ періодѣ; послѣ соотвѣтствующихъ упражненій въ обращеніи обыкновенныхъ дробей, которыхъ знаменатели обозначены большимъ количествомъ девятокъ, можно перейти къ отысканію отдѣльныхъ дробей, отъ обращенія которыхъ въ десятичныя получаются періодическія дроби съ большимъ числомъ цыфръ въ періодѣ. При этомъ, если возможно, слѣдуетъ показать учащимся, что всякую обыкновенную дробь, знаменатель которой есть число взаимно-простое съ 10-тью, можно изобразить въ видѣ дроби

$$\frac{a}{10^n - 1}$$

т. е. въ видѣ дроби, которой знаменатель равенъ одному изъ чиселъ: 9, 99, 999, 9 999, 99 999 и т. д. Такимъ образомъ учащіеся поймутъ, хотя и не будутъ въ состояніи доказать и выяснить, почему такъ важно разсмотрѣніе дробей

$$\frac{a}{9}, \quad \frac{b}{99}, \quad \frac{c}{999}, \quad \frac{d}{9\,999} \text{ и т. д.,}$$

когда вопросъ касается нахожденія основной дроби, отъ обращенія которой въ десятичную получается дробь періодическая. Кромѣ того они поймутъ, что это способъ общій, а не спеціальный.

Что касается ученія о смѣшанной періодической дроби, то при прохожденіи этого ученія учащіеся должны усвоить на вѣру возможность сведенія вопроса о смѣшанной періодической дроби къ вопросу о чистой періодической: для этого надо принять дозволительность увеличенія періодическихъ дробей по общимъ правиламъ и увеличить данную смѣшанную періодическую дробь въ приличное число разъ съ тѣмъ, чтобы въ дальнѣйшихъ своихъ разсужденіяхъ уже не забывать этого измѣненія дроби.

Несмотря на очевидную невозможность вполнѣ научной постановки ученія о періодическихъ дробяхъ на интересующей насъ ступени обученія, учащихся полезно упражнять въ разсматриваніи періодическихъ дробей не только съ точки зрѣнія, если можно такъ выразиться, естественнаго періода, но также съ точки зрѣнія періода искусственнаго. Такъ, періодическую дробь 0,222... можно разсматривать какъ дробь, которой періодъ равенъ 22, т. е. какъ дробь 0,(22) или какъ дробь 0,(222) или наконецъ какъ смѣшанную періодическую дробь

0, 2 (2) или 0, 22 (222) и. т. п.

Точно также чистую періодическую дробь

0, 2387 2387 2387....

можно разсматривать какъ смѣшанную:

0, 23 (8723) или какъ 0, 2 (3872) и т. п.

При этомъ результаты обращенія этихъ дробей въ обыкновенныя не зависятъ отъ точки зрѣнія, съ которой мы смотримъ на данную періодическую дробь. Но особеннаго вниманія заслуживаютъ, при прохожденіи ученія о періодическихъ дробяхъ, дроби, которыя можно разсматривать какъ приближенныя значенія данной періодической дроби: *надо пріучить учащихся къ пониманію различія*, напр., между періодическою дробью

0, 27 27 27....

и дробями

0, 2; 0, 27; 0, 272; 0, 2727; 0, 272727.

Учащіеся очень склонны забывать о томъ, что періодическая дробь есть дробь безконечная и что не всякая дробь съ нѣкоторымъ повторяющимся періодомъ цыфръ есть дробь періодическая. Часто можно встрѣтить учащагося, который не понимаетъ, что дробь 0, 33333 не есть дробь періодическая, хотя цыфра 3 и повторяется въ ней нѣсколько разъ *): дѣти забываютъ слишкомъ часто, что періодическая дробь есть дробь прежде всего безконечная.

§ 22. Ученіе объ отношеніяхъ и пропорціяхъ не нуждается въ особенно подробномъ методическомъ освѣщеніи. Ученіе объ отношеніяхъ и пропорціяхъ ариѳметическихъ безъ всякаго вреда для дѣла (какъ это замѣчено еще Лагранжемъ) могло бы быть исключено изъ курса ариѳметики, такъ какъ приложеній это ученіе не имѣетъ. Это ученіе можетъ быть пройдено какъ бы въ pendant къ ученію объ отношеніяхъ и пропорціяхъ геометрическихъ. Вообще же интересующая насъ статья, которая носитъ болѣе или менѣе алгебраическій характеръ,—съ этой точки зрѣнія является какъ бы работою подготовительною для изученія алгебраическаго языка и вообще языка формулъ, если можно такъ выразиться. Поэтому въ высшей степени важнымъ является пріученіе дѣтей къ надлежащему чтенію этихъ спеціальныхъ формулъ. Когда дѣло касается ариѳметическихъ отношеній и пропорцій, то должно упражнять дѣтей въ разнообразномъ чтеніи формулъ этого послѣдняго рода. Такъ, на отношеніе $8 - 2 = 6$ они должны смотрѣть слѣдующимъ образомъ: а) 8 безъ 2-хъ равно 6-ти, б) 8 больше 2-хъ на 6; в) 2 меньше 8-ми на 6; г) разностное отношеніе 8-ми къ 2-мъ равно 6-ти; д) если изъ 8-ми вычесть 2, то получится 6. Пропорцію $8 - 3 = 12 - 7$ они должны умѣть читать слѣдующимъ образомъ: а) 8 больше 3 на столько же, на сколько 12 больше 7-ми: б) 3 меньше 8-ми на столько же, на сколько 7 меньше 12-ти; в) 3 меньше 8-ми на столько же, на сколько 12 больше 7-ми; г) 8 больше 3-хъ на

*) Теоретическія основы ученія о періодическихъ дробяхъ должны быть отнесены въ повторительный (теоретическій) курсъ ариѳметики. Въ „Дополнит. Статьяхъ“ нашего „Учебника“ этому ученію посвящены §§ 3—6 ст. VII-ой.

столько же, на сколько 7 меньше 12-ти; д) разность между 8-мью и 3-мя равна разности между 12-тью и 7-мью, и т. д.

Въ особенности подобныя упражненія важны при прохожденіи ученія о геометрическихъ отношеніяхъ и пропорціяхъ, такъ какъ способы чтенія здѣсь гораздо многочисленнѣе и богаче слѣдствіями. Такъ, напр., кратное отношеніе $18 : 2 = 9$ можетъ быть прочитано: 18 больше 2-хъ или 2 меньше 8-ми въ 9 разъ, въ 18-ти 2 содержится 9 разъ, 2 составляетъ одну девятую долю 18-ти; отношеніе $3 : 5 = \frac{3}{5}$ выражаетъ: 3 составляетъ $\frac{3}{5}$ пяти, въ 3-хъ единицахъ содержится $\frac{3}{5}$ доли 5-ти единицъ, 5 единицъ, помноженныхъ на $\frac{3}{5}$, дадутъ въ результатѣ 3, или же 5 составляетъ $\frac{5}{3}$ трехъ единицъ, и т. д. Когда учащимися будутъ вполнѣ усвоены различныя значенія подобной записи, отысканіе неизвѣстнаго элемента геометрическаго отношенія не представитъ никакого затрудненія, а равнымъ образомъ понятнѣе будетъ смыслъ формулы, извѣстной подъ именемъ геометрической пропорціи. Формулы этого послѣдняго рода могутъ быть прочитаны разнообразнѣйшими способами. Такъ, пропорція $18 : 3 = 30 : 5$ можетъ быть прочитана такъ: а) 18 больше 3-хъ во столько же разъ, во сколько 30 больше 5-ти; б) 3 меньше 18-ти во столько же разъ, во сколько 5 меньше 30-ти; в) 18 больше 3-хъ во столько же разъ, во сколько 5 меньше 30-ти, или 3 меньше 18-ти во столько же разъ, во сколько 30 больше 5; г) 3 составляетъ такую же часть 18-ти, какую 5 составляетъ 30-ти; д) чтобы получить 18, три надо помножить на столько же, на сколько надо помножить 5, чтобы получить 30; г) въ 18 содержится 30 такихъ частей, какихъ въ 3-хъ единицахъ содержится 5; наконецъ, д) въ 30-ти содержится 18 такихъ же частей, какихъ въ 5 содержится 3.— Въ особенности трудно усвоеніе послѣднихъ двухъ точекъ зрѣнія, которыя крайне важны при рѣшеніи учащимися задачъ на правило пропорціональнаго дѣленія.

Изъ теоретическихъ элементовъ ученія о геометрическихъ пропорціяхъ мы здѣсь считаемъ нужнымъ упомянуть только о томъ, что всякая пропорція свидѣтельствуетъ о равенствѣ между собою нѣкоторыхъ двухъ отвлеченныхъ дробей и что, наоборотъ, равенство двухъ дробей между собою свидѣтельствуетъ о существованіи нѣкоторой геометрической пропорціи. Это отнюдь не должно быть игнорируемо при преподаваніи. Остальныя же ученія съ достаточною подробностью разработаны въ §§ 88—100 нашего „Учебника“ и въ §§ 1—5 ст. VIII отдѣла „Доп. Ст.“ Особенное вниманіе читателя обращаемъ на приложенія теоріи пропорцій къ сокращеннымъ вычисленіямъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ (напр., въ случаяхъ дѣленія на 125, 175, 225, 375, 525, 675, 875, 1125), хотя и не считаемъ необходимымъ здѣсь останавливаться на этихъ приложеніяхъ (Ср. „Уч. ар." §§ 99—100).

§ 23. Въ нашемъ „Учебникѣ ариѳметики" ученія о рѣшеніи задачъ на такъ называемыя тройныя правила изложены почти исключительно съ точки зрѣнія пропорцій, причемъ рѣшеніе задачъ даннаго типа съ точки зрѣнія способа приведенія къ единицѣ отнесено въ краткія замѣчанія объ этомъ способѣ и объ его примѣненіи къ данному частному случаю. Вполнѣ раздѣляя тотъ взглядъ на задачи этого рода, по которому рѣшеніе ихъ съ помощью пропорцій не отличается ни естественностью, ни особенно большимъ развивательнымъ значеніемъ, мы тѣмъ не менѣе въ „Учебникѣ" нашемъ и въ отдѣлѣ „Доп. Ст." посвятили именно примѣненію пропорцій къ рѣшенію задачъ интересующихъ насъ типовъ довольно много мѣста. Мы постарались изложить всѣ примѣненія геометрическихъ пропорцій по возможности строго и полно, съ тѣмъ чтобы въ нашемъ „Опытѣ методики ариѳметики", предназначенномъ для преподавателей математики въ ср. уч. зав., этому вопросу не посвящать уже ни одной строчки. За-то мы позволимъ себѣ здѣсь подольше остановиться на способѣ приведенія къ единицѣ.

Пока мы имѣемъ дѣло съ задачами на простое тройное правило, вся трудность заключается только въ томъ, что учащійся преувеличиваетъ простоту рѣшенія задачъ по этому способу и не представляетъ себѣ того, что способъ этотъ примѣнимъ не ко всякаго рода величинамъ, а только къ величинамъ, находящимся одна отъ другой въ пропорціональной зависимости. Во избѣжаніе такой ошибки сужденія надо по возможности часто переходить отъ задачъ съ прямо-пропорціональными величинами къ задачамъ, въ которыя входятъ величины обратно-пропорціональныя. Кромѣ того небезполезно иногда, съ тою же цѣлью, предлагать задачи, въ которыхъ неизвѣстная величина вовсе не зависитъ отъ данныхъ или же находится не въ пропорціональной зависимости отъ нея; напр.: „разстояніе отъ Москвы до Твери двое пѣшеходовъ прошли въ теченіе 7-ми дней; въ теченіе сколькихъ дней то же разстояніе пройдутъ 5 пѣшеходовъ?" или: „фунтъ свѣчей, которыхъ идетъ 5 на каждый фунтъ, стоитъ 25 коп.; что стоитъ фунтъ свѣчей, которыхъ идетъ 6 на фунтъ?" или: „пудъ винтовъ извѣстной величины стоитъ столько-то рублей; что стоитъ пудъ винтовъ, изъ которыхъ вѣсъ каждаго вчетверо меньше?" Когда учащійся пойметъ, что не всѣ задачи привычнаго для него типа могутъ быть разрѣшаемы съ помощью приведенія къ единицѣ, одна изъ развивательнѣйшихъ и труднѣйшихъ сторонъ задачъ на простое тройное правило будетъ усвоена.

