Ф. М. Шустеф

Методика преподавания алгебры

Курс лекций

Издательство „Вышэйшая школа“ Минск 1967

Ш 97

Шустеф Ф. М.

Методика преподавания алгебры. Минск, „Вышэйш. школа", 1967.

223 с. с илл.

Учебное пособие для математических факультетов педагогических институтов по курсу методики преподавания математики.

В пособии рассматриваются общие вопросы преподавания алгебры, методика изучения отдельных тем курса алгебры: развития понятия о числе, тождественных преобразований алгебраических выражений, уравнений функций. Для каждой темы указаны основные литературные источники, необходимые для углубления знаний по изучаемой теме.

Таблиц 13. Иллюстраций 48. Библиографии 282 назв.

$\frac{2-2}{28-67}$ 512(07)

Предисловие

Настоящее пособие составлено на основе лекций, которые читаются автором с 1950 г. в Минском педагогическом институте им. М. Горького. Время, отводимое на лекции по «Методике преподавания математики» в педагогическом институте, весьма ограничено (к тому же тенденция такова, что оно неуклонно уменьшается).

Поэтому даже тот материал, который вошел в это пособие, не может быть прочитан за время, отводимое на чтение данного курса. Тем не менее объем издания не позволил осветить с достаточной полнотой все те вопросы, которые в него включены. Несколько исправляет положение приведенный в конце книги список литературы (ссылки на книги даются указанием в квадратных скобках номера работы, под которым она значится в списке литературы). Как видно из названия списка литературы, он не является полным. Однако для начала самостоятельной работы по методике алгебры этот список достаточен.

В данном пособии читатель не найдет методических разработок тем школьного курса алгебры. Цель лекционного курса по методике преподавания математики, на наш взгляд, — выделить принципиальные положения, сопоставить различные точки зрения и возможные решения того или иного методического вопроса, не навязывая студенту — будущему учителю — единственного и готового решения. Наша цель — направить студента по пути самостоятельных поисков решений, стимулировать творческий подход к своему делу. Автор старался дать по возможности объективную картину современного состояния того или иного методического вопроса. О том, как это ему удалось, просьба писать по адресу:

г. Минск, ул. Кирова, 24. Издательство «Вышэйшая школа».

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Я. Депману за тщательный просмотр рукописи и полезные критические замечания. Автор благодарит также преподавателей Белорусского государственного университета доц. А. Н. Нахимовскую и Н. В. Метельского, рецензировавших рукопись данной книги.

Глава 1. Общие вопросы методики преподавания алгебры

§ 1. Алгебра как наука

Слово «алгебра» произошло от названия средневекового сочинения «Ал-китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр вал-мукабала» («Краткая книга об исчислении алгебры и ал-мукабалы», 820 г.). Автором его был один из основоположников арабской математики и астрономии Мухаммад ибн Муса ал-Хуваризми (ок. 780 — ок. 850 гг.). Прозвище ал-Хуваризми (или ал-Хорезми) показывает, что Мухаммад жил в Хорезме (ныне город в Узбекской ССР). Его имя послужило основой для образования математического термина — «алгорифм» (или «алгоритм»). То обстоятельство, что два важнейших математических термина связаны с именем ал-Хорезми, позволяет судить о значении его в истории математики.

Что означали слова «ал-джабр» и «ал-мукабала», давшие название целой науке? Этими словами обозначались две операции, производившиеся при решении уравнений. «Ал-джабр» (в переводе «восстановление») — вычитание членов уравнения путем прибавления к обеим частям уравнения членов, равных вычитаемым. Вычитаемый член «восстанавливался» (восполнялся) в другой части уравнения в виде слагаемого члена. «Ал-мукабала» (в переводе «противопоставление» или «сопоставление») — сведение всех подобных членов в один [57, стр. 191—193].

Термин «алгебра» как название искусства восстановления у арабов перешел и в медицину. Умение врача восстанавливать больные органы (руки, ноги) стало тоже называться «алгебра».

Арабы в средние века в течение нескольких столетий владели частью Пиренейского полуострова. Много арабских слов вошло в испанский и португальский языки. Этим объясняется, например, то, что во второй части книги Сервантеса «Дон Кихот» (глава XV) рассказывается о том, как дон Кихоту удалось найти «алгебриста» для оказания помощи побежденному противнику. Это слово употребляется в испанском оригинале романа, оно же приводится в ранних русских изданиях «Дон Кихота» [25, стр. 111].

Методы «ал-джабр» и «ал-мукабала» излагались даже стихами [49, стр. 142].

Итак, операции, с помощью которых решались уравнения, дали название самой науке алгебре. Отсюда можно сделать вывод, что первоначально основным содержанием алгебры было учение об уравнениях.

Зарождение алгебры как науки о решении уравнений восходит к глубокой древности. Уже четыре тысячи лет тому назад древние египтяне и вавилоняне умели решать задачи, которые мы теперь решаем с помощью уравнений первой, второй и даже третьей степени.

У ал-Хорезми алгебра как учение о решении уравнений выделилась в самостоятельную науку, и решение уравнений оставалось ее важнейшей задачей до XIX в (школьный курс алгебры и до сего времени в значительной мере сохраняет этот характер).

Развитие теории и техники решения уравнений постепенно привело к возникновению новых понятий и целых разделов алгебры. Так, появилась и все более совершенствовалась буквенная символика. Введение буквенной символики позволило придать всем рассуждениям в алгебре полную общность, поскольку они оставались справедливыми, независимо от того, какие именно числа обозначались той или иной буквой. Значение этого открытия подчеркивалось, в частности, Ньютоном и Эйлером, называвшими алгебру универсальной (общей) арифметикой. Так, лекции по алгебре, которые Ньютон читал в Кембриджском университете в 1673—1683 гг., были опубликованы в 1707 г. под названием «Всеобщая арифметика», а в 1768—1769 гг. появилась двухтомная «Универсальная арифметика» Эйлера.

Решение уравнений потребовало расширения понятия о числе вплоть до построения поля комплексных чисел. Вместе с понятием о числе развивалось понятие об алгебраической операции, алгебраической функции и т. д.

Общие исследования, проводившиеся в связи с задачей решения уравнений различных типов, привели к тому, что теории, игравшие вначале лишь вспомогательную роль при решении уравнений, оказались настолько плодотворными как в самой математике, так и в области ее приложений, что совершенно изменили содержание алгебры как науки. Эти теории и составляют предмет современной алгебры. Имеются в виду такие теории, как теория групп, теория Галуа, теория полей и колец, линейная алгебра, теория алгебраических чисел и др.

Содержание современной алгебры лишь отчасти можно охватить следующей формулировкой: алгебра есть наука об операциях над элементами множеств произвольной природы, удовлетворяющих определенным требованиям (аксиомам). При этом под операцией, определенной в данном множестве M, понимается соответствие, в силу которого двум произвольным элементам a и b (взятым в определенном порядке) множества M ставится в соответствие некоторый элемент c того же множества [155, 156].

§ 2. Алгебра как учебный предмет

Алгебра как учебный предмет в средней школе довольно далека от современной алгебры как науки, что, вообще говоря, вполне естественно. Школа должна давать лишь знания «основ» наук. Но дело еще в том, что школьная алгебра не представляет собою основы только алгебры. В этом курсе переплетаются элементы трех математических дисциплин аналитического цикла: арифметики, алгебры и анализа («три великие A», по выражению Феликса Клейна). Кроме того, научный уровень традиционного школьного курса алгебры таков, что учащийся, оканчивающий среднюю школу, не получает понятия о современной алгебре — науке.

