ГОРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

В. В. РЕПЬЕВ

ОЧЕРКИ ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

(планиметрии)

1959

ГОРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

В. В. РЕПЬЕВ

ОЧЕРКИ ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

(планиметрии)

1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА

Законом об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР установлено, что в ближайшие 3—5 лет основными типами общеобразовательных школ, дающих среднее образование на основе восьмилетки, станут:

а) средние общеобразовательные школы рабочей и сельской молодежи;

б) средние общеобразовательные трудовые политехнические школы с производственным обучением.

Перестройка школы потребует новых учебных планов, программ, методики преподавания (особенно для школ рабочей молодежи и сельской молодежи). Это не означает, однако, отказа от положительного опыта, накопленного к настоящему времени советской общеобразовательной школой. В частности, задача совершенствования методики преподавания геометрии для «обычной» школы, в которой обучаются дети, подростки и юноши раннего возраста, остается весьма актуальной особенно в связи с переходным периодом в жизни нашей школы.

Вот почему нами предпринята попытка рассмотреть в изложенных ниже «Очерках по методике преподавания геометрии» основные проблемы этой педагогической дисциплины с учетом как передового опыта, накопленного лучшими преподавателями математики современной средней школы, так и некоторых тенденций в развитии элементарной геометрии.

Уже название книги показывает, что она не претендует на рассмотрение всех проблем, особенно проблем, возникающих в связи с перестройкой, потребующих для своего решения не только времени и накопления нового опыта, но и тщательного анализа существующего положения с преподаванием геометрии.

Познание в школьном обучении элементарных пространственных форм и отношений, познание основ геометрической науки опирается на научную методологию: марксистско-ленинская теория отражения является основой при рассмотрении проблем методики преподавания геометрии.

Чтобы школьный курс геометрии являлся изложением основ геометрической науки, необходимо учитывать тенденции и направления в развитии элементарной геометрии, использовать их при обучении постольку, поскольку позволяют возрастные особенности подростка и юноши. Это имелось ввиду при рассмотрении отдельных проблем методики преподавания планиметрии.

Существенным компонентом процесса обучения являются учащиеся — подростки и юноши раннего юношеского периода. Это обязывает учитывать психологические основы обучения геометрии и в частности имеющиеся экспериментальные материалы в этом отношении.

Перестройка средней школы требует повышения уровня геометрического образования и такого изложения курса, при котором вскрываются доступные школьникам приложения геометрии. В работе этим приложениям уделяется значительное внимание.

В преподавании геометрии еще далеко неполно используются активные методы обучения. Интересы трудового политехнического обучения и психологические особенности подростка и юноши побуждают повышать активность школьников при обучении. В работе даются конкретные указания в этом направлении.

Очерк 10-й «К методике изложения главы о гомотетии и подобии» написан Н. А. Дроздовой при участии автора книги; очерк 11-й «Начальные сведения по тригонометрии» составлен В. М. Квашневой.

Хочется надеяться, что книга принесет пользу учителям математики и студентам физико-математического факультета педвузов не только в переходный период, но и в дальнейшем, когда перестройка школы будет завершена.

Автор благодарит кафедру алгебры и геометрии Горьковского государственного педагогического института им. А. М. Горького за обсуждение рукописи, в результате которого внесены многие изменения. Автор выражает благодарность заслуженному учителю школы РСФСР М. Е. Сухаревой за просмотр рукописи и кандидату педагогических наук Г. П. Сенникову за редактирование ее, давшие возможность внести ряд изменений, улучшивших ее содержание.

Автор

ОЧЕРК I

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

1. Элементарная геометрия

В современном понимании геометрия — часть математики, являющаяся наукой о пространственных формах и пространственных отношениях, а также о других формах и отношениях действительного мира, сходных с пространственными по своей структуре[1].

Геометрия наших дней является мощно развитой и разветвленной наукой, содержащей значительное количество отдельных дисциплин; она тесно переплетается с другими частями математики — алгеброй и математическим анализом.

Элементарная геометрия исторически и по существу — первая геометрическая дисциплина. Предмет ее значительно уже современного понимания предмета геометрии в широком смысле слова. Элементарная геометрия является дисциплиной о пространственных формах и пространственных отношениях материального мира.

Начатки геометрических знаний возникли под влиянием практики у многих народов древнего мира: египтян, вавилóнян, китайцев, индийцев и др.

Накопившийся геометрический материал в древней Греции трудами многих математиков и философов подвергся дальнейшему обогащению, развитию, системати-

---

[1] А. Д. Александров, Геометрия, БСЭ, изд. 2, т. 10.

Геометрия — от греческих слов γη — земля и μετρεω — мерю буквальный перевод — землемерие.

зации и изложен в форме научной дедуктивной дисциплины. «Начала» Евклида (3-й век до н. э.) содержат замечательное изложение основ геометрической науки[1]. Вместе с тем под влиянием развивающейся геометрии разрабатывается общая схема построения дедуктивных наук. В трудах Аристотеля (4-й в. до н. э.) эта схема получила стройное изложение, не лишенное интереса и для наших дней.

В «Началах» Евклида геометрия изложена на основе введенных понятий, определений и аксиом, каждая теорема обоснована; однако система аксиом неполна, этот недочет покрывается с помощью наглядных представлений и интуиции. Содержание «Начал» изложено в дедуктивной системе, при этом явно первенствует синтетический метод, переходящий в синтетическую систему. У древних греков было недостаточно развито учение о числе, это привело к тому, что предложения изложены чисто геометрически, без применения числа и вычислений; теория пропорций дала возможность обойтись без иррационального числа и преодолеть трудности, связанные с несоизмеримостью отрезков. В распоряжении греков не было алгебраической символики: выход найден в «геометрической алгебре»; в их распоряжении не было и теории пределов — оказал помощь метод исчерпывания. Под влиянием идеалистической философии в «Началах» замалчивается зарождение и развитие геометрических знаний под воздействием практических нужд общества и игнорируются всякие связи теории с материальным миром. Таковы особенности исторически первой дошедшей до нас книги по элементарной геометрии.

В связи с развитием математики вообще и геометрии в частности постепенно и особенно значительно в новое время изменяются методы и в некоторой мере содержание элементарной геометрии. Современные солидные курсы по этой дисциплине излагаются на основе полной системы аксиом в строго дедуктивной системе. В них широко используется учение о действительных числах, что приводит, где это необходимо и полезно, к арифметизации изложения; вместе с тем широко применяется буквенная символика, что позволяет полнее опираться на аналитиче-

[1] Начала Евклида, перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского, Гостехиздат, кн. I—VI, 1948 г., кн. VII—X 1949 г., кн. XI—XV 1950.

ский метод. В современной элементарной геометрии сильным методом установления многих фактов являются некоторые виды преобразований плоскости и трехмерного пространства, рассматриваются многие конструктивные задачи; при введении некоторых понятий и изложении предложений применяется теория пределов[1]. Таким образом современная элементарная геометрия, сохраняя в основном объем «Начал» Евклида, отличается от них значительно методами изложения и частично содержанием.

В советской общеобразовательной средней школе изучаются основы элементарной геометрии, основы геометрической науки.

2. Геометрия в учебных планах школ.

Народы древнего мира применяли геометрические знания к решению довольно разнообразных для своего времени практических вопросов. Эти народы за 3000—2000 лет до нашей эры обучали молодое поколение некоторых сословий началам арифметики и практической геометрии.

В древней Греции геометрические знания считались обязательными для лиц, занимающихся философией и другими науками.

Во 2-м веке до н. э. римляне разработали систему учебных предметов, знание которых признавалось необходимым для господствующего класса и некоторых сословий того времени; в числе «семи свободных искусств» была геометрия и арифметика. Таким образом геометрия включалась в учебные планы школ с давних пор. Однако у народов Европы за период средних веков преподавание геометрии находилось на низком уровне. «Начала» Евклида, как основной источник геометрических знаний, были забыты. В истории некоторых государств были периоды, когда запрещалось заниматься математикой по религиозным соображениям.

Зарождающийся в недрах феодального общества капитализм был заинтересован в развитии естественных

---

[1] С. А. Богомолов, Геометрия (систематический курс), Учпедгиз, 1949; Ж. Адамар, Элементарная геометрия, перевод под редакцией Д. И. Перепелкина, Учпедгиз, ч. 1 и ч. 2. Гостехиздат, 1948—1949; Б. В. Кутузов, Геометрия, Учпедгиз, 1950 и более поздние издания.

наук, появилась потребность и в математике. В эпоху Возрождения у народов Запада возник живой интерес к греческой геометрии.

В феодальном обществе для господствующих классов постепенно складывается система классического образования. «Начала» Евклида, как одно из замечательных произведений античной культуры, становятся учебной книгой. В школах с классической системой главной целью преподавания геометрии считали развитие и укрепление формальной дисциплины ума. Система «Начал» могла служить выполнению этой задачи. Таким образом древнегреческий трактат об элементах геометрии, совершенно не предназначавшийся для обучения подростков и юношей, в некоторых государствах Западной Европы стал школьной учебной книгой.

Во второй половине 18-го века во Франции растет влияние буржуазии, назревает революция, вместе с тем ширится тяготение к образованию. Буржуазия не была заинтересована в классическом образовании, наблюдалась тяга к реальному образованию.

Появляются школьные издания «Начал» Евклида: «Начала» переводились на родной язык учащихся, в них включались только геометрические книги и опускались арифметические, они снабжались примечаниями, пояснявшими текст, делавшими его более доступным для учащихся. Во Франции некоторые школьные переводы «Начал» Евклида выдержали до 30-ти изданий. Школьные издания «Начал» получают распространение и в других государствах Западной Европы. Постепенно в них вносятся все более и более существенные изменения: изложение местами сокращается, в других местах вносятся дополнительные статьи, начинают применяться буквенные обозначения, пояснения включаются в текст[1].

Влияние французской буржуазии отразилось и на взглядах на преподавание геометрии. В 1757 г. в VII томе «Энциклопедии» напечатана статья философа, просветителя и математика Д'Аламбера (1717—1783) «Геометрия», большая часть которой была посвящена вопросам, каким должен быть учебник геометрии. Д'Аламбер рекомендует отличать, какую цель преследует учебная книга. Возможны три вида учебников геометрии: для начального практического обучения, для серьезного изуче-

[1] В. Ф. Каган, Лобачевский, изд. АН СССР, 1948.

ния в системе среднего образования и для глубокой подготовки к специальным занятиям в этой научной области. Степень строгости изложения должна находиться в соответствии с намеченной целью. Во всех случаях строгость изложения не должна быть обманчивой. По мнению Д'Аламбера, в учебнике основную роль должна иметь метрическая геометрия, следует широко применять движение, пользоваться бесконечно малыми.

Взгляды Д'Аламбера на построение трех видов учебников геометрии получили широкое распространение не только во Франции, но и за ее пределами. Появились учебники, составленные в духе его требований. Из них пользовались наибольшим влиянием и распространением «Основы геометрии» Е. Безу (для начального обучения), «Начала» А. М. Лежандра (для средней школы), «Основания геометрии» С. Ф. Лакруа (для углубленного изучения). Эти авторы — выдающиеся математики и видные педагоги — сумели создать такие учебники, которые не снизили уровня преподавания геометрии и сделали его более доступным для подрастающего поколения. Перечисленные учебники получили широкое распространение во всех культурных странах и открыли новую эпоху в преподавании геометрии. Они были переведены и на русский язык.

В 19-м веке в государствах западной Европы преподавание геометрии складывалось и развивалось различно. Это в значительной мере зависело от особенностей систем среднего образования. Не имея возможности дать хотя бы беглые сведения о состоянии и развитии преподавания геометрии на Западе, рекомендуем интересующимся этим обратиться к книге Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», в которой имеется обзор преподавания геометрии в Англии, Франции, Италии и Германии, захватывающий и первую четверть 20-го века[1].

3. Из истории преподавания геометрии в России

«Арифметика» (1703) славного педагога-математика первой половины 18-го века Л. Ф. Магницкого (1669—1739) содержала некоторые сведения по вычислительной геометрии. Даже для начального курса эти сведения

[1] Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 2, Геометрия, Гостехиздат, 1934.

неполны. Автор не вводит определений, аксиом и не использует доказательства. Основное внимание обращено на сообщение небольшого количества вычислительных правил в связи с применением их к решению задач. В «Арифметике» указывается, как надо вычислять в том или ином случае, и не выясняется, почему именно так надо поступать; иными словами геометрический материал, как и весь учебник, изложен догматически.

Несмотря на такие недостатки, геометрический материал «Арифметики» Л. Ф. Магницкого имел значение в первой половине 18-го века при подготовке кадров различных специальностей. В этом веке были изданы и другие руководства по практической геометрии.

В середине 18-го века методическая школа Л. Эйлера (1707—1783) установила новые требования к преподаванию математики. Они сводились к отказу от догматического изложения; педагогу ставилось в обязанность обосновывать, доказывать предложения, развивать мышление учащихся, излагать ученикам не сборник правил — предписаний, а систему математических предложений в их логических связях.

Во второй половине 18-го века делаются попытки составить учебные руководства по геометрии, удовлетворявшие указанным требованиям. Ученик Магницкого, видный педагог-математик, автор многих учебных руководств Н. Г. Курганов (1725—1796) в 1765 г. напечатал один из первых учебников под названием «Генеральная геометрия», который содержал систематический курс геометрии. Несмотря на известность автора, «Генеральная геометрия» не получила распространения: изложение было крайне трудным и с погрешностями. Ученик Эйлера, известный в свое время астроном, деятель народного образования, автор многих книг С. Я. Румовский (1734—1812) составил руководство «Сокращения математики» (1760). В нем изложены основы школьных математических предметов, в том числе теоретическая и практическая геометрия. Однако и в этом руководстве геометрия изложена мало доступно для подростков и юношей. Имели место и другие попытки составить систематические курсы элементарной геометрии для средних школ, однако признать их удачными нельзя.

Вместе с тем были попытки возврата к догматическому изложению. Одаренный педагог-математик, ученик

Эйлера, автор хорошего учебника тригонометрии и других руководств М. Е. Головин (1756—1790) напечатал «Руководство к геометрии для народных училищ» (1786). В этом руководстве М. Е. Головин применяет наглядное обучение, связывает его с практикой, но принижает теорию и таким путем толкает к догматическому изложению.

В России в 18-м веке трижды переводились «Начала» Евклида (1739, 1769, 1784). Второй перевод принадлежал Н. Г. Курганову. Переводы геометрических книг «Начал» использовались в отдельных школах в качестве учебника. Однако они не получили широкого распространения и не являлись школьными изданиями «Начал» Евклида, как это было на Западе; они использовались специалистами, особыми любителями геометрии.

Неудачные попытки создать отечественные учебники геометрии привели к широкому применению переводных руководств; в частности были переведены «Основы геометрии» Е. Безу (1794), «Начала» А. М. Лежандра (1819), «Основания геометрии» С. Ф. Лакруа (1835). Эти книги использовались в качестве учебников и оказывали влияние на авторов новых русских руководств по геометрии. Так, например, прогрессивный деятель народного просвещения, ректор и профессор Харьковского университета Т. Ф. Осиповский (1765—1832) составил «Курс математики» (1814, 2-е издание), геометрический раздел которого был написан под влиянием идей Д'Аламбера и «Начал» Лежандра. На «Геометрии» Н. И. Фусса (1812) видно влияние руководства Безу.

Позднее в 19-м веке составлялись и применялись многие отечественные учебники и задачники по геометрии. В этом деле принимали прямое или косвенное участие первоклассные ученые. М. В. Остроградский (1801—1861) составил «Руководство начальной геометрии», в котором выдержан генетический подход к изложению системы теорем, но не учтены дидактические принципы. В. Я. Буняковский (1804—1889) разработал «Программу и конспект начальной геометрии» (1851), явившиеся полезным пособием для преподавателей. П. Л. Чебышев (1821—1894) 16 лет состоял членом ученого комитета министерства народного просвещения и активно участвовал в его работе, в частности по рецензированию и рекомендации учебных руководств.

Широким распространением пользовался курс профессора Московского университета А. Ю. Давидова (1823—1885) «Элементарная геометрия», первое издание которого вышло в 1864 г. Это руководство выдержало 39 изданий, последнее из них относится уже к советскому периоду (1922).

«Элементарная геометрия» А. П. Киселева (1852—1940) первым изданием вышла в 1892 г. и выдержала десятки изданий; в 1938 г. после переработки Н. А. Глаголевым этот учебник был принят в качестве стабильного для советской средней школы. Он применяется и в наши дни.

В связи с организацией двухклассных и городских училищ составлялись отечественные учебники по начальной (пропедевтической) геометрии и упрощенные систематические курсы[1].

4. Из истории развития методики геометрии в России

Первоначальное накопление методических воззрений, положений и закономерностей осуществляется в учебной литературе; она же служит средством распространения методических установок и идей.

Уже с середины 18-го века методическая школа Эйлера через выпущенные учебники требовала систематического изучения основ элементарной геометрии и отказа от догматизма в преподавании, заботилась не только о сообщении геометрических фактов, но и о развитии ума, логического мышления, освоении дедуктивной системы. Эта школа разрабатывала и отечественную терминологию геометрии и других математических дисциплин.

В последней четверти 18-го века наметилась дифференциация преподавания в зависимости от типа школ. Принцип наглядности нашел широкое применение в изложении начальных сведений по геометрии; была установлена тесная связь теории с практикой, особенно с геодезическими работами.

О значительном прогрессе методической мысли к началу 19-го века свидетельствуют работы выдающегося педагога-математика, оригинального мыслителя, акаде-

---

[1] А. Е. Прудников, Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков, Учпедгиз, 1956 г.

мика С. Е. Гурьева (1764—1813). Книга С. Е. Гурьева «Опыт усовершенствования элементарной геометрии» (1798) — первое русское сочинение, рассматривавшее вопросы философии математики. Эта книга имеет и методическое значение. Методические взгляды ученого нашли выражение и в других работах его. С. Е. Гурьев утверждал, что первые геометрические знания человек получает с помощью чувств, на которые действуют окружающие тела; первые свойства тел — протяженность и движение. Это — взгляды материалиста. На основе общих воззрений С. Е. Гурьев разработал проект системы математического образования: обучение надо начинать с детской арифметики и с детской геометрии, затем следует изучение настоящей геометрии и науки счисления, содержащей основы настоящей арифметики и простой алгебры, наконец, переходят к изучению высшей математики. Таким образом, четко ставится вопрос о преподавании начальной арифметики и подготовительного курса геометрии. Преподавание последнего опирается на наглядность и лабораторный метод. Впервые осознается необходимость пропедевтического курса геометрии. В отношении расположения материала в «настоящей геометрии» С. Е. Гурьев не удовлетворен системой Евклида и рекомендует такое изложение, чтобы учащийся мог осознать необходимость перехода от одного материала к последующему. Это — первая постановка вопроса о генетическом методе изложения геометрии.

С. Е. Гурьев реализует свои воззрения на преподавание в книге «Основания геометрии» (1804). Это руководство интересно по замыслу, стройности, естественному расположению материала, но оно отличается значительным объемом, сложностью и крайне тяжелым языком. Оно непригодно в качестве учебника, хотя и пользовалось некоторым распространением.

Методические положения находили место и накапливались в высказываниях и работах видных деятелей народного образования.

Гениальный математик, создатель неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевский (1792—1856), как ректор Казанского университета, был председателем Училищного комитета Казанского учебного округа и руководил школьным делом этого округа. В 1830 г. Н. И. Лобачевский составил «Наставление учителям математики в гимназиях»[1]. Эта записка в свое время не была опубликована, но оказывала влияние на преподавание математики в гимназиях округа. Н. И. Лобачевский настаивает на том, что в основу усвоения математических понятий надо класть чувственные восприятия и от них идти к отвлечению, что преподаватель обязан всячески избегать механического заучивания математических фактов и добиваться их осмысливания и понимания, что такое усвоение важно и для овладения материалом учебной дисциплины и для плодотворного применения в практике, что обучение математике имеет значение и для развития ума и для приобретения полезных умений и навыков.

Н. И. Лобачевский, не возражая против насаждавшегося в его время классического образования, смело выдвигает мысль о предоставлении выбора учащимся специализироваться в изучении реальных дисциплин, в том числе и математических. Методические положения Н. И. Лобачевского не потеряли значения и для нашего времени.

С середины 19-го века начинает выходить специальная литература по методике геометрии.

Выдающийся ученый и просветитель В. Я. Буняковский (1804—1889) в 1851 г. опубликовал «Программу и конспект начальной геометрии», в котором изложены принципы методики геометрии и ряд конкретных указаний, как вести изложение некоторых геометрических вопросов.

Талантливый методист-математик А. Н. Острогорский опубликовал первую книгу по методике систематического курса геометрии[2]. А. Н. Острогорский, опираясь на критический обзор отечественных и переводных учебников, рассматривает основные проблемы преподавания геометрии; к образованию понятий, к рассмотрению аксиом он подходит с материалистических позиций, детально излагает логические основы курса геометрии и правильно освещает основные вопросы методики.

Во второй половине 19-го века разрабатывается методика преподавания начального и сокращенного система-

[1] Опубликовано в т. II «Известий Института истории естествознания АН СССР», 1948.

[2] В. Ф. Каган, Лобачевский, изд. АН СССР, 1948.

[3] А. Н. Острогорский, *Материалы по методике геометрии в связи с изучением учебников, учебное пособие для начинающих преподавателей*. СПБ, 1884.

тического курсов геометрии и создается отечественная учебная литература по этим курсам. Одаренный педагог-математик В. А. Латышев (1850—1912) составил программу начального (пропедевтического) курса геометрии для двуклассных училищ. По замыслу автора этот курс должен носить практический характер, связанный с измерением поверхностей, объемов, со съемкой планов; в нем уделяется внимание геометрическим построениям и можно пользоваться наглядными доказательствами. В. А. Латышев разработал программу и сокращенного систематического курса геометрии для городских (позднее высших начальных) училищ. Методические высказывания В. А. Латышева отличаются глубокой продуманностью, научностью и правильным учетом целей различного вида школ. В. А. Латышев опубликовал несколько статей по методике геометрии и выпустил литографированное издание записок по методике геометрии[1].

В 20-м веке, до Великой Октябрьской социалистической революции, продолжает интенсивно разрабатываться методика препедевтического курса геометрии[2].

За годы советской власти изучение проблем методики математики и в частности методики преподавания геометрии приняло небывалый размах. Растет методическая литература[3].

В связи с перестройкой средней школы перед советскими методистами-математиками встают важные и глубокие проблемы о дальнейшем развитии методики мате-

---

[1] В. А. Латышев 1) О преподавании геометрии, «Педагогический сборник», 1877, № 12. 2) Геометрия в городских училищах, «Русская школа», 1893, №№ 3 и 4. 3) Опыт разработки программ геометрии для 2-классных народных училищ, «Русский народный учитель», 1901, №№ 8 и 9. 4) Записки по методике геометрии 1878 (литографированное издание).

[2] Н. Г. Лексин, Пропедевтический курс геометрии, наглядно лабораторные примерные уроки и рисунки в тексте, 1914.

А. П. Кулишер, Методика и дидактика подготовительного курса геометрии, 1918.

В. К. Беллюстин, Очерки по методике геометрии, 1912.

[3] Р. В. Гангнус и Ю. О. Гурвиц, Геометрия, методическое пособие, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1934—1935.

Н. М. Бескин, Методика геометрии, Учпедгиз, 1947.

В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе, под редакцией А. И. Маркушевича, изд. 3, Учпедгиз, 1954.

Методика преподавания математики, под редакцией Е. Е. Лялина, ч. 1 и часть 2, 1952—1956, и другие.

матики, о разработке ее для неполной средней общеобразовательной трудовой политехнической школы, для других основных типов учебных заведений, дающих полное среднее образование.

5. Преподавание геометрии в советской средней школе

«Главной задачей советской школы является подготовка учащихся к жизни, общественно полезному труду, дальнейшее повышение уровня общего и политехнического образования, подготовка образованных людей, хорошо знающих основы наук, воспитание молодежи в духе глубокого уважения к принципам социалистического общества, в духе идей коммунизма»[1].

Главная задача советской школы решается всей системой воспитания и обучения, в частности и путем обучения основам математических наук.

Математические дисциплины учебного плана школы, в том числе и геометрия, являются неотъемлемой и существенной частью политехнического обучения и важным фактором в подготовке к общественно полезному труду.

Главнейшие цели обучения геометрии следующие: сообщить учащимся элементарные факты о пространственных формах и пространственных отношениях в соответствие школьной программе по геометрии; развить умения и навыки применять геометрические факты к решению доступных для школьников практических проблем, в особенности таких, которые связаны с производством, с техникой, с измерительными работами на поверхности земли.

Однако преподавание геометрии не сводится только к сообщению геометрических фактов о пространственных формах и их отношениях, к практическим применениям этих фактов. Важнейшая цель обучения геометрии заключается в том, чтобы подрастающее поколение овладело основами элементарной геометрии, началами геометрической науки. Это требует систематического изложения основ курса геометрии в доступной для учащихся логической системе.

В силу этого выдвигаются другие цели обучения геометрии. Важнейшие из них следующие: развитие логиче-

[1] Закон об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР.

ского мышления, ознакомление с построением дедуктивной дисциплины, овладение методами, применяемыми в элементарной геометрии.

Всякое обучение основам наук органически связано с воспитанием. Одной из существенных воспитательных задач, задач обучения основам математических наук и в частности геометрического образования является формирование у подрастающего поколения основ марксистско-ленинского мировоззрения.

Большое значение в преподавании геометрии имеет развитие пространственного воображения, являющегося основой многих видов технического творчества.

Обучение геометрии имеет и другие важные цели с точки зрения главной задачи советской школы. Надлежит познакомить учащихся с чертежными приборами, их проверкой, дать первые уменья и навыки применять их, сообщить геометрические основы изображения форм трехмерного пространства на плоскости, развивать и совершенствовать уменья в этом, научить читать чертежи. В этих вопросах преподавание геометрии и черчения переплетаются и дополняют друг друга. Надлежит познакомить учащихся ближе и с практикой измерения геометрических величин — отрезков, углов, поверхностей и объемов. Разумное обучение геометрии дает возможность реализовать ряд других целей: оно способствует развитию активности, инициативы, элементов творчества, развивает уменья и навыки читать математическую книгу, дает возможность познакомиться с некоторыми фактами из истории геометрии.

Для осуществления целей геометрического образования необходимо руководиться теми принципами, которые указывает советская дидактика. Обучение основам геометрической науки должно отличаться коммунистической идейностью, доступной для подрастающего поколения научностью, систематичностью, ярко выраженной связью теории и практики, вскрывающей приложения геометрии в производстве. При обучении геометрии необходимо учитывать возрастные особенности подростков и юношей, оно должно быть доступно их развитию и основываться на сознательности. Необходимо давать прочные знания и навыки, развивать коллективизм в деятельности учащихся и не опускать индивидуального подхода к каждому из них. Нет надобности комментировать каждый из дидактических принципов, однако целесообразно сделать некоторые замечания.

По сути дела школьный курс геометрии является основой геометрии фигур. За последние годы в учебной литературе наблюдается тенденция подменить геометрию фигур геометрией чертежей. Это же можно наблюдать в практической деятельности некоторых учителей: при сообщении геометрических понятий, при изложении теорем, при решении задач нередко речь идет не о фигуре, а о чертеже; приходится читать и слышать «перегнем чертеж по прямой», «вращаем чертеж вокруг точки», «наложим чертеж».

Школьный курс геометрии сводить к геометрии чертежей нецелесообразно: такая подмена искажает основы элементарной геометрии, огрубляет школьную геометрию, ограничивает воспитательное значение ее изучения, в частности мешает развитию пространственного воображения.

Школьная геометрия является и должна оставаться геометрией фигур, а роль чертежей сводится к важным наглядным пособиям, которые находят широкое и полезное применение при изложении геометрии фигур. Чертеж не тождественен геометрической фигуре: он грубое изображение последней. В связи с политехническим обучением роль чертежа возрастает: чертеж — язык техники. Чертеж — язык и геометрии фигур. Чертеж как и термин — сигнал для второй сигнальной системы, но он не тождественен сигнализируемому — фигуре.

Итак, при обучении надо вести речь не о чертежах, а о фигурах: школьная геометрия — геометрия фигур.

Некоторые учителя-математики думают, что школьный курс геометрии логически совершенен и усматривают в этом реализацию принципа научности.

Необходимым условием построения безупречного логического курса геометрии является введение полной аксиоматики. Это — необходимое условие, но еще недостаточное. При изложении доказательств нельзя опираться на «очевидность», подсказываемую чертежом фигуры или ее представлением, нельзя опираться на интуицию, т. е. на познание без развернутого рассуждения, обусловленное ранее приобретенным опытом и практической деятельностью.

Изучение систематического курса геометрии в нашей школе начинается подростками 12-летнего возраста. Современное аксиоматическое построение геометрии таково, что недоступно учащимся ни этого, ни более старшего возраста. Школьные курсы геометрии строятся на неполной системе аксиом. Если сравнить аксиоматику обычного школьного курса с системой аксиом, данной Д. Гильбертом[1], то в школьном курсе найдем I группу — аксиомы соединения (она представлена довольно полно), IV группу — аксиому параллельности и в лучшем случае V группу — аксиомы непрерывности, а чаще всего только первую из них — аксиому Архимеда или аксиому измерения. В школьном курсе используется только около половины всех аксиом, введенных Д. Гильбертом; в частности в нем совершенно нет II группы — аксиом порядка — и III группы — аксиом конгруентности или движения. Неполнота аксиоматики приводит к необходимости пользоваться интуитивными представлениями, неформулированными и неосознанными аксиомами. В силу этого школьный курс геометрии не может быть строгим в логическом отношении.

При повторении геометрии в старших классах или на занятиях математического кружка желательно познакомить учащихся со схемой построения дедуктивной науки и с полной системой аксиом элементарной геометрии.

Если школьный курс геометрии не является логически строгим, то возникает вопрос, помогает ли его изучение логическому развитию учащихся. Практика преподавания геометрии в течение длительного периода свидетельствует, что и несовершенные в логическом отношении курсы геометрии служат хорошей школой для развития логического мышления. Переход от конкретно-индуктивного мышления, свойственного детям, к дедуктивному мышлению в подростковом и раннем юношеском возрасте нельзя осуществить сразу, скачкообразно: необходим длительный подготовительный переходный период, на протяжении которого конкретно-индуктивный метод постепенно ослабляется, его применение ограничивается, а дедуктивный метод усиливается. Время изучения школьной геометрии и является таким переходным периодом, подготовляющим изучение более абстрактных и в логическом отношении более строгих курсов математики.

---

[1] Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.

В связи с этим надо отметить, что школьный курс геометрии, изучаемый подростками и юношами с двенадцати до восемнадцатилетнего возраста, в логическом отношении не может быть одинаково выдержан. В 6—8-х классах логические элементы представлены слабее, а, начиная с 9-го класса, они усиливаются. Это видно на примере использования аксиомы Архимеда. Измерением длин отрезков учащиеся занимаются уже в 6-м классе и оно рассматривается как интуитивно ясный процесс, а аксиома измерения вводится только в начале 9-го класса, в котором приходится пересматривать вопрос об измерении с целью подвести некоторые логические основания. За последние годы была сделана попытка ввести в 8-м классе аксиому непрерывности Кантора, а по существу непрерывностью прямых и окружностей учащиеся пользуются уже в 6-м классе. Иногда преподаватель усиливает логические обоснования с началом изучения стереометрии. Эти факты показывают, что в логическом отношении школьный курс геометрии является неравномерным, что в нем происходит постепенное усиление элементов обоснования.

ОЧЕРК II

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ В 6-м КЛАССЕ

1. Основные понятия

Изложение геометрии в 6-м классе начинается и сопровождается введением большого числа понятий. Только в 1-й главе курса вводится около 40 понятий; значительное количество их содержит глава о параллельных прямых и особенно глава о треугольниках. Изобилие понятий естественно создает некоторые трудности в усвоении начал курса геометрии: требуется, чтобы ученик запомнил термины, связанные с понятиями, и большое количество определений, четко представлял содержание каждого понятия и объем его. Чтобы число понятий на том или другом этапе обучения произвольно не возрастало и трудности их усвоения были ограничены, полезно придерживаться следующего положения: авторы школьных учебников геометрии и каждый преподаватель математики на том или ином этапе обучения вводят только те понятия, которые необходимы и которые сейчас же применяются в развитии курса. Ни одного лишнего, пока ненужного понятия![1]. Это особенно важно соблюдать в 6-м классе.

Некоторые преподаватели, особенно молодые, недостаточно тщательно ведут работу по сообщению понятий. Это — существенная методическая ошибка, влекущая

---

[1] Н. М. Бескин, Методика геометрии, Учпедгиз, 1947.

слабое усвоение курса. Она особенно вредна, если совершается в 6-м классе. Необходимо, чтобы каждое понятие каждым учеником было усвоено совершенно, т. е. чтобы каждый ученик четко знал характерные признаки понятия, правильно применял понятие[1].

Современные научные курсы элементарной геометрии начинаются с перечисления основных (первичных) понятий, которые вводятся без определений. К числу таких понятий весьма часто относят следующие: точка, прямая, плоскость. Затем указываются основные отношения этих понятий: «лежит», «между», «равный» и другие. Эти отношения описываются системой аксиом. Последняя косвенно определяет основные понятия (с точностью до изоморфизма)[2].

Изложение школьного курса также начинается с введения основных понятий. По педагогическим соображениям в школьных курсах основных понятий больше чем в научных. К ним относятся — тело, поверхность, линия, точка, прямая, плоскость. Эти понятия — первые: они не могут быть определены через другие понятия. Они не могут получить достаточно полное косвенное определение через аксиомы, так как в школьном курсе вводится небольшое количество аксиом из числа потребных для логического развития геометрии, а в начале курса вводятся только немногие аксиомы принадлежности. Еще греческий философ Аристотель (4-й век до н. э.), развивая схему построения дедуктивной науки, указывал, что основные понятия (по Аристотелю, категории) вводятся без формальных логических определений, ибо они — первые и в силу этого не могут быть определены через другие понятия.

Наблюдаются попытки дать «определения» и основным понятиям. Некоторые учителя приняли формулировки учебника геометрии: «Граница тела есть поверхность», «Граница поверхности есть линия», «Граница линии есть точка» за определения соответственно поверхности, линии, точки[3]. На последующих уроках можно было слышать вопросы: «Что называется поверхностью? линией? точкой?». Такая работа учителя содержит логические

---

[1] В. В. Репьев, Общая методика преподавания математики, Учпедгиз, 1958, глава 3.

[2] С. А. Богомолов, Геометрия, Учпедгиз, 1949 г.

[3] Н. Н. Никитин, Геометрия, Учпедгиз, 1957.

ошибки. Приведенные формулировки только поясняют, чем может быть поверхность, *линия, точка*, а не определяют эти понятия. Из того, что граница линии есть точка, не следует, что точка есть граница линии: мы мыслим точку и вне линии, и в любом месте ее. Попытки определять основные понятия всегда несостоятельны в логическом отношении и находятся в противоречии с современными воззрениями на логическую структуру геометрии.

«Живое созерцание» — восприятие, наблюдение — является начальным и исходным звеном в познании пространственных форм и пространственных отношений материального мира. При ознакомлении шестиклассников с первыми геометрическими образами и соответствующими понятиями широко используется наглядность: опираются и на обстановку, окружающую школу, и на обстановку класса, на специальные учебные приборы, модели и на чертежи фигур, на представления, которые подростки приобрели в своем опыте, при работе в учебных мастерских и при обучении элементам наглядной геометрии. При сообщении основных геометрических понятий и отношений применяется абстракция. Под абстракцией разумеется мысленное отвлечение от несущественных частных признаков, выделение и обобщение существенных признаков, свойственных вещам и явлениям материального мира. Абстракция является единственным методом в формировании основных геометрических понятий и отношений.

Иногда на первых уроках геометрии стараются не опираться на те знания пространственных форм и пространственных отношений, которые имеют школьники в результате обучения наглядной геометрии в связи с арифметикой, полагая, что это нарушает систематичность курса. Это — *педагогическая ошибка. Накопленные геометрические знания являются хорошим созником учителя при изложении первых сведений по геометрии: переход к абстрактному мышлению совершается тем легче, чем богаче конкретное мышление, чем шире используются чувственные данные, ибо абстрактное мышление неизменно опирается на чувственные данные, оно выходит за пределы этих данных, но не порывает с ними. И на первых уроках, и в дальнейшем надо использовать ранее накопленные знания при изучении геометрических образов и понятий. Некоторые учителя игнорируют изложение геометрического материала в 5-м классе или сообщают его поверхностно. Это тоже педагогическая ошибка, она влечет понижение качества усвоения начал систематического курса.

Приведем пример формирования основного понятия. Подростки имеют представление об отрезках прямых. Это надо использовать при введении понятия прямой.

— Перед нами дверь классной комнаты. Покажите на поверхности двери прямые линии.

— Покажите прямые в классной обстановке.

С помощью учеников преподаватель демонстрирует тонкую натянутую нить.

— Эта нить дает представление о прямой. Нить имеет толщину, прямая не имеет толщины. Если ослабить натяжение, нить провиснет. Теперь она дает представление о кривой линии. Где вы наблюдали кривые линии?

— Как чертят прямые линии плотники? столяры?

Преподаватель демонстрирует, как можно «отбить» изобряжение прямой на классной доске с помощью натянутой нити, натертой мелом и прижатой концами к доске.

— Как можно иначе начертить прямую на классной доске? на бумаге?

— Начертите в тетрадях четыре прямые в различных положениях.

— Всякое изображение прямой несовершенно: начерченная прямая мелом на доске, карандашом в тетради имеет и ширину, и толщину. Прямая же не имеет ни ширины, ни толщины.

— На доске, на бумаге можно изобразить только часть прямой. Можно представить, что прямая продолжается в обе стороны неограниченно. Она не имеет концов. Прямая линия бесконечна.

Таким образом, на основе использования опыта учащихся, путем демонстраций и наблюдений, путем абстракции познаются основные понятия геометрии.

Между понятиями точки, прямой и плоскости также путем абстракции устанавливаются связи. Описание этих связей дается системой аксиом. Аксиомы обеспечивают использование основных понятий в доказательствах. Основные понятия косвенно определяются через аксиомы. Далеко неполное, частичное косвенное определение через аксиомы имеет место и в школьных курсах геометрии.

2. Определения

Если основные понятия школьного курса геометрии вводятся через абстракцию и в некоторой мере косвенно определяются аксиомами, то последующие понятия преимущественно вводятся через определения. Определение — математическое предложение, которое сводит определяемое понятие к ранее установленным понятиям той же дисциплины. Определения используются в доказательствах. Поэтому обучение необходимо вести так, чтобы каждый ученик знал определения и правильно пользовался ими.

Абстракция может быть применена и при введении определяемого понятия. Так, например, можно ввести понятие параллельных прямых или многоугольника. Однако в таком случае сообщение понятия завершается определением.

При абстракции часто опираются на целесообразно подобранные чертежи фигур. Так, например, сообщаются понятия диаметра и хорды, смежных и вертикальных углов, высоты, медианы и биссектрисы треугольника. В таких случаях уместно предложить учащимся, если возможно, найти в окружающем мире примеры приложения понятия.

В учебниках математики для средней школы нет единого подхода к использованию термина «определение» понятия. А. Н. Барсуков применяет этот термин с первых уроков алгебры 6-го класса[1]. Н. Н. Никитин избегает этого термина в 6-м и даже 7-м классах[2].

Серьезных оснований избегать термина «определение» и связанного с ним понятия не имеется. Учащиеся уже в 5-м классе познакомились с большим количеством определений, хотя они так и не назывались. Уже встречались определения в начале курса геометрии.

Значительный запас изученных определений является материалом, дающим возможность ввести понятие «определение».

Путем беседы на уроке учащиеся вспоминают некоторые формулировки из курса арифметики, например, что называется делителем числа, общим наибольшим делителем нескольких чисел, как читается переместительный закон сложения, правило умножения десятичных дробей.

[1] А. Н. Барсуков, Алгебра, ч. 1, Учпедгиз, 1957.
[2] Н. Н. Никитин, Геометрия, Учпедгиз, 1957.

Вспоминаются некоторые формулировки из курса геометрии, например, какие линии называются перпендикулярными, какой угол называется прямым, каким свойством обладают прямые углы.

Такие словесные формулировки называют математическими предложениями. По своему характеру математические предложения различны. Выделим из них те, которые отвечают на вопрос: «Что называется...?». Что называется делителем числа? общим наибольшим делителем нескольких чисел? прямым углом? Ответы на такие вопросы даются определениями. Определением называется такое предложение, которое выясняет, какой смысл вкладывается в новое слово, в новое понятие[1]. Шестиклассники вспоминают еще определения, которые уже встречались им.

Изучение первых сведений об окружности сопровождается значительным количеством новых понятий и их определений. Определяются понятия окружности, радиуса, хорды, диаметра, дуги, а несколько позднее центрального угла, дугового и углового градусов. Определения просты, легко усваиваются. Это благоприятствует введению понятия определения и позволяет достигнуть того, что термин «определение» получит в сознании учеников содержание, какое ему свойственно.

Очень часто определение строится так, что в нем указывается ближайший род определяемого понятия и характерный видовой признак этого понятия. В дальнейшем, например, при рассмотрении видов треугольников целесообразно обратить внимание учащихся на структуру определения. С логическими понятиями рода и вида можно познакомить путем рассмотрения примеров из жизненного обихода. Понятие «спортсмен» применимо к любому человеку, который занимается спортом; понятие «футболист» применимо только к такому спортсмену, который занимается игрою в футбол. «Спортсмен» — родовое понятие, «футболист» — видовое. Ученики подберут еще примеры видовых и родовых понятий: ученик — ученик 6-го класса, книга — учебник — учебник математики. Последний пример демонстрирует относительность понятий рода и вида и позволяет выделить понятие о ближайшем роде.

---

[1] Для учащихся запоминание этого предложения необязательно.

Приводятся примеры родовых и видовых понятий из геометрии: хорда — диаметр, угол — острый угол, треугольник — равнобедренный треугольник — прямоугольный равнобедренный треугольник.

Открывается возможность познакомить со структурой определения через ближайший род и видовой признак. Например, в определении: «Прямоугольным треугольником называется такой треугольник, который имеет прямой угол» для определяемого понятия «прямоугольный треугольник» указаны ближайшее родовое понятие «треугольник» и видовое отличие — наличие прямого угла.

Не исключена возможность, что не каждый ученик после первого разъяснения усвоит обычную структуру определения. В дальнейшем найдутся поводы вернуться к этому вопросу. В этом отношении богатый материал содержит глава о четырехугольниках.

В логически строгих курсах математики даются доказательства существования вводимых определяемых понятий. При изложении геометрии в 6-м классе еще преждевременно сообщать о доказательствах существования. Однако во всех случаях, когда имеющимися в распоряжении учащихся средствами можно построить фигуру, входящую в объем определяемого понятия, надо выполнить такое построение, причем полезно строить несколько фигур определяемого класса. Например, прежде чем определить понятие «равнобедренный треугольник», школьники строят с помощью линейки и циркуля 2—3 равнобедренных треугольника. Возможность такого построения по существу и служит доказательством существования определяемого понятия.

3. Предупреждение ошибок при сообщении понятий

Иногда при выяснении видового признака определяемого понятия опираются только на один чертеж фигуры, расположенный так, как в учебнике, а в иных случаях и с такими же обозначениями. Например, если сообщается понятие о перпендикулярных прямых, то изображается одна пара таких прямых и при этом одна из прямых чертится горизонтально; если идет речь о параллельных прямых, то вычерчивается одна пара таких прямых и при этом горизонтально. Такую первую встречу с понятием надо признать методической ошибкой: она порождает фактические ошибки учеников. Некоторые шестиклассники, даже запомнившие определение, отказываются признать перпендикулярными такие прямые, которые наклонены к нижнему срезу тетради, отказываются признать параллельными, если они негоризонтальные.

Эти наблюдения подтверждаются психологическими экспериментами. В. И. Зыкова приводит интересные для учителя экспериментальные результаты в отношении усвоения понятий.

«Эксперименты проводились с учащимися различной успеваемости по геометрии, т. е. изучались сильные ученики, средние и слабые. Были взяты два понятия: «диаметр» и «прямой угол». Задача заключалась в том, чтобы выяснить, как учащиеся представляют себе количество диаметров и их положение в окружности и в каких положениях они представляют себе прямой угол.

Оказалось, что пять учеников (из двенадцати) действительно понимали, что в окружности можно провести сколько угодно диаметров. У остальных же менее успевающих учащихся представление о диаметре оказалось ограниченным тем числом их, которое было показано, или оно было незначительно расширено. Были учащиеся, которые чертили только один диаметр, причем всегда или в вертикальном, или в горизонтальном положении. Другие учащиеся чертили два диаметра в тех же положениях и говорили, что в окружности можно начертить только два диаметра...

Примерно такие же результаты получились в экспериментах с прямым углом...»[1].

Итак, наблюдения и эксперименты свидетельствуют, что знание определения не решает вопроса о том, что каждый ученик правильно представляет объем понятия. Некоторые учащиеся определение усваивают формально. Объем ограничен чертежом, который использовал учитель при первой встрече с понятием. Другими словами некоторые учащиеся внесли в признаки понятия то, чего нет в определении, но было показано на доске — расположение фигуры.

Чтобы избежать этого, опытные учителя проводят кропотливую работу при сообщении понятия, используя изо-

---

[1] В. И. Зыкова, Очерки психологии усвоения начальных геометрических понятий, Учпедгиз, 1955.

бражения фигур в различных положениях и различных форм. Приведем пример.

Учитель сообщает понятие о вертикальных углах.

— Начертим $\angle ABC$. Продолжим его стороны за вершину. Получим $\angle DBE$. Какая особенность в расположении этих углов? (Черт. 1 а).

— Такие углы называются вертикальными. Запишем: вертикальные углы.

— Начертим $\angle 1$ (черт. 1, б). Изобразите для этого угла вертикальный $\angle 2$.

— Какие углы называются вертикальными?

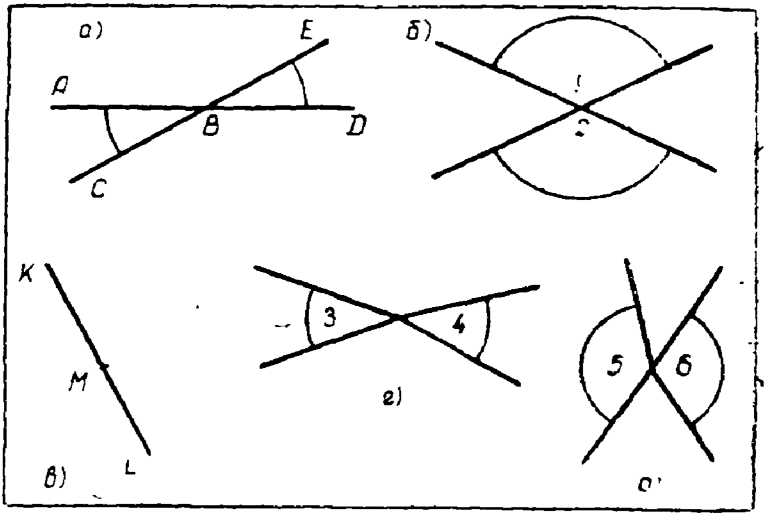
Определение повторяется 2—3 раза.

— Найдите вертикальные углы в окружающей школу обстановке, в классной обстановке.

— Нет ли на чертеже а) другой пары вертикальных углов?

— Почему эти углы можно назвать вертикальными?

— Начертите прямую KL и отметьте на ней точку M. Через эту точку проведите прямую, чтобы получилась пара тупых вертикальных углов (черт. 1, в).



Чертеж 1

— На каком основании эту пару углов можно назвать вертикальными?

— При оценке на глаз будут ли углы 3 и 4 вертикальными? Почему их нельзя назвать вертикальными?

— Будут ли углы 5 и 6 вертикальными? Почему они не являются вертикальными?

Итак, какие углы называются вертикальными?

Определение повторяется еще 2—3 раза.

При таком сообщении понятия многократно подчеркивается видовое отличие, лучше усваивается определение, получается правильное представление об образах, включаемых в объем понятия.

Однократная демонстрация чертежа фигуры при выяснении понятия приводит некоторых учащихся к ошибкам иного типа: опускаются существенные признаки определяемого понятия, таким путем искажается содержание его, расширяется объем понятия. Приходится наблюдать, как ученик, познакомившись с понятием высоты треугольника и запомнивший определение, неверно изображает высоту, когда основание ее должно оказаться на продолжении стороны треугольника. Это говорит о потере одного из существенных признаков высоты. В. И. Зыкова в одном из своих экспериментов показывала шестиклассникам три фигуры — окружность, эллипс и замкнутую волнообразную кривую. Учащимся предлагалось назвать знакомые фигуры. Третья часть из них назвала все фигуры окружностями. Эти учащиеся потеряли один из признаков окружности и в силу этого расширили объем понятия; они не усвоили понятие окружности.

Борьба с ошибками этого вида должна вестись также путем многократных наблюдений чертежей соответствующих фигур, путем выполнения изображений необходимых элементов. Кроме того, при сообщении понятия часто полезно демонстрировать контробразы и выяснять, почему они не входят в объем понятия. Нередко понятие усваивается лучше, совершеннее путем рассмотрения противоположного ему понятия.

Сообщая, например, понятие высоты треугольника, преподаватель предложит построить высоту, когда она будет находиться внутри треугольника и вне его, когда она расположится перпендикулярно к нижнему обрезу тетради и наклонно к нему. Преподаватель поставит и такие вопросы:

— Отметим на основании треугольника произвольную точку K и соединим ее отрезком с вершиной A. Можно ли назвать отрезок AK высотой? Почему его нельзя назвать высотой?

— Возьмем на боковой стороне треугольника точку L, проведем через нее перпендикуляр на основание треугольника. Точку пересечения перпендикуляра с основанием обозначим буквой M. Является ли отрезок LM высотой треугольника? Почему LM нельзя назвать высотой?

— Какими свойствами должен обладать отрезок, чтобы его можно было назвать высотой треугольника?

Такое изучение понятий предохраняет от потери признаков, входящих в содержание понятия, предохраняет от ложного расширения объема понятия и позволяет избежать формального усвоения определения.

4. Термин и чертёж

Связанные с геометрическими понятиями и отношениями термины или взяты из языков других народов или принадлежат русскому языку. Первые из них труднее произносить и запоминать, вторые легче усваивать, но они таят опасность, заключающуюся в том, что некоторые учащиеся вносят в них смысл, какой эти термины имеют в разговорном языке. Каждый опытный преподаватель знает, что непродуманное использование выражений «опустить перпендикуляр», «восставить перпендикуляр», «опустить высоту» приводит к тому, что некоторые учащиеся вкладывают в них смысл, заимствованный из быта: опустить — провести сверху вниз, восставить — провести снизу вверх.

При сообщении понятий необходимо проявлять осторожность и принимать меры, предупреждающие искажение понятий под влиянием разговорной речи. Целесообразно, особенно в 6-м классе, избегать применения слов «опустить», «восставить». С успехом можно заменить их уже хорошо известным словом «провести», «построить», «изобразить». Такая замена не обойдется без некоторых трудностей: в учебниках геометрии применяются слова «опустить», «восставить».

Если нет возможности заменить термин или выражение, а ошибки, связанные с употреблением их, не исключены, то полезно тщательно разъяснить учащимся действительный смысл термина или выражения и показать, что в разговорном языке в них вкладывается иное содержание.

Например, при введении понятия о вершинах треугольника целесообразно разъяснить, что вершиной называют не только ту вершину, которая лежит выше других точек треугольника, но и вершину любого угла его. С помощью модели демонстрируются различные возможные случаи расположения треугольника, в том числе и такое, когда одна из вершин лежит ниже других точек треугольника.

Кроме указанных терминов, осторожного обращения требуют следующие: «угол», «сторона», «вертикальный», «высота», «основание» и некоторые другие.

Каждое понятие связано с термином. Разумное обучение ведется так, чтобы любой термин — носитель геометрического понятия — был надежным сигналом второй сигнальной системы каждого ученика, он должен вызывать соответствующие ему геометрические образы, воспроизведение содержания понятия и, если оно введено с помощью определения, то любой ученик должен дать и определение. И этого еще недостаточно.

При обучении геометрии сигналом служит и чертеж фигуры, соответствующий образам, входящим в объем понятия. Чертеж должен служить надежным сигналом второй сигнальной системы каждого ученика и вызывать воспроизведение соответствующего понятия с его носителем-термином и характерных признаков этого понятия. Обучение ведется так, чтобы чертеж напоминал не об отдельном образе, а о всей совокупности их, представителем которой он служит. Например, чертеж равностороннего треугольника побуждает мыслить о всяком равностороннем треугольнике. В этом отношении роли чертежа и термина равносильны.

Изложенные ранее рекомендации по сообщению геометрических понятий и направлены на то, чтобы сделать термин и чертеж надежными сигналами второй сигнальной системы каждого ученика.

Наблюдения показывают, что шестиклассники далеко не всегда видят по чертежу то, что свойственно изображенной фигуре. Если, например, изображены два прилегающих острых угла, сумма которых — острый угол, то многие из них видят только два угла и не видят третий угол. Если из одной и той же вершины треугольника проведены высота и медиана и поставлен вопрос, сколько треугольников имеет фигура, то многие учащиеся утверждают, что изображено 3 или 4 треугольника.

Умение видеть по чертежу фигуру во всей полноте со всеми деталями имеет разностороннее значение: такие навыки способствуют усвоению понятий, полезны при доказательстве теорем и при решении различного вида задач. Правильное чтение чертежа имеет и политехническое значение: оно нужно при работе в мастерской, в период производственной практики на предприятиях промышленного производства; оно необходимо и квалифицированному рабочему. Целесообразно при всех удобных случаях учить читать чертеж, видеть по чертежу фигуру полностью со всеми ее элементами и деталями. Кроме того, полезно в 6-м классе на многих уроках геометрии проводить и специальные упражнения в чтении чертежей.

Приведем примеры.

На классной доске изображены четыре луча с общим началом. Показать на чертеже все острые углы. Показать все тупые углы. Имеются ли при оценке на глаз прямые углы? развернутые углы? Показать один угол, который больше развернутого. Имеются ли еще углы, которые больше 2d?

Изображены две прямые, пересеченные третьей прямой. Покажите все пары смежных углов. Сколько пар вертикальных углов имеет фигура? Покажите все пары внешних накрестлежащих углов, внешних односторонних углов. Сколько пар соответственных углов?

В равностороннем треугольнике построены три его высоты. Сколько равнобедренных треугольников имеет фигура? Сколько среди них равных между собою? Содержит ли фигура прямоугольные треугольники? Укажите несколько прямоугольных треугольников, равных между собою. Назовите пару прямоугольных треугольников, неравных между собою. Назовите пару равнобедренных треугольников, неравных между собою. Имеются ли выпуклые четырехугольники? Сколько их?

5. Неполная индукция при изучении теорем

В 5-м классе геометрические предложения (правила) сообщаются путем демонстраций, наблюдений, опытов с последующими обобщениями; другими словами для изложения геометрических фактов применяется неполная индукция. Однако каждое решение геометрических вычислительных задач опирается на дедуктивные заключения.

В 6-м классе, с *началом изучения* систематического курса геометрии, дедукция постепенно становится ведущим методом обоснования геометрических теорем. Чтобы переход к более широкому использованию дедукции не вызвал педагогических осложнений, требуются продуманные подходы к *изложению теорем. Отвлеченное мышление* всегда имеет в своей основе чувственные данные: оно продуктивно тогда, когда опирается на них. Это особенно важно помнить и учитывать при обучении шестиклассников, делающих первые шаги в область понятийного мышления.

В силу этого неполная индукция, как метод наведения, продолжает играть заметную роль и при изложении систематического курса геометрии, особенно в 6-м классе. Ее роль разностороння. Прежде всего она применяется, чтобы навести учащихся на открытие новых геометрических фактов; при этом она дает чувственную основу последующему отвлеченному мышлению учащихся. В иных случаях неполная индукция подсказывает метод доказательства и дает чувственные данные для осознания и применения метода.

Предстоит, например, изложить теорему о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника. Каждый ученик на отдельной четвертушке бумаги изображает равнобедренный треугольник и вырезает его. Как убедиться, будут ли углы при его основании равны? Надо один угол наложить на другой, а для этого перегнуть треугольник. В результате по неполной индукции формулируется теорема. Заключение кажется особо убедительным, так как каждый ученик имел свой треугольник, отличный от треугольников других учеников, и во всех случаях углы при основании оказались равны.

Описанная кратковременная лабораторная работа полезна: она использует свойственную возрасту шестиклассников активность, учащиеся совершенствуют уменья строить треугольники, устанавливается путем неполной индукции новый факт, подготовляется чувственная основа для последующего доказательства способом перегибания.

Заключение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника сделано путем наблюдения отдельных случаев. Всякий ли равнобедренный треугольник обладает таким свойством? Ответ на этот вопрос дает доказательство теоремы.

Опытный подход можно осуществить к многим теоремам, которые изучаются в 6-м классе, например, к теоремам о равенстве треугольников, о свойстве углов с параллельными и перпендикулярными стронами[1]. Однако имеются теоремы, изучение которых не нуждается в таком подходе; например, теоремы о зависимости между сторонами треугольника, свойствах перпендикуляра и наклонных, проведенных из точки на одну и ту же прямую, столь просты и по содержанию и по доказательству, что легко усваиваются.

6. Абстрагирование методов доказательств

В геометрии применяются разнообразные способы и приемы (методы) доказательств. В современных аксиоматически построенных курсах геометрии методы доказательств обусловлены прежде всего законами логики и системой аксиом. С развитием курса методы обогащаются под влиянием фактического содержания дисциплины. По своему происхождению методы доказательств — абстракции реальных отношений между пространственными формами действительного мира и обусловлены практикой человечества. Таково происхождение всех способов доказательства, которые сопровождаются движением фигур. Человек в практической деятельности многократно выполнял наложение одной фигуры на другую, иногда оно осуществлялось после предварительного перевертывания одной из них. Из этой деятельности человека путем абстракции создается способ наложения. Человек в практике выполнял множество операций над значениями конкретных величин. Отсюда путем абстракции возникли способы доказательства, основанные на оперировании с величинами.

В школьных курсах геометрии методы доказательства устанавливаются законами логики и частично аксиомами. Кроме того, эти методы частично обусловливаются определениями. Так, например, из определения равных фигур как таких, которые можно совместить одну с другой, получается способ доказательства наложением.

Чтобы шестиклассники постепенно поняли сущность школьных геометрических доказательств и усвоили методы, первые шаги в применении многих из них целесо-

---

[1] Очерки IV, п. 3; V, п. 6, п. 7.

образно *сопровождать демонстрациями и наблюдениями* и от них переходить к мысленному применению метода, т. е. абстрагировать метод от соответствующих операций над пространственными формами действительного мира. Так, например, учащиеся знакомятся с методом перегибания фигур, с методом наложения и в частности наложения с перевертыванием одной из фигур, с центральной симметрией.

В целях конкретизации метода рекомендуется иногда доказательства, основанные на операциях со значениями величин, предварять решением частных вычислительных задач, а затем излагать общее доказательство. Например, изобразив два острых угла с соответственно параллельными сторонами, преподаватель указывает, что один из них равен 70°, и предлагает вычислить другой угол. Решение этой задачи указывает способ доказательства соответствующей теоремы. В некоторых учебниках геометрии такой подход применен при изложении доказательства теоремы о вертикальных углах. Такой подход можно осуществить при изложении теорем о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой. Однако педагогическая роль этого подхода ограничена: количество теорем, где его можно осуществить, невелико.

В связи с этим заметим, что задача преподавателя заключается в том, чтобы научить шестиклассников доказывать. Поэтому нецелесообразно подменять доказательство рассмотрением частного случая.

7. Борьба с формализмом при усвоении доказательств

Опытный учитель знает, что в 6-м классе некоторые ученики, не понимая сущности доказательства, стараются запомнить его. При проверке знаний такие ученики иногда бойко формулируют теорему, четко изображают фигуру, записывают условие и заключение и излагают доказательство. Однако нетрудно убедиться, что за формально хорошим изложением скрывается непонимание доказательства. В одних случаях достаточно изменить обозначения фигуры, в других изменить положение или форму фигуры, чтобы ученик, запомнивший доказательство, обнаружил непонимание его.

Опытный учитель знает, как вести борьбу с таким неприятным явлением. При повторении доказательства на том же уроке, на котором изложена теорема, целесообразно изменить обозначения, а, может быть, расположение фигуры на плоскости и форму ее. При повторении и проверке на следующих уроках также вносятся изменения в расположение и форму фигуры. Если, например, доказано, что вертикальные углы 1 и 2 равны, то при повторении доказывается, что $\angle 3$ и $\angle 4$ той же фигуры также равны между собой. А при повторении на следующем уроке преподаватель предлагает доказать теорему, пользуясь чертежом, иначе расположенным. Таким образом, одним из средств борьбы с рассматриваемой разновидностью формализма является изменение положения фигуры на плоскости, изменение формы ее и обозначений. Изменения положения и формы фигуры особенно важны, если доказательство сопровождается дополнительными построениями.

При изменении чертежей фигур надо соблюдать осторожность и последовательность. Чтобы трудности для учащихся возрастали постепенно, можно рекомендовать следующие экспериментально проверенные положения.

Если при доказательстве применяется одна фигура, то прежде всего целесообразно изменять положение чертежа относительно срезов листа бумаги, затем произвести допустимое изменение формы фигуры и, наконец, то и другое.

Если доказательство опирается на чертежи двух фигур, то прежде всего обе фигуры изменяются одинаково в отношении положения на плоскости, затем одинаково изменяются фигуры в отношении формы, далее используется различное изменение положения фигур или различное допустимое изменение каждой фигуры и, наконец, рассматривается доказательство при изменении и положения, и формы фигур (черт. 2).

Если доказательство сопровождается дополнительными построениями, то целесообразно выполнять такие изменения чертежа, чтобы вызывались изменения в дополнительных построениях[1].