Что касается задачъ на сложное тройное правило, то при ихъ рѣшеніи должно имѣть въ виду слѣдующіе два пункта: 1) учащіеся должны привыкнуть къ пониманію значенія одинаковости условій; поэтому не безполезно иногда обращаться къ задачамъ съ нѣсколькими условіями, изъ которыхъ всѣ, за исключеніемъ одного, одинаковы, но при этомъ всѣ выражены вполнѣ; кромѣ того, ранѣе уже разрѣшенныя задачи на простое тройное правило могутъ быть осложняемы не имѣющимися въ нихъ условіями, но съ тѣмъ, чтобы одинаковыя условія были точно охарактеризованы; на почвѣ такихъ задачъ можетъ быть построено вѣрное понятіе о зависимости искомой величины отъ каждаго изъ вліяющихъ на нее условій. 2) Учащіеся должны понять, что часто невозможный дробный результатъ, который иногда получается на промежуточныхъ ступеняхъ разсужденія (дробное число людей, напр.) не вліяетъ на вѣрность разсужденія. Во избѣжаніе дробнаго результата, можно бы сначала опредѣлять искомую величину въ зависимости отъ всѣхъ тѣхъ величинъ, которыя, при приведеніи къ единицѣ, повлекутъ за собою сначала только умноженіе соотвѣтствующаго искомой величинѣ значенія ея,—съ тѣмъ чтобы потомъ перейти къ величинамъ, которыя потребуютъ дѣленія. Но такой способъ крайне затруднителенъ и утомителенъ. Гораздо лучше убѣдить учащихся въ томъ, что не слѣдуетъ обращать вниманія на величину промежуточныхъ результатовъ, если только разсужденія, благодаря которымъ они достигнуты, справедливы. Когда ими преодолѣны трудности самаго рѣшенія задачъ на сложное тройное правило, то можно имъ выяснить также и намѣченную особенность промежуточныхъ результатовъ, когда мы имѣемъ дѣло съ недѣлимыми единицами*).

§ 24. Рѣшенію задачъ на такъ наз. правило процентовъ должно, безъ сомнѣнія, предшествовать установленіе точнаго понятія о значеніи термина „процентъ". Тотъ взглядъ, по которому процентомъ называется непремѣнно число единицъ прибыли или убытка, получаемыхъ на 100 единицъ капитала, принадлежитъ, конечно, къ числу взглядовъ не довольно правильныхъ и недостаточно общихъ. Принявъ этотъ взглядъ, мы становимся прямо втупикъ предъ выраженіями: „процентъ грамотныхъ", „процентъ глухо-нѣмыхъ", „процентъ успѣвающихъ" и т. п.,—выраженіями,

*) Трудности, представляемыя случаемъ дробнаго числа недѣлимыхъ единицъ (случаемъ, впрочемъ, сравнительно рѣдкимъ), не замѣчаются при томъ способѣ рѣшенія задачъ на сложное тройное правило, который основанъ на примѣненіи ученія о пропорціяхъ. Но это, конечно, не можетъ умалить значенія способа приведенія къ единицѣ.—Кромѣ того, считаемъ нужнымъ замѣтить, что въ классѣ можно начать усвоеніе тройныхъ правилъ не съ простого, а со сложнаго тройного правила, и такъ поступаютъ преподаватели, считающіе кажущуюся простоту задачъ на простое тройное правило вредною для цѣлей надлежащаго усвоенія правильной идеи о задачахъ на это послѣднее правило. Не подлежитъ сомнѣнію, что съ этимъ взглядомъ слѣдуетъ считаться.

которыя только послѣ нѣкоторыхъ разъясненій и натяжекъ подводятся подъ понятіе убыли или прибыли. Гораздо удобнѣе и правильнѣе тотъ весьма простой взглядъ на процентъ, по которому процентомъ какого либо числа называется одна сотая доля этого числа и по которому, стало быть, 5%, 7% и т. п. обозначаютъ 0,05 и 0,07 даннаго числа независимо отъ понятія убыли или прибыли. При рѣшеніи задачъ всѣхъ возможныхъ типовъ на правило простыхъ процентовъ этотъ взглядъ оказываетъ неоцѣнимыя услуги, сводя всѣ вопросы къ отысканію либо частей цѣлаго, либо цѣлаго по частямъ, либо, наконецъ, кратнаго отношенія двухъ чиселъ. Для того, чтобы выработать въ учащихся надлежащее понятіе о значеніи термина процентъ, полезно вначалѣ задавать упражненія въ отысканіи 25%, 50%, 75%, 20% и т. п. чиселъ небольшихъ; при этомъ не надо гнаться непремѣнно за условіями торговыми, а даже напротивъ избѣгать ихъ. Когда учащіеся вполнѣ понимаютъ, что 2 есть 50% четырехъ, а $\frac{3}{4}$ не иное что, какъ 50% полуторы или 75% одной единицы и т. п., тогда труднѣйшая сторона дѣла усвоена.

За-то нѣкоторыя, довольно большія, затрудненія представляетъ распространеніе понятія процента на дробное число процентовъ и примѣненіе пропорцій къ интересующимъ насъ задачамъ. Понятіе *о дробномъ числѣ процентовъ*, впрочемъ, усваивается довольно легко, если за точку исхода принять понятіе о дроби съ дробнымъ числителемъ. Что же касается приложенія пропорцій, то оно основано на томъ, что если число a составляетъ p % числа b, то отсюда

$$a = b \times \frac{p}{100}, \text{откуда } 100 \,.\, a = b \,.\, p\,,$$

что̀ равносильно пропорціи

$$a : b = p : 100\,,$$

изъ которой вытекаютъ всѣ примѣненія пропорцій къ случаямъ, представляющимся при рѣшеніи задачъ на правило простыхъ процентовъ. Во всякомъ случаѣ не подлежитъ сомнѣнію, что если примѣненіе вышеустановленнаго опредѣленія процента представляетъ большія практическія удобства при рѣшеніи задачъ на правило процентовъ съ помощью способа приведенія къ единицѣ, то рѣшеніе тѣхъ же задачъ съ помощью пропорцій не лишено нѣкотораго, хотя и незначительнаго при недостаточно научной постановкѣ дѣла, развивательнаго значенія. Это справедливо также и вообще относительно приложенія пропорцій.

Что касается задачъ на правило учета векселей, то главнѣйшія трудности задачъ этого рода сводятся какъ къ самому понятію вычета, такъ и къ распознанію того—всѣ ли изъ числа данныхъ въ задачѣ величинъ принадлежатъ къ классу пропорціональныхъ или нѣтъ. Самый же способъ рѣшенія задачъ всѣхъ родовъ на правило учета векселей съ помощью приведенія къ единицѣ далеко незатруднителенъ. Въ „Учебникѣ“ нашемъ, надѣемся, достаточно подробно разсмотрѣны задачи различныхъ типовъ на правило учета векселей, рѣшаемыя съ помощью пропорцій по коммерческому и по такъ называемому математическому способу; подробности примѣненія способа приведенія къ единицѣ тоже достаточно просты. Но должно замѣтить, что прежде чѣмъ приступить къ задачамъ на учетъ векселей, слѣдуетъ обратиться къ задачамъ на вычисленіе скидокъ безъ отношенія къ моменту платежа, съ тѣмъ чтобы потомъ перейти къ скидкамъ, находящимся въ зависимости отъ того—какъ далекъ условленный моментъ полной уплаты, т. е. другими словами—къ учету векселей.

На задачахъ на правило пропорціональнаго дѣленія и товарищества не считаемъ нужнымъ останавливаться, въ виду достаточно подробной разработанности этого правила по способу пропорцій въ нашемъ „Учебникѣ ариѳметики“ и въ виду сравнительной простоты примѣненій способа приведенія къ единицѣ. Считаемъ только необходимымъ обратить вниманіе учащихъ, что даже при употребленіи способа приведенія къ единицѣ весьма полезно пріучить дѣтей къ записи условій въ видѣ пропорцій,—для чего, конечно, понадобится довольно много упражненій. Такъ, учащіеся должны всякія условія, выразимыя въ видѣ пропорцій, записывать именно въ этомъ видѣ, напр., условія, по которымъ одно число составляетъ половину другого, а другое—$\frac{3}{4}$ третьяго, учащіеся должны записывать такъ

$$x : y = 1 : 2\,,\ y : z = 3 : 4\,;$$

кромѣ того, они должны умѣть преобразовывать подобныя пропорціи въ пропорціи сложныя, т. е. въ пропорціи вида

$$x : y : z : \ldots = a : b : c : \ldots$$

Что касается задачъ на такъ называемое правило смѣшенія, то при рѣшеніи задачъ т. наз. перваго рода приходится примѣнять только четыре дѣйствія, а задачи на правило смѣшенія второго рода суть задачи на пропорціональное дѣленіе, при чемъ вся трудность заключается только въ подведеніи условій задачи подъ условія пропорціональнаго дѣленія. Наиболѣе удобнымъ долженъ быть признанъ способъ опредѣленія тѣхъ количествъ товара различныхъ сортовъ, которымъ соотвѣтствуетъ одна единица прибыли или убытка. При этомъ не должно упускать изъ виду также указанія на неопредѣленность задачи, когда она принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ.

§ 26. Задачи на правило сроковъ принадлежатъ къ числу необязательныхъ статей курса. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ сборникахъ ариеметическихъ задачъ *онѣ помѣщаются въ виду* интересныхъ пріемовъ ихъ разрѣшенія. Наиболѣе удобнымъ долженъ быть признанъ тотъ пріемъ ихъ рѣшенія, который основанъ на введеніи въ разсужденіе вспомогательной, притомъ произвольной величины, выражающей доходъ, приносимый единицею капитала (рублемъ) въ одну единицу времени (въ годъ или мѣсяцъ, смотря по условіямъ задачи). Другіе способы не отличаются достаточнымъ единообразіемъ. („Доп. Ст." § 7 ст. VIII-й).

Особенное мѣсто среди тройныхъ правилъ занимаетъ также такъ называемое цѣпное правило. Оно отчасти примыкаетъ къ *правилу пропорціональнаго* дѣленія, но при этомъ способъ разрѣшенія задачъ на цѣпное правило, основанный на примѣненіи пропорцій, нѣсколько неудобенъ въ практическомъ отношеніи, отличается въ весьма сильной степени громоздкостью и, вслѣдствіе этого, не легко усваивается учащимися. („Уч. ар." § 111). Но за-то такой способъ рѣшенія задачъ на цѣпное правило заключаетъ въ себѣ одинъ весьма важный моментъ, ради котораго не мѣшаетъ учащихся ср. уч. зав. ознакомить съ этимъ пріемомъ: мы говоримъ о той особенности этого способа, которая состоитъ въ необходимости яснаго и полнаго разграниченія понятій объ именованныхъ и отвлеченныхъ числахъ и въ установленіи различія между отношеніемъ разноименныхъ, но однородныхъ, именованныхъ чиселъ и отношеніемъ чиселъ отвлеченныхъ. Способъ приведенія къ единицѣ ведетъ въ случаѣ задачъ на цѣпное правило *значительно быстрѣе* къ цѣли, причемъ примѣненіе его сводится къ опредѣленію частей цѣлаго, но во всякомъ случаѣ учащій долженъ имѣть въ виду, что пріемы рѣшенія задачъ на цѣпное правило, несмотря на свою простоту, особенно легко забываются учащимися, если не приняты мѣры къ довольно частому упражненію ихъ въ рѣшеніи подходящихъ задачъ.