Рассмотрим сначала несколько подробнее содержание школьного курса алгебры. Основными понятиями, изучаемыми в этом курсе, являются: уравнение, неравенство, число, тождественное преобразование, функция. Кроме того, здесь изучаются вопросы, относящиеся к арифметике (пропорции, извлечение корня из чисел, логарифмические вычисления) и анализу (прогрессии, пределы, производная функция). Такое разнообразие изучаемых в курсе вопросов может придать ему «конгломератный» характер и не создать представления у учащихся о едином учебном предмете. Поэтому возникает необходимость выделить среди основных понятий школьного курса алгебры центральное, стержневое понятие, вокруг которого можно было бы сгруппировать все остальные изучаемые в этом предмете вопросы. В качестве такого понятия предлагалось выбрать понятие уравнения [110—112].

Мы знаем, что исторически уравнение как раз играло роль основного понятия алгебры, и многие вопросы школьного курса алгебры можно легко связать с задачей решения уравнений. Однако в современной математике более важную роль играет другое понятие, являющееся основным предметом изучения многих математических дисциплин. Это понятие функции. Оно и способно объединить вокруг себя почти весь школьный курс алгебры. Так, тождественные преобразования позволяют найти различные формы представления одной и той же функции, выбрать для функции выражение, наиболее удобное для того или иного исследования. Решение уравнения дает возможность найти те значения аргумента, при которых функция имеет заданное значение или две функции принимают равные значения.

Изучение неравенств также необходимо для исследования функций. Невозможность решить уравнение в определенной числовой области приводит к введению новых категорий чисел (отрицательные, иррациональные, мнимые). Тесно связаны с понятием функции и понятия последовательности, предела, производной функции.

Вопросы, не вошедшие в основные разделы курса, также легко поставить в связь с понятием функции. Например, изучение пропорций необходимо для выяснения свойств прямой и обратной пропорциональной зависимостей. Извлечение квадратного корня встретится при решении квадратного уравнения и исследовании квадратичной функции. Арифметическая и геометрическая прогрессии суть не что иное, как последовательности значений соответственно линейной ($y = a + d(n-1)$) и показательной ($y = aq^{n-1}$) функций для последовательности целочисленных значений аргументов. Логарифмические вычисления, счетная линейка изучаются как важные приложения свойств логарифмической функции и т. д.

С этой точки зрения можно определить школьную алгебру как науку, изучающую некоторые элементарные алгебраические и трансцендентные функции. Не случайно в новой программе по математике для средней школы [40] для старших классов этот предмет, в который включены и тригонометрические функции, носит название «Алгебра и элементарные функции».

Разумеется, такое определение предмета школьной алгебры не может быть дано учащимся, впервые приступающим к изучению алгебры. Его можно дать тогда, когда ученики уже достаточно далеко продвинутся в изучении предмета. Возможно, это следует сделать в VIII классе, а в X к этому вопросу придется возвратиться, осветить его более глубоко, в том числе выяснить роль аксиоматического метода в алгебре и дать понятие о предмете современной алгебры как науки об операциях над элементами абстрактных множеств.

Однако нельзя обойти вопроса о содержании алгебры, приступая к изучению этого предмета. Для учащихся, если в курсе арифметики начальной школы не проводилась необходимая подготовительная работа, алгебра начинается с записи чисел буквами. Это ошибочное мнение. Арифметика, как и все математические науки, не в меньшей степени, чем алгебра, использует буквенную символику. Еще более ошибочно считать алгебру наукой, для которой характерно применение новых чисел, например отрицательных: основные обобщения понятия о числе относятся к арифметике.

Таким образом, для ответа на вопрос учащихся о том, что такое алгебра, придется обратиться к указанию на сходство и различие между алгеброй и арифметикой, т. е. опереться на те представления, которые уже присутствуют в сознании учащихся, примирившись на первых порах с узким представлением о предмете алгебры. Это хорошо сделано в книге А. Н. Барсукова [4, стр. 7—8].

Сопоставляя алгебру с арифметикой, учитель укажет, что так же, как и арифметика, алгебра изучает действия над числами и в ней учащиеся познакомятся с новыми числами и новыми действиями над ними. В алгебре еще в большей степени, чем в арифметике, они будут пользоваться буквенной символикой и научатся производить действия над более сложными выражениями, чем в арифметике. В курсе арифметики ученики решали задачи различными способами, в курсе алгебры они познакомятся с новым методом решения задач — методом уравнений, который значительно облегчает решение трудных арифметических задач и одинаково применим к различным типам задач. Все изложенное выше выясняется методом беседы с учащимися, которые должны вспомнить, чем они занимались на уроках арифметики. Затем в ходе последующего изучения алгебры все это конкретизируется по мере ознакомления учащихся с основными алгебраическими понятиями [181].

§ 3. Анализ школьного курса алгебры с точки зрения знаний и навыков, приобретаемых в процессе ее изучения («линии» проф. В. Л. Гончарова)

Известный советский ученый, внесший большой вклад в методику преподавания математики в средней школе, автор «Начальной алгебры» [86, 87] и других методических работ, проф. В. Л. Гончаров, глубоко проанализировав содержание школьного курса алгебры [87, стр. 353], выделил в нем четыре основные линии. В преподавании, по мнению В. Л. Гончарова, эти линии не следует смешивать, а нужно чередовать равномерно. Задачи «смешанного типа» должны встречаться преимущественно при повторении. «Преподавателю, готовящемуся к уроку, — пишет Гончаров,—можно было бы порекомендовать анализировать материал, классифицируя его по четырем линиям» [87, стр. 353]. Эти линии следующие: a — линия развития понятий (логическая линия), b — формально-оперативная (обозначения, техника буквенных преобразований, в том числе и техника решения уравнений), c — содержательно-прикладная (текстовые, в том числе технические, физические, геометрические задачи), d — вычислительно-графическая (диаграммы, таблицы, графики).

Сущность этих линий В. Л. Гончаров поясняет на следующих примерах.

1. Разъясняется и усваивается со ссылками на распределительный закон правило приведения подобных

членов — линия *a*; вслед за тем переходят к тренировочным упражнениям в сложении и вычитании многочленов, содержащих подобные члены, — линия *b*.

2. Дана текстовая задача. Составляется уравнение — линия *c*; затем оно решается — линия *b*; из корней выбираются те, которые удовлетворяют условию задачи,— снова линия *c*. Вообще для текстовых задач характерна комбинация линий *cbc*.

3. Предложено уравнение, содержащее, кроме неизвестного, параметр. Уравнение решается относительно неизвестного — линия *b*; величина x изучается как функция параметра; составляется таблица значений и график — линия *d*.