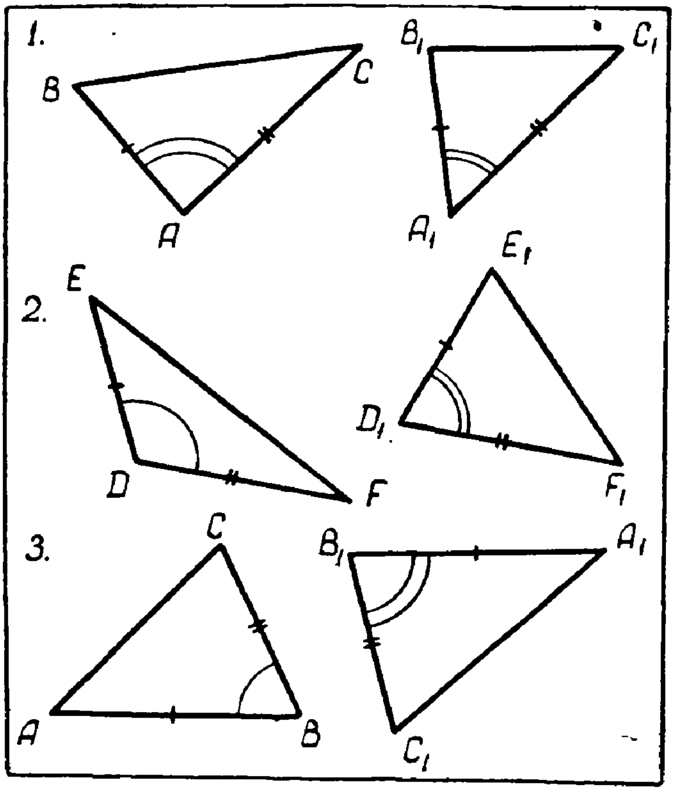
Преподаватель должен настойчиво и систематически пользоваться важным педагогическим правилом: постоянно проверяй, понимает ли ученик смысл выученного. Такая проверка необходима главным образом для того, что-

[1] Г. А. Владимирский, О методах использования чертежа в преподавании геометрии, ж. «Математика в школе» № 4, 1946.

бы своевременно вскрыть, что исказилось в понимании, и внести коррективы, а также для накапливания отметок (оценок).

Начала всякого обучения и в частности обучения геометрии сводятся к образованию многих серий условных рефлексов, к установлению связей между этими сериями. Качество обучения будет тем выше, чем эти серии рефлексов будут прочнее. Обучая доказательству теорем, необходимо вырабатывать многие серии условных рефлексов. Укажем некоторые из них в форме правил.

а) Если требуется доказать теорему, то вдумайся в ее формулировку, сделай чертеж фигуры, выясни и запиши условие, уясни и запиши заключение.



Чертеж 2

б) Доказывая теорему, обосновывай каждое свое утверждение, ссылаясь на ранее установленные предложения — аксиомы, определения, теоремы и следствия из них, а также на условие доказываемой теоремы. Это условие используй полностью.

в) Если в теореме идет речь о понятии, имеющем определение, то вспомни это определение: часто оно дает ключ к доказательству. Иногда полезно определение заменить теоремой о признаке фигуры или отношения.

г) Если требуется доказать равенство отрезков, то включи их в качестве сторон в целесообразно выбранные треугольники, если нужно, построй такие треугольники, докажи их равенство, а затем сделай заключение о равенстве отрезков.

д) Если требуется доказать равенство углов, то также включи их в целесообразно выбранные или построенные треугольники, докажи их равенство и сделай заключение о равенстве углов.

Эти серии рефлексов образуются постепенно, на протяжении всего обучения в 6-м и последующих классах и используются в педагогическом процессе при доказательстве новых теорем и решении задач на доказательство.

8. О записях и общности доказательств

В 6-м классе, особенно в первой четверти, записи мешают некоторым учащимся понимать доказательства: записи усложняют усвоение доказательств. Поэтому первые теоремы целесообразно излагать, не применяя никаких записей, кроме чертежа фигуры с обозначениями. Постепенно количество записей растет; школьники учатся выделять и фиксировать условие и заключение теоремы, а еще позднее и доказательство. При изложении главы «Параллельные прямые» доказательства фиксируются полностью. Из различных возможных обозначений фигуры выбирается простейшее: это упрощает изложение и усвоение доказательства.

Фиксация доказательства должна быть минимально краткой, но содержательной и полной. Поэтому приходится продумывать фиксацию, особенно таких доказательств, которые сложны. Недостаточная работа учителя над фиксацией влечет потерю части условия, необоснованные утверждения, а в некоторых случаях искажение доказательства.

Некоторые учителя излишне увлекаются оформлением записей: стараются фиксировать доказательство любой теоремы. Это — крайность, не обоснованная педагогическими соображениями. Если запись доказательства помогает пониманию и усвоению теоремы, то она полезна, а иногда и необходима. Если запись не обеспечивает лучшее усвоение доказательства, то она ненужна, а в иных случаях и вредна: без пользы поглощает учебное время. Например, при изложении теорем о признаках параллельности прямых запись доказательств полезна, а при изложении теоремы о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника запись доказательства излишня.

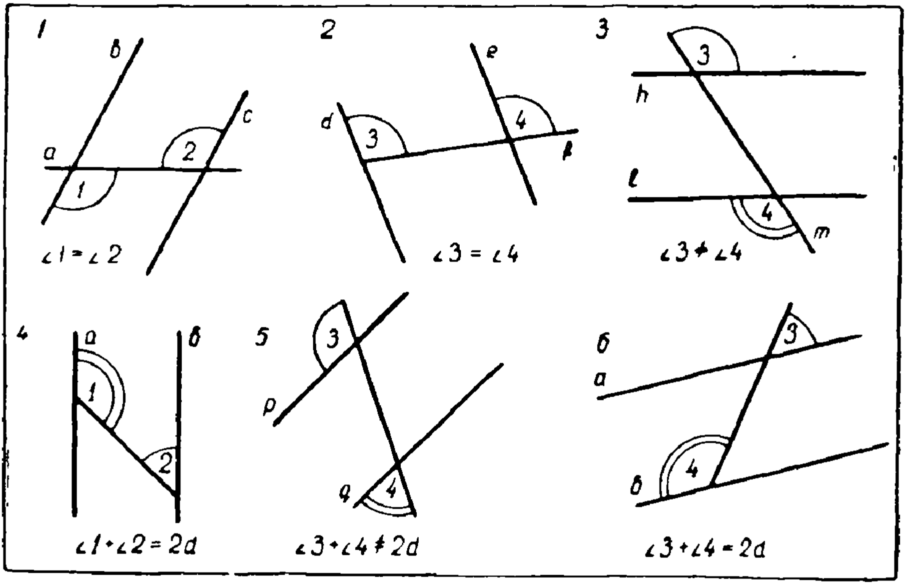
Увлечение фиксацией доказательств приводит и к тому, что некоторые учащиеся в дальнейшей работе перестают пользоваться учебником: они повторяют доказательства по тетрадям. Значит, не будет выполнена одна из задач математического образования — научить читать учебник, научить работать по книге.

В школе геометрические доказательства всегда сопровождаются изображением фигур, чертежами. Это придает изложению наглядность и конкретность, что облегчает учащимся понимание и усвоение доказательства. Однако геометрические доказательства отличаются общностью. Доказывающий негласно пользуется посылкой: доказательство, опирающееся на изображенную фигуру, верно для любой фигуры этого класса. Осознают ли шестиклассники общность геометрических доказательств?

Как показано ранее, некоторые учащиеся не осознают общности доказательств: они суживают объем класса фигур под воздействием чертежа. Выше указаны и некоторые приемы борьбы с таким влиянием чертежа.

Обучение надо вести так, чтобы каждый ученик осознавал общность геометрических доказательств. С этой целью целесообразно ставить и обсуждать вопросы, приводящие к уяснению общности теорем для фигур определенного класса. Если, например, доказана теорема о признаке параллельности прямых AB и CD по равенству двух внутренних накрестлежащих углов, то можно поставить вопросы, будет ли верно доказательство, если прямые AB и CD дальше отстоят одна от другой, чем на чертеже, если пересекающая прямая иначе расположена, если прямые AB и CD наклонны к нижнему срезу листа бумаги или перпендикулярны к нему. Обсуждение подобных вопросов также является одним из приемов, выясняющих общность геометрических доказательств и средством в борьбе с формализмом.

При повторении доказательств некоторые учащиеся нарушают последовательность рассуждений: иногда опускают существенные звенья, иногда вставляют ненужные звенья. Одним из средств борьбы за последовательность рассуждений является подчеркивание и выделение плана доказательства. Это выделение особенно ценно, если план применим к серии схожих по доказательству теорем: в этом случае план обеспечивает самостоятельное доказательство последующих теорем этой серии. При изложении, например, теорем о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой уместно указать, что доказательство этих теорем, начиная со второй, сводится к применению первой теоремы и использования свойств или вертикальных или смежных углов. Возможно указать и другой путь: каждая теорема этой серии доказывается путем противоречия[1].



Чертеж 3

Чтобы учащиеся лучше осознавали условия и заключения теорем, чтобы получали первые навыки видеть в фигу-

[1] Очерк IV, п. 4.

рах то, что дает возможность применить ту или иную теорему, рекомендуется использовать на уроках устные упражнения с целью выяснения применимости теорем. Чертежи фигур с обозначениями и краткими записями даются в настенных таблицах.

Приведем пример. Изучены теоремы о признаках параллельности прямых. На следующем уроке вывешивается таблица (черт. 3). Каждый ученик всматривается в чертеж фигуры и записи при нем, делает мотивированное заключение, будут ли прямые b и c параллельны. Учитель проверяет 2—3 учеников. Затем переходят к следующей фигуре и т. д. За 10—12 минут учащиеся повторяют теоремы о признаках параллельности и учатся применять их в конкретной ситуации.

Такие упражнения особенно уместны после изучения групп теорем, которые находят многократные применения в дальнейшем; например, по распознаванию признаков равенства треугольников, равенства прямоугольников треугольников.

9. Когда вводить понятия «аксиома» и «теорема»

На каком этапе обучения целесообразно вводить понятия аксиомы и теоремы?

Если обратиться к учебной и методической литературе, то приходится отметить различные ответы на этот вопрос. А. П. Киселев понятия различного вида математических предложений вводит одновременно в конце изучения по современной программе 1-ой главы планиметрии, т. е., примерно, на последних уроках 1-ой четверти[1]. Н. А. Глаголев понятие аксиомы вводит в самом начале курса перед первыми аксиомами, а понятие теоремы относит на конец 1-ой главы[2]. Н. Н. Никитин эти понятия вводит значительно позднее, примерно, в середине 2-го полугодия[3]. В. М. Брадис рекомендует понятие теоремы, ее структуры, понятия прямой, обратной и противоположной теорем отнести на конец первого полугодия[4]. В книге.

---

[1] А. П. Киселев, Геометрия, Учпедгиз, 1954.

[2] Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, Учпедгиз, 1954.

[3] Н. Н. Никитин, Геометрия, Учпедгиз, 1957.

[4] В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, 1954.

вышедшей под редакцией С. Е. Ляпина, не фиксируется, когда следует ввести понятие теоремы, но отмечается, что это целесообразно сделать, когда учащиеся получат представление о серии логически связанных теорем[1].

Понятия о различных видах математических предложений не связаны с фактическим содержанием геометрии или какой-либо другой дисциплины: это — логические понятия. Недопонимание некоторыми учащимися сущности этих понятий не может оказать отрицательного влияния на усвоение геометрических фактов. Поэтому эти понятия могут быть введены на различных этапах обучения. Значит, вопрос стоит только о том, когда целесообразно вводить понятия о видах математических предложений.

В школьных курсах математики понятия о различных логических операциях и связанную с логической структурой терминологию рекомендуется вводить постепенно по мере накапливания материала, который может конкретизировать эти операции и понятия. Ранее уже отмечено, что понятие определения можно и целесообразно ввести еще при изучении 1-ой главы геометрии перед тем как приступить к изложению начальных сведений об окружности.

Понятия теоремы и аксиомы разумно вводить одновременно: каждое из них оставит более надежные связи в сознании через сопоставление с другим. Эти понятия целесообразно ввести, когда будет изучено некоторое количество аксиом и такое количество теорем, что можно проследить связи между ними. Это можно сделать тогда, например, когда будет закончено изучение признаков параллельности прямых и учащиеся знакомятся с аксиомой параллельных.

Уже изложенное показывает, что солидных мотивов откладывать введение рассматриваемых понятий на более поздний срок не имеется. Это хорошо понимают многие учителя математики; например, в г. Горьком в 1956—57 и 1957—58 учебных годах некоторые учителя вводили понятия аксиомы и теоремы значительно ранее, чем предусмотрено школьным учебником геометрии Н. Н. Никитина.

В беседе восстанавливаются в памяти учащихся некоторые предложения, которые приняты после доказательств. Такие предложения называются теоремами. Уча-

---

[1] Методика преподавания математики, под ред. С. Е. Ляпина, Учпедгиз, 1952.

щиеся сформулируют определение: «Теоремой называется математическое предложение, в верности которого убеждаются путем доказательства». Приводятся еще примеры теорем, которые можно взять и из арифметики.

В связи с изучением аксиомы параллельных восстанавливаются в памяти и такие предложения, которые, вскрывая свойства геометрических фигур, принимаются без доказательства: свойства прямой, свойства отрезка. Такие предложения называются аксиомами. Дается определение: «Аксиомой называется математическое предложение, которое принимается без доказательства».

Обсуждаются вопросы, чем теорема отличается от аксиомы, почему не все предложения геометрии доказываются, почему необходимы аксиомы.

При доказательстве теоремы ссылаются на ранее доказанные теоремы. Каждая теорема, на которую ссылаются, также доказывается на основании ранее известных теорем и т. д. А как доказать первую теорему? Необходимо ввести предложения, принятые без доказательства: необходимо ввести аксиомы. Учитель может пояснить это путем рассмотрения доказательства какой-либо уже известной учащимся теоремы, например, о признаке параллельности двух прямых по равенству внешних накрестлежащих углов.

Условие и заключение теоремы учащиеся уже многократно выделяли и фиксировали. Это дает возможность обратить внимание на структуру теоремы.

Во второй части главы «Параллельные прямые» доказываются теоремы о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой. Это — серия обратных теорем по отношению теорем о признаках параллельности. Получается благоприятная обстановка, чтобы ввести понятие обратной теоремы[1].

10. Активизировать методы обучения

Любой шестиклассник — экспериментатор и строитель: он любит наблюдать, мастерить, выполнять опыты, он всегда готов к активной деятельности. Учитывая эти особенности подростка, учитель строит уроки геометрии так, чтобы максимально использовать активность учащихся, чтобы они больше действовали — изображали геометри-

---

[1] Очерк IV, п. 6.

ческие образы, работали чертежными приборами, измеряли, изготовляли модели и пользовались ими, выполняли лабораторные и практические работы. В. М. Брадис правильно и хорошо отмечает: «... подросткам легче чертить и измерять, чем рассуждать,... логической стороной курса геометрии они могут владеть лишь на основе наблюдений, построений, измерений[1]». Важно и то, что продуманное применение активных методов обучения, как свидетельствует практика, создает заинтересованность учеников геометрией, которая постепенно перерастает в устойчивый интерес, являющийся надежным условием успешного обучения.

Учитель показывает школьникам, какое значение имеют геометрические знания. Пока приложения геометрии довольно элементарны, однако и в них ученик увидит, что геометрия полезна при работе в столярной и слесарной мастерской, что она применяется в сельском хозяйстве, строительном деле, промышленном производстве и быту. Полезны связанные с курсом геометрии практические занятия и внутри школы, и под открытым небом. Такие занятия еще больше активизируют методы обучения.

Следует широко практиковать организацию самостоятельной работы учащихся на уроке. Виды ее разнообразны, продолжительность различна — от нескольких минут до целого урока. Прежде всего надо назвать лабораторные работы. В одних случаях они применяются с целью познакомить учащихся с новыми геометрическими фактами (признаки равенства треугольников, свойство углов при основании равнобедренного треугольника и пр.). В других случаях на лабораторных работах учащиеся тренируются в выполнении измерений геометрических величин (отрезков, дуг, углов) и последующих расчетах. Лабораторные работы можно использовать для приложений геометрии к решению задач, связанных с вещами или их моделями, для изготовления моделей к теоремам (сумма внутренних углов треугольника, многоугольника, сумма внешних углов многоугольника и др.).

В осенний и весенний периоды учащиеся выполняют самостоятельные работы по измерениям на поверхности земли и в частности простейшие горизонтальные съемки

---

[1] В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, 1954, стр. 352.

земельных участков многоугольной формы с последующим составлением планов.

Педагогический интерес представляет самостоятельное изучение доступного материала по учебнику, а также самостоятельное решение задач на построение, доказательство и вычисление. Особенно большое значение имеют задачи на построение.

Самостоятельная работа на уроке прокладывает путь к серьезной самостоятельной домашней работе, особенно в той ее части, которая связана с изготовлением моделей, настенных таблиц, с выполнением измерений и последующими вычислениями. Самостоятельная работа учащихся выигрывает, если учитель математики сумеет перенести выполнение некоторых заданий в мастерские (например, изготовление некоторых топографических приборов, моделей). В современных условиях самостоятельная работа приобретает особо важное значение: она — необходимое звено в тесной связи обучения с жизнью, с общественно полезным трудом.

ОЧЕРК III

ПЕРВЫЕ УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

1. Цели первых уроков. Историческая справка о возникновении геометрии

Первые уроки систематического курса геометрии имеют цели: познакомить школьников с новой для них математической дисциплиной, ввести начальные геометрические образы, являющиеся исходными для школьного курса, сообщить соответствующие основные (первичные) понятия и некоторые отношения между ними, изучить значительное количество последующих определяемых понятий и сделать первые шаги в установлении геометрических фактов путем логических обоснований. Кроме того, на первых уроках школьники знакомятся с обозначениями простейших фигур, получают некоторые навыки выражать геометрические операции с помощью этих обозначений, приобретают начальные навыки выполнять действия над величинами (отрезками, дугами, углами), учатся излагать устно описание действий, упражняются в измерении отрезков и углов, знакомятся с первыми применениями геометрических знаний в практике.

В нашем опыте первый урок по геометрии всегда начинался с краткой и яркой исторической справки о возникновении геометрических знаний, о первых шагах развития геометрии. Справка покажет, что зарождение геометрических знаний относится к глубокой древности и вызвано практическими потребностями общества; она в некоторой мере вскроет предмет геометрии и разъяснит в историческом плане название новой дисциплины. Впервые школьники услышат имена знаменитого древнегреческого математика Евклида (3-й век до н. э.) и великого математика Архимеда (3-й век до н. э.). Справка покажет, что геометрия не является совершенно новой для школьников учебной дисциплиной: многие геометрические образы уже знакомы, многие правила известны. В заключении в доступной форме выясняется значение геометрии в народном строительстве, общественном производстве, быту.

2. Введение основных геометрических понятий

Опишем, как вводятся основные понятия геометрии.

На уроке в распоряжении учителя — набор тел. Среди них и старые знакомые школьников — кубы, прямоугольные параллепипеды, цилиндры и тела, которые ранее не встречались на уроках, но знакомы из опыта — шары, пирамиды.

Рассматривая тела, подмечают, что они отличаются друг от друга материалом, весом, цветом. Эти свойства тел изучаются в других науках.

Учитель демонстрирует, например, различные прямоугольные параллелепипеды. Они имеют одинаковую форму; по форме они носят одно и то же название. В геометрии изучают форму тел.

Два куба имеют одинаковую форму, а размеры их различны. Размеры цилиндров также различны. В геометрии изучают и размеры тел.

Тела могут быть различно расположены относительно друг друга. Вот шар лежит на цилиндре, а вот шар внутри куба. В геометрии изучают взаимное расположение тел.

Учитель демонстрирует куб и предлагает вообразить куб, размеры которого больше того, который видели. Каждый вообразил тело.

Когда рассматриваем форму тела, его положение относительно других тел, его размеры, то имеем дело с геометрическим телом.

Какие геометрические тела нам уже известны? Сколько измерений имеет прямоугольный параллелепипед? Как они называются? Каждое геометрическое тело имеет три измерения.

Аналогично с понятием тела вводятся понятия поверхности, линии, точки, прямой.

Каждое геометрическое тело ограничено со всех сторон. Покажите границы цилиндра сверху, снизу, с боков. Граница тела — поверхность. Покажите поверхность каркасного куба. В этом случае поверхность тела мы вообразили. Поверхность не имеет толщины, но имеет длину и ширину. Какие задачи решали о поверхностях?

В окружающем нас мире поверхность всегда связана с телом. Однако можно представить, вообразить поверхность отдельно существующей. Например, можем представить боковую поверхность цилиндра, половину поверхности шара.

В цилиндре границей между основанием и боковой поверхностью служит линия. Это — знакомая линия. Как она называется? Покажите линии на кубе, на пирамиде. Граница между двумя частями поверхности есть линия. Покажите линии в окружающей обстановке. Сколько измерений имеет линия?

Линии мы наблюдаем на телах, поверхностях; они не существуют отдельно, но можно представить, что линия существует отдельно. Вообразите окружность и обведите ее острием карандаша.

Ребро куба оканчивается в его вершине. Конец линии — точка. Покажите точки на пирамиде, в классной комнате. Точку можно указать не только на конце линии. Отметим, например, середину ребра куба, середину грани его. Это — точки.

Точки наблюдаются на телах, поверхностях, линиях; они не существуют отдельно. Однако можно представить, что точка существует отдельно. Точка не имеет измерений. Она изображается на бумаге уколом острия ножки циркуля, нажимом острия карандаша. Чтобы отличать, о какой точке идет речь, их обозначают большими буквами латинского алфавита. Говорят: «точка *A*», «точка *B*».

Как отмечаются точки на поверхности земли? На асфальте, как на классной доске, можно отметить точку мелом, на земле — положить маленький камешек. Однако отмеченные таким способом точки легко потерять. Поэтому часто в землю вбивают заостренные с одного конца деревянные колышки длиною, примерно, в 3 *дм*. Когда необходимо наблюдать точки на поверхности земли издалека, то отмечают их вехами. Иногда требуется, чтобы точка на земле сохранялась много лет. В таком случае в землю врывают дубовые столбы; так, например, отмечают точки на межах земель совхоза или колхоза, вершины лесных кварталов. При геодезических работах, имеющих государственное значение, в землю закладывают бетонные блоки в форме усеченных пирамид, на верхних основаниях которых проводят две черты, пересечение которых и служит точкой. Такие точки иногда приходится наблюдать за 10—20 и более километров. Поэтому над бетонными блоками строят металлические или деревянные вышки.

Любую совокупность точек, линий, поверхностей, тел называют геометрической фигурой. Учитель демонстрирует несколько фигур.

Теперь возможно описать предмет геометрии. Геометрия — наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение фигур.

Далее вводится понятие прямой, ее обозначение и изображение[1].

Изобразим в тетрадях и на доске точку. Обозначим ее буквой *O*. С помощью линейки проведите через точку *O* несколько прямых. Много ли прямых можно провести на странице тетради через точку *O*?

Изобразим две точки *A* и *B*. Аккуратно приложите к ним ребро линейки и проведите прямую. К тем же точкам приложите ребро линейки с другой стороны и проведите прямую. Прямые слились: получилась одна прямая. Повторим этот опыт еще раз.

Если через две точки проводить кривые линии, то таких линий можно провести много.

Получили важное свойство прямой: «Через две точки можно провести прямую и притом только одну».

Выполняются упражнения.

а) Изобразите прямую *a*. Отметьте на ней точку *B*. Отметьте еще точки *C* и *Д*. Можно ли на прямой указать 4, 5 точек? Сколько точек имеет прямая? Отметьте точку которая не лежит на прямой *a*.

б) Острие иглы — точка, острие другой иглы — точка. Вообразите прямую, проходящую через эти точки.

[1] Очерк II, п. 1.

В принятом в школе учебнике геометрии Н. Н. Никитина 1-я гл. называется «Основные понятия». Так как в ней вводятся не только основные понятия, но и большое количество определяемых понятий, то было бы целесообразно изменить название этой главы.

Сколько таких прямых можно вообразить? А сколько можно вообразить кривых линий, проходящих через эти две точки? Покажите одну из них, другую.

в) Даны три точки A, B, C. (Изображаются точки, не принадлежащие одной прямой). Сколько всего прямых можно провести, чтобы каждая проходила через две данные точки?

г) Даны четыре точки. (Изображаются такие точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой). Сколько всего прямых можно провести, чтобы каждая из них проходила через две данные точки?

Рассматривается вопрос, как можно проверить чертежную линейку, при этом надо подвергнуть проверке правильную и неправильную линейку.

Далее вводятся понятия луча, отрезка прямой и их обозначения. Чтобы термины, связанные с этими понятиями, включить в словарный фонд каждого ученика, выполняются упражнения по вычерчиванию и обозначению отрезков и лучей в различных положениях на плоскости.

3. Понятие о величине

Современная математика, базирующаяся на теоретико-множественных воззрениях, не нуждается в понятии величины; оно относится к числу сданных в архив истории.[1] Однако в развитии математики это понятие играло существенную роль. Аксиомы о величинах интересовали древних греков: они нашли место в «Началах» Евклида. Решение задач об измерении величин способствовало введению новых классов чисел. Тесная связь между величиной и числом соответствует историческому и логическому развитию понятия числа.[2] Современные курсы математического анализа, следуя заветам классического или малого анализа, нередко начинаются введением понятия величины.

В силу приведенных соображений это понятие находит широкое использование в преподавании. В школе с политехническим обучением интерес к нему обусловливается и тем, что «измерение величин является исходным пунктом всех приложений математики»[3]. Об измерении

[1] А. Н. Колмогоров, Предисловие к книге Г. Лебега «Об измерении величин», Учпедгиз, 1938.

[2] И. В. Арнольд, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1939.

[3] Г. Лебег, Об измерении величин, стр. 14.

некоторых величин идет речь при изучении арифметики в начальной школе, в 5 и 6-м классах. Конкретные величины, их изменение, зависимость между ними используются в алгебре. В курсе геометрии встречаются несколько величин. Уже на первых уроках приходится иметь дело с отрезком, дугой, углом.

Понятие величины — основное, а поэтому не может быть введено путем логического определения.

Величинам присущи некоторые свойства: а) сравнимость: если даны два значения какой-либо величины, то между ними существует одно из следующих соотношений — равно, больше, меньше; б) слагаемость: если даны два значения какой-либо величины, то по ним можно найти вполне определенное третье значение той же величины, равное сумме первых двух; в) измеримость: если какое-либо значение величины принято за единицу, то любое значение той же величины можно измерить единичным значением, т. е. поставить измеряемому значению в соответствие число; г) непрерывность: если выбрана единица измерения, то любому действительному числу промежутка *(a, в)*, границы которого определяются особенностями величины, соответствует определенное значение этой величины.

Свойства величин указываются аксиомами, тем самым понятие величины косвенно определяется через аксиомы.

Перечисленные свойства величин определяют подходы к их изучению в курсе геометрии. Для каждой новой величины прежде всего устанавливается сравнимость ее различных значений, затем слагаемость, определяется сумма и рассматриваются другие действия, так или иначе сводящиеся к сложению, далее изучается измеримость и средства измерения. Нет возможности вести речь о непрерывности ввиду сложности этого вопроса; однако непрерывность без особых рассуждений принимается (например, прямую, окружность мыслим непрерывными).

4. Отрезок прямой

Отрезок — первая геометрическая величина, с которой учащиеся встречаются в школьном курсе и со значением которой они могут выполнять действия. Школьники учатся производить различные операции над отрезками — сравнивать, складывать и вычитать, умножать и делить их на положительные рациональные числа. Они приобретают первые навыки описывать эти операции, что обогащает их речь и подготовляет переход к более сложным рассуждениям. Решая начальные задачи на построение, они получают полезные уменья и навыки пользоваться линейкой и циркулем. Записи выполненных действий над отрезками приучают выражать мысли путем условных обозначений, а это подготовляет применение обозначений при доказательствах.

Для установления соотношений равенства или неравенства отрезков используется наложение Первое знакомство с наложением сопровождается демонстрациями. В распоряжении учителя «отрезки» — узкие полоски чертежной бумаги — белые, голубые и красные — и «точки» — кнопки. Сравнивая отрезки AB (белый) и CD (красный), учитель демонстрирует наложение одного отрезка на другой. Отрезки совместились; они называются равными; записываются: $AB=CD$. Сравнивая наложением отрезков AB (белый) и отрезок EF (голубой), убеждаемся, что отрезок AB больше отрезка EF. Записывают: $AB>EF$ или $EF<AB$. Вводится описание, какие отрезки называются равными.

Сравнение отрезков, изображенных на бумаге, выполняется при помощи циркуля. При упражнениях рекомендуется вычерчивать отрезки в различных положениях по отношению друг к другу, а равно и к срезу листа бумаги.

Сравнивать отрезки можно и путем измерения. Если отрезки расположены так, что циркуль не дает возможности один отрезок перенести на другой (например, отрезки зафиксированы на поверхности земли), то они сравниваются путем измерения.

В предыдущие годы дети выполняли измерения на уроках арифметики и ручного труда, при работе в мастерских и на поверхности земли. Накопленный ими опыт является основою для измерения отрезков в 6-м классе. Задача заключается в том, чтобы этот опыт совершенствовать и углублять.

Иногда наблюдается, что вопрос об измерении отрезков ставится слишком узко. Например, измеряют отрезки, изображенные на странице тетради масштабной линейкой. Опускают измерение отрезков на поверхности земли. В условиях политехнического обучения это — ошибочная позиция.

Надо учить измерять отрезки, начерченные в тетради, масштабной линейкой, надо учить брать отрезок циркулем и переносить его на масштабную линейку. При этом длины отрезков целесообразно выражать в миллиметрах: в машиностроительном деле обычно длины отрезков выражают в миллиметрах. Иногда приходится слышать такие указания учителя: «Измерьте длину отрезка циркулем!». Циркулем длину отрезка измерить нельзя; циркуль в этом деле служит для переноса отрезка на масштабную линейку.

Всякое измерение дает приближенное значение длины. Поэтому при записях надо пользоваться знаком приближенного равенства: $AB \approx 43$ *мм*.

Надо учить измерять длины отрезков в школьном помещении. Измерение производится метрами с помощью рулетки. Отсчет делается до 0,01 *м*.

На поверхности земли измерение выполняется в метрах рулеткой; отсчеты делаются с точностью до 0,1 *м*. Целесообразно один из уроков провести на местности. Можно выполнить, примерно, следующие упражнения: а) провешить отрезок AB, концы которого отмечены вехами, б) продолжить отрезок CD за один из его концов, в) найти длину отрезка AB, г) на местности дан треугольник ABC, найти длины его сторон. Для занятий на местности учащиеся организуются в бригады по 5 человек в каждой. Бригада получает рулетку или мерный шнур, 10 шпилек, 5 вех. Полезно упражнять в глазомерном определении длин отрезков с последующим более точным измерением; погрешность может быть выражена в процентах.

5. Действия над отрезками

Действия над отрезками прямой выполняются циркулем и линейкой. Школьники учатся описывать процесс построения и фиксировать результаты.

Требуется найти сумму отрезков AB и CD. Рассуждают примерно так: возьмем луч OP, с помощью циркуля отложим на нем от точки O отрезок OM, равный AB, а затем отложим в том же направлении от точки M отрезок MN, равный CD; получим отрезок ON, равный сумме отрезков AB и CD. Записываем: $AB+CD=ON$.

Выполняются упражнения.

1) Найти сумму трех данных отрезков a, $в$ и c.

2) Отрезок AB представить в виде суммы трех слагаемых.

3) Проверить, что при сложении отрезков выполняется переместительный закон.

4) Проверить, что при сложении отрезков выполняется сочетательный закон.

5) Построить отрезок, равный периметру треугольника, четырехугольника, ломаной линии $ABCD$.

6) Построить разность отрезков AB и CD.

7) Между точками A и B построен отрезок AB и ломаная AMB. Проверить, что $AB < AM + MB$.

8) Проверить, что отрезок AB короче ломаной $AMNB$.

Упражнения, аналогичные последним двум, приводят к формулировке предложения, которое в программе называется свойством отрезка: «Отрезок прямой короче всякой другой линии, соединяющей его концы». Это предложение было введено великим греческим математиком Архимедом (около 287—212 до н. э.) как аксиома. Оно может быть доказано. Значит, имеем дело с зависимой аксиомой. По педагогическим соображениям в школьных курсах допустимы такие аксиомы: введение их дает возможность упрощать изложение, сокращать количество теорем и быстрее продвигаться в познании пространственных форм и отношений[1].

В связи с умножением отрезка на целое число выполняются упражнения:

1) Построить отрезок в 3, в 4 раза больше данного отрезка AB.

2) Построить отрезок x, если $x=5a$, $x=3a+2в$, $x = 4a - 3в$, где a и $в$ — данные отрезки.

Пока деление отрезка на равные доли можно выполнить циркулем путем последовательных проб и испытаний, как это рекомендуется в стабильном учебнике. Программа такое деление называет приближенным.

Построить отрезок, равный $\frac{m}{n}$ данного отрезка AB, можно и путем измерения. Пусть требуется построить от-

[1] Сведения о зависимой аксиоме даны для учителя.

резок, равный 0,6 данного отрезка AB. Находим длину AB; $AB \approx 91$ *мм*. Тогда $0,6AB \approx 55$ *мм*. Строим отрезок MN, равный 55 *мм*. Получаем: $MN \approx 0,6\ AB$.

Приводим упражнения.

1) Построить отрезок x, если $x = 0,5a$, $x = \frac{1}{3}a$, $x = 0,4\ a$, $x=0,75\ a$, где a — данный отрезок.

2) Построить отрезок y, если $y=2a+0,5в$, $y=\frac{2}{3}a + 3в$, $y=3a—0,8в$, $y=2,5a—0,5в$, где a и $в$ — данные отрезки.

Действия над отрезками займут около 3 уроков. Проводится 20-минутная контрольная работа. Каждый ученик получает билет с двумя упражнениями примерно такого содержания: а) Дан треугольник. Построить отрезок, равный периметру треугольника. б) Построить отрезок $x=3a—в$, где a и $в$ — данные отрезки. В билете изображаются и треугольник, и данные отрезки.

6. Плоскость

Поверхности геометрических тел разнообразны по форме; боковая поверхность цилиндра отлична от поверхности шара и от поверхности куба. Выделим один вид поверхностей. Представим поверхность хорошо отшлифованного обыкновенного зеркала. Такую поверхность называют плоскостью Представление о плоскости дает также поверхность воды, находящейся в покое. Учащиеся указывают плоскости в окружающей обстановке. Поверхности потолка, стены, грани куба, если пренебречь изъянами отделки, также дают представление о плоскости.

В окружающей обстановке наблюдаем «куски», части плоскостей. Мы полагаем, что плоскость простирается бесконечно во все стороны.

Столяр делает чертежную доску. Требуется, чтобы верхняя поверхность доски была частью плоскости. Как столяр проверяет, будет ли верхняя поверхность плоскостью? Он прикладывает к поверхности доски ребро хорошо проверенной линейки и смотрит, лежит ли ребро на поверхности. Он прикладывает ребро в разных местах и в разных направлениях. Если ребро при любом прикладывании целиком лежит на поверхности, то такая поверхность — плоскость.

Плоскость обладает свойством: «Прямая, имеющая две общие точки с плоскостью, целиком лежит на этой плоскости».

Геометрические фигуры можно разделить на два вида: одни, как, например, прямоугольник, треугольник, лежат в плоскости, другие, как например, куб, цилиндр, не могут принадлежать плоскости. Часть геометрии, в которой рассматриваются фигуры, лежащие в плоскости, называется планиметрией.[1]

7. Угол

Угол — вторая геометрическая величина, с которой встречаются учащиеся на первых уроках. Имеются понятия, которые путем применения наглядности легко осознаются и усваиваются, а определения их или трудны, или несовершенны. К числу таких понятий относится и угол. В методической и учебной литературе предложено значительное количество разнообразных попыток определить понятие угла. Однако признать их приемлемыми для школьного обучения не всегда возможно. Приведем некоторые из них:

а) «Угол есть часть плоскости, заключенная между двумя лучами, имеющими общую вершину». Два луча с общей вершиной рассекают плоскость на две части. Какую же из них считать заключенной между лучами? Какую часть плоскости заключает полный угол? «Определение» недостаточно четко определяет угол. Оно мало удобно и для последующего расширения понятия угла.

б) «Углом называется фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки». Два луча образуют бесчисленное множество углов. О каком же из них идет речь в «определении»? Иногда пытаются улучшить формулировку указанием, что в дальнейшем рассматриваются углы, которые меньше развернутого. Такое ограничение объема понятия можно сделать после того, как будет введено понятие о развернутом угле. При обучении ограничение часто нарушается: рассматриваются

---

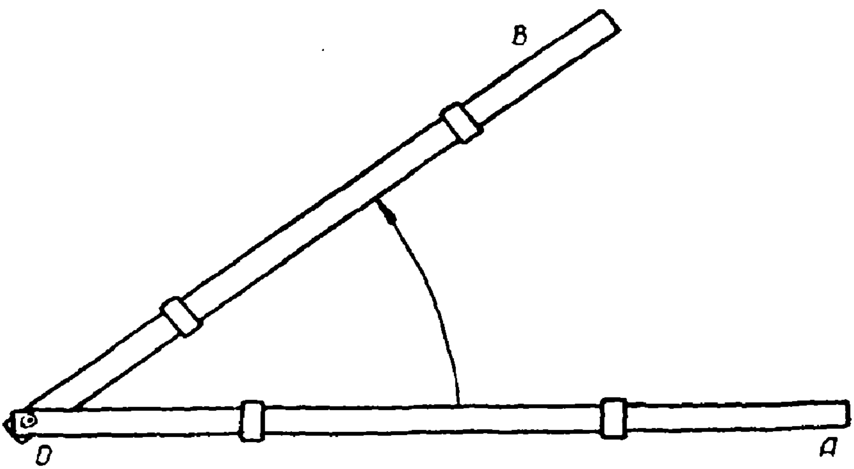
[1] Планиметрия — от латинского *planum* — плоскость и греческого μετρεω — измеряю.

сумма смежных углов, сумма прилежащих углов, образующих полный угол, сумма внутренних углов треугольника и многоугольника. Ограничение объема понятия делает сложение не всегда выполнимым: не для всякой пары углов можно найти сумму, которая меньше развернутого угла.

в) «Углом AOB называется совокупность всех лучей, исходящих из точки O и пересекающих отрезок AB». Определение не вызывает возражений с логической точки зрения, но оно неприемлемо по педагогическим соображениям: необходимо вводить новые определения при расширении понятия.

Приведенные примеры показывают, насколько разнообразны подходы к понятию угла, и вместе с тем вскрывают слабые стороны определений. Как же ввести понятие угла?

Введение понятия угла сопровождается широким применением наглядности. Используются шарнирные модели углов с раздвижными сторонами (черт. 4), складной металлический метр, классный циркуль как модель шарнирного угла.



Чертеж 4

Применяется шарнирная модель угла, сделанная из узких полосок чертежной бумаги; «стороны» угла могут удлиняться. Представим, что эти полоски — лучи имеют общее начало точку O. Первоначально оба луча совпадают и занимают положение OA. Один из них (голубой) оставим в том положении, какое он занимает, а другой (белый) будем вращать в плоскости доски вокруг начала O. После вращения второй луч занял определенное положение OB. Какая фигура получилась? Получился угол AOB. Продолжим вращение луча OB в том же направлении. Получим другой угол AOC. Таким путем можно образовать сколько угодно углов.

Изобразим угол на доске и в тетрадях. OA — первый луч, OB — второй луч. Точка O — общее начало лучей — называется вершиной угла, лучи OA и OB — сторонами угла. Учитель сообщает, как принято обозначать углы. На чертеже нельзя изобразить полностью стороны угла: изображают части лучей, примыкающие к вершине угла. Стороны угла — лучи: они продолжаются от вершины бесконечно.

Учащиеся показывают углы в окружающей их обстановке и вспоминают, что ранее им встречались прямые углы (в прямоугольниках) и другие углы (в треугольниках, четырехугольниках).

С помощью складного метра преподаватель демонстрирует, как вращением получить развернутый угол, угол больше развернутого, полный угол.

Описанное введение понятия угла избегает логически несовершенных или сложных определений, тем самым понятие угла относится к числу основных. Опираясь на наглядность, школьники получат правильное представление, что такое угол. Путь, который прошел подвижный луч естественно устанавливает внутреннюю область угла, а это освобождает от необходимости говорить об этой области. Угол предстал перед учащимися в процессе становления, в процессе образования; это подготовляет понимание угла как особой величины. Получение угла вращением луча вокруг его начала естественно приводит к понятию развернутого и полного угла и допускает дальнейшее расширение понятия, когда это потребуется.

8. Действия над углами

Далее предстоит установить сравнимость, слагаемость и измеримость углов.

К сравнимости углов целесообразно подойти путем демонстрации шарнирных моделей. Пусть луч OA неподвижен. Луч OB вначале совпадает с лучем OA, а затем вращается вокруг точки O, занимает некоторое положение и образует с лучом OA угол AOB. Пусть третий луч OC также вначале совпадает с лучом OA, затем начинает вращаться и занимает определенное положение, образуя с лучом OA угол AOC. Какой из этих углов больше? Как сделать, чтобы углы получились равные? Как записать равенство и неравенство углов?

Демонстрируется и описывается наложение модели одного угла на модель другого в случае равных и неравных углов. Учащиеся описывают воображаемое наложение одного угла на другой, когда углы начерчены, и записывают соотношения между ними. Подготовлено введение понятий о равных и неравных углах.

Вводится определение равных углов: «Два угла называются равными, если один можно наложить на другой так, что они совместятся». Определение неравных углов можно не вводить, однако ученики должны ясно знать и уметь разъяснять, какой угол больше или меньше другого.

Путем наложения устанавливается, что развернутые углы равны, что полные углы равны. Это — первые теоремы. При изложении их требуется, чтобы школьники осознали условие и заключение и поняли процесс наложения. Доказательство не фиксируется; изображаются только фигуры с обозначениями.

Пока в распоряжении учащихся нет средств строить угол, равный данному. Это ограничивает возможности выполнять действия над углами. Дело сводится только к тому, чтобы учащиеся осмыслили возможность выполнения действий.

Каждый ученик из бумаги для рисования делает несколько моделей (3—4) углов различной величины. Стороны каждого из них прочерчиваются цветным карандашом. Более крупные модели изготовляются для демонстрации на классной доске.

По моделям на доске и в тетрадях вычерчивают два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$. Требуется их сложить. С помощью соответствующей модели вычерчивается угол, равный $\angle 1$; применением модели, соответствующей $\angle 2$, выполняется приложение этого угла. Получается $\angle ABC$, который является суммой $\angle 1$ и $\angle 2$. Записывается: $\angle 1 + \angle 2 = \angle ABC$[1].

Таким же способом можно найти сумму трех углов.

На отдельных листках бумаги выполняется дважды сложение двух углов в разном порядке, вырезают полученные углы и наложением убеждаются, что они равны. Так как опыт выполнен над различными парами углов, то делается заключение, что сумма углов подчиняется переместительному закону.

Показывается выполнимость сочетательного закона; наложением меньшего угла на больший находится разность углов; выполняется умножение угла на целое число; перегибанием модели угла получается половина данного угла. Вводится понятие биссектрисы. Можно получить $\frac{1}{4}\angle 1, \frac{3}{4}\angle ABC$. Каждое действие над углами сопровождается записями в тех или иных обозначениях.

Таким путем формируются представления о различных операциях над углами. Когда будет введен транспортир, к действиям над углами целесообразно вернуться.

С понятием прямого угла школьники знакомы. Они легко найдут прямые углы в окружающей обстановке. Прямой угол определяется как половина развернутого. Из определения получается очевидное следствие: все прямые углы равны. Для изображения и проверки прямого угла в столярном и слесарном деле применяется угольник, уже знакомый по работе в мастерских. На бумаге прямые углы часто изображаются с помощью чертежного треугольника. Чтобы учащиеся не сузили объем понятия, вычерчиваются прямые углы в различных положениях.

Понятие о прямом угле приводит к понятию перпендикулярности двух прямых. Перпендикулярные прямые также изображаются в различных положениях[2].

Доказывается теорема: «К данной прямой через данную на ней точку можно провести только один перпендикуляр». При изложении доказательства фиксируется только чертеж фигуры. Теорема доказывается путем приведения к абсурду. Однако было бы преждевременным вскрывать сущность метода.

[1] Для построения угла, равного данному, можно использовать малку.

[2] Перпендикуляр — от латинского perpendiculum — отвес.

Рассматривается вопрос о проверке угольника и чертежного треугольника, при этом надо продемонстрировать правильный и неправильный треугольники и угольники.

При правильном обучении уже в 5-м классе учащиеся познакомились с эккером и работали с ним на поверхности земли. Основное назначение эккера — строить прямые углы на поверхности земли. С помощью эккера решаются две основные задачи: а) к данной на местности прямой в данной на ней точке провести перпендикуляр, б) к данной на местности прямой через точку, не лежащую на ней, провести перпендикуляр. Пока из этих двух задач возможно рассмотреть только первую. Ее решение выполняется в классе. Применение эккера можно продемонстрировать и на классной модели полигона путем использования миниатюрных моделей эккера и вех.

Вводятся понятия об остром и тупом углах.

9. Что излагать дальше?

Действия над дугами

Дальнейшее изложение первой главы может идти по двум вариантам. При 1-ом варианте вводятся понятия смежных и вертикальных углов, изучаются соответствующие теоремы, рассматриваются свойства прилежащих углов, расположенных по одну и по обе стороны прямой, решаются вычислительные задачи, в которых в качестве меры углов используется прямой угол, дается понятие об окружности и других образах, связанных с нею, и вводится градусное измерение.

При 2-ом варианте вводится понятие об окружности и связанных с нею образах, излагается градусное измерение, которое применяется к выполнению действий над углами, а затем изучаются смежные и вертикальные углы, прилежащие углы, расположенные по одну и по обе стороны прямой, решаются задачи, в которых используется градус в качестве меры углов.

Какой из вариантов заслуживает предпочтения?

С точки зрения системы курса геометрии возможны оба варианта. 2-ой из них имеет преимущества: начатое изучение углов получает естественное завершение в измерении углов. В 1-ом варианте измерение углов отодвигается на конец главы. Иногда высказывают мысль, что этот вопрос решается введением прямого угла. Однако прямой угол непригоден для непосредственного измерения.

С педагогической точки зрения 2-ой вариант заслуживает предпочтения. Более раннее введение градусного измерения дает возможность активизировать работу учащихся и раньше включить новый измерительный прибор — транспортир; появляется возможность выполнять действия над углами путем измерения. Как свидетельствует опыт, градусная мера углов облегчает решение задач на вычисление; использование прямого угла затрудняет решение, так как опирается на сложение и вычитание одночленов, а эти операции еще не изучены.

Целесообразно принять 2-ой вариант.

При изучении начальных сведений об окружности учащиеся встречаются с некоторыми теоремами При их изложении и усвоении целесообразно развивать уменья выделять и фиксировать условие и заключение.

Доказательства не фиксируются.

В этой части главы вводится новая геометрическая величина — дуга. Прежде всего выясняется вопрос о сравнимости дуг одной и той же окружности, устанавливается, какие дуги называются равными, в каком случае одна дуга больше или меньше другой.

В распоряжении учащихся имеются эффективные средства выполнять над дугами те же действия, какие выполнялись над отрезками. Прежде всего школьники учатся откладывать от данной на окружности точки в указанную сторону дугу, равную данной дуге. Дана $\smile AB$ и точка C той же окружности. Построить дугу CD вправо от точки C, чтобы $\smile CD = \smile AB$. Берем циркулем хорду AB и отложим ее так, чтобы один конец находился в точке C, а другой в точке D на окружности справа от C. По известному предложению заключаем, что $\smile CD = \smile AB$.

Теперь легко показать слагаемость. Пусть даны две дуги одной и той же окружности: $\smile AB$ и $\smile CD$. Требуется их сложить.

Отметим на той же окружности точку M. Как только что описано, построим $\smile MN = \smile AB$ и $\smile NP = \smile CD$. Получаем:

$$\smile AB + \smile CD = \smile MP.$$

Можно выполнить следующие упражнения:

а) Показать, что сумма двух дуг обладает переместительным свойством.

б) Найти сумму трех дуг: $\smile AB$, $\smile CD$, $\smile EF$.

в) Показать, что сумма трех дуг обладает сочетательным свойством.

г) Найти разность двух дуг: $\smile AB$ и $\smile CD$.

д) Построить дугу, равную $\smile AB + \smile CD - \smile EF$, $\smile AB - \smile CD - \smile EF$.

е) Построить дугу, равную $2\smile AB$. $5\smile AB$, $3\smile AB + \smile CD$, $4\smile AB - 3\smile CD$.

Деление дуги на несколько равных долей выполняется циркулем путем проб.

ж) Найти дугу, равную $\frac{1}{2}\smile AB$, $\frac{1}{3}\smile AB$, $\frac{3}{4}\smile CD$.

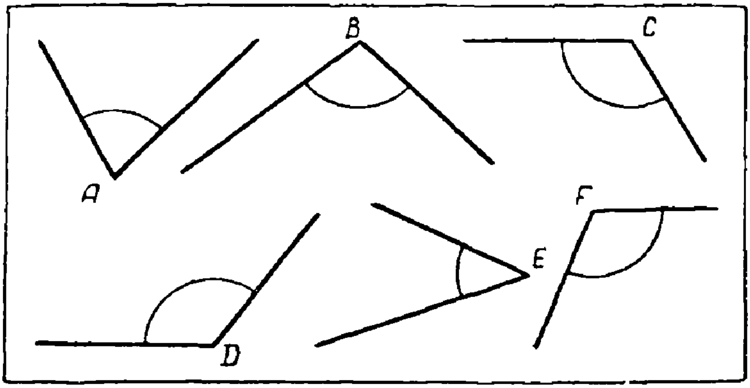
з) Построить дугу, равную $2\smile AB - 0{,}5\smile CD$, $\frac{2}{3}\smile AB + \frac{3}{4}\smile CD$.

10. Работа транспортиром

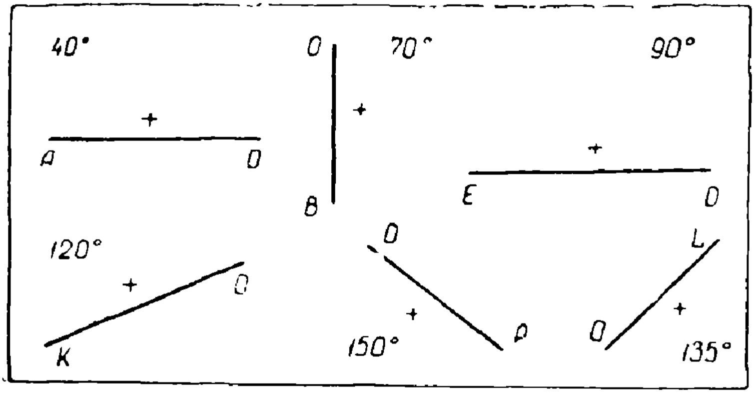
С помощью транспортира и линейки решаются две основные задачи: а) измерить данный угол, б) построить угол, содержащий заданное число градусов.

Чтобы приобрести некоторые навыки в применении транспортира, недостаточно выполнить измерение 2—3 углов, изображенных на классной доске. Полезно организовать самостоятельную работу учащихся по измерению углов. Учитель вычерчивает серию углов на доске (черт 5). Учащиеся на глаз изображают примерно такие же углы в тетрадях. Каждый из них выполняет измерение всех углов и результаты записывает около соответствующих чертежей. Каждая пара учащихся проверяют друг друга. Беглый просмотр работ позволяет вскрыть и устранить грубые ошибки. Если окажется, что учащиеся испытывают затруднения в измерении, допускают ошибки, то самостоятельную работу целесообразно повторить на следующем уроке.

Уместно провести лабораторную работу и на построение углов. На доске вычерчиваются лучи. Начало каждого — точка O (черт. 6). Знаком $+$ отмечена полуплоскость, в которой должен расположиться второй луч угла. Указывается мера угла. Школьники переносят изображения лучей в тетради. Каждый ученик строит все углы. Проверяют друг друга соседи. Беглый просмотр вскрывает грубые ошибки.



Чертеж 5



Чертеж 6

Открываются широкие возможности выполнять действия над углами с помощью транспортира и линейки. При этом построения носят приближенный характер.

Пусть требуется построить $\angle A = 2\angle 1 - \frac{1}{2}\angle 2$, где $\angle 1$ и $\angle 2$ — данные. Ученик измеряет $\angle 1$ и $\angle 2$ и записывает:

$$\angle 1 \approx 74^1/_2^\circ, \qquad 2\angle 1 \approx 149^\circ$$

$$\angle 2 \approx 132^\circ, \qquad \frac{1}{2}\angle 2 \approx 66^\circ$$

$$\overline{\angle A \approx 83^\circ}$$

Ученик строит $\angle A$, равный 83°.

Примерные упражнения:

а) Построить угол, равный сумме углов A и B.

б) Начертить угол, равный сумме $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

в) Начертить треугольник, измерить его внутренние углы и найти их сумму.

Повторить это упражнение еще с двумя треугольниками.

г) Построить угол, равный разности углов A и B.

д) Построить угол A, если $\angle A = 2\angle 1 + 3\angle 2$, $\angle A = 4\angle 1 - 2\angle 2$, $\angle A = \frac{1}{2}\angle 1$, $\angle A = \frac{2}{3}\angle 1 + \frac{1}{4}\angle 2$.

Уместно познакомить учащихся, как выполняется измерение углов на местности. Учитель демонстрирует и описывает устройство школьного учебного угломера, предназначенного для измерения углов в горизонтальной плоскости. Угломер как и транспортир служит для выполнения тех же двух основных задач.

Если условия позволяют, то учитель проводит урок на местности, основная цель которого привить некоторые уменья работать с учебным угломером.

Содержание урока примерно таково: а) измерить заданный на местности угол, б) на заданном луче по указанную сторону построить угол, равный, например, 60°, в) построить прямой угол, г) измерить внутренние углы треугольника и найти их сумму. Каждый угол измеряется дважды, находится среднее арифметическое результатов этих измерений. Учащиеся организуются в бригады по 5 человек. Каждая бригада получает угломер и 4 вехи.

Упражнения по измерению углов можно провести и в классной комнате или зале. Их можно продемонстрировать на классном полигоне с миниатюрным угломером и вехами, а выход на местности сделать весной.

И в классной комнате, и на местности полезно упражнять школьников в глазомерном определении величины угла с последующей проверкой и выражением допущенной погрешности в процентах.

11. Чтение чертежа

При изучении начальных сведений по систематическому курсу геометрии полезны упражнения в чтении чертежей[1].

Приводим примеры таких упражнений.

а) На прямой отмечены три (четыре) точки. Показать на чертеже все отрезки. Сколько всего отрезков? Показать все лучи. Сколько всего лучей?

б) На окружности указаны три (четыре) точки. Показать все дуги, которые меньше 90°. Показать все дуги, которые меньше полуокружности. Показать несколько дуг, которые больше полуокружности.

в) Из точки A в плоскости проведены три (четыре) луча. Показать все острые углы, все тупые углы. Сколько всего углов, которые меньше развернутого? Показать некоторые углы, которые больше развернутого.

г) Из центра окружности проведены три (четыре) луча. Сколько всего дуг, каждая из которых меньше полуокружности? Показать некоторые дуги, которые больше полуокружности. Сколько фигура имеет углов, каждый из которых меньше развернутого?

д) В окружности проведен диаметр AB. Проведите хорду, перпендикулярную AB. Сколько таких хорд можно провести? Какая из этих хорд будет самая большая?

е) Начертите острый и тупой угол. Определите на глаз, сколько градусов в каждом из них. Измерьте углы транспортиром. Выразите в процентах погрешность, какую вы допустили при оценке величины угла на глаз.

Упражнения в чтении чертежей проводятся на многих уроках. Сюжеты их могут повторяться, а чертежи видоизменяются.

12. Подготовка к использованию доказательства способом противоречия

Преподаватель, излагая учащимся какую-либо тему, подготавливает изучение последующей главы. Подготовка окажется более ценной, если учесть то, что в последующей теме вызывает затруднения, и направить ее на ослабление или ликвидацию этих затруднений.

---

[1] Очерк II, п. 5.

В главе «Параллельные прямые» впервые школьники встречаются с доказательством приведением к нелепости. Известно, что такие доказательства затрудняют многих шестиклассников. Ясны и причины этого: доказательство не прямое, а косвенное, требует четкого применения законов противоречия и исключенного третьего, опирается на элементарный анализ и другие формы аналитического метода. Эксперимент показывает, что некоторые затруднения можно значительно ослабить и сделать способ доказательства противоречием доступным пониманию шестиклассников настолько, что они начинают самостоятельно применять его, если будет указано на необходимость его использования. В таких случаях, как и всегда, существенную помощь оказывают подготовительные упражнения.

Прежде всего приведем упражнения, направленные на развитие умений выполнять элементарный анализ и облегчающие практическое использование в доказательствах законов противоречия и исключенного третьего.

а) Даны два отрезка прямой: a и $в$ (не вычерчиваются). Какие соотношения (по величине) могут быть между этими отрезками? ($a > b$, $a = b$, $a < b$). Могут ли существовать одновременно два из этих соотношений?

б) Даны два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$. Какие соотношения могут быть между этими углами?

в) a и b — отрезки прямой, $a \neq b$. Какое заключение можно сделать об этих отрезках?

г) $\smile AB$ и $\smile CD$ принадлежат одной окружности, $\smile AB \neq \smile CD$. Указать возможные соотношения между этими дугами.

д) $\smile EF$ и $\smile MN$ принадлежат двум равным окружностям, $\smile EF \not> \smile MN$. Какие соотношения могут быть между этими дугами?

е) $\angle 1 \not< \angle 2$. Указать возможные соотношения между этими углами.

ж) $\angle A \neq \angle B$, $\angle A \not> \angle B$. Какое соотношение существует между углами A и B?

Количество упражнений можно увеличить. После введения понятия о параллельных прямых можно поставить такие вопросы:

з) AB и CD — две различные прямые, лежащие в одной плоскости. Какие возможны случаи во взаимном расположении этих прямых?

и) MN и PQ — прямые одной плоскости и $MN \neq PQ$ Каково взаимное расположение этих прямых?

Чтобы познакомиться с доказательством способом противоречия, также можно применить подготовительные упражнения. Приведем примеры.

а) Дано, что $x+3=9$ (1). Способом противоречия доказать, что $x = 6$.

Такие уравнения учащиеся умеют решать и знают, как проверить корень и все же можно использовать уравнения, чтобы познакомить шестиклассников с новым способом доказательства.

Требуется доказать, что $x = 6$. Допустим противоположное этому заключению: $x \neq 6$. Тогда или $x > 6$ или $x < 6$. Рассмотрим каждый случай отдельно. Если $x > 6$, то сумма числа, которое больше 6, с числом 3 даст число, большее 9. Это противоречит условию (1). Значит, x не может быть больше 6. Если $x < 6$, то сумма будет меньше 9. Это также противоречит условию (1). Итак, допустив, что $x \neq 6$, приходим к противоречию. От этого допущения необходимо отказаться и принять, что $x=6$.

б) Дано: $8 + a = 19$. Способом противоречия установить, что $a = 11$.

в) Если $2x + 3 = 13$, то $x = 5$. Доказать.

г) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 56. Доказать способом противоречия, что меньшее из них равно 7.

При выполнении таких упражнений записи делаются только на доске.

ОЧЕРК IV

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

1. О расположении первых глав планиметрии

В учебной литературе по геометрии наметилось два способа расположения первых глав планиметрии, излагаемых в 6-м классе.

1) Вводятся начальные геометрические понятия и некоторые связи между ними, затем излагается глава о треугольниках и, наконец, глава о параллельных прямых. Этот план восходит к «Началам» Евклида[1] и получил широкое распространение в нашей школе под влиянием учебника геометрии А. П. Киселева[2]. План можно назвать традиционным.

2) После введения начальных геометрических понятий и некоторых связей между ними, излагается учение о параллельных с ближайшими следствиями, а затем — глава о треугольниках. Такое расположение материала не является новостью наших дней: его можно найти в ряде учебников, например, Н. А. Извольского[3], Н. А. Глаголева[4]. Оно нашло место в ныне действующих программах нашей средней школы.

Второй способ расположения первых глав планимет-

---

[1] Начала Евклида, книги I—VI, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, Гостехиздат, 1948.

[2] А. П. Киселев, Элементарная геометрия, Учпедгиз., 1955.

[3] Н. А. Извольский, Геометрия на плоскости, Госиздат, 1924.

[4] Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, Учпедгиз, 1954.

рии имеет некоторые преимущества перед традиционным. Ему присуща большая систематичность и стройность: начатое в первой главе изучение взаимного расположения двух прямых находит естественное продолжение в следующей главе о параллельности прямых, теорема о сумме внутренних углов треугольника с ее следствиями не отрывается от главы «Треугольники», при изучении этой главы имеется возможность решать задачи на вычисление. Второй способ позволяет избежать доказательств некоторых трудных для шестиклассников теорем, например, выпадает теорема «Из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один», исчезает надобность в теореме «Внешний угол всякого треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним», отпадают доказательства некоторых предложений о равенстве прямоугольных треугольников.

Однако второй способ имеет и свою отрицательную сторону. Доказательство 1-й теоремы о признаке параллельности двух прямых отличается значительной сложностью и трудно для начинающих. В нем впервые в развернутом виде применяется метод приведения к абсурду, при этом используется центральная симметрия плоской фигуры. О симметрии учащиеся не имеют никаких представлений. При доказательстве выполняется вращение на 180° вокруг центра симметрии одной части фигуры до совмещения с другой ее частью, а затем — обратное вращение. Сугубо сложная теорема излагается в начале 3-го месяца изучения систематического курса геометрии, т. е. тогда, когда учащиеся еще не приобрели умений и навыков даже в более простых доказательствах.

Но все же второй способ расположения материала заслуживает предпочтения перед традиционным: положительные качества его преобладают над отрицательными. Это преобладание особо ощутимо, если преподаватель сумеет преодолеть те трудности, которые связаны с 1-й теоремой о признаке параллельности двух прямых. А преодолеть их частично возможно[1].

[1] Теорему о 1-м признаке параллельности прямых можно принять без доказательства. В таком случае она станет зависимой аксиомой.

2. Сообщение понятия о параллельных прямых

Понятие о параллельных прямых играет важную роль в курсе геометрии[1]. Его уместно ввести путем абстракции с последующим определением.