§ 27. Къ числу необязательныхъ принадлежитъ также статья о непрерывныхъ дробяхъ. Болѣе *или менѣе полное* ученіе о непрерывныхъ дробяхъ излагается въ курсѣ алгебры, подлежащемъ прохожденію въ ср. уч. зав. Но, въ виду чисто-практическихъ соображеній и въ силу довольно большого значенія ученія объ основномъ свойствѣ подходящихъ непрерывной дроби, по которому каждая подходящая наилучшимъ образомъ выражаетъ приближенную величину данной обыкновенной дроби, небезполезно учащихся ср. уч. зав. ознакомить практически со способами обращенія обыкновенныхъ дробей въ непрерывныя, со способомъ нахожденія ея подходящихъ и съ великимъ значеніемъ этихъ подходящихъ въ практическомъ смыслѣ. Если не задаваться слишкомъ широкими теоретическими горизонтами, то первоначальные элементы ученія объ ариеметическихъ непрерывныхъ дробяхъ могутъ быть легко усвоены учащимися и притомъ сыграть довольно важную роль въ ихъ математическомъ развитіи. Самая теорія непрерывныхъ дробей, играющая, какъ извѣстно, столь важную роль въ математическомъ анализѣ, при этомъ, конечно, останется въ сторонѣ. Но это было бы не важно, если бы только самая сущность и значеніе непрерывныхъ дробей для практическихъ цѣлей учащимися могла быть болѣе или менѣе ясно понята. Къ сожалѣнію, этого можно ожидать только при достаточномъ количествѣ практическихъ упражненій. А потому, строго говоря, непрерывнымъ дробямъ и ихъ чисто-практическимъ приложеніямъ не мѣсто въ курсѣ ариѳметики, несмотря на всѣ кажущіяся выгоды внесенія въ курсъ приложеній этой теоріи.

§ 28. При прохожденіи въ низшихъ трехъ классахъ ср. уч. зав. полнаго практическаго курса ариѳметики, какъ это само собою разумѣется, задачи играютъ роль весьма значительную, и о роли задачъ въ этомъ курсѣ выше было говорено, кажется, достаточно. Намъ остается еще обратиться къ вопросу о томъ— какую роль при обученіи ариѳметикѣ въ низшихъ классахъ можетъ и долженъ играть учебникъ.

Учиться по учебнику вообще очень трудно; но въ то время какъ для взрослаго, даже при извѣстной подготовкѣ, учиться по учебнику вообще только трудно, для малолѣтняго это чаще всего почти невозможно. Малолѣтній просто не обладаетъ умѣніемъ учиться по книжкѣ: его вниманіе слишкомъ мало развито, его умственные навыки не достаточно разносторонни, его воспріимчивость по отношенію къ логически-стройной рѣчи слишкомъ инертна; печатныя слова учебной книжки въ его умѣ возбуждаютъ весьма слабыя и расплывчатыя представленія; да и вообще предѣлы его пониманія книжной рѣчи весьма узки. Понятно, что при такихъ условіяхъ *учиться* по учебнику (хотя бы даже самоучительнаго направленія) малолѣтній не въ состояніи.

Но этого мало: при прохожденіи дѣтьми 7—8—9 лѣтъ первоначальнаго курса ариѳметики имѣется въ виду пріобрѣтеніе учащимся первоначальныхъ *представленій* (не понятій) ариѳметическаго характера, - работа не логическая, а скорѣе психологическая; въ учебникѣ же преобладающими являются логическія точки зрѣнія, а психологическія оставляются въ сторонѣ; кромѣ того міръ ариѳметическихъ представленій, даваемыхъ первоначальнымъ курсомъ ариѳметики, предполагается въ учебникѣ уже усвоеннымъ и выработаннымъ. Стало-быть, при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ (въ приготовительныхъ классахъ, гдѣ таковые имѣются, въ низшихъ отдѣленіяхъ начальныхъ городскихъ и сельскихъ школъ и при обученіи домашнемъ—первоначальномъ) учебникъ является совершенно ненужнымъ, излишнимъ и даже совершенно не примѣнимымъ.

Въ первомъ классѣ ср. уч. зав. дѣти еще тоже не настолько окрѣпли умственно, чтобы возможно было отъ учащагося требовать прочтенія имъ на-дому того или иного параграфа учебника, хотя бы содержаніе этого параграфа было учащемуся досконально извѣстно, благодаря достаточной проработкѣ данной статьи въ классѣ. Ученикъ или ученица перваго класса не могли еще научиться не только *самостоятельно* читать учебникъ, но даже какъ слѣдуетъ читать его въ присутствіи учителя. Поэтому въ первомъ классѣ учебникъ можетъ быть употребляемъ только при двухъ условіяхъ: 1) матеріальное содержаніе даннаго параграфа должно быть учащемуся досконально извѣстно со всѣми своими психологическими основами, логическими тонкостями и техническими пріемами, и 2) читать этотъ параграфъ можно только въ классѣ подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учащаго, при разъясненіяхъ со стороны читающаго, слушателей и самого учителя. То же справедливо для употребленія учебника во второмъ классѣ ср. уч. зав., гдѣ учащіеся еще тоже не достаточно развиты для чтенія текста хотя бы и извѣстнаго имъ содержанія. Только въ III-мъ классѣ, гдѣ и возрастъ, и умственное развитіе, и количество знаній гораздо значительнѣе, можно задавать на-домъ тѣ или другія статьи учебника, и то лишь въ случаѣ, если основныя ученія этой статьи въ классѣ достаточно полно и подробно разработаны. Задаваніе же на-домъ статей новыхъ наврядъ ли приведетъ къ хорошимъ результатамъ. Даже болѣе того: сколько нибудь трудныя въ логическомъ отношеніи статьи даже въ III-мъ классѣ мужскихъ (четвертомъ женскихъ) уч. заведеній должны быть прорабатываемы по учебнику только въ классѣ при непосредственномъ участіи и подъ неустаннымъ наблюденіемъ учащаго, и притомъ лишь въ томъ случаѣ, когда содержаніе данной статьи учащимся хорошо извѣстно изъ классныхъ занятій. Задаваніе же совершенно новыхъ статей по учебнику такимъ образомъ умѣстно только въ высшихъ классахъ, и то не въ очень широкихъ размѣрахъ.

Весь вопросъ можетъ заключаться только въ томъ — нуженъ ли вообще учебникъ, нужна ли проработка курса по учебнику и нельзя ли совершенно обойтись безъ него. Встарину, когда обученіе состояло главнымъ образомъ въ усвоеніи наизусть текста учебника, этотъ вопросъ былъ бы невозможенъ, потому что обученіе въ то время считалось немыслимымъ безъ учебника; при современномъ же развитіи класснаго обученія многіе сомнѣваются не только въ необходимости, но даже въ надобности учебника. Но при этомъ забывается, что одна изъ цѣлей средняго учебнаго заведенія должна заключаться въ томъ, чтобы учащіеся научились въ немъ учиться,—учиться не только подъ постоянною ферулою учителя, но также и болѣе или менѣе самостоятельно, но книгамъ. Къ этому воспитанникамъ ср. уч. заведеній надо привыкнуть, въ этомъ направленіи должно ихъ развивать, и къ этой цѣли можетъ и должно быть пріурочено употребленіе учебника. Кромѣ того, знанія свои дѣти должны же какъ нибудь оформить, проявить и фиксировать, если здѣсь можно употребить эти два слова въ томъ смыслѣ, въ какомъ они употребляются въ искусствѣ фотографіи. Учебникъ не только долженъ быть регуляторомъ классныхъ занятій, но также долженъ заключать въ себѣ дѣльное изложеніе пріобрѣтенныхъ учащимися въ классѣ познаній и умѣній, — изложеніе, къ достоинствамъ котораго должно стремиться изложеніе учащихся и которому должны быть чужды вполнѣ естественныя, но не всегда заслуживающія одобренія особенности и неизбѣжныя, но подлежащія искорененію, недостатки дѣтской рѣчи.

У каждаго учителя найдется какая либо точка зрѣнія, съ которой то или иное выраженіе даннаго учебника, та или иная постановка даннаго вопроса почему либо не выдерживаетъ критики. Эта критика дѣльному учебнику повредить не въ состояніи, и нѣкоторыя измѣненія (чисто редакціонныя) текста учебника поэтому вполнѣ дозволительны въ классѣ, если только они вызываются дѣйствительными педагогическими или научными требованіями и если требованія учителя не отличаются ненужною въ этомъ случаѣ педантичностью. Такая критика въ состояніи и возбудить самодѣятельность учащихся, и надлежащимъ образомъ направить и укрѣпить мысль ихъ *). Но при этомъ, въ погонѣ за точностью *выраженія*, не должно упускать еще болѣе важныхъ элементовъ обученія: мы говоримъ о живости представленій, точности и ясности мысли и о дифференцировкѣ понятій. Само собою при этомъ разумѣется, что опредѣлять должно только тѣ понятія, которыя подлежатъ опредѣленію и допускаютъ таковое, и что не въ изобиліи опредѣленій заключается вся суть курса.

---

*) Само собою разумѣется, что все вышеизложенное руководило нами при составленіи „Учебника ариѳметики“, неизбѣжные недостатки котораго объясняются не неправильностью выше разработанныхъ точекъ зрѣнія, а лишь неумѣніемъ справиться съ задачею: мы стремились дать учебникъ (не самоучитель) краткій по изложенію и полный по содержанію, согласный съ научными требованіями (какъ мы себѣ эти послѣднія представляемъ) и болѣе или менѣе доступный, *послѣ надлежащей классной работы*, по изложенію. Если же объемъ его вышелъ такъ значителенъ, то въ томъ виною желаніе наше въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ статей“ изложить теоретическія основы ариѳметики какъ науки, чѣмъ мы желали оказать, между прочимъ, нѣкоторую услугу также преподаванію повторительнаго (теоретическаго) курса ариѳметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ. Очень сожалѣя, что мы не съумѣли изложить все выше намѣченное въ предисловіи къ нашему „Учебнику“, просимъ у читателя извиненія за это замѣчаніе pro domo sua.

Само собою также разумѣется, что учебникъ играетъ ту же роль и въ другихъ учебныхъ заведеніяхъ, въ которыхъ курсъ ариѳметики приближается къ курсу этого предмета въ ср. уч. зав. Кромѣ того понятно, что въ трехгодичной начальной школѣ приличная классная проработка курса по какому нибудь краткому учебнику умѣстна никакъ не ранѣе второго или даже третьяго года обученія.

§ 29. Въ одномъ изъ высшихъ классовъ всякаго средняго учебнаго заведенія курсъ ариѳметики подлежитъ повторенію. Помимо повторенія ариѳметическихъ правилъ (каковая надобность, къ чести нашихъ ср. уч. зав., представляется весьма рѣдко) повторительный курсъ имѣетъ цѣлью восполненіе неизбѣжныхъ теоретическихъ пробѣловъ, которые оказываются въ ариѳметическихъ познаніяхъ и умѣніяхъ учащихся Пробѣлы эти зависятъ не только отъ того, что учащіеся многое должны были перезабыть изъ курса ариѳметики, но также и отъ того, что многія ученія ариѳметики въ низшихъ классахъ могутъ быть пройдены только практически.