Готовясь к уроку и анализируя материал по этим четырем линиям, учитель выделяет основную, по которой ему следует работать на данном уроке. Он старается добиться того, чтобы в результате изучения каждой темы и всего курса алгебры учащиеся одинаково хорошо овладели всеми четырьмя линиями, после чего можно считать, что цель преподавания алгебры в школе достигнута. Из вышеизложенного видно, какое большое методическое значение имеет анализ курса алгебры, проведенный В. Л. Гончаровым. Руководствуясь им, учитель может целенаправленно вести все преподавание алгебры, находить правильное соотношение между различными вопросами, изучаемыми в этом курсе. По-видимому, следовало бы сделать подобный анализ и остальных математических дисциплин, изучаемых в школе. Для того чтобы научиться самостоятельно анализировать курс алгебры по указанным четырем линиям, начинающий учитель может воспользоваться упоминавшейся книгой [87], в которой материал каждого параграфа изложен так, что внимание в нем уделяется преимущественно одной какой-нибудь линии, в то время как в целом в книге одинаково хорошо разработаны все четыре линии.

§ 4. Связь между преподаванием алгебры и преподаванием арифметики

Мы уже отмечали, что в содержание школьного курса алгебры входят и элементы арифметики: действия над новыми числами, новые операции (возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, потенцирование), различного рода расчеты, табличные вычисления, действия с помощью логарифмической линейки и др. Таким образом, в курсе алгебры учащиеся должны не только укрепить свои знания и навыки, полученные на занятиях по арифметике в предыдущих классах, но и развить их дальше. С другой стороны, изучение арифметики должно подготовить учащихся к прохождению курса алгебры. С этой целью в курсе арифметики может быть использован следующий материал: запись общих правил решения задач с помощью буквенных обозначений (например, задачи на проценты), буквенная запись основных законов действий, правил действий над дробями, простейших формул для вычисления площадей и объемов; решение простейших уравнений на основании правил отыскания неизвестных компонентов действий и нахождения неизвестных членов пропорции. Изучение изменения результата действия при изменении компонентов, прямой и обратной пропорциональной зависимости, построение графиков и диаграмм подготовит учащихся к более основательному знакомству с идеей функциональной зависимости.

Особо следует остановиться на вопросе об арифметических задачах. По установившейся традиции принято считать, что решение так называемых «типовых» задач при помощи различных специальных приемов, иногда довольно замысловатых, является наилучшим средством для развития мышления, сообразительности и смекалки учащихся. Решение этих задач и по сей день занимает много времени. Не отрицая того, что решение задач чисто арифметическими приемами может содействовать развитию учащихся, все же нельзя в настоящее время признать этот материал наилучшим для данной цели. Кроме того, необходимо учесть, что арифметические приемы решения задач утратили свое образовательное и практическое значение, поскольку в нашей стране восьмилетнее образование является обязательным, и каждый ученик, оканчивающий школу, овладевая алгебраическим методом, остается в недоумении, почему от него в течение длительного времени скрывали существование гораздо более простого и легкого способа решения задач, к которому он прибегает значительно охотнее, чем к сложным арифметическим приемам.

Вопрос о необходимости пересмотра отношения к арифметическим приемам решения задач в средней школе поднимался не один раз, особенно в связи с разработкой новых программ по математике. Однако и до настоящего времени в этом деле мало что изменилось. С особой остротой этот вопрос обсуждался в последнее время на страницах журнала «Математика в школе» в связи со статьями проф. А. Я. Хинчина, Б. В. Гнеденко и А. И. Маркушевича [221, 177, 199, 257—270]. Хотя нельзя сказать, чтобы участники дискуссии пришли к единодушному мнению, все же большинство из них высказалось за алгебраический метод решения арифметических задач. Даже сторонники арифметических приемов не возражали против более раннего ознакомления учащихся с алгебраическим методом. Более того, журнал опубликовал статьи, в которых рассказывается об опыте обучения учащихся алгебраическому методу решения арифметических задач в процессе преподавания арифметики (правда, пока в экспериментальном порядке) [268].

Следует ожидать, что алгебраический метод решения арифметических задач найдет отражение в школьных программах, поскольку эта идея уже воплощена в некоторых проектах программ, которые сейчас проходят широкую экспериментальную проверку в Москве, Минске, Новосибирске [41 и др.].

Необходимо отметить, что искусственные методы решения арифметических задач зачастую представляют собою замаскированный алгебраический метод, при этом пользуются не удобной алгебраической символикой, а громоздкими обозначениями и специально придуманными для этой цели понятиями, которые должны собой подменить понятие неизвестного числа x. Так, в задачах на пропорциональное деление вводят понятия «пай», «часть», «доля». Вместо удобного обозначения нескольких неизвестных через x, y, z применяют римские цифры I, II, III. Особенно это бросается в глаза при решении задач на так называемое уравнивание данных. Возьмем, например, задачу: «Куплено 3 ножа и 5 вилок. За покупку уплатили 5 руб. В другой раз куплено 6 ножей и 12 вилок и за покупку уплачено 11 р. 40 к. Сколько стоит нож и сколько стоит вилка?»

Обычно такая задача решается уравниванием данных:

3 н. и 5 в. стоят 5 руб.

6 н. и 12 в. стоят 11 р. 40 к.

Затем уравнивается, например, число ножей удвоением всех данных первого условия задачи и получается запись:

6 н. и 10 в. стоят 10 руб.

6 н. и 12 в. стоят 11 р. 40 к.

Сопоставляя обе строчки, замечают, что разница в стоимости обеих покупок вызвана тем, что во второй раз купили на 2 вилки больше. Следовательно, 2 вилки стоят 1 р. 40 к., 1 вилка стоит 70 коп. Далее находят стоимость ножа. Но ведь это не что иное, как решение системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными способом алгебраического сложения. Вместо принятых в математике обозначений x и y пользуются обозначением н. и в. и вместо математических символов $+$ и $=$ употребляют словесную запись. Очевидно, проще применить буквенную запись в виде системы двух уравнений. Другое дело, что в младших классах не следует пренебрегать конкретным смыслом того, что означают x *и* y, а также тем, каков смысл уравнивания коэффициентов и почленного вычитания частей уравнения, т. е. нельзя ограничиться формальным решением системы уравнений на основе свойств равносильности.

Поэтому и при нынешней программе по математике учитель должен в тех случаях, когда буквенная символика облегчает решение задач, смелее вводить ее и постепенно знакомить с алгебраическим способом решения задач. Таким образом, постоянно «забегая вперед», учитель подготовит учащихся к успешному изучению алгебры. Но на этом не кончается связь преподавания алгебры и арифметики. Кроме дальнейшего развития и углубления арифметических знаний, в курсе алгебры, о котором сказано выше, приходится все время обращаться к знаниям учащихся по арифметике по мере изучения алгебры. Чисто алгебраический материал является для учащихся весьма отвлеченным, и конкретизировать его можно, только обращаясь к арифметике.

Введение каждого нового понятия в алгебре можно начинать с рассмотрения арифметических примеров и задач. Например, понятие о буквенной формуле можно дать после составления нескольких числовых формул решения однотипных арифметических задач с различными числовыми данными. При этом лучше использовать пособие, описанное в работе А. Д. Берзонаса [7]. Оно представляет собою плакат, на котором записано условие задачи и ее решение, причем на тех местах, где должны быть числа, приклеены карманы, в которые можно вставлять карточки с числами. Таким образом, учащиеся видят, что задача все время остается одна и та же, равно как и способ решения. Меняются лишь данные числа. Плакат этот может выглядеть так (приводим его с небольшими изменениями).