Учитель демонстрирует, например, два ребра большой линейки. Эти ребра можем мыслить неограниченно продолженными в обе стороны. Имеем две прямые. Каковы особенности этой пары прямых? Во-первых, они лежат в одной плоскости — в плоскости грани линейки; во-вторых, эти прямые не пересекаются, не имеют общей точки. Такие прямые называют параллельными. Учитель предлагает найти параллельные прямые в окружающей обстановке. При рассмотрении каждого примера подчеркиваются особенности взаимного расположения двух прямых. Когда учащиеся сделают наблюдения нескольких пар параллельных прямых и накопят представления о них, предлагается ответить на вопрос: «Какие линии называются параллельными»? Опыт показывает, что можно ожидать и правильные, и несовершенные определения. Некоторые учащиеся предложат такую формулировку. «Две прямые называются параллельными, если они не имеют общей точки». Тогда учитель демонстрирует две металлические спицы, расположив их так, что бы получились скрещивающиеся прямые и говорит: «Эти прямые не имеют общей точки. Получается, что они параллельны». Для демонстрации скрещивающихся прямых можно использовать и ребра куба, параллелепипеда или какого-либо иного подходящего многогранника, и прямые в классной обстановке. Учащиеся осознают, что они дали неточную формулировку и вносят поправку: Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки».

Параллельные прямые изображаются в различных положениях на классной доске и в тетрадях. Вводится условная запись параллельности прямых. Определение многократно повторяется и на этом, и на последующих уроках.

Линейка делается так, что два длинные ребра параллельны. Значит, с помощью такой линейки можно начертить параллельные прямые.

---

[1] Греческое слово παραλληλοσ — параллельный, буквальный перевод — идущий рядом, находящийся рядом.

По определению для установления параллельности двух прямых, лежащих в одной плоскости, надо убедиться, что эти прямые не имеют общей точки. В практике нет возможности достаточно далеко продолжать прямые и тем более продолжать их в обе стороны как угодно далеко. Значит, определение мало пригодно, чтобы, опираясь непосредственно на него, решать вопрос о параллельности прямых. Необходимо установить признаки, которые позволяли бы легко распознавать, будут ли прямые параллельны. В этих признаках имеют значение соотношения между углами, которые получаются, если две прямые пересечь третьей прямой.

Учащиеся вспоминают названия пар углов, которые получаются при пересечении двух прямых. Затем учитель знакомит с наименованиями пар углов при пересечении двух прямых третьей. Полезно отметить, что углы, расположенные между прямыми, называются внутренними, а остальные внешними. Показав на чертеже пару углов и пояснив особенности их расположения, преподаватель сообщает название такой пары, а затем предлагает найти еще такие же пары углов. Путем упражнений достигается, что наименования углов включаются в словарный фонд каждого ученика, вторая сигнальная система обогащается новыми сигналами, необходимыми в дальнейшем обучении.

3. Теорема о первом признаке параллельности прямых

Она читается так: «Если при пересечении двух прямых линий третьей внутренние накрестлежащие углы равны, то эти две прямые параллельны». Ее можно назвать и теоремой о существовании параллельных. Как уже отмечено, усвоение доказательства этой теоремы является сложным делом для шестиклассников: доказательство приведением к нелепости осуществляется в ситуации двукратного вращения части фигуры вокруг центра симметрии на 180°. Это обязывает педагога особо тщательно продумать методические пути изложения.

Какие трудности приходится преодолевать при изложении доказательства теоремы о первом признаке параллельности прямых? Прежде всего — вращение фигуры или части ее в плоскости на 180°. Испытанным средством преодоления трудностей являются подготовительные упражнения. Как свидетельствует опыт, и в этом случае такие упражнения приносят пользу.[1] Их надо начать за 4—5 уроков до изложения теоремы, вести устно и в случае надобности сопровождать демонстрациями.

Приведем примеры упражнений.

а) Дан отрезок AB и точка O — его середина.

Вращаем отрезок OB в плоскости вокруг точки O так, чтобы он пошел по отрезку OA.

Какое положение займет точка B?

Упражнение сопровождается демонстрацией вращения отрезка OB, сделанного из узкой полоски цветной бумаги.

б) Дан отрезок CD и точка E на нем; $CE > ED$.

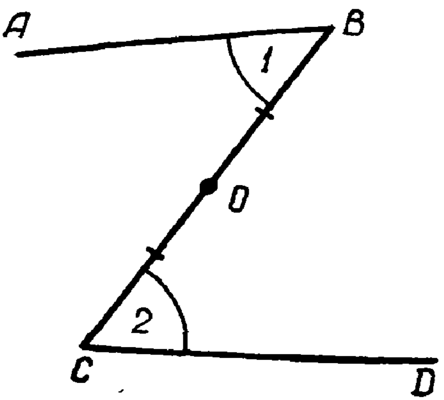
Вращаем отрезок ED в плоскости вокруг точки E так, чтобы он пошел по отрезку EC.

Какое положение займет точка D? На какой угол сделан поворот отрезка ED?

в) Дан отрезок AB, точка O — его середина.

Вращаем в плоскости весь отрезок вокруг точки O так, чтобы отрезок OA пошел по отрезку OB.

Какое положение займет точка A? точка B?



Чертеж 7

В случае надобности выполняется демонстрация.

г) Дана фигура, изображенная на черт. 7; $OB = OC$, $\angle 1 < \angle 2$.

Выполнить вращение $\angle OCD$ в плоскости вокруг точки O так, чтобы отрезок OC пошел по отрезку OB.

Какое положение займет точка C? луч CD?

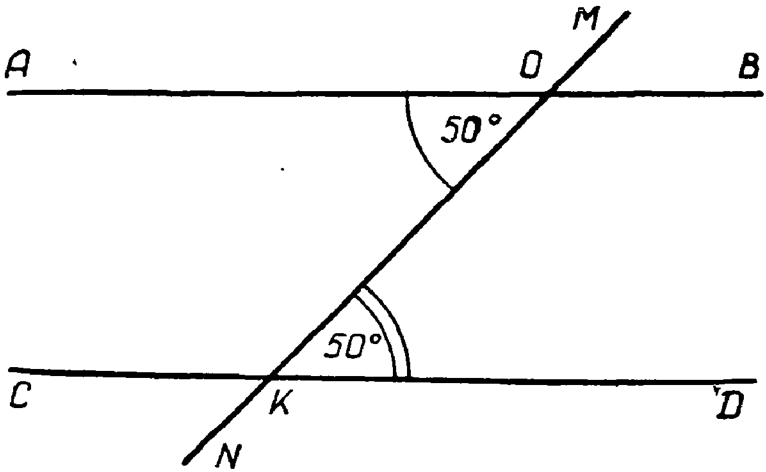
Выполнить вращение $\angle OBA$ вокруг точки C так, чтобы отрезок OB пошел по отрезку OC.

д) Дана фигура, схожая с предыдущей: $OB = OC$, $\angle 1 = \angle 2$. Выполнить вращение вокруг точки O всей фигуры на 180°.

[1] С. А. Кузьмина. Первые уроки геометрии. Журнал «Математика в школе» № 5 за 1957 г.

Легко продолжить подбор таких упражнений.

Для уяснения сущности теоремы целесообразно использовать построение двух прямых, которые образуют с третьей прямой равные внутренние накрестлежащие углы. Начертим прямую CD и отметим на ней точку K (черт. 8). С вершиною в точке K на луче KD построим транспортиром $\angle DKM$, например, равный $50°$. Продолжим луч KM за точку K. Отметим на прямой MN точку O. С вершиною в этой точке на луче ON построим $\angle NOA$, также равный $50°$. Продолжим луч OA за точку O.



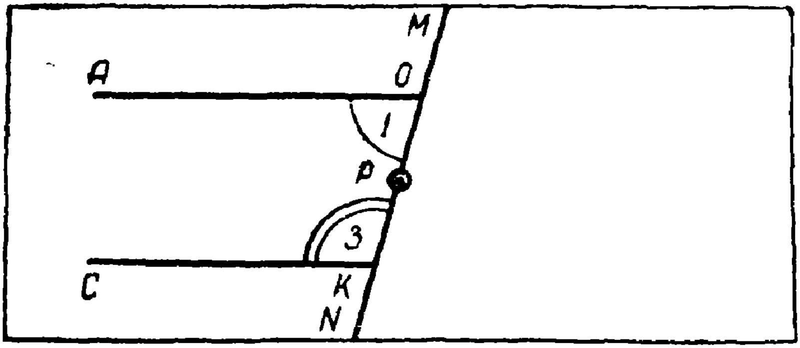
Чертеж 8

Оценим на глаз, каково взаимное расположение прямых.

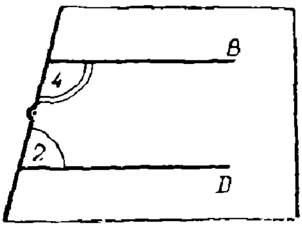
Построение повторяется, используется угол, например, в $110°$.

В результате наблюдений школьники формулируют теорему. Она пока — гипотеза, полученная путем неполной индукции.

Чтобы продемонстрировать, как выполняется вращение части фигуры вокруг центра симметрии, как одна часть фигуры совмещается с другой частью, целесообразно подготовить наглядное пособие. На полулисте чертежной бумаги изображается левая часть фигуры, которая применяется при доказательстве (черт. 9). Правая часть фигуры вычерчивается на листке кальки, имеющем форму, показанную на чертеже 10. Края кальки, кроме левого среза, можно подклеить полосками чертежной бумаги.



Чертеж 9



Чертеж 10

Описанная модель демонстрируется еще до доказательства теоремы.

Лист с левой частью чертежа прикрепляется к классной доске. Калька с правой частью чертежа накладывается так, чтобы получилась фигура: прямые AB и CD пересечены прямой MN. Калька прикрепляется кнопками, одна из которых — в точке P и в дальнейшем служит центром вращения.

Преподаватель разъясняет, что на чертеже изображены прямые AB и CD, пересеченные прямой MN, при этом внутренние накрестлежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$. Точка P — середина отрезка KO. Покажем, что секущая MN делит фигуру на две части, которые можно совместить.

Какое заключение можно сделать о величине углов 3 и 4?

Если разрезать фигуру по прямой MN и повернуть в плоскости чертежа правую часть фигуры вокруг точки P на 180°, то отрезок OK совместится сам с собою, точка K совпадает с точкой O, а точка O с точкой K, так как точка P — середина отрезка KO.

Как расположится луч KD? Почему он сольется с лучем OA? А какое положение займет луч OB?

Делаем заключение, что секущая MN разделила фигуру на две части, которые при наложении совместились. При желании можно сформулировать лемму: «Если при пересечении двух прямых линий третьей внутренние накрестлежащие углы равны, то фигура рассекается этой третьей прямой на совместимые части».

Затем демонстрируется обратное вращение: правая часть фигуры занимает первоначальное положение.

Проделанная подготовительная работа облегчит усвоение доказательства теоремы.

Учащиеся вспоминают формулировку предложения. Предстоит доказать его.

Условие: прямые AB и CD пересечены прямой MN, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $AB \parallel CD$.

Уже подмечено, что если $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$. Допустим противоположное тому, что требуется доказать, т. е. что $AB \nparallel CD$. Значит, прямые AB и CD пересекутся. Пусть они пересекутся влево от прямой MN. Обозначим точку пересечения буквой F.

Разделим отрезок OK пополам и обозначим его середину буквой P. Затем описывается то вращение правой части фигуры вокруг точки P до совмещения с левой частью, которое уже наблюдали ранее. Так как правая часть фигуры совпадает с левой, то лучи OB и KD также должны пересечься. Обозначим точку пересечения буквой F_1.

Затем левая часть фигуры обратным вращением вокруг точки P приводится в первоначальное положение. Получилось, что две прямые AB и CD пересекаются в двух точках F и F_1, а это противоречит известному свойству прямой.

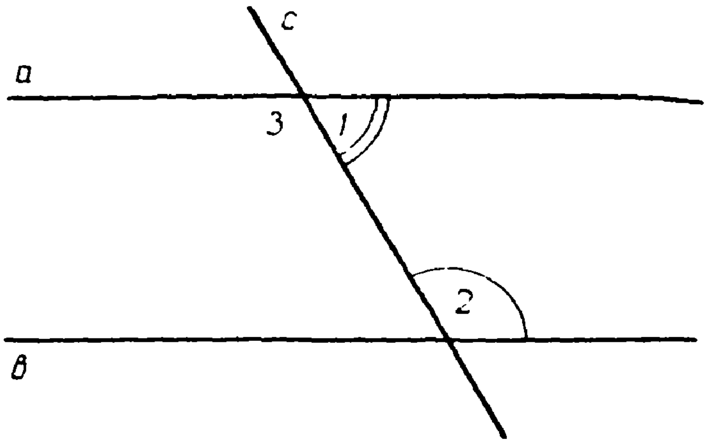
Значит, сделанное допущение, что прямые AB и CD пересекаются, привело к противоречию, к ложному итогу. Это допущение необходимо отклонить и принять, что $AB \parallel CD$.

4. Другие теоремы о признаках параллельности прямых

Доказательство других теорем о признаках параллельности двух прямых просты и поэтому являются удобным материалом, чтобы на нем учить доказывать. Учащиеся усваивают общую схему геометрических доказательств: чертеж фигуры, условие предложения, требование (заключение предложения) и, наконец, доказательство.

Рассмотрим изложение на уроке одной из этих теорем. Преподаватель на доске вычерчивает прямые a и $в$, пересеченные прямой c, разъясняет и записывает условие и заключение.

Условие: прямые a и $в$ пересечены прямой c, $\angle 1 + \angle 2 = 2d$ (черт. 11).



Чертеж 11

Доказать: $a \parallel в$.

Один из учеников, показывая на чертеже, повторяет условие и заключение.

— Что требуется доказать?

—Какой признак параллельности двух прямых нам известен?

—Значит, мы предложение докажем, если сумеем показать, что внутренние накрестлежащие углы равны. Введем вспомогательный угол 3. Попытаемся доказать, что $\angle 2 = \angle 3$.

—Чему равна сумма углов 1 и 3?

—На основании какого предложения утверждаем это?

— Запишем:

$$\angle 1 + \angle 3 = 2d$$

—А по условию

$$\angle 1 + \angle 2 = 2d$$

— Что следует из этих равенств?

— Получаем:

$$\angle 2 = \angle 3$$

— Какое заключение можно сделать?

— Итак, доказано, что $a \parallel в$.

— Как сформулировать доказанное предложение?

Аналогично излагаются остальные теоремы о достаточных условиях параллельности двух прямых.

Преподаватель разъяснит, продемонстрирует и научит, как на практике чертить параллельные прямые на бумаге: а) с помощью линейки и треугольника, б) с помощью рейсшины. При этом преподаватель требует мотивировать правильность построений путем ссылок на доказанные предложения. Эти ссылки — первые приложения теорем о признаках параллельности прямых.

Решается задача: «Через данную точку, не лежащую на данной прямой, построить прямую, параллельную данной». Решение выполняется линейкой и треугольником или линейкой и транспортиром. При повторении меняется расположение фигуры.

При вычерчивании параллелей с помощью рейсшины естественно встанет вопрос, будут ли две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны. Теоремы о признаках параллельности используются и здесь. А далее уместно поставить задачу, как с помощью эккера и вех построить параллельные прямые на поверхности земли. Эта задача рассматривается на классном полигоне, а в весенний период выполняется на местности.

5. Значение аксиомы параллельных

Для дальнейшего построения курса геометрии необходимо введение аксиомы параллельных: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной». Наблюдения показывают, что некоторые учителя неясно представляют, каково значение этой аксиомы.

Что через точку, не принадлежащую прямой, можно провести прямую, параллельную данной, легко установить построением такой прямой и последующим доказательством. Построение можно выполнить различными способами и средствами. Возникает вопрос, будут ли прямые, построенные различными способами, сливаться в одну прямую, или же получатся различные прямые, проходящие через данную точку и параллельные данной прямой.

Если на этот вопрос искать ответ опытным путем, то можно показать, что какими бы способами не выполнялись построения, при тщательном выполнении чертежа, построенные прямые сливаются. О чем свидетельствует этот факт?

Возможно, что несовершенство чертежных приборов и изображения точек, линий и углов на бумаге приводит к тому, что прямые, построенные различными способами, кажутся слившимися; опыт не может обнаружить различные прямые, проходящие через заданную точку параллельно данной прямой. Возможно, что через точку проходит только одна прямая, параллельная данной.

Оказывается, этот вопрос не может получить решения и на основании ранее введенных аксиом и уже доказанных теорем, т. е. не может быть решен путем доказательства. Весьма вероятно, что этот факт осознали греческие геометры еще до начала 3-го века до н. э. Знаменитый греческий геометр Евклид хорошо понимал необходимость введения нового постулата: в его «Началах» имеется V постулат, который можно формулировать так: «Если при пересечении двух прямых третьей сумма двух внутренних односторонних углов меньше $2d$, то эти две прямые пересекаются». Этот постулат равносилен аксиоме параллельности.

Сложность V постулата сравнительно с другими постулатами «Начал» и некоторые другие причины привели к мысли, не является ли постулат теоремой, нельзя ли его доказать. Геометры древнего мира, средних веков и нового времени делали многие и неизменно неудачные попытки доказать V постулат. Открытие великим русским математиком Н. И. Лобачевским невклидовой геометрии, установление непротиворечивости аксиоматики этой геометрии показали, что V постулат или равносильная ему аксиома параллельных не зависит от других аксиом геометрии, а, значит, не может быть доказана. Таким образом, предложение, что через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести только единственную прямую, параллельную данной, вводится в курс геометрии как аксиома, не зависимая от других аксиом.

Аксиома параллельности впервые применяется при доказательстве теорем о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой. Это определяет естественное место в курсе ее введения: она непосредственно предварит эти теоремы. На этом этапе обучения, в связи с введением аксиомы о параллельных, целесообразно познакомить школьников с понятиями о теореме и аксиоме.[1] Аксиома параллельных служит чаще опосредствованным, а иногда непосредственным основанием почти всех последующих теорем.

6. Понятие об обратной теореме

Теоремы о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой являются обратными соответствующим теоремам о признаках параллельности. Они просты и однообразны по формулировкам, составляют целую серию последовательных обратных теорем. Это благоприятно для знакомства учащихся с прямыми и обратными теоремами. Введение этих новых понятий начинается за 2—3 урока до доказательства 1-й теоремы о свойстве углов.

Рассмотрим предложение: «Если Петя Иванов — конькобежец, то он — спортсмен» (1). В условном придаточном предложении указывается условие, при наличии которого можно отнести Петю к числу спортсменов, а в главном предложении утверждается, что при соблюдении условия он спортсмен. А теперь утверждение сделаем условием, а условие утверждением. «Если Петя Иванов — спортсмен, то он — конькобежец» (2). Предложение (1) называется прямым, а предложение (2) — обратным. Предложение (1) верно. Верно ли предложение (2)?

Еще пример: «Если человек имеет диплом врача, то он окончил высшее медицинское учебное заведение» (3). «Если человек окончил высшее медицинское учебное за-

---

[1] Очерк II, п 9

ведение, то он имеет диплом врача» (4). Верны ли прямое и обратное предложения?

Учитель приводит прямые предложения, предлагает сформулировать обратные и выяснить, какие из них верны, какие ложны.

а) Если человек — Герой Советского Союза, то он имеет медаль «Золотая Звезда».

б) Если юноша окончил среднюю школу, то он получил аттестат зрелости.

Затем рассматриваются некоторые известные теоремы и показывается, как формулируются обратные предложения, например, «Если число оканчивается цифрой 5, то оно делится на 5», «Если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то и сумма делится на это число». Понятия о прямой и обратной теоремах закрепляются упражнениями. В настенной таблице записаны прямые теоремы, требуется дать формулировки обратных, при этом подмечается, что некоторые обратные предложения верны, другие ложны.

Приведем примерное содержание одной из настенных таблиц.

а) Если число оканчивается четной цифрой, то оно делится на 2.

б) Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3.

в) Если в окружности дуги равны, то и стягивающие их хорды равны.

г) Если два угла — смежные, то сумма их равна $2d$[1].

7. Теоремы, обратные теоремам о признаках параллельности

Переходя к изложению теорем о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой, преподаватель предлагает учащимся вспомнить формулировку теоремы о первом признаке параллельности прямых, а затем сформулировать обратную теорему. Получается: «Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрестлежащие углы равны». Целесообразно, чтобы порядок обратных теорем рассматри-

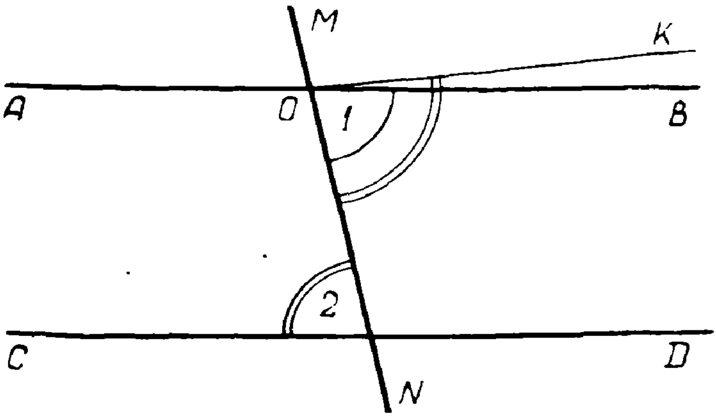
---

[1] В. В. Репьев, Общая методика преподавания математики, Учпедгиз, 1958.

ваемой серии соответствовал порядку прямых: нарушать соответствие нет оснований.

Формулировка обратного предложения повторяется несколько раз. На классной доске вычерчивается соответствующая фигура и предлагается выяснить и записать условие и заключение.

Условие: $AB \parallel CD$, MN — секущая (черт. 12).



Чертеж 12

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство противоречием.

— Допустим, что заключение неверно. Как это записать?

— На луче ON с вершиной в точке O построим $\angle NOK$, равный $\angle 2$ и накрестлежащий с ним. Если $\angle 2 = \angle NOK$, то какое заключение можно сделать о взаимном расположении прямых OK и CD?

— Как читается теорема, на основании которой утверждаем, что $OK \parallel CD$?

— А что нам дано?

— Что же получили?

— Получилось, что через точку O проходят две прямые, параллельные CD. Можно ли это принять?

— Как читается аксиома, которой противоречит полученный результат?

— Почему же получилось противоречие?

— К противоречию привело допущение, что $\angle 1 \neq$

$\neq \angle 2$. Необходимо от этого допущения отказаться. Что же следует принять?

— Итак, какое предложение доказано?

Формулировки других теорем о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой получаются из соответствующих теорем. Что касается изложения доказательств этих теорем, то возможны два пути. Если на этом этапе обучения преподаватель намерен сосредоточить внимание учащихся на доказательстве приведенением к абсурду, чтобы выработать первые навыки в этом отношении, то рассматриваемые обратные теоремы целесообразно доказывать методом противоречия (от противного) аналогично тому, как доказана 1-я теорема этой серии. Если преподаватель не ставит здесь задачу познакомить со структурой доказательства противоречием, то целесообразно, при изложении четырех последующих теорем опираться на 1-ю обратную теорему. Не следует пренебрегать доказательствами четырех обратных теорем или подменять их рассмотрением частных случаев: это лишает учащихся возможности тренироваться в доказательствах на простом материале.

Остановимся на 1-м варианте изложения. Метод приведения к абсурду в доказательствах этих теорем применяется в простой ситуации и используется последовательно в нескольких теоремах. Это благоприятно для того, чтобы вплотную подвести учащихся к этому методу и дать первые навыки в его применении. Кроме того, в этой главе имеются доступные для учащихся задачи на доказательство, в которых метод применяется очень просто. Такие задачи приведены ниже. Это усиливает благоприятную обстановку для получения первых навыков в применении метода сведения к нелепости.

Изложив доказательство 1-й теоремы о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой, учитель обращает внимание учащихся на план доказательства, выделяет отдельные этапы плана, сообщает, что такой способ доказательства применяется довольно часто и носит особое название «способ противоречия». Название объясняется тем, что противоречием заключению предложения. Постепенно ученики усваивают следующий план доказательства способом противоречия:

1) Допустим, что заключение теоремы ложно. Тогда будет верно утверждение, противоречащее заключению.

2) Рассматриваем это утверждение и убеждаемся, что приходим к следствию, которое противоречит или ранее установленным предложениям, или условию доказываемой теоремы.

3) Наличие противоречия заставляет отказаться от принятого утверждения и признать правильность заключения доказываемой теоремы.

При изложении 2-й теоремы о свойствах углов учащиеся формулируют теорему, затем создают чертеж фигуры, указывают условие и заключение. Преподаватель сообщает, что теорема доказывается способом противоречия. Один из учеников по приведенному плану излагает с помощью учителя доказательство. План передается своими словами. Так излагаются и следующие предложения.

Опыт свидетельствует, что описанный подход снимает многие трудности в овладении методом противоречия. К концу обучения в 6-м классе косвенный способ доказательства становится достоянием подавляющего большинства учащихся.

Второй путь изложения 4-х обратных теорем проще описанного. По 1-й обратной теореме следует, что при пересечении двух параллелей третьей прямой внутренние накрестлежащие углы равны, а отсюда переход прост к равенству пар соответственных углов, внешних накрестлежащих и т. д. Однако при этом ознакомление учащихся с методом приведения к абсурду отодвигается на более позднее время. Второй путь уместно использовать в классе, отличающемся невысокой математической подготовкой.

При повторении теорем о свойствах углов при пересечении двух параллелей третьей прямой обращается внимание учащихся на то, что, если эти углы острые и тупые, то все острые углы равны, все тупые углы равны, а любая пара углов, из которых один острый, а другой тупой в сумме составляет $2d$.

8. Задачи на вычисления и доказательство

Теоремы рассматриваемой главы школьного курса геометрии дают возможность ввести некоторые задачи на вычисления и доказательства.

Приведем примеры задач на вычисление.

Вычислить все углы при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, если

а) один из внешних углов больше одного из внутренних на 40°;

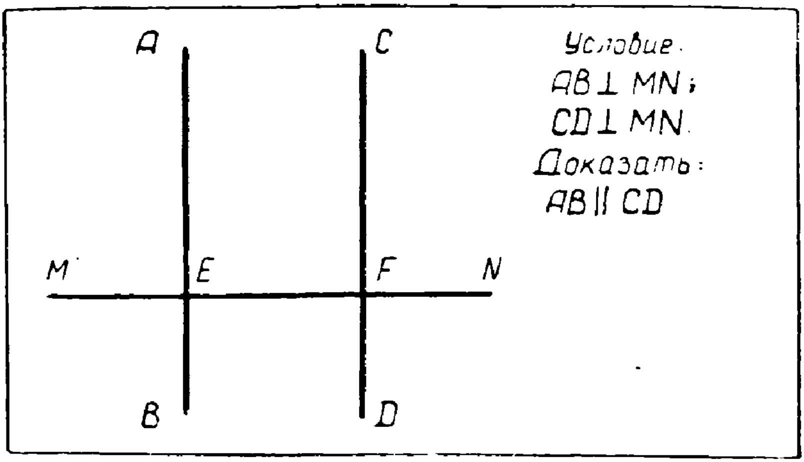
б) отношение внутренних односторонних углов равно 5:7;

в) один из внешних односторонних углов меньше другого на 20%.

Преподаватель легко составит достаточное количество таких задач. Частично их решение можно вынести на уроки арифметики.

Чтобы учить доказывать, полезно на уроках предлагать учащимся доступные для них задачи на доказательство. Такие задачи позволяют основательно усвоить содержание теорем, получить первые навыки усматривать возможности их применения. Как свидетельствует опыт, первые задачи на доказательство целесообразно предлагать по заранее заготовленным чертежам. На полулисте чертежной бумаги дается чертеж фигуры с обозначениями, указывается условие и заключение.

Например, преподаватель прикрепляет настенную таблицу с задачей на доказательство к классной доске (черт. 13), излагает условие и заключение теоремы и предлагает найти доказательство. Работа ведется устно.



Чертеж 13

Опыт говорит, что учащиеся нередко дают различные доказательства. Например, один мотивирует параллельность AB и CD тем, что соответственные углы равны, другой опирается на то, что сумма двух внутренних односторонних углов равна $2d$ и т д. Приводятся формулировки соответствующих теорем. Полезно рассмотреть все предложенные доказательства: это займет мало времени, а позволяет оценить учебные достижения многих школьников — всякое верное и мотивированное доказательство свидетельствует о значительных успехах шестиклассника в изучении геометрии.

Устное решение задач по настенным таблицам можно довольно широко применять в 6-м классе. Оно отличается некоторыми особенностями: в таблице дается чертеж фигуры, зафиксировано условие и заключение, содержание задачи — теоремы разъясняет учитель, — все это облегчает последующее решение. Доказательство излагается устно; это экономит учебное время и позволяет увеличить количество решаемых задач.

Однако решение задач на доказательство по настенным таблицам имеет и отрицательные черты: учащиеся не видят текста задачи, не читают книгу, к ним не предъявляется требование выполнить чертеж, не требуется выделять условие и заключение. Все это ограничивает и суживает воспитательное и образовательное значение задач на доказательство. Поэтому уже в 6-м классе (во 2-м полугодии) наряду с задачами в настенных таблицах надо использовать задачи, заданные текстом. При этом требования к учащимся возрастают: необходимо создать разумный чертеж фигуры, правильно выделить условие и понять заключение.

Приведем некоторые задачи на доказательство.

Две параллели пересечены третьей прямой. Доказать, что а) биссектрисы двух внутренних накрестлежащих углов параллельны, б) биссектрисы двух внешних накрестлежащих углов параллельны, в) биссектрисы двух соответственных углов параллельны.

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллелей, то она перпендикулярна и к другой. Доказать.

Доказать, что прямые a и $в$ не параллельны, если при пересечении их третьей прямой

а) два внутренних накрестлежащих угла не равны, б) два внешних накрестлежащих угла не равны,

в) два соответственных угла не равны,

г) сумма двух внутренних односторонних углов меньше $2d$ (больше $2d$),

д) сумма двух внешних односторонних углов больше $2d$ (меньше $2d$).

Каждая из этих пяти задач дает достаточное условие непараллельности двух прямых и легко доказывается путем приведения к абсурду.

Решение следующих задач требует дополнительных построений.

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Две параллели пересечены третьей прямой. Доказать, что

а) биссектрисы двух внутренних односторонних углов перпендикулярны,

б) биссектрисы двух внешних односторонних углов перпендикулярны.

9. Об углах с параллельными или перпендикулярными сторонами

Преподаватель пользуется всякой возможностью, чтобы побуждать учащихся разумно комбинировать геометрические образы, чтобы создавать для заданных образов иные геометрические ситуации. Такая деятельность преподавателя способствует развитию пространственного воображения учащихся.

Поэтому преподаватель предложит упражнения:

1) На плоскости даны две точки. Много ли пар параллельных прямых можно провести через эти точки?
2) При каком положении секущей равны все углы, образуемые двумя параллельными прямыми и этой секущей?

Поэтому же изучение свойств углов с параллельными сторонами уместно начать с упражнений на построение различных углов, стороны которых соответственно параллельны сторонам данного угла. Построения выполняются с помощью линейки и треугольника. Вершина угла, который требуется начертить, выбирается так, чтобы построение выполнялось возможно легче.

Дан острый $\angle A$ и точка A_1, не принадлежащая сторонам этого угла. Построить угол с вершиною в точке A_1, стороны которого были бы соответственно параллельны сторонам $\angle A$. Обычно учащиеся вычерчивают угол, стороны которого направлены также, как стороны данного угла. Они измеряют данный и полученный углы и убеждаются, что они равны.

Построить угол с вершиною в точке B_1, стороны которого были бы соответственно параллельны сторонам данного тупого $\angle B$ и сравнить величину этих углов.

Нельзя ли построить угол с вершиною в точке C_1, чтобы стороны его были параллельны сторонам тупого $\angle C$, а $\angle C_1$ был бы острый? Найти сумму углов C и C_1.

Так исчерпываются различные возможные случаи взаимного расположения углов с параллельными сторонами. Наблюдения приводят учащихся к формулировке теоремы: «Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны, если они оба острые или тупые, и в сумме равны $2d$, если один острый, а другой тупой». Это гипотеза. Во всех ли случаях будет так? На вопрос дает ответ доказательство теоремы.

Углы с параллельными сторонами можно наблюдать в некоторых механизмах и приборах, в нашем быту. Преподаватель может продемонстрировать, например, пантограф или модель его и предложить учащимся показать различные пары углов с параллельными сторонами. Такие углы можно наблюдать в парках и садах общественного пользования (расположение сторон дорожек, углов газонов и клумб).

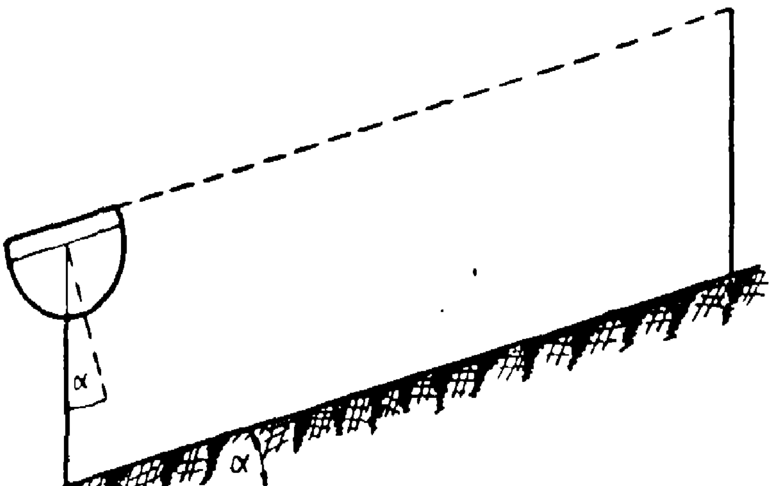
Упражнения на построение углов уместно провести и при знакомстве с углами, имеющими соответственно перпендикулярные стороны.

Дан острый $\angle A$ и точка A_1. Построить острый угол с вершиною в точке A_1, стороны которого были бы соответственно перпендикулярны сторонам $\angle A$. Измерение показывает, что углы равны.

Нельзя ли построить угол с вершиною в точке B_1, чтобы стороны его были бы соответственно перпендикулярны сторонам данного острого $\angle B$, а угол был бы тупой? Измерение показывает, что сумма углов B и B_1 равна $2d$.

Аналогично рассматриваются другие возможные случаи расположения углов с перпендикулярными сторонами. В результате формулируется теорема: «Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то углы равны, если оба острые или тупые, и в сумме равны $2d$, если один острый, другой тупой». При доказательстве целесообразно прежде всего рассмотреть случай, когда вершины углов совпадают, а затем — общий случай, когда вершины различны.

Предложения об углах с перпендикулярными сторонами находят применение в практике. Использование эклиметра при измерении углов в вертикальной плоскости опирается на это предложение (черт. 14). Устройство



Чертеж 14

некоторых приборов также имеет части, работающие на основании теоремы об углах с перпендикулярными сторонами. Примером может служить ватерпас.

ОЧЕРК V

УЧЕНИЕ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ

1. Общие положения

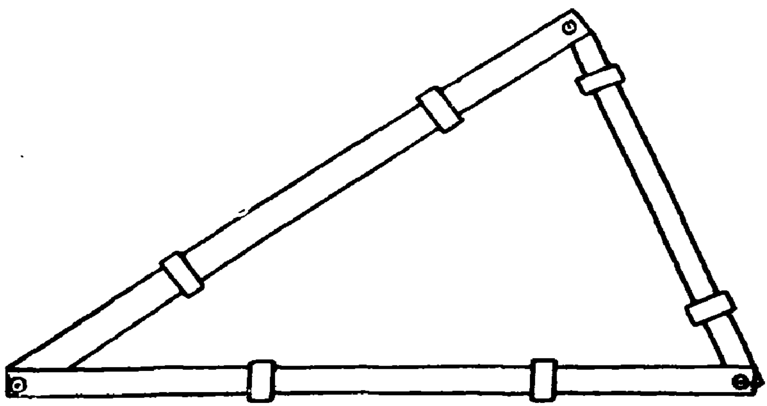
Учение о треугольниках имеет и познавательное, и практическое значение. Треугольник, являясь простейшим многоугольником, занимает солидное место в школьном курсе: предложения о сумме внутренних углов и внешнем угле, о конгруэнтности и подобии, теорема Пифагора и другие служат средством изучения многих других фигур, а поэтому широко используются в школьном курсе и применяются в других областях знания — механике, астрономии, физике. Через отношения сторон прямоугольного треугольника вводятся понятия о тригонометрических функциях. Как жесткая фигура треугольник находит применение в практике (в конструкции кронштейнов, ферм, подъемных кранов и др.).

Успех дальнейшего обучения геометрии в значительной мере зависит от того, как изучены первые предложения о треугольниках и их применение в конкретных случаях.

При изложении начальных сведений о треугольниках становятся особо заметными те методические выгоды, которые следуют из предшествующего изучения теории параллельных прямых: содержание главы делается систематичнее и законченнее, некоторые трудные для подростков теоремы традиционного расположения материала переходят в очевидные или легко устанавливаемые следствия. Это упрощает преподавание и дает возможность достигнуть более совершенных знаний, умений и навыков.

К началу изучения треугольников школьники значительно продвинулись вперед в отношении познания пространственных форм и отношений, приобрели уже некоторые уменья устанавливать геометрические факты путем доказательств. Но это не освобождает от широкого применения наглядности. В этой главе учащиеся встречаются с новыми способами установления соотношений, с новыми приемами доказательств. Овладеть этими способами возможно через наглядность.

Для демонстраций применяются модели треугольников и других многоугольников из тонкого картона и плотной чертежной бумаги. Показ переходов одного вида треугольников в другой реализуется с помощью шарнирного треугольника с раздвижными сторонами (черт. 15). Его можно сделать из жесткой бумаги, полосок жести, деревянных планок. Полезным пособием продолжает оставаться складной металлический метр, позволяющий демонстрировать контуры многоугольников. Постепенно по указанию педагога каждый ученик изготовляет набор различного вида треугольников из бумаги для рисования. Треугольники окрашиваются в разные цвета.



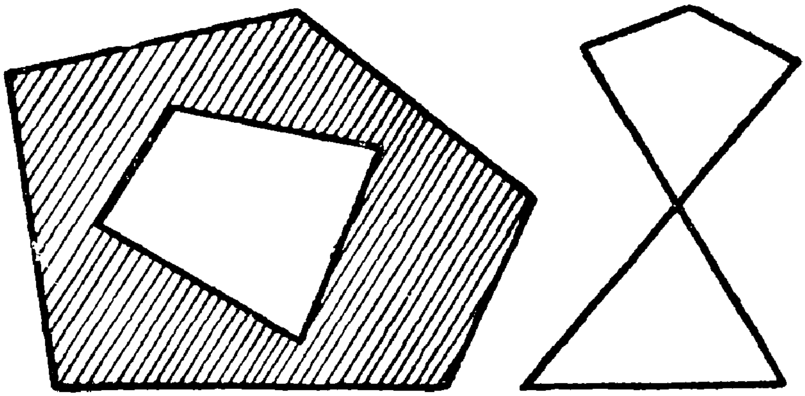
Чертеж 15

Значительную помощь оказывают настенные таблицы, на которых можно дать классификацию треугольников, упражнения для чтения чертежей и распознания применимости теорем, задачи на доказательство.

2. Понятия о многоугольнике и треугольнике

Учащиеся имеют представления о треугольнике и четырехугольнике: эти фигуры встречались им в 5-м классе. Задача заключается в том, чтобы перейти к системе соответствующих понятий и включить их в общую схему геометрических знаний.

С помощью складного метра и чертежей демонстрируются плоские ломаные линии в различных положениях и вспоминается определение ломаной. Из множества ломаных выделяется замкнутая линия. Наблюдение планов земельных участков, моделей многоугольников подготовляет абстрагирование понятия многоугольника. Дается описание: «Многоугольником называется часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией». Контур многоугольника можно обвести острием карандаша, не отрывая его от бумаги, при этом через каждую точку контура острие пройдет только один раз. Таким путем исключаются из объема понятия фигуры. изображенные на чертеже 16.



Чертеж 16

Далее выделяется понятие выпуклого многоугольника. В школьном курсе планиметрии рассматриваются только выпуклые многоугольники; отступления от этого особо оговариваются. Вводятся понятия: сторона, внутренний и внешний угол, вершина, периметр, диагональ многоугольника.

Деление многоугольников по числу сторон (внутренних углов) дает возможность выделить понятие треугольника: треугольником называется многоугольник с *тремя сторонами*. Вводятся принятые обозначения треугольника, его сторон и углов.

Как только введено понятие треугольника, целесообразно приступить к построению треугольников по данным сторонам. Это подготовляет изучение классификации треугольников по соотношению между сторонами, способствует осознанию зависимости между сторонами, активизирует обучение. Если дана только одна сторона, то можно построить бесчисленное множество треугольников. Если даны две стороны, то также можно построить бесчисленное множество треугольников. И в том, и в другом случае — задача неопределенная. Если даны три стороны, то можно или построить треугольник, или нельзя построить ни одного треугольника. Целесообразно разнообразить положение треугольника на плоскости и не ограничиваться тем, что одна сторона горизонтальна, а противоположная вершина находится над ней. Полезно разнообразить и форму треугольников.

Учащиеся строят треугольники, у которых все стороны равны, только две стороны равны, нет равных сторон. Это приводит к выделению видов треугольника в зависимости от соотношений между его сторонами. Если преподаватель желает дать классификацию треугольников, то ее можно зафиксировать в форме схемы.

Треугольники

- Разносторонние треугольники
- Равнобедренные треугольники
  - Равносторонние треугольники
  - Равнобедренные треугольники, у которых только 2 стороны равны

В схему включаются и чертежи. Можно изготовить настенную таблицу.

Если треугольники делить на разносторонние, равнобедренные и равносторонние, то такая классификация содержит изъян: объем 3-го вида входит целиком в объем 2-го — каждый равносторонний треугольник есть равнобедренный. Эту классификацию можно исправить: к виду «равнобедренный треугольник» отнести те, которые имеют только по две равные стороны. Однако такое исправление нельзя признать целесообразным: иногда равносторонний треугольник полезно рассматривать как равнобедренный.

Классификация треугольников по величине углов дается после изучения теоремы о сумме углов треугольника.

3. Сумма внутренних углов треугольника и многоугольника

Ранее опытным путем было подмечено, что сумма внутренних углов треугольника равна $2d$. Теперь это предложение доказывается. Применяется одно из двух доказательств: 1) с помощью построения внешнего угла треугольника и луча, проходящего внутри этого угла через его вершину параллельно противоположной стороне, 2) с помощью построения прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противоположной стороне. Первое из доказательств заслуживает предпочтения перед вторым, так как теоремы о внешнем угле треугольника становятся очевидными следствиями и не требуют особого рассмотрения. При повторении, при проверке усвоения доказательства полезно использовать различные внешние углы.

Из теоремы о сумме углов треугольника получаются важные следствия:

а) Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр. Следствие легко устанавливается способом приведения к абсурду.

б) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

в) Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.

В порядке устных упражнений школьники знакомятся с другими следствиями теоремы о сумме углов треугольника. Ставятся вопросы: а) Может ли треугольник иметь два тупых угла? б) Может ли треугольник иметь два прямых угла? в) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то какое заключение можно сделать о третьей паре углов? г) Чему равна сумма двух острых углов треугольника, у которого один угол прямой?

Открывается путь к обоснованной классификации треугольников по величине углов. Знакомство с представителями каждого нового вида треугольников сопровождается построением соответствующего треугольника. Вторую классификацию также можно зафиксировать в виде схемы с чертежами:

Треугольники

Остроугольные треугольники	Прямоугольные треугольники	Тупоугольные треугольники

Вычислительные задачи, решение которых опирается на теорему о сумме углов треугольника и свойства внешнего угла, решаются и арифметическими, и алгебраическими способами. Это решение частично можно отнести на уроки алгебры. Как всегда устное решение позволяет увеличить количество решаемых задач.

Изложение теоремы о сумме внутренних и сумме внешних углов выпуклого многоугольника затруднений не встречает. Упражнения подбираются легко.

В геодезических работах приходится иметь дело с суммой внутренних углов невыпуклных многоугольников. Поэтому уместно отступить от принятого условия рассматривать только выпуклые многоугольники, расширить теорему и показать, что она верна и для невыпуклых многоугольников. Общий способ доказательства сводится к тому, что многоугольник разбивается диагоналями на несколько выпуклых многоугольников, подсчитывается сумма углов в каждом из них и затем находится сумма углов данного многоугольника. В частном случае, если внутри многоугольника можно найти такую точку, что отрезки, соединяющие ее со всеми вершинами, лежат внутри его, то теорема доказывается так же, как для выпуклого многоугольника.

Следствие, что из точки, не принадлежащей данной прямой, можно провести на эту прямую только один перпендикуляр, даст возможность ввести понятие о высоте треугольника. Как уже показано ранее, целесообразно говорить «провести», «построить» высоту и избегать глагола «опустить»[1].

Высота определяется, как отрезок перпендикуляра, проведенного из любой вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение. Так как в понятие «высота» некоторые учащиеся склонны внести смысл, свойственный этому слову в разговорном языке, и таким путем сузить объем понятия, то целесообразно построить высоты в 3—4 треугольниках при любом расположении основания и вершины; в частности обязательно строится высота в тупоугольном треугольнике, проходящая через вершину острого угла. Построив по три высоты в остроугольном и тупоугольном треугольниках, учащиеся подмечают, что высоты или их продолжения пересекаются в одной точке. А где лежит эта точка в прямоугольном треугольнике? Полученный опытным путем факт о пересечении высот или их продолжений в одной точке впоследствии может быть доказан.

При введении понятия «медиана» сторона треугольника делится пополам способом проб или измерений[2]. Медианы проводятся в нескольких треугольниках через различно расположенные вершины. В порядке упражнений строятся все медианы треугольника и подмечается, что они пересекаются в одной точке, что эта точка лежит внутри треугольника.

Биссектриса угла — луч, биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны. Биссектрисы строятся с помощью транспортира. Опытным путем подмечается, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри его.

Теоремы о пересечении медиан, о пересечении биссектрис в одной точке в дальнейшем могут быть доказаны.

4. Чтение чертежей

Введение понятия о треугольнике и отрезках, связанных с ним, знакомство с классификациями треугольников полезно сопровождать чтением чертежей. На этом этапе обучения такие упражнения, кроме своего прямого на-

---

[1] Очерк II, п. 4.

[2] Медиана — от латинского medianus — средний.

значения развивать уменья и навыки видеть по чертежу фигуру более полно, способствуют быстрому запоминанию большого количества новых терминов и понятий, определений, обогащают язык, помогают правильно осмыслить содержание и объем понятия.

Приведем примеры упражнений.

а) Дан $\triangle ABC$, из вершины C проведена медиана. Сколько треугольников имеет фигура? Содержит ли фигура треугольники, имеющие по равной высоте?

б) В разностороннем $\triangle DEF$ через вершину D проведены медиана и биссектриса. Сколько остроугольных треугольников имеет фигура? Назовите все тупоугольные треугольники. Сколько треугольников содержит фигура, имеющих по равной высоте? Есть ли на фигуре смежные углы?

в) В остроугольном $\triangle ABC$ проведены две высоты AK и BL, которые пересекаются в точке M. Указать все прямоугольные треугольники. Сколько треугольников имеют высоту, равную AK? BL? Сколько пар смежных углов? вертикальных углов?

г) В четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали, пересекающиеся в точке K. Сколько треугольников имеет фигура? Назовите несколько треугольников, имеющих по равной высоте.

д) В многоугольнике $ABCDE$ проведены диагонали AC и BE, пересекающиеся в точке K. Назовите все треугольники. Назовите все многоугольники, отличные от треуугольников.

е) В многоугольнике $ABCDEF$ проведена диагональ AD. Сколько многоугольников имеет фигура? Сколько всего диагоналей можно провести через вершину D? Сколько всего диагоналей можно построить в этом многоугольнике? Найдите сумму внутренних углов многоугольника $ABCDEF$.

5. Понятие о равенстве треугольников

Введение понятия о равенстве треугольников отчасти подготовлено ранее встречавшимися соотношениями этого вида между геометрическими образами. Однако это не освобождает от конкретно-индуктивного подхода к этому вопросу. Учащиеся наблюдают модели двух равных треугольников и возможность совмещения их перемещением в плоскости, невозможность совмещения двух неравных треугольников; наблюдают модели двух таких равных треугольников, которые можно совместить после перевертывания одного из них и последующего перемещения его в плоскости. На основе этих наблюдений формулируется определение равных треугольников.

Чтобы усвоение теорем о равенстве треугольников не вызвало затруднений, предварительно следует обогатить вторую сигнальную систему школьников включением новых выражений о взаимном положении углов и сторон треугольника. Это достигается вопросами: а) Какой угол $\triangle ABC$ лежит против стороны AB? б) Какая сторона лежит против $\angle B$? в) Какой угол заключен между сторонами AC и BC? г) Какие углы прилегают к стороне AB? д) Какая сторона прилегает к $\angle B$ и $\angle C$? Как понимать выражение: «две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника»? Из совмещения равных треугольников следует, что: а) в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, б) в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Выясняется, как понимать выражения: «в равных треугольниках стороны попарно равны», «в равных треугольниках углы попарно равны».

В очерке II-м сообщено, как возможно изложить свойство углов при основании равнобедренного треугольника[1]. При рассмотрении свойств этого вида треугольников выполняется совмещение одного треугольника с другим путем перегибания; значит, имеет место равенство треугольников. На это желательно обратить внимание.

После изучения теорем о равнобедренном треугольнике ставятся вопросы: а) Каким свойством обладают углы равностороннего треугольника? б) Чему равен угол этого треугольника? в) Может ли прямоугольный треугольник быть равнобедренным? г) Как построить такой треугольник? д) Чему равен острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника? е) Чему равна высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная на его гипотенузу, если длина последней 8 *см*?

Чтобы подготовить учащихся к правильному осмысливанию доказательств наложением, рекомендуется выполнить несколько упражнений в воображаемом наложе-

---

[1] Очерк II, п. 6.

нии треугольников. На чертеже фиксируется пара треугольников с соответствующими обозначениями, условие и требование.

В следующих упражнениях идет речь о треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$:

а) $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB > A_1B_1$. Наложением убедиться, что $\angle C > \angle C_1$.

б) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A > A_1$. Наложить $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы стороны AB и A_1B_1 совпали.

в) $\angle A = \angle A_1$, $AC > A_1C_1$, $AB < A_1B_1$

Показать, что при наложении треугольников стороны BC и B_1C_1 пересекутся.

г) $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle A > \angle A_1$. Доказать, что $BC > B_1C_1$.

д) $AB = A_1B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle A < \angle A_1$. Наложить один треугольник на другой, чтобы совпали равные стороны.

е) $BC = B_1C_1$, $\angle A > \angle A_1$, $\angle B > \angle B_1$. Наложить треугольники, чтобы совпали равные стороны.

В случае надобности количество упражнений можно увеличить. Приведенные упражнения распредляются на 2—3 урока.

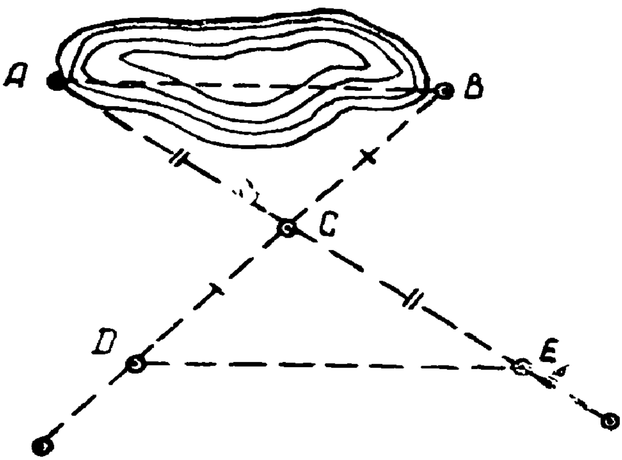
6. Первый признак равенства треугольников

Определение равенства треугольников иногда нельзя использовать, чтобы установить, будут ли два треугольника равны. Представим, например, что на земной поверхности отмечены вехами вершины двух треугольников и предстоит выяснить, равны ли эти треугольники. Наложить один из них на другой нет возможности. Поэтому необходимо установить особые признаки, которые позволили бы судить о равенстве треугольников, не прибегая к наложению.

По указанию педагога каждый ученик на отдельной четвертушке бумаги с особой тщательностью строит треугольник, основание которого, например, 10 *см*, левая боковая сторона 8 *см*, а угол между ними 50°. Построение делается линейкой, циркулем и транспортиром. Возникает вопрос, будут ли полученные треугольники равны. Чтобы ответить на него, можно или вырезать треугольники и накладывать их или выполнить наложение, просматривая пару треугольников на свет. Учащиеся, сидящие на одной парте, путем наложения убеждаются, что треугольники совмещаются. Исключения объясняются допущенными ошибками или погрешностями в выполнении чертежей. Две стороны и угол между ними одного построенного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника. В опыте оказалось, что этого достаточно, чтобы треугольники были равны. Какое предложение можно сформулировать? Получили теорему о первом признаке равенства треугольников. Всегда ли два треугольника при таких условиях будут равны? Чтобы дать ответ на этот вопрос, предстоит доказать теорему.

Прочитав еще раз ее формулировку, школьники подготовляют чертежи, выделяют условие и заключение. Доказательство наложением подготовлено.

В форме рассказа можно предложить следующую задачу. Землемеру необходимо определить длину AB (черт. 17). В его распоряжении были рулетка, шпильки



Чертеж 17

и вехи. Непосредственное измерение отрезка AB невозможно: мешает озеро. Землемер распорядился в точках A и B поставить вехи, выбрал на местности произвольную точку C так, чтобы отрезки AC и BC можно было измерить. В точке C поставлена веха, найдены длины отрезков AC и BC. Затем эти отрезки были продолжены за точку C и отложены отрезки $CE = AC$ и $CD = BC$. Измерив отрезок DE, землемер принял, что $AB = DE$. Верно ли поступил землемер?

Если бы землемер отложил $CE = BC$ и $CD = AC$, то можно ли принять, что $AB = DE$? Задачу можно моделировать на классном полигоне.

Опыт свидетельствует, что задачи — рассказы вызывают живой интерес со стороны школьников.

Обсудив вопрос, будут ли два треугольника равны, если катеты одного из них соответственно равны катетам другого, школьники формулируют соответствующее следствие 1-го признака равенства треугольников.

Очевидно, что отрывать эти следствия от соответствующих теорем и относить их в особый параграф нецелесообразно.

7. Другие признаки равенства треугольников

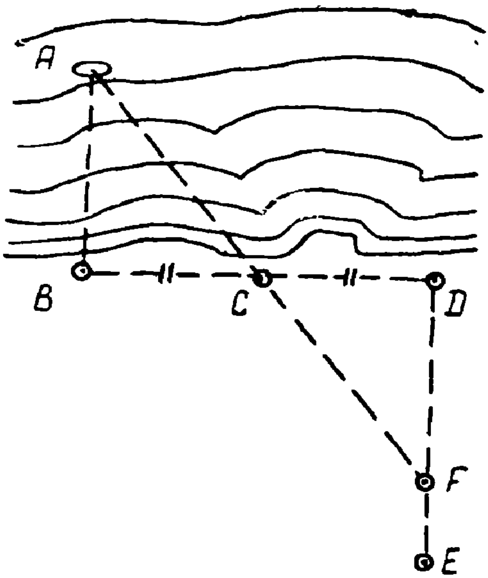
Изложение 2-го признака равенства треугольников также начинается с лабораторной работы: каждый ученик строит треугольник по стороне, равной, например, 10 *см*, и прилежащим углам в 50° и 70°. Каждая пара учащихся, сидящая за одной партой, наложением убеждается, что треугольники равны. В результате опыта формулируется теорема, которая затем доказывается.

Отыскивая ответы на вопросы, будут ли два прямоугольных треугольника равны, если а) катет и прилежащий угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему углу другого треугольника, б) катет и противолежащий угол одного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, в) гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, формулируются как следствия еще три признака равенства прямоугольных треугольников.

В форме рассказа можно предложить задачу, решение которой приписывалось первому древнегреческому философу и математику Фалесу из Милета (конец 7-го — 6-й век до н. э.).

Корабль стоит на якоре. Требуется определить его расстояние до берега, т. е. найти длину отрезка AB

(черт. 18). Построим эккером $\angle ABD = d$, отложим последовательно по BD два равных отрезка BC и CD. строим $\angle BDE = d$, идем по лучу DE до тех пор, пока не окажемся в точке F, лежащей на прямой AC, и измеряем длину отрезка DF. Утверждаем, что $AB = DF$. Верно ли решена задача?



Чертеж 18

Задачу можно решить несколько иначе. На луче BA угломером строят произвольный $\angle ABD$, равный, например, 100°, и $\angle BDE$, также равный 100°.

Несмотря на тщательную подготовку к изложению теорем о равенстве треугольников, наблюдается, что некоторые шестиклассники, доказывая эти теоремы, рассуждают нечетко и допускают ошибки в мотивировках Поэтому полезно подметить, как выполняется наложение треугольников. Прежде всего выбирают пару сходственных, по условию, равных сторон и совмещают вершину одного треугольника с соответственной вершиной другого, затем сторону первого треугольника направляют по сходственной стороне второго. Наложение этих элементов зависит от нас; дальнейшее наложение уже определяется условием теоремы. Вторая вершина (второй конец стороны) одного треугольника совпадает со второй вершиной другого. Далее по равенству одной пары или двух пар прилегающих к совмещенным сторонам углов судим о том, как расположится другая сторона или другие стороны накладываемого треугольника.

Теорема о третьем признаке равенства треугольников может быть доказана и наложением с применением способа приведения к абсурду, и приложением одного треугольника к другому. Второе доказательство заслуживает предпочтения: оно проще первого и доступнее для школьников.

Как показывают наблюдения, в доказательстве приложением наиболее трудным для усвоения является перевертывание и последующее приложение одного треугольника к другому. Эти операции требуют некоторого пространственного воображения, а не всякий шестиклассник владеет им. Рекомендуется предварительно выполнить упражнения, при этом сопроводить их демонстрацией перевертывания и приложения модели треугольника к другому треугольнику.

а) Даны два равнобедренных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с равными основаниями. Как можно выполнить приложение одного треугольника к другому, чтобы их основания совпали?

Приложение выполняется двумя способами: 1) перемещением $\triangle A_1B_1C_1$ в плоскости, 2) перевертыванием $\triangle A_1B_1C_1$ и последующим перемещением в плоскости.

б) Даны два треугольника DEF и $D_1E_1F_1$, у которых $DE=D_1E_1$. Приложить $\triangle D_1E_1F_1$ к $\triangle DEF$, чтобы равные стороны совпали.

Приложение выполняется также двумя способами.

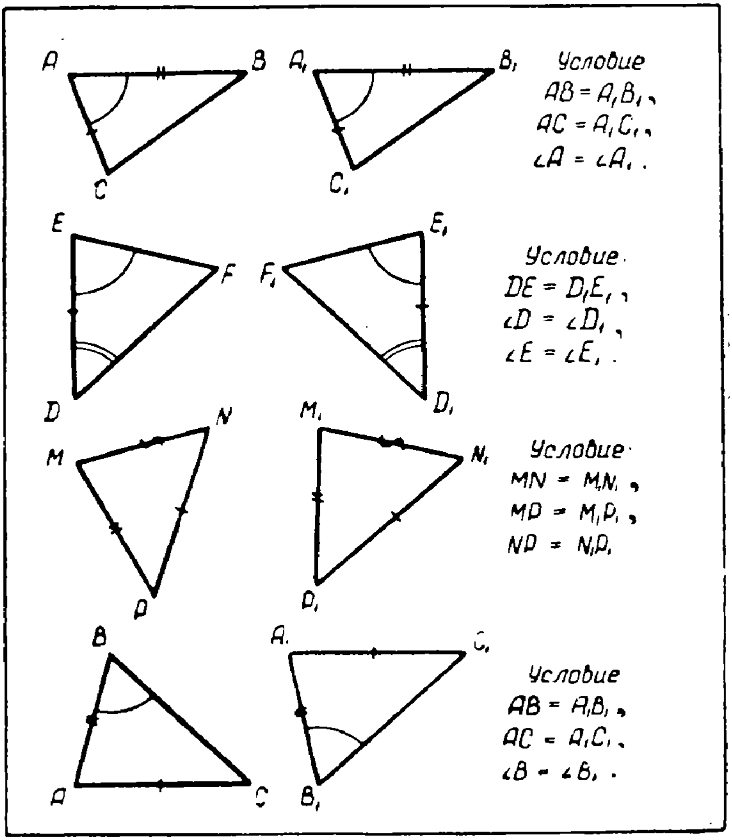
Изложение теоремы о третьем признаке равенства треугольников также начинается лабораторной работой: каждый ученик строит треугольник по трем сторонам, равным, например, 12 *см*, 10 *см*, 8 *см*. Школьники убеждаются, что в их опыте получились равные треугольники, и формулируют теорему.

Встает вопрос, почему нельзя дать прямое доказательство наложением, как это делалось при рассмотрении других случаев. В условии теоремы не предусмотрено равенство углов. В силу этого при наложении первого треугольника на второй, после совмещения одной пары равных сторон, нет данных судить о том, как расположатся другие две стороны накладываемого треугольника по отношению сторон второго треугольника. Этим объясняется невозможность дать доказательство наложением.

Так как признаки равенства треугольников имеют большое значение при доказательстве многих последующих теорем, то необходимо добиться, чтобы каждый ученик знал формулировки теорем и их следствий и умел выполнять доказательства.