Не только статьи, соприкасающіяся съ ученіями изъ области теоріи чиселъ (статьи объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ, наименьшемъ кратномъ числѣ, о первоначальныхъ числахъ, о періодическихъ дробяхъ), но и самыя ученія о четырехъ дѣйствіяхъ нуждаются не столько въ повтореніи, сколько въ дополненіи ихъ теоретическими элементами и теоретическими же точками зрѣнія. Ибо не только помянутыя ученія изъ теоріи чиселъ, которыя въ практическомъ курсѣ ариѳметики низшихъ классовъ не могутъ быть изложены вполнѣ строго и полно, со всѣми теоремами и доказательствами, но даже ученія о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми и дробными числами по необходимости должны, при усвоеніи ихъ учениками низшихъ классовъ, излагаться скорѣе практически и съ точки зрѣнія искусства вычисленія, чѣмъ теоретически и съ точки зрѣнія научной. Совершенно обойтись безъ дополнительныхъ статей по предмету ариѳметики средне-образовательный курсъ математики не можетъ, стало быть, ни въ какомъ случаѣ; слѣдовательно нельзя также удовлетвориться только повтореніемъ курса ариѳметики, пройденнаго въ низшихъ классахъ, въ особенности если это повтореніе пріурочивать къ учебнику, служившему руководствомъ въ низшихъ классахъ. Ученія начальной, если можно такъ выразиться, дѣтской ариѳметики для учениковъ высшихъ классовъ крайне не интересны; учащіеся съ этими ученіями свыклись, срослись, если можно такъ выразиться, и заставить юношей только повторять то, что сдѣлалось ихъ полнымъ достояніемъ, было бы на-врядъ ли педагогично и во всякомъ случаѣ мало полезно. Поэтому усвоенное ими въ низшихъ классахъ надо въ высшихъ освѣтить теоретически и дополнить чисто теоретической проработкою всего учебнаго матеріала. Ариѳметику-искусство въ высшемъ классѣ повторять не слѣдуетъ со всѣми ея чисто-техническими, такъ сказать, умѣніями и правилами, которыя должны быть учащемуся отлично извѣстны, благодаря постоянному примѣненію этихъ умѣній и правилъ во все время пребыванія въ учебномъ заведеніи. -На практикѣ этотъ взглядъ получилъ полное право гражданства, и нынѣ повтореніе курса ариѳметики въ большинствѣ случаевъ пріурочивается къ какому либо учебнику теоретической ариѳметики, въ родѣ, напримѣръ, сочиненій Серре, Серре и Комберуса, Бертрана, и т. п.

При поступленіи въ учительскую семинарію или учительскій институтъ, воспитанники этихъ учебныхъ заведеній, какъ извѣстно, подвергаются испытанію въ знаніи болѣе или менѣе полнаго курса ариѳметики. Само собою разумѣется, что при повтореніи ими курса ариѳметики дополнительныя, теоретическія статьи тоже не должны быть забываемы. Будущему учителю не менѣе, чѣмъ всякому претендующему на серьезную подготовку человѣку, необходимо болѣе или менѣе серьезное пониманіе научныхъ основъ ариѳметики,—тѣмъ болѣе, что такое пониманіе можетъ оказаться для него чрезвычайно полезнымъ въ будущемъ, при исполненіи имъ своихъ учительскихъ обязанностей *). Кромѣ того, нѣкоторыя ученія ариѳметики, какъ напр. ученіе о приближенныхъ вычисленіяхъ, могутъ быть излагаемы только въ отдѣлѣ дополнительныхъ статей и проходимы только въ одномъ изъ высшихъ классовъ ср. уч. зав.

Такимъ образомъ мы видимъ, что цѣль особеннаго отдѣла дополнительныхъ статей по предмету ариѳметики заключается въ истинномъ, дѣйствительномъ дополненіи ариѳметическихъ познаній и умѣній, пріобрѣтенныхъ воспитанниками среднихъ учебныхъ заведеній въ низшихъ классахъ, и воспитанниками учительскихъ семинарій и институтовъ — въ тѣхъ школахъ, гдѣ они получили свое первоначальное образованіе. Считать подобное „повтореніе“ ариѳметики безполезнымъ было бы рискованно еще и потому, что, безъ такого повторенія, для учащагося связь ариѳметики съ остальными отраслями математики, ея право на нѣкоторое мѣсто въ іерархіи математическихъ наукъ было бы непонятно,

*) Мы въ своемъ „Учебникѣ ариѳметики“ всѣ тѣ элементы ариѳметическихъ ученій, которые находятся въ тѣснѣйшей связи съ научно-логическими и теоретическими основами ариѳметики, выдѣлили въ особый отдѣлъ „Дополнительныхъ статей“, не считая возможнымъ соединить краткое изложеніе правилъ искусства ариѳметическаго вычисленія съ полнымъ научнымъ ихъ обоснованіемъ. Поэтому весьма многое въ „Учебникѣ“ нашемъ изложено безъ доказательствъ, причемъ всякій разъ дѣлается ссылка на отдѣлъ „Дополнительныхъ статей“. Само собою разумѣется, что преподаватель въ случаѣ надобности можетъ и самъ соединить прохожденіе какого либо ученія по „Учебнику“ съ усвоеніемъ теоретическихъ основъ этого ученія по „Дополнительнымъ статьямъ“.

вслѣдствіе чего ея престижъ въ глазахъ учащихся былъ бы совершенно уничтоженъ. Развитію такого взгляда на ариѳметику, конечно, невозможно сочувствовать ни въ какомъ случаѣ.

§ 30. Первоначальныя понятія (выработанныя въ низшихъ классахъ) о величинѣ, числѣ, измѣреніи и единицахъ мѣры, конечно, должны быть своевременно надлежащимъ образомъ дополнены, такъ какъ эти понятія нуждаются въ очень многихъ разъясненіяхъ, въ большей фактичности знанія и въ большемъ углубленіи въ логическія трудности этихъ вопросовъ. Особеннаго вниманія заслуживаютъ: метрическая система мѣръ, нѣкоторыя особенныя единицы мѣры, ученіе объ измѣреніи времени и краткія свѣдѣнія о календаряхъ, а равно особенности современной русской монетной системы, до 1886 года страдавшей отъ отсутствія простой связи между золотою и серебряною банковою монетою; при этомъ банковою монетою называются только серебряные рубль, полтинникъ и четвертакъ. (§ 1—7 ст. I отд. „Доп. ст.“). При этомъ должно быть обращено вниманіе также и на практическія упражненія въ переводѣ нашихъ мѣръ въ мѣры десятичной системы, а равно въ переводѣ мѣръ десятичной системы въ мѣры обычныя. Необходимо также стремиться къ возможно наглядному усвоенію учащимися взаимныхъ отношеній между мѣрами,—тѣмъ болѣе, что въ научныхъ сочиненіяхъ и въ техникѣ метрическая система получила уже почти полное право гражданства и что, можетъ-быть, въ скоромъ времени метрическая система пріобрѣтетъ у насъ право гражданства и въ обычныхъ торговыхъ сношеніяхъ. Полезно, какъ это замѣтилъ достопочтенный А. Д. Путята въ статьѣ своей подъ заглавіемъ „Объ употребленіи метрической системы въ школѣ“ (Ж. М. Нар. Просв., № 7 за 1887 г.), ознакомить учащихся съ грубыми, такъ сказать, отношеніями между нашими и десятичными мѣрами; изъ такихъ отношеній г. Путята отмѣчаетъ слѣдующія: метръ равенъ полусажени безъ $1\frac{1}{2}$ вершковъ; километръ менѣе версты на $31\frac{1}{3}$ сажени; два съ половиною сантиметра равны одному дюйму; въ квадратномъ дюймѣ $6\frac{1}{4}$ кв. см.; гектаръ менѣе десятины на 203 кв сажени; декастеръ болѣе куб. сажени на $\frac{3}{4}$ куб. арш. О томъ, что при прохожденіи статьи о величинѣ, числѣ и измѣреніи надо обратить вниманіе также и на то, что нѣкоторыя изъ основныхъ ариѳметическихъ понятій не поддаются вполнѣ строгому, съ логической точки зрѣнія, опредѣленію (понятія числа, счета, единицы и т. п.), мы не говоримъ, такъ какъ эти логическіе вопросы могутъ быть съ пользою для дѣла затрагиваемы только мимоходомъ, и то только при достаточномъ для того уровнѣ логическаго развитія учащихся. При малѣйшей возможности учащіеся, пріученные на урокахъ геометріи къ требованіямъ научной точности въ опредѣленіяхъ, могутъ съ великою пользою для общаго умственнаго развитія усвоить себѣ что далеко не всѣ понятія подлежать опредѣленію и что въ ариометикѣ такихъ понятій не мало Не безполезно при этомъ выяснить имъ истинную роль опредѣленій, необходимость опредѣленій точныхъ, если только вообще опредѣленіе возможно, и безполезность, а равно невозможность опредѣленій, когда мы имѣемъ дѣло съ понятіемъ первоначальнымъ.

Статья о нумераціи и различныхъ способахъ обозначенія чиселъ („Доп. ст.", II) принадлежитъ къ числу интереснѣйшихъ и доступнѣйшихъ дополнительныхъ статей ариометики. Но при этомъ полезно ознакомить учащихся не только съ самыми основами различныхъ системъ нумераціи, но также и съ письменнымъ производствомъ четырехъ дѣйствій надъ числами, выраженными въ искусственныхъ системахъ. При этомъ съ большою пользою для дѣла можетъ быть выяснено великое значеніе таблицъ сложенія и умноженія при письменномъ производствѣ вообще четырехъ дѣйствій надъ числами, по какой бы системѣ числа ни обозначались Обыкновенно таблицамъ сложенія и умноженія не придается то значеніе, которое они на самомъ дѣлѣ имѣютъ: если бы этихъ таблицъ невозможно было запомнить наизусть, письменное и устное производство всѣхъ дѣйствій было бы дѣломъ необычайно труднымъ и кропотливымъ.

§ 31. Статья о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми отвлеченными числами, если на нее смотрѣть не только съ точки зрѣнія устнаго или письменнаго выполненія этихъ дѣйствій, но также съ точки зрѣнія теоретической, содержитъ въ себѣ не мало логическихъ трудностей и тонкостей, на которыя, къ сожалѣнію, не всегда обращается то количество вниманія, какого эта статья достойна при повтореніи въ одномъ изъ высшихъ классовъ. Не вдаваясь въ частности, которыя умѣстны въ научномъ курсѣ ариометики и которыя изложены нами во всей подробности въ ст. III отд. „Доп. Ст." нашего „Учебника", мы должны обратить вниманіе учащаго только на ту особенность теоріи четырехъ дѣйствій, что только въ основѣ ученій о сложеніи лежатъ нѣкоторыя аксіомы, ученія же о прочихъ дѣйствіяхъ представляютъ собою нѣкоторую, вполнѣ законченную, систему опредѣленій и теоремъ, такъ или иначе опирающихся на ученіе о сложеніи. Въ отдѣлѣ „Доп. Статей" за аксіомы сложенія принятъ законъ переставительный для случая двухъ и болѣе слагаемыхъ. Законъ же сочетательный доказывается на основаніи этихъ аксіомъ. Въ основу ученія о вычитаніи положено опредѣленіе этого дѣйствія, какъ дѣйствія, обратнаго сложенію. На ученіяхъ объ умноженіи и дѣленіи цѣлыхъ чиселъ мы не останавливаемся, позволяя себѣ отослать благосклоннаго читателя къ соотвѣтствующимъ „Дополнительнымъ статьямъ" нашего Учебника.

§ 32. Статьи о дѣлимости, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ, о первоначальныхъ числахъ и наименьшемъ кратномъ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ принадлежатъ къ числу труднѣйшихъ по причинѣ сравнительно большой отвлеченности всѣхъ этихъ ученій, а равно крайней трудности усвоенія взаимныхъ отношеній тѣхъ теоремъ, которыя составляютъ основу этихъ теорій. Въ отдѣлѣ „Доп. ст." мы держались слѣдующаго порядка: въ статьѣ (IV) о дѣлимости мы изложили прежде всего нѣкоторыя теоремы о дѣлителяхъ (§ 1), потомъ признакъ дѣлимости на 11 (§ 2), выводъ общаго признака дѣлимости чиселъ на какое угодно число и его приложенія (§ 3) и повѣрку дѣйствій съ помощью признаковъ дѣлимости (§ 4); затѣмъ у насъ идетъ ученіе объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ: § 1—основныя теоремы, § 2—теорема Ламé, § 3—нѣкоторыя свойства общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, § 4—нѣкоторыя правила, § 5—объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ нѣсколькихъ чиселъ. Послѣ ученій объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ идетъ ученіе о первоначальныхъ числахъ, о первоначальныхъ дѣлителяхъ, о взаимно-первыхъ числахъ и о наименьшемъ кратномъ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ. (Ст. VI отд. „Доп. Ст.", §§ 1—6).