Задача. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми (карман) *км*, выходят навстречу друг другу два поезда. Поезд, вышедший из A, идет со скоростью (карман) *км/ч*, а поезд, вышедший из B, — со скоростью (карман) *км/ч*. Чему будет равно расстояние между поездами через (карман) *ч*?

Решение. 1. Какой путь пройдут оба поезда вместе за 1 *ч*?
(карман) *км/ч* + (карман) *км/ч* = (карман) *км/ч*

2. Какой путь пройдут оба поезда вместе за (карман) *ч*?
(карман) *км/ч* · (карман) *ч* = (карман) *км*

3. Каково расстояние между поездами через (карман) *ч*?
(карман) *км* — (карман) *км* = (карман) *км*

В классе учитель решает с учащимися эту задачу с различными наборами данных чисел, которые написаны на отдельных карточках и вставляются последовательно в соответствующие карманы (нижняя часть карточки, вставляемая в карман, остается чистой, число выступает над карманом). Ученики устанавливают правило решения задачи и выясняют, что способ решения не зависит от заданных чисел, которые могут быть обозначены буквами. Задача решается еще раз уже в общем виде, в карманы вставляются буквенные данные. По полученной формуле решается задача с новыми числовыми данными. Можно для убедительности решить по формуле и какую-либо из задач, вычисленных ранее без формулы.

Это наглядное пособие хорошо подготавливает усвоение понятия переменной как «пустого места», на которое может быть поставлено любое число из множества допустимых значений для переменной [48].

Смысл любой формулы учащийся лучше всего уяснит, сделав несколько числовых подстановок. Вообще при любом затруднении или ошибке следует воспользоваться арифметическим примером. Иногда одного такого примера бывает достаточно, чтобы учащийся уяснил суть дела или понял свою ошибку. Во многих вопросах алгебры можно использовать аналогию с арифметикой, например, между действиями над целыми числами и многочленами, между действиями над арифметическими и алгебраическими дробями. При этом, разумеется, необходимо подчеркивать и существенные отличия алгебраических понятий от аналогичных арифметических понятий. Приведем пример из книги И. Я. Депмана [25 б], в которой говорится о недоразумении, возникшем между учительницей и учеником, не согласившимся с тем, что многочлен $x^2 + xy + y^2$ есть неполный квадрат. Ученик подставил в это выражение $x = 5$ и $y = 3$ и получил $25 + 15 + 9 = 49 = 7^2$. Учительница сама должна была обратить внимание учащихся на смысл утверждения, что многочлен не есть полный квадрат, и объяснить, что при отдельных значениях букв числовое значение многочлена может быть и полным квадратом.

Таким образом, привлечение арифметического материала помогает изучению алгебры. Однако не следует забывать, что арифметические знания учащихся являются не только средством, но и одной из целей изучения алгебры. Иногда в преподавании алгебры пренебрегают развитием арифметических знаний и вычислительных навыков учащихся. Отчасти в этом виноваты авторы задачников по алгебре, в которых по традиции дается искусственно облегченный числовой материал. Разумеется, при изучении новых понятий стараются не затруднять учащихся громоздкими числами, но это не значит, что в курсе алгебры можно ограничиться вычислениями только с «круглыми» числами. В упражнениях можно развивать навыки устных вычислений, которые алгебраически легко обосновываются, приемы сокращенных и приближенных вычислений, имеющие большое практическое значение.

Такая тесная связь, существующая между преподаванием арифметики и алгебры, приводит к идее слияния этих двух школьных предметов. Группа видных методистов, работающих в Академии педагогических наук, выдвинула предложение о создании единого курса арифметики и алгебры. Это предложение нашло отражение в проекте программы по математике для средней школы, разработанном сотрудниками АПН, по которому «Арифметика» в составе курса «Математика» изучается в IV классе, а начиная с V класса, идет курс алгебры, включающий и вопросы арифметики (а в курсе IV класса изучались и вопросы алгебры) [41]. Такой проект осуществляется в экспериментальном порядке в различных школах, и уже имеются материалы, в которых нашли отражение данные этого эксперимента [121, 122, 123, 204].

§ 5. Научный уровень современного преподавания алгебры в средней школе

Если проанализировать состояние современного преподавания алгебры в средней школе с точки зрения удельного веса в нем четырех «линий» В. Л. Гончарова, то легко можно заметить, что здесь далеко не достаточно отражены логическая и графико-вычислительная линии (по линии содержательно-прикладной можно лишь добавить решение задач прикладного характера).

Рассмотрим вопрос о логической линии. По сложившейся традиции преподавание алгебры по сей день ведется почти без доказательств, без логического обоснования. В таком же положении находится и преподавание арифметики. В младших классах следует признать правильным преобладание индуктивных методов рассуждений и постепенное, осторожное введение дедукции. Так, общие рассуждения в курсе арифметики вводятся уже в V классе, но проводятся здесь на конкретном числовом примере, хотя по существу не зависят от этого примера, никак не используют его особенности. Точно такое же рассуждение можно провести для любого аналогичного примера. Так, например, при установлении признака делимости на 3 берется конкретное число (допустим, 57329), разбивается на разряды $(50000 + 7000 + 300 + 20 + 9)$, затем выясняется, что каждая разрядная единица при делении на 3 дает в остатке 1, и, следовательно, каждый разряд нашего числа даст в остатке столько единиц, сколько в нем содержится разрядных единиц, т. е. остаток от деления нашего числа на 3 будет равен сумме его цифр: $5 + 7 + 3 + 2 + 9$

и т. д. Ясно, что в этом рассуждении не используется, например, то обстоятельство, что наше число содержит пять десятков тысяч, а не иное число десятков тысяч. Вывод будет тот же для любого числа.

Почти все рассуждения в учении о делимости проводятся аналогично. Необходимо в конце концов выяснить общность каждого такого рассуждения и даже записать его в буквенном виде. После рассмотрения нескольких числовых примеров и повторения рассуждения для каждого примера учащиеся смогут сделать необходимое обобщение.

Имеется достаточно других вопросов в курсе арифметики (законы арифметических действий и их применение, правила действий над дробями, изменение результатов действий при изменении компонентов, свойства пропорций и пропорциональная зависимость и др.), в процессе уяснения которых учащиеся могут быть подведены к дедуктивным умозаключениям. Постепенно дедукция вступит в полные права, и преподавание алгебры будет на том же научном уровне, что и геометрии. Особенно удачно можно будет осуществить постепенный переход от индуктивных способов рассуждений к дедуктивным, если будет внедрен в практику проект программы единого курса арифметики и алгебры.

Но и в настоящее время, как мы видим, имеется полная возможность осуществить постепенное введение дедукции. К сожалению, в практике преподавания это не делается. В результате арифметика и алгебра кажутся учащимся не такими науками, как геометрия, где каждое положение должно доказываться и все содержание состоит из аксиом, определений и теорем. Алгебра и арифметика в глазах учащихся выглядят собранием «правил», не имеющих ничего общего с «теоремами».