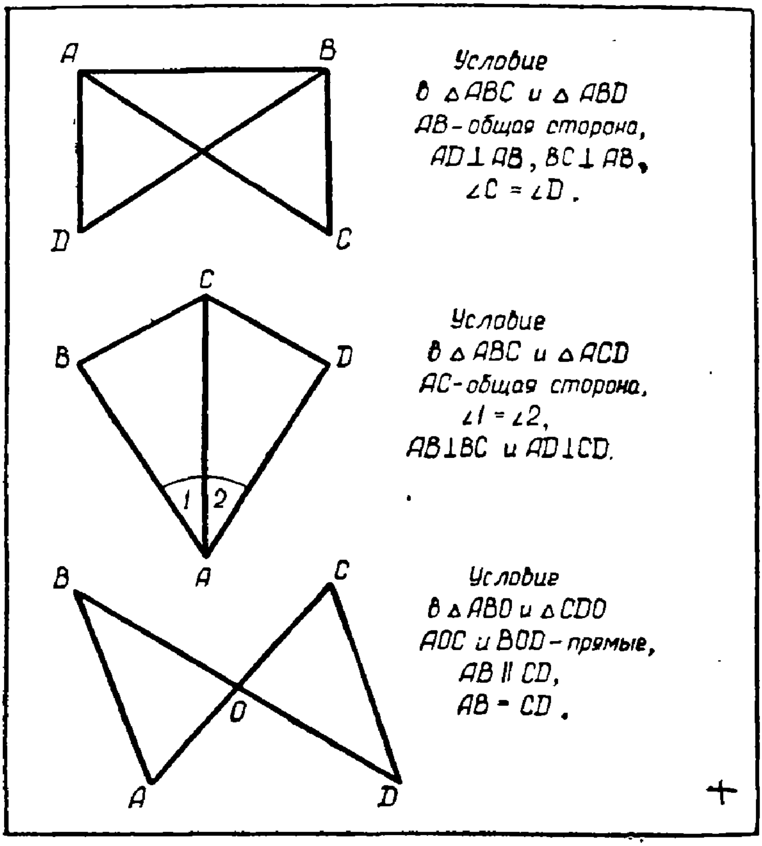
8. Первые упражнения

Дальнейшая работа должна быть направлена на то, чтобы привить школьникам уменья и навыки усматри-



Чертеж 19

игурах условия, позволяющие заключить о ра-
реугольников и мотивировать это заключение.
адо довести почти до полного автоматизма. С
прежде всего полезно использовать устные
, проводимые по готовым таблицам.
примерами. На чертеже 19 изображены па-
иков. В каждой паре равные элементы от-
ково и соответствующие равенства записа-
буется выяснить, будут ли треугольники каждой
ары равны и обосновать утверждение. Среди упражне-
ний найдут место и такие, которые не содержат достаточных данных, чтобы можно было утвердить равенство треугольников.



Чертеж 20

Такого рода упражнения в дальнейшем несколько усложняются: ситуации, в которых приходится рассматривать треугольники, делаются более сложными. Можно предложить выяснить, будут ли, например, пары треугольников, изображенных на чертеже 20, равны.

С той же целью выполняются устно следующие упражнения:

а) Сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника. Равны ли эти треугольники?

б) Можно ли сделать заключение о равенстве треугольников, если 1) боковая сторона и угол при вершине одного равнобедренного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу при вершине другого равнобедренного треугольника, 2) основание и угол при вершине одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и углу при вершине другого равнобедренного треугольника, 3) боковая сторона и угол при основании одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и углу при вершине другого равнобедренного треугольника?

в) Равны ли равнобедренные прямоугольные треугольники, если 1) гипотенуза одного из них равна гипотенузе другого, 2) катет одного из них равен катету другого?

9. Задачи на доказательство

Для дальнейшего успешного обучения важно выработать у каждого шестиклассника условные рефлексы: если надо доказать равенство двух отрезков или углов, то часто полезно включить эти элементы в два целесообразно выбранные или построенные треугольника, доказать их равенство, а затем сделать заключение о равенстве интересующих элементов. Для образования таких рефлексов используются задачи на доказательство. Кроме образования рефлексов, при решении их учащиеся приобретают самые начальные навыки пользоваться анализом. Называть этот метод необязательно. Важно, чтобы учащиеся четко формулировали и сознательно пользовались предложениями: «В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы», «В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны». Упрощение формулировок этих предложений нередко приводит к искажению их смысла и ошибкам, а поэтому недопустимо. Сознательное применение этих формулировок избавляет от легкомысленных заключений.

На уроках задачи даются с помощью настенных таблиц, при этом решение выполняется устно. Вместе с тем надо начинать предлагать задачи, данные текстом. В таком случае решение придется фиксировать: надо создать чертеж, выяснить условие, осознать заключение. Во всех случаях полезно поощрять, если будут предложены различные решения, а в иных случаях и подталкивать к поискам других доказательств.

Приведем некоторые задачи.

а) В настенной таблице изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, сходственные медианы AM и A_1M_1 и сделаны записи: «Условие: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C$, AM и A_1M_1 — медианы», «Доказать, что $AM = A_1M_1$».

После уяснения условия и заключения ведется беседа. Приведем вопросы и указания преподавателя.

— Что требуется доказать?

— Равенство отрезков часто доказывается включением их в целесообразно выбранные треугольники. В какие треугольники входят медианы как стороны?

— Какие элементы в треугольниках ABM и $A_1B_1M_1$ равны?

— Как читается теорема, на основании которой сделано заключение о равенстве треугольников?

— Какое заключение можно сделать из равенства треугольников?

— Итак, доказано то, что требовалось.

— Нельзя ли доказать равенство медиан другим способом?

Найдутся ученики, которые предложат рассмотреть $\triangle ACM$ и $\triangle A_1C_1M_1$. Для шестиклассников это — хорошая инициатива. Не исключена возможность, что некоторые предложат доказать равенство медиан путем совмещения треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Это — тоже хорошо.

б) Доказать, что в двух равных треугольниках 1) сходственные высоты равны, 2) сходственные биссектрисы равны.

Учащиеся самостоятельно находят пути доказательства; при затруднении поможет эвристическая беседа.

в) Доказать, что в равнобедренном треугольнике 1) высоты, проведенные из концов основания, равны, 2) биссектрисы углов при основании равны, 3) медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

Эти задачи несколько труднее, так как приходится пользоваться парами треугольников, частично налегающими друг на друга.

г) В равностороннем треугольнике все высоты равны. Доказать.

д) Если дан угол и проведена биссектриса его, то 1) прямая, перпендикулярная к биссектрисе, отсекает на сторонах угла равные отрезки, 2) каждая точка биссектрисы равно удалена от сторон угла. Доказать.

е) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AC = A_1C_1$, $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$. Доказать что $\angle A = \angle A_1$, $BC = B_1C_1$.

Желательно использовать задачи на доказательство, решение которых требует сведений из главы о параллельных прямых. Такие задачи дают возможность вспомнить некоторые факты, изученные ранее. Анализ становится разнообразнее.

ж) В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle ACD$, если $AD = BC$ и $AD \parallel BC$.

з) В четырехугольнике противоположные стороны попарно параллельны. Доказать, что диагональ рассекает его на два равных треугольника[1].

10. О дальнейшем изучении треугольников

Изложение теорем о соотношениях между сторонами и углами треугольника целесообразно начать с повторения предложения о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника, а затем сообщить вторую прямую теорему этой серии. Две обратные теоремы дают возможность еще раз возвратиться к связи между прямой и обратной теоремами.

Вместе с тем обратные теоремы потребуют применения способа доказательства приведением к абсурду. Если ранее, при изучении параллельных прямых, было

[1] П. А. Немытов, Сборник задач на доказательство по геометрии для 6—7 классов, пособие для учителя, Учпедгиз, 1956. Сборник содержит значительное количество полезных задач.

обращено внимание на особенности и структуру этого метода, то здесь учащиеся вспомнят план доказательства этим способом и применят его к новым для них теоремам. Если ранее не было обращено внимания на особенности доказательства приведением к нелепости, то необходимо познакомить учащихся с этим способом и сообщить план доказательства[1].

Способ приведения к абсурду найдет применение в доказательстве некоторых обратных теорем о перпендикуляре и наклонных к прямой, проведенным из одной точки, а также при изложении теоремы о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету. Такая обстановка благоприятна для того, чтобы школьники приобрели основательные навыки в применении способа приведения к абсурду.

Теорема о катете треугольника, лежащем против угла в 30°, относится к серии теорем о соотношениях между сторонами и углами треугольника. Она находит применение и в теоретических вопросах и при решении задач. Равенство катета половине гипотенузы является характеристическим свойством прямоугольного треугольника с углом в 30°. Поэтому полезно рассмотреть, хотя бы как задачу на доказательство, обратную теорему: «Если катет треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°». Эта теорема находит применение при решении задач, она легко устанавливается путем приложения к данному треугольнику равного ему треугольника.

Рассмотрение треугольников с двумя соответственно равными сторонами можно начать с следующего вопроса: в $\triangle ABC$ сторона AC — неподвижная, а сторона AB вращается около точки A. Как изменяется сторона BC, если $\angle A$ увеличивается? $\angle A$ уменьшается? Содержание прямой теоремы легко познается.

При наложении треугольника с меньшим углом на другой треугольник нельзя судить о том, как расположится 3-я вершина. Приходится рассматривать три случая: третья вершина — вне треугольника, на стороне его, внутри треугольника. Первый и третий случаи надо рассмотреть на уроке с достаточной подробностью, а второй — не вызовет затруднений.

---

[1] В. В. Репьев, Общая методика преподавания математики, Учпедгиз, 1958, гл. VII.

Обратную теорему о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами учащиеся, как показывает опыт, легко доказывают самостоятельно, если только подсказан способ доказательства.

Несколько своеобразно положение рассматриваемых теорем: они не находят применения в курсе геометрии 6-го класса. Это обязывает предложить несколько упражнений.

а) $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные. От их общей вершины A на сторонах, являющихся противоположными лучами, отложены равные отрезки AB и AC. На общей стороне отмечена точка D. Сравнить по величине отрезки BD и CD, если известно, что $\angle 1 > \angle 2$. (Против BD лежит $\angle 1$, против CD — $\angle 2$).

б) В $\triangle ABC$ сторона AB образует с проведенной к ней медианой $\angle 1$ и $\angle 2$. Какой из этих углов тупой, если $AC > BC$? (Против стороны AC лежит $\angle 1$).

11. Практические работы на поверхности земли

Некоторые вопросы главы «Треугольники» находят освещение в двух последующих очерках. Здесь мы уделим внимание практическим занятиям учащихся 6-го класса. В программе среди указаний по этому вопросу имеется следующее: «Изготовление простейших планиметрических моделей, иллюстрирующих свойства изученных фигур, некоторые теоремы и задачи». В процессе обучения геометрии, как неоднократно отмечалось, модель может быть полезна и даже необходима при сообщении понятий, при выяснении свойств фигур, при установлении способов доказательств. Однако трудно понять, с какой целью надо изготовлять планиметрические модели к усвоенным уже теоремам, к решенным уже задачам, зачем изготовлять модели, в которых надобность отпала.

Если преследуется цель пополнить математический кабинет, то в этом отношении значительно эффективнее окажется работа модельно-математического кружка учащихся. Полезно также учителю математики познакомиться с программой работы учащихся в мастерских, установить живую связь с преподавателем труда и с ведома этого преподавателя давать некоторым учащимся задания по изготовлению в мастерских наглядных пособий по заранее составленным чертежам. Этот путь пополнения математического кабинета используется школами далеко неполно.

С точки зрения преподавания геометрии уроки по изготовлению моделей к ранее изученному материалу надо признать бесполезными, а время, потраченное на них, потерянным.

Другое дело — практические занятия, связанные с прямыми и косвенными измерениями на поверхности земли.

Слово «геометрия» буквально означает землемерие, а слово «геодезия» — землеразделение. Значит, по происхождению геометрия и геодезия — родные сестры. Обе они родились в глубокой древности из практических потребностей человеческого общества для разрешения производственных задач, но дальнейшие судьбы их различны. Геометрия стала частью математики, она развилась в науку о пространственных формах и отношениях. Геодезия развилась в прикладную математическую науку, предметом которой являются форма и размеры Земли, способы и приемы изображения земной поверхности на картах и планах, способы измерений на местности при выполнении различных инженерных мероприятий. Главный предмет высшей геодезии — изучение формы и размеров Земли и создание основы для изучения земной поверхности — геодезической сети — совокупности выбранных и закрепленных на земной поверхности точек, называемых опорными геодезическими пунктами. Предмет топографии или геодезии — способы и техника съемки земельных участков и изображение их на картах и планах[1].

Естественно, что, когда перед учителем математики встала проблема о политехническом обучении, то его внимание прежде всего привлекла топография. Эта дисциплина дает методы подготовки технической основы для проектирования и великих, и рядовых строек нашей страны; она содержит прекрасные образцы применения на практике основ математической науки.

Имеются элементарные приложения геометрии к измерениям на поверхности земли, которыми пользуется, например, квалифицированный садовник при планиро-

---

[1] М. А. Знаменский, Измерительные работы на местности, Учпедгиз, 1956.

вании цветников и клумб. Эти приложения целесообразно использовать в педагогическом деле: они близки к программным вопросам геометрии 6—7-го классов и выполняются крайне простыми средствами.

Близки к этим упражнениям чисто учебные измерения на поверхности земли, которыми не пользуются в современной практике, но которые по сюжетам напоминают практические, как, например, некоторые приемы решения задач на определение неприступных расстояний в горизонтальной или в вертикальной плоскости.

Работы, связанные с измерениями на местности, которые применяются или могут быть применены в школе, можно условно разделить на несколько видов: а) упражнения, не связанные с составлением или использованием планов земельных участков, б) горизонтальные съемки земельных участков с составлением планов, в) упражнения по планам и картам, г) вертикально-горизонтальная съемка земельных участков с составлением планов, сюда же можно отнести и составление профиля.

Прежде всего остановимся на первом виде упражнений, которые можно использовать в 6-м классе.

Рулетку можно применить не только для измерения длин отрезков, но и для вычерчивания на поверхности земли дуг, если радиус не превышает длины рулетки Пусть на поверхности земли отмечена точка, которая должна быть центром дуги. Если конец рулетки прижать к поверхности земли, чтобы штрих с нулем находился над этой точкой, а металлическую шпильку или палочку с заостренным концом прижать к рулетке, где штрих с отметкой, например, 3 *м*, то на поверхности земли острием шпильки или палочки можно прочертить дугу. Для построения на поверхности земли окружности с данным радиусом можно использовать и шнур. Так поступают, например, при разбивке в парках клумб.

Для предстоящей работы на местности шестиклассники организуются в бригады по 4—5 человек. Каждая бригада получает рулетку или мерный шнур, 10 шпилек, 5 вех и план занятий.

Изложим решение на местности некоторых задач.

1) К прямой AB в данной на ней точке C построить перпендикуляр.

Прямая AB задана точками A и B, в которых поставлены вехи. Точка C также отмечена вехой или шпилькой.

Отложим с помощью рулетки на прямой AB от точки C произвольные равные отрезки CD и CE, например, по 3 *м*. В точках D и E поставим шпильки.

Придерживая концы рулетки у точек D и E, находим середину ленты и натягиваем в виде ломаной DKE, где K — середина ленты. В точке K ставим веху. Очевидно, что $CK \perp AB$. Для решения этой задачи можно познакомить учащихся 6-го класса с «египетским» треугольником. Если на бумаге построить треугольник, стороны которого 3, 4 и 5 единиц длины, и измерить транспортиром угол, лежащий против большей стороны, то он окажется равным 90°.

Землемеры древнего Египта пользовались таким треугольником для построения прямых углов на местности.

По AB от точки C откладываем отрезок CD, равный 3 *м*. Начальный штрих ленты поместим в точке D, а штрих с отметкой 9 *м* — в точке C. Находим штрих, соответствующий 5 *м*, и натягиваем рулетку, чтобы получилась ломаная DKC ($DK=5$ *м*, $KC=4$ *м*). Получим прямой угол ACK.

2) Из точки A провести перпендикуляр на прямую BC.

Прямая BC задана на местности точками B и C, в которых находятся вехи. В точке A также поставлена веха.

Прочертим заостренным концом вехи на земле ту часть прямой BC, которая расположена вблизи будущего основания перпендикуляра.

С помощью рулетки из точки A опишем произвольным радиусом дугу, пересекающую BC в точках K и L. Поставим в этих точках шпильки. Находим длину отрезка KL и его середину — точку E. Очевидно, что $AE \perp BC$.

Описанное построение можно выполнить, если AE меньше длины ленты рулетки.

Если AE не меньше длины ленты, то построение перпендикуляра выполняется или экером, или угломером.

3) Построить на местности угол, равный данному углу ABC.

Пусть дан на местности $\angle ABC$ и луч B_1C_1 с началом в точке B_1.

Требуется на этом луче построить угол, равный $\angle ABC$, с вершиной в точке B_1, расположенный влево от луча B_1C_1.

Отложим по сторонам $\angle ABC$ от его вершины произвольные равные отрезки BD и BE, например, по 5 *м*. Находим длину отрезка DE (пусть, например, 8 м).

Далее от точки B_1 по лучу откладываем отрезок B_1E_1, равный BE (5 *м*), и из точек B_1 и E_1 лентой рулетки описываем дуги соответственно радиусами 5 *м* и 8 *м*, чтобы эти дуги пересекались.

В точке D_1 пересечения дуг ставим веху. Легко убедиться, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

4) Построить биссектрису данного угла.

На сторонах заданного на местности угла ABC от вершины B откладываем рулеткой равные отрезки BK и BL.

Измеряем расстояние KL, делим длину KL пополам и от точки K откладываем отрезок $KP = \frac{1}{2} KL$. Получаем BP — биссектрису $\angle ABC$.

5) На местности построить прямую, параллельную данной прямой AB и проходящую через точку C, не лежащую на AB.

1-е решение. Отмечаем вехой на прямой AB произвольную точку D. Строим, как описано в задаче 3, $\angle DCE$, равный $\angle CDB$.

2-е решение. Строим из точки C перпендикуляр CD на прямую AB, как изложено в решении 2-й задачи.

К CD в точке C строим перпендикуляр CE, как указано в решении 1-й задачи.

Желательно обсудить с учащимися вопросы, как, пользуясь только рулеткой, шпильками и вехами, построить на местности углы в 60°, 30°, 45°, 15°, 120°, 135°, 150°. Некоторые из этих задач можно выполнить, а в отношении других достаточно установить план выполнения.

Среди упражнений могут найти место и те, которые рассматривались на уроках в зимний период, демонстрировались на классном полигоне, но не могли быть выполнены на местности. В частности, программа геометрии рекомендует измерение углов на местности и глазомерную оценку величины углов.

12. Первая съёмка земельного участка

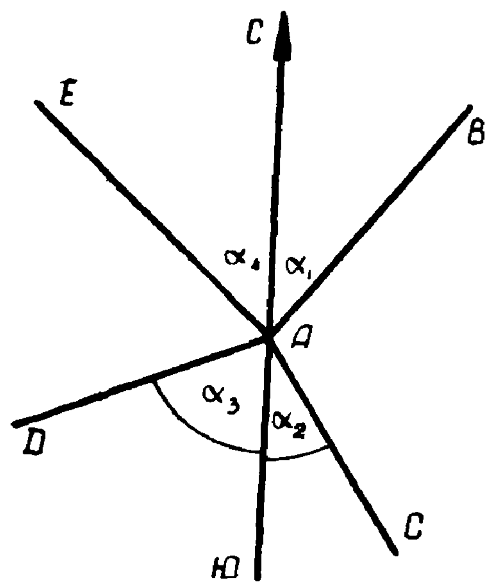
Программа по геометрии рекомендует провести съемку несложного участка (четырехугольника, пятиугольника) способом разложения на треугольники и обходом по периметру. Нельзя признать, что указания программы в этом отношении определенны и четки. Способом обхода съемку можно провести с помощью различных приборов. Какой же прибор рекомендуют авторы программы?

Каким бы способом съемка обходом по периметру не выполнялась, неизбежно при накладке плана приходят к невязке периметра (к линейной невязке), естественно, встанет вопрос об абсолютной и относительной невязке, о необходимости ликвидировать линейную невязку. А это требует кропотливых приближенных вычислений, сравнительно сложных и тонких построений. Если при этом при съемке будет использовано измерение внутренних углов многоугольника, то встретится еще угловая невязка и возникнет потребность ее ликвидировать. Все это делает съемку обходом по периметру непригодной для использования в 6-м классе; от нее необходимо отказаться. Ее можно применить или в конце обучения в 8-м или в начале 9-го класса.

Съемка способом разложения многоугольника на треугольники не является ни простейшей, ни наиболее наглядной, но ее можно принять для использования в 6-м классе: по содержанию она близка программе геометрии этого класса.

На планах направление магнитного меридиана обычно указывается параллельно боковым срезам листа бумаги так, чтобы север был наверху. Для правильного расположения плана участка на листе бумаги целесообразно ввести понятие о румбе луча. Будем считать, что луч на земной поверхности расположен в горизонтальной плоскости или в плоскости, которую практически можно принять за горизонтальную. Румбом луча на земной поверхности называют острый угол, составленный магнитным меридианом, проходящим через начало луча, и лучом. На чертеже 21 угол $\alpha_1=35^\circ$ — румб луча AB, угол $\alpha_2=30^\circ$ — румб луча AC и т. д. Говорят: румб луча AB — северо-восток 35°, румб луча AD — юго-запад 67° Пишут соответственно: *СВ*:35°, *ЮЗ*:67°.

Для грубо приближенного измерения румбов применяется компас. Направление магнитного меридиана указывает его магнитная стрелка. Перед использованием компаса необходимо установить, какова цена деления лимба. Чтобы определить румб луча AE, помещают компас в его вершине A. Вращая коробку компаса, совмещают северный конец стрелки с нулем лимба (буквой *С*); затем через центр лимба с помощью ребра карандаша или линейки визируют по направлению луча *АЕ* и отсчитывают угол от 0° до направления этого луча. Получают румб: *СЗ*:45°.



Чертеж 21

Для съемки способом разложения на треугольники выбирается земельный участок в 1—2 *га*, а в условиях большого города и меньше, с поверхностью, близкой к горизонтальной, лишенной сложной внутренней ситуации, с 4—6 вершинами.

Школьники организуются в бригады по 4—5 человек в каждой. Бригада получает рулетку или мерный шнур, 10 шпилек, компас и 4 вехи.

При съемке многоугольник местности мысленно разбивается диагоналями на треугольники. Измеряют румб одной из сторон 1-го треугольника и все его стороны; затем измеряют стороны 2-го треугольника, смежного с 1-м, и т. д. до последнего треугольника.

Результаты этих измерений аккуратно заносятся в обычную ученическую тетрать. В тетради на глаз от руки карандашем изображается многоугольник местности, его диагонали, которые измеряются при съемке. Это — абрис; в него записываются румб и длины отрезков.

В классе каждые двое учащихся составляют один план. На листе бумаги прежде всего изображается направление магнитного меридиана, а затем с помощью транспортира направление того луча, румб которого известен. В принятом масштабе на луче откладывается длина соответственной стороны 1-го треугольника и на ней по двум другим сторонам строится этот треугольник. К нему пристраивается 2-й треугольник и т. д.

На плане подписываются название участка, масштаб, состав бригады, длины сторон многоугольника и тех диагоналей, которые измерялись.

Если применить уменья учащихся вычислять площади треугольников, которые они получили в 5-м классе, то можно по плану определить площадь земельного участка: длины одних отрезков известны, длины других легко найти по плану с учетом масштаба. При вычислении площади приходится иметь дело с приближенными вычислениями: используются правила округления и подсчета цифр.

Описанный способ можно применить и для съемки внутренней ситуации земельного участка, хотя в этом отношении он является тяжелым и громоздким: в 6-м классе от этого надо воздержаться.

В съемке соблазнительно то, что она выполняется очень простыми средствами; основную роль играет рулетка или мерный шнур и 10 шпилек; компас имеет вспомогательное значение; съемку можно выполнить и без него, если каким-либо способом приближенно определить направление одной из сторон.

Из горизонтальных съемок, которые можно организовать в школе, это — одна из самых точных съемок.

Однако с методической точки зрения съемка имеет и отрицательные черты: на местности заполняется только абрис, а план составляется в классе, в процессе съемки не все учащиеся осознают целесообразность производимых измерений, не все ясно представляют, как в дальнейшем используется полученный числовой материал и достаточно ли его для вычерчивания плана. Другими словами, съемка недостаточно наглядна.

Опыт свидетельствует, что горизонтальная мензульная съемка способом кругового визирования является наиболее простой и наглядной. В нашей практике она всегда была первой съемкой, с которой знакомились школьники.

---

[1] В. В. Репьев, Практические работы по математике на местности, Горьковское книжное издательство, 1953.

ОЧЕРК VI

ПЕРВЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ФИГУР

1. Геометрические отображения в школе

Отображение — одно из общих и существенных понятий современной математики, имеющее большое теоретическое и прикладное значение.

Пусть X — множество элементов x. Допустим, что установлено некоторое правило, по которому каждому элементу x ставится в соответствии элемент y, принадлежащий другому множеству $У$. В таком случае говорят, что задано отображение множества X в множество $У$. Элемент x называют прообразом соответственного элемента y, а последний — образом x. Если каждый элемент множества $У$ является образом элемента множества X, то имеем отображение X на множество $У$.

Если правило соответствия между элементами множеств X и $У$ таково, что 1) всякому x соответствует y, 2) всяким двум различным прообразам соответствуют различные образы, 3) каждому y найдется соответственный элемент x, именно тот, образом которого является y, то такое отображение называется взаимно однозначным.

Для дальнейших наших целей достаточно вести речь о точечных отображениях плоской фигуры на фигуру той же плоскости или всей плоскости в самое себя.

Пусть, например, каждой точке окружности ставится в соответствие ее прямоугольная проекция на определенный диаметр AB той же окружности; имеем отображение множества точек окружности на множество точек диаметра AB. Отображение в этом примере не является взаимно однозначным: каждой точке диаметра, кроме его концов, соответствуют две точки окружности.

Если точки полуокружности с концами дуги A и B ортогонально проектировать на диаметр AB, то в этом примере каждой точке полуокружности соответствует одна точка диаметра, всяким двум различным точкам окружности соответствуют различные точки диаметра, для каждой точки диаметра можно найти точку полуокружности, именно ту, образом которой является точка диаметра AB. Имеем взаимно однозначное отображение.

В 6-м классе ученики знакомятся с проекцией отрезка на прямую. Если AB — отрезок и A_1B_1 — его ортогональная проекция на прямую a, то легко усмотреть, что также имеем пример взаимно однозначного отображения, если AB не перпендикулярен a.

Понятие точечного отображения совпадает с понятием функции одного переменного: точки x множества X — допустимые значения аргумента, а точки y множества $У$ — значения функции. Имеем: $y=f(x)$, где символ f означает правило соответствия.

Понятие о взаимно однозначном отображении совпадает с понятием взаимно обратных функций:

$$y=f(x) \text{ и } x=\varphi(y),$$

причем

$$\varphi[f(x)]=x \text{ и } f[\varphi(y)]=y.$$

Правило соответствия может быть задано различными способами: описанием, аналитическим выражением, определенным геометрическим построением. В трех приведенных примерах правило соответствия установлено указанием построения. В дальнейшем правило соответствия задается преимущественно указанием способа построения по точке — прообразу точки — образа.

Если каждой точке P плоскости по установленному правилу ставится в соответствие точка P_1, той же плоскости, то такое отображение называется преобразованием плоскости[1]. Примером может служить параллельный пе-

---

[1] Иногда говорят «Преобразование плоскости в себя», хотя понятие «преобразование» уже само по себе означает переход множества в себя.

ренос: каждой точке P плоскости ставится в соответствие точка P_1 той же плоскости, находящаяся от P в направлении и на расстоянии, указанными заданным вектором. Параллельный перенос — взаимно однозначное преобразование.

Примерами точечных преобразований плоскости в себя могут служить вращение вокруг заданной точки, зеркальное отражение от прямой (симметрия относительно прямой), отражение от заданной точки (центральная симметрия), гомотетия, ибо все это суть правила соответствий, устанавливаемых между точками плоскости, именно взаимно однозначных соответствий.

При каждом преобразовании плоскости в себя любая фигура этой плоскости F переходит, переводится в соответственную фигуру F_1, т. е. в фигуру, состоящую из соответственных точек. Между фигурами (множествами точек) F и F_1 имеет место взаимно однозначное отображение. Фигуру F можно назвать прообразом фигуры F_1, а последнюю — образом фигуры F.

Точечным отображениям и в частности преобразованиям уделяется значительное внимание в современной элементарной геометрии[1]. А это оказывает влияние на школьные учебные программы по геометрии и на учебные руководства и задачники. Действительно, за последние 40 лет простейшие отображения (переводы) фигур включаются в школьное обучение.

Те из точечных преобразований плоскости, которые каждую фигуру переводят в равную (точнее конгруентную), называются движениями. Зеркальное отражение от прямой, отражение от точки, параллельный перенос — движения. Гомотетия, если $|k| \neq 1$, не есть движение, ибо она переводит фигуру в подобную, но не равную исходной.

Геометрическое понятие о движении абстрагировано от движений твердых тел, рассматриваемых в классической механике. При этом отвлекаются от времени, в течение которого двигается тело, от скорости, от промежуточных положений тела; сохраняют и включают в поня-

---

[1] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, Учпедгиз, 1957.

Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1, Гостехиздат, 1948. Б. В. Кутузов, Геометрия, Учпедгиз, 1950 и более поздние издания.

тие движения начальное и конечное положение тела и то, что форма тела, его линейные размеры не меняются, тело не деформируется.

В школьных курсах планиметрии приходится иметь дело с различными видами движений. Одни из них вводятся как не требующие особых рассмотрений, как навеянные практикой в обращении с твердыми телами и в силу этого подсказываемые интуицией. Так обстоит дело с наложением одной фигуры на другую, с вращением фигуры в плоскости вокруг точки. Применение моделей, на которых осуществляются соответствующие механические движения, способствует образованию представлений об этих видах движений. Другие движения рассматриваются специально, при этом выясняются взаимосвязи и взаимоотношения прообраза и образа, свойства их, которые в дальнейшем применяются при изучении других фигур и при решении задач. К числу таких движений относятся зеркальное отражение от прямой, отражение от точки, параллельный перенос.

При изложении планиметрии в школе в отношении отображений и в частности преобразований целесообразно руководствоваться следующими положениями:

1) Так как отображения и в частности преобразования являются важными понятиями современной элементарной геометрии, то им надлежит уделять внимание в школьном обучении. Это следует делать в доступной для учащихся форме, с учетом умственного развития подростков и юношей. Включение соответствующего материала в школьные программы по геометрии и учебные руководства повышает теоретический уровень преподавания геометрии, в некоторой мере приближает его к современному состоянию элементарной геометрии, как научной дисциплины.

2) Так как усвоение преобразований плоскости требует развитого абстрактного мышления и пространственного воображения, то даже понятия о простейших преобразованиях недоступны учащимся 6 и 7 классов. Поэтому в этих классах уместно вести речь о переводах по установленным правилам отдельных несложных фигур в соответственные фигуры той же плоскости: чертеж фигуры — прообраза, графическое задание правила перевода, получение путем построения чертежа фигуры—образа, — все это придает материалу конкретность, наглядность и делает простейшие виды переводов фигур доступными для

усвоения. По существу школьные переводы по определенному правилу одной фигуры в другую являются взаимно однозначным отображением фигуры на другую фигуру.

3) Изучение переводов одних фигур в другие естественно начинается с использования частных видов соответствия: зеркального отражения от оси, отражения от точки, параллельного переноса. Последовательность их рассмотрения в основном определяется школьной программой геометрии. Опираясь на этот материал, желательно дать представление о преобразовании по определенному правилу плоскости в самое себя. Это можно сделать перед изучением гомотетии после обзорного повторения ранее изученных переводов фигур.

4) При ознакомлении с каждым частным видом перевода целесообразно в качестве исходного наглядного материала привлекать конкретные плоские материальные образы, рисунки и черетежи действительных пространственных форм; таким путем создается общее представление о характере перевода и вскрывается его значение в практике. Это представление способствует введению соответствующих понятий, в иных случаях позволяет установить необходимый и достаточный признаки наличия перевода. Оно полезно в отношении политехнического обучения.

5) С целью активного усвоения каждого частного вида отображения, каждого частного вида перевода одной фигуры в другую полезно широко использовать выполнение целесообразно подобранных упражнений с последующими обоснованиями. Уместно проводить и такие упражнения, которые подготовляют сознание школьников к последующему введению понятия о взаимно однозначном соответствии между точками прообраза и образа. Это достигается путем выполнения соответствующих построений для конкретных фигур.

Введение понятия о взаимно однозначном соответствии между элементами двух множеств целесообразно отнести к началу изучения главы о гомотетии. На этом этапе обучения оно представляет интерес и для курса геометрии и для изучения алгебры.

6) Если те или иные понятия, связанные с отображением, введены, если правила переводов установлены, то в дальнейшем надо, где это уместно, использовать эти понятия и правила при изучении новых геометрических образов, при решении доступных школьникам задач на по-

строение. Это сделает знания, умения и навыки применить их действенными и прочными.

2. Введение понятия об осевой симметрии

Термином «осевая симметрия» часто выражают два родственных, но не одинаковых понятия. Обычно под этим имеют в виду отражение от прямой, как преобразование плоскости, по которому точка M переходит в M_1 при условии, что указанная прямая перпендикулярна к отрезку MM_1 и делит его пополам. Было бы лучше называть такое преобразование отражением (зеркальным отражением) от прямой, ибо понятие осевой симметрии применимо лишь к конечным фигурам. В этом случае оно означает свойство фигуры переходить в себя при отражении плоскости от оси симметрии этой фигуры. В точном истолковании понятие осевой симметрии уже, чем понятие отражения от прямой. В школьном обучении не различают оттенков в термине «осевая симметрия», а с методической точки зрения полезно различать.

Оба истолкования — родственны между собою, переходят одно в другое. В школьном преподавании приходится иметь дело с каждым из этих истолкований: в одних случаях необходимо вести речь о переводе (отображении) фигуры в симметричную относительно оси, при этом на первое место выступает идея соответствия между точками; в других случаях ставится вопрос о наличии осевой симметрии как свойства плоской фигуры. На первых порах знакомства с осевой симметрией наложимость фигур при вращении полуплоскости вокруг оси является необходимым и достаточным условием наличия осевой симметрии. На самом деле, если две фигуры или части (половины) одной и той же фигуры симметричны относительно оси, они необходимо накладываются друг на друга всеми точками; если две фигуры или части (половины) одной фигуры накладываются всеми точками при перегибании по прямой, то они симметричны относительно этой прямой.

Возможны и два варианта школьного изложения вопроса об осевой симметрии.

В *первом из них понятие* об осевой симметрии вводится примерно так: а) определяется, какие две точки называются симметричными относительно прямой, б) рассматривается симметрия отрезков относительно оси, в) вводится определение симметричных относительно оси фигур и выполняются переводы простейших фигур в симметричные, г) показывается значение осевой симметрии в практике.

Такое введение понятия об осевой симметрии фигур не лишено значительной дозы формализма, а поэтому мало интересно с методической точки зрения.

Второй вариант состоит в следующем: а) формируется представление о фигурах, симметричных относительно оси, путем выполнения элементарных опытов и наблюдений фигур на бытовом и взятом из практики материале и признаке наличия симметрии, б) вводится понятие о симметричных точках, в) изучается симметрия отрезков, г) выполняются упражнения в переводе фигур в симметричные относительно оси и д) вновь возвращаются к симметрии в практике и природе.

Этот вариант введения понятия об осевой симметрии опирается на наглядность и опыты, на применении симметрии в практике, дает возможность наглядно установить и признак симметрии фигур относительно оси, а поэтому в педагогическом отношении он ценнее и заслуживает предпочтения перед первым.

Школьники уже имели дело с перегибанием плоской фигуры по прямой до наложения одной полуплоскости на другую. Такое перегибание легко демонстрируется с помощью листа прозрачной бумаги. Выполним следующий опыт. Перегнем лист бумаги по некоторой прямой l, чтобы одна половина легла на другую. Вычертим острием циркуля на сложенном листе какую-либо фигуру (можно сделать чернильную кляксу перед перегибанием). Разгибая лист, получим две фигуры. Такие фигуры называют симметричными относительно прямой l, а прямую l называют осью симметрии. При перегибании чертежа по прямой l симметричные фигуры накладываются одна на другую, т. е. они равны.

Можно осуществить и такой опыт. Изобразим на листе бумаги ось симметрии l. Положим на этот лист модель треугольника, окрашенную в красный или другой яркий цвет. Совместим с прямой l ребро зеркала и расположим его так, чтобы плоскость его была перпендикулярна к плоскости листа бумаги. Учащиеся увидят в зеркале треугольник, который симметричен модели треугольника относительно оси l. Этот опыт можно поручить выполнить в домашней обстановке.

Чтобы обогатить представления учащихся о фигурах, симметричных относительно оси, педагог демонстрирует на уроке подходящие образцы узоров для вышивки, чертежи орнаментов и строительных деталей (оконной рамы, двухстворчатой двери), сделанные на прозрачной бумаге. При демонстрациях подмечается наличие у фигур оси симметрии и подчеркивается, что при перегибании по оси одну часть фигуры можно наложить на другую. Итак, признаком симметрии двух фигур или частей одной фигуры является возможность наложить их всеми точками путем перегибания плоскости по прямой.

Перегибание плоскости по оси симметрии и наложение фигуры одной полуплоскости на соответственную фигуру другой полуплоскости является в школьном обучении основным способом установления симметрии фигур относительно оси. Указанные мероприятия подготовляют к мысленному перегибанию плоскости с целью наложить фигуры.

3. Пути усвоения перевода фигур

Предстоит несколько глубже проникнуть в сущность осевой симметрии. При рассмотрении симметричных точек, отрезков и других фигур целесообразно использовать последовательно такие приемы: с помощью линейки, треугольника и циркуля выполняется построение фигур; чтобы убедиться в осевой симметрии построенных фигур, мысленно производится перегибание по оси и доказывается, что фигуры накладываются одна на другую, при этом уже нет надобности в демонстрациях; делаются соответствующие выводы.

Покажем применение этих приемов.

Один ученик на доске, остальные в тетрадях изображают прямую l и точку A, не принадлежащую этой прямой. Требуется построить точку, симметричную точке A относительно прямой l. Из точки A проведем перпендикуляр AM на прямую l, продолжим его за точку M и отложим отрезок MA_1, равный AM. Учащиеся с должными мотивировками мысленно производят перегибание плоскости по прямой l и убеждаются, что точки A и A_1 совпадут. Значит, эти точки симметричны относительно прямой l.

Если две точки лежат на одном перпендикуляре к прямой по разные стороны и на равных расстояниях от нее, то они симметричны относительно этой прямой.

Точку, лежащую на оси симметрии, считают симметричной самой себе. Обращается внимание на то, что ось симметрии перпендикулярна к отрезку, соединяющему симметричные точки и делит его пополам. Целесообразно повторить построение симметричных точек при ином расположении оси и решить задачу: построить ось симметрии двух данных точек. Устанавливается, что две точки плоскости имеют только одну ось симметрии, лежащую в этой плоскости.

Пусть дана ось симметри l и отрезок AB, не принадлежащий ей. Требуется построить отрезок, симметричный отрезку AB относительно оси l. Как в предыдущем упражнении, учащиеся строят точки A_1 и B_1, симметричные соответственно точкам A и B относительно прямой l и находят отрезок A_1B_1. Затем воображаемым перегибанием по оси убеждаются, что отрезки AB и A_1B_1 совпадают. Значит, они симметричны и равны.

Обращается внимание на следующее: 1) если дана точка C отрезка AB, то можно найти точку, симметричную ей, принадлежащую отрезку A_1B_1, 2) если даны две различные точки отрезка AB, то им соответствуют две различные точки отрезка A_1B_1, 3) каждой точке C_1 отрезка A_1B_1 соответствует точка C отрезка AB, именно та, для которой C_1 является симметричной. Рассмотрение этих фактов сопровождается построениями с должными мотивировками.

Равенство симметричных относительно оси отрезков применяется для косвенного измерения длины недоступного для непосредственного измерения отрезка с доступными концами. В распоряжении бригады учащихся — эккер, 8 вех и рулетка. На уроке решение задачи демонстрируется на классном полигоне с применением миниатюрных эккера и вех, а в мае месяце решение повторяется на поверхности земли.

Целесообразно решить задачи на доказательство.

а) Каждая точка, лежащая на оси симметрии двух данных точек, одинаково удалена от этих точек.

б) Биссектриса угла, меньшего $2d$, есть ось симметрии сторон угла.

в) Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника есть ось симметрии этого треугольника.

г) Если вершины одного треугольника симметричны относительно оси соответственным вершинам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Из приводимых задач одни решаются на уроке, другие в порядке домашней работы.

а) Построить луч, симметричный данному лучу AB относительно оси l.

б) Построить прямую, симметричную данной прямой CD относительно данной оси.

в) Даны две пересекающиеся прямые a и b и ось симметрии k. Построить прямые, симметричные данным относительно оси k.

г) Построить ось симметрии двух данных параллельных прямых.

д) Найти оси симметрии двух данных пересекающихся прямых.

При решении последней задачи учащиеся встречаются с тем, что фигура имеет две оси симметрии.

В порядке беглых упражнений полезно обсудить вопросы, сколько осей симметрии имеет: а) равносторонний треугольник, б) окружность и круг.

В качестве итога рассматривается вопрос, где в практике находит применение осевая симметрия фигур.

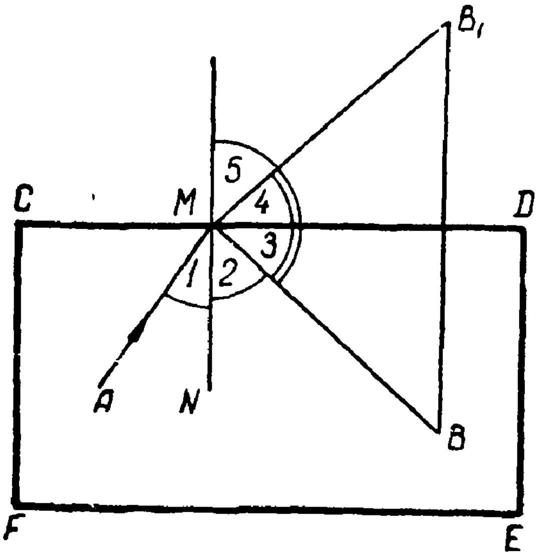
4. Задачи на построение, решаемые с помощью осевой симметрии

Программа по геометрии нашей школы не предусматривает решения задач на построение способом осевой симметрии. Формально преподаватель будет прав, если на уроках он не уделит внимания этому вопросу.

Однако целесообразно познакомить учащихся с этим способом. Это уместно сделать после изучения главы о четырехугольниках; в порядке кружковых занятий можно получить хорошие результаты.

Задача 1. На бильярдном столе дано положение двух шаров. В каком направлении надо толкнуть один из них, чтобы он, отразившись от борта, ударил другой шар?

На бильярдном столе $CDFF$ дано положение двух шаров A и B (черт. 22). Требуется указать направление, в каком надо толкнуть шар A, чтобы он, отразившись от борта CD, ударил шар B.



Чертеж 22

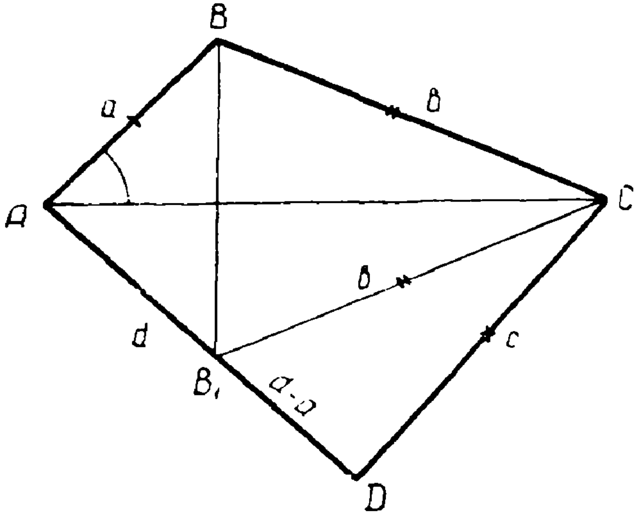
. Анализ. Допустим, что задача решена: шар A надо толкнуть по AM, чтобы он, после отражения в точке M от борта CD попал в шар B. Построим прямую MN, перпендикулярную к CD. Известно, что угол падения равен углу отражения; значит, $\angle 1 = \angle 2$. Построим точку B_1, симметричную точке B относительно CD. Так как $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$, то и $\angle 1 = \angle 5$, а это возможно только тогда, когда линия AMB_1 будет прямая. План построения очевиден.

Задача 2. Построить четырехугольник по данным четырем сторонам его, если известно, что диагональ делит один из внутренних углов его пополам.

Анализ. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник (черт. 23), его стороны a, b, c, d даны. Диагональ AC делит $\angle BAD$ пополам. Диагональ AC — ось симметрии $\angle BAD$. Точка B_1, симметричная точке B относительно AC, принадлежит стороне AD. Треугольник ABC при перегибании фигуры по AC займет положение треугольника AB_1C. В треугольнике B_1CD сторона $B_1C = b$, $CD = c$ и

$BD = d - a$. При известных условиях этот треугольник можно построить. Имея этот треугольник, легко построить и четырехугольник $ABCD$.

Итак, использование осевой симметрии дало возможность задачу о построении четырехугольника $ABCD$ свести к задаче построения $\triangle B_1CD$ и найти план построения.



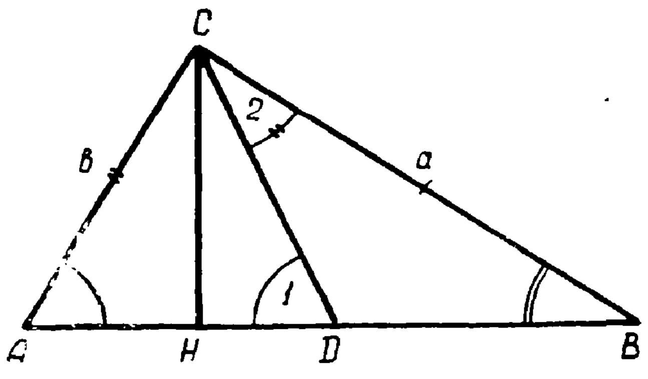
Чертеж 23

Задача 3. Построить треугольник по двум сторонам a и b и углу $\alpha = A - B$.

Анализ. Пусть $\triangle ABC$ — искомый: $BC = a$, $AC = b$, $A - B = \alpha$ (черт. 24). Проведем высоту CH и построим относительно нее $\triangle CDH$, симметричный $\triangle ACH$. Его вершина D принадлежит AB. Так как $\angle 1$ — внешний относительно $\triangle BCD$, то $\angle 1 = \angle B + \angle 2$. Отсюда $\angle 2 = \angle 1 - \angle B = \angle A - \angle B = \alpha$. В $\triangle BCD$ сторона $BC = a$, $CD = b$ и угол между ними равен α. Этот треугольник легко построить. А имея его, не встретит затруднений построение $\triangle ABC$. План построения установлен.

Как показывают решения приведенных задач, сущность рассматриваемого способа заключается в том, что путем перевода части данной фигуры с помощью осевой симметрии задачу сводят к вспомогательной задаче, решение которой проще и обеспечивает решение данной задачи.

Дать общий признак задач, указывающий на целесообразность применить способ осевой симметрии нет возможности. Однако некоторые частные признаки можно отметить. Если подмечено, что решение задачи выполняется легко, когда часть данных элементов расположена по одну, а другая часть по другую сторону данной прямой, то это служит указанием на то, что целесообразно опереться на способ осевой симметрии тогда, когда данные расположены по одну сторону от этой прямой. Например, решая задачу: «На данной прямой найти точку, чтобы сумма ее расстояний от двух данных точек, не принадлежащих этой прямой, была наименьшая» легко установить, что если две данные точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, то задача решается очень просто; это является указанием на целесообразность перевода с помощью осевой симметрии части фигуры, когда данные точки расположены в одной полуплоскости относительно данной прямой.



Чертеж 24

Если в задаче указана прямая, являющаяся осью симметрии части элементов данной фигуры, то это также наводит на мысль применить осевую симметрию. Примером служит задача 2.

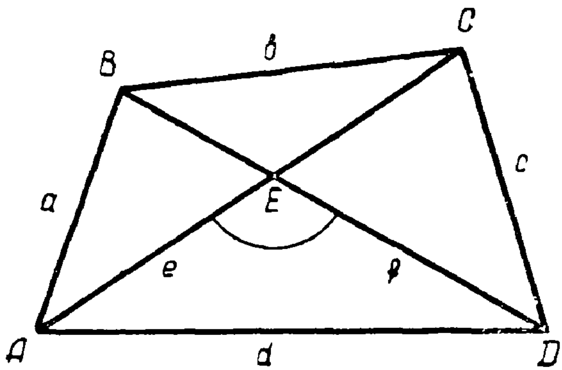
Если в задаче дана разность двух углов, то осевая симметрия, как в задаче 3, может помочь найти план решения.

Приведем несколько задач.

1) Дана прямая и две точки, не принадлежащие ей. На этой прямой найти точку, чтобы лучи, проведенные из нее к двум данным точкам, составляли с данной прямой равные углы.

2) Построить трапецию по следующим данным: а) a, d, C и диагональ делит угол A пополам, б) b, c, d и диагональ—биссектриса угла A, в) c, d, A и диагональ — ось симметрии угла D.

В четырехугольнике принятые обозначения углов, сторон и диагоналей указаны на чертеже 25.



Чертеж 25

3) Построить трапецию по следующим данным: а) a, c, d, $\alpha=A-D$, б) a, c, e, $\alpha=A-D$, в) a, b, c, $\alpha=C-B$.

За ось симметрии можно принять прямую, перпендикулярную к верхнему основанию в его середине.

4) На бильярдном столе дано положение двух шаров A и B; указать направление, в каком надо толкнуть шар A, чтобы он, отразившись а) от двух смежных бортов, б) от трех смежных бортов, ударил шар B.

Используются две (три) оси симметрии — прямые, содержащие борта, от которых происходит отражение. Последовательность использования осей обратна последовательности отражений.

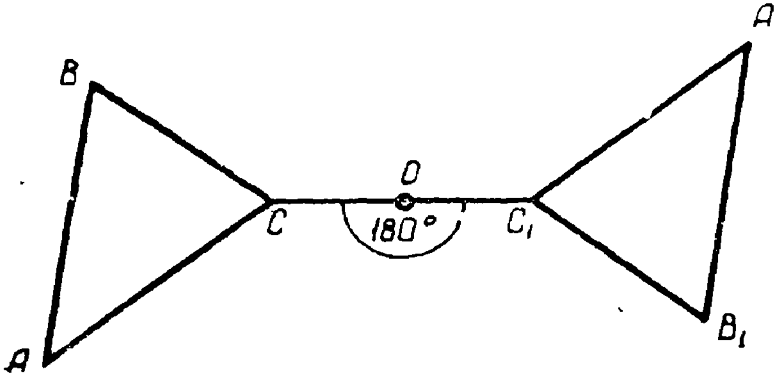
5. Введение понятия о центральной симметрии

Симметрия фигур относительно точки — второе точечное отображение одной фигуры в другую, рассматриваемое в школьном курсе планиметрии. В числе свойств частных видов четырехугольников обычно отмечается наличие осей симметрии и центров симметрии. Это определяет место рассматриваемой темы в школьном курсе: целесообразно изложить ее перед главой о четырехугольниках.

Как при изучении осевой симметрии, прежде всего уместно сформировать представление о центрально симметричных фигурах. С этой целью применяются демонстрации моделей, наблюдение центральной симметрии на материале, заимствованном из практики. Вместе с тем наглядный материал дает возможность познакомить учащихся с необходимым и достаточным признаком наличия центральной симметрии фигур: путем вращения одной из центрально симметричных фигур в плоскости на 180° вокруг центра симметрии эта фигура полностью совмещается с соответственной фигурой. Наглядность подготовляет сознание школьников к умственному, воображаемому применению этого признака для установления центральной симметрии. Демонстрация моделей приводит к представлению о симметричных относительно центра симметрии точках и подготовляет введение соответствующего понятия.

Опираясь на эти соображения, можно рекомендовать следующий план изложения темы: формирование представления о центрально симметричных фигурах путем демонстраций и наблюдений практического материала, формирование на том же материале представления о признаке центральной симметрии фигур и способе ее установления, понятие о центрально симметричных точках, построение центрально симметричных отрезков и их свойства, упражнения в построении центрально симметричных фигур и в доказательствах. Позднее при изучении четырехугольников рекомендуется решение задач на построение способом центральной симметрии.

Первую встречу с симметрией фигур относительно точки можно осуществить путем демонстраций. Например, в вершину модели $\triangle ABC$ (черт. 26) прикреплен конец прямолинейного куска проволоки с диаметром поперечного сечения 4 *мм* и отверстием на другом конце. Этот кусок проволоки принадлежит «плоскости» модели. Расположим $\triangle ABC$ на плоскости классной доски и закрепим гвоздиком конец проволоки — точку O. По контуру модели треугольника начертим хорошо очиненным мелом треугольник на доске. Теперь повернем модель в плоскости доски вокруг точки O (гвоздика), чтобы получить развернутый $\angle COC_1$. Модель займет положение $A_1B_1C_1$. Путем приложения нити или ребра линейки можно показать, что точки A, O, A_1 лежат на прямой AA_1 и точка O — середина отрезка. Аналогичные наблюдения можно выполнить относительно B, O, B_1 и других пар соответственных точек треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Называют $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ симметричными относительно точки O, а точку O — центром симметрии.



Чертеж 26

Опыт можно повторить, заменив модель треугольника моделью четырехугольника или иной плоской фигуры Чтобы установить связь представления о центральной симметрии с практикой, педагог демонстрирует чертежи некоторых орнаментов, рисунки на обоях и узорах для вышивки. Если две фигуры (части одной фигуры) лежат в одной плоскости и при вращении в ней на 180° вокруг точки полностью совпадают, то такие фигуры (части) центрально симметричны относительно этой точки.

Вращение фигуры (части) в плоскости на 180° и наложение до полного совпадения одной фигуры (части) на другую служит в школьных условиях основным признаком симметрии фигур относительно точки. Наблюдения за демонстрациями, рисунками и чертежами с центрально симметричными фигурами подготовляет сознание учащихся к воображаемому выполнению вращения, которое и применяется в дальнейшем.

Предстоит познакомить учащихся ближе с симметрией фигур относительно центра. При этом целесообразно применять следующую последовательность приемов: выполняется построение фигуры, симметричной заданной относительно данного центра, затем доказывается, что фигуры действительно симметричны, и, наконец, формулируются, если надо, предложения.

Учащиеся изображают на плоскости точку A и центр симметрии точку O; требуется построить точку, симметричную A относительно центра O. Строят отрезок OA, продолжают его за точку O и на этом продолжении откладывают отрезок OA_1, равный OA. Чтобы убедиться в симметрии точек A и A_1 относительно O, мысленно выполняют вращение в плоскости отрезка OA (или OA_1) на $180°$ вокруг точки O. Легко обосновать, что точки A и A_1 сольются.

В плоскости дан отрезок AB и точка O; построить отрезок, симметричный данному относительно точки O. Учащиеся строят, как только что показано, точки A_1 и B_1, симметричные соответственно точкам A и B относительно центра O, и соединяют отрезком прямой точки A_1 и B_1, затем вращением $\triangle AOB$ в плоскости вокруг точки O на $180°$ показывают, что он совместится с $\triangle OA_1B_1$. Отрезки AB и A_1B_1 симметричны относительно точки O. Центрально-симметричные отрезки не только равны, но и параллельны. Ученики докажут, что $AB \| A_1B_1$.

Целесообразно обратить внимание на следующее: 1) если C — точка отрезка AB, то ей соответствует определенная симметричная точка C_1, отрезка A_1B_1, 2) если на отрезке AB отмечены две любые различные точки, то им соответствуют две различные симметричные точки отрезка A_1B_1, 3) если точка C_1 принадлежит отрезку A_1B_1, то ей соответствует симметричная точка, принадлежащая отрезку AB, именно та, которая служит прообразом точки C_1. В распоряжении учащихся имеется способ проверки этих фактов путем построений с надлежащими мотивировками.

Приведем несколько упражнений.

1) Дан отрезок AB. Имеет ли он центр симметрии? Как найти этот центр?

2) На прямой a даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Найти центр симметрии этих отрезков.

3) Какие из известных нам фигур имеют центр симметрии? (Окружность, круг, вертикальные углы).

4) Имеет ли прямая a центр симметрии?

Вот несколько более сложных упражнений.

1) Дан $\triangle ABC$ и точка O. Построить треугольник, симметричный $\triangle ABC$ относительно точки O. Доказать, что эти треугольники равны, а соответственные их стороны попарно параллельны.

2) Построить четырехугольник, симметричный данному относительно данного центра симметрии.

3) Даны две параллельные прямые. Построить один из центров их симметрии. Сколько центров симметрии имеют параллельные прямые? Какому множеству точек принадлежат эти центры?

6. Задачи на построение, решаемые с помощью центральной симметрии

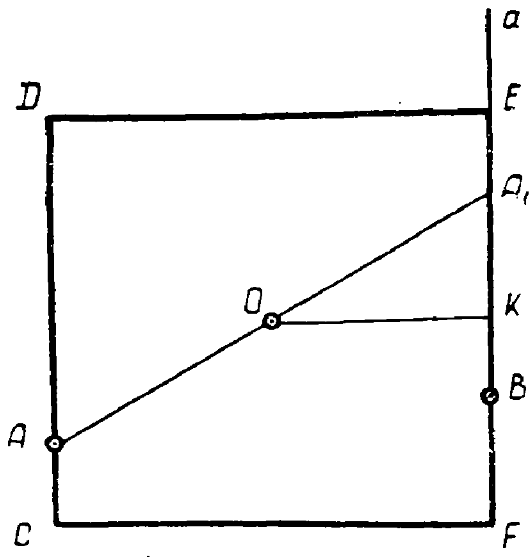
Задача 1. Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах квадрата и, кроме того, сохранился столб в центре квадрата. Восстановить границу участка[1].

Пусть $CDFF$ — граница земельного участка в форме квадрата; в точках A и B — сохранившиеся столбы на параллельных сторонах; в точке O — центре квадрата — также сохранился столб (черт. 27).

Задача сводится к тому, чтобы найти положение четырех вершин квадрата. Так как точка O — центр симметрии квадрата, то для решения задачи достаточно найти положение двух его вершин E и F, принадлежащих одной стороне EF. Решение последней задачи будет найдено, если мы установим положение прямой a, содержащей вершины E и F, так как тогда можно построить отрезок OK, перпендикулярный к a, который равен половине стороны квадрата, и, кроме того, будет найдено положение точки K — середины стороны EF. Положение прямой a легко найти, если построить точку A_1, симметричную точке A относительно центра O. Теперь можно сформулировать план построения.

---

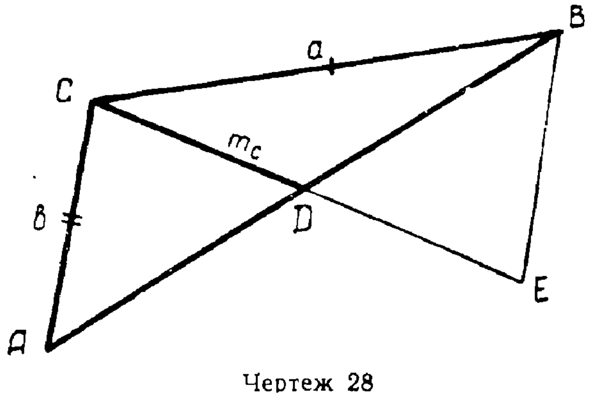
[1] Б. И. Аргунов и М. Б. Балк, Геометрические построения на плоскости. Учпедгиз, 1957.



Чертеж 27

Задача 2. Построить треугольник по a, b и m_c.

Допустим, что $\triangle ABC$ — искомый: $BC=a$, $AC=b$, $CD=m_c$ (черт. 28).



Чертеж 28

Примем точку D — середину стороны AB — за центр симметрии и построим $\triangle BDE$, симметричный $\triangle ACD$ относительно этого центра. Получим вспомогательный $\triangle BCE$, в котором $BC=a$, $BE=b$, $CE=2m_c$. При известных условиях этот треугольник можно построить. Легко усмотреть, что построение вспомогательного $\triangle BCE$ обеспечивает построение $\triangle ABC$. План построения установлен.

План построения будет найден и в том случае, если построить $\triangle ABE$, симметричный $\triangle ABC$ относительно D, или если построить $\triangle ADE$, симметричный $\triangle BCD$ относительно того же центра.

Приведенные анализы задач показывают, что применение центральной симметрии к решению задач на построение основывается на следующем: основная задача путем целесообразного выбора центра симметрии и отображения относительно него части или всей фигуры сводится к вспомогательной задаче, решение которой или очевидно, или выполняется проще, чем основной.

Можно указать и некоторые признаки, которые подсказывают целесообразность применения способа осевой симметрии. Если задача в той или иной форме указывает точку, которая является центром симметрии фигуры, то это служит намеком на то, чтобы сделать попытку заменить всю или часть фигуры центрально симметричной. Так обстоит дело при решении задачи 1.

Если по задаче легко усмотреть, что существует точка, являющаяся центром симметрии некоторой вспомогательной фигуры, связанной с искомой, то это также служит намеком на целесообразность применения центральной симметрии. Такая ситуация наблюдалась при решении задачи 2: точка D — центр симметрии параллелограмма, одной половиной которого является $\triangle ABC$.

Решение задач способом центральной симметрии можно отнести к главе о четырехугольниках. На занятиях математического кружка целесообразно предложить более трудные задачи, чем приведенные.

Дадим еще несколько задач, родственных рассмотренным.

1) Построить треугольник по трем данным медианам его.

На основании свойств медиан треугольника задача сводится к первой вспомогательной задаче: построить треугольник, две стороны которого соответственно равны $\frac{2}{3}m_a$ и $\frac{2}{3}m_b$, а медиана третьей стороны равна $\frac{1}{3}m_c$. Вторую вспомогательную задачу получают применением центральной симметрии.

2) Земельный участок в форме прямоугольника, когда-то был огорожен. От изгороди сохранилось три столба на трех сторонах и, кроме того, сохранился столб в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Восстановить границу участка.

3) Земельный участок в форме параллелограмма когда-то был огорожен. От изгороди сохранилось четыре столба по одному на каждой стороне; кроме того, сохранился столб в пересечении диагоналей параллелограмма. Восстановить границу участка.

ОЧЕРК VII

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. Общие положения

В методическом отношении глава о четырехугольниках — одна из простейших глав планиметрии. Это позволяет ограничиться рассмотрением только некоторых вопросов преподавания ее.

Введение понятий о частных видах четырехугольников целесообразно начинать с построения двух-трех фигур — представителей соответствующего вида. Построения полезны по ряду соображений: школьники быстро втягиваются в активную учебную деятельность и тренируются в выполнении построений; возможность построить фигуру служит не оформленным доказательством существования фигуры, хотя это и не подчеркивается в преподавании; построение способствует более совершенному усвоению содержания понятия и обеспечивает активное участие учащихся в создании определения понятия.