Въ многочисленныхъ методическихъ указаніяхъ эти статьи, конечно, не нуждаются. Считаемъ только не излишнимъ замѣтить, что очень строго должно различать тѣ ученія, которыя зависятъ, отъ тѣхъ ученій, которыя не зависятъ отъ принятой системы счисленія; кромѣ того должно замѣтить, что учащіеся должны отличать теоремы о первоначальныхъ числахъ, какъ таковыхъ, отъ теоремъ о первоначальныхъ дѣлителяхъ.

§ 33. По усвоеніи намѣченныхъ выше ученій можно перейти къ дополненію знаній учащихся о дробяхъ: къ обобщенію понятія о дроби (ст. VII отд. „Доп. Ст."), къ первоначальному ученію объ ариѳметическихъ непрерывныхъ дробяхъ, о дробяхъ, аналогичныхъ десятичнымъ въ искусственныхъ системахъ счисленія, и о дробяхъ десятичныхъ періодическихъ. Въ особенности много трудностей представляетъ это послѣднее ученіе, если къ нему предъявлять болѣе или менѣе строгія научныя требованія. Достойно вниманія, что безъ теоріи предѣловъ равенство, существующее между періодическою дробью и основною дробью, отъ обращенія которой произошла данная періодическая дробь, должно быть принимаемо безъ доказательства. Всѣ остальныя изъ числа существующихъ доказательствъ этого равенства, конечно, не вполнѣ строги. Такъ, напр., то доказательство, которое основано на увеличеніи періодической дроби во столько разъ, сколько это необходимо для того, чтобы получить смѣшанное число съ тѣмъ же періодомъ, не строго потому, что мы не имѣемъ права, безъ дальнѣйшихъ разговоровъ, распространять правило вычитанія дробей конечныхъ на случай дробей безконечныхъ. Столь же не строги и другія доказательства равенства, существующаго между періодическою дробью и ея основною, если данное доказательство не опирается вполнѣ явнымъ образомъ на теорію предѣловъ.

При прохожденіи дополнительной статьи о дробяхъ въ высшей степени полезно обратиться къ опредѣленію дѣйствій надъ дробями и къ примѣненію къ дѣйствіямъ надъ ними законовъ переместительнаго, сочетательнаго и распредѣлительнаго; но мы въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ Статей" не посвятили этимъ ученіямъ отдѣльныхъ параграфовъ въ виду того, что въ нашемъ „Учебникѣ" сдѣланы всѣ указанія этого рода и ограниченія, которыя неизбѣжны, пока мы имѣемъ дѣло съ числами цѣлыми, и что ученія о дробяхъ могутъ быть повторены прямо по „Учебнику" съ небольшими глоссами учащаго по поводу каждаго изъ этихъ ученій. Крайне важно выясненіе учащимся условности дѣйствія умноженія въ случаѣ дробнаго множителя; но на этомъ не считаемъ нужнымъ останавливаться въ виду того, что въ главѣ настоящаго „Опыта", посвящаемой методологическимъ вопросамъ ариѳметики, читатель легко найдетъ всѣ относящіяся сюда соображенія.

§ 34. Ученіе о пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ должны быть не только дополнены, но также и повторены, если можно такъ выразиться, отъ доски до доски, съ самаго начала. Такое повтореніе представляетъ также и практическую важность въ виду того, что на испытаніяхъ зрѣлости въ качествѣ письменныхъ работъ предлагаются задачи, распадающіяся обыкновенно на нѣсколько задачъ на различныя тройныя правила. Особенно развивательное значеніе имѣютъ при этомъ, главнымъ образомъ, ученія о производныхъ пропорціяхъ и о пропорціональныхъ величинахъ (§ 5 ст. VIII-ой). Изъ задачъ на тройныя правила заслуживаютъ особеннаго вниманія задачи на сложное тройное правило, на правило учета векселей и на правило сроковъ.

При прохожденіи ученія о пропорціяхъ не безполезно различать пропорціи, членами которыхъ являются величины, отъ пропорцій, членами которыхъ являются отвлеченныя числа. Чаще всего различіе между этими видами пропорцій, къ сожалѣнію, не дѣлается. А между тѣмъ это различіе весьма важно въ виду того, что въ пропорціяхъ, члены которыхъ суть величины, не всегда возможны тѣ преобразованія, которыя возможны въ пропорціяхъ, составленныхъ изъ отвлеченныхъ чиселъ. Не меньшаго вниманія заслуживаютъ тѣ свойства двухъ данныхъ пропорціональныхъ величинъ, по которому либо отношеніе, либо произведеніе всякихъ двухъ, соотвѣтствующихъ другъ другу, числовыхъ значеній этихъ величинъ представляетъ собою число постоянное.

§ 35. Статья о приближенныхъ вычисленіяхъ принадлежитъ къ числу необязательныхъ въ курсѣ нѣкоторыхъ среднихъ учебныхъ заведеній. Тѣмъ не менѣе нѣкоторые параграфы этой статьи подлежатъ непремѣнному усвоенію въ одномъ изъ высшихъ классовъ ср. уч. зав. Особеннаго вниманія заслуживаютъ приближенное вычисленіе суммы и произведенія. При прохожденіи ученія о приблизительномъ вычисленіи произведенія не безполезно обратиться, въ случаѣ крайняго недостатка времени, къ способу, на который обращаетъ свое вниманіе Лагранжъ въ одной изъ своихъ лекцій въ Нормальной Школѣ и о которомъ мы говоримъ въ § 20 этой главы настоящаго сочиненія. Способъ же умноженія по методѣ, изобрѣтеніе которой приписывается Угтреду, не представляетъ особенныхъ затрудненій, если къ нему приступить послѣ усвоенія болѣе естественнаго способа приближеннаго умноженія чиселъ, изложеннаго въ §§ 5—7 ст. IX-ой отд. „Доп. Ст.“ Что же касается способовъ приблизительнаго дѣленія, то они не отличаются ни особенною простотою, ни особенно большимъ развивательнымъ значеніемъ, а потому могутъ быть оставлены безъ вниманія, въ особенности если времени мало.

Изъ методическихъ особенностей статьи о приближенныхъ вычисленіяхъ мы считаемъ необходимымъ отмѣтить только одну, а именно: прежде всего ученія о приближенныхъ вычисленіяхъ должны быть пройдены на числахъ цѣлыхъ, съ тѣмъ чтобы только впослѣдствіи перейти къ десятичнымъ дробямъ. Кромѣ того должно замѣтить, что въ интересующей насъ статьѣ особенно важно точное понятіе о приближенной величинѣ десятичныхъ чиселъ и основныя теоремы объ этихъ величинахъ (§§ 1 — 2 ст. IX-ой).

§ 36. Не вдаваясь въ послѣднихъ параграфахъ настоящаго сочиненія въ частности, умѣстныя скорѣе въ научномъ курсѣ ариѳметики, чѣмъ въ „Опытѣ методики ариѳметики“, и поэтому болѣе или менѣе подробно изложенныя нами въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ статей“ нашего „Учебника“, мы за-то считаемъ необходимымъ коснуться нѣкоторыхъ сторонъ курса ариѳметики въ нѣкоторыхъ профессіональныхъ учебныхъ заведеніяхъ, въ которыхъ курсъ ариѳметики болѣе или менѣе близокъ къ курсу этого предмета, который подлежитъ изученію въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ: къ числу таковыхъ учебныхъ заведеній принадлежатъ учительскіе институты и семинаріи, коммерческія и техническія училища, а также частью реальныя училища, поскольку эти послѣднія, въ настоящемъ своемъ видѣ, могутъ быть причислены къ разряду также профессіональныхъ.

Въ учительскихъ институтахъ и семинаріяхъ курсъ ариѳметики долженъ отличаться не только дополнительнымъ, но также и повторительнымъ характеромъ. Хотя предполагается, что поступающій въ подобное учебное заведеніе вполнѣ усвоилъ себѣ ранѣе болѣе или менѣе основательный, хотя бы и не особенно полный, курсъ ариѳметики, но чаще всего запасъ ариѳметическихъ познаній, имѣющійся у поступающаго въ заведеніе интересующаго насъ типа, оказывается далеко не достаточнымъ для возможности только дополненія курса статьями теоретическаго характера: оказывается, что очень многое должно быть за-ново повторено, проработано и даже за-ново пройдено. Лучше всего при этомъ было бы соединять повтореніе статей по учебнику съ попутнымъ прохожденіемъ соотвѣтственныхъ дополнительныхъ статей,—каковое соединеніе и практикуется въ очень многихъ заведеніяхъ интересующаго насъ типа. Благодаря такому соединенію повторенія ариѳметики-искусства съ усвоеніемъ ученій ариѳметики-науки, воспитанникъ учительской семинаріи или учительскаго института можетъ себѣ усвоить болѣе или менѣе стройный и полный курсъ ариѳметики. Само собою разумѣется, что къ воспитаннику учительскаго института можетъ быть при этомъ предъявлено больше требованій въ отношеніи теоретическихъ элементовъ ариѳметики, чѣмъ къ воспитаннику семинаріи.

Что касается курса ариѳметики въ коммерческихъ училищахъ, то онъ долженъ отличаться отъ общеобразовательнаго курса не столько количествомъ дополнительныхъ статей, сколько многочисленными упражненіями въ быстромъ и сокращенномъ вычисленіи т. е. развитіемъ спеціальныхъ навыковъ, составляющихъ предметъ такъ называемой коммерческой ариѳметики. Въ „Учебникѣ“ нашемъ и „Методическомъ Сборникѣ“ (ч. II) обращено вниманіе, конечно, только на интересные также и для общеобразовательной школы пріемы сокращеннаго вычисленія, при чемъ спеціально-коммерческія задачи и упражненія не нашли себѣ мѣста въ этихъ трудахъ нашихъ. Ни такъ называемыя чисто-коммерческія калькуляціи, ни задачи на арбитражъ не вошли въ наши сочиненія. Относительно курса ариѳметики въ коммерческихъ училищахъ мы считаемъ себя вправѣ поставить только одно требованіе: прежде чѣмъ переходить къ ученіямъ такъ называемой коммерческой ариѳметики, въ низшихъ классахъ коммерческихъ училищъ должно пройти предварительно курсъ общеобразовательный этого предмета, не особенно, впрочемъ, загромождая этотъ курсъ теоретическими элементами и ни въ коемъ случаѣ не упуская изъ виду простѣйшихъ сокращеній въ вычисленіяхъ.

Въ реальныхъ училищахъ нынѣ существующаго устройства, несмотря на профессіональный характеръ, который иногда придается этимъ заведеніямъ, умѣстенъ скорѣе общеобразовательный полный курсъ ариѳметики; при этомъ только въ дополнительныхъ коммерческихъ классахъ долженъ быть пройденъ курсъ ариѳметики коммерческой. Что же касается техническихъ училищъ, то дополпительный теоретическій курсъ ариѳметики можетъ быть въ немъ совершенно игнорируемъ, взамѣнъ чего должны быть пройдены нѣкоторые пріемы сокращеннаго вычисленія и нахожденія возможно удовлетворительныхъ результатовъ четырехъ дѣйствій по приближеннымъ величинамъ данныхъ чиселъ. Эти умѣнія технику могутъ очень и очень пригодиться.