Однако нельзя сказать, что в преподавании геометрии удовлетворительно решен вопрос о соотношении индукции и дедукции. До недавнего времени в преподавании геометрии, начиная с VI класса, злоупотребляли дедукцией. Это усугублялось тем, что до VI класса учащиеся, с одной стороны, почти совсем не знакомились с геометрическими образами и, с другой — не были подготовлены заранее к дедуктивным рассуждениям в процессе изучения арифметики. Введение новой программы несколько исправило положение. Теперь ученики знакомятся с некоторыми геометрическими образами в курсе арифметики. Кроме того, в VI классе дедуктивные рассуждения вводятся не с самого начала изучения геометрии, а постепенно. Лучшим решением вопроса было бы изучение геометрии в младших классах (т. е. уже в начальной школе) и подготовка учащихся на уроках арифметики и геометрии на протяжении длительного времени к дедуктивным методам рассуждений. Тогда, возможно, в VI классе не вызывало бы затруднения и большее, чем сейчас, использование дедукции.

Несмотря на введение дедукции с VI класса, преподавание геометрии по старой программе не создавало у учащихся правильного представления об аксиоматическом методе современной математики, о дедуктивном характере математики (геометрии) как науки. Отчасти это было следствием слишком раннего введения дедукции, вернее использование ее без необходимой подготовки, из-за чего дедуктивные рассуждения лишь заучивались без должного понимания. Другая причина заключается в том, что уровень преподавания (которое велось в соответствии с учебником А. П. Киселева) не менялся с VI до X класса. Однако в старших классах можно увеличить требования к уровню изложения, а на примере небольшой части курса показать и современное аксиоматическое изложение материала, характерное для любого научного курса математики.

То же можно пожелать и в отношении уровня преподавания алгебры. Между тем если на уроках геометрии сначала брался слишком «высокий» уровень изложения, который так и не поднимался до необходимого в старших классах, то в курсе алгебры он с самого начала не достигал уровня геометрии VI класса и таким же оставался до X класса. Поэтому следует считать, что в начальный период преподавания геометрии можно приблизиться к тому изложению, которое характерно в настоящее время для преподавания алгебры. Затем в преподавании алгебры (и геометрии) необходимо подойти к существующему уровню обучения геометрии, а, начиная с VIII класса, в преподавании обоих предметов должен быть достигнут более высокий уровень изложения, чем нынешний, чтобы в X классе можно было дать понятие о современном аксиоматическом методе. С одним из конкретных путей реализации такого плана можно познакомиться в книге А. А. Столяра [48].

Итак, учащиеся должны узнать, что алгебра — такая же дедуктивная наука, как и геометрия. Когда мы пользуемся индукцией в младших классах, ученики должны понимать, что это рассуждение не имеет доказательной силы, что общее доказательство может быть проведено, но оно опущено или из-за экономии времени или из-за недоступности его для данного класса. Они должны знать, что в алгебре, так же как и в геометрии, имеются аксиомы. В школьном курсе ими являются основные законы арифметики в применении к натуральным числам (алгебра строится на базе арифметики). При введении новых категорий чисел эти законы доказываются на основе определений, включающих правила действий над новыми числами, т. е. являются уже теоремами. Точно так же все правила тождественных преобразований алгебраических выражений — это теоремы, вытекающие из основных законов арифметики; теоремы о равносильности уравнений и неравенств являются следствием определения уравнения (неравенства) и свойств тождественных уравнений (неравенств). Большинство доказательств в школьном курсе алгебры представляет собою несложные выкладки, заключающиеся в непосредственном применении определений и использовании основных законов арифметики. Поэтому при доказательстве алгебраических теорем легче, чем в курсе геометрии, расчленить все рассуждение на отдельные части и усвоить его. Таким образом, алгебраический материал более, чем геометрический, удобен для начального ознакомления с дедуктивным методом.

В ряде случаев в курсе алгебры с успехом может быть применен метод математической индукции. Между тем в практике преподавания он еще не нашел должного места. Уже с VIII класса можно, пользуясь этим методом, провести на простых примерах (как из алгебры, так и геометрии) ряд доказательств. Например, вывод формулы для возведения в квадрат многочлена (не обязательной по программе, но которую можно включить в упражнения), вывод некоторых свойств арифметических радикалов, вывод формулы числа диагоналей многоугольника, суммы внутренних углов многоугольника, суммы внешних углов многоугольника и др. В IX классе с помощью метода математической индукции могут быть выведены все формулы в теме «Прогрессии и последовательности», в X — формула дифференцирования степени и т. п. Для упражнений можно найти материал в книге И. В. Барановой и С. Е. Ляпина «Задачи на доказательство по алгебре» [63]. Совершенно необходимо, чтобы к окончанию школы учащиеся овладели этим методом доказательства.

§ 6. Задачи и упражнения в курсе алгебры

а) Место задач и упражнений в преподавании алгебры

Решение задач и примеров занимает в курсе алгебры значительную долю времени, представляя собою важное средство изучения алгебры. Вместе с тем умение решать алгебраические задачи составляет и одну из важных целей изучения алгебры.

В истории преподавания алгебры роль задач менялась вместе с эволюцией методов преподавания. В начале XIX в. при господстве догматического метода обучения задач по алгебре почти не решали, задачников не было, а в учебнике приводилось лишь несколько примеров для разъяснения общих правил. Первый сборник задач по алгебре, если не считать задачника Гирша [82], появился в 1845 г., когда в гимназический курс алгебры ввели упражнения [74]. Этот задачник был приспособлен к распространенному тогда учебнику алгебры П. Н. Погорельского (учителя П. Л. Чебышева) [128].

С развитием методов преподавания, значительно усовершенствованных после реформ 60-х годов, изучение алгебры без решения примеров и задач стало немыслимым. Появились объемистые учебники алгебры, содержавшие большое число примеров и задач, т. е. представлявшие собою и учебник и задачник (например, учебник А. Малинина и К. Буренина [120]). Позже стали издаваться отдельные сборники алгебраических задач, из которых наибольшим успехом пользовались задачники Ф. Бычкова [77] и Н. Шапошникова и Н. Вальцова [150—152]. Наличие отдельных сборников задач позволило А. П. Киселеву при создании своего учебника алгебры отказаться от включения в него задач и примеров. Задачник, таким образом, выделился в отдельную книгу.

При этом начинает постепенно обнаруживаться интересное явление. Задачи, включенные в курс алгебры вначале как скромное средство обучения, начинают занимать все большее место, угрожая вовсе оттеснить на задний план теорию. Появляются сборники громоздких, головоломных, искусственных, так называемых «шитых» задач, не имеющих никакого теоретического или практического значения, которыми начинают увлекаться в гимназиях. Примером подобного задачника может служить книга А. Клионовского [103, см., например, задачи №145, 161, 304], а также так называемые сборники конкурсных задач (например, [154]).

Насаждение такого рода упражнений в преподавании алгебры выхолащивало из него идейное содержание, сводило все к технике формальных преобразований, что в общем соответствовало духу классической гимназии. Вместе с тем передовые преподаватели понимали значение теории в курсе алгебры. В задачнике Н. Шапошникова и Н. Вальцова, а еще в большей степени в задачнике реформистского направления* Д. Бема, А. Волкова и Р. Струве [67, 68] имелись и теоретические сведения, материал располагался по строго продуманной методической системе, целью которой было не только привить учащимся навыки в производстве алгебраических выкладок, решении задач, но и помочь им лучше усвоить теоретические положения. Книга опять представляла собою соединение учебника и задачника при более удачном их сочетании и преобладании удельного веса задач. Все же и здесь задачи и теоретическая часть оставались двумя различными разделами курса алгебры. В настоящее время существует отдельный задачник по алгебре [109], причем для восьмилетней школы с ним согласуется и учебник [64]. В старших классах пока пользуются новыми учебниками [62, 105] и учебником А. Киселева [100]. Полного соответствия между задачником и учебником нет.