Построение представителей частных видов четырехугольников не исключает применения наглядности; в частности полезны шарнирные модели четырехугольников с раздвижными сторонами без диагоналей и с диагоналями, позволяющие демонстрировать все виды четырехугольников, изменение их формы, переходы от одного вида к другому. Такие модели школьники сделают из полосок чертежной бумаги.

Глава о четырехугольниках содержит значительное количество теорем, которые легко обосновываются. Это позволяет повысить активность учащихся в отношении искания путей доказательств и дает возможность вести изложение так, что школьники доказывают многие теоремы с большой долей самостоятельности.

При изложении многих теорем целесообразно применять аналитический метод, дающий возможность найти план доказательства, и затем выполнить последнее. При этом учащиеся постепенно усваивают ту последовательность вопросов, которые приводят к отысканию плана доказательства: что по заключению теоремы требуется доказать? что предварительно достаточно доказать, чтобы убедиться в верности заключения теоремы? что достаточно установить, чтобы доказать вспомогательное предложение? и т. д. Когда в результате аналитического поиска план доказательства установлен, переходят к синтетическому доказательству, которое и записывается, если это нужно.

При изложении свойств частных видов четырехугольников полезно рассматривать и симметрию их. Понятие о центральной симметрии не имеет непосредственной связи с содержанием главы о четырехугольниках и может быть введено перед этой главой. Значит, можно вести речь и об осевой, и о центральной симметрии. В порядке устных упражнений школьники отвечают на вопросы: Имеет ли рассматриваемый четырехугольник ось симметрии? Как ее построить? Сколько всего осей симметрии он имеет? Имеет ли он центр симметрии? Какая точка является центром симметрии? Отрывать рассмотрение симметрии четырехугольников от изучения их свойств явно нецелесообразно.

При изучении фактического содержания главы, в частности при рассмотрении признаков параллелограмма, полезно использовать решение задач на построение. Подбираются такие задачи, которые не требуют сложных изысканий планов построения, но или приводят к признакам параллелограмма или решение их опирается уже на изученные свойства. При изыскании планов построений разумно приучать к элементам анализа. Последний довольно часто сводится к тому, что построение четырехугольника подменяется вспомогательной задачей — построением одного из треугольников, на которые рассе кается четырехугольник диагональю или диагоналями, а затем выясняется, как от этого треугольника перейти к четырехугольнику, который требуется построить. При повторении главы о четырехугольниках в середине или конце учебного года целесообразно ввести более сложные задачи на построение, в частности необходимо использовать параллельный перенос части фигуры.

Для более глубокого и прочного усвоения фактического содержания главы надо использовать достаточно широко задачи на доказательство, среди которых представляют интерес признаки ромба, прямоугольника, а также задачи с практическим содержанием.

Учение о четырехугольниках небогато вычислительными задачами. Их дает предложение о сумме углов четырехугольника и некоторые другие вопросы. При решении сложных задач на вычисление надо отдавать предпочтение составлению уравнений перед арифметическими способами.

2. Четырехугольник

Школьники встречались уже ранее с четырехугольником и некоторыми частными видами их — прямоугольником и квадратом. Четырехугольником называется многоугольник, имеющей четыре угла (стороны). Принятое ограничение рассматривать только выпуклые многоугольники сохраняется и для четырехугольников. В силу этого в формулировках теорем нет надобности указывать, что речь идет о выпуклом четырехугольнике, как это иногда делается в учебниках и на уроках.

В принятом в школе руководстве по геометрии Н. Н. Никитина рассматривается теорема о сумме внутренних углов четырехугольника. Вспомнить, чему равна эта сумма, естественно и целесообразно. Это свойство углов является очевидным следствием теоремы о сумме внутренних углов многоугольника: если в выражении $2d(n-2)$ положить $n=4$, то получим $4d$. Поэтому называть это свойство теоремой вряд ли целесообразно и нет никакой надобности давать доказательство путем рассечения четырехугольника диагональю на два треугольника: оно — частный случай известного учащимся более общего доказательства. Теорему о сумме внутренних углов четырехугольника можно рассмотреть как одну из задач на доказательство.

Уместно решить несколько задач на построение четырехугольников по основным элементам, например, построить четырехугольник по а) a, b, c, d, e, б) a, b, c, d, B, в) a, b, c, B, C, г) a, b, A, B, C. Чтобы установить план построения применяется анализ: четырехугольник рассекается одной из диагоналей на два треугольника, один из которых имеет достаточное количество данных, чтобы его построить, а другой — достаточное количество элементов, чтобы его «пристроить» к первому.

Подмечается, что для построения определенного четырехугольника необходимо иметь пять элементов его, в числе которых может быть не более трех углов его. Это заключение можно подтвердить рассуждением. Построение четырехугольника $ABCD$ сводится к последовательному построению двух составляющих его треугольников: $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. Для получения определенного $\triangle ABC$ необходимо иметь три элемента (исключается случай трех углов). Для построения определенного $\triangle ACD$ необходимо иметь два элемента: третьим элементом служит сторона AC, которая будет найдена при построении $\triangle ABC$. Итак, для построения определенного четырехугольника необходимо иметь пять элементов, в числе которых не должно быть более трех углов его. Ограничение о числе углов обусловлено тем, что три внутренних угла определяют четвертый угол.

3. Параллелограмм

Введение понятия «параллелограмм» начинается с построения двух-трех четырехугольников, в каждом из которых противоположные стороны попарно параллельны. Чтобы учащиеся не внесли в понятие посторонних признаков, каждый из построенных параллелограммов выделяется жирной чертой. Демонстрируется шарнирный параллелограмм с раздвижными сторонами: школьники наблюдают много различных четырехугольников, противоположные стороны которых попарно параллельны, в частности прямоугольник и квадрат. В результате дается определение.

Опыт показывает, что доказательства теорем о свойствах параллелограмма учащиеся находят сами и хорошо излагают. Многие из этих свойств являются характеристическими, т. е. присущими только параллелограмму и дают возможность установить теоремы о достаточных признаках параллелограмма. Таких теорем много. Для дальнейшего изложения геометрии достаточно изучить три из них. Если в четырехугольнике а) противоположные стороны попарно равны, б) две противоположные стороны равны и параллельны, в) диагонали в точке пересечения делятся взаимно пополам, то четырехугольник — параллелограмм. Каждую из этих теорем можно изложить так: строится четырехугольник, удовлетворяющий условию теоремы, ставится вопрос, не является ли построенный четырехугольник параллелограммом, находится доказательство. При таком изложении школьники активно участвуют в работе, упражняются в построении, приобретают навыки доказывать и получают теоремы о признаках параллелограмма.

Другие теоремы о признаках параллелограмма являются хорошим материалом в качестве задач на доказательство. Приведем некоторые из этих теорем. Если в четырехугольнике а) внутренние улы, прилежащие к каждой из двух соседних сторон, в сумме составляют $2d$, б) две противоположные стороны равны и сумма углов, прилежащих к третьей стороне, равна $2d$, в) два противоположных угла равны и сумма углов, прилежащих к одной из сторон, равна $2d$, г) одна диагональ разделена другой пополам и две стороны параллельны, д) две стороны параллельны и сумма углов, прилежащих к одной из них, равна $2d$, е) противоположные углы попарно равны, то четырехугольник — параллелограмм. Даются тексты задач. Это повышает требования к решающему: надо понять задачу, уяснить условие и заключение, найти доказательство.

Уже выполненные построения дают возможность сделать вывод: чтобы построить определенный параллелограмм, необходимо иметь три данных элемента его, в числе которых должно содержаться не более одного угла. Последнее ограничение обусловлено тем, что один угол определяет все остальные углы параллелограмма. Четырехугольник определяется пятью элементами, среди которых не более трех углов. В определении параллелограмма указаны уже два условия — параллельность двух пар противоположных сторон; значит, необходимо еще три элемента.

Введение понятия «ромб» осуществляется аналогично сообщению понятия о параллелограмме: построение, наблюдение, определение. Ромбом называется параллелограмм, у которого две смежные стороны равны. Из определения и свойств сторон параллелограмма следует равенство всех сторон ромба. Значит, распространенное в учебниках определение ромба как параллелограмма, у которого все стороны равны, содержит лишние признаки и с логической точки зрения несовершенно. С этим по укоренившейся привычке мирятся, мотивируя «педагогическими соображениями».

Теоремы: «В ромбе диагонали а) взаимно перпендикулярны и б) делят углы его пополам» выделяют два свойства ромба. Будут верны две обратные теоремы: «Если в параллелограмме диагонали а) взаимно перпендикулярны, б) делят углы его пополам, то такой параллелограмм — ромб». Значит, эти свойства — характеристические (признаки ромба). Обратные теоремы рассматриваются как задачи.

Целесообразно решить следующие задачи. Построить ромб по а) стороне и углу, б) двум диагоналям, в) острому углу и бо́льшей диагонали, г) тупому углу и бо́льшей диагонали. Решение задач способствует запоминанию свойств ромба. Для построения ромба необходимо иметь два элемента, среди которых не более одного угла.

Учащиеся имеют представления о прямоугольнике и квадрате. Введение соответствующих понятий и определений включает эти частные виды параллелограммов в систему понятий, связанных с четырехугольником. Используемые в учебниках определения этих понятий также несовершенны: они содержат лишние признаки. Безупречные в логическом отношении определения таковы: «Прямоугольником называется параллелограмм, имеющий прямой угол», «Квадратом называется ромб, имеющий прямой угол» или «Квадратом называется прямоугольник, у которого две соседних стороны равны». Из первого и второго определений и свойств углов параллелограмма соответственно следует, что в прямоугольнике и квадрате все внутренние углы равны. Из третьего определения и свойств сторон параллелограмма вытекает, что в квадрате все стороны равны.

Теорема «В прямоугольнике диагонали равны» вскрывает важное свойство прямоугольника. Верна обратная теорема: «Если в параллелограмме диагонали равны, то такой пареллелограмм — прямоугольник». Ее целесообразно рассмотреть как задачу на доказательство. Значит, свойство диагоналей прямоугольника — характеристическое (признак прямоугольника).

Для прочного запоминания свойств прямоугольника и квадрата полезны задачи на построение. Построить прямоугольник по а) диагонали и углу между диагоналями, б) двум соседним сторонам, в) стороне и дагонали. Построить квадрат по а) стороне, б) диагонали. Для построения прямоугольника необходимо иметь два, а квадрата — один элемент.

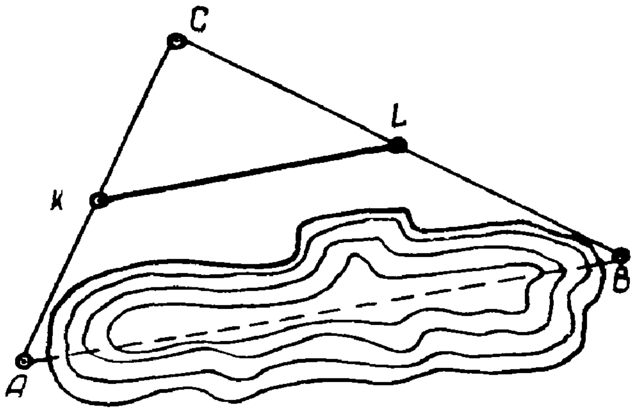
4. Деление отрезка на равные части

В принятом школьном учебнике Н. Н Никитина деление отрезка на n равных частей предваряется двумя теоремами: «Если на одной стороне угла отложить от его вершины равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то и на этой стороне угла отложатся равные между собою отрезки» (1) и «Если на одной из двух прямых отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые до пересечения с другой прямой, то и на этой прямой отложатся равные отрезки» (2). Способы доказательства этих теорем одинаковы; они не зависят друг от друга. Теорема (2) более общая и используется в дальнейшем курсе планиметрии. Теорема (1) является следствием теоремы (2). Поэтому целесообразно ограничиться доказательством только теоремы (2), а затем получить из нее следствие.

Решение задачи о делении данного отрезка на n равных частей полезно сопроводить упражнениями, например, построить отрезок, если $x=a+\frac{1}{3}b$, $x=\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b$ $x=1\frac{2}{3}a+\frac{2}{5}в$ и т. д., где a и b — данные отрезки. Строить можно только линейкой и циркулем, однако для проведения параллелей целесообразно воспользоваться треугольником.

Теорема о свойстве отрезков, отсекаемых пучком параллелей на прямых, применяется при доказательстве прямой и обратной теорем о средней линии треугольника. Последнюю можно приложить к решению некоторых топографических задач.

а) Найти длину отрезка AB, если концы его A и B доступны, а непосредственное изменение невозможно (черт. 29). В распоряжении решающего имеются только вехи и рулетка. Решение легко уяснить по чертежу: $AB=2KL$.

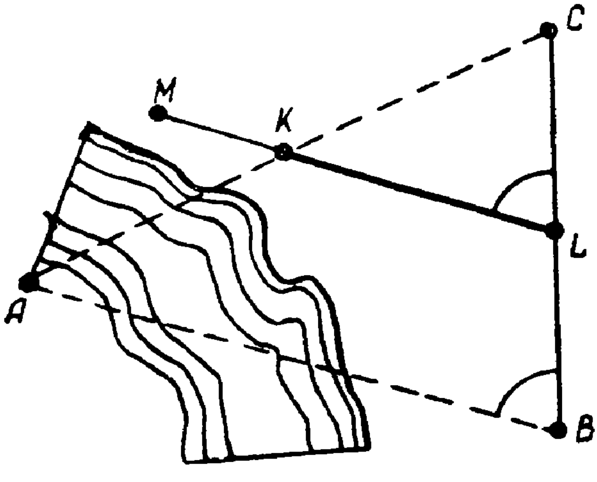


Чертеж 29

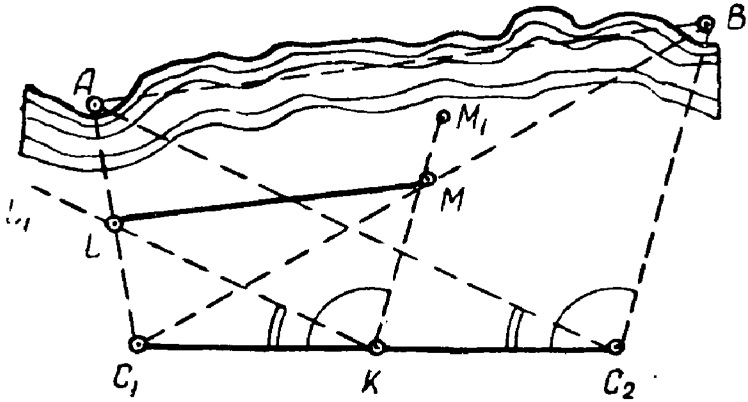
б) Найти длину отрезка AB, конец которого A недоступен (чер. 30). Решающий имеет вехи, рулетку и учебную астролябию.

Отмечают вехой произвольную точку C, измеряют отрезок CB и находят его середину L. Измеряют $\angle B$ и на CL с вершиною в точке L строят $\angle CLM$, равный $\angle B$. Находят точку K, являющуюся пересечением AC и LM, и измеряют отрезок KL. На основании какой теоремы утверждают, что $AB=2KL$?

в) Найти длину отрезка AB, концы которого недоступны (черт. 31). Приборы — те же, что при решении предыдущей задачи.



Чертеж 30



Чертеж 31

Выбирают произвольный базис C_1C_2 и измеряют его. Находят точку K — середину базиса. Измеряют $\angle AC_2C_1$ и $\angle BC_2C_1$ и строят на KC_1, с вершиною в точке K $\angle C_1KL_1 = \angle AC_2C_1$ и $\angle C_1KM_1 = \angle BC_2C_1$. Находят пересечения C_1A и KL_1 (точку L) и KM_1 и C_1B (точку M). Измеряют LM. Получают: $AB = 2KL$. Доказать правильность решения задачи.

5. О классификации четырехугольников

Естественно стремление педагога дать в единой легко обозримой схеме связи между отдельными видами четырехугольников. Такая схема наглядно показывает подчинение различных видов, выявляет существенный признак, по которому выделяется тот или иной вид.

Иногда предлагают такую схему дать в начале изучения главы[1]. Это неприемлемо с педагогической точки зрения: в течение урока семиклассники должны познакомиться с несколькими новыми понятиями, запомнить соответствующие термины и усвоить определения.

Иногда рекомендуют дать схему связей между видами четырехугольников после того, как будет изучен каждый из них. Это правильно: схема помогает систематизировать знания в этой области, составление ее сопровождается повторением определений. Наиболее целесообразно дать схему после того, как будет введено понятие о последнем виде четырехугольника — трапеции.

Нередко схему называют «классификацией четырехугольников»[2]. Правильно ли такое название?

Под классификацией разумеется деление объема рода по какому либо существенному признаку на виды; деление должно быть полным, т. е. совокупность объемов видовых понятий полностью исчерпывает объем родового понятия. Это одно из необходимых условий, чтобы классификацию признать правильной. Деление совершается на основании одного существенного признака. Например, родовое понятие «четырехугольник» делится по признаку параллельности противоположных сторон на три вида: а) параллелограмм — противоположные стороны попарно параллельны, б) трапеция — только одна пара противоположных сторон параллельна, в) четырехугольник, не имеющий параллельных сторон. Объемы трех видовых понятий полностью исчерпывают объем понятия «четырехугольник». Однако нередко в схеме указывается только два вида — параллелограмм и трапеция. Такую схему уже нельзя назвать классификацией: она не удовлетво-

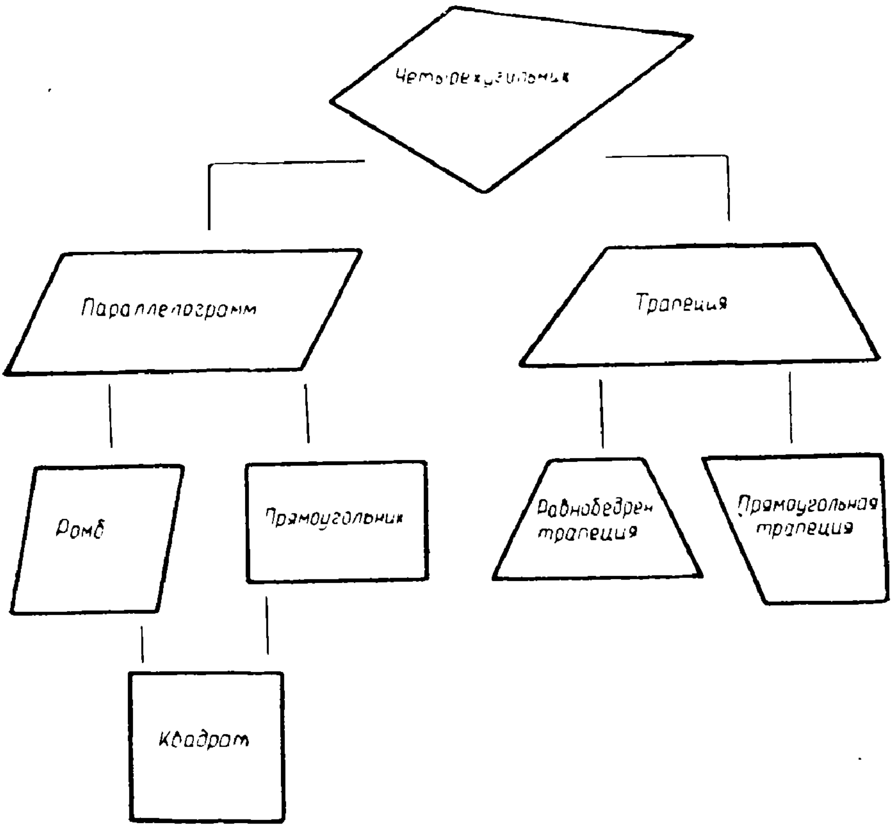
---

[1] Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, Планиметрия, Учпедгиз, 1954.

[2] Тот же учебник.

ряет одному из необходимых признаков — нет полноты деления.

Иногда в схемах нарушается и другое требование к классификации: деление родового понятия на видовые производится по разным признакам. Например, понятие «параллелограмм» можно разделить на два вида: а) ромб — две соседние стороны равны, б) параллелограмм — две соседние стороны неравны. Это — верное деление. Однако в схемах понятие «параллелограмм» подразделяется на два вида: а) ромб, б) прямоугольник. Первый вид выделяется по признаку равенства двух соседних сторон, второй — по наличию внутреннего прямо-



Чертеж 32

го угла. Последняя схема не подходит под понятие классификации: деление неполное, признаки деления различны. Кроме того, объемы видов «ромб» и «прямоугольник» частично совпадают: среди ромбов имеются некоторые прямоугольники (квадраты), и среди прямоугольников имеются некоторые ромбы (квадраты). Это также нарушает правила классификации.

Чтобы избежать логических недочетов, можно говорить о «схеме выделения частных видов четырехугольников». Она дана на чертеже 32.

6. Параллельный перенос

Как уже отмечено ранее, параллельный перенос (параллельное перенесение) — одно из преобразований плоскости в себя, по которому любой точке M плоскости ставится в соответствие точка M_1, той же плоскости, находящаяся от M в направлении и на расстоянии, указанными заданным вектором. При таком преобразовании каждая фигура F плоскости отображается в фигуру F_1, равную F; между точками этих фигур имеет место взаимно однозначное соответствие.

В связи с изучением свойств четырехугольников возможно вести речь о параллельном переносе как отображении (переводе) по заданному правилу одной фигуры на другую. Параллельный перенос фигур заслуживает внимания потому, что он является одним из простейших отображений (переводов) фигур в плоскости, доступным пониманию семиклассников, и потому, что он тесно связан с учением о параллелограммах. Параллельный перенос фигур или частей их применяется как один из способов решения задач на построение и как вспомогательный прием при решении задач методом подобия. Параллельным переносом обычно пользуются в курсе алгебры при изучении линейной функции и функции второй степени.

В силу этих соображений в 7-м классе нельзя игнорировать понятие о параллельном переносе фигур и применение этого переноса к решению задач на построение. Вдумчивый прподаватель старается найти время и место в курсе для решения задач способом параллельного переноса. Естественное место этих задач — после изучения главы о четырехугольниках. Они могут быть введены и в

4-й четверсти при повторении этой главы; от этого выиграет и повторение: материал предстанет в новых связях и опосредствованиях.

Как познакомить учащихся с параллельным переносом фигур в плоскости?

Пусть в плоскости дан направленный отрезок MN (точка M — его начало, а точка N — конец) и отрезок AB, не параллельный MN. Выполним построение: через точки A и B проведем лучи, параллельные отрезку MN и направленные так, как этот отрезок; на лучах от точек A и B отложим отрезки AA_1 и BB_1, равные MN; точки A_1 и B_1 соединим отрезком прямой. В полученном четырехугольнике AA_1B_1B $AA_1 \| BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, так как каждый из этих отрезков параллелен и равен MN. На основании известной теоремы AA_1B_1B — параллелограмм; $AB = A_1B_1$ и $AB \| A_1B_1$.

Если на отрезке AB отметим любую точку K и через нее проведем прямую, параллельную MN до пересечения с A_1B_1 в точке K_1, то легко усмотреть, что AA_1K_1K — параллелограмм; значит, $KK_1 = MN$, т. е. любая точка K отрезка AB переходит в соответственную точку K_1 отрезка A_1B_1.

Затем рассматривается случай параллельного переноса отрезка AB, когда этот отрезок параллелен отрезку MN. *Параллельный перенос отрезка можно истолковать и так:* отрезок AB переведен параллельно самому себе в положение A_1B_1, причем точка A двигалась в направлении и на расстояние, указанные направленным отрезком MN. Легко установить, что и при таком истолковании четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм.

Описанный перевод отрезка называют параллельным переносом его в направлении и на расстояние, заданные направленным отрезком MN. Для лучшего усвоения сущности рассматриваемого отображения фигур целесообразно применить упражнения: а) Луч CD перевести параллельно себе в направлении и на расстояние, указанные направленным отрезком MN; б) Выполнить параллельный перенос угла ABC в направлении и на расстояние, указанные направленным отрезком MN; показать, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$; в) При параллельном переносе отрезка CD точке C соответствует точка C_1; построить точку, соответственную точке D; г) Выполнить параллельный перенос $\triangle ABC$ в указанном направлении на 6 *см;* доказать, что полученный $\triangle A_1B_1C_1$ равен $\triangle ABC;$ д) Параллельным переносом отрезок CD переведен в отрезок C_1D_1, другим параллельным переносом C_1D_1 переведен в отрезок $C_2D_2;$ доказать, что два последовательных переноса можно заменить одним параллельным переносом отрезка CD в положение C_2D_2.

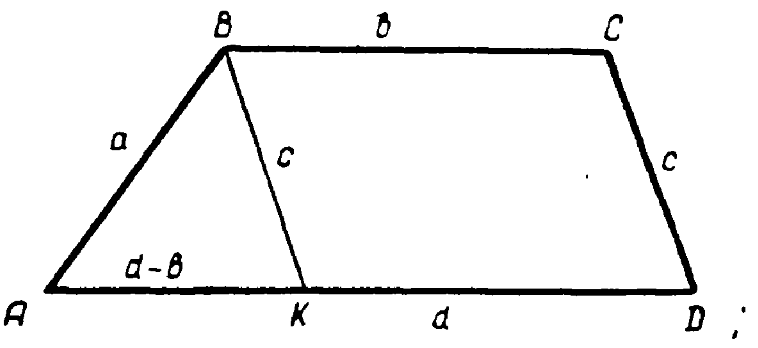
При выполнении упражнений в порядке беглых вопросов подчеркиваем, что любой точке фигуры F соответствует точка фигуры F_1, полученной параллельным переносом фигуры F, что двум любым различным точкам фигуры F соответствуют две различные точки фигуры F_1, что для каждой точки K_1 фигуры F_1 найдется точка K фигуры F и именно та, переводом которой получена точка K_1. Ответы сопровождаются соответствующими построениями и мотивировками. Такие упражнения подготовляют введение понятия о взаимно-однозначном соответствии точек фигур F и F_1, однако самое понятие пока не вводится.

Применение параллельного переноса к решению задач на построение показывается на нескольких простейших задачах.

Задача 1. Построить трапецию по данным ее сторонам.

Отрезки a и c — боковые стороны, b и d — основания трапеции. По этим данным требуется построить трапецию. Приведем только анализ.

Пусть $ABCD$ — трапеция, удовлетворяющая требованиям задачи: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $AD=d$ (черт. 33).



Чертеж 33

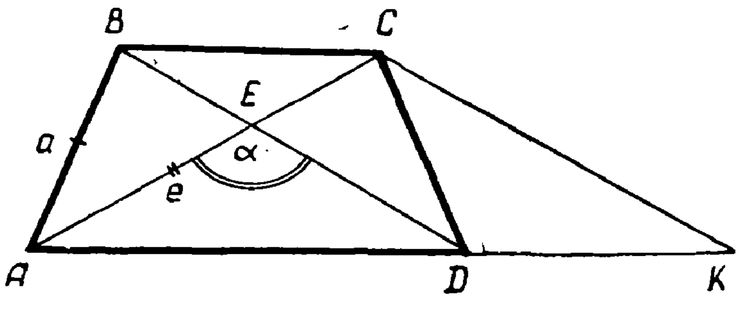
Если попытаться по четырем сторонам непосредственно построить трапецию, то испытывается затруднение: стороны не связаны между собой, нельзя правильно расположить их, чтобы получилась трапеция.

Перенесем сторону CD параллельно самой себе в направлении CB на длину b. Она займет положение отрезка BK. Четырехугольник $BCDK$ — параллелограмм; $BK=CD=c$, $KD=BC=b$. Отрезок $AK=d-b$. Стороны $\triangle ABK$ известны. Этот треугольник, если допускают данные, можно построить. Треугольник ABK обеспечивает построение трапеции $ABCD$. Для этого можно применить обратный перенос отрезка BK в положение CD. План построения трапеции установлен.

Задача 2. Построить равнобедренную трапецию по боковой стороне, диагонали и углу между диагоналями.

Дано: a — боковая сторона, e — диагональ, α — угол между диагоналями.

Допустим, что задача решена: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, в которой $AB=a$, $AC=e$, $\angle AED=\alpha$ (черт. 34). Как и в предыдущей задаче данные элементы



Чертеж 34

не связаны между собою, что мешает непосредственному построению трапеции. Выполним параллельный перенос диагонали BD в положение CK. В $\triangle ACK$ $AC=e$, $CK=BD=e$, так как в равнобедренной трапеции диагонали равны, и $\angle ACK=\angle AED=\alpha$ ($CK \parallel BD$, AC — секущая). Равнобедренный $\triangle ACK$ можно построить по боковой стороне и углу при вершине. Этот треугольник обеспечивает построение трапеции: так как $CD=AB=a$, то на AK можно указать вершину трапеции D, а затем выполнить обратный перенос отрезка CK в направлении KA на расстояние KD. Итак, план построения найден.

Способом параллельного переноса одного из отрезков можно решить еще несколько задач.

Построить равнобедренную трапецию по следующим данным: а) b, d, e, б) d, e, ε.

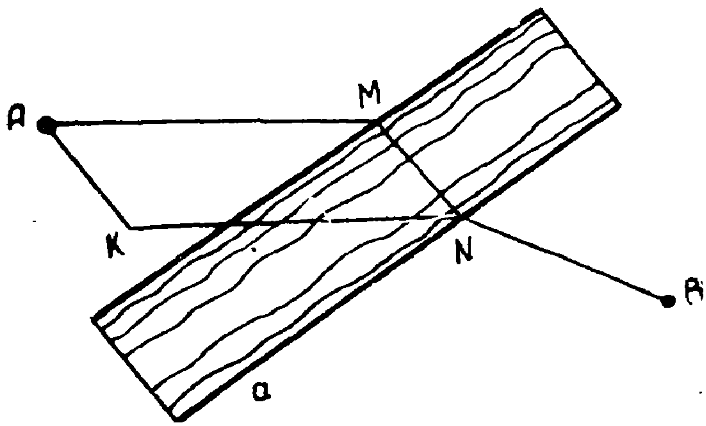
Построить трапецию по следующим данным:

а) b, d, e, f, б) a, e, f, ε, в) b, d, e, ε.

Построить четырехугольник, если дано: а) a, b, c, f, ε; б) b, d, e, f, ε.

Построить треугольник по а) a, b, m_c, б) m_a, m_b, m_c.

Задача 3. На каком месте построить мост MN через канал, разделяющий два данных населенных пункта A и B, чтобы длина пути $AMNB$ была наименьшая? Берега канала считать параллельными прямыми, а мост — перпендикулярным к берегу (черт. 35).



Чертеж 35

Допустим, что задача решена: $AMNB$ — кратчайший путь между населенными пунктами A и B. Задача заключается в том, чтобы выбрать положение точки N — конца моста — на берегу a канала. Так как ширина канала MN — постоянна, то задачу можно сформулировать так: сумма отрезков AM и NB должна быть наименьшей. Чтобы связать эти отрезки, выполним параллельный перенос отрезка AM в положение KN. Задача свелась к тому, чтобы найти на прямой a точку N, при котором ломаная KNB имела бы наименьшую длину. А это будет тогда, когда эта ломаная окажется прямой. Намечается план построения.

ОЧЕРК VIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

1. Значение геометрических мест точек

С введением понятия геометрического места точек, обладающих определенным свойством, явно проникает в курс планиметрии понятие множества, являющееся одним из важнейших и замечательнейших в современной математике. На самом деле множество объединяет все те и только те элементы, каждый из которых обладает определенным признаком, характеристическим для данного множества. Геометрическое место точек содержит все те и только те точки, которые обладают определенным свойством. Это свойство — характеристическое для точек, образующих определенное геометрическое место. Значит, в планиметрии имеем дело с частными видами множеств — с точечными множествами, которые и носят название геометрических мест точек.

Вопрос о введении в школьные курсы математики понятия «множество» поставлен в начале текущего столетия. В связи с реформой советской общеобразовательной школы, в связи с пересмотром учебных планов, программ и составлением новых учебных руководств по математике этот вопрос оказался актуальным в наши дни. Имеются предложения ввести понятие множества в начале курса арифметики в 5-м классе[1]. Оно полезно при изложении курса алгебры, в котором приходится иметь дело с мно-

---

[1] И. К. Андронов, Арифметика натуральных чисел, Учпедгиз, 1954. И. К. Андронов и В. М. Брадис, Арифметика, Учпедгиз, 1957.

жествами рациональных, действительных и комплексных чисел.

В курсе геометрии, в связи с изучением геометрических мест точек, также полезно пользоваться понятием множества. Известно, что это понятие — основное, первичное; значит, единственный путь его введения в школе — абстракция от конкретных множеств вещей, пояснение целесообразными примерами конкретных множеств; оно не может быть введено путем определения через указание ближайшего рода и видового отличия.

Термин «геометрическое место точек», принадлежащий старой терминологии, нельзя считать удачным: во-первых, точка не имеет протяжений и, значит, не может занимать места; во-вторых, прилагательное «геометрическое» является лишним. На самом деле, точка — геометрическое понятие, совокупность точек может дать геометрический образ и ничего другого дать не может.

Несмотря на эти недостатки, рассматриваемый термин прочно вошел в учебную литературу, замена его современным термином представляет сложную проблему. В дальнейшем в этой работе термины «геометрическое место точек», обладающих определенным свойством и «множество точек» с определенным свойством употребляются в одном и том же смысле. Кроме того, в том же смысле применяется более краткий термин «место точек».

Понятие множества точек с определенным свойством, находит широкое использование в некоторых геометрических дисциплинах (например, аналитической и дифференциальной геометрии), а также в других науках, применяющих математические методы (например, механике, астрономии).

В элементарной геометрии места точек применяются в качестве одного из способов доказательств теорем; так доказываются, например, предложения: «Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность и притом только одна», «Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну». Большое значение места точек имеют при решении задач на построение. Не без основания считают так называемый метод геометрических мест одним из основных методов решения задач на построение[1].

---

[1] Г. П. Сенников, Решение задач на построение в VI—VIII классах, Учпедгиз, 1955.

В силу изложенного школьные курсы геометрии уделяют внимание изучению простейших мест точек, применению их в доказательствах теорем и в решении задач на построение. В математических кружках учащиеся могут познакомиться со значительным количеством мест точек и углубить уменья и навыки применять их.

Первая встреча школьников с местами точек происходит в 6-м классе в главе «Треугольники». Здесь учащиеся знакомятся с тремя местами точек. В последней четверти при повторении главы о параллелях уместно ввести еще два места точек, каждое из которых содержит точки, обладающие определенным свойством. Открывается возможность познакомить учащихся 7-го класса с решением простейших задач методом геометрических мест и выработать некоторые навыки в этом отношении. Хорошо, если эти навыки школьники приобретут до изучения главы об окружности; они будут полезны для активного доказательства некоторых теорем и обеспечат сознательное и глубокое усвоение новых теорем о местах точек, которые естественно вводятся в этой главе и применяются к решению задач.

При изложении последующих глав планиметрии учащиеся познакомятся еще с некоторыми местами точек, обладающими теми или иными свойствами, и получат более широкие возможности применять их.

2. Что затрудняет изучение первых мест точек?

Многие преподаватели математики высказывают мнение, что изучение геометрических мест точек в 6 и 7-м классах, решение задач на отыскание мест точек, удовлетворяющих какому-либо требованию, и приложение их к решению задач на построение вызывает затруднение у учащихся. С таким мнением приходится согласиться. Чтобы преодолеть затруднения, необходимо уяснить их происхождение и наметить целесообразные пути их ликвидации.

Долгое время шестиклассники имеют дело с точками, определенными по положению и неподвижными: точки — концы отрезка, вершины углов, центр круга и т. д., причем точки не приходится объединять в совокупности по каким-либо признакам. Когда изучаются места точек, положение меняется: точка может перемещаться, двигаться по геометрическому образу и вместе с тем сохранять присущее ей свойство; все точки с этим свойством приходиться объединять в одно множество. Теперь речь идет о «любой точке прямой или луча», «о любой точке окружности»: доказывается, что зафиксированная точка A обладает определенным свойством, и мыслится, что точка A — любая точка, принадлежащая некоторому множеству.

Чтобы преодолеть это затруднение, надо с первых уроков изучения мест точек систематически и настойчиво подчеркивать, что любая точка, взятая из соответствующего множества, обладает определенным свойством, что доказательство наличия этого свойства для фиксированной точки A имеет силу для любой точки множества, которому принадлежит точка A, что множество объединяет все точки с определенным свойством и только их. Необходимо разнообразными способами культивировать мысль, что точка может двигаться по соответствующему геометрическому образу, занимать на нем любые положения и не терять присущего ей свойства. Такая систематическая и настойчивая работа, проводимая в форме разъяснений учителя, бесед, дополнительных и контрольных вопросов, в значительной мере ослабит рассматриваемое затруднение.

Формулировки теорем о местах точек отличаются некоторым своеобразием и новизною для учащихся. Они как правило длиннее тех теорем, которые уже изучены, иногда сопровождаются указанием исключений некоторых точек. Искажение формулировок недопустимо; оно может привести к ошибкам в применении их. Усвоение формулировок теорем также затрудняет некоторых учащихся.

Чтобы научить без затруднений и правильно формулировать теоремы, преподаватель обязан с особым вниманием относиться к своей речи, пользоваться безупречными вопросами и совершенными формулировками. Вместе с тем он повышает требовательность к ответам школьников, добивается точных формулировок, побуждает неоднократно повторять их, возвращается к повторению на последующих уроках, не допускает неполных ответов. Высокие и последовательные требования к речи позволяют преодолеть те затруднения, которые зависят от особенностей формулировок теорем о местах точек.

Геометрический образ можно объявить множеством точек, обладающих определенным свойством, в том и только в том случае, если будет установлено, что любая точка образа обладает этим свойством и что всякая точка, обладающая этим свойством принадлежит рассматриваемому образу: значит, надо установить верность прямой и обратной теорем. А так как эта пара теорем равносильна другой паре — прямой и противоположной, то геометрический образ можно объявить местом точек и тогда, когда будет установлена верность прямой и противоположной теорем, иначе: надо установить, что всякая точка геометрического образа обладает определенным свойством и точки, не принадлежащие ему, не обладают этим свойством. Тот факт, что для установления теоремы о месте точек, надо давать два доказательства также вызывает затруднения со стороны учащихся.

В учебной и методической литературе применяются обе пары предложений и доказательств. Выбор одной из них зависит от сравнительной трудности доказательств обратной и противоположной теорем: предпочтение отдается более простому доказательству. Шестиклассникам еще трудно понять равносильность рассматриваемых пар теорем. Поэтому преподаватель выбирает одну из них. В стабильном учебнике Н. Н. Никитина отдано предпочтение прямой и противоположной теоремам. На первых порах это вносит определенность. Эта определенность и подчеркивание необходимости доказывать два предложения для того, чтобы геометрический образ признать множеством точек с определенным свойством несколько смягчает третье затруднение.

Заметим, что иногда прямая и обратная теоремы доказываются независимо одно от другого. В таком случае их можно поменять местами. Например, предложения: 1) «Каждая точка биссектрисы угла ($A<2d$) равно удалена от сторон угла», 2) «Каждая точка, равноудаленная от сторон угла, принадлежит биссектрисе этого угла» можно поменять местами. Иногда такая перестановка по педагогическим соображениям полезна: она дает возможность активизировать отыскание геометрических образов, являющихся местами точек.

Если до этого не введено понятие противоположной теоремы по отношению данной, то целесообразно ввести его: оно найдет применение при рассмотрении мест точек.

3. Места точек в 6-м классе

Как уже отмечено, понятие множества принадлежит к числу основных. Его можно сформировать путем абстракции при рассмотрении конкретных множеств предметов.

В практике очень часто приходится иметь дело с собраниями вещей или людей. Все учащиеся нашего пионерского отряда составляют множество; признаком, по которому объединяются пионеры в это множество, является то, что каждый из пионеров входит в наш отряд. Все диагонали, которые можно провести в семиугольнике также составляют множество; признаком, объединяющим их в одно множество, служит то, что каждая из диагоналей принадлежит данному семиугольнику. Диагонали — элементы этого множества. Все точки, лежащие на отрезке AB, образуют множество; точки отрезка AB объединяются в множество на основании того, что каждая из них принадлежит отрезку AB. Сколько пионеров в нашем отряде можно сосчитать; число всех диагоналей семиугольника тоже можно сосчитать. Это — примеры конечных множеств. Сколько точек на отрезке, сосчитать нельзя: их бесконечно много. Множество точек отрезка это — бесконечное множество. Учащиеся легко приведут примеры конечных множеств, а также бесконечных множеств, в том числе и точечных (например, множество точек окружности, луча, прямой).

Рассмотрим подробнее множество точек, принадлежащих окружности радиуса r. Вспоминается определение окружности. По определению каждая точка окружности находится на расстоянии r от центра. Это — свойство каждой точки рассматриваемой окружности.

Если в плоскости, в которой лежит окружность, взять точку, не принадлежащую окружности, то такая точка указанным свойством не обладает: расстояние от центра до точки внутри круга меньше r, до точки вне круга больше r. Значит, на окружности лежат все те и только те точки, которые удалены от центра на расстояние r.

Итак, множество точек окружности содержит все точки, удаленные от центра на r, и не содержат ни одной точки, которая не обладает этим свойством.

Можно сказать: множество точек плоскости, находящихся на расстоянии r от данной точки, есть окружность с центром в этой точке и радиусом, равным r.

Вместо слов «множество точек с определенным свойством употребляют название «геометрическое место точек» или короче «место точек» с определенным свойством. Поэтому только что приведенное предложение можно заменить следующим: геометрическое место точек плоскости, находящихся на расстоянии r от данной точки, есть окружность с центром в этой точке и радиусом, равным r.

Окружность это — пример множества точек, обладающих определенным свойством, пример геометрического места точек. В планиметрии рассматриваются разнообразные места точек. Пример окружности дает возможность ввести следующее определение: геометрическим местом точек (короче: местом точек) с определенным свойством называется множество всех тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Рассмотрим еще некоторые места точек и покажем иные приемы их изучения.

На плоскости дан отрезок AB. На этой плоскости надо найти место точек, каждая из которых одинаково удалена от концов отрезка AB.

Ответ можно искать опытным путем. Легко усмотреть, что середина отрезка AB — точка C — одинаково удалена от его концов. Затем каждый ученик строит с помощью циркуля несколько точек C_1, C_2, C_3, C_4, каждая из которых одинаково удалена от точек A и B; они расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. В результате появляется догадка, какой геометрический образ является носителем точек с заданным свойством, и формулируется теорема. Эта теорема пока — гипотеза: она нуждается в обосновании.

Далее доказываются, во-первых, что всякая точка, лежащая на перпендикуляре к отрезку в его середине, одинаково удалена от концов его, и во-вторых, что любая точка, не принадлежащая перпендикуляру, удалена от концов отрезка на различные расстояния. Теперь ранее сформулированная *теорема доказана*.

Приведем упражнения.

а) На берегу канала найти пункт, в котором нужно поставить водонапорную башню так, чтобы она находилась в одинаковом расстоянии от конторы совхоза и хлебного элеватора.

б) Даны две точки и окружность. На окружности найти точку, одинаково удаленную от данных точек.

Только что рассмотренный способ установления места точек, обладающих заданным свойством, можно широко использовать в школе. Однако применение его не всегда возможно. Имеются другие способы, дающие возможность установить геометрический образ, являющийся носителем точек с определенным свойством.

В плоскости данного угла B ($\angle B < 2d$) найти место точек, равноудаленных от его сторон.

Шестиклассники не подготовлены, чтобы построить серию точек, обладающих указанным свойством. Если бы такие знания имелись, то построение оказалось бы громоздким, мало доступным для них. Укажем иной прием.

Дан $\angle ABC$. Пусть M — одна из точек, равноудаленных от его сторон. Значит, если $MA_1 \perp BA$ и $MC_1 \perp BC$, то $MA_1 = MC_1$. Соединим прямой точки M и B. Треугольники MBA_1 и MBC_1 — прямоугольные, $MA_1 = MC_1$ по условию, BM — общая гипотенуза. Следовательно, $\triangle MBA_1 = \triangle MBC_1$ и $\angle MBA = \angle MBC$, т. е. BM — биссектриса данного угла. Итак, точки, равноудаленные от сторон угла, принадлежат биссектрисе этого угла.

Затем доказывается, что всякая точка биссектрисы находится на одинаковых расстояниях от сторон $\angle ABC$.

В результате доказана теорема: место точек, одинаково удаленных от сторон данного угла, есть биссектриса этого угла. (Данный угол меньше $2d$).

Эта теорема допускает обобщение: место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, есть совокупность двух прямых, делящих пополам углы, образованные данными прямыми.

Приведем простейшие упражнения.

а) На основании треугольника найти точку, равноудаленную от боковых сторон.

б) На данной прямой найти точку, равноудаленную от сторон данного угла, меньшего $2d$.

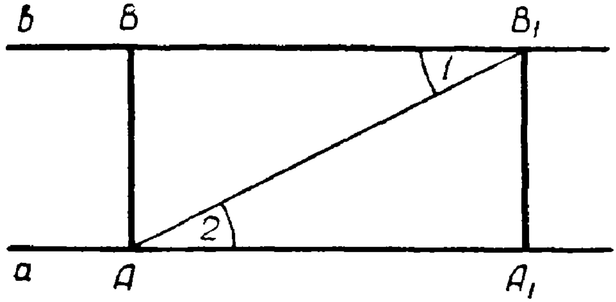
в) На данной окружности найти точку, равноудаленную от сторон данного угла, меньшего $2d$.

При повторении главы о параллельных прямых в последней четверти 6-го класса имеется возможность познакомить учащихся еще с двумя множествами точек, обладающими интересными свойствами.

Найти место точек, которые удалены от данной прямой a на расстояние c.

Легко построить серию точек, каждая из которых удалена от прямой a на расстояние c. Опытным путем устанавливается, что такие точки принадлежат прямой b, параллельной прямой a. Без особых изысканий учащиеся «видят» и другую прямую b_1, точки которой одинаково удалены от прямой a. В итоге формулируется теорема: место точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние, есть совокупность двух прямых, параллельных данной и удаленных от нее на данное расстояние. Теорему предстоит доказать.

Пусть $b \parallel a$ (черт. 36). Из любых двух точек прямой b проведем перпендикуляры BA и B_1A_1 на прямую a. Надо



Чертеж 36

доказать, что $BA = B_1A_1$. С этой целью соединим прямой точки A и B_1, и докажем что $\triangle ABB_1 = \triangle AA_1B_1$. Так как $b \parallel a$, то $BA \perp b$, т. е. $\angle ABB_1$ — прямой. Рассматриваемые треугольники — прямоугольные, имеют общую гипотенузу AB_1, $\angle 1 = \angle 2$, как внутренние накрестлежащие при параллельных a и b и секущей AB_1. Итак, $\triangle ABB_1 = \triangle AA_1B_1$, а отсюда следует, что $BA = B_1A_1$. Так как B и B_1 — произвольные точки прямой b, то все точки прямой b находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.

Точки, лежащие в той же полуплоскости относительно прямой a, которой принадлежит прямая b, и не лежащие на последней, находятся от прямой a или на большем, или на меньшем расстоянии, чем расстояние между прямыми a и b.

Теорема доказана.

Не вызывает затруднений изучение места точек, каждая из которых одинаково удалена от двух параллельных прямых.

4. Метод геометрических мест

Решение первых задач на построение с помощью мест точек побуждает познакомить учащихся с задачами положения.

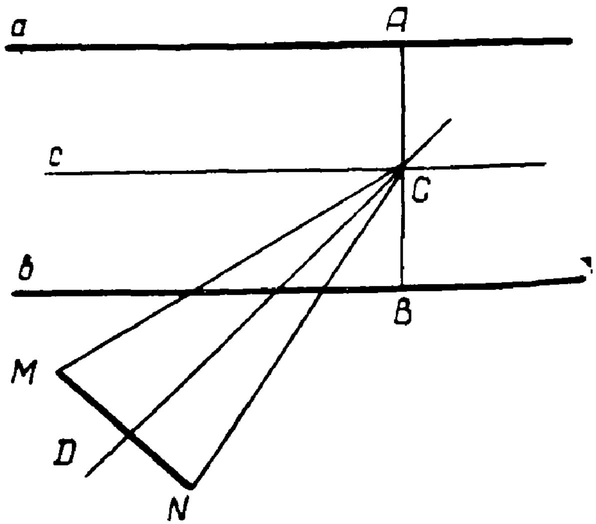
При решении одних задач совершенно безразлично, каково взаимное расположение данных образов на плоскости и как расположится фигура, которую требуется построить. Такие задачи называют метрическими. Например, если требуется построить треугольник по двум сторонам и углу между ними, то положение на плоскости и взаимное расположение данных элементов не играет никакой роли. Требуемый задачей геометрический образ может занимать любое положение на плоскости; оно не связано с положением данных элементов.

При решении других задач необходимо учитывать положение всех или некоторых данных на плоскости, при этом положение требуемого образа связано и зависит от положения данных. Это — задача положения. Например, в приведенной ранее задаче о выборе места для водонапорной башни так, чтобы она находилась в одинаковых расстояниях от конторы совхоза и хлебного элеватора важно положение на плоскости берега канала и двух указанных пунктов. Положение на плоскости искомого пункта зависит от положения данных элементов.

При решении первых задач методом геометрических мест точек целесообразно познакомить учащихся с общим планом решения задач на построение, если этого не сделано ранее, показать значение первого звена этого плана — анализа, сообщить, по какой схеме ведется анализ, а также обратить внимание на особенности исследования.

Задача 1. На плоскости найти точку, одинаково удаленную от двух параллельных прямых и в то же время одинаково удаленную от концов данного отрезка.

На плоскости дано положение двух параллельных прямых a и b и отрезка MN (черт. 37). Требуется указать положение точки C, которая одинаково удалена от прямых a и b и вместе с тем одинаково удалена от точек M и N — концов отрезка MN.



Чертеж 37

План построения неизвестен; будем искать этот план. Временно допустим, что задача решена: пусть C — искомая точка. Эта точка по условию должна обладать свойством: она находится на одинаковых расстояниях от прямых a и b, т. е. $CA = CB$, причем $CA \perp a$, $CB \perp b$. Что является местом точек одинаково удаленных от двух параллельных прямых? Таким образом точка C принадлежит прямой c, одинаково удаленной от параллельных прямых a и b. В то же время точка C должна обладать другим свойством: она должна быть одинаково удалена от концов отрезка MN, т. е. $CM = CN$. Что служит местом точек, одинаково удаленных от концов отрезка? Значит, точка C принадлежит прямой CD, перпендикулярной к отрезку MN в его середине. Следовательно, точка C принадлежит двум указанным местам точек. Каков же план построения?

Рассуждения, направленные на то, чтобы найти план построения, называют анализом.

Построение при правильном обучении не вызывает затруднений. Оно выполняется циркулем и линейкой.

Доказательство сводится к ссылкам на использованные места точек. Его легко дают учащиеся.

Интерес представляет исследование. Каждое из примененных мест точек есть прямая. Поэтому при данном расположении геометрических образцов задача имеет одно решение.

Нельзя ли так расположить данные, чтобы задача не имела решений? Если $MN \perp b$ и прямая c не проходит через середину отрезка MN, то используемые места точек не пересекаются: задача не имеет решений.

Нельзя ли так расположить данные, чтобы задача имела много решений? Если $MN \perp b$ и прямая c проходит через середину отрезка MN, то используемые места точек сольются. Любая точка двух слившихся прямых является решением задачи: задача имеет бесконечное множество решений.

Задача 2. Найти точку, удаленную от данной прямой на данное расстояние и одинаково удаленную от сторон данного угла.

На плоскости дано положение прямой a и $\angle ABC$; кроме того, дан отрезок c (черт. 38). Требуется найти точку, которая находится на расстоянии c от прямой a и одинаково удалена от сторон $\angle ABC$.

Будем искать план построения.

Анализ. С чего начинается анализ? Допустим, что задача решена: пусть K — искомая точка. Каким свойством должна обладать точка K? Она должна находиться на расстоянии c от прямой a. Какому месту точек она принадлежит?

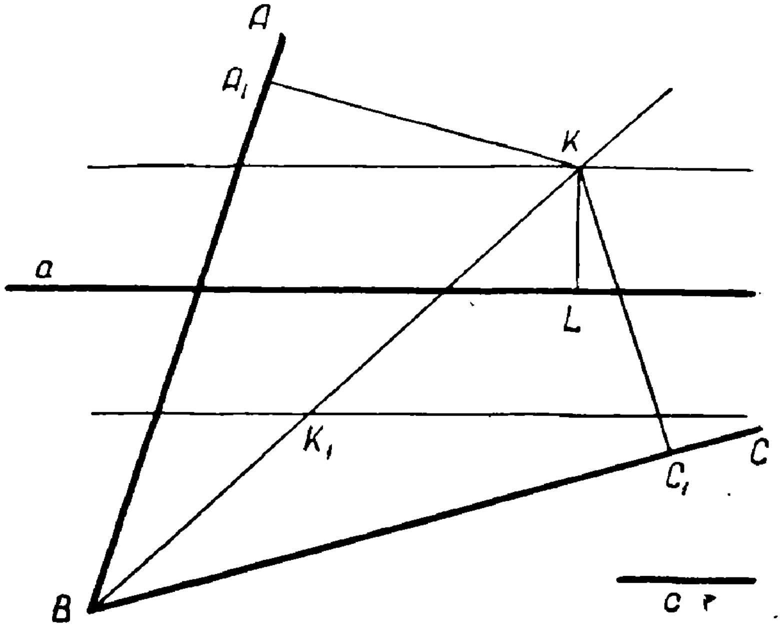
Каким другим свойством должна обладать точка K? Она должна быть одинаково удалена от сторон $\angle ABC$. Какому другому месту точек она принадлежит?

Какое заключение можно сделать о положении точки K? Точка K лежит на пересечении указанных мест точек.

Каков план построения точки K?

Построение и доказательство учащиеся выполняют при большой доле самостоятельности.

В исследовании отмечается, что задача имеет два решения — точки K и K_1. Если биссектриса $\angle ABC$ параллельна прямой a и лежит от нее на расстоянии, не рав-



Чертеж 38

ном c, то задача не имеет решений. Если биссектриса параллельна прямой a и лежит от нее на расстоянии, равном c, то задача имеет бесконечное множество решений.

5. Методические рекомендации

Решения задач 1 и 2 и схожих с ними открывают возможность ввести, если этого не сделано ранее, общий план решения задач на построение: 1) анализ, 2) построение, 3) доказательство, 4) исследование.

Цель анализа заключается в том, чтобы найти план построения. Поэтому он применяется тогда, когда этот план неизвестен. Надобность в анализе отпадает, если план известен. Однако решение первых задач начинается с анализа с тем, чтобы показать его значение, развить уменья пользоваться им и уяснить план его выполнения.

При использовании метода геометрических мест анализ проводится по одной и той же схеме: 1) допускают, что задача решена и что установлено положение на плоскости искомой точки, при этом делается чертеж фигуры, примерно, соответствующей задаче, 2) искомая точка имеет свойство, явно или скрыто обусловленное задачей, по этому свойству находят одно место точек, которому принадлежит искомая, 3) она имеет и другое свойство, определенное задачей, по нему устанавливают второе место точек, которому принадлежит искомая, 4) заключают, что искомая точка является пересечением двух найденных мест точек и намечают план построения.

Однообразие схемы анализа обусловлено тем, что решение задач методом геометрических мест сводится к определению положения точки на плоскости по отношению всех или части данных геометрических образов, а места точек, обусловленные задачей, являются своеобразным адресом, по которому надлежит искать положение точки.

Однообразие схемы анализа следует использовать в педагогическом процессе: схему в краткой форме сообщают учащимся и учат их пользоваться ею в конкретных случаях. Как показывает эксперимент, такое мероприятие значительно облегчает решение задач методом геометрических мест и приводит к хорошим результатам.

Если при решении на уроке нескольких первых задач анализ ведется путем эвристической беседы, то в дальнейшем, пользуясь указанной схемой, учащиеся сами довольно успешно справляются с анализом.

Когда метод решения задач на построение определяется и подсказывается развертывающимся педагогическим процессом, школьники не испытывают затруднений в выборе способа решения. Однако им придется иметь дело и с такими задачами, метод решения которых не подсказан и, значит, надо предусмотреть его. Чтобы облегчить выбор метода, следует вскрывать признаки задач, которые могут подсказать, каким методом целесообразно решать задачу. Это — общее положение.

Применение его к рассматриваемым задачам состоит в следующем: если решение задачи сводится к определению положения точки на плоскости относительно данных на ней геометрических образов, то это служит довольно надежным признаком того, что целесообразно применить метод геометрических мест. Такой выбор имеет значительную вероятность. Например, при решении задачи: «Построить треугольник по основанию, высоте и углу при вершине» легко подметить, что при заданном положении основания задача сводится к определению на плоскости положения вершины треугольника. С большой вероятностью можно ожидать, что задача решается методом геометрических мест.

Доказательство в задачах, решаемых методом геометрических мест, как правило, сводится к ссылкам на примененные места точек. На первом этапе решения задач доказательства выполняются: это дает возможность усвоить общий план решения задач на построение и повторять формулировки теорем о местах точек, что способствует прочности знаний. В дальнейшем доказательства могут опускаться.

При исследовании выясняется число решений, возможные частные случаи во взаимном положении данных геометрических образов, при которых нет решений или число их изменяется. Количество решений зависит от взаимного положения данных. Поэтому при исследовании требуется умело комбинировать геометрические образы, находить особые случаи в их расположении, приводящие к изменению числа решений. В силу этого исследование является хорошей школой для развития инициативы и способствует развитию пространственного воображения. Вначале исследование ведется путем эвристической беседы; постепенно инициатива учащихся растет, в результате они приобретают уменья и навыки выполнять несложные исследования.

Исследование облегчается тем, что в школьных курсах планиметрии ограничено количество образов, которые могут служить местами точек, обладающих каким-либо свойством. Такими образами могут быть — прямая, луч, некоторая несложная совокупность прямых и лучей, окружность или часть ее, совокупность нескольких окружностей или частей их. Вопрос о числе решений в основном сводится к выяснению числа точек пересечения двух геометрических мест. Взаимное расположение прямой и окружности и двух окружностей рассматривается в главе «Окружность». Фактически с точками пересечения прямой и окружности и двух окружностей учащиеся имеют дело с самого начала изучения задач на построение. Вопрос о числе точек пересечения столь очевиден и привычен, что не может вызвать затруднений.

При решении следующих простейших задач применяются только те пять мест точек, о которых шла речь ранее в этом очерке.

а) Двор имеет форму остроугольного треугольника. Где следует расположить лампу, чтобы три вершины двора были освещены одинаково?

б) Найти точку, находящуюся на одинаковых расстояниях от концов данного отрезка и 1) на данном расстоянии от данной точки, 2) на равных расстояниях от сторон данного угла, 3) на одинаковых расстояниях от двух пересекающихся прямых.

в) По данному основанию построить равнобедренный треугольник, вершина которого лежала бы 1) на данной прямой, 2) на данном расстоянии от данной точки, 3) на одинаковых расстояниях от двух данных точек, 4) на одинаковых расстояниях от двух параллельных прямых, 5) на данном расстоянии от данной прямой.

г) На данном основании построить треугольник, имеющий данную высоту, вершина которого последовательно удовлетворяла бы пунктам 1—5 предыдущей задачи.

Опыт показывает, что приведенных упражнений достаточно, чтобы учащиеся хорошо освоились с применением первых геометрических мест к решению задач.

6. Приёмы введения новых мест точек

Изложение главы об окружности дает возможность познакомить семиклассников со значительным количеством новых мест точек. С этой целью применяются различные приемы. Опишем основные из них.

Естественно главу об окружности начинать с повторения тех сведений по этому вопросу, какие учащиеся приобрели в 6-м классе. Затем рассматривают вопросы, можно ли провести окружность через данную точку, сколько таких окружностей можно построить, можно ли построить окружность, проходящую через две данные точки, где лежат центры таких окружностей. Приходим к предложению: место центров окружностей, проходящих через две данные точки, есть перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки, в его середине. По существу это предложение говорит об известном месте точек, но в иных терминах. Далее ставится вопрос о построении окружности через три точки. Решение и исследование приведет к известной теореме, обоснование которой подготовлено предшествующим решением задач.

При рассмотрении вопроса о дуге сегмента, вмещающей данный угол, обращают внимание на то, что хорда, стягивающая концы дуги, из любой точки дуги, кроме концов, видна под данным углом. Если отметить, что из точки, не принадлежащей дуге сегмента, тот же отрезок виден под углом, неравным данному, то имеется основание сформулировать следующую теорему: место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом есть совокупность дуг двух сегментов, построенных на данном отрезке и вмещающих данный угол (концы дуг исключаются). А из этой теоремы получаем следствие: место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, построенная на этом отрезке, как на диаметре (исключая точки — концы этого диаметра).

Изучение взаимного положения прямой и окружности и двух окружностей можно завершить следующими теоремами:

1) Место центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке, есть перпендикуляр к этой прямой в данной точке.

2) Место центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности, есть совокупность двух окружностей, концентрических с данной, описанных радиусами, равными сумме и разности данных радиусов.

3) Место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке, есть секущая этой окружности, проходящая через центр ее и данную на ней точку (за исключением точки касания и центра данной окружности).

Таким образом рассмотрение программных вопросов дает возможность познакомить школьников с новыми для них местами точек.

Новые места точек полезно вводить и в порядке задач, решаемых и фронтально на уроке и индивидуально дома. Например, для домашней работы можно предложить задачи: а) Найти место центров окружностей, касающихся двух параллельных прямых, б) Найти место центров окружностей, касающихся сторон данного угла, меньшего $2d$, *в)* Найти место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой. Можно надеятсья, что семиклассники решат эти задачи: по существу они им известны, надо теоремы формулировать в новых терминах.

На уроках можно решить, например, такие задачи: а) Найти место середин хорд данной окружности, проходящих через данную на ней точку, б) найти место концов отрезков касательных, проведенных к данной окружности и имеющих данную длину.

Такая форма постановки задач требует наибольшей активности учащихся: надо найти фигуру, построить ее и затем дать положенные доказательства. Если учащиеся не могут предусмотреть геометрический образ — носитель точек с определенным свойством, то часто полезно строить серию точек, обладающих этим свойством. Этот эвристический прием позволяет догадаться, что служит местом точек и сформулировать теорему. Догадка подтверждается соответствующими доказательствами.