§ 37. Въ курсѣ учительскихъ семинарій и институтовъ весьма важное мѣсто занимаетъ методика обученія всѣмъ предметамъ начальной школы, въ томъ числѣ и методика обученія ариѳметикѣ. Само собою разумѣется, что методика ариѳметики можетъ быть изучаема въ этихъ заведеніяхъ только тогда, когда самая ариѳметика воспитанниками усвоена вполнѣ основательно. Кромѣ того понятно, что изученіе методики ариѳметики должно вестись въ связи съ практическими занятіями воспитанниковъ въ начальной школѣ, болѣе или менѣе тѣсно связанной съ даннымъ учебнымъ заведеніемъ. То же относится къ педагогическимъ классамъ другихъ учебныхъ заведеній, преслѣдующихъ отчасти также и цѣль пріученія воспитанниковъ и воспитанницъ къ исполненію учительскихъ обязанностей. При этомъ преподаватель методики ариѳметики долженъ, для пользы дѣла, принять какую либо одну методу обученія за основу всего курса методики, хотя это не исключаетъ болѣе или менѣе подробнаго ознакомленія воспитанниковъ съ сущностью и главнѣйшими пріемами другихъ методъ. Учитель, по нашему крайнему разумѣнію, долженъ быть преданъ какой либо одной методѣ для того, чтобы его примѣръ заразилъ также и его воспитанниковъ и чтобы такимъ образомъ дѣло обученія отличалось живостью и энергіею. Преподаватель методики ариѳметики, одинаково равнодушный ко всѣмъ методамъ обученія, на-врядъ ли будетъ въ состояніи вдохнуть жизнь въ преподаваніе своихъ учениковъ. Мы лично считаемъ методу цѣлесообразныхъ задачъ, совершенно притомъ свободную отъ пріемовъ какого бы то ни было изученія чиселъ, наиболѣе подходящею какъ для народныхъ школъ, такъ и вообще для первоначальнаго обученія ариѳметики; но, при всемъ своемъ несочувствіи методѣ изученія чиселъ, мы считаемъ долгомъ заявить, что, по нашему мнѣнію, гораздо лучше выполнитъ свою задачу тотъ преподаватель методики ариѳметики, который всей душой преданъ методѣ изученія чиселъ, чѣмъ преподаватель методики ариѳметики, одинаково равнодушный ко всѣмъ возможнымъ методамъ обученія. Вообще говоря равнодушный къ своему предмету учитель весьма нежелателенъ, но въ учителѣ будущихъ учителей это качество особенно нежелательно *).

---

*) О мотивахъ, заставившихъ насъ отдать предпочтеніе методѣ цѣлесообразныхъ задачъ, ср. §§ 1—8 гл. III настоящаго сочиненія, а также

§ 38. Какъ это ни странно, въ отношеніи преподаванія ариѳметики лица, окончившія курсъ въ учительскихъ семинаріяхъ и институтахъ, часто находятся, въ нѣкоторомъ смыслѣ, въ болѣе благопріятныхъ условіяхъ, чѣмъ лица, окончившія курсъ физико-математическихъ наукъ въ университетѣ съ цѣлью посвященія себя преподаванію математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Въ то время какъ лица, окончившія курсъ въ учительской семинаріи или въ учительскомъ институтѣ или даже въ педагогическомъ классѣ женской гимназіи, болѣе или менѣе знакомы съ методикою, какъ педагогическою дисциплиною, и съ основными ея положеніями, лицо, окончившее курсъ въ высшемъ учебномъ заведеніи, приступаетъ къ дѣлу обученія прямо съ университетской скамьи, на которой его занимали вопросы совсѣмъ другого порядка. Послѣ болѣе или менѣе самостоятельной и трудной работы надъ ученіями теоріи сравненій перейти къ выясненію дѣтямъ основныхъ правилъ четырехъ дѣйствій надъ числами; послѣ дифференцальнаго и интегральнаго исчисленій перейти къ сложенію или дѣленію многочленовъ; послѣ аналитической геометріи и блестящихъ приложеній къ ней пріемовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій обратиться къ осколкамъ теоріи предѣловъ въ курсѣ геометріи; послѣ высшей алгебры и уравненій высшихъ степеней перейти къ уравненію первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; послѣ аналитической механики перейти къ элементарнымъ и, вслѣдствіе этого, крайне труднымъ въ методическомъ отношеніи ученіямъ о равномѣрномъ и равномѣрно - ускоренномъ движеніи, или о центробѣжной силѣ, — все это сдѣлать гораздо труднѣе, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда. Міръ идей, которыми живетъ умъ студента физико-математическаго факультета, на столько отличается отъ методическихъ трудностей первоначальнаго преподаванія ариѳметики, алгебры, геометріи и физики въ среднемъ учебномъ заведеніи, что только благодаря солидной научной подготовкѣ начинающаго учителя, чрезъ два или три года изъ него вырабатывается болѣе или менѣе полезная въ школѣ сила.

Трудности первоначальнаго преподаванія алгебры и геометріи извѣстны всякому учителю, который пожелаетъ порыться въ своихъ воспоминаніяхъ о началѣ своей учительской дѣятельности: дѣтямъ сначала непонятны ни цѣли буквеннаго обозначенія чиселъ, ни необходимость доказательствъ вообще, ни роль чертежа при доказательствѣ, ни роль аксіомъ, ни особенности об-

---

сочиненіе мое подъ заглавіемъ „Методика ариѳметики съ приложеніемъ Сборника упражненій по ариѳметикѣ для учащихъ. Руководство для учит. семин. и инстит., для педагогич. кл. женскихъ гимназій и для учителей нар. школъ“.

ратныхъ теоремъ. Въ сравнительно лучшемъ положеніи находится учитель, который, вслѣдствіе чисто случайныхъ обстоятельствъ принужденъ былъ еще на гимназической и университетской скамьяхъ заниматься уроками и репетированіемъ. Если, благодаря особенностямъ своего развитія и складу характера, онъ занимался этимъ дѣломъ съ большимъ или меньшимъ жаромъ и интересомъ, то изъ него, безъ сомнѣнія, очень скоро по окончаніи курса наукъ въ университетѣ можетъ выработаться также и хорошій классный учитель, ибо онъ въ этомъ случаѣ отлично помнитъ—что затрудняло его учениковъ и что его самого затрудняло при репетированіи. Но если окончившій курсъ математическихъ наукъ почему либо поставленъ былъ въ такія счастливыя матеріальныя условія, что не принужденъ былъ упражняться въ преподаваніи и обученіи за время своего пребыванія въ гимназіи и въ университетѣ, то онъ долго будетъ бродить въ потемкахъ, и долго у него дѣло обученія не будетъ клеиться и сравнительно очень долго оно у него совсѣмъ не будетъ итти на ладъ. Репетированіе и частные уроки, которыми во время пребыванія въ стѣнахъ учебныхъ заведеній занималось данное лицо, есть такой родъ занятій, который, хотя и не заключаетъ въ себѣ ничего предосудительнаго, тѣмъ не менѣе вообще не можетъ заслуживать особеннаго одобренія и поощренія: такія занятія зачастую роковымъ образомъ вліяютъ на научныя занятія даннаго лица, лишая его необходимаго досуга, отвлекая отъ научныхъ занятій, разстраивая его нервную систему, вредно отзываясь даже на его здоровьи и иногда убивая его творчество въ направленіи научномъ. Нормальнымъ поэтому можно было бы считать только такой строй школы, при которомъ репетированіе стало бы ненужнымъ и при которомъ учащіеся высшихъ классовъ ср. уч. зав. и студенты университетовъ могли бы заниматься преимущественно своимъ дѣломъ, не беря на себя обязанностей репетитора или даже учителя. Но, помимо всего этого, вообще разсчитывать на ту педагогическую подготовку, которую студентъ самоучкою можетъ пріобрѣсти благодаря частнымъ урокамъ и репетированію, было бы крайне рискованно. Кромѣ того, эта подготовка, помимо того, что она отличается характеромъ совершенно случайнымъ, далеко не можетъ считаться удовлетворительною также въ отношеніи полноты и основательности. Стало-быть, если бы можно было разсчитывать, что даже всѣ будущіе учителя ср. уч. зав. принуждены во время своего пребыванія въ высшихъ классахъ ср. уч. зав. и въ университетахъ, заниматься уроками, то и въ такомъ случаѣ чрезвычайно рискованно было бы вполнѣ полагаться на педагогическую подготовку этихъ начинающихъ учителей.

Принимая все вышеизложенное во вниманіе, легко придемъ къ заключенію, что методикѣ обученія отраслямъ такъ называемой низшей математики должно быть непремѣнно удѣлено нѣкоторое вниманіе физико-математическими факультетами, призванными между прочимъ также и подготовлять учителей математики для среднихъ учебныхъ заведеній. Кромѣ методики ариѳметики, методики низшей алгебры и методики Евклидовой геометріи, въ высшей степени полезно было бы введеніе въ число необязательныхъ предметовъ, для студентовъ высшихъ семестровъ, методологіи математическихъ наукъ вообще и отраслей низшей математики въ частности, а равнымъ образомъ практическихъ занятій и упражненій въ преподаваніи и изложеніи студентами различныхъ главъ высшей и низшей математики. Такая постановка дѣла подготовленія учителей ср. уч. зав. (въ спеціально для этого предназначенныхъ практическихъ курсахъ) въ очень скоромъ времени принесла бы весьма большую пользу дѣлу обученія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ; при такой постановкѣ дѣла начинающій учитель былъ бы избавленъ отъ массы нынѣ почти неизбѣжныхъ промаховъ и разочарованій, а учащіеся — отъ излишнихъ огорченій и совершенно случайныхъ и легко устранимыхъ вредныхъ вліяній на складъ ихъ мысли и занятій. Каждый изъ преподавателей помнитъ - какъ ему трудно было въ началѣ достигнуть того, чтобы работалъ весь классъ, какъ ему трудно было ознакомиться съ подготовкою класса, какъ ему трудно было воздерживаться отъ „лекцій", и т. п. Не только умѣнію обучать, но иногда даже умѣнію стоять какъ слѣдуетъ у классной доски, умѣнію спрашивать учащихся съ мѣста, внятно и понятно излагать, умѣнію пользоваться моментами сосредоточеннаго вниманія и возбуждать таковое, — всѣмъ этимъ умѣньямъ у начинающаго учителя взяться неоткуда. Эти умѣнія могутъ образоваться только изъ практики, но необходимымъ условіемъ ихъ развитія является не только солидная научная подготовка, полученная учащимъ во время пребыванія его въ стѣнахъ высшаго учебнаго заведенія, а также и болѣе или менѣе близкое знакомство съ самыми пріемами и основными требованіями искусства обученія данному предмету и болѣе или менѣе близкое знакомство съ основными положеніями и требованіями методики обученія этому предмету. О томъ, что большую пользу тому же дѣлу принесло бы внесеніе въ число необязательныхъ предметовъ физико-математическаго факультета (а равно и историко-филологическаго факультета, также подготовляющаго, между прочимъ, учителей соотвѣтствующихъ предметовъ для ср. учебныхъ заведеній) болѣе или менѣе полныхъ курсовъ педагогики, психологіи и логики — здѣсь говорить, конечно, не мѣсто. На первыхъ порахъ для студентовъ физико-математическаго факультета, отдѣленія математическихъ наукъ, было бы полезно введеніе въ число необязательныхъ предметовъ;

методологіи математическихъ наукъ и методики обученія ариѳметикѣ, алгебрѣ, геометріи, тригонометріи, физикѣ и космографіи, эти педагогическія дисциплины могли бы оказать громадное и, притомъ, весьма полезное вліяніе на постановку дѣла преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Рѣшенія

нѣкоторыхъ типическихъ ариѳметическихъ задачъ алгебраическаго характера *).

447. Я задумалъ число; умноживъ его на 7 и вычтя изъ полученнаго 56, я получилъ 240. Какое я задумалъ число?—Я получилъ 240 послѣ того, какъ я вычелъ изъ нѣкотораго числа 56, стало-быть, я вычелъ 56 изъ суммы 240 + 56, т. е. изъ 296-ти. Это послѣднее число получилось послѣ того, какъ я умножилъ задуманное число на 7; стало-быть задуманное число есть частное, происходящее отъ раздѣленія 296-ти на 7. (Не дѣлится на-цѣло безъ остатка, стало-быть, нѣтъ цѣлаго числа, удовлетворяющаго условіямъ задачи.)