В 1949—1950 гг. вышло первое издание двух частей книги В. Л. Гончарова [86], которая по существу является третьей попыткой объединить задачник с учебником, но уже, если можно так сказать, на высшем уровне. Если сначала в объединенных книгах преобла-

---

* Имеется в виду движение за реформу преподавания математики конца XIX — начала XX в.

дала теория, а затем — практический материал, то в работе В. Л. Гончарова осуществлено равноправное сочетание теории с практикой, упражнения органически вплетаются в изложение и их невозможно отделить от теоретической части учебника. Книга В. Л. Гончарова дает возможность реализовать на практике прогрессивную методическую систему преподавания алгебры, разработанную автором, когда упражнения и теория дополняют и продолжают друг друга и упражнения служат не только для закрепления, но и для развития теории. Можно сказать, что В. Л. Гончаров в своем учебнике предвосхитил идею программированного обучения. Появление этого учебника представляет собою значительное событие в нашей методике. При дальнейшем развитии идеи, заложенной в учебнике В. Л. Гончарова, возможно, и для старших классов будет создано единое руководство по алгебре, объединяющее учебник и задачник.

Итак, история создания учебников и задачников по алгебре показывает, как изменялась роль задач в преподавании алгебры. Таким образом, можно сделать вывод, что современная методика алгебры придает большое значение решению задач и упражнений в процессе изучения алгебры как для усвоения теории, так и для выработки необходимых навыков в решении и исследовании разнообразных задач, в выполнении алгебраических преобразований и др. При этом упражнения должны быть тесно связаны со всей системой преподавания алгебры, являться ее органической частью, а не превращаться ни в самодовлеющее целое, ни в простой придаток теории.

б) *Виды упражнений по алгебре в соответствии с линиями В. Л. Гончарова*

В системе упражнений по алгебре должны быть равноправно представлены все четыре линии, указанные В. Л. Гончаровым. К линии *а*, т. е. логической, относятся упражнения в решении задач на доказательство, устные упражнения на развитие соображения. Упражнения этого типа еще мало решаются на уроках. Набор задач для таких заданий можно найти в книгах [58, 63, 70, 71, 78, 80, 94, 97, 106, 107]. В работах [70, 71, 97, 107] содержатся также упражнения по линии c — вычислительные и по линии b — на развитие техники быстрых формальных преобразований.

К линии b относятся упражнения на тождественные преобразования рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, решение уравнений, неравенств и их систем.

В связи с развитием формально-оперативной техники учащихся следует остановиться на вопросе о сложности упражнений на преобразование алгебраических выражений. Было время, когда очень увлекались громоздкими примерами на тождественные преобразования и исследование уравнений с целью приобретения учащимися твердых навыков в технике преобразований. Между тем эта цель зачастую не достигалась, несмотря на затраченные усилия и время.

Теперь возникает другая точка зрения на роль сложных упражнений по технике тождественных преобразований. С одной стороны, свободное владение техникой громоздких преобразований нельзя считать необходимым элементом общеобразовательного минимума. Оно необходимо лишь лицам, избравшим естественно-математическую специальность. С другой стороны, слишком поспешный переход к выполнению сложных преобразований без твердого овладения элементарными преобразованиями отрицательно сказывается и на овладении техникой сложных преобразований. Поэтому приходят к выводу, что в пределах восьмилетней школы можно ограничиться решением не слишком громоздких примеров на тождественные преобразования, с тем чтобы учащиеся сознательно и твердо овладели основными, элементарными преобразованиями. На такой базе в средней школе технику преобразований легко будет поднять, оставляя все же громоздкие, хитроумные упражнения для специальных математических школ.

К линии c относится составление уравнений и неравенств по условию текстовых задач, исследование полученных решений, уравнений, неравенств, функций.

Следует отметить, что решение текстовых задач на составление уравнений имеет ограниченное прикладное значение, даже если это настоящие практические задачи, т. е. такие, которые действительно решаются практиками и вместе с тем имеют математическое содержание.

связанное с темой урока (какими должны быть школьные задачи, выясняется в [159, 160], прикладные задачи см. в [99, 127, 153]).

Алгебра — язык техники и современной математики. Умение читать график, применять его как средство наглядности, производить необходимые вычисления, пользоваться всевозможными таблицами и справочниками, логарифмической линейкой, твердо владеть техникой буквенных преобразований, решать уравнение относительно любой буквы, воспользоваться готовой формулой — вот настоящие алгебраические навыки и умения, необходимые любому специалисту средней технической квалификации [180].

К линии *d* относятся различного вида вычислительные упражнения, в том числе устные, табличные, инструментальные (арифмометр, логарифмическая линейка, палочки Непера и др.), графические вычисления, построение графиков различных функций.

Хорошие упражнения по линии *d* имеются в книгах В. Л. Гончарова [88, 89]. Особенно интересна в них тщательная разработка методики проведения самих упражнений. Эту методику полезно применять для организации упражнений, относящихся и к другим линиям.

Одним из основных достоинств методики Гончарова является индивидуализация заданий. В его работах даны указания, каким способом быстро распределить между учащимися индивидуальные задания. Для этого, в частности, используется цифровой набор,* с помощью которого каждый учащийся получает свои значения параметров. Даются советы, в каких пределах удобно выбирать значения параметров. Рекомендуются приемы быстрой проверки самостоятельной работы учащихся. К каждому упражнению в краткой увлекательной форме дано объяснение, которое учитель излагает в классе перед выполнением самостоятельной работы. В него включаются образцы оформления упражнений, расположения вычислений, графиков, таблиц, которые демон-

* Такой цифровой набор представляет собою ящичек, стакан или мешочек с 1000—2000 карточек размером 1 *см*², на которых стоят цифры 0,1, 2, ..., 9. Вытянув необходимое число карточек, ученик по указанию учителя принимает, например, первые три цифры за значение первого параметра, следующие две — за значение второго и т. п.

стрируются на доске в процессе фронтальной работы с классом, выполняющим задание для конкретной системы значений параметров, затем учащиеся по этому образцу выполняют задания для своих значений параметров.

В этих образцах предусматривается выполнение всей работы на двух листах: основном и вспомогательном. На основном листе располагаются данные и результаты работы, на вспомогательном — все вычисления («черновики» не допускаются). Вся работа полностью выполняется на указанных листах одинаково аккуратно. Ошибочные записи разрешается зачеркнуть. Такая система работы имеет большое воспитательное значение, она приучает учащихся к аккуратности, точности и ответственности.

Почти в каждое упражнение входит тот или иной прием самоконтроля (табличный, графический и др.), что также имеет большое практическое и воспитательное значение. Некоторые упражнения имеют целью организовать коллективную работу всего класса, например, по составлению таблицы значений некоторой функции или построению сложного графика, когда каждый учащийся вычисляет координаты одной точки.

Уже простое перечисление особенностей, присущих упражнениям, разработанным В. Л. Гончаровым, свидетельствует о их большой методической ценности. Можно рекомендовать ознакомиться с ними подробнее и распространить их принципы на другие виды самостоятельной работы учащихся. Указания об оформлении упражнений полезно применять во всей работе в тетрадях по алгебре.