Путем решения неопределенных задач также можно получить новые места точек. Например, решая задачу «Найти точку, из которой данная окружность видна под данным углом» учащиеся получат теорему о соответствующем месте точек. Наблюдения показывают, что многие ученики, приступая к решению такой задачи, еще не осознают, что она неопределенная. Это выясняется чаще всего в процессе анализа, а иногда при исследовании.

Знакомство с новым местом точек может состояться и так: дается задача, решение которой опирается на одно уже знакомое и на другое неизвестное место точек. Этот путь предъявляет высокие требования к учащимся: надо преодолеть две трудности — найти новое место точек и приложить его к решению задачи. Значит, его можно использовать в классах, которые имеют хорошую подготовку по геометрии. Его можно применить в последней четверти учебного года при повторении курса геометрии.

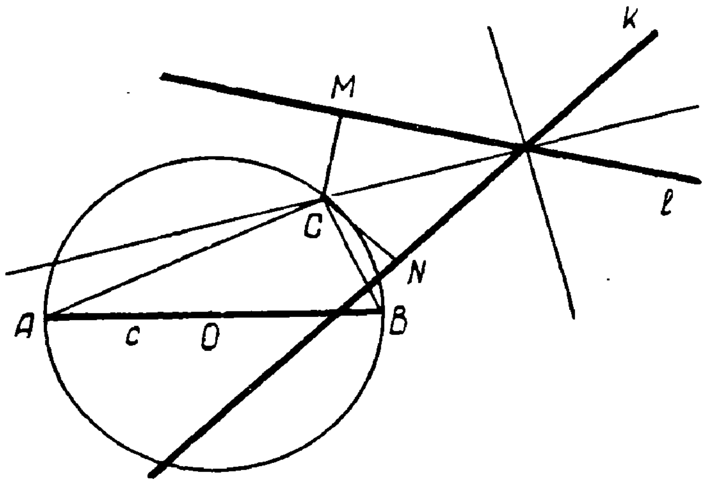
Описанные пути введения мест точек используются при изучении последующих тем планиметрии.

7. Задачи

Теперь, когда введено значительное количество новых мест точек, расширяется круг задач, которые можно предложить школьникам.

Задача 3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе *c* так, чтобы вершина прямого угла лежала на одинаковых расстояниях от двух пересекающихся прямых.

На плоскости дано положение отрезка *c* и двух пересекающихся прямых *k* и *l* (черт. 39).



Чертеж 39

Задача сводится к определению вершины *C* прямого угла искомого треугольника относительно данных геометрических образов.

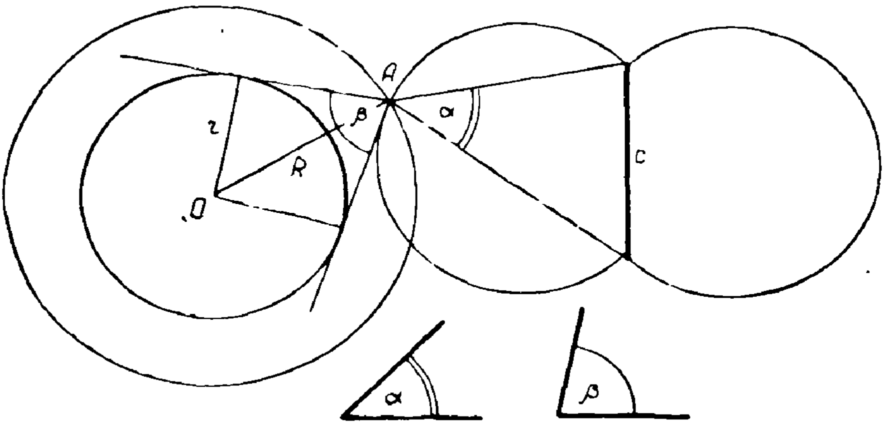
Допустим, что задача решена: $\triangle ABC$ — искомый и точка *C* — вершина прямого угла. Точка *C* должна обладать следующим свойством: из нее отрезок *c* должен быть виден под прямым углом. Значит, точка *C* принадлежит окружности, построенной на отрезке *c*, как на диаметре, причем концы диаметра — точки *A* и *B* исключаются. Точка *C* должна обладать и другим свойством: она должна находиться на одинаковых расстояниях от прямых *k* и *l*. Значит, она принадлежит месту точек, одинаково удаленных от этих прямых, т. е. она является точкой одной из двух прямых, делящих углы между прямыми *k* и *l* пополам. Следовательно, точка *C* принадлежит пересечению двух указанных мест точек. План построения установлен.

Построение и доказательство интереса не представляют.

Так как одно место точек — окружность, а другое — совокупность двух прямых, то задача может иметь 4 решения, когда обе прямые пересекают окружность в точках, отличных от точек A и B. Выясняется, может ли задача иметь 3, 2, 1, 0 решений и какими особенностями должно отличаться в каждом случае положение данных элементов.

Задача 4. Найти точку, из которой данный отрезок виден под данным углом α, а данная окружность — под другим данным углом β.

На плоскости дано положение отрезка c и окружности с центром O и радиусом r (черт. 40). Кроме того, даны углы α и β.



Чертеж 40

Пусть точка A — искомая. Она обладает двумя свойствами: 1) из нее данный отрезок c виден под углом d, 2) из нее данная окружность видна под углом β. По первому свойству она принадлежит одной из дуг двух сегментов, построенных на отрезке с и вмещающих угол α, причем концы этих дуг исключаются. По второму свойству точка A принадлежит окружности, концентрической с данной и описанной радиусом R, равным гипотенузе прямоугольного треугольника, катет которого равен r, а противолежащий ему острый угол равен β. Точка A принадлежит пересечению этих двух мест точек. План построения установлен.

На других этапах решения не останавливаемся. Отметим, что задача может иметь от 0 до 4 решений.

Приведем серию задач, доступных для семиклассников.

1) Провести окружность данным радиусом, касающуюся данной прямой, чтобы центр окружности находился: а) на одинаковых расстояниях от концов данного отрезка, б) на данном расстоянии от данной прямой, в) на равном расстоянии от сторон данного угла, г) на равных расстояниях от двух параллельных прямых, д) на данном расстоянии от данной точки.

2) Построить окружность, касающуюся данной прямой в данной на ней точке, чтобы центр окружности последовательно удовлетворял требованиям а)—д) предыдущей задачи.

3) Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и а) проекции катета a на гипотенузу, б) чтобы вершина прямого угла лежала в точке, из которой данный отрезок виден под данным углом.

4) Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и а) высоте h_a, б) медиане m_a, в) проекции стороны b на основание.

5) Построить окружность, касающуюся двух параллельных прямых и а) проходящую через данную точку, б) касающуюся третьей данной прямой, в) данной окружности.

6) Описать окружность данным радиусом, касающуюся данной окружности и а) данной прямой, б) другой данной окружности.

ОЧЕРК IX

ИЗМЕРЕНИЕ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ

1. Общие положения

Учащиеся 8-го класса имеют возраст от 14 до 15 лет. Это — начало периода ранней юности, простирающегося до 17—18 лет. Юношеский возраст характеризуется повышением всех видов психической деятельности и достижением в этом отношении более высокого уровня. Для умственной деятельности характерна развивающаяся самостоятельность мышления, растущая последовательность и систематичность его, критическое отношение к мышлению других. Совершенствуется воля, что важно в отношении формирования навыков к умственному труду, возникает и растет интерес к творчеству, развивается воображение и в частности пространственное. В этот период закладываются основы мировоззрения, развивается самосознание, формируется характер. Психическая деятельность и ее прогресс обусловливаются возрастными физиологическими факторами и в особенности общественной средой, воспитанием и связанным с ним обучением. В этом отношении велика роль школьного воспитания и целесообразного обучения, значительна роль и преподавания математики.

Развитие психической деятельности учащихся создает благоприятные условия для более глубокого изучения математических дисциплин и в частности геометрии. Открываются возможности несколько глубже, чем ранее, познакомиться с логической структурой геометрии: осознать значение, необходимость и происхождение аксиом, вникнуть в структуру определений понятий, в логические связи между ними, уяснить применяемые в элементарной геометрии методы обоснований теорем и общий характер построения курса. Вместе с тем открываются возможности увеличить количество решаемых задач на доказательство, построение и вычисление, расширяются перспективы связи геометрии с практикой.

Курс геометрии 8-го класса начинается измерением отрезков. Появляется возможность уточнить и углубить рассмотрение этой проблемы, подвести некоторый логический фундамент.

Всякое измерение — операция, с помощью которой устанавливается численное отношение между значением измеряемой величины и значением той же величины, принятым за единицу. Сущность этой операции передает следующее равенство:

$$K = kE,$$

где K — значение измеряемой величины, E — значение той же величины, принятое за единицу, k — действительное положительное число, которое определяется.

Измерения порождены общественной практикой, производством и являются необходимым компонентом познания человеком материального мира и подчинения этого мира интересам общества. С развитием производства, техники, наук роль измерений возрастает и приобретает все большее и большее значение.

Измерение значений геометрических величин исторически относятся к числу первых: уже это говорит о сравнительной простоте их.

Проблема измерения отрезков представляет одинаковый интерес и в отношении преподавания геометрии и для развития курса алгебры Она вплотную подводит к расширению понятия числа, к включению в него нового класса чисел — иррациональных и к формированию множества действительных чисел. Она имеет существенное значение для изложения материала планиметрии — гомотетии и подобия, метрических соотношений в треугольнике и окружности, измерения поверхностей. Она представляет большой интерес и для развития курса стереометрии

В учебной литературе по геометрии широко используется алгоритм Евклида, как средство для отыскания общей меры двух отрезков, если она существует. Однако в этом отношении алгоритм Евклида имеет малое теоретическое и не имеет практического значения. В силу этого рекомендуется отказаться от применения этого алгоритма.

В основу измерения отрезков целесообразно положить децимальное деление единицы измерения и соответствующих долей ее. Децимальная основа измерения порождена нашей десятичной системой счисления и оправдывается практикой. Она положена в основу метрической системы мер.

Программа геометрии построена так, что отображение фигуры в гомотетичную ей предшествует изложению подобия фигур. Это определяет место в курсе теории пропорциональности отрезков: она должна предшествовать учению об отображении фигуры в гомотетичную ей фигуру[1].

2. Операция измерения отрезка

С измерением отрезков учащиеся имели дело при изучении арифметики и начала геометрии; они измеряли отрезки, изображенные на листе бумаги, находили длины отрезков в школьном помещении и на поверхности земли; они применяли измерения при работе в мастерских и в быту. Учащиеся имеют представления и даже некоторые навыки в непосредственном определении длин отрезков и знакомы с некоторыми приемами косвенных измерений их.

В методической литературе правильно отмечается, что при изложении геометрии в 6 и 7-м классах можно обойтись без понятия длины отрезка; оно вводится по педагогическим соображениям, в частности в целях сближения курса с практикой[2].

Целесообразно начать с вопросов, что мы знаем об измерении отрезков, в чем заключается операция измерения отрезков.

Прежде всего для предстоящего измерения устанавли-

---

[1] С введением новых программ для средней общеобразовательной трудовой политехнической школы с производственным обучением очерк IX представится возможным использовать при изложении главы об измерении отрезков в старших классах.

[2] В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, 1954.

вается отрезок, длина которого принимается равной единице (единичный отрезок). Затем выполняется последовательное откладывание единичного отрезка на измеряемом отрезке, от одного из его концов, при этом считают, сколько раз единичный отрезок откладывается в измеряемом.

Допустим, что единичный отрезок CD уложился в отрезке AB целое число раз, например, 9 раз. Это целое число и принимают за длину отрезка AB. Записывают $AB=9CD$. В этом случае длиной отрезка называется целое число, показывающее, сколько раз единичный отрезок уложился в измеряемом отрезке. Если за единицу измерения принят метр, то $AB=9.1$ *м*, где 9 — длина отрезка AB. Принято длину отрезка записывать так: $AB=9$ *м*.

При измерении отрезков мы пользуемся некоторым принципом. Сущность его заключается в следующем: если даны два любых отрезка AB и CD, причем $AB>CD$, то на луче AB всегда можно отложить от точки A отрезок CD последовательно достаточно большое число раз, что получится отрезок AF, который равен или больше AB.

Этот принцип принимается без доказательства и называется аксиомой измерения или аксиомой Архимеда.

В условных обозначениях можно записать

$$(n-1)\cdot CD<AB,\ n\cdot CD\geqslant AB, \qquad (1)$$

где n — натуральное число.

Аксиона измерения отражает практику измерения отрезков. Человек, выполняя измерения, наблюдал, что, «шагая» по отрезку от одного его конца к другому «шагами», равными единице длины, всегда или «наступит» на другой конец или «перешагнет» через него. Это и отражено в аксиоме.

Аксиоме измерения можно дать различные формулировки. В описании сущности ее дана одна из формулировок. Левая часть соотношения

$$n\cdot CD\geqslant AB$$

представляет произведение отрезка на натуральное число. Поэтому аксиому можно прочитать и так: «При умножении меньшего из двух данных отрезков на достаточно большое натуральное число всегда можно получить отрезок, больший другого данного отрезка».

На уроке дается краткая и яркая историческая справка о великом греческом математике древнего мира Архимеде. В кружковых занятиях она может перерасти в несколько интересных сообщений о жизни и деятельности Архимеда. Уместно организовать математический вечер, посвященный этому замечательному ученому и изобретателю[1].

Каково значение аксиомы Архимеда?

Аксиома дает возможность каждому отрезку при выбранной единице измерения приписать число — меру отрезка. Значит, значение аксиомы заключается в том, что любой отрезок можно измерить с помощью любой единицы измерения отрезков.

Однако аксиома не дает оснований для решения вопроса, любому ли данному действительному положительному числу соответствует отрезок, длиной которого при выбранном единичном отрезке оно является. Для ответа на этот вопрос нужна другая аксиома — аксиома непрерывности.

При обучении аксиома измерения используется некоторыми преподавателями недостаточно: на нее не ссылаются. А это приводит к тому, что учащимся она кажется лишней для дальнейшего развития учения об измерении отрезков. Чтобы избежать этого, необходимо подчеркивать, где и при каких рассуждениях применяется аксиома Архимеда, следует ссылаться на нее, где это необходимо. Это ликвидирует формализм с введением аксиомы измерения.

Пусть отрезок AB больше отрезка CD. По аксиоме измерения можно указать такое натуральное число n, при котором

$$n \cdot CD \geqslant AB.$$

Отсюда получаем

$$CD \geqslant \frac{AB}{n}$$

Значит, каждый отрезок можно разделить на такое достаточно большое натуральное число, что получится отрезок не больше любого заданного отрезка.

---

[1] С. Я. Лурье, Архимед, Издательство АН СССР, 1945.

В. Ф. Каган, Архимед, Гостехиздат, 1949.

Чвалина Артур, Архимед, перевод с немецкого, Гостехиздат, 1934.

Ранее мы рассмотрели, как получить длину отрезка, если единица измерения укладывается точно целое число раз в измеряемом отрезке.

А как в практических измерениях находят длину отрезка в том случае, когда единичный отрезок не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке, когда получается остаток?

Рассмотрим пример. Требуется найти длину отрезка AB. Единица измерения — метр.

С помощью рулетки находят, что в отрезке AB метр последовательно уложился 27 раз и получился остаток, меньший метра. Затем по рулетке замечают, что 0,1 доля метра в остатке уложилась 6 раз и получился еще остаток, меньший 0,1 метра. Далее находят, что во втором остатке 0,01 доля метра уложилась ровно 8 раз. Тогда длина отрезка AB равна $27{,}68 \cdot 1$ *м* или, как принято писать, $AB = 27{,}68$ *м*.

Описанную в примере операцию измерения можно назвать децимальной; она применяется и в геометрии.

При измерении отрезка AB единичным отрезком CD может случиться, что при откладывании последнего от точки A по лучу AB придем, согласно аксиоме Архимеда, к соотношению

$$n \cdot CD > AB,$$

например, $8\,CD > AB$. В таком случае единичный отрезок уложился 7 раз и получился остаток KB, меньший 1. Делят CD на 10 равных долей и 0,1 единичного отрезка откладывают последовательно от точки K по отрезку KB. Допустим, что она уложилась 4 раза без остатка. Длина отрезка AB равна 7,4 единицы; записывают: $AB = 7{,}4\,CD$.

Если 0,1 единичного отрезка уложится в остатке KB 4 раза и получится 2-й остаток, меньший $0{,}1\,CD$, то десятую долю единичного отрезка делят на 10 равных частей и полученную $0{,}01\,CD$ откладывают на 2-м остатке. Пусть она уложилась 3 раза. Длина отрезка AB равна 7,43 единичного отрезка: $AB = 7{,}43\,CD$.

Если бы получился 3-й остаток, то пришлось бы использовать тысячную долю единичного отрезка и т. д.

На занятиях математического кружка можно заслушать сообщения о возникновении различных систем мер для измерения отрезков[1].

Можно сформулировать более общее, чем ранее, определение длины отрезка: длиной отрезка называется число, которое показывает, сколько раз единичный отрезок и его доли уложились на измеряемом отрезке.

Если отрезок AB измерялся метром, то получаем $AB=7{,}43 \cdot 1$ *м* или $AB=7{,}43$ *м*.

Понятие длины отрезка относительное: с изменением единицы длины меняется и длина. Пусть отрезок AB измеряется метром, длина его 8. Если тот же отрезок измерить дециметром, длина его окажется равной 80. При измерении сантиметром длина будет равна 800.

Из этого видно, что при переходе от одной единицы измерений к другой число, выражающее длину отрезка, изменяется обратно пропорционально изменению единицы длины.

Приведем некоторые упражнения.

1) Как можно истолковать равенства

$$x = 3a, \ x = 4{,}5a, \ x = \frac{5}{6}\,a$$

Построить отрезок x, если a — данный отрезок.

2) Длина детали равна 17,5 дюйма. Выразить эту длину в сантиметрах, 1 дюйм $\approx 2{,}54$ *см*.[2]

3) Длина детали равна 125 *мм*. Найти длину этой детали в дюймах.

4) Теплоход прошел 23 морских мили. Сколько километров прошел теплоход? 1 морская миля $\approx$ 1852 *м*.

Целесообразно ввести понятие об общей мере двух отрезков. Конкретизирующим материалом послужат рассмотренные случаи измерений. Если длина отрезка равна 8 единичным отрезкам, то общей мерой их является единичный отрезок: он содержится 1 раз в себе и 8 раз в измеренном отрезке. Общей мерой будет и любая доля единичного отрезка, например, 0,5; 0,1; 0,01. Если длина отрезка равна 3,4 единичного отрезка, то общей мерой служит 0,1 единичного отрезка: она укладывается 10 раз

---

[1] И. Я. Депман, Возникновение системы мер и способов измерения величин, Учпедгиз, 1956 г.

[2] Полезно познакомить школьников с дюймом: он до сих пор находит применение в производстве.

в единице измерения и 34 раза в измеренном отрезке. Общей мерой является и любая доля 0,1 единичного отрезка.

Общей мерой двух отрезков называется такой отрезок, который содержится целое число раз в каждом из двух данных отрезков.

Наибольшей общей мерой двух отрезков называется наибольший из отрезков, являющихся общей мерой данных отрезков.

Полезно общую меру двух отрезков сопоставить с общим делителем двух чисел.

Естественно возникает вопрос, любая ли пара отрезков имеет общую меру. Ответ на него требует показа хотя бы одной пары несоизмеримых отрезков.

В доказательстве теоремы о существовании несоизмеримых отрезков применяется понятие об отношении отрезков. Пока можно говорить об отношении соизмеримых отрезков.

При измерении отрезка AB отрезком CD получилось:

$$AB=3\cdot CD$$

Можно записать так:

$$\frac{AB}{CD}=3$$

Читают: отношение отрезка AB к отрезку CD равно 3..

При измерении отрезка KL отрезком MN получилось:

$$KL=2{,}7MN$$

Можно записать так

$$\frac{KL}{MN}=2{,}7$$

Отношением отрезка a к отрезку b называется такое число q, на которое нужно умножить отрезок b, чтобы получить отрезок, равный a:

или $$\frac{a}{b}=q$$

Во втором примере десятая доля MN содержится в отрезке MN 10 раз, а в отрезке KL 27 раз. Если эту долю принять за единичный отрезок, то $MN=10$ ед. длины и $KL=27$ ед. длины. Так как

$$\frac{KL}{MN}=\frac{27}{10},$$

то получается, что отношение двух отрезков равно отношению длин этих отрезков, если измерение их произведено одной и той единицей длины. В общем виде это можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{длина } a}{\text{длина } b}$$

3. Несоизмеримые отрезки

Уже отмечено, что проблемы несоизмеримости отрезков и иррационального числа сближают курсы геометрии и алгебры.

В учебной литературе делались ранее и повторены за последние годы попытки перенести введение иррационального числа на уроки геометрии. Такое мероприятие делает изложение вопроса об измерении отрезков независимым от курса алгебры; в частности этим ликвидируется небольшое отставание курса алгебры от изложения геометрии, обусловленное действующими программами математики.

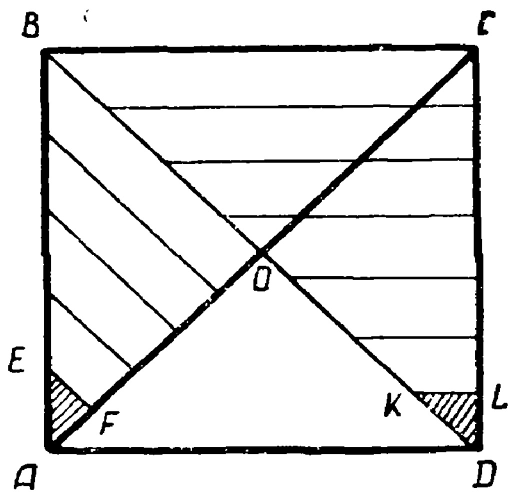
Понятие иррационального числа является одним из сложнейших понятий школьного курса, а формирование его одной из труднейших методических проблем. На самом деле оно требует длительных рассуждений, экскурсов в школьный курс арифметики, тонких и глубоко продуманных подходов, графических иллюстраций и значительного учебного времени. Методически выдержанное введение понятия иррационального числа нуждается во многих страницах учебника. Внесение этого материала в учебник геометрии вызвало бы нарушение системы изложения геометрии.

В силу изложенного надо признать нецелесообразным включать введение понятия иррационального числа в курс геометрии.

Краткое и формальное введение этого понятия, как показывает опыт последних лет с составлением учебников по планиметрии, не может дать удовлетворительных результатов. Оно не только не способствует правильному формированию понятия об иррациональном числе, но отпугивает от него, и время, затраченное на это оказывается потерянным и для курса геометрии и в отношении изложения алгебры.

В курсе геометрии целесообразно дать доказательство существования несоизмеримых отрезков, а формирование понятия иррационального числа отнести на уроки алгебры[1]. Изложение той и другой учебной дисциплины можно спланировать так, что непосредственно за доказательством существования несоизмеримых отрезков вводится понятие об иррациональном числе на уроках алгебры. Это возможно достигнуть, если несколько задержать изложение геометрии и форсировать преподавание алгебры. В дальнейшем уроки, отводимые геометрии, могут быть легко восстановлены. Ниже приводится план изложения начала главы алгебры «Степени и корни» и начала главы геометрии «Отношение и пропорциональные отрезки» (Стр. 194).

Так как алгоритм Евклида исключен из плана изложения геометрии, то и доказательство существования несоизмеримых отрезков должно обойтись без этого алгоритма. Приведем достаточно строгое и наиболее доступное доказательство теоремы: «Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной»[2].



Чертеж 41

Условие: в квадрате $ABCD$ проведена диагональ BD (черт. 41).

Доказать, что диагональ BD несоизмерима со стороной AB.

Теорема доказывается способом приведения к абсурду.

Допустим, что диагональ BD и сторона AB соизмеримы, т. е. существует отрезок q, который точно n раз укладывается в диагонали BD и m раз в стороне AB, причем m и n натуральные взаимно простые числа. На чертеже фигуры принято $n=7$, $m=5$. Тогда

$$\frac{AB}{BD}=\frac{m}{n}$$

[1] В. В. Репьев, Очерки по методике преподавания алгебры, Горьковское кн. издательство, 1958.

[2] А. И. Фетисов, Геометрия, изд. 2, Учпедгиз, 1957.

ПЛАН

изложения начал глав „Отношение и пропорциональность отрезков“ и „Степени и корни“

Недели	Степени и корни	Число уроков	Отношение и пропорциональность отрезков	Число уроков
1	1) Понятие о квадратном корне. Упражнения.	1		
	2) Извлечение квадратного корня из положительного числа	1		
	3) Извлечение квадратного корня с точностью до $\frac{1}{10^n}$	1		
	4) Упражнения в извлечении квадратного корня. Использование таблиц квадратных корней из чисел. Упражнения.	2	1) Измерение отрезков: случай, когда длина целое число. Аксиома Архимеда.	1
2	5) Решение неполных квадратных уравнений вида: $ax^2 = c$	1		
	6) Повторение и упражнения. Контрольная работа на 20 минут.	1		
	7) Анализ контрольной работы. Теорема: „Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.“	1	2) Измерение отрезков: случай, когда длина отрезка десятичная дробь. Соизмеримые отрезки.	1
	8) Подготовка к формированию понятия об иррациональном числе.	1	3) Существование несоизмеримых отрезков.	1
3	9) Понятие об иррациональном числе.	2	4) Измерение отрезка, несоизмеримого с единицей длины.	1
	10) Действительные числа.	1		
	11) Понятия о действиях над действительными числами.	1	5) Понятие об отношении отрезков (соизмеримых и несоизмеримых).	1

Построим диагональ AC, точку пересечения диагоналей обозначим через O. Так как диагонали квадрата в точке O делятся взаимно пополам, то

$$\frac{AB}{BO} \text{ или } \frac{AB}{AO} = \frac{2m}{n} \tag{1}$$

Отметим на AB и BD точки, которые получаются при последовательном откладывании на них отрезка q.

Через точки деления стороны AB проведем прямые, параллельные диагонали BD до пересечения с диагональю AC. Тогда отрезок AO по известной теореме разделится на m равных долей.

Через точки деления диагонали BD проведем прямые, параллельные стороне BC, до пересечения со стороной CD. Тогда эта сторона разделится на n равных между собою долей.

Покажем, что доли отрезка AO равны долям стороны CD. С этой целью рассмотрим треугольники AEF и DKL. Они прямоугольные и равнобедренные; значит, углы при гипотенузах по 45°, $AE = DK$, так как по допущенному каждый из этих отрезков равен q. Итак $\triangle AEF = \triangle DKL$, а отсюда имеем: $AF = DL$.

Следовательно,

$$\frac{CD}{AO} \text{ или } \frac{AB}{AO} = \frac{n}{m} \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{2m}{n} = \frac{n}{m}$$

или

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

Получили, что квадрат рационального числа равен 2.

Из алгебры известно, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Пришли к противоречию.

Следовательно, диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.

Из доказанной теоремы получается очевидное следствие: в равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза несоизмерима с его катетом. Можно получить сколько угодно пар несоизмеримых отрезков таким, например, приемом: отложим на каждой стороне прямого угла от его вершины по равному отрезку, концы их соединим отрезком прямой, получим отрезок несоизмеримый с отложенным на катетах.

Встает вопрос, как найти длину отрезка AB, если он несоизмерим с единицей длины — отрезком CD.

Откладываем единицу измерения от точки A по отрезку AB столько раз, чтобы получился остаток, меньший единичного отрезка CD, например, 4 раза. На 1-м остатке 0,1 доля единичного отрезка укладывается, например, 5 раз, и получается 2-й остаток, меньший 0,1 единицы длины. На 2-м остатке укладываем 0,01 долю единичного отрезка, например, 7 раз, и остается 3-й остаток, меньший 0,01 единицы длины. На этом остатке откладываем 0,001 долю единицы длины и т. д. Всякий раз получается остаток. Откладывание на отрезке AB долей единичного отрезка никогда не заканчивается. Количество десятичных знаков, показывающих, сколько десятых, сотых, тысячных и т. д. долей откладывается на отрезке AB, неограниченно растет. Продолжая эту операцию, получаем бесконечную десятичную дробь. Эту дробь и называют длиной отрезка AB при единичном отрезке CD. Записывают: $AB = 4{,}57 \ldots CD$.

Описанный случай измерения можно только мыслить: в практике измерений осуществить его невозможно. Это объясняется тем, что делить единичный отрезок на все более и более мелкие доли бесконечно нельзя.

Чтобы конкретизировать этот случай получения длины отрезка, можно использовать следующую демонстрацию. Из миллиметровой бумаги изготовляется прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом, равным 1 *м*. Будем измерять его гипотенузу метром. Метр укладывается в гипотенузе 1 раз и получается остаток; в этом остатке 0,1 *м* укладывается 4 раза и получается 2-й остаток; в нем 0,01 *м* уложится 1 раз и получается 3-й остаток; 0,001 *м* укладывается в 3-м остатке 4 раза и вновь получится остаток. Дальше школьными средствами продолжить измерение нельзя, а теоретически можем продолжить его без конца. Итак, гипотенуза равна $1{,}414\ldots \cdot 1$ *м* или $1{,}414\ldots$ *м*.

Получаемая при измерении отрезка бесконечная дробь может оказаться периодической или непериодической. Всякую периодическую дробь можно обратить в обыкновенную. В первом случае длина отрезка выражается обыкновенной дробью и отрезок соизмерим с единицей длины.

Если длина отрезка выражается бесконечной непериодической десятичной дробью, то это значит, что длина отрезка выражается иррациональным числом.

В практике измерение отрезков производится приближенно с такой точностью, которая удовлетворяет практическим запросам.

4. Аксиома Кантора

Итак, аксиома Архимеда дает возможность найти длину любого отрезка при любом заданном единичном отрезке, другими словами аксиома позволяет каждому отрезку при данном единичном отрезке поставить в соответствие положительное действительное число — длину отрезка.

Возникает вопрос, каждому ли положительному действительному числу, при данном единичном отрезке, соответствует отрезок, длиной которого служит это число.

Вопрос решается очень просто, если данное число рациональное. На самом деле, если дано натуральное число n, то для получения отрезка, длиной которого служит n, достаточно единичный отрезок взять слагаемым n раз. Если дано положительное рациональное число $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, то для получения отрезка, длина которого равна $\frac{m}{n}$, достаточно единичный отрезок разделить на n равных долей и взять эту долю слагаемым m раз. Таким образом любому данному положительному рациональному числу соответствует отрезок, длиной которого, при заданном единичном отрезке, служит это число.

Если дано положительное иррациональное число, то вопрос о существовании отрезка, длиной которого оно является решается не так просто, как для рационального числа. Требуется введение особой аксиомы.

Пусть даны отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n, ..., причем все точки отрезка A_2B_2 принадлежат отрезку A_1B_1, в частности один из концов A_2B_2 может совпадать с одним из концов A_1B_1; все точки отрезка A_3B_3 принадлежат отрезку A_2B_2; один из концов A_3B_3 может совпадать с одним из концов A_2B_2, и т. д. до бесконечности. Говорят, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n, ... образуют последовательность вложенных отрезков: каждый последующий вкладывается в предыдущий отрезок.

Пусть для любого как угодно малого отрезка всегда найдется отрезок $A_n B_n$, который будет меньше заданного. Тогда говорят, что последовательность вложенных отрезков бесконечно убывает и называют бесконечно убывающей.

При такой ситуации аксиома утверждает, что существует точка, которая лежит внутри всех отрезков. Краткая формулировка аксиомы такова: если дана бесконечно убывающая последовательность вложенных отрезков, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам. Эта — аксиома Кантора или аксиома непрерывности[1]. Легко доказать, что эта точка — единственная. Допустим, что существуют две точки M и N, принадлежащие всем вложенным отрезкам. В таком случае при любом n $A_nB_n > MN$; значит, последовательность вложенных отрезков не будет бесконечно убывающей. Итак, существует только одна точка, принадлежащая всем вложенным отрезкам.

Пусть дано положительное иррациональное число $a = 2{,}4705\ldots$ Покажем, что можно найти отрезок, длиной которого служит это число. Возьмем приближенные значения числа a с точностью до единицы по недостатку и по избытку: 2 и 3. На оси от начала отложим отрезки, соответствующие этим числам. Не совпадающие концы их определяют отрезок A_1B_1. Возьмем приближенные значения числа a с точностью до 0,1 по недостатку и по избытку: 2,4 и 2,5. Отложим от начала той же оси соответствующие этим числам отрезки. Между не совпадающими концами их получим отрезок A_2B_2, вложенный в A_1B_1. Далее округляем число a до сотых долей: 2,47 и 2,48. Отложив на оси отрезки, соответствующие этим числам, получим отрезок A_3B_3, вложенный в A_2B_2. Так поступаем и далее.

В результате получим последовательность вложенных стягивающих отрезков: A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... В этой последовательности всегда можно найти отрезок, который будет меньше любого как угодно малого положительного

---

[1] Георг Кантор (1845—1918) — видный немецкий математик, основоположник теории множеств, создатель одной из теорий иррациональных чисел. Учение Кантора о множествах оказало очень большое влияние на развитие современной математики.

отрезка. Применима аксиома непрерывности Кантора: существует единственная точка C, принадлежащая всем вложенным отрезкам.

При заданном единичном отрезке положительному иррациональному числу соответствует отрезок OC, длина которого равна a.

Итак, при заданном единичном отрезке каждому положительному действительному числу соответствует отрезок, имеющий длину, равную этому числу.

5. Отношение и пропорциональность отрезков

Ранее было введено понятие об отношении соизмеримых отрезков. Теперь, когда установлено понятие об измерении любого отрезка любым другим отрезком, надо расширить объем понятия об отношении отрезков, включив в него и отношение несоизмеримых отрезков.

Если a и c — любые отрезки, то под отношением отрезка a к отрезку c будем разуметь отношение длины первого из них к длине второго:

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{длина } a}{\text{длина } c},$$

где длины отрезков a и c — выражены положительными действительными числами.

Отношение этих длин равно некоторому действительному числу q:

$$\frac{a}{c} = q \text{ или } a = qc \qquad (1)$$

Число q называют отношением отрезка a к отрезку c.

Сохраняется ранее введенное определение.

Равенство (1) можно истолковать так: если отрезок c принять за единицу длины, то q есть длина отрезка a. Таким образом задача об отыскании отношения двух отрезков во всех случаях равносильна задаче об измерении одним отрезком другого.

Из свойств отношения полезно отметить следующее: отношение отрезков не изменится, если умножить или разделить оба его члена на одно и то же число, неравное 0

Введение понятия о пропорции не встречает затруднений.

Если a, b, c, d — отрезки, при этом $a : b = q$, $c : d = q$, то можно записать пропорцию:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (2)$$

Пропорцией называется равенство двух отношений. Отрезки a и b, c и d называются пропорциональными.

Так как все члены пропорции могут быть заменены соответствующими числами — длинами отрезков, то к пропорции, составленной из отрезков применимы все свойства пропорций, известные ранее.

В каждой пропорции:

1) произведение крайних членов равно произведению средних членов,

2) можно переставить крайние, или средние, или одновременно те и другие члены,

3) если известны три члена, то можно определить четвертый,

4) если равны предыдущие члены, то равны и последующие,

5) если равны последующие члены, то равны и предыдущие.

Свойство ряда равных отношений применяется в доказательствах нескольких теорем геометрии. Целесообразно доказать теорему об этом свойстве. В нашей практике вводились предложения о производных пропорциях.

Как получить пропорциональные отрезки путем геометрических построений?

Пусть даны отрезки AB и CD. Построим отрезки $A_1B_1 = \frac{3}{5} AB$ и $C_1D_1 = \frac{3}{5} CD$. Как выполнить эти построения, известно. В результате легко получить:

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1.$$

Таким путем для двух данных отрезков можно получить много пар отрезков, каждая из которых вместе с данными образует пропорцию. Этот прием ограничен тем, что отношение AB и A_1B_1 задается рациональным числом.

Рассматривая этот способ построения пропорциональных отрезков, учащиеся повторяют теоремы о свойстве отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла, на двух прямых.

6. Свойства параллельных прямых, пересекающих другие прямые

Общий ответ на вопрос, как получить пропорциональные отрезки, дает следующая теорема:

«Три параллельные прямые, пересекающие две прямые, отсекают от них пропорциональные отрезки»[1].

Эту теорему можно назвать основной: на нее опирается изложение других теорем о пропорциональности отрезков. Приведенная формулировка не отличается строгостью: нет указания, в каком порядке составляется пропорция. С этим недостатком можно помириться: он не вызывает недоразумений. Упрощенная формулировка дает возможность избежать строгих, но сложных и потому неприемлемых формулировок.

Условие: прямые l и l_1 пересечены тремя параллельными прямыми a, b, c (черт. 42).

Доказать, что

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1} \tag{1}$$

Чтобы доказать существование пропорции (1), достаточно убедиться, что левое и правое отношения выражаются одним и тем же числом.

Прежде всего найдем отношение $\frac{AB}{BC}$. Отыскание его выполняется совершенно также, как измерение отрезка AB отрезком BC.

Отложим меньший отрезок BC от точки B на большем BA. Согласно аксиоме Архимеда всегда можно указать такое натуральное число n, что

$$(n-1)\cdot CB<BA \text{ и } n\cdot CB\geqslant BA.$$

Если, например, $n=3$ и $n\cdot CB=BA$, то отношение $\frac{AB}{BC}=3$.

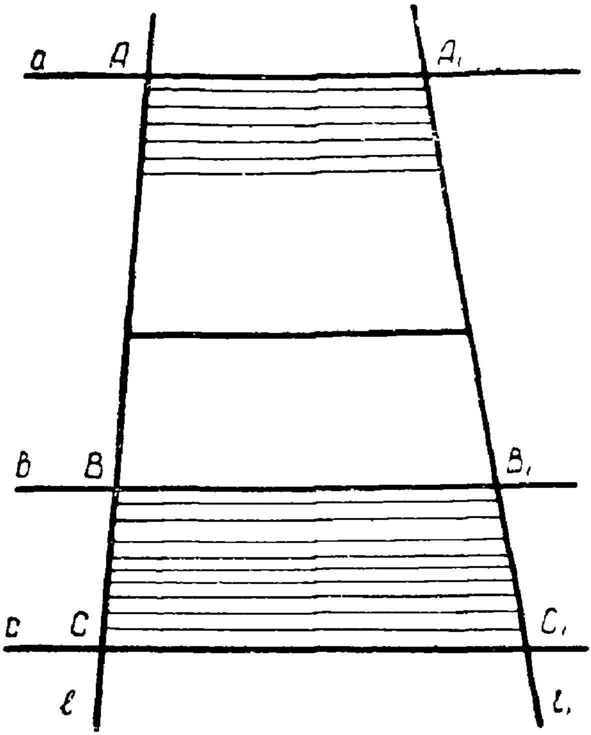
Если $n\cdot CB>BA$ и $n=3$, то отрезок BC уложится на BA два раза и получится остаток, меньший CB. Разделим CB на 10 равных долей и отложим $0,1\ CB$ на остатке. Пусть он уложится, например, 5 раз и получится

---

[1] Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, ч. 1, Планиметрия, Учпедгиз, 1954.

2-й остаток, меньший 0,1 CB. Затем 0,01 CB откладываем на 2-м остатке, например, 3 раза и получим 3-й остаток и т. д.

Имеем, что $\frac{AB}{BC} = 2{,}53...$



Чертеж 42

Теперь найдем отношение $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Через точки, полученные на прямой l, проведем отрезки, параллельные прямой a до пересечения с прямой l_1. Эти отрезки параллельны прямым b и c. На основании теоремы о свойстве отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на двух других прямых, равным отрезкам прямой l соответствуют равные между собою отрезки прямой l_1. Тогда отрезок C_1B_1 уложится на B_1A_1 два раза с остатком, меньшим C_1B_1; 0,1 C_1B_1 уложится на этом остатке 5 раз и получится остаток, меньший 0,1 C_1B_1; 0,01 B_1C_1 уложится на 2-м остатке 3 раза и т. д. Значит, отношение

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = 2{,}53$$

$$\text{итак,}\ \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} \qquad (1)$$

Полезно обратить внимание на то, что прямые l и l_1 по отношению одна к другой располагаются произвольно: они могут пересекаться между параллелями, точка их пересечения может лежать на одной из параллелей, они могут быть и параллельны между собой. Эти особенности фигуры показываются на чертежах. Доказательство не зависит от взаимного расположения прямых l и l_1.

Пропорция (1) — одна из пропорций, которые можно составить из отрезков, получаемых пересечением тремя параллельными прямыми двух других прямых.

Если к обоим отношениям пропорции (1) прибавить по 1, каждую часть полученного равенства привести отдельно к общему знаменателю, то получим пропорцию

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} \qquad (2)$$

Если разделить отношения пропорции (1) на соответствующие отношения пропорции (2), то получим

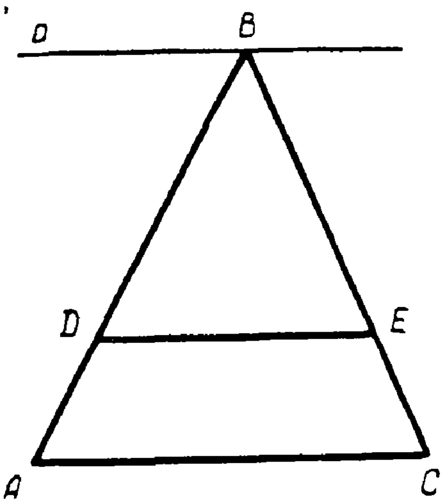
$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} \qquad (3)$$

Если ученики знакомы с правилами получения производных пропорций, то пропорции (2) и (3) можно получить по этим правилам.

Основная теорема открывает возможности доказать прямую и обратную теоремы о характеристическом свойстве прямой, параллельной одной из сторон треугольника и пересекающей другие его стороны.

Прямая теорема. «Прямая параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая другие его стороны, делит их на пропорциональные отрезки».

Условие: В $\triangle ABC$ прямая $DF \| AC$ и пересекает стороны AB и BC в точках D и E (черт. 43).



Чертеж 43

Требуется доказать, что

$$\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}$$

Чтобы опереться на основную теорему, проведем через вершину B вспомогательную прямую a, параллельную прямой AC. Три прямые a, DE и AC — параллельны между собою и пересекают прямые BA и BC. Применяя основную теорему, получаем:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}$$

Теорема доказана.

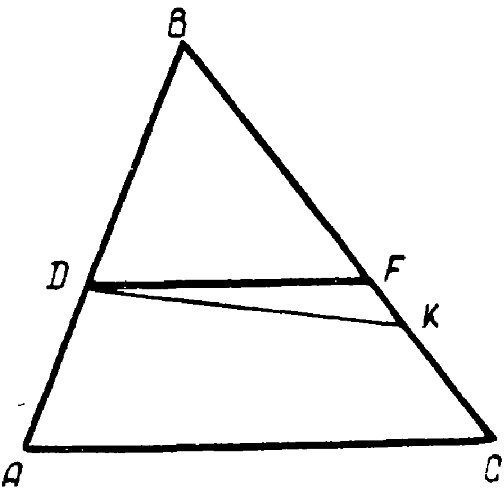
В порядке упражнений целесообразно получить другие пропорции:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB}, \quad \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CE},$$

а также некоторые пропорции путем перестановки средних или крайних членов.

Обратная теорема. «Если прямая, пересекающая две стороны треугольника, делит их на пропорциональные отрезки, то она параллельна третьей стороне».

Условие: в $\triangle ABC$ проведена прямая DF, пересекающая стороны AB и BC в точках D и F, при этом



Чертеж 44

$$\frac{AD}{DB}=\frac{CF}{FB} \qquad (1)$$

Доказать, что $DF \parallel AC$ (черт. 44).

Теорема доказывается приведением к абсурду. Допустим, что $DF \nparallel AC$. Через точку D по аксиоме параллельных проходит единственная прямая DK, параллельная AC. По предыдущей теореме имеем:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{CK}{KB} \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем:

$$\frac{CF}{FB}=\frac{CK}{KB} \qquad (3)$$

или $CF \cdot KB = FB \cdot CK$.

Легко усмотреть, что это равенство ложно: левая часть больше правой. Необходимо отказаться от того, что $DF \nparallel AC$, и принять, что $FD \parallel AC$.

Если при изложении признаков подобия треугольников предполагается опираться не на гомотетию, а использовать традиционные доказательства, какие даны, например, в учебнике геометрии А. П. Киселева, то следует доказать теорему: «Если в треугольнике провести прямую, параллельную стороне его и пересекающую две другие стороны, то стороны отсеченного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам данного треугольника».

Доказательство затруднений не вызовет. Его сумеют найти и учащиеся.

Если при изложении признаков подобия треугольников предполагается опираться на гомотетию, то эта теорема не нужна. Она может быть отнесена к числу задач на доказательство.

На теореме о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника нет надобности останавливаться: доказательство ее обычное.

7. О задачах

Учение о пропорциональных отрезках дает возможность решать многие задачи на построение, доказательство и вычисление, в том числе и таких, которые имеют практическое значение.

К основным задачам на построение относятся: построение отрезка, четвертого пропорционального к трем данным отрезкам, и деление отрезка в заданном отношении.

Первую из них иногда формулируют так, что получается задача с несколькими решениями. Например, формулировка: «К трем данным отрезкам a, b, c построить четвертый пропорциональный» приводит к составлению неравносильных уравнений и к нескольким решениям.

Чтобы избежать этого, задачу надо поставить так, чтобы получилось одно решение, например: «Построить отрезок x, если $x : a = b : c$, где a, b, c — данные отрезки».

Наблюдается, что некоторые ученики неудачно откладывают данные отрезки на сторонах угла и поэтому получают неверное решение. На первых порах можно рекомендовать один из возможных порядков откладывания отрезков.

Для получения навыков строить четвертый пропорциональный к трем данным отрезкам предлагаются упражнения. Построить отрезок x, если

$$x = \frac{a^2}{b}, \quad x = \frac{2ab}{3c}, \quad x = \frac{ab^2}{c^2}, \quad x = \frac{3a^2b}{2c^2},$$

где a, b, c — данные отрезки.

Если при выполнении упражнения приходится строить четвертый пропорциональный 2 или 3 раза, то рекомендуется использовать соответственно 2 или 3 чертежа: построение на одном чертеже вносит ненужные затруднения. Например, при решении последнего упражнения можно поступить так:

$$y = \frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{3by}{2c}$$

и на одном чертеже построить y, а на другом x.

В число упражнений можно включить построение треугольников и четырехугольников.

Построить треугольник, если дано

1) a, $a : b$, C, 2) a, $a : b : c$.

Построить параллелограмм, если дано

1) a, $a : b$, A, 2) e, $e : f$, E.

Вторую основную задачу на построение можно сформулировать так: «Разделить данный отрезок a на части в отношениях $m:n:p$, где m, n, p — данные отрезки». В такой постановке данные отношения могут выражаться любыми положительными действительными числами: задача имеет достаточную для школьного обучения общность.

Если под m, n, p разуметь числа, то это суживает задачу: членами отношений могут быть только положительные рациональные числа. В упражнениях можно использовать и такую постановку задачи.

Построение с помощью произвольного угла является более общим по сравнению с другими: оно заслуживает предпочтения.

Предполагается решить несколько задач на построение фигур.

1) Построить прямоугольный треугольник по сумме катетов s, если отношение их равно: а) $2:3$, б) $m:n$, где m и n — данные отрезки.

2) По данному периметру s построить треугольник, стороны которого относятся, как а) $1{,}5:2:2{,}5$, б) $m:n:p$, где m, n, p — данные отрезки.

3) По данному периметру построить прямоугольник, стороны которого относятся, как а) $1\frac{1}{2}$ 2, б) $p:q$, где p и q — данные отрезки.

4) На продолжении данного отрезка найти точку, расстояние которой от концов этого отрезка находится в данном отношении: а) $3:5$, б) $m:n$, где m и n — данные отрезки.

В связи с этой задачей ученики познакомятся с внутренним и внешним делением данного отрезка в данном отношении.

В отношении задач на доказательство заметим, что во всех случаях заслуживают предпочтения те из них, которые имеют познавательный характер, которые расширяют знания о пространственных формах и отношениях. Эта роль задач на доказательство становится значительнее в старших классах, начиная с 8-го, по сравнению с младшими.

Учитывая эти соображения, можно предложить некоторые задачи на доказательство.

1) Если две пересекающиеся прямые пересечены двумя параллельными прямыми так, что точка пересечения принадлежит полосе между параллельными, то на пересекающихся прямых получатся пропорциональные отрезки. Доказать.

2) Если две пересекающиеся прямые пересечены двумя параллельными прямыми так, что точка пересечения не принадлежит полосе между параллельными, то на пе-

ресекающихся прямых получатся пропорциональные отрезки. Доказать.

3) Четыре параллельные прямые a, b, c, d пересекают две прямые l и k. Доказать, что отрезки прямых l и k между прямыми a и b, c и d пропорциональны.

4) Биссектриса внешнего угла всякого треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, расстояния которой от концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника. Доказать.

5) Сформулировать теорему, обратную теореме о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника, и доказать ее.

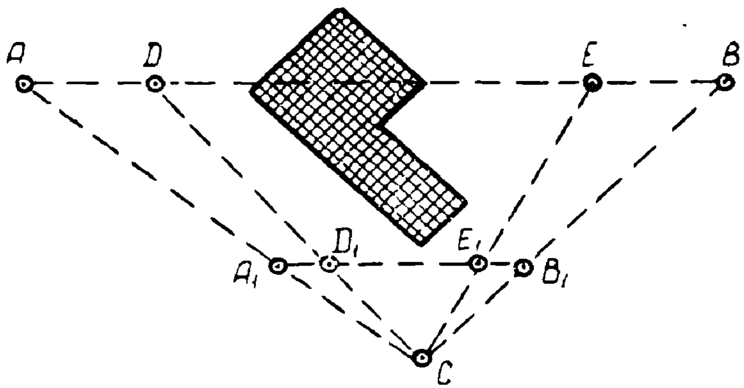
6) Сформулировать теорему, обратную теореме о свойстве биссектрисы внешнего угла треугольника и доказать ее.

Таким образом свойства биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника предстанут перед учениками как характеристические.

В рассматриваемой главе задачи на вычисление применяются довольно широко: нет надобности останавливаться на них. Заметим только, что алгебраические способы решения заслуживают предпочтения перед арифметическими.

8. Некоторые практические задачи

1) Проверить отрезок AB при условии, что между его концами A и B находится препятствие, мешающее видеть из одного конца отрезка другой (черт. 45).



Чертеж 45

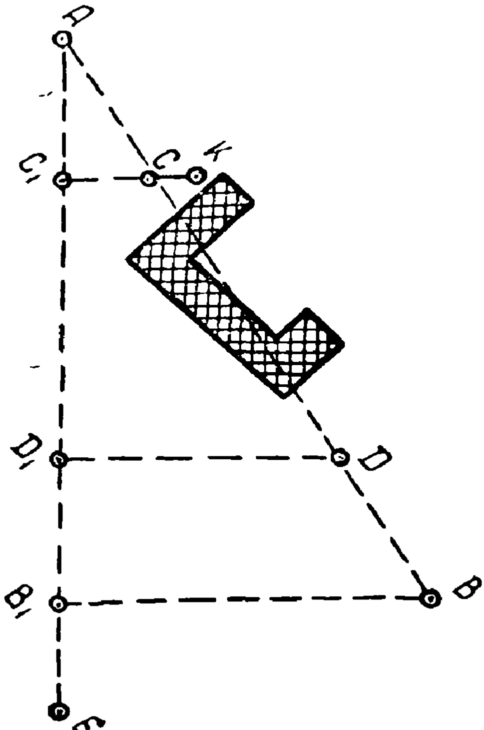
Выбираем такую произвольную точку C, чтобы из нее были видны вехи, поставленные в точках A и B, и чтобы было возможно измерить отрезки CA и CB. Непосредственным измерением этих отрезков находим их длины. От точки C по CA и CB откладываем соответственно отрезки CA_1 и CB_1, равные одной и той же части отрезков CA и CB, однако такие, чтобы из точки A_1 была видна веха точки B_1.

Намечаем на отрезке A_1B_1 произвольную точку D_1, измеряем отрезок CD_1, и вычисляем длину отрезка DD_1. От точки D_1, на продолжении CD_1, откладываем длину отрезка DD_1. Как доказать, что точка D принадлежит отрезку AB?

Также можно найти и точку E, принадлежащую AB.

Для выполнения решения достаточно иметь рулетку и вехи.

Приведем другое решение той же задачи, для которого требуется эккер, рулетка и вехи (черт. 46).



Чертеж 46

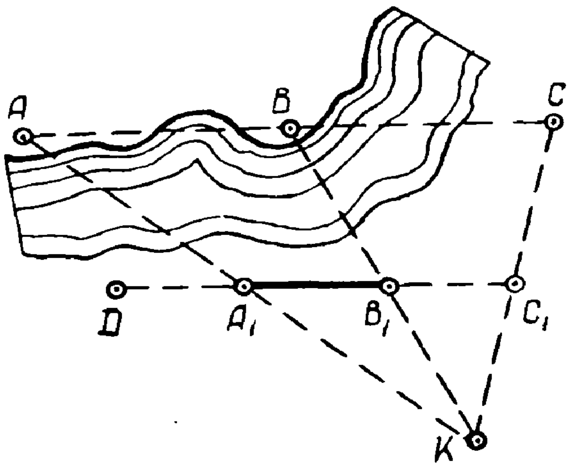
Прокладываем на местности произвольный луч AE, строим отрезок BB_1, перпендикулярный к лучу AE, измеряем отрезки AB_1 и BB_1. Затем от точки A по AE откладываем отрезок AC_1, равный, например, 0,1 AB_1 и в точке C_1 к AE построим перпендикуляр C_1K. Откладываем от точки C_1 по C_1K отрезок C_1C, равный 0,1 BB_1.

Доказать, что точка C лежит на отрезке AB.

Таким же способом можно построить точку D, принадлежащую отрезку AB.

2) Уже неоднократно различными приемами решалась задача: «Найти длину отрезка, один конец которого недоступен». Целесообразно обсудить вопрос, как решить эту задачу, опираясь на пропорциональность отрезков, если в распоряжении решающего имеется угломер для измерения углов в горизонтальной плоскости, рулетка и вехи.

3) Найти длину отрезка AB, концы которого недоступны, однако имеется доступная точка C на его продолжении (черт. 47).



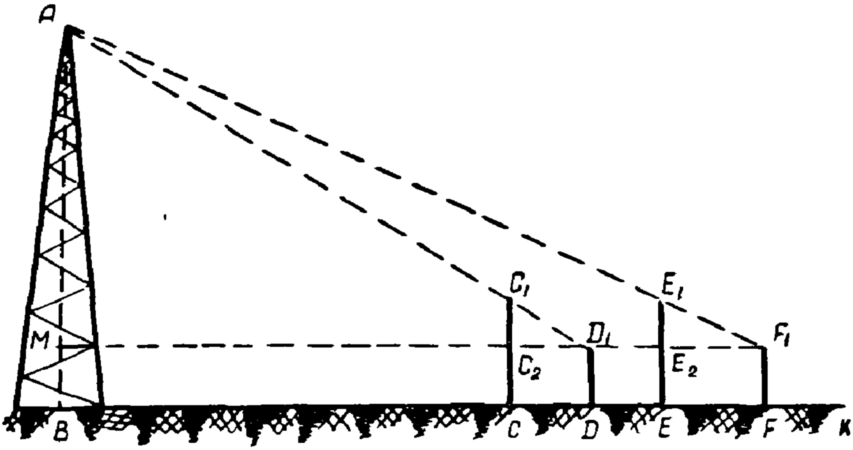
Чертеж 47

В распоряжении решающего имеется угломер, рулетки и вехи.

Выберем произвольную точку K так, чтобы отрезок CK можно было измерить. Находим длину отрезка KC. От точки K по KC откладываем отрезок KC_1, равный некоторой части отрезка KC, например, $KC_1=0{,}2\,KC$. Измеряем $\angle ACK$ и на C_1K с вершиною в точке C_1 строим $\angle KC_1D$, равный $\angle ACK$. Находим точки A_1 и B_1, образованные пересечением луча C_1D с отрезками KA и KB, и измеряем отрезок A_1B_1.

Правильно ли заключение, что $AB=5\,A_1B_1$?

4) Определить высоту мачты AB, основание которой недоступно (черт. 48).



Чертеж 48

В распоряжении имеются колья, вехи и рулетка.

На горизонтальном луче BK втыкают в землю равные колья DD_1 и FF_1. Затем ставят равные вехи CC_1 и EE_1, в таких точках луча BK, чтобы точки A, C_1, D_1 лежали на прямой и точки A, E_1, F_1 также лежали на прямой. При измерении получены следующие результаты: $CC_1=EE_1=m$, $DD_1=FF_1=n$, $CD=p$, $DE=r$, $EF=q$. Как по этим данным найти длину отрезка AB?

Обозначив длины AM через x и BD через y, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{m-n}{p} \\[2ex] \dfrac{x}{y+r+q}=\dfrac{m-n}{q} \end{cases}$$

Получим

$$AB = \frac{(r+q)(m-h)}{q-p} + n \text{ единиц длины}$$

Рассматривая приложения пропорциональности отрезков, естественно уделяется внимание построению и применению поперечного масштаба, устройству и использованию пропорционального циркуля.

ОЧЕРК X

К МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ГЛАВЫ О ГОМОТЕТИИ И ПОДОБИИ ФИГУР

1. Общие положения

Гомотетия — одно из точечных преобразований плоскости.

Пусть каждой точке A данной плоскости при данной точке S той же плоскости ставится в соответствие точка A_1, принадлежащая прямой SA, так, что $SA_1 = |k| \cdot SA$, где k — действительное число, отличное от 0, причем отрезки SA и SA_1 при $k>0$ одинаково направлены, при $k<0$ противоположно направлены. Если при этом точке S ставится в соответствие эта же точка, то такое преобразование плоскости называется гомотетией.

При этом преобразовании любая фигура F плоскости отображается в фигуру F_1 той же плоскости. Это отображение взаимно однозначно; фигура F_1 называется гомотетичной по отношению F.

Понятие гомотетии возникло и развивалось под воздействием практики; оно находит широкое применение во многих областях. Например, при горизонтальной мензульной съемке способом кругового визирования плоский участок земной поверхности отображается в соответственную фигуру плана; при работе пантографом один план земельного участка отображается в другой план того же участка с измененным масштабом. При этих отображениях фигуры образа и прообраза подобны и подобно расположены[1].

Так как гомотетия является одним из существенных преобразований, рассматриваемых в элементарной геометрии, и находит широкое использование в практике, то ей должно быть уделено большое внимание в программах нашей школы.

В учебной литературе наметилось два плана расположения материала рассматриваемых глав. Одни авторы начинают с подобия треугольников и многоугольников, а затем переходят к подобному преобразованию фигур; другие прежде всего излагают основы теории гомотетии, а затем учение о подобии. Например, в учебнике геометрии А. П. Киселева принят первый путь изложения, а в учебнике Н. А. Глаголева — второй.

С методической точки зрения оба плана изложения можно признать приемлемыми. Однако второй из них имеет преимущества, заключающиеся в следующем: а) в научном отношении второй план выше первого — в нем на первое место выдвигается одно из важнейших понятий современной геометрии — точечное преобразование по заданному правилу плоскости в себя, отображение фигуры в гомотетичную; б) второй план ценнее первого в методологическом отношении — в нем более выпукло представлен диалектический характер развития курса геометрии, а поэтому в воспитательном отношении он заслуживает предпочтения; в) второй план позволяет и подобие фигур рассматривать как одно из точечных отображений, а это представляет интерес и в образовательном, и в воспитательном отношениях.

В дальнейшем мы следуем второму плану.

2. Введение понятия отображения фигур

Так как отображение имеет большое значение в современной геометрии, то естественно желание педагога дать общее представление о точечном отображении и ввести соответствующее понятие. Учащиеся уже познакомились с некоторыми видами отображений — осевой симметрией, центральной симметрией и, может быть, параллельным

---

[1] Гомотетия — от греческого слова омов — подобный и θετος расположенный — подобное расположение.

переносом. Конкретные примеры послужат отправным материалом при формировании понятия отображения.

Прежде всего целесообразно вспомнить центральную симметрию: она является частным случаем гомотетии (при коэффициенте $k=-1$). Школьники выполняют упражнения: а) Построить треугольник, симметричный $\triangle ABC$ при заданном центре симметрии, б) Дана трапеция $ABCD$ и центр симметрии S; построить трапецию, симметричную данной. При этом вспоминаются определения симметричных точек и фигур, а также свойства центрально-симметричных фигур, которые были известны ранее.

Построение теругольника и трапеции, центрально симметричных данным фигурам, выполнено по установленному правилу, по которому каждой точке данной фигуры ставится в соответствие точка построенной. В таком случае говорят, что задано отображение (перевод) одной фигуры в другую: треугольника в треугольник, трапеции в трапецию.

При выполнении этих упражнений подмечается, что всякой точке данной фигуры соответствует точка построенной, что всяким двум различным точкам данной фигуры соответствуют различные точки построенной, что для каждой точки C_1 построенной фигуры найдется соответственная точка C данной, именно та, образом которой служит точка C_1. В таком случае говорят, что между точками двух фигур имеется взаимно однозначное соответствие.

Центральная симметрия фигур является примером отображения. Если принять другое правило соответствия, то получим новое отображение.

В качестве второго примера отображения полезно рассмотреть параллельный перенос фигур: он, как вспомогательный прием, применяется при решении некоторых задач методом подобия.

Выполняются упражнения: а) Произвести параллельный перенос отрезка AB в заданном направлении и на заданное расстояние; б) Произвести параллельный перенос четырехугольника $ABCD$ в направлении и на расстояние, заданные направленным отрезком. Отмечается, что фигура, полученная в результате отображения, равна данной фигуре, что между точками этих фигур имеет место взаимно однозначное соответствие.

Рассмотренные примеры и восстановленные в памяти общие представления о центральной симметрии фигур и параллельном переносе подготовляют сознание учащихся для осмысливания понятия о точечном отображении фигур. Что же общего и характерного в рассмотренных отображениях? Устанавливается правило, по которому каждой точке данной фигуры ставится в соответствие точка другой фигуры, получаемой в результате применения принятого правила. В школьном курсе это правило указывает способ построения. Можно дать следующее определение: отображением одной фигуры на другую называется установление по определенному правилу соответствия между точками фигур.