450. Одинъ спросилъ у другого сколько у этого послѣдняго денегъ.—Если бы у тебя было 56 руб., отвѣчалъ тотъ, и если бы я тебѣ отдалъ изъ моихъ денегъ 4 руб., то у тебя стало бы въ 5 разъ больше, чѣмъ у меня. Сколько денегъ у каждаго изъ нихъ?—Если бы у перваго лица было 57 руб., а второе ему дало бы изъ своихъ денегъ 4 руб., то у перваго стало бы 60 руб.; но тогда, по условію задачи, у перваго было бы въ 5 разъ больше, чѣмъ у второго, стало-быть у второго было бы въ 5 разъ меньше 60-ти рублей, т. е. 12 р. На самомъ же дѣлѣ у второго 12+4, т. е. 16 руб. А сколько денегъ у перваго изъ нихъ—по условіямъ задачи опредѣлить нельзя.

451. Нѣкто задумалъ число; если къ нему прибавить 257, то получится вдвое болѣе, чѣмъ сколько онъ задумалъ. Какое онъ задумалъ число? —Чтобы получить вдвое болѣе чѣмъ сколько онъ задумалъ, къ задуманному числу должно прибавить число, совершенно равное задуманному. Стало-быть, 257 и есть задуманное число.

---

*) Задачи взяты изъ II ч. нашего „Методическаго Сборника ариѳметическихъ задачъ для ср. уч. зав." и снабжены тѣми же нумерами, подъ которыми онѣ тамъ помѣщены.

453. Если къ утроенному неизвѣстному числу прибавить 54, то въ результатѣ получится ушестеренное неизвѣстное число Какъ велико неизвѣстное число?—Чтобы получилось ушестеренное, къ утроенному неизвѣстному должно прибавить то же утроенное число. Стало быть 54 и есть утроенное неизвѣстное число, а неизвѣстное число втрое менѣе 54-хъ, т. е. равно 54 3, или 18-ти.

455. Если бы я хотѣлъ купить себѣ сукна на пальто по 4 р. 50 к. за аршинъ, то у меня на это не хватило бы одного рубля и 5-ти коп.; на свои деньги я могъ бы купить себѣ этого сукна только въ томъ случаѣ, если бы мнѣ торговецъ уступилъ то же сукно по 4 р. 20. Сколько мнѣ надобно сукна на пальто и сколько у меня денегъ?—Покупателю не хватаетъ, стало быть, по 30 к. на каждый аршинъ; а всего ему не хватаетъ 1 р. 5 коп. т. е. 105-ти коп. Сколько разъ 30 к. содержится въ 105-ти к., столько ему надобное аршинъ. Но 105.30=$3\frac{1}{2}$; стало-быть, на пальто нужно $3\frac{1}{2}$ аршина сукна.

Замѣчаніе. При алгебраическомъ рѣшеніи этой задачи можно за неизвѣстное принять количество денегъ, находящихся въ распоряженіи покупателя. Если его обозначить въ копейкахъ чрезъ x, то $x + 105$ выражаетъ стоимость всего сукна, считая по 4 р. 50 к. за аршинъ. Число же аршинъ выразится частнымъ $(x+105)$ 450. Такими же разсужденіями найдемъ, что частное x . 420 выражаетъ то же самое число аршинъ. Откуда мы получили уравненіе

$$\frac{x + 105}{450} = \frac{x}{420}$$

Отсюда видимъ, что въ этомъ случаѣ алгебраическій способъ представляетъ собою большой просторъ въ разсужденіяхъ.

461. Къ задуманному числу прибавлено 25, полученное умножено на 4, изъ этого произведенія вычтено 100; разность умножена на 5, произведеніе раздѣлено пополамъ, въ окончательномъ результатѣ получилось 10. Какъ велико задуманное число?—Послѣ раздѣленія пополамъ нѣкотораго числа получилось въ результатѣ 10, стало-быть раздѣленное число равно 20-ти; оно есть произведеніе нѣкоторой разности на 5, стало-быть эта разность равна 20 : 5, т. е. 4-мъ; разность эта получилась послѣ вычитанія числа 100 изъ нѣкотораго числа, стало-быть это послѣднее равно 104-мъ; 104 есть произведеніе, происходящее отъ умноженія нѣкотораго числа на 4, стало-быть это число равно частному отъ раздѣленія 104-хъ на 4, т. е. равно 26; 26 получилось послѣ прибавленія 25-ти къ задуманному числу; стало-быть задуманное число равно 1-цѣ.

463. Продавая аршинъ сукна по 5 руб., торговецъ получилъ на всемъ остаткѣ этого сукна 12 руб. прибыли; продавая же по 3 рубля, онъ получилъ 4 руб. убытку. Какъ великъ остатокъ этого сукна и почемъ ему самому обошелся аршинъ его?—Продавая аршинъ по 3 руб., торговецъ получилъ бы меньше, чѣмъ въ случаѣ, если бы онъ продовалъ 5 руб. за аршинъ, на 12 руб., да еще на 4 рубля. т. е. онъ получилъ бы 16-тью рублями меньше, чѣмъ въ случаѣ продажи по 5 руб. за аршинъ. Эти 16 рублей онъ потерялъ бы, благодаря только тому, что каждый аршинъ онъ продавалъ бы 2-мя рублями дешевле. Сколько разъ 2 р. содержится въ 16-ти рубляхъ, столько было аршинъ въ остаткѣ сукна, т. е. въ немъ было 8 арш. Теперь опредѣлимъ почемъ ему самому обошелся аршинъ этого

сукна. Продавая сукно по 5-ти рублей за аршинъ, онъ выручилъ бы за весь остатокъ 40 руб.; при этомъ онъ получилъ бы 12 руб. прибыли, стало-быть ему этотъ остатокъ въ 8 аршинъ стоилъ 28 р. Откуда получили, что одинъ аршинъ остатка стоитъ 3 р. 50 к.

Замѣчаніе. Алгебраическимъ способомъ эта задача рѣшается очень легко; не-алгебраическое же рѣшеніе ея представляетъ очень большія логическія и методическія трудности.

575. Сумма двухъ чиселъ 364, а разность 48. Какъ велико каждое изъ нихъ?—*1-й способъ.* Въ 364-хъ содержится и большее, и меньшее число; если къ меньшему прибавить 48, то получится большее; если къ большему и меньшему прибавить 48 (не по 48-ми, а только 48!), то получимъ: большее, меньшее да 48, т. е. удвоенное большее. Стало-быть 364+48, т. е. 412 равно удвоенному большему, откуда получимъ, что большее равно 206. Меньшее же равно разности между 364-мя и 206-тью, т. е. равно 158-ти. *2-ой способъ.* Разность между искомыми числами 48; стало-быть, если бы отъ большаго отнять 24 единицы да прибавить ихъ къ меньшему, то оба числа стали бы равны между собою, а сумма ихъ при этомъ осталась бы та же, т. е. тоже равнялась бы 364-мъ. Въ этомъ случаѣ каждое изъ нихъ было бы равно половинѣ 364-хъ, т. е. 182-мъ. Но таковы были бы эти числа только послѣ уменьшенія большаго на 24 и увеличенія меньшаго на 24. Стало-быть большее равно суммѣ 182-хъ и 24-хъ, т. е. 206, а меньшее разности между 182-мя и 24-ми, т. е. 158-ми.

Замѣчаніе. Алгебраически эта задача рѣшается либо съ помощью одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ: $x + (x + 48) = 364$, либо съ помощью системы уравненій

$$\begin{cases} x + y = 364 \\ x - y = 48, \end{cases}$$

и оба эти рѣшенія отличаются отъ ариѳметическаго чрезвычайною безыскусственностью и простотою. Очень полезно предпослать рѣшенію задачъ этого типа рѣшеніе задачъ типа, повидимому, болѣе сложнаго, но на самомъ дѣлѣ болѣе прозрачнаго въ логическомъ отношеніи. Мы говоримъ о задачахъ, изъ которыхъ одна (№ 485) рѣшена ниже. Когда задачи этого рода усвоены учащимися, для рѣшенія задачъ интересующаго насъ типа можно прибѣгнуть къ слѣдующему разсужденію: въ 364-хъ содержатся меньшее число да большее, т. е. одинъ разъ меньшее да еще одинъ разъ меньшее, да еще 48, или два раза меньшее да еще 48. Но этотъ способъ представляетъ тотъ недостатокъ, что въ немъ implicite скрытъ пріемъ, по которому $a + (a + c) = (a + a) + c$. Кромѣ того онъ затруднителенъ потому, что пріучить къ подсчитыванію меньшихъ (или большихъ) чиселъ содержащихся въ данной суммѣ, легко можно только тогда, когда этихъ чиселъ много; въ данномъ же случаѣ ихъ получается только два, и это особенно затрудняетъ учащихся.

485. Сумма трехъ чиселъ 1509; первое болѣе третьяго на 633, а второе болѣе третьяго на 111. Какъ велико каждое изъ нихъ?—Въ числѣ 1509 содержится, стало быть, третье, да еще разъ третье и 111, да еще разъ третье и 633, т. е. три раза третье число да еще сумма 111-ти и 633-хъ, или три раза третье число да еще 744 единицы. И т. д.

486. Сумма трехъ чиселъ 1369; первое больше второго на 403 единицы, а второе больше третьяго на 279. Какъ велико каждое изъ нихъ?—Въ числѣ 1369 содержится: разъ третье, еще разъ третье да 279, да еще разъ третье и сумма 403+279, и т. д.

490. Сумма двухъ чиселъ 156; одно больше другого въ 5 разъ. Какъ велико каждое изъ нихъ?— Въ числѣ 156 содержится разъ меньшее число, да еще 5 разъ то же число, т. е. всего 6 разъ меньшее число.

492. Сумма трехъ чиселъ равна 21000. Какъ велико каждое слагаемое, если первое больше второго въ 9 разъ, а второе больше третьяго вдвое?— Стало-быть въ числѣ 21000 содержится разъ третье, да еще 2 раза, да еще 18 разъ третье.

495. Разность двухъ чиселъ равна 74-мъ; уменьшаемое больше вычитаемаго вдвое. Какъ велики уменьшаемое и вычитаемое?- Въ уменьшаемомъ содержатся вычитаемое и разность; но по условію уменьшаемое вдвое больше вычитаемаго, стало-быть оно также вдвое болье разности, т. е. оно равно 74×2.

497. Сумма двухъ слагаемыхъ больше одного изъ нихъ на 1600 единицъ. Какъ велико это слагаемое, если оно меньше суммы въ 5 разъ?—По условію одно изъ слагаемыхъ 1600, а другое менѣе суммы въ 5 разъ; стало-быть, оно менѣе, чѣмъ 1600, всего въ 4 раза.

501. Нѣкто разсчиталъ, что у него столько же двадцатипятирублевыхъ бумажекъ, сколько и пятирублевыхъ; но съ другой стороны онъ разсчиталъ, что у него двадцатипятирублевыми бумажками на 400 рублей больше, чѣмъ пятирублевыми. Спрашивается, сколько у него всего денегъ?—Эти 400 рублей разницы между нѣкоторымъ числомъ 25-ти рублевыхъ и такимъ же числомъ 5-ти-рублевыхъ зависятъ отъ того, что каждая двадцатипятирублевка дороже пятирублевки на 20 руб. Сколько разъ 20 р. содержится въ 400 рубляхъ, столько у этого лица двадцатипятирублевыхъ, и сколько же у него пятирублевыхъ бумажекъ.

507. У двоихъ поровну денегъ; если первый отдастъ второму 40 р., то у него тогда будетъ втрое меньше, чѣмъ будетъ всего у второго. Сколько у каждаго денегъ?—Если онъ отдастъ второму 40 руб., то у второго тогда будетъ на 80 рублей больше, чѣмъ у перваго. По условію у второго тогда будетъ втрое больше, чѣмъ у перваго, стало-быть у перваго тогда будетъ 40 рублей, а у второго 120 р. На самомъ же дѣлѣ у каждаго изъ нихъ по 80 руб.