В заключение приведем несколько упражнений нестандартного характера, относящихся к тем линиям, которым в практике преподавания уделяется недостаточно внимания.

1. Решить устно систему (линия b):

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 3; \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 0. \end{cases}$

2. Что больше: a или a^2 (линия c)?

3. В арифметической прогрессии $a_4 = 10$, $a_7 = 19$. Определить сумму первых десяти членов (линия c).

Решение. $S_{10} = \frac{10(a_4 + a_7)}{2} = \frac{10 \cdot 29}{2} = 145.$

Решение получилось изящное благодаря использованию того, что a_4 и a_7 являются членами, одинаково отстоящими от концов прогрессии.

4. Найти ошибку в следующем рассуждении: пусть $0 < x < 1$. Тогда $x^2 > x^3$, $2\lg x > 3\lg x$, откуда $2>3$ (линии a и c).

Ошибка состоит в делении на отрицательное число ($\lg x < 0$) без изменения смысла неравенства.

5. Раскрыть ошибку в софизме:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 > \left(\frac{1}{4}\right)^4, 3\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} > 4\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}, \ 3>4.$$

Здесь, как и в предыдущем примере, производится деление обеих частей неравенства.

Но обе части неравенства делили на положительное число $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$. Ошибка скрыта в первой операции, т. е. в логарифмировании. Логарифмическая функция при основании, меньшем единицы, является убывающей, поэтому при логарифмировании следовало изменить знак неравенства.

в) Виды упражнений по их роли в процессе обучения. Некоторые требования к системе упражнений

1) Вводные упражнения для объяснения какого-нибудь понятия, правила, метода доказательства, теоремы

Перед выводом формулы для корней приведенного квадратного уравнения решаются квадратные уравнения с числовыми коэффициентами путем выделения полного квадрата в левой части уравнения и извлечения квадратного корня из обеих частей уравнения. При этом вначале идут примеры, где в левой части уже стоит полный квадрат, затем примеры усложняются:

1) $x^2 + 6x + 9 = 16;\ (x+3)^2 = 16;\ x + 3 = \pm 4;$

$$x = -3 \pm 4;$$

2) $x^2 + 5x + 6 = 0;\quad x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 0;$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};\quad x + \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$$ и т. д.

После решения подобных примеров вывод формулы не вызовет затруднений.

Перед введением определения тождественности двух алгебраических выражений могут быть выполнены упражнения на вычисление двух различных по виду алгебраических выражений при одних и тех же значениях входящих в них букв.

Для «открытия» теоремы Виета можно предложить учащимся решить несколько квадратных уравнений, найти сумму и произведение корней и сравнить полученные числа с коэффициентами каждого уравнения соответственно.

2) Упражнения для закрепления нового материала, тренировочные упражнения

В системе упражнений по алгебре этот вид занимает больше всего времени и места. При выполнении этих упражнений, как и при выполнении любого типа упражнений, нельзя думать только о выработке определенного навыка. Никогда нельзя забывать о теоретической основе упражнения. Необходимо требовать от учащихся обоснования утверждений и выкладок, проверки и исследования полученных решений, тесного увязывания теории с практикой. Это не означает, что учитель должен требовать полного объяснения каждого примера, проверки и исследования решения каждой задачи. Разумеется, сам педагог определяет, когда должно даваться полное объяснение, когда краткое, когда его вообще можно опустить. Он должен лишь быть уверен, что любой учащийся по первому требованию сумеет его дать.

При решении тренировочных упражнений случается, что учитель задает на дом учащимся большое число однотипных примеров. В результате школьники начинают выполнять упражнения механически, и вместо укрепления наблюдается разрушение навыка. Такой подбор упражнений ведет к типичным ошибкам. Так, известный психолог П. А. Шеварев [225] исследовал причины ошибок учащихся при решении примеров на умножение степеней и возведение степени в степень. Например, встречается такая ошибка: $a^m \cdot a^n$ приравнивают к a^{mn}. Эта ошибка появляется с тех пор, как начинается изучение возведения степени в степень. До этого учащиеся только складывали показатели степени, но делали это чисто механически. Так же механически они усвоили возведение степени в степень. Поэтому они не различают, когда следует складывать и когда умножать показатели степени в случаях, имеющих внешнее сходство:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ и } (a^m)^n = a^{mn}.$$

В связи с этим лучше решить меньше упражнений, но выполнять их сознательно, чтобы каждое имело свою цель. Как пример продуманного подбора тренировочных упражнений приведем последовательность упражнений по теме «Умножение степеней одного основания», предлагаемую А. Берзонасом [7]. Сначала идет несколько однотипных упражнений:

1) $a^2 \cdot a^3 = a^5$;

2) $a^7 \cdot a^2 = a^9$;

3) $a^{11} \cdot a^6 = a^{17}$.

Как только учитель замечает, что учащиеся начинают действовать механически, он должен дать другие упражнения, например следующие:

4) $a^4 \cdot b^3$.

Здесь может быть допущена типичная ошибка, если школьники механически складывали показатели степени в предыдущих примерах. Но педагог, предвидя такую возможность, включает данное упражнение. Правильное выполнение этого упражнения предупредит ошибку. Если же она все-таки будет допущена, то разбор ее позволит предостеречь ученика от повторения подобной ошибки.

5) $a^m \cdot a^2$;

6) $a^m \cdot a^n$;

7) $x^{m-1} \cdot x^{m+2}$.

Здесь в каждом примере имеется что-то новое для учащихся, заставляющее их все время думать и отказаться от механического выполнения задания.

После этих упражнений даются новые, с числовыми основаниями:

8) $2^3 \cdot 2^4$;

9) $4^2 \cdot 4^3$;

10) $4^m \cdot 4^2$;

11) $4^{m-2} \cdot 4^{n-m}$;

12) $8^{m-1} \cdot 8^{n-2}$.

Затем основания заменяются одночленами и, наконец, многочленами. Примеры идут в строгой последовательности, трудность все время нарастает (здесь числовые основания идут после буквенных для предупреждения ошибки, состоящей в том, что учащиеся перемножают основания). Для того чтобы учащиеся не стали механически выполнять упражнения, полезно параллельно решать задачи прямого и обратного характера. В этом отношении наши задачники не дают необходимого материала для упражнений. В них не только редко встречаются рядом задачи прямого и обратного типа, но и вообще мало задач обратного характера. На этот недостаток указывает П. М. Эрдниев [226, 227, 53, 54], разработавший систему упражнений по арифметике и алгебре [55]. В своих работах он говорит о необходимости использования противопоставления путем решения прямых и обратных задач, а также и о важности проведения аналогий в родственных вопросах. Так, полезно параллельно решать задачи на умножение и разложение многочленов на множители. Вместе с тем рекомендуется сразу же вслед за изучением изменения суммы в зависимости от изменения слагаемых рассматривать изменение произведения в зависимости от изменения сомножителей, обращая внимание на имеющуюся здесь аналогию. При таком подборе упражнений учащиеся вынуждены осмысливать решение каждого примера, на собственном опыте они убеждаются в невозможности механического выполнения работы.