Отображаемая фигура называется прообразом по отношению к полученной; фигура, полученная в результате отображения, называется образом по отношению к прообразу.

Отображение называется взаимно-однозначным, если 1) всякой точке прообраза соответствует точка образа, 2) всяким двум различным точкам прообраза соответствуют различные точки образа, 3) для каждой точки C_1 образа найдется точка C прообраза, именно та которая является прообразом C_1. Все точечные отображения, рассматриваемые в школьном курсе геометрии, являются взаимно-однозначными.

Можно вести речь об отображении по выбранному правилу всей плоскости в эту же плоскость. Например, при центральной симметрии с данным центром каждой точке плоскости ставится в соответствие точка той же плоскости; значит, имеем отображение плоскости в себя. В таком случае говорят о преобразовании плоскости.

В связи с этим уместно напомнить третье известное школьникам отображение — осевую симметрию. И в этом случае имеет место преобразование плоскости.

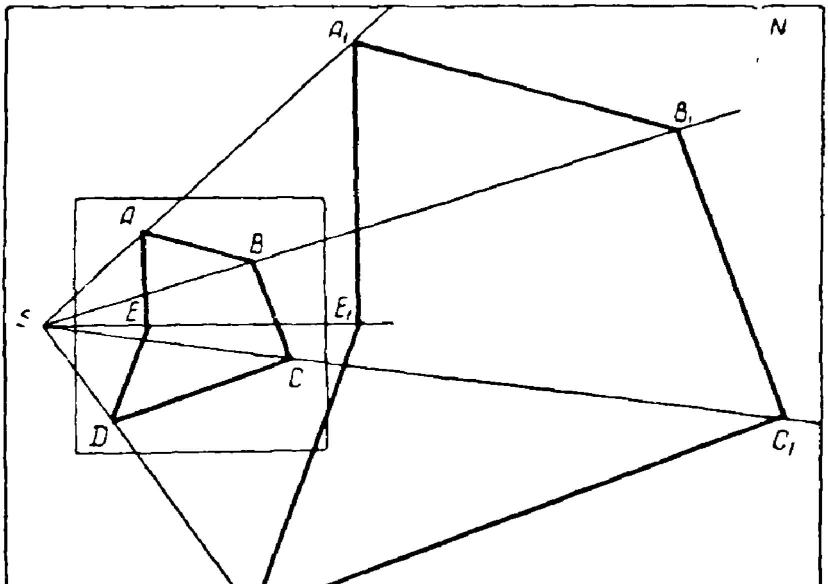
3. Понятие о гомотетии

Формирование понятия о гомотетии целесообразно начать с конкретных практических задач, выполнение которых опирается на это отображение. Рассмотрение хотя бы одной такой задачи позволяет продемонстрировать практическое значение нового отображения и создать в сознании школьников представление о нем. Вместе с тем рассмотрение задачи дает возможность ввести вспомогательные понятия, связанные с отображением, и подготовляет последующее изучение основных сведений о нем.

В качестве практических задач можно использовать, например, горизонтальную мензульную съемку земельного участка способом кругового визирования или перерисовку плана земельного участка в измененном масштабе.

При рассмотрении многих практических задач выполняются такие отображения фигур, при которых сохраняются формы их, а линейные размеры меняются. Например, при составлении планов земельных участков и сооружений приходится вычерчивать их в различных масштабах, при этом форма фигур сохраняется, а размеры меняются. То же самое наблюдается при составлении географических карт в различных масштабах. Предстоит изучить вопрос, как из одной плоской фигуры получить другую той же формы, но с измененными линейными размерами.

Пусть $ABCDE$ — план школьного земельного участка (черт. 49). Требуется получить такой план того же участ-



Чертеж 49

ка, чтобы линейные размеры были в 3 раза больше, чем данного плана.

Наложим план на лист бумаги N. В плоскости листа N выберем произвольную точку S, примем ее за начало лучей и построим лучи SA, SB, SC, SD, SE. На луче SA от начала S отложим последовательно отрезок SA три раза. Получим точку A_1, причем $SA_1 = 3SA$. Таким же способом на луче SB строим точку B_1, чтобы $SB_1 = 3SB$. Также получим точки C_1, D_1, E_1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 последовательно соединим отрезками прямых. Получим план $A_1B_1C_1D_1E_1$ школьного участка, масштаб которого в 3 раза крупнее масштаба плана $ABCDE$.

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ имеют одинаковую форму, но размеры второго из них больше соответствующих размеров первого в 3 раза.

Таким же приемом можно увеличить план в 4 раза, в 2,5 раза, можно уменьшить план в 2 раза, в 3,5 раза и т. д.

Рассмотренный пример дает представление о новом отображении; фигура $ABCDE$ отображена на фигуру $A_1B_1C_1D_1E_1$. Такое отображение называется гомотетией.

Фигура $A_1B_1C_1D_1E_1$ (образ) называется фигурой, гомотетичной данной фигуре $ABCDE$ (прообразу). Точка S называется центром гомотетии. Две точки A и A_1 (B и B_1, C и C_1 и т. д.) фигур $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ называются соответственными точками.

Отношение расстояния точки A_1 от центра гомотетии S к расстоянию точки A от той же точки S называется коэффициентом гомотетии. В примере коэффициент гомотетии $k=3$.

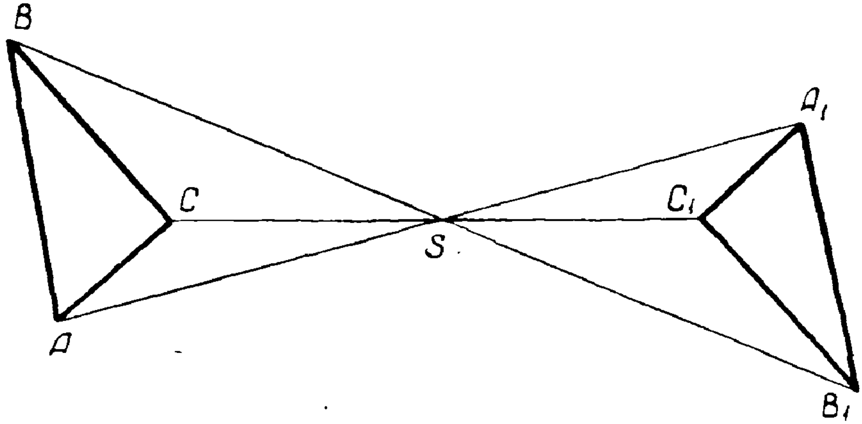
Необходимо обратить внимание на зависимость от коэффициента гомотетии линейных размеров образа по сравнению с соответствующими размерами прообраза в случаях, когда $k>1$, $0<k<1$, $k=1$. Если $k=1$, то данная фигура при гомотетии переходит сама в себя.

Коэффициент гомотетии k может быть выражен и отрицательным числом. Тогда центр S лежит между данной и гомотетичной фигурами (черт. 50). Коэффициент гомотетии не может равняться 0.

Таким образом коэффициент гомотетии может быть любым действительным числом, не равным 0.

На базе созданных представлений можно ввести определение гомотетии. Оно имеет довольно сложную структуру. В силу этого можно довольствоваться тем, что ученики будут передавать его своими словами.

Гомотетией с центром в точке S и коэффициентом k на-



Чертеж 50

зывается такое отображение, при котором каждой, отличной от S, точке A данной фигуры ставится в соответствие точка A_1 так, что точки S, A, A_1 лежат на прямой и $\frac{SA_1}{SA}=k$; точке S ставится в соответствие эта же точка.

4. Некоторые свойства гомотетии

Нет возможности сообщить учащимся все свойства гомотетичных фигур, приходится довольствоваться немногими свойствами, необходимыми для развития учения о подобии. Можно допустить, что отдельные свойства сообщаются без обоснований.

Прежде всего целесообразно доказать следующую теорему: «Фигура, гомотетичная данной прямой, есть также прямая».

Дана прямая a, центр гомотетии S и коэффициент гомотетии k (черт. 51). Пусть a не проходит через S.

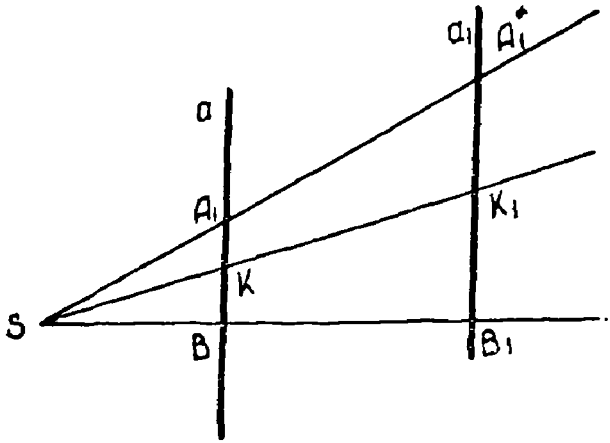
Отметим на прямой a две произвольные точки A и B, построим точки A_1 и B_1, гомотетичные A и B. Это означает, что

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=k \qquad (1)$$

Точки A и A_1 определяют прямую a_1.

Докажем, что любая точка K прямой a имеет образом точку K_1, принадлежащую прямой a_1.

Проводим прямую SK, которая пересечет прямую a_1 в точке K_1.



Чертеж 51

На основании (1) по известной теореме о пропорциональных отрезках заключаем, что $a \| a_1$.

Параллельные прямые a и a_1 пересечены прямыми SA_1 и SK_1, пересекающимися в точке S_1. По одной из теорем о пропорциональных отрезках получаем:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SK_1}{SK}.$$

Значит, $\frac{SK_1}{SK} = k$, т. е. точка K_1 гомотетична точке K. Так как K — произвольная точка прямой a, то все точки, гомотетичные точкам прямой a, принадлежат прямой a_1. Итак, в рассматриваемом случае теорема верна.

Рассмотрим другой случай, когда a проходит через S. Очевидно, что любая точка прямой a отображается в точку той же прямой a. Теорема верна и в этом случае.

Непосредственно из теоремы следует: а) прямая, гомотетичная данной прямой, не проходящей через центр гомотетии, параллельна ей; б) фигура, гомотетичная данному отрезку, принадлежащему прямой, не проходящей через центр гомотетии, есть отрезок, параллельный данному; в) отношение отрезка, гомотетичного данному, к этому данному отрезку равно по абсолютному значению коэффициенту гомотетии.

Выполняются упражнения: а) построить отрезок, гомотетичный данному, если центр гомотетии — одна из точек отрезка, и задан коэффициент k ($k=0{,}5$; $k=2$; $k=-2$), б) при заданном коэффициенте гомотетии k и центре гомотетии построить отрезок, гомотетичный данному ($k=$ $=2/_3$, $k=-3$).

Выполняя упражнения, обращаем внимание на то, что любой точке фигуры — прообраза соответствует точка фигуры — образа, что двум любым различным точкам прообраза соответствуют различные точки образа, что любой точке C_1 образа соответствует точка C прообраза, именно та, образом которой является C_1. Значит, гомотетия является взаимно однозначным отображением прямой.

Прямые и отрезки, определяемые соответственными точками двух гомотетичных фигур, называются сходственными. Углы двух гомотетичных фигур, образуемые сходственными лучами, так же называются сходственными, или соответственными.

Легко показать, что сходственные углы двух гомотетичных фигур равны между собой.

В заключение полезно рассмотреть следующее. Принимают какую-либо точку S плосткости за центр гомотетии и число k — за коэффициент гомотетии. Для определенности положим, что $k>0$. Через каждую точку плоскости, например, M строят луч SM, находят отрезок $SM_1=$ $=k\cdot SM$ и откладывают его по лучу SM от точки S. Таким образом точку M отображают в гомотетичную ей точку M_1. Аналогично с этим точку N плоскости отображают в точку N_1, точку P — в точку P_1. Мыслим, что такое отображение выполнено над всеми точками плоскости. Точке S поставим в соответствие эту же точку. Таким образом гомотетия есть преобразование плоскости в себя.

5. Упражнения и некоторые приложения гомотетии

После рассмотрения свойств гомотетии целесообразно предложить учащимся серию упражнений и задач. Цель их в том, чтобы школьники освоилить с этим отображением, понятиями и свойствами, связанными с ним.

Прежде всего надо предложить упражнения на построение многоугольников, гомотетичных данным при заданном коэффициенте гомотетии.

При выполнении на уроке первых упражнений этого вида подчеркивается, что для построения гомотетичной фигуры надо найти точку гомотетичную одной из вершин многоугольника, а положение остальных вершин определяется точками пересечения лучей или прямых, проведенных через центр гомотетии и вершины прообраза, и последовательно проведенными параллелями сторонам его.

Приведем первые упражнения.

Построить многоугольник, гомотетичный данному, если дан коэффициент гомотетии k и

а) центром гомотетии служит точка, внешняя по отношению к данной фигуре ($k=1,5$; $k=-1,5$; $k=-1$);

б) центром гомотетии служит одна из вершин данного многоугольника ($k=2$; $k=0,5$; $k=-1$);

в) центром гомотетии служит одна из точек контура многоугольника ($k=3$; $k=0,5$);

г) центром гомотетии служит внутренняя точка данного многоугольника ($k=2$; $k={}^2/_3$; $k=-2$).

При выполнении этих упражнений обращается внимание на то, что в случае а) гомотетичные фигуры либо имеют, либо не имеют общих точек, в случае б) обязательно имеют хотя бы одну общую точку (центр гомотетии), в случае в) гомотетичные фигуры всегда имеют бесчисленное множество общих точек, в случае г) контуры гомотетичных фигур не имеют общих точек при $k>0$ (за исключением $k=1$) и могут иметь общие точки контуров при некоторых отрицательных значениях k.

Обращается внимание и на то, что размеры фигуры, гомотетичной данной, при $|k|<1$ меньше, при $|k|>1$ больше соответствующих размеров данной фигуры. При $k=1$ гомотетичные фигуры равны между собой. Если $k=-1$, то гомотетия приводит к центральной симметрии, причем центр симметрии совпадает с центром гомотетии.

Полезны задачи на доказательство: при решении их учащиеся пользуются свойствами гомотетичных фигур и в некоторой мере расширяют свои знания. Приведем простейшие задачи.

1. Доказать, что при гомотетии:

а) параллельные прямые переходят в параллельные прямые,

б) квадрат переходит в квадрат,

в) высота, биссектриса, медиана данного треугольника переходят соответственно в высоту, биссектрису и медиану гомотетичного треугольника,

г) равносторонний треугольник переходит в равносторонний треугольник.

2. Всякие две окружности неравных радиусов гомотетичны и имеют два центра гомотетии (внешний и внутренний). Доказать.

3. Найти центр гомотетии двух окружностей с неравными радиусами.

4. К двум окружностям неравных радиусов построить общую внешнюю (внутреннюю) касательную, пользуясь центром гомотетии.

Яркий пример приложения гомотетии в практике дает работа пантографом[1]. Пантограф — прибор, служащий для механической перерисовки чертежей, планов и карт в другом масштабе. Если нет возможности продемонстрировать настоящий пантограф, то надо изготовить самодельную модель его, по ней разъяснить установку и описать работу прибора. Останавливаться на описании и применении пантографа нет надобности: и то, и другое имеется в учебниках геометрии.

Другим прекрасным примером приложения гомотетии в практике является горизонтальная мензульная съемка земельного участка способом кругового визирования.

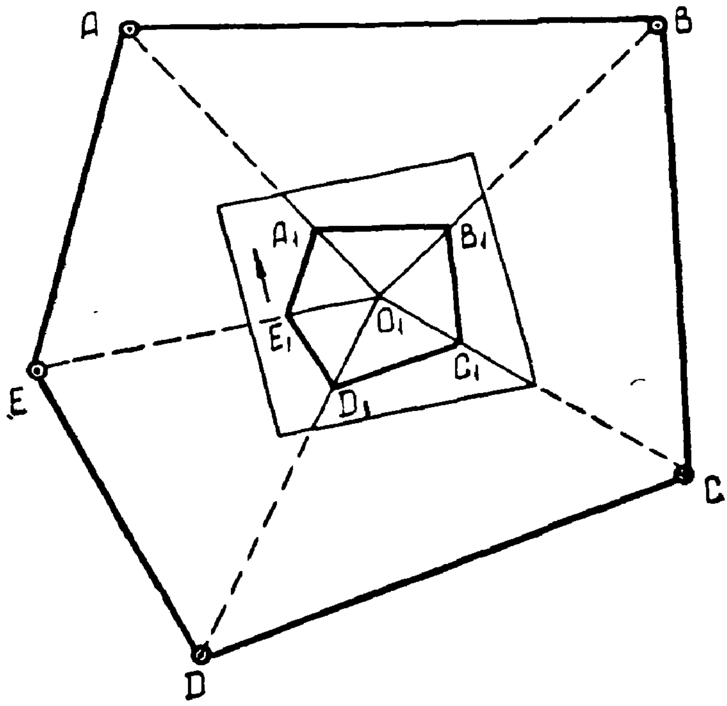
Пусть $ABCDE$ — практически горизонтальный земельный участок (черт. 52). Требуется получить план этого участка в масштабе в 1 *см* — 10 *м*.

Расположим мензулу в точке O где-либо внутри участка (точка на чертеже не обозначена). К верхней плоскости планшета прикрепим лист чертежной бумаги. Эту плоскость приводим в горизонтальное положение с помощью уровня, или ватерпаса, или в крайнем случае, на глаз.

Применяя компас, планшет ориентируют так, чтобы одна сторона квадрата — планшета расположилась по направлению магнитного меридиана. Направление меридиана отмечают на планшете стрелкой с буквами *С—Ю* (на чертеже эти буквы не поставлены). Планшет закрепляют зажимным винтом и в дальнейшем при съемке он должен оставаться неподвижным.

[1] Пантограф — от греческих πᾶν — все, γράφω — пишу, буквально — всепишущий.

Намечают на планшете точку O_1, соответствующую точке O местности. Точка O_1 должна быть расположена вертикально над точкой O. Это проверяется с помощью вилки или за отсутствием последней на глаз. В вершинах земельного участка ставят вехи.



Чертеж 52

Прикладывают визирную линейку ребром с делениями к точке O_1, и, вращая ее вокруг этой точки, направляют ребро линейки в точку A, т. е. визируют через точку O_1 на вершину A земельного участка. По приложенному к точке O_1 ребру линейки чертят луч с началом в этой точке в направлении на точку A местности.

Измеряют рулеткой отрезок OA и в выбранном масштабе откладывают на планшете отрезок O_1A_1, соответствующий отрезку OA на поверхности земельного участка. Таким образом на плане появляется первая точка A_1, соответственная вершине A земельного участка.

Так же наносится на план точка B_1, соответственная вершине B многоугольника местности и т. д.

Соединив последовательно точки A_1, B_1, C_1 и т. д. отрезками прямых, получают план контура, ограничивающего земельный участок.

Описанным способом можно нанести на план внутреннюю ситуацию участка, например, линии, по которым граничатся различные земельные угодья, отдельные строения и т. д.

Если часть контура или весь контур земельного участка — криволинейный, то кривая линия разбивается на звенья, которые без значительных погрешностей можно принять за прямолинейные отрезки. Таким путем дело сводится к съемке многоугольного контура.

При горизонтальной мензульной съемке применяется гомотетия: многоугольник $ABCDE$ отображается в многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, центр гомотетии — точка O_1, коэффициент гомотетии k в примере равен 0,001.

Ранее отмечалось, что описанная съемка земельного участка является наипростейшей. Ее можно ввести в 6-м классе. Если она уже была использована ранее, то это не мешает напомнить о ней.

Если в процессе съемки планшет окажется сдвинутым, то продолжать работу уже нельзя: необходимо восстановить первоначальное положение планшета. Ориентировать с помощью компаса нецелесообразно: такая ориентировка недостаточно точна даже для учебной школьной съемки. Поступают так: прикладывают ребро визирной линейки к одному из лучей, уже проведенных через точку O_1, например, к лучу O_1A_1, и, оставив линейку неподвижной, поворачивают планшет до тех пор, пока луч O_1A_1 не окажется направленным на вершину A. Такая ориентировка дает более точный результат, чем с помощью компаса.

Хорошим примером применения гомотетии в практике служит ориентирование карты или плана на местности. С этой целью на карте находят точку, соответственную тому пункту местности, в котором находится наблюдатель. Этот пункт принимается за центр гомотетии. Затем на карте отмечают другую такую точку, которой соответствует хорошо заметный пункт местности. Карту располагают в горизонтальной плоскости и вращают в ней так, чтобы отрезок, соединяющий две отмеченные точки карты, был направлен по соответствующему отрезку местности. Карта ориентирована.

6. Введение понятия подобия фигур

За последние годы сделана попытка в начале главы «Гомотетия и подобие» ввести самое общее понятие о подобии плоских фигур, пригодное для любой пары таких фигур[1]. Конкретным материалом при этом служат планы земельного участка или карты одной и той же части земной поверхности, вычерченные в разных масштабах. Определение можно сформулировать так: «Две фигуры называются подобными, если они имеют следующие признаки: а) между точками фигур установлено взаимно однозначное соответствие, б) любые пары сходственных отрезков фигур пропорциональны, в) все сходственные углы их попарно равны». При таком определении в объем понятия включаются любые пары подобных фигур, в том числе и криволинейных. Большая общность понятия часто соблазняет педагога.

При осевой и центральной симметрии, при параллельном переносе и гомотетии имеются возможности наглядно и эффективно показать взаимно однозначное соответствие между точками прообраза и образа. Другое дело в указанном понятии подобия. Здесь нет столь наглядных, доступных для учащихся и эффективных способов показать взаимно однозначное соответствие между точками двух подобных фигур. Вместе с тем нет возможности показать любые пары сходственных отрезков, установить пропорциональность любых пар их, убедиться в равенстве сходственных углов. Если ученик, запомнив определение подобных фигур, попытается применить его, то он почувствует, что это не удается: в его распоряжении нет средств для этого.

Возникает сомнение, целесообразно ли вводить такое определение в начале главы. Сомнение усиливается, если учесть, что применение определения в развитии главы требует щепетильных рассуждений о взаимно однозначном соответствии между точками, о пропорциональности любых двух пар сходственных отрезков и равенстве любых пар сходственных углов. А эти рассуждения даже в пе-

* Н. Н Никитин, А. И. Фетисов. Геометрия, Учпедгиз, 1957.

чатных руководствах не всегда выдерживаются и некоторые признаки понятия теряются и забываются. Тем более их трудно провести на уроках.

В планиметрии преимущественно излагаются свойства выпуклых многоугольников, кругов и их элементов. Фигуры, ограниченные любыми кривыми и ломаными линиями, встречаются как исключение и чаще всего как контробразы фигур, входящих в объем того или иного понятия. Это также приводит к сомнению в целесообразности введения общего определения подобия в начале рассматриваемой главы.

Дидактика требует вести учащихся от частного к общему, от простого к сложному, от конкретного к абстрактному. Нарушение принципов дидактики при обучении юношей 14-ти лет нельзя признать целесообразным. А здесь имеем дело с таким нарушением.

Итак, дидактические соображения, учет особенностей умственного развития восьмиклассников, содержание школьного курса геометрии приводят к заключению, что нецелесообразно начинать изложение главы о гомотетии и подобии с общего определения подобных фигур. При желании оно может быть введено в конце главы в связи с практическими приложениями подобия в топографических работах; при этом его введение будет подготовлено изучением предыдущего материала этой главы, изучением подобия многоугольников.

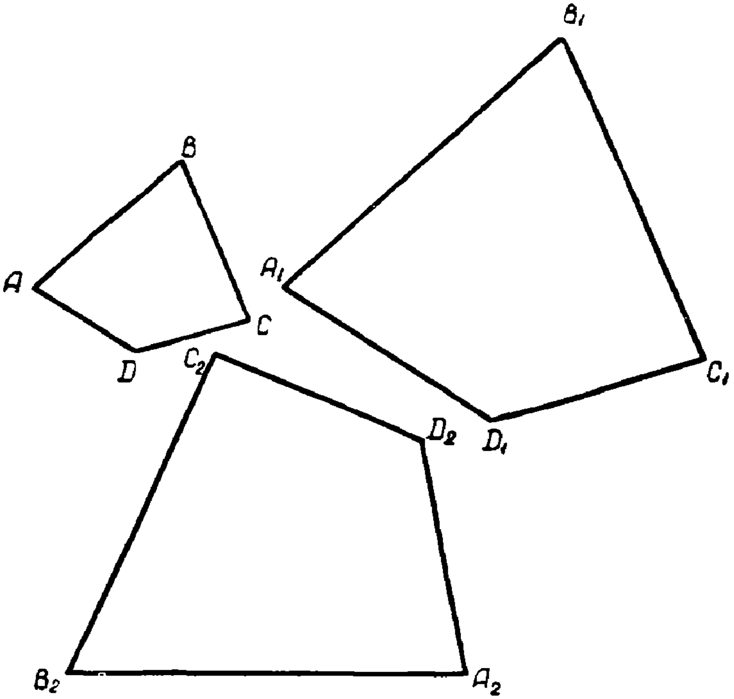
Что же можно рекомендовать в отношении введения понятия подобия фигур?

Прежде всего целесообразно дать представление о подобных многоугольниках.

Два гомотетичных многоугольника обладают многими свойствами: они имеют центр гомотетии, определенным образом расположены один относительно другого, сходственные пары отрезков их пропорциональны, соответственные углы равны. В частности, в двух гомотетичных многоугольниках стороны пропорциональны, соответственные внутренние углы равны. Отвлечемся от наличия центра гомотетии и взаимного расположения многоугольников. Представим например, что центр гомотетии и прямые, служившие для преобразования точек, уничтожены, или один из многоугольников повернут в плоскости на некоторый угол, а остальные свойства сохранены. В таком случае многоугольники называют подобными.

Примером подобных многоугольников могут служить два плана земельного участка, вычерченные в различных масштабах. Планы можно расположить произвольно относительно один другого, при этом пропорциональность соответственных отрезков, в частности сторон, равенство соответственных углов, в частности внутренних углов многоугольников, сохраняется.

Пусть четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$, коэффициент гомотетии равен k. Значит соответственные углы их равны, отношение сходственных сторон равно k (черт. 53).



Чертеж 53

Построим четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$, равный четырехугольнику $A_1B_1C_1D_1$. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ также «соответственные» углы равны и «сходственные» стороны пропорциональны.

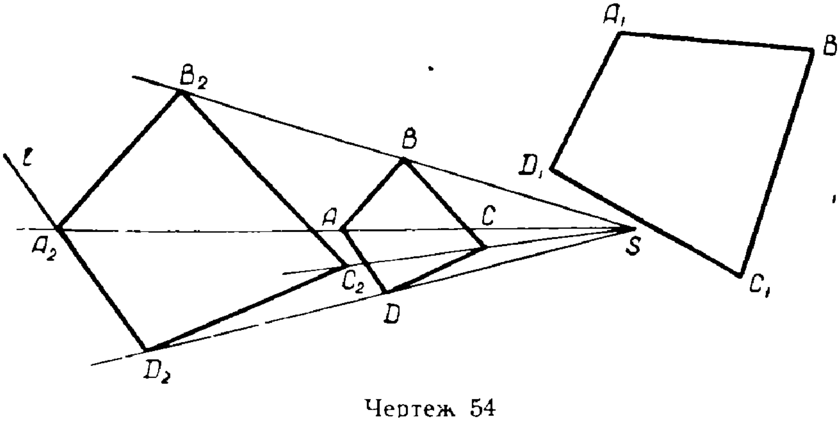
Отвлекаясь от порядка построения, можно сказать, что четырехугольник $ABCD$ гомотетией отображен в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, равный четырехугольнику $A_2B_2C_2D_2$. В таком случае $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ называют подобными четырехугольниками. Таким же путем можно построить подобные многоугольники других видов.

Открывается возможность ввести определение: «Два многоугольника называются подобными, если гомотетией одного из них можно получить фигуру, равную другому».

Под это определение подходят и два гомотетичных многоугольника: роль вспомогательного многоугольника играет один из них. Равные многоугольники также подобны между собою: они удовлетворяют определению.

Если многоугольник $A_2B_2C_2D_2$ отобразить в гомотетичный $A_3B_3C_3D_3$ с произвольным центром гомотетии и $k_1 = \frac{1}{k}$, то полученный многоугольник равен $ABCD$. Приходим к тому, что предусмотрено определением. Значит, четырехугольники $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ подобны.

Можно применить иной приём введения понятия подобных многоугольников, который несколько сложнее первого, но лучше передаёт сущность определения и полезен в других отношениях. Пусть имеем два многоугольника, например, четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (черт. 54), такие, что



Чертеж 54

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \angle D = \angle D_1 \quad (1)$$

и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1} \quad (2)$$

Покажем, что при этих условиях можно построить многоугольник, равный одному из них и гомотетичный другому, например, равный $A_1B_1C_1D_1$ и гомотетичный $ABCD$.

Проведем прямую $l \| AD$, отложим на ней отрезок $A_2D_2 = A_1D_1$ и построим прямые AA_2 и DD_2. Точку их пересечения обозначим через S и примем ее за центр гомотетии. Проведем прямые SB и SC, построим $D_2C_2 \| DC$ и $A_2B_2 \| AB$ до пересечения соответственно с SC и SB. Точки B_2 и C_2 соединим отрезком прямой.

Четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ по построению. Значит, имеем:

$$\angle A = \angle A_2, \quad \angle B = \angle B_2, \quad \angle C = \angle C_2, \quad \angle D = \angle D_2 \tag{3}$$

и

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{CD}{C_2D_2} = \frac{DA}{D_2A_2} \tag{4}$$

Из равенств (1) и (3) получаем:

$$\angle A_1 = \angle A_2 \quad \angle B_1 = \angle B_2, \quad \angle C_1 = \angle C_2, \quad \angle D_1 = \angle D_2 \tag{5}$$

Из рядов равных отношений (2) и (4) имеем:

$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad B_1C_1 = B_2C_2, \quad C_1D_1 = C_2D_2, \quad D_1A_1 = D_2A_2 \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) дают возможность утверждать, что четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ равны.

Итак, построен четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$, равный $A_1B_1C_1D_1$ и гомотетичный $ABCD$. В таком случае четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называют подобными.

Описанное построение можно осуществить для любых двух одноименных многоугольников, внутренние углы которых попарно равны и одинаково расположены, стороны которых пропорциональны и одинаково расположены. Построение можно осуществить и в том случае, если многоугольники имеют различную ориентацию.

Подготовлено введение понятия о подобных многоугольниках и соответствующего определения. Вводится символическая запись подобия.

Можно ввести более общее понятие о подобии фигур. Две фигуры называются подобными, если можно построить третью фигуру, равную одной из них и гомотетичную другой. Это определение применимо не только к многоугольникам, но и к другим фигурам, удовлетворяющим определению. Более широкое определение подобия фигур не играет роли в изложении теоретических вопросов школьного курса геометрии, но представляет интерес в отношении приложений геометрии в практике. Например, при съемке земельного участка можно встретиться с криволинейными контурами.

Соответственные отрезки в подобных фигурах называются сходственными. Из изложенного ранее вытекает, что в подобных фигурах сходственные отрезки пропорциональны, а соответственные углы равны; в частности в двух подобных многоугольниках сходственные стороны пропорциональны, а соответственные внутренние углы равны. Отношение (любое из двух возможных) сходственных сторон двух подобных многоугольников называют коэффициентом подобия.

Приведенные рассуждения, направленные на введение понятия подобных многоугольников, представляют значительный интерес. Они не только дали возможность сформулировать определение понятия подобных многоугольников, но и доказать существование их. Кроме того, эти рассуждения обосновывают следующую важную для дальнейшего теорему: «Два любых одноименных многоугольника подобны, если стороны одного пропорциональны сторонам другого, а углы между пропорциональными сторонами равны». Эта теорема устанавливает один из признаков подобия многоугольников.

7. Подобие треугольников

При описанном изложении учения о пропорциональности отрезков и гомотетии многоугольников открываются два возможных способа доказательства теорем о признаках подобия треугольников.

Можно применить традиционное для нашей школы доказательство этих теорем, которое прочно привилось под влиянием учебника геометрии А. П. Киселева.

Можно использовать в этих доказательствах и определение подобных многоугольников.

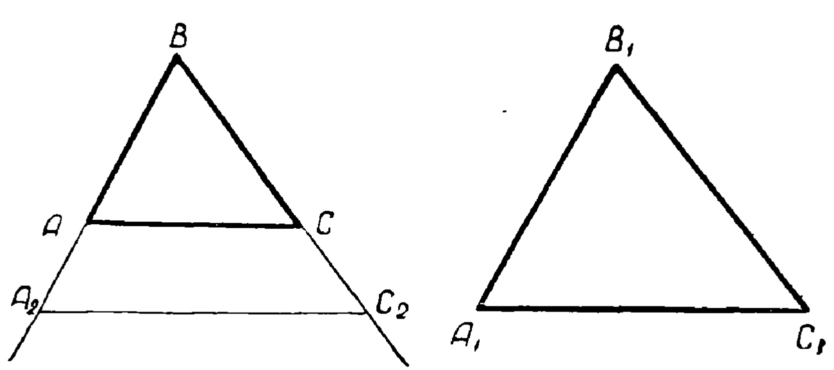
Прежде всего остановимся на традиционных доказательствах. Использование их подготовлено. Теорема о признаке подобия многоугольников позволяет сформулировать следующее предложение: «Два треугольника подобны, если стороны одного пропорциональны сторонам другого, а углы, заключенные между пропорциональными сторонами, равны». В главе о пропорциональных отрезках установлена теорема: «Если две стороны треугольника пересечены прямой, параллельной третьей стороне, то стороны данного треугольника пропорциональны сторонам отсеченного». Так как в данном и отсеченном треугольниках углы, заключенные между пропорциональными сторонами, равны, то получается важное следствие: «Если две стороны треугольника пересечены прямой, параллельной третьей стороне, то эта прямая отсекает треугольник, подобный данному». Таким образом открыт путь для традиционного изложения.

Детально останавливаться на традиционных доказательствах нет надобности. Дадим только один совет.

Изложив теорему о первом признаке подобия треугольников, можно, опираясь на доказательство, сообщить следующий план: 1) откладываем на стороне большего треугольника от вершины отрезок, равный сходственной стороне меньшего, и проводим через конец отложенного отрезка прямую, параллельную другой стороне, 2) отмечаем, что отсеченный треугольник подобен большему данному, 3) доказываем равенство отсеченного треугольника меньшему данному, 4) делаем заключение о подобии данных треугольников. Этот план применяется в доказательствах последующих теорем о признаках подобия треугольников, что позволяет активизировать учащихся.

Перейдем ко второму способу доказательства подобия треугольников. В качестве примера рассмотрим теорему: «Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то треугольники подобны».

Условие: в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ (черт. 55).



Чертеж 55

Требуется доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Согласно определению подобных фигур, надо доказать, что можно построить треугольник, равный одному данному треугольнику и гомотетичный другому, например, равный $\triangle A_1B_1C_1$ и гомотетичный $\triangle ABC$.

Примем одну из вершин $\triangle ABC$, например, B за центр гомотетии, $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ — за коэффициент гомотетии и выполним отображение.

Продолжим стороны BA и BC за точки A и C, отложим на луче BA от вершины B отрезок BA_2, равный B_1A_1, и через точку A_2 проведем прямую A_2C_2, параллельную AC, до пересечения в точке C_2 с лучем BC.

Построенный вспомогательный $\triangle A_2BC_2$ гомотетичен $\triangle ABC$.

Покажем, что $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

По построению $AB = A_1B_1$, по условию $\angle B = \angle B_1$ и, кроме того, $\angle A_2 = \angle A_1$, так как $\angle A = \angle A_1$ (по условию) и $\angle A_2 = \angle A$ по свойству гомотетичных фигур. Значит, на основании известной теоремы имеем, что $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Итак, $\triangle A_2BC_2$ гомотетичен $\triangle ABC$ и равен $\triangle A_1B_1C_1$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

После изложения первой теоремы и опираясь на нее, целесообразно сообщить общий план доказательства всех теорем о признаках подобия треугольников. Его можно сформулировать примерно так: 1) с центром гомотетии в одной из вершин 1-го треугольника и коэффициентом гомотетии, равным отношению стороны 2-го треугольника к соответственной стороне 1-го, строим вспомогательный треугольник, гомотетичный 1-му, 2) доказываем равенство вспомогательного и 2-го треугольников, 3) по определению подобных фигур заключаем о подобии данных треугольников.

Первый из рассмотренных способов доказательства теорем о признаках подобия треугольников несколько проще второго. Однако с точки зрения закрепления в сознании учащихся понятия и свойств гомотетии, понятия подобных фигур интересно и полезно использовать второй способ.

8. Подобие многоугольников и некоторые топографические работы

В программе геометрии нашей школы глава о гомотетии и подобии изложена сжато и неразвернуто. Это относится и к учению о подобии многоугольников: программа не раскрывает содержания этого вопроса.

Определение и достаточный признак подобия многоугольников рассмотрены уже ранее. Эти предложения полезно восстановить в памяти учащихся.

Из других теорем прежде всего заслуживают внимания следующие две: «Если два многоугольника подобны, то их можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников» и «Если два одноименных многоугольника разложены на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников, то многоугольники подобны». Вторая из них дает достаточный признак подобия многоугольников. На ней основана горизонтальная съемка земельного участка способом разбиения многоугольника на треугольники[1]. Обе теоремы можно предложить как задачи на доказательство.

Теорема об отношении периметров подобных многоугольников доказывается путем применения известного свойства ряда равных отношений. Если это свойство ученики не знают, то целесообразно его сообщить: оно встречается в доказательствах и может быть полезно при решении задач. Его можно ввести как лемму, предваряющую теорему об отношении периметров подобных многоугольников, или как следствие доказательства этой теоремы.

Ранее учащиеся познакомились с построением многоугольника, подобного данному, если задана сторона того многоугольника, который требуется построить, сходственная указанной стороне данного. Решение выполнялось применением гомотетии. Представляет практический интерес решение аналогичной задачи без применения гомотетии.

Задача ставится так: «Дан многоугольник; требуется построить многоугольник, подобный данному, если коэффициент подобия равен k ($k = 0{,}2$; $k = 0{,}1$)».

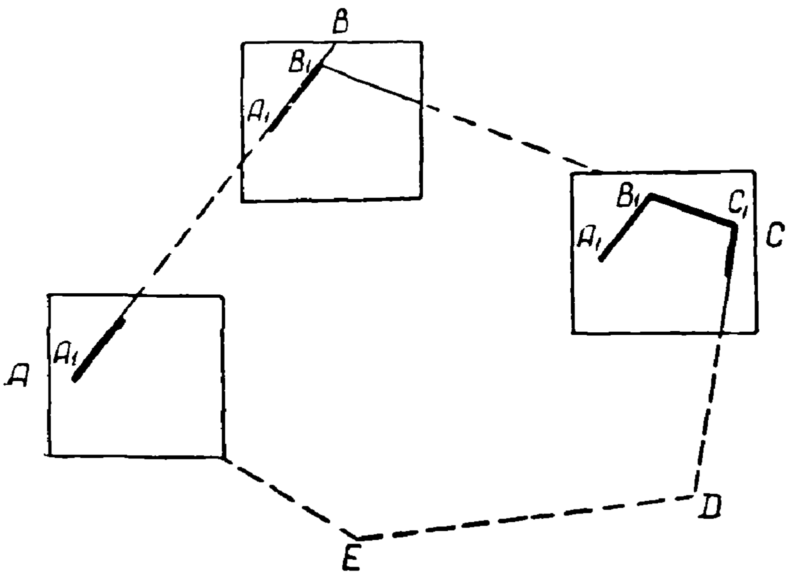
Можно применить два варианта решения этой задачи.

[1] Очерк V, п. 12.

В первом углы строятся циркулем и линейкой обычным способом, во втором для построения углов применяется транспортир. В обоих вариантах стороны измеряются применением поперечного масштаба, стороны многоугольника, который строится, находятся вычислением. Решения, близкие к указанным, применяются в горизонтальных съемках земельных участков способом обхода по контуру.

Сущность горизонтальной мензульной съемки способом обхода по меже заключается в том, что последовательно измеряют рулеткой или мерным шнуром все стороны земельного участка, а углы последовательно наносят на планшет графическим путем.

Пусть $ABCDE$ — участок местности (черт. 56). Требуется получить план этого участка в масштабе 0,001.



Чертеж 56

Ставят мензулу в одну из вершин многоугольника, например, в точку A; приводят планшет в горизонтальное положение и ориентируют с помощью компаса так, чтобы одно из ребер планшета совпало с направлением меридиана. Это направление изображают на планшете стрелкой с буквами *С—Ю*. Намечают на планшете точку A_1, соответствующую вершине A, так, чтобы точки A и A_1

принадлежали одной отвесной прямой. Визируют через точку A_1 на веху, поставленную в вершине B, и чертят по ребру визирной линейки соответствующий луч. Измеряют отрезок AB, переносят мензулу в вершину B и откладывают в принятом масштабе отрезок A_1B_1, соответствующий стороне AB земельного участка.

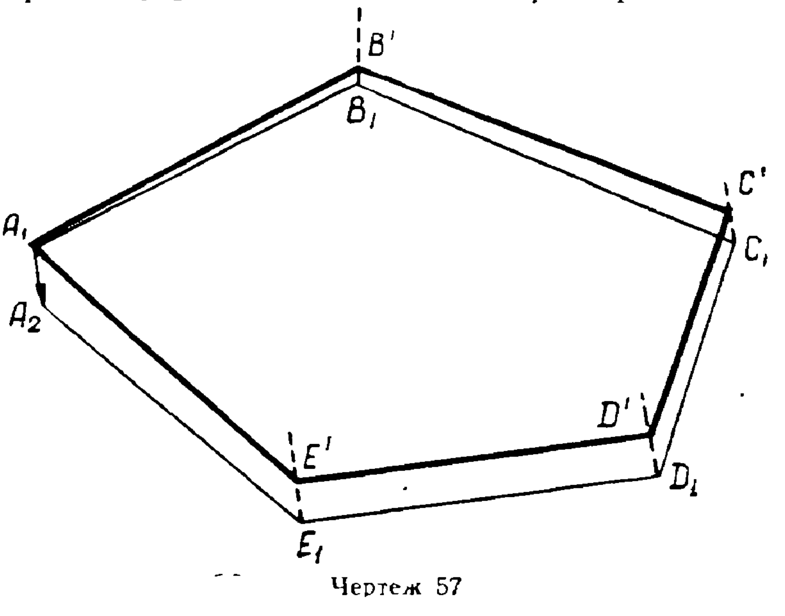
Устанавливают мензулу в вершине B так, чтобы точка B_1 находилась отвесно над вершиной B. Приведя планшет в горизонтальное положение, прикладывают визирную линейку ребром к отрезку A_1B_1 и, оставляя ее неподвижной, поворачивают планшет так, чтобы отрезок A_1B_1 был направлен по стороне AB. Планшет ориентирован.

Затем визируют через точку B_1 на веху в вершине C и проводят на планшете соответствующий луч. Таким образом на план графическим способом нанесен $\angle A_1B_1C_1$, соответствующий $\angle ABC$ местности.

Далее измеряют отрезок BC, мензулу переносят в вершину C и в этом пункте выполняют операции, аналогичные тем, какие делались в вершине B. Так поступают и далее.

Когда будет нанесен на план $\angle E_1$ и последняя сторона E_1A_2, то, как правило, полученная на плане точка A_2 не совпадает с точкой A_1 (черт. 57).

Отрезок A_1A_2 называют невязкой периметра или линей-



Чертеж 57

ной невязкой. Она — результат накапливания погрешностей измерения сторон участка, нанесения их на план, графического изображения на плане проекций углов на горизонтальную плоскость и ряда других факторов. Поэтому линейная невязка явление закономерное и почти неизбежное; только в редких случаях съемка заканчивается без этой невязки.

Невязка *периметра может получиться не только в* результате накопления неизбежных погрешностей, но и в результате грубых ошибок: просчетов при измерении сторон, при их нанесении на план, при нанесении углов. Поэтому невязка периметра используется, как некоторый критерий, позволяющий судить о наличии или отсутствии грубых ошибок.

Отношение линейной невязки к периметру многоугольника называется относительной невязкой. Если, например, линейная невязка равна 5 *м*, а периметр 600 *м*, то относительная невязка периметра равна $\frac{1}{120}$.

Для школьной учебной съемки с помощью мензулы предельной допустимой невязкой можно считать 0,01. Сравнение полученной относительной невязки с допустимой предельной и дает возможность судить о том, сделаны или нет грубые ошибки при съемке. Если относительная невязка периметра меньше допустимой, то весьма вероятно, что грубых ошибок нет. В нашем примере $\frac{1}{120} < 0{,}01$; можно допустить, что съемка произведена правильно. Если относительная невязка больше допустимой, то это свидетельствует о наличии грубых ошибок. Съемку признать удовлетворительной уже нельзя. Необходима проверка.

Если относительная невязка периметра допустима, то встает вопрос, как ликвидировать линейную невязку.

Линейная невязка имеет направление от A_1 к A_2 (черт. 57). Для ликвидации ее через точки A_1, B_1, ..., E_1 проводят лучи, параллельные линейной невязке и направленные в противоположную сторону. От вершины B_1 откладывают по проведенному лучу отрезок B_1B', равный произведению относительной невязки на длину отрезка AB. Пусть, например, $AB = 120$ *м*, $BC = 110$ *м*, тогда $B_1B' = \frac{1}{120} \cdot 120 = 1$ (*м*). Затем откладывают отрезок C_1C', равный произведению относительной невязки на сумму длин отрезков AB и BC: $C_1C' = \frac{1}{120} \cdot 230 \approx 2$ *(м)* и т. д.

В результате получают многоугольник $A_1B'C'D'E'$ — план контура земельного участка.

Способ обхода по меже применяется тогда, когда необходимо снять контур довольно большого земельного участка, имеющего форму многоугольника. Для нанесения на план внутренней ситуации участка в сочетании со способом обхода применяются иные приемы горизонтальной мензульной съемки: круговое визирование, прямая засечка и др.

Горизонтальная угломерная съемка земельного участка способом обхода по контуру принципиально не отличается от аналогичной мензульной съемки. Если в последней внутренние углы переносятся на план графически, то при угломерной съемке выполняется их измерение с последующим построением транспортиром на плане.

При угломерной съемке способом обхода приходится иметь дело с угловой невязкой. При измерении горизонтальных проекций внутренних углов многоугольника вкрадываются неизбежные погрешности в результате несовершенства угломерного прибора, неточности расположения его над вершиной угла местности (центрирования), неточности визирования и других причин. Совокупность этих погрешностей приводит к тому, что полученная в результате измерений сумма внутренних углов многоугольника отличается от теоретической суммы $s = 180°(n-2)$, где s — теоретическая сумма внутренних углов многоугольника, а n — число вершин его.

Разность между теоретической суммой углов и полученной в результате измерений называется угловой невязкой. Она может иметь как положительный так и отрицательный знаки; в редких случаях она равняется 0. Для учебного школьного угломера допустимую угловую невязку можно считать равной $0{,}5° \cdot n$, где n — число вершин многоугольника.

Если угловая невязка по абсолютному значению превышает допустимую, то это свидетельствует о наличии грубых ошибок в измерении углов. Необходима проверка этих измерений.

Если абсолютное значение угловой невязки не превышает допустимую, то приступают к ликвидации этой невязки. Прежде всего она распределяется на те углы многоугольника, которые заключены между сторонами с наименьшей длиной: эти углы измеряются с бо́льшими погрешностями, чем углы, заключенные между сторонами, имеющими бо́льшую длину. Затем угловая невязка распределяется на другие углы. Невязку распределяют так, чтобы каждый угол был округлен до 0,5°, что соответствует точности измерения угла учебным угломером.

При выполнении мензульной или угломерной съемки способом обхода учащиеся организуются в бригады по 6 человек. При мензульной съемке каждая бригада снабжается мензулой, визирной линейкой, компасом, рулеткой или мерным шнуром, шпильками и 3 вехами; кроме того, желательно дать вилку, уровень или ватерпас. При угломерной съемке каждая бригада получает угломер, рулетку или мерный шнур, шпильки, 3 вехи. Для съемки участки выбираются небольшие, практически ровные, с простой внутренней ситуацией, с 7—8 вершинами.

В нашей практике намечались 3—4 участка, причем один внутри другого, примерно с параллельными сторонами: на каждом участке работали две бригады. Такая организация занятий упрощает руководство бригадами, помогает вскрывать или предупреждать грубые ошибки.

9. Решение задач методом подобия

Рассматриваемая глава заканчивается решением задач на построение методом подобия. Опираясь на конкретные задачи, необходимо познакомить учеников с сущностью метода подобия, показать некоторые особенности анализа, привить уменья и навыки применять метод и сообщить некоторые признаки задач, по которым можно судить о целесообразности использования метода подобия.

Рассмотрим несколько задач.

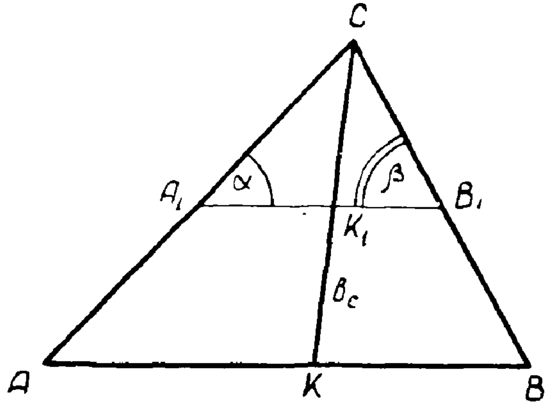
Задача 1. Построить треугольник по двум внутренним углам и биссектрисе третьего угла.

Даны внутренние углы α и β треугольника и биссектриса b_c. По этим данным требуется построить треугольник.

Искомый треугольник должен удовлетворять требованиям: а) иметь внутренний угол, равный α, б) иметь другой угол, равный β, в) биссектриса треугольника, проведенная через третью вершину, должна быть равна b_c.

Заметим, что по условиям а) и б) можно построить треугольник. Таких треугольников можно построить бесконечное множество.

Допустим, что построен $\triangle A_1B_1C$, имеющий $\angle A_1=\alpha$ и $\angle B_1=\beta$ (черт. 58). Искомый $\triangle ABC$ подобен $\triangle A_1B_1C$.



Чертеж 58

Примем вершину C за центр гомотетии и отобразим $\triangle A_1B_1C$ в такой гомотетичный $\triangle ABC$, который удовлетворит требованию в).

Пусть CK_1 — биссектриса $\angle C$ $\triangle A_1B_1C$. Так как она проходит через центр гомотетии, то сходственная биссектриса CK гомотетичного $\triangle ABC$ расположится по лучу CK_1. Если отложить по лучу CK_1 отрезок $CK=b_c$ и через K провести прямую AB, параллельную A_1B_1, то получим искомый $\triangle ABC$.

Анализ приводит к следующему плану построения: 1) строим вспомогательный $\triangle A_1B_1C$, у которого $\angle A_1=\alpha$ и $\angle B_1=\beta$, 2) проводим биссектрису CK_1 $\triangle$ A_1B_1C, 3) откладываем от точки C по лучу CK_1 отрезок CK, равный b_c, 4) через точку K проводим прямую AB, параллельную A_1B_1. Получим искомый $\triangle ABC$.

Останавливаться на других этапах решения нет надобности: учащиеся их выполнят с большой долей самостоятельности.

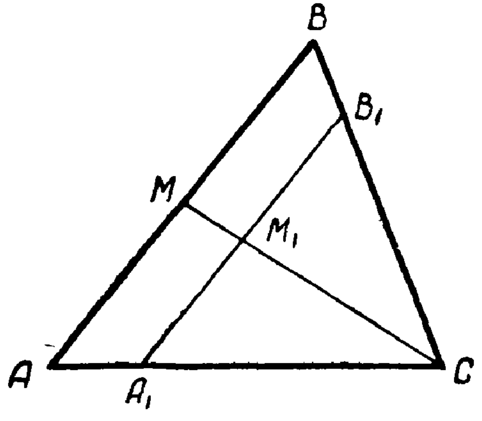
Задача 2. Построить треугольник по углу, медиане, проведенной из вершины этого угла, и отношению сторон, заключающих данный угол.

Даны: внутренний угол треугольника γ, m_c и $a:b = n:p$, где n и p — данные отрезки.

Искомый треугольник должен иметь: а) внутренний угол, равный γ, б) медиану, проведенную через вершину этого угла, равную m_c, в) отношение сторон, прилегающих к этому углу, равное отношению $n:p$.

Если использовать только условия а) и в), то легко построить $\triangle A_1B_1C$, у которого $\angle C=\gamma$, $B_1C=n$, $A_1C=p$ (черт. 59).

Этот вспомогательный треугольник подобен искомому по второму признаку подобия треугольников.



Чертеж 59

Если принять за центр гомотетии вершину C, то искомый треугольник ABC можно получить путем гомотетии $\triangle A_1B_1C$. В $\triangle A_1B_1C$ построим медиану CM_1. Очевидно, что сходственная медиана CM $\triangle ABC$ расположится по лучу CM_1. Если на луче CM_1 от вершины C отложить отрезок $CM=m_c$ и через точку M провести прямую $AB \parallel A_1B_1$, то получим требуемый $\triangle ABC$.

Анализ позволяет легко наметить план построения.

Рассмотренные задачи дают возможность выяснить сущность метода подобия. Она заключается в том, что прежде всего строят вспомогательную фигуру, подобную искомой, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи за исключением одного; затем строят фигуру, подобную вспомогательной, удовлетворяющую опущенному условию; эта фигура и будет искомой.

Построение вспомогательной и искомой фигур можно выполнить на отдельных чертежах, без использования гомотетии. Однако переход от вспомогательной к искомой удобно совершается с помощью гомотетии. Таким образом гомотетия служит необязательным, но удобным вспомогательным приемом, а основное значение принадлежит подобию. Этим объясняется и название «метод подобия».

Рассмотренные задачи позволяют установить один из признаков задач, указывающий на целесообразность применения метода подобия. Таким признаком служит то, что среди данных элементов имеется только один линейный, а остальные или углы, или отношения линейных элементов.

При использовании гомотетии встает вопрос, какую точку принять за центр гомотетии. Обычно с этой целью используют точки, непосредственно связанные с фигурой, например, вершины многоугольников. При решении задачи I центром гомотетии может служить любая вершина $\triangle A_1B_1C$. Если принять за этот центр вершину A_1 или B_1, то решение несколько усложняется: возникает необходимость применить параллельный перенос отрезка. При решении той же задачи за центр гомотетии можно принять любую точку плоскости треугольника, но это еще более усложняет решение.

Всегда желательно выбрать центр гомотетии так, чтобы решение оказалось простейшим. Такой выбор достигается опытом. Полезно обсуждение вопросов, целесообразно ли выбран центр гомотетии при решении той или иной задачи, какую точку выгоднее принять за этот центр. За центр гомотетии удобно выбрать конец данного резка.

Приведем несколько задач, решаемых аналогично рассмотренным.

1) Построить треугольник по а) двум внутренним углам A и B и медиане m_c б) внутреннему углу A, высоте $_a$ и $b:c=m:n$.

2) Построить параллелограмм, если дано: а) острый внутренний угол, отношение сторон, прилегающих к нему и меньшая диагональ, б) тупой внутренний угол, отношение основания к боковой стороне и меньшая диагональ.

3) Построить равнобедренную трапецию по: а) диагонали, острому внутреннему углу и отношению бóльшего основания к боковой стороне, б) средней линии, тупому

внутреннему углу и отношению меньшего основания к боковой стороне.

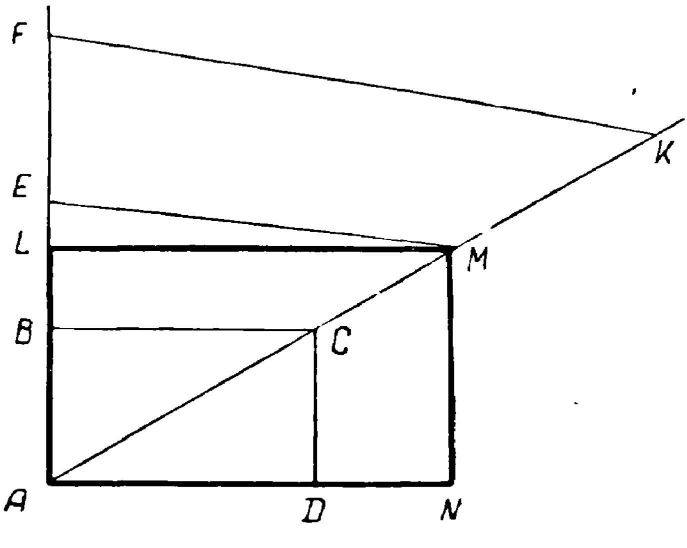
К числу задач, решаемых методом подобия, относится ряд задач на вписание при заданных условиях одной фигуры в другую, например, «В данный остроугольный треугольник вписать: а) квадрат так, чтобы две вершины его лежали на основании треугольника, а две — на боковых сторонах, б) прямоугольник так, чтобы две вершины его лежали на основании, две другие — на боковых сторонах и чтобы отношение сторон равнялось отношению $m : n$». Задачи этого вида хорошо представлены в учебной литературе и не нуждаются в рассмотрении.

Методом подобия решаются и такие задачи, в которых среди данных имеется сумма или разность линейных элементов искомой фигуры.

Задача 3. Построить прямоугольник по сумме боковой стороны и диагонали и отношению этой стороны к основанию.

Сумма боковой стороны и диагонали равна отрезку s, а отношение боковой стороны к основанию равно отношению $m : n$, где m и n — данные отрезки.

Вторая часть условия дает возможность построить прямоугольник $ABCD$, боковая сторона которого равна m, а



Чертеж 60

основание равно n (черт. 60). Очевидно, что прямоугольник $ABCD$ подобен искомому.

Так как в подобных фигурах сходственные отрезки пропорциональны, то диагональ искомого прямоугольника относится к его боковой стороне, как $AC : AB$. Таким образом имеется возможность построить диагональ и боковую сторону искомого прямоугольника: отрезок s надо разделить на две части в отношении $AC : AB$. По полученным диагоналям и боковой стороне легко построить искомый прямоугольник. Деление отрезка можно выполнить на отдельном чертеже, а построение прямоугольника на другом чертеже.

Однако все построения можно совместить на одном чертеже. На луче AB от точки A отложим отрезки $AE = AC$ и $EF = AB$. На луче AC отложим отрезок $AK = s$. Соединяем точки F и K прямой и через точку E проводим прямую $EM \parallel FK$. AM — диагональ искомого прямоугольника.

Теперь отобразим прямоугольник $ABCD$ в гомотетичный $ALMN$ с центром гомотетии в точке A и коэффициентом $k = \frac{AM}{AC}$.

ОЧЕРК XI

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

1. Цель, содержание и план темы

Сведения о тригонометрических функциях необходимы учащимся при изучении курсов физики и машиноведения, при работе в механической мастерской. Поэтому в курс геометрии вводятся начальные сведения по тригонометрии. Эта тема, органически связанная с курсом геометрии, является естественным продолжением изучения подобия треугольников. Ее включают в главу «Метрические соотношения в треугольнике и круге» после прохождения теоремы Пифагора.

Существующая программа по математике построена так, что понятие функции в алгебре дается позднее, чем понятие тригонометрических величин в геометрии. Желая установить и довести до сознания учащихся, что отношения сторон прямоугольного треугольника являются функциями углов треугольника, учитель может дать понятие о функции на примере тригонометрических функций острого угла или пересмотреть порядок прохождения материала по алгебре. Второй путь является более реальным и целесообразным.

Тема «Функции и графики» является предпоследней темой программы по алгебре. Целесообразно изложить ее вслед за теоремой Виета, отнеся разложение квадратного трехчлена на множители к изучению функции $y=ax^2+bx+c$. Равносильность уравнений, потеря и приобретение корней, иррациональные уравнения без ущерба делу можно изучить после темы «Функции и графики». Такая небольшая перестановка дает возможность начальные сведения по тригонометрии излагать на функциональной основе.

Если обратиться к учебной и методической литературе, то приходится отметить довольно значительные расхождения в объеме материала, который вкладывается в рассматриваемую тему. Одни авторы довольствуются только тем материалом, который обеспечивает решение прямоугольных треугольников[1]. Другие, кроме указанного материала, рассматривают формулы, выражающие зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента[2]. Третьи — считают, что «изучение зависимостей между элементами произвольного треугольника останется неполным, пока не введены тригонометрические функции тупого угла»[3].

Каким же должно быть содержание этой темы?

Основная задача ее заключается в том, чтобы научить школьников решать прямоугольные треугольники, поэтому основной фигурой должен являться прямоугольный треугольник. Вводятся четыре тригонометрические функции острого угла, даются формулы решения прямоугольных треугольников и их приложение к этому решению, что служит последним звеном темы. Необходимо показать учащимся широкое и разнообразное применение тригонометрических функций острого угла в практике. Эта тема имеет особо важное политехническое значение.

Можно предложить следующий план изложения темы:

1) Необходимость углубления аналитических связей между основными элементами прямоугольного треугольника. Тригонометрия и одна из ее задач — решение треугольников.

2) Введение понятий о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе острого угла из прямоугольного треугольника.

3) Упражнения, способствующие усвоению новых понятий и подготовляющие знакомство с таблицами натуральных значений тригонометрических функций.

---

[1] А. П. Киселёв, Геометрия, Учпедгиз, 1954.

[2] Н. Ф. Бермант, Л. А. Люстерник, Тригонометрия, Учпедгиз, 1947.

В. Т. Чичигин, Методика преподавания тригонометрии, Учпедгиз, 1954.

[3] Я. С. Дубнов, Тригонометрия в школьном курсе геометрии, Математическое просвещение, № 1, 1957.

4) Тригонометрические функции дополнительных углов.

5) Таблицы натуральных значений тригонометрических функций.

6) Формулы решения прямоугольных треугольников и основные случаи решения этих треугольников.