510. Мальчикъ разсчиталъ, что если онъ изъ одного ящика перьевъ переложитъ въ другой 10 штукъ перьевъ, то во второмъ окажется вдвое больше, чѣмъ въ первомъ; но если бы онъ переложилъ изъ второго ящика въ первый 5 штукъ, то во второмъ оказалось-бы меньше, чѣмъ въ первомъ, втрое. Сколько перьевъ въ каждомъ изъ ящиковъ?—По условію задачи (обозначивъ число перьевъ въ 1-мъ ящикѣ цыфрою I, а число перьевъ во 2-мъ цыфрою II,—способъ близкій къ алгебраическому) получимъ:

$$\mathrm{I} - 10 = \frac{\mathrm{II} + 10}{2}$$

а по другому условію получимъ

$$\frac{\mathrm{I} + 5}{3} = \mathrm{II} - 5.$$

Теперь выразимъ число I въ доляхъ числа II изъ перваго и изъ второго равенства (одинъ изъ способовъ рѣшенія системы уравненій); получимъ изъ перваго равенства

$$I - 10 = \tfrac{1}{2}II + 5, \text{ или } I = \tfrac{1}{2}II + 15,$$

а изъ второго:

$$I + 5 = 3II - 15, \text{ или } I = 3II - 20.$$

Отсюда имѣемъ, что

$$\tfrac{1}{2}II + 15 = 3II - 20,$$

т. е. что удвоенное число перьевъ второго ящика, увеличенное половиною того же числа, равно 35-ти. Говоря иначе, 5 половинъ этого числа равны 35-ти; половина равна 7-ми, а все число перьевъ второго ящика равно 14.

Замѣчаніе. Другого совсѣмъ, не алгебраическаго способа, рѣшеніе этой задачи нѣтъ. Очевидно, что чисто алгебраическое рѣшеніе этой задачи отличается и большею ясностью, и большею простотою. Того же рода трудность въ задачѣ подъ № 511.

512. Если изъ двухъ неизвѣстныхъ чиселъ одно увеличить на 470, а другое уменьшить на 560, то полученные результаты будутъ равны между собою; сумма обоихъ чиселъ равна 2100. Спрашивается, какъ велико каждое изъ этихъ чиселъ?—Очевидно, что второе число больше перваго; при этомъ оно больше его и на 470, и на 560; стало-быть, оно больше перваго на 470+560, т. е. на 1030. А въ такомъ случаѣ извѣстна сумма и разность двухъ чиселъ.

513. Если къ одному изъ двухъ неизвѣстныхъ чиселъ прибавить 840, а къ другому 350, то полученные результаты будутъ равны между собою; если же отъ перваго изъ нихъ отнять 1000, а отъ второго—100, то первый результатъ будетъ меньше второго въ три раза. Спрашивается, какъ велико каждое число?—Первое число меньше второго на 840—350, т. е. на 490. Если отъ него отнять еще 1000, то оно станетъ меньше второго еще на 1000, т. е. будетъ меньше его на 1490; если послѣ этого отнять отъ второго 100, то первое будетъ меньше второго всего на 1390. Въ этомъ случаѣ оно будетъ втрое меньше второго; стало-быть, въ 1390 будетъ тогда содержаться удвоенное второе число, откуда получимъ, что второе число въ этомъ случаѣ, т. е. уже послѣ того какъ отъ него отнята 1000, равно 695-ти. Первоначальная величина перваго числа равна, стало-быть 1695.

515. 6 десятковъ апельсиновъ и 4 десятка лимоновъ вмѣстѣ стоили 3 р. 80 к.; въ другой разъ по той же цѣнѣ куплены сотня апельсиновъ и 4 десятка лимоновъ, и за все заплачено 5 р. 40 к. По чемъ десятокъ апельсиновъ и по чемъ десятокъ лимоновъ?—Въ обоихъ случаяхъ куплено одинаковое количество лимоновъ; стало-быть, вся разница между 5 р. 40 к. и 3 р. 80 к. зависитъ исключительно отъ разницы въ количествѣ купленныхъ апельсиновъ. И т. д.

517. 8 кусковъ бархата и 6 кусковъ сукна стоятъ 1100 р.; 3 куска того же бархата и 2 куска такого же сукна стоятъ 770 р. По чемъ кусокъ бархата и по чемъ кусокъ сукна?— Съ увеличеніемъ количества купленнаго товара вдвое сумма заплаченныхъ за него денегъ должна увеличиться тоже вдвое, и т. д. Если мы вмѣсто 3-хъ кусковъ бархата, взятыхъ во второй разъ, возьмемъ 9 кусковъ бархата (т. е. втрое болѣе), а вмѣсто 2-хъ

кусковъ сукна—6 кусковъ его (тоже втрое), то получимъ, что 9 кусковъ бархата и 6 кусковъ сукна стóятъ 2210 р., въ то время какъ 8 кусковъ бархата и 6 кусковъ сукна стоятъ 1100 р. Отсюда получимъ, что кусокъ бархата стоитъ 1110 руб.

Замѣчаніе. Очевидно, что подобный способъ рѣшенія задачъ этого рода есть замаскированный способъ рѣшенія системы уравненій съ помощью уравненія коэффиціентовъ.

524. Аршинъ сукна и аршинъ бархата стóятъ вмѣстѣ 10 р. 80 к.; 25 аршинъ сукна стоятъ столько же, сколько 11 аршинъ бархата. По чемъ аршинъ бархата?—По условію 1 арш. сукна и 1 арш. бар. стóятъ 10 р. 80 к., откуда 25 арш. сукна и 25 арш. барх. стоятъ 270 р. Но по другому условію 25 арш. сукна стóятъ столько же, сколько 11 аршинъ бархата; стало-быть, 11 арш. бархата и 25 арш. бархата, т. е. 36 арш. стóятъ 270 руб. Откуда получимъ, что аршинъ бархата стоитъ 7 р. 50 к.

530. Лошадь вмѣстѣ съ сѣдломъ стоитъ 235 р.; лошадь вмѣстѣ со сбруей стоитъ 250 рублей; сбруя же съ сѣдломъ стоитъ 135 р. Что стоитъ лошадь, что сѣдло, что сбруя?—Изъ первыхъ двухъ условій слѣдуетъ, что сбруя дороже сѣдла на 15 руб.; сбруя же съ сѣдломъ стоитъ 135 руб. Стало-быть, по суммѣ и разности двухъ чиселъ надо найти каждое изъ нихъ, что уже не трудно.

540. Два путешественника, выѣхавъ въ одно и то же время изъ разныхъ городовъ, отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніи 1600 верстъ, ѣдутъ другъ къ другу на встрѣчу. Черезъ сколько времени они встрѣтятся, если первый изъ нихъ проѣзжаетъ въ часъ по 28 верстъ, а второй—по 22 версты, и если оба ѣдутъ безостановочно день и ночь?—Въ теченіе часа они другъ къ другу приближаются на 50 верстъ; стало-быть, разстояніе между путешественниками съ каждымъ часомъ уменьшается на 50 верстъ. Сколько разъ 50 верстъ содержится въ 1600 верстахъ, черезъ столько часовъ оба путешественника встрѣтятся.

541. Изъ города А въ городъ Б отправленъ курьеръ; спустя 18 часовъ другой курьеръ отправленъ въ догонку; первый проѣзжаетъ въ часъ по 30 верстъ, а второй—по 35 верстъ. Черезъ сколько часовъ второй догналъ перваго, если они оба ѣхали безостановочно день и ночь?—Первый курьеръ въ теченіи 18-ти часовъ отъѣхалъ отъ города А на разстояніе 30 в.$\times$18, т. е. 540 верстъ; въ теченіе каждаго часа движенія второй курьеръ приближается къ первому всего на 5 верстъ. Сколько разъ 5 верстъ содержится въ 540 верстахъ, черезъ столько часовъ второй курьеръ догонитъ перваго.

545. 5 фунтовъ чаю, 10 ф. сахару и 13 ф. кофе стоятъ 20 р. 10 коп.; 7 ф. чаю, 15 фунтовъ сахару и 10 фунтовъ кофе стоятъ 23 р. 95 к.; 12 ф. чаю, 2 ф. сахару и 1 фунтъ кофе стоятъ 27 р. 20 к. Что стоитъ фунтъ чаю, фунтъ сахару и фунтъ кофе?—Уравнимъ число фунтовъ кофе въ первомъ и въ третьемъ случаяхъ; для этого предположимъ, что въ первый разъ куплено въ 13 разъ больше товару; тогда съ одной стороны (по первому условію): 5 фунтовъ чаю, 10 ф. сахару и 13 ф. кофе стоятъ 20 р. 10 к., 156 фунтовъ чаю, 26 ф. сахару и 13 ф. кофе стоятъ 353 р. 60 к. Отсюда получимъ, что 151 ф. чаю и 16 ф. сахару стоятъ 333 р. 50 к. Точно такимъ же образомъ найдемъ, уравнивъ число фунтовъ кофе въ второмъ и третьемъ случаѣ, что 113 ф. чаю и 5 ф. сахару стоятъ 248 р. 5 к. Такимъ образомъ задача сведена къ типу № 517.

Замѣчаніе. Очевидно, что предложенное выше рѣшеніе подобно рѣшенію системы уравненій съ тремя неизвѣстными по способу уравненія коэффиціентовъ.

546. Сумма двухъ чиселъ 2336; если же раздѣлить большее число на меньшее, то въ частномъ получился 7, а въ остаткѣ 96. Какъ велико каждое изъ чиселъ?—По второму условію большее число содержитъ въ себѣ 7 меньшихъ да еще 96 единицъ; а въ такомъ случаѣ число 2336 содержитъ въ себѣ 8 меньшихъ да еще 96 единицъ. И т. д.

550. Въ выручкѣ торговца 777 руб. пятирублевыми, трехрублевыми и рублевыми бумажками; рублевыхъ и пятирублевыхъ бумажекъ 129 штукъ, трехрублевокъ же въ выручкѣ на 336 рублей. Сколько въ выручкѣ пятирублевыхъ бумажекъ, если ихъ меньше, чѣмъ рублевыхъ, на 339 штукъ?—Въ выручкѣ трехрублевокъ столько, сколько 3 содержится въ 336, т. е. 112 штукъ. Пятирублевокъ и рублевокъ въ выручкѣ всего на 777 р. безъ 336 р., т. е. на 441 рубль. По условію, рублевыхъ и пятирублевыхъ всего 129 штукъ. Если бы всѣ эти 129 бумажекъ были рублевыми, то ихъ было бы на сумму 129 рублей, т. е. на 312 рублей меньше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ. Эти 312 рублей разницы получились вслѣдствіе того, что нѣкоторыя изъ рублевыхъ бумажекъ замѣнены пятирублевыми. Этихъ послѣднихъ въ выручкѣ столько, сколько разъ 4 р. содержатся въ 312 рубляхъ, т. е. 78 штукъ.

558. Даны два числа: 50 и 12; требуется прибавить къ каждому изъ нихъ поровну, но такъ, чтобы первая сумма была больше второй втрое. По сколько надо прибавить къ каждому изъ этихъ чиселъ?—Разность между ними останется та же и послѣ прибавленія къ этимъ числамъ поровну. Стало-быть разность между ними и въ искомомъ случаѣ будетъ 38; но при этомъ, по условію, второе число будетъ меньше перваго втрое; стало-быть, послѣ того какъ къ обоимъ числамъ будетъ прибавлено поровну, 38 будетъ вдвое больше меньшаго числа, т. е. меньшее число въ этомъ случаѣ будетъ равно 19-ти. Такова будетъ величина меньшаго изъ чиселъ, когда къ обоимъ будетъ прибавлено поровну; стало-быть, поэтому, къ обоимъ числамъ надо прибавить по 7-ми.

Замѣчаніе. Задачи алгебраическаго характера съ дробными данными («Методическій Сборникъ» ч. II, №№ 1521—1650) не представляютъ по большей части никакихъ, заслуживающихъ отдѣльнаго разсмотрѣнія,, частностей.