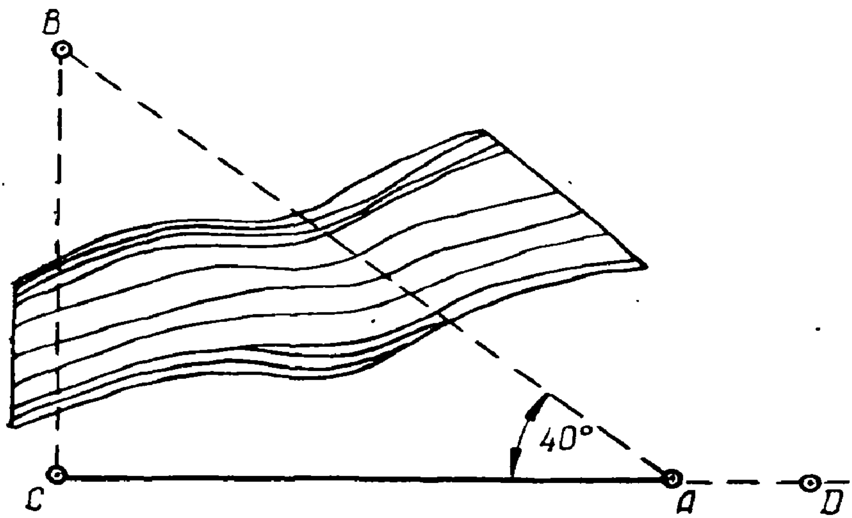
7) Приложения решения прямоугольных треугольников в геодезии. Эклиметр и работа с ним. Практические задачи.

8) Решение других фигур, сводящихся к прямоугольным треугольникам.

2. Введение тригонометрических функций острого угла

Чтобы учащиеся осознали недостаточность имеющихся у них геометрических знаний для решения прямоугольных треугольников и необходимость расширения этих знаний, уместно предложить целесообразно подобранную задачу в форме рассказа.

Технику необходимо измерить расстояние от пункта C до пункта B (черт. 61), причем пункт B недоступен. В рас-



Чертеж 61

поряжении техника имеется угломер, рулетка и вехи. Техник делает следующие построения и измерения: к отрезку BC в точке C строит перпендикуляр CD, откладывает на нем 100 м, измеряет угломером $\angle BAC$; он равен 40°.

Как техник найдет длину BC?

Можно ожидать, что многие учащиеся не сумеют найти длину. Однако может появиться и решение: в масштабе в 1 см — 10 м построим $\triangle A_1B_1C_1$, подобный $\triangle ABC$. Теперь нетрудно найти длину BC.

Такое решение следует одобрить и поощрить, оно свидетельствует о хорошем развитии и находчивости ученика. Рассмотренное решение можно назвать графическим. Его недостаток заключается в том, что оно дает малую точность: погрешность в полученной длине отрезка BC будет значительна. Эта погрешность составляется в результате неточных измерений на поверхности земли, неточных построений $\triangle A_1B_1C_1$ и неточных измерений отрезка B_1C_1, а при определении длины BC погрешность увеличивается в 1000 раз.

В силу этого таким приемом на практике не пользуются. Техник для вычисления длины BC применяет формулы, которые дает другая геометрическая дисциплина — тригонометрия.

Слово тригонометрия в буквальном переводе означает «измерение треугольников»[1]. Задача «измерения треугольников »или, как принято говорить, решения треугольников с древнейших времен составляла основу практических приложений тригонометрии. Тригонометрия, как и другие научные дисциплины, возникла под влиянием развития производства и производственных отношений из практики в процессе решения конкретных практических задач, преимущественно астрономических. Понятие о тригонометрических функциях — синусе, косинусе, тангенсе, котангенсе было введено индийскими и арабскими математиками.

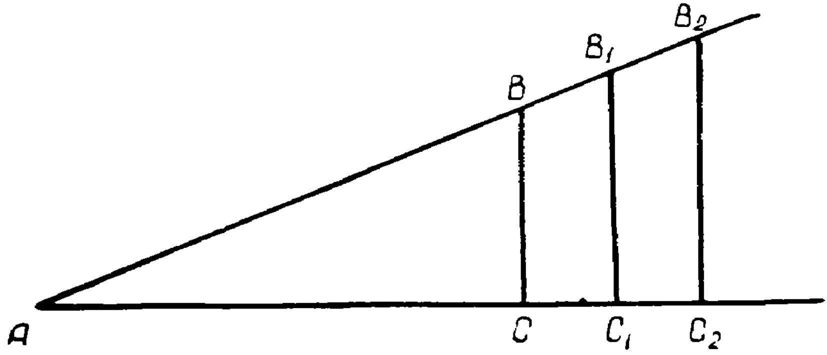
На этом же уроке учитель дает понятие о тригонометрических функциях острого угла.

Рассмотрим произвольный острый угол A (черт. 62). На одной из сторон угла возьмем произвольную точку B, проведем из нее перпендикуляр на другую сторону. Составим отношения $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$ (1). Величина отношений (*1*) не зависит от выбора точки B на стороне угла. Если

---

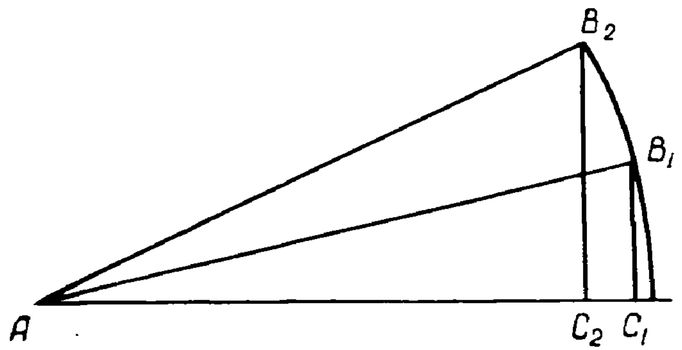
[1] Тригонометрия — от греческих слов — τρίγωνον — треугольник, μετρέω — измеряю.

вместо точки B взять точку B_1 или B_2, провести $B_1C_1 \perp AC_1$, $B_2C_2 \perp AC_2$, получим подобные треугольники ABC, AB_1C_1, AB_2C_2; значит, $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2}$, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2}$ (2). Из равенств (2) следует, что отношение двух сторон прямоугольного треугольника ABC есть величина определенная для данного острого угла A, независящая от величины катетов и гипотенузы.



Чертеж 62

С изменением угла отношения сторон прямоугольного треугольника изменяются. Рассмотрим $\angle C_1AB_1$ (черт. 63), увеличим его до угла C_2AB_2 (повернем AB_1 до поло-



Чертеж 63

...ов всех видов отно-
...угла отношения (1) изменяются.
...льно, можно сделать вывод: существует определенная зависимость между значением угла и значением отношений (1). Всякому произвольному допустимому значению угла соответствует вполне определенное значение каждого из отношений (1). Следовательно, зависимость— функциональная. Отношения (1) — функции угла.

Рассмотренные функции называются тригонометрическими и носят особые названия. Дается определение четырех тригонометрических функций острого угла:

$$\frac{a}{c}=\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}=\sin A$$

$$\frac{b}{c}=\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}=\cos A,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}=\operatorname{tg} A,$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}=\operatorname{ctg} A.$$

Следует подчеркнуть, что сокращенное название тригонометрической функции — единый символ и не имеет ничего общего с произведением.

3. Первые упражнения

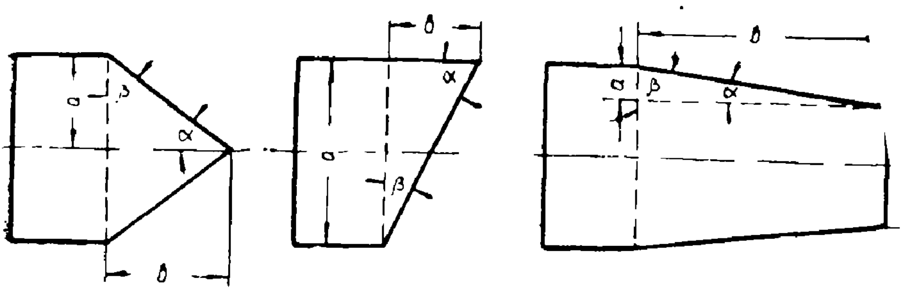
После введения понятий тригонометрических функций необходимо провести ряд упражнений, способствующих усвоению этих понятий.

1) В прямоугольном треугольнике: а) $c=5$ *см*, $a=4$ *см*; б) $a=6$ *см*, $b=8$ *см*; в) $a=12$ *см*, $b=5$ *см*; г) $c=25$ *дм*, $b=24$ *дм*. Вычислить значения тригонометрических функций угла A.

2) Найти значения тригонометрических функций угла A, если а) $c=10$, $a=5$; б) $c=100$, $b=40$.

3) Вычислить значения тригонометрических функций угла A, если а) $A=30°$; б) $A=45°$; в) $A=60°$. Составить таблицу найденных значений.

4) Найти графическим способом приближенные значе-



Чертеж 64

ния тригонометрических функций угла 50°, если гипотенуза равна 100 *мм*.

5) При помощи измерений и вычислений найти тангенсы углов α и β (черт. 64).

6) Найти значения тригонометрических функций меньшего острого угла прямоугольного треугольника, если один из его катетов составляет 75% гипотенузы.

7) Найти численную величину выражений:

а) $3\sin 60° + 2\cos 60° + tg\, 45°$,

б) $ctg^2\, 45° - \cos^2 60° - \cos^2 30°$,

в) $\dfrac{\cos 30° - \cos 60°}{\cos 30° + \cos 60°}$

Построение угла по данному значению тригонометрической функции является обратной задачей по отношению к задаче нахождения значений тригонометрических функций данного угла. Ее решение сводится к построению прямоугольного треугольника по двум данным линейным элементам.

1) Построить и измерить транспортиром угол α, если а) $\cos\alpha = 0{,}36$; б) $tg\,\alpha = 1{,}5$; в) $\sin\alpha = \frac{5}{2}$; г) $ctg\,\alpha = 4$.

2) Построить угол α, если а) $\sin\alpha = \frac{6}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{4}{3}$ в) $\sin\alpha = \frac{m}{n}$; г) $\cos\alpha = \frac{m}{n}$.

Учащиеся еще не рассматривали вопрос об изменении тригонометрических функций острого угла, но, исходя из определений синуса, косинуса и соотношений меронами прямоугольного треугольника, приходят к выводу. что упражнения а), б) решений не имеют; в), г) имеют решения тогда, когда $m<n$.

4) Построить прямоугольный треугольник по катету, равному 10 *см*, и тангенсу противолежащего угла, равному $\frac{3}{5}$.

5) Построить равнобедренный треугольник, если основание его равно 8 *см*, а синус угла при основании равен 0,3.

4. Изменение тригонометрических функций

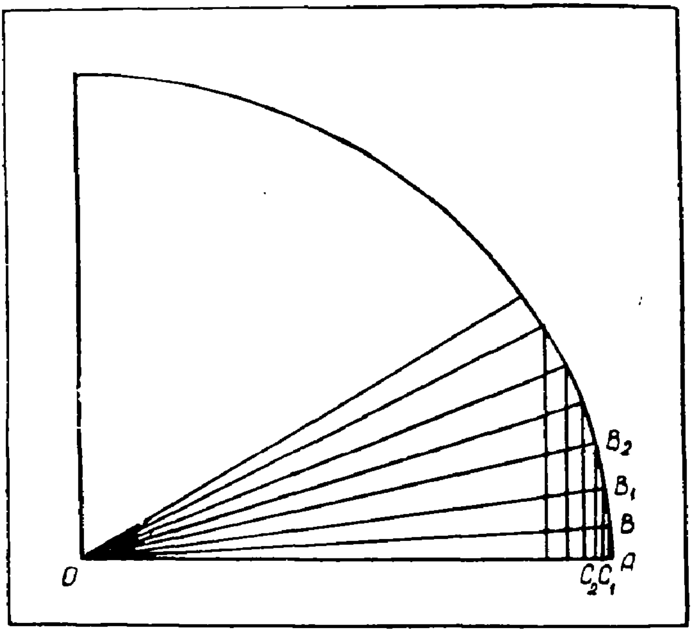
Этот вопрос целесообразно начать с лабораторной работы по составлению таблиц значений тригонометрических функций от 5° до 85° через каждые 5°.

Для этой работы каждый учащийся должен иметь лист миллиметровой бумаги размером 12×12 *см*, циркуль, транспортир, линейку с делениями.

На миллиметровой бумаге строится сектор в четверть круга с радиусом, равным 10 *см*. С помощью транспортира угол в 90° делится на 18 равных частей (черт. 65). Из точек B, B_1, B_2, ... проводятся к OA перпендикуляры. Отрезки измеряются в миллиметрах. Составляется таблица значений синуса и косинуса для углов 5°, 10°, 15°, ..., 85°. Учитель объясняет ход работы, делает первые построения, вычисляет значение $\sin 5°$, чертит на доске таблицу, дальнейшие вычисления учащиеся выполняют самостоятельно. Учитель, имея в руках таблицы натуральных значений тригонометрических функций с точностью до 0,01, проверяет выполнение работы. Допустимой можно считать погрешность, не превышающую 0,02. Если погрешность по абсолютному значению превышает 0,02, то учитель предлагает ученику проверить построения, измерения и вычисления.

Эта лабораторная работа закрепляет решение задачи о нахождении значения тригонометрической функции заданного угла, показывает один из возможных способов составления таблиц значений тригонометрических функций, подчеркивает функциональный характер зависимости отношения сторон прямоугольного треугольника от угла, непосредственно подводит учащихся к вопросу изменения значений тригонометрических функций с изменением угла.

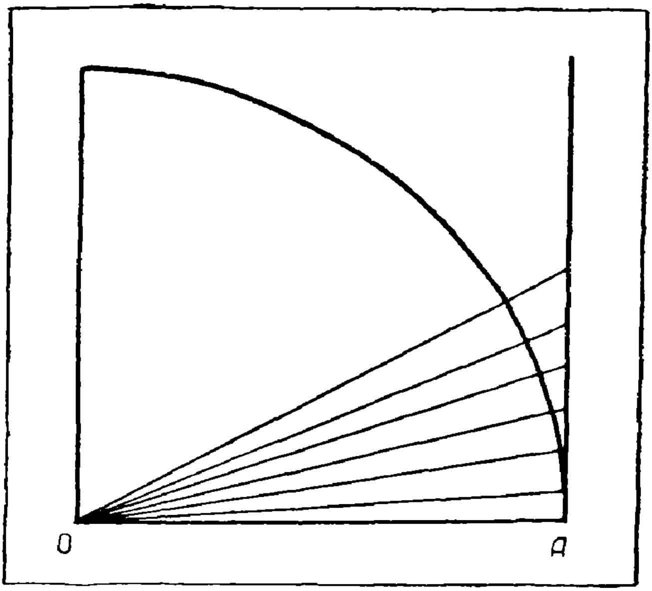
Полезно провести работу по составлению таблиц значений тангенсов и котангенсов. Учащимся предлагается выполнить работу дома; в классе проводится лишь некоторая подготовительная часть работы. На листе миллиметровой бумаги размером 12×20 (*см*) строят сектор радиусом 10 *см*. Чтобы найти значения тангенса углов 5°, 10°, ... рассматривают прямоугольные треугольники, имеющие общий катет *OA*; другой катет отсчитывают по перпендикуляру, проведенному к *OA* в точке *A* (черт. 66). Значения тангенса определяются для углов от 5° до 70°, вычисления ведутся до сотых долей.



Чертеж 65

Необходимо обратить внимание на значения функций углов в 0° и 90°: при этих значениях аргумента прямоугольный треугольник вырождается в двойной отрезок, и, значит, определения функций теряют смысл. Значения функций этих углов можно ввести только путем дополнительных целесообразных определений.

С увеличением угла α, с приближением его к 90°, катет, противолежащий этому углу, растет и стремится стать равным гипотенузе, а другой катет убывает и стремится к нулю. Естественно принять, что $sin\,90° = 1$, $cos\,90° = 0$, $tg\,90°$ не существует, так как делить на 0 нельзя, $ctg\,90° = 0$.



Чертеж 66

С уменьшением угла α катет, противолежащий этому углу, уменьшается и стремится к 0, а другой катет растет и стремится стать равным гипотенузе. Естественно принять, что $sin\,0° = 0$, $cos\,0° = 1$, $tg\,0° = 0$, $ctg\,0°$ не существует, так как делить на 0 нельзя.

С рассмотренными значениями функций учащиеся встретятся, когда будут изучать таблицы натуральных значений тригонометрических функций.

Для закрепления разобранного материала следует проделать ряд упражнений.

1) Определить, какое значение больше и почему больше: а) $sin\,32°$ и $sin\,70°$; б) $cos\,15°$ и $cos\,45°$; в) $tg\,65°$ и $tg\,72°$; г) $ctg\,12°$ и $ctg\,60°$.

2) Который из острых углов α и β больше и почему, если известно, что

а) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{5}{7}$, б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{7}$, в) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{7}$, г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \beta = 1 \frac{3}{5}$

3) Может ли синус острого угла быть больше единицы? Может ли котангенс острого угла быть больше единицы?

4) Как изменяется значение косинуса с увеличением угла от 0° до 45°?

Как изменяется значение синуса с уменьшением угла от 60° до 0°?

5) а) Что больше *sin* 90° или *tg* 45°?

б) Что больше *cos* 30° или *ctg* 45°?

5. Таблицы

Для более глубокого усвоения структуры таблиц необходимо рассмотреть соотношения между функциями дополнительных углов.

Два угла называются *дополнительными*, если сумма их равна 90°. Под это определение подходят, например, такие пары углов: а) 20° и 70°; б) —20° и 110°; в) 400° и —310°.

Можно дать приведенное общее определение дополнительных углов, а в объем его пока войдут только пары острых положительных углов, сумма которых равна 90°. Примеры и упражнения конкретизируют определение.

Острые углы прямоугольного треугольника по определению являются дополнительными: $A+B=90°$.

Выписав согласно определений тригонометрические функции углов A и B прямоугольного треугольника, ученики легко находят соотношения между ними и получают серию формул, связывающих функции дополнительных углов. Синус угла равен косинусу дополнительного угла; косинус угла равен синусу дополнительного угла и т. д. «То обстоятельство, что косинус угла есть синус дополнительного угла, имеет непосредственную связь с происхождением понятия о косинусе. Слово cosinus является сокращенным обозначением слов sinus complementi, что означает синус дополнительный, в смысле синуса дополнительного угла»[1]. Котангенс — дополнительный тангенс, т. е. тангенс дополнительного угла.

---

[1] П. К. Шмулевич, Учебник прямолинейной тригонометрии, ОНТИ, Москва, 1935.

Приведем примерные упражнения по этому вопросу.

1) Найти x, если а) $\sin x = \cos 35°$, б) $\cos x = \sin 55°$. в) $tg\, x = ctg\, 17°35'$, г) $ctg\, x = tg\, 29°18'$.

2) $\sin 24° = 0{,}4067$. Чему равен $\cos 66°$?

$tg\, 29° = 0{,}5543$. Чему равен $ctg\, 61°$?

3) $tg\, 32° = 0{,}6249$. Котангенс какого угла равен этому же значению?

4) Доказать тождества:

$tg\,(45° - \alpha) = ctg\,(45° + \alpha)$,

$\cos\,(60° + \alpha) = \sin\,(30° - \alpha)$.

Соотношения, установленные между значениями тригонометрических функций дополнительных углов, имеют много важных применений, в частности — при составлении таблиц натуральных значений тригонометрических функций.

В практике нецелесообразно каждый раз вычислять значения тригонометрических функций. С целью существенного упрощения вычислительной работы созданы таблицы натуральных значений тригонометрических функций.

Ввиду того, что функция данного угла равна сходной функции дополнительного угла, оказывается возможным для вычисления синуса и косинуса, тангенса и котангенса использовать не четыре различные таблицы, а только две.

Говоря о структуре таблиц, об их составлении необходимо подчеркнуть мысль, что таблицы тригонометрических функций составляются более совершенными способами, нежели способ, примененный учащимися в их лабораторной работе.

Пользование таблицами, как правило, не вызывает у учащихся особых затруднений, тем более, что они уже работали по таблицам квадратов, кубов и квадратных корней.

Работая по таблицам В. М. Брадиса, следует указать, что значения тригонометрических функций даны приближенно с погрешностью, не превышающей 0,00005. Это следует учитывать при решении всех задач, а потому необходимо повторить с учащимися правила округления чисел и правила подсчета цифр[1].

---

[1] В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, АПН, 1951.

В. М. Брадис, Теория и практика вычислений, Учпедгиз, 1953.

Обращается внимание еще на один момент, связанный с вопросом приближенных вычислений. Таблица тригонометрических функций показывает, что если угол не близок к 0°, к 90°, то изменение угла на 1° вызывает изменение синуса примерно на 0,010—0,015. Таким образом, если угол измерен с точностью до 1°, то значения синусов можно брать с двумя или тремя десятичными знаками.

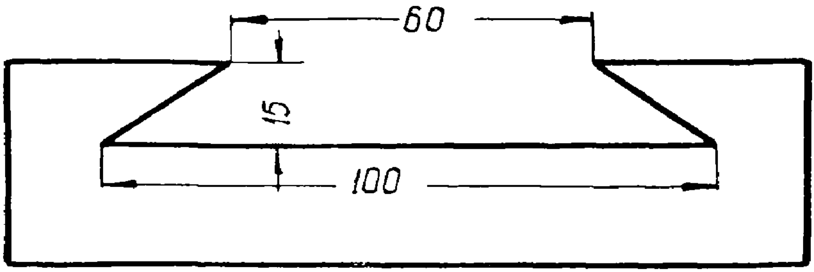
С изменением угла на 0°1′ синус изменяется на 0,0001—0,003, тангенс изменяется быстрее. Если угол измерен с точностью до 0°1′, то тригонометрические функции следует брать с 4-мя значащими цифрами.

В связи с этим надо критически подходить к некоторым задачам существующих задачников. Весьма часто встречаются задачи, в которых отрезки измерены с двумя значащими цифрами, например, $a=49$ *см*, а угол — с точностью до 1′. Здесь не согласованы данные числа. При решении задач с числовыми данными, необходимо знать, какими числами располагает задача — точными или приближенными. Если данные приближенные, то счет ведется по правилам приближенных вычислений. В случае точных чисел необходимо указание, с какой точностью надо получить ответ.

Работая с таблицами, можно решить ряд интересных упражнений.

1) Внешний диаметр винтовой нарезки равен 50 *мм*, внутренний диаметр 42 *мм*; высота винтового хода (шаг винта) 6 *мм*. Определить угол подъема винта.

Демонстрируется модель получения винтовой линии. Решение выполняется по формуле $tg\,\alpha=\frac{h}{\pi d}$, где h — высота винтового хода, d — средний диаметр. Прибли-



Чертеж 67

женное значение числа π известно или берется по таблицам.

2) Определить угол наклона стороны паза к его основанию. Размеры указаны на чертеже 67.

3) Надо выточить коническую пробку длиною в 14 *мм* и с диаметром в 6 *мм*. Определить угол конусности.

6. Решение прямоугольных треугольников

Вопрос о зависимости между сторонами и углами прямоугольного треугольника и решение прямоугольных треугольников является некоторым итогом изучения элементов тригонометрии.

Наблюдается, что некоторые учителя не дают формул решения прямоугольных треугольников и учат при решении их опираться на определение тригонометрических функций острого угла. Такой путь одобрить нельзя: указанные формулы весьма часто встречаются в приложениях, поэтому игнорировать их нецелесообразно.

После вывода основных зависимостей между сторонами и углами прямоугольного треугольника рассматриваются четыре случая решения этих треугольников. Решить прямоугольный треугольник — значит, вычислить все его стороны и углы по каким-либо данным, определяющим этот треугольник (из которых хотя бы одно должно быть длиной отрезка).

Порядок рассмотрения четырех случаев не имеет особого значения, однако, желательно решать треугольники в следующей последовательности: а) по гипотенузе и острому углу, б) по катету и острому углу, в) по гипотенузе и катету, г) по двум катетам.

Решение прямоугольных треугольников открывает возможности использовать тригонометрию в интересах решения вычислительных геометрических задач.

Приводим задачи с практическим содержанием.

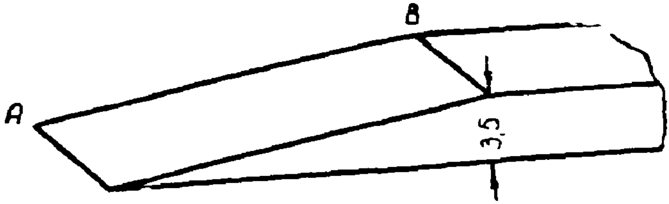
1. Лезвие столярной стамески имеет угол заострения 12°, толщина стамески 3,5 *мм*.

Определить ширину фаски AB (черт. 68).

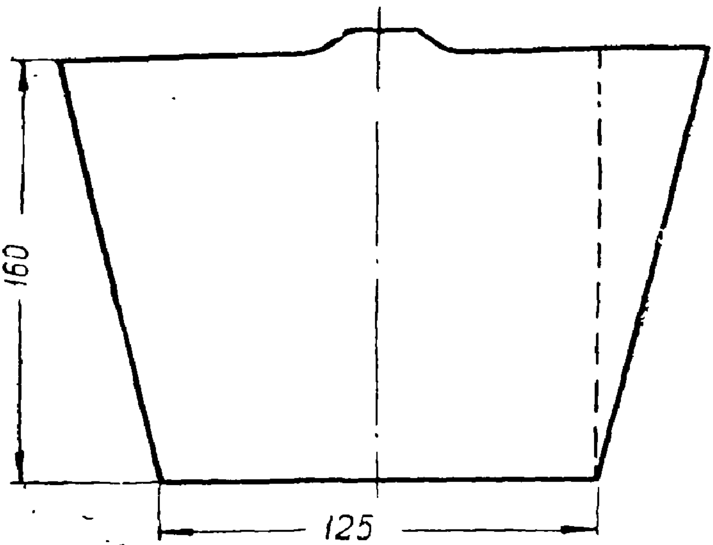
2. Определить, какой диаметр должен иметь стержень, чтобы из него можно было сделать винт с шагом, равным 5 *мм* и углом подъема в 8°.

3. Коническая цапфа имеет подъем в 25%. Определить больший диаметр цапфы, если высота ее равна 160 *мм*, а

меньший диаметр равен 125 *мм* (черт. 69). (Цапфа — опорная часть вала или оси. Подъем 25% значит — конусность равна 0,25).



Чертеж 68

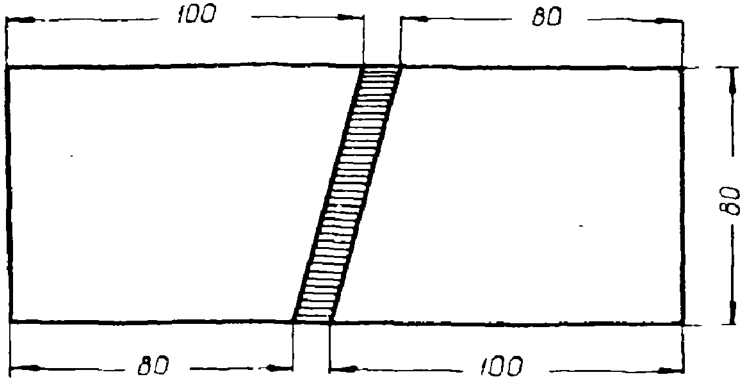


Чертеж 69

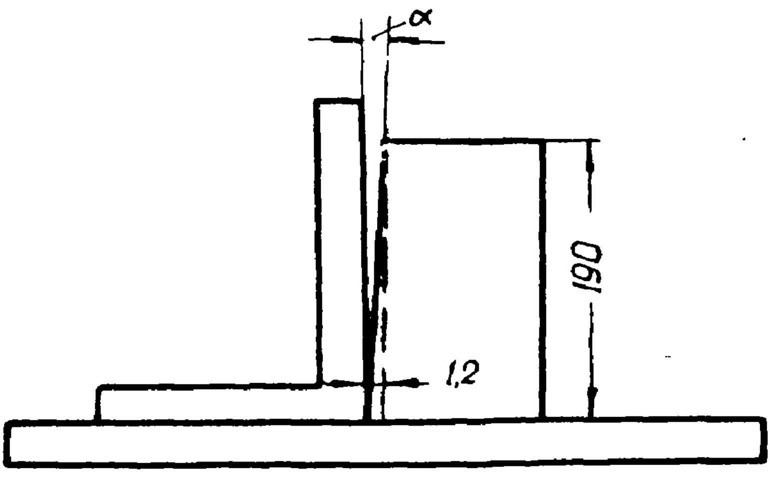
4. В металлическом бруске требуется прорезать наклонную канавку (черт. 70). На основании показанных на чертеже размеров установить, под каким углом должен быть направлен к длинной стороне бруска резец.

5. При проверке угольником плитки, изготовленной учеником, оказался просвет, ширина которого у верхней

грани плитки равна 1,2 *мм*. Вычислить угол отклонения грани плитки от грани полки угольника, если длина плитки равна 190 *мм* (черт. 71).



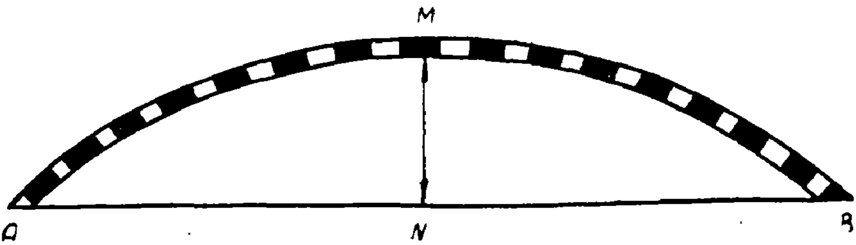
Чертеж 70



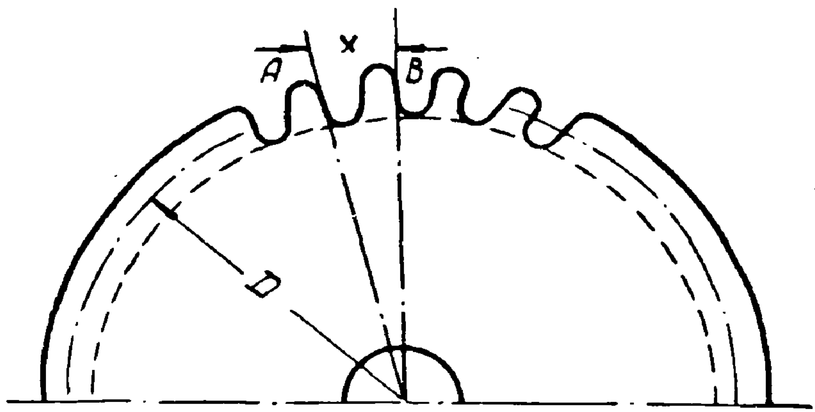
Чертеж 71

6. Закругление AB железнодорожного пути представляет дугу круга радиуса $a=220$ *м*; дуга $AB=10°$. Определить стрелку прогиба MN (черт. 72).

7. Определить расстояние x (по хорде) между соответствующими сторонами зубьев шестерни, если ее диаметр $D = 100$ *мм*, а число зубьев 20 (черт. 73).



Чертеж 72



Чертеж 73

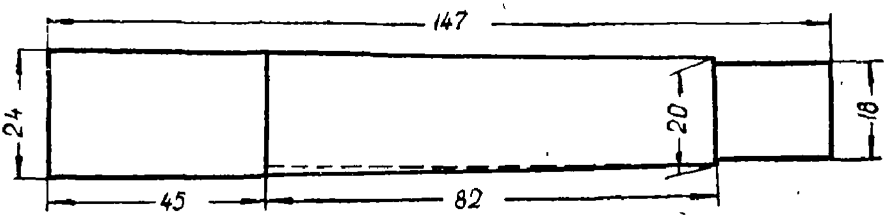
8. Высота мачты 13,5 *м*, длина ее тени 10,8 *м*. Определить угловую высоту солнца (угол луча солнца с горизонтальной поверхностью земли).

Чтобы подчеркнуть практическое значение рассматриваемой темы, можно провести с учащимися экскурсию в механическую мастерскую или к токарному станку.

В программе по машиноведению для 8-го класса указан ряд практических работ по обработке деталей на токарном станке, в частности, обработка цилиндрической и конической поверхностей, сопровождающаяся необходимыми замерами с помощью линейки, штангенциркуля, шаблонов (в соответствии с чертежом). Нет надобности знакомить учащихся во время экскурсии с устройством токарного станка.

Цель экскурсии можно сформулировать так: применение тригонометрических функций острого угла при работе на токарном станке, рассмотреть обработку детали на конус.

Для обработки детали на конус (черт. 74) резец устанавливается под определенным углом: для этого необхо-



Чертеж 74

димо вычислить угол α уклона конуса. Конусность — отношение разности длин диаметров оснований конуса к длине его оси. Имеем: $k = \frac{D-d}{H}$ (k — конусности), $tg\,\alpha = \frac{D-d}{2H}$ (α — угол уклона конуса). Угол уклона конуса вычисляют учащиеся самостоятельно; деталь обрабатывают тоже учащиеся.

7. Работа эклиметром

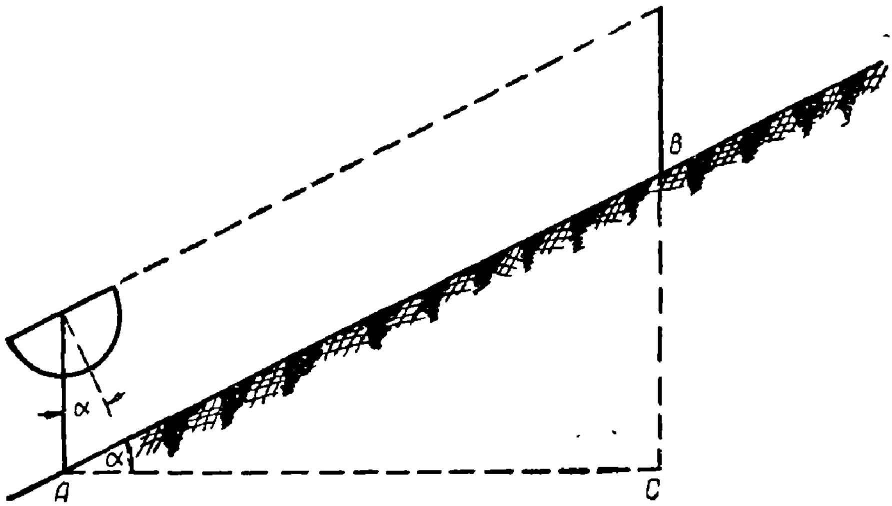
На плане земельных участков наносятся с учетом масштаба не длины отрезков местности, а длины проекций этих отрезков на горизонтальную плоскость. Важно уметь решать следующую практическую задачу: найти длину проекции отрезка прямой местности на горизонтальную плоскость.

В школьных условиях эта задача может быть решена с помощью эклиметра, рулетки и вехи.

Пусть на поверхности земли отмечен отрезок AB. Требуется найти длину AC — проекции отрезка AB на горизонтальную плоскость (черт. 75).

Непосредственным измерением техник найдет длину отрезка AB. Пусть она равна b. Затем техник поставит в точке A эклиметр так, чтобы его подставка была отвесна, а в точку B — веху, длина которой равна длине подставки эклиметра, и визирует по ребру на вершину вехи. В результате получит угол α, который равен $\angle BAC$. Итак, $AC = b \cdot \cos\alpha$.

С помощью эклиметра решается и другая важная задача: найти превышение одной точки земной поверхности над другой.



Чертеж 75

Пусть на земной поверхности отмечены точки A и B (черт. 75). Требуется найти превышение точки B над точкой A, т. е. длину отрезка BC.

На местности выполняются те же измерения, что и в предыдущей задаче.

Получаем: $BC = b \cdot \sin\alpha$.

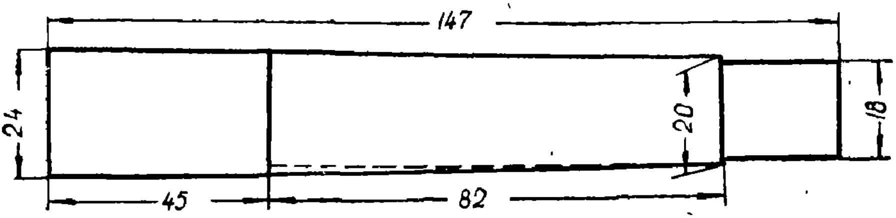
Определение высот точек земной поверхности относительно некоторой точки называется нивелированием. Оно относится к основным видам геодезических работ и широко применяется в инженерном деле.

Эклиметр дает возможность решить и такую задачу: найти высоту предмета, к основанию которого можно подойти.

блонов (в соответствии с чертежом). Нет надобности знакомить учащихся во время экскурсии с устройством токарного станка.

Цель экскурсии можно сформулировать так: применение тригонометрических функций острого угла при работе на токарном станке, рассмотреть обработку детали на конус.

Для обработки детали на конус (черт. 74) резец устанавливается под определенным углом: для этого необхо-



Чертеж 74

димо вычислить угол α уклона конуса. Конусность — отношение разности длин диаметров оснований конуса к длине его оси. Имеем: $k = \frac{D-d}{H}$ (k — конусности), $tg\, \alpha = \frac{D-d}{2H}$ (α — угол уклона конуса). Угол уклона конуса вычисляют учащиеся самостоятельно; деталь обрабатывают тоже учащиеся.

7. Работа эклиметром

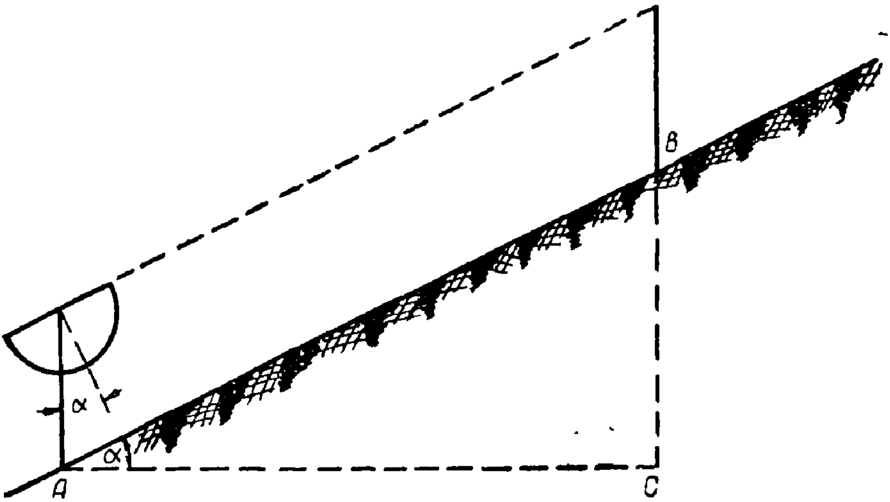
На плане земельных участков наносятся с учетом масштаба не длины отрезков местности, а длины проекций этих отрезков на горизонтальную плоскость. Важно уметь решать следующую практическую задачу: найти длину проекции отрезка прямой местности на горизонтальную плоскость.

В школьных условиях эта задача может быть решена с помощью эклиметра, рулетки и вехи.

Пусть на поверхности земли отмечен отрезок AB. Требуется найти длину AC — проекции отрезка AB на горизонтальную плоскость (черт. 75).

Непосредственным измерением техник найдет длину отрезка AB. Пусть она равна b. Затем техник поставит в точке A эклиметр так, чтобы его подставка была отвесна, а в точку B — веху, длина которой равна длине подставки эклиметра, и визирует по ребру на вершину вехи. В результате получит угол α, который равен $\angle BAC$. Итак, $AC = b \cdot \cos \alpha$.

С помощью эклиметра решается и другая важная задача: найти превышение одной точки земной поверхности над другой.



Чертеж 75

Пусть на земной поверхности отмечены точки A и B (черт. 75). Требуется найти превышение точки B над точкой A, т. е. длину отрезка BC.

На местности выполняются те же измерения, что и в предыдущей задаче.

Получаем: $BC = b \cdot \sin \alpha$.

Определение высот точек земной поверхности относительно некоторой точки называется нивелированием. Оно относится к основным видам геодезических работ и широко применяется в инженерном деле.

Эклиметр дает возможность решить и такую задачу: найти высоту предмета, к основанию которого можно подойти.

ОЧЕРК XII

К ВОПРОСУ О ТОПОГРАФИЧЕСКИХ РАБОТАХ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

1. Математические основы горизонтальных съёмок

План земельного участка — чертеж, на котором в уменьшенном и подобном виде изображается ортогональная проекция этого участка на горизонтальную плоскость. Съемкой земельного участка называется совокупность мероприятий, которые выполняются на местности с целью получить необходимый материал для составления плана. Съемка называется горизонтальной, если отвлекаются от рельефа земельного участка и не ставят задачу изобразить рельеф на плане; съемка называется вертикально-горизонтальной, если ставится задача изобразить на плане и рельеф участка. Горизонтальная съемка проще смешанной — горизонтально-вертикальной; поэтому внимание преподавателей математики привлекли прежде всего горизонтальные съемки.

В основу различных горизонтальных съемок земельных участков кладутся некоторые математические понятия или предложения, которые и определяют основные способы и виды этих съемок.

Для изучения взаимного расположения и свойств плоских фигур применяются полярные координаты. Система полярных координат широко используется при горизонтальных съемках земельных участков. Если выбрать на практически горизонтальной местности полюс и полуось полярной системы координат, потом тем или другим способом найти полярные кординаты всех пунктов местности, подлежащих изображению на плане, то получится достаточный материал для составления плана земельного участка[1]. Для правильного расположения плана на листе бумаги полезно определить румб или азимут полярной полуоси. Это — полярный способ горизонтальной съемки или, другими словами, метод кругового визирования.

Частным случаем его является применение гомотетии: фигура земельного участка с его внутренней ситуацией отображается в план, при этом полюс становится центром, а численный масштаб — коэффициентом гомотетии[2].

При съемках земельных участков широко применяется и биполярная система координат. В этом случае на местности отмечается отрезок прямой — базис, определяется его длина и румб или азимут; затем тем или иным способом находятся углы с вершинами в одном конце базиса между ним и лучами на точки, которые надлежит снять; далее находятся углы с вершинами в другом конце базиса между последним и лучами на те же снимаемые точки. Этого материала достаточно, чтобы составить план земельного участка. Этот способ съемки обычно называют прямой засечкой или засечкой вперед.

Чтобы составить план контура многоугольного участка земной поверхности, достаточно найти длины всех его сторон, получить материал для изображения всех его внутренних углов и измерить румб или азимут одной из его сторон. Последовательное измерение сторон многоугольника и получение его углов называют съемкой способом обхода участка. Если использовать диагонали многоугольника, диагональные ходы (ломаные, соединяющие вершины многоугольника) в сочетании с иными способами съемки, например, круговым визированием, прямой засечкой, то можно произвести съемку и внутренней ситуации участка.

Взаимное расположение точек земной поверхности можно зафиксировать с помощью системы прямоугольных декартовых координат. На земельном участке отмечаются оси координат (обычно отмечается ось абсцисс) и находятся абсциссы и ординаты всех пунктов местности, ко-

---

[1] Плоскую поверхность земельного участка можно считать практически горизонтальной, если угол между ней и горизонтальной плоскостью не превышает 3°.

[2] Очерк X, п. 5.

торые надо показать на плане. Кроме того, определяется румб или азимут положительного направления оси абсцисс. В результате получим достаточный материал для составления плана. Этот способ горизонтальной съемки называют методом декартовых прямоугольных координат.

Чтобы составить план многоугольного участка, можно разбить его диагоналями или иными целесообразно выбранными отрезками на серию треугольников, измерить стороны каждого треугольника, в первом треугольнике взять румб или азимут одной из них. Опираясь на теорему: «Если два одноименных многоугольника разбиты на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников, то многоугольники подобны», можно по заготовленному материалу составить план контура земельного участка. Это — способ съемки путем разложения многоугольника на треугольники[1]. С помощью измерения сторон треугольников можно наносить и внутреннюю ситуацию участка, однако это приводит, при достаточно сложной ситуации, к измерению значительного количества отрезков, что делает съемку громоздкой. Поэтому для съемки внутренних объектов пользуются другими приемами, например, прямоугольными координатами.

Таковы с математической точки зрения основные способы горизонтальной съемки, которые находят применение в школе.

Горизонтальные съемки отличаются одна от другой не только с математической стороны, но и теми средствами— приборами, которые применяются. В дальнейшем идет речь только о тех приборах, которые могут найти применение в школьном обучении и которые можно назвать учебными. Конечно, желательно познакомить с техническими приборами, например, с теодолитом, мензулой и кипрегелем-дальномером и другими.

Если при съемке участка план получается в процессе работ на местности, то съемка называется графической. При графических съемках углы местности переносятся на план графическими средствами, без предварительного измерения в натуре. К числу графических относятся мензульные съемки различными способами — круговым визированием, засечкой вперед, обходом по контуру участка, а также глазомерные съемки, при которых применяются те же основные способы и, кроме того, метод прямоуголь-

[1] Очерк V, п. II.

ных координат. Существенной чертой графических съемок является то, что каждая съемочная операция на местности тотчас же получает то или иное осуществление на плане; между этими операциями и их реализацией на плане нет разрыва во времени.

При угломерной съемке измеряются углы в горизонтальной плоскости; она выполняется теми же тремя основными способами — круговым визированием, прямой засечкой, обходом контура многоугольника. Кроме того, при угломерной съемке довольно часто используется метод прямоугольных координат. Характерной чертой угломерной съемки любым способом является разрыв во времени между измерительными операциями на местности и составлением плана: на местности выполняется только съемка, а план составляется позднее в классной или домашней обстановке.

При съемке методом прямоугольных координат часто применяется эккер, при этом план также составляется после съемки.

Способ разложения многоугольного участка на треугольники не требует особых учебных топографических приборов, причем между съемкой и накладкой плана существует разрыв во времени.

2. Критические замечания

За последние 6 лет, в связи с повышением интереса к политехническому обучению, значительно выросла методическая литература о топографических работах в школе: центральные и местные издательства выпустили около 20 книг и брошюр, посвященных описанию разнообразных школьных топографических работ, методике их организации и проведения[1]. За тот же период в сборниках и журналах напечатано много статей, рассматривающих те же вопросы. Таким образом, нет недостатка в методических рекомендациях и советах.

Однако в этих рекомендациях остается еще много дискуссионного, а в иных случаях неприемлемого. В частности, нередки сомнительные предложения о распре-

---

[1] П. Я. Дорф и А. О. Румер, Измерения по местности. Изд. АПН РСФСР, изд. 2, 1957.

В. В. Репьев, Практические работы по математике на местности, Горьковское кн. изд., 1953.

делении различных способов и видов топографических работ по годам обучения.

Опираясь на приведенные общие соображения о горизонтальных съемках земельных участков, а также на эксперимент и опыт, сделаем несколько замечаний об использовании различных видов горизонтальных съемок в школьном преподавании.

Выбор топографических работ, применяемых в связи с обучением математическим дисциплинам, должен подчиняться интересам математического образования. Они должны быть хорошими примерами применения математики в практике; выполнение их должно помогать более полному, основательному и глубокому усвоению основ математической науки и в особенности геометрии. На уроках математики и на занятиях математических кружков не могут найти места такие работы, которые лишены математического содержания.

Эти положения далеко не всегда учитываются методической литературой: нередко забываются такие топографические занятия, которые представляют интерес с точки зрения математического образования и доступны для проведения в школе, а вместе с этим рекомендуются работы, почти лишенные математического содержания.

Приведем примеры.

Эккерная съемка земельного участка имеет в своей основе метод прямоугольных координат. С этим методом учащиеся знакомятся при изучении прямой и обратной пропорциональности величин, расширяют знания при изучении линейной функции, многократно встречаются с ним на протяжении последующих лет обучения в школе. Многие учащиеся будут иметь дело с прямоугольными координатами при продолжении образования в технических училищах, техникумах и высших учебных заведениях.

Уместно и полезно показать учащимся, как применяется метод прямоугольных координат для решения практических задач, при съемке земельных участков с помощью эккера.

Между тем в некоторых методических работах рекомендуется ввести эккер в обиход школы для построения на местности прямоугольников и решения некоторых других задач, но игнорируется эккерная съемка участка. Такое отношение к методу прямоугольных координат не может быть оправдано: он находит широкое применение в геодезии, чаще всего как вспомогательный метод при других основных способах съемок участка.

В методической литературе довольно часто рекомендуется задача об определении превышения одного пункта земной поверхности над другим путем геометрического нивелирования (визированием горизонтальным лучем) с помощью реек, двухметровой планки с ватерпасом или с помощью реек, эклиметра и рулетки. Эта топографическая задача имеет практическую ценность, но она бедна математическим содержанием: решение ее не требует каких-либо предложений школьного курса геометрии. Значит, решение ее не помогает совершенствовать математическую подготовку школьников. Поэтому нецелесообразно вводить горизонтальное нивелирование в практику школьного обучения. В лучшем случае его можно использовать в кружковых занятиях в пионерских лагерях.

При подборе топографических работ надо учитывать и особенности возраста подростков и юношей: топографические задачи должны быть посильны не только с математической стороны, но и в отношении общего развития учащихся. Выбор и последовательность топографических работ должны удовлетворять одному из основных принципов дидактики: они должны начинаться с простых работ и идти к более сложным и трудным.

Иногда рекомендуется в 6-м классе использовать угломерную съемку способом обхода земельного участка по контуру. А при этой съемке и последующем составлении плана учащиеся неизбежно встречаются с угловой невязкой и необходимостью ее ликвидировать, если она допустимая; они встречаются с линейной и относительной невязкой периметра и ее ликвидацией. А для усвоения и применения этого общее развитие и математическая подготовка учащихся 6-го и даже 7-го классов недостаточны. Если предполагается обойти трудности с невязками, то с этим нельзя согласиться: это означает приучать школьников отказываться от естественного контроля над измерениями, прививать неприемлемые навыки в обращении с числовым материалом.

Итак, угломерную съемку способом обхода нельзя рекомендовать для применения в 6 и 7 классах: она непосильна для учащихся.

Иногда в качестве первой топографической съемки земельного участка рекомендуется угломерная съемка без указания способа ее выполнения. Как показано ранее, угломерная съемка может выполняться различными способами. С методической точки зрения они неравноценны. Рекомендовать угломерную съемку и не указать способ ее выполнения — значит дать нечеткие указания, допускающие различные толкования.

Как уже отмечено, угломерная съемка любым способом и составление плана отделены и последовательностью выполнения работ, и по времени. Неопытные «топографы» — учащиеся школы — не могут быть уверены, что они выполнили все необходимые измерения на местности и записали их результаты в журнале или абрисе, что зафиксированных результатов достаточно для составления плана. Педагог также не может быть уверен за каждую бригаду, что она сделала все необходимое и не допустила грубых ошибок. А всякое опущенное измерение, случайно незаписанный результат, допущенная грубая ошибка помешает составлению плана. Это говорит о дополнительных трудностях угломерных съемок.

Разрыв в последовательности и во времени между съемкой и составлением плана приводит к тому, что угломерная съемка имеет малую наглядность: в ней нет непосредственной связи между измерением на местности и незамедлительным отображением результатов его на плане.

Значит, начинать обучение с угломерной съемки, каким бы способом она не выполнялась, нецелесообразно: с методической точки зрения такие съемки далеко не простейшие.

Графические съемки отличаются максимальной наглядностью, ибо план создается последовательно тут же на местности. Школьники легко усматривают, какие операции они еще не выполнили, чтобы получить план, какие операции вызывают сомнение и требуют проверки; при этом преподавателю значительно легче контролировать работу бригад и давать указания для ее завершения и исправления. Школьники и учитель уходят с земельного участка с уверенностью, что все, что требуется для съемки, выполнено: план в карандаше уже получен.

Несмотря на методические преимущества графических съемок, иногда совершенно забывают о них и не указывают для использования в школе или рекомендуют их выполнять после более сложных угломерных съемок.

Иногда соблазняются простотой того учебного инвентаря, который применяется при съемке, а также малой точностью результатов и советуют использовать в первую очередь те виды их, которые обеспечиваются наиболее простыми приборами.

Съемки земельного участка с помощью мензулы выполняются теми же способами, что и глазомерная. В школьных условиях первая нуждается в доступном для школы инвентаре — мензуле с визирной линейкой, рулетке, компасе, вехах, а вторая обходится самым минимальным инвентарем — папкой, служащей планшетом, компасом и визирной линейкой. Первая дает сравнительно более точные результаты, чем вторая. Учитывая простоту учебного инвентаря и меньшую точность, иногда рекомендуется начинать с глазомерной съемки.

Однако с этим согласиться нельзя: не учитываются особенности развития и психической деятельности подростка.

При глазомерной съемке подростку приходится одновременно выполнять несколько операций: держать в руках горизонтально папку — планшет, наблюдать, чтобы планшет был ориентирован, визировать на местные объекты, которые снимаются. Такой комплекс одновременных операций требует развитой воли, сосредоточенного внимания и умения распределить его по отдельным операциям. Такая деятельность трудна для подростка.

При мензульной съемке дело значительно упрощается: планшет мензулы находится на штативе — его не требуется держать; планшет устанавливается так, чтобы его верхняя плоскость была горизонтальна, затем ориентируется и только после этого производятся визирования на пункты, которые надо снять. Комплекс операций, которые при глазомерной съемке подросток должен выполнять одновременно, теперь распределен во времени и каждая из них выполняется отдельно. Вот почему из двух графических съемок мензульная доступнее для подростков, чем глазомерная.

Значит, мензульная съемка должна предшествовать глазомерной: в методическом плане она проще глазомерной. Из трех видов мензульной съемки наиболее простой является съемка круговым визированием. Ее и следует использовать в первую очередь.

3. Последовательность горизонтальных съёмок

Разностороннее рассмотрение различных способов и видов горизонтальных съемок земельных участков, опыт проведения топографических работ в школе и эксперимент позволяют установить следующие предложения о последовательности топографических работ:

а) Наиболее простой является съемка земельного участка способом кругового визирования с помощью мензулы. Съемка этим способом небольшого практически горизонтального и открытого участка с несложной внутренней ситуацией, как показывает эксперимент, доступна даже для учащихся 5-го класса. Представление о масштабе, плане, о подобных фигурах учащиеся получают на уроках географии. При нанесении пунктов местности на план приходится пользоваться прямой пропорциональностью. Это понятие без формального определения культивируется с первых лет обучения в школе; содержание его уточняется в 6-м классе. Как уже отмечалось, особенностью мензульной съемки является то, что план получается на местности в процессе работы. Наглядность и легкая контролируемость позволяют тут же на местности устранить все неполадки, если они окажутся, и закончить работу в карандаше. Рассматриваемый вид съемки следует рекомендовать как такой, с которого целесообразно начинать обучение составлению планов земельных участков; его можно использовать в 6-м классе в весенний период.

б) В порядке возрастания трудности на втором месте можно поставить съемку земельного участка многоугольной формы путем разложения на треугольники. Участок выбирается с небольшим числом вершин, небольшой по площади, практически горизонтальный и с простой внутренней ситуацией. Необходимо знакомство с румбом и измерением его.

Этот способ съемки отличается простотою учебного инвентаря, но уже не обладает такой наглядностью, как предыдущий: съемка и накладка плана разделены во времени. Поскольку в его основе лежит уменье строить *треугольники по трем сторонам*, то он доступен для учащихся 6-го класса. Его можно использовать в весенний период в 6-м или в осенний период в 7-м классе.

в) Затем надо рекомендовать простейший случай эккерной съемки, в основе которой лежит только одна система прямоугольных координат. Выбирается такой участок многоугольной формы, чтобы пришлось найти координаты примерно 10—12 пунктов поверхности, включая и пункты внутренней ситуации. Так как накладка плана выполняется в классе или дома, то это лишает съемку той наглядности, которая присуща мензульной съемке. Эккерную съемку целесообразно провести в 7-м классе в весенний период: в этом классе метод прямоугольных координат находит широкое применение.

г) Позднее можно включить в учебный процесс более сложные способы съемки земельных участков с помощью эккера. Их можно расположить в такой последовательности: 1) снимаемый участок многоугольник и приходится применить 2—3 системы координат; 2) участок частично или полностью ограничен криволинейным контуром, для съемки используется одна система координат, 3) участок ограничен криволинейным контуром, для съемки применяется несколько систем координат. Эти работы можно провести и в порядке кружковых занятий.

д) При изучении гомотетии и подобия полезно вновь возвратиться к мензульной съемке. Прежде всего надо воспроизвести в памяти школьников способ кругового визирования: он является прекрасной демонстрацией гомотетии; затем полезно познакомить учащихся с новым для них способом — засечкой вперед. Опыт свидетельствует, что он воспринимается и усваивается несколько труднее, чем полярный. Далее уместно познакомить с мензульной съемкой способом обхода многоугольного участка по контуру. Здесь впервые встретится линейная невязка, относительная линейная невязка и способ ликвидации ее, если она допустима.

Если в процессе обучения каждый вид мензульной съемки вводится как самостоятельный, то в практике они обычно применяются совместно. Если основным является обход участка, то каждая вершина его, после ликвидации невязки периметра, может служить центром гомотетии, каждая сторона или диагональ — базисом для засечки вперед. С этим желательно познакомить школьников и применить в практической работе.

Мензула является хорошим прибором для графического решения задач на определение недоступных для непосредственного измерения расстояний Учащиеся, при меняя различные способы съемки, познакомятся с этим попутно.

е) Угломерная съемка, как указывалось, также выполняется способом обхода многоугольника по контуру: он применяется при установлении границ совхозов и колхозов. В условиях больших городов используются способы кругового визирования и прямой засечки. Из серии горизонтальных съемок угломерная съемка наиболее трудная, особенно способом обхода. Она может быть применена только в старших классах.

Накладку плана можно провести тремя приемами: 1) по углам, 2) по румбам, 3) по координатам вершин многоугольника. В школьном обучении наиболее простым и доступным является первый прием: он естественно и тесно связан с курсом геометрии. Однако техники предпочитают накладку по румбам: она выгодно отличается от накладки по углам тем, что не происходит накапливание погрешностей и получаются более точные результаты. Накладка по координатам вершин требует довольно длительных и громоздких вычислений; поэтому этот прием нельзя использовать на уроках. Его можно применить только в кружковых занятиях.

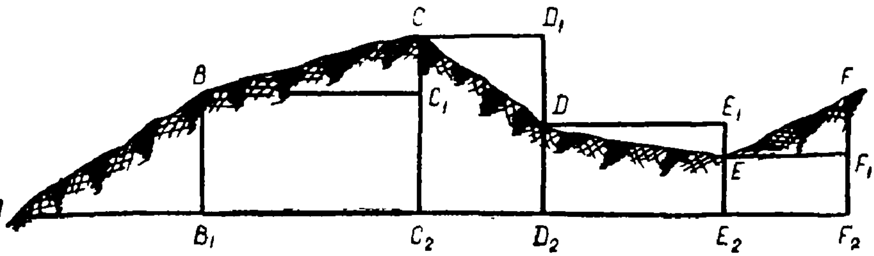
Приведенная последовательность учебных горизонтальных съемок дает возможность преподавателю в каждом году обучения выбрать одну—две из них и сообщить школьникам некоторые умения и навыки в этом отношении. За последние 2—3 года некоторые учителя ослабили внимание к топографическим работам. Этот печальный факт заслуживает осуждения. Топографические работы дают прекрасные примеры приложений геометрии и других математических дисциплин в практике; они неизменно вызывают живой интерес учащихся на всех этапах обучения и повышают общий уровень математической культуры школьников.

4. Нивелирование и составление профиля

Вертикально-горизонтальные съемки земельных участков значительно сложнее горизонтальных и в геометрическом отношении они ближе к стереометрии чем к планиметрии: необходимы сечения поверхности участка горизонтальными параллельными плоскостями, чтобы получить горизонтали, необходимо ортогональное проектирование поверхности с воображаемыми горизонталями на горизонтальную плоскость. Знакомство с вертикально-горизонтальными съемками земельных участков, с составлением планов, с изображением неровностей поверхности в горизонталях требует специальных понятий, предварительных подготовительных занятий и значительного времени. Его можно осуществить на занятиях математических кружков.

Хорошей подготовкой к вертикально-горизонтальным съемкам является нивелирование с последующим составлением профиля. Если нивелирование горизонтальным лучем представляет малый интерес для математического образования, то нивелирование наклонным лучем (тригонометрическое или геодезическое) с помощью эклиметра с последующим составлением профиля заслуживает внимания: оно интересно по применению тригонометрии прямоугольного треугольника и другим расчетам, по использованию метода прямоугольных координат.

Представим, что некоторый участок земной поверхности разрезан вертикальной плоскостью по линии $ABCDEF$ (черт. 76). Требуется произвести необходимые измерения и затем составить профиль.



Чертеж 76

На местности между точками A и F выбирают точки B, C, D, E так, чтобы отрезки AB, BC, CD, DE и EF можно было приближенно принять за прямолинейные. Эти точки отмечаются вехами. Затем эклиметром измеряют углы наклона каждого из этих отрезков к их проекциям на горизонтальную плоскость, т. е. углы BAB_1, CBC_1, DCD_1 и т. д. С помощью рулетки находят длины указанных отрезков. На этом полевая работа заканчивается.

На уроке или занятиях топографического кружка выполняются следующие вычисления: а) находят проекции измеренных на местности отрезков на горизонтальную плоскость, т. е. получают длины AB_1, BC_1, CD_1 и т. д., б) вычисляют BB_1, CC_1 и т. д. (превышение D над C, E над D — отрицательные), в) затем, принимая высоту одной из точек земной поверхности, например, A, равной O, находят относительные высоты остальных точек, т. е. отрезки BB_1, CC_2, DD_2 и т. д. (некоторые из них могут быть и отрицательными). Все подготовлено для составления чертежа профиля.

С математической точки зрения чертеж профиля — график кривой $ABCDEF$. Если относительные высоты точек местности по сравнению с длиной AF_2 незначительны, то для вычерчивания профиля выбирается два масштаба: один для нанесения горизонтальных отрезков (более мелкий), другой для изображения относительных высот точек местности (более крупный). Можно воспользоваться одним масштабом, если относительные высоты по сравнению с AF_2 значительны. В школьных условиях для первой нивелировки желательно выбрать резко выраженный рельеф, например, поперечное сечение глубокой лощины или оврага, крутой склон горы. Это позволит обойтись одним масштабом, что упрощает работу по вычерчиванию профиля.

Виктор Васильевич Репьев

Очерки по методике преподавания геометрии и планиметрии

Редактор Г. П. Сенников

Технический редактор *А. М. Чиренко*

Сдано в набор 26/XII 1959 г. Подписано к печати 8/VI 1959 г. МЦ 12032 Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Объем 17,3 п. л. Уч.-изд. 16,8
Тираж 2000 экз. Цена 5 р.

Москва, типография изд-ва «Московская правда». Заказ 635.