В системе упражнений должно быть предусмотрено постоянное возвращение к пройденному материалу, повторение его, но не буквальное, а в новых применениях, в новых связях. Как бы хорошо ни был изучен материал, как бы основательно он ни был закреплен, но если он не находит в дальнейшем применения, если не связывается со вновь изученным, то неизбежно будет забыт и на его воспроизведение потребуется слишком много времени. Для осуществления систематического повторения пройденного материала учителю необходимо иметь продуманный план работы в этом направлении. Он должен представлять себе хорошо все содержание курса, видеть все связи изучаемых вопросов. Так, например, формулы сокращенного умножения найдут применение как формулы сокращенного деления. Затем с их помощью будет производиться разложение многочленов на множители. Далее разложение многочленов на множители будет использовано для сокращения алгебраических дробей и приведения их к общему знаменателю, для решения уравнений. Формула квадрата суммы применяется при выводе формулы корней квадратного уравнения, затем она обобщается, когда ученики знакомятся с формулой квадрата суммы нескольких членов. Формула бинома Ньютона дает новое обобщение формул квадрата и куба суммы и т. д.

Постоянное установление связей между изучаемыми вопросами обеспечивает интерес школьников к материалу и прочность знаний.

Различные понятия и темы курса должны связываться не только путем постоянного возвращения к уже изученному, но, если можно так выразиться, и некоторым «забеганием вперед». Учитель совсем не обязан ждать, когда по программе, наконец, тот или иной вопрос найдет свое применение, и обещать учащимся, что в будущем они узнают, зачем изучали этот вопрос. Очень часто простейшие применения некоторого вопроса оказываются вполне доступными учащимся данного класса, и необходимо тут же их познакомить с ними. Этим мы преследуем две цели: во-первых, повышается интерес к текущему материалу и, следовательно, он лучше усваивается, во-вторых, знакомство с материалом последующей темы растягивается на более длительный срок, чем также обеспечивается его лучшее изучение. Это особенно важно для трудно усваиваемого материала. Например, с разложением на множители хорошо знакомить учащихся параллельно изучению формул сокращенного умножения и вообще умножения многочленов (хотя систематически этот вопрос изучается в следующем классе).

«Забегание вперед» может быть и не столь явным. Учащиеся при выполнении того или иного упражнения могут о нем и не подозревать. Более широкую цель видит только преподаватель, исподволь подготовляющий учеников к изучению важного понятия или темы, требующих для усвоения длительного периода времени. Так, например, учащиеся выполняют упражнения на вычисление значений алгебраического выражения при различных значениях входящей в него буквы, оформляют вычисления при помощи таблицы значений буквы и алгебраического выражения или сопровождают вычисления построением соответствующих точек на координатной плоскости. При этом они считают, что их цель — научиться вычислять алгебраические выражения и наглядно представлять себе значения этих выражений. Педагог же, кроме того, старается подготовить учеников к восприятию важнейшего понятия функции и ее графического представления, о котором они пока и не догадываются.

3) Упражнения, подытоживающие раздел или тему, систематизирующие и обобщающие изученный материал. Контрольные задания

Из предыдущего ясно, что в упражнениях подобного рода не должно быть простого повторения. Задания должны в еще большей степени носить творческий характер, систематизировать все связи изученных вопросов, установленные ранее, и открывать новые стороны уже знакомого материала. В задачнике по алгебре для средней школы [109] введены повторительные разделы. Для младших классов имеется специальный задачник, содержащий упражнения на повторение [73].

Материал для повторения и творческих заданий можно найти во многих работах [62, 66, 92, 105, 117, 129, 130, 136].

г) Некоторые методические указания по организации выполнения упражнений на уроках алгебры

Прежде всего необходимо отметить, что к закреплению материала можно переходить только тогда, когда учитель убежден, что материал хорошо понят всеми учащимися. К сожалению, при объяснении нового материала не всегда можно добиться того, чтобы он с первого объяснения был понят каждым школьником. Интересный прием предложил учитель А. А. Хмура [222] для того, чтобы избежать повторного объяснения всему классу, большинство которого поняло материал. Для этой части учащихся педагог заранее готовит задание, которое ученики самостоятельно выполняют после первого объяснения. Тем ученикам, которые не поняли объяснения, учитель дает дополнительные разъяснения, новые иллюстрации, после чего еще одна группа учащихся приступает к самостоятельной работе. Если нужно, объяснение продолжается для третьей группы учащихся. Отдельным ученикам преподаватель разъясняет материал, вызывая их к доске или наблюдая за их работой у парты. Некоторым учащимся объяснения по указанию учителя могут дать более сильные учащиеся (у доски или за партой).

Довольно распространенным приемом разъяснения нового способа решения задач или применения того или иного правила является вызов к доске сильного учащегося и решение им с помощью учителя соответствующего примера. Но класс при этом фактически списывает решение с доски, и учитель, который должен работать одновременно с учащимся у доски и со всем классом, не имеет возможности выяснить, все ли поняли новый прием. Правда, обычно при такой работе педагог вслед за сильным вызывает к доске среднего, а затем и слабого ученика, но все равно за всеми учащимися проследить он не в состоянии. Преподаватель дает самостоятельное задание, не зная, все ли учащиеся готовы к его выполнению. Нередко класс вообще не переходит к самостоятельной работе; все упражнения решаются на доске. Во время выполнения самостоятельной работы учитель все же имеет возможность провести индивидуальную работу с учащимися, затрудняющимися в решении упражнений, и дать более интересное задание сильным ученикам.

В ряде случаев полезно показывать, как применяется то или иное правило к решению задачи, демонстрировать тот или иной метод решения. Почему-то этот прием мало применяется в практике преподавания, по-видимому, его относят к недостаточно «активным» методам обучения. В действительности же, учитель, сам решая у доски пример или задачу, получает хорошую возможность работать с классом, следить за тем, как понимают его ученики, привлекать их к участию в работе. Так, учительница математики Б. И. Есельсон (2-я средняя школа г. Минска), применяя этот прием, говорит учащимся: «Я буду писать под вашу диктовку». Ученики по очереди ей «диктуют». На доске появляется красивая четкая запись, гораздо больше дающая учащимся, чем запись их товарища. При этом ученики должны лишь следить за доской, ничего не записывая в тетрадях. Затем они переходят к самостоятельной работе.

Еще интереснее применяет прием показа упоминавшийся выше А. А. Хмура [28]. После того как пример при активной работе всего класса решен учителем на доске, запись стирается и учащимся предлагается решить это же упражнение в своих тетрадях (иногда дается аналогичный пример, если предыдущий был не слишком сложным). В этом случае преподаватель может выяснить, кто из учащихся понял решение примера, кто нуждается в дополнительном объяснении, которое сейчас же и происходит. После самостоятельного выполнения каждым из учеников нескольких примеров под наблюдением учителя (у всего класса одинаковое задание) последний, убедившись, что материал усвоен и можно переходить к его закреплению, дает дифференцированные задания по степени трудности. Учитель может раздать учащимся карточки, чтобы они не подозревали о различной сложности работ. Учитель может объявить, что выполнение определенной части задания является обязательным, а остальную делают лишь желающие, может указать, что выполнение дополнительного задания повысит оценку.

А. А. Хмура предпочитает трехвариантные задания и заранее объявляет, какой балл получит учащийся, решая тот или иной вариант, т. е. оценивает каждый вариант заранее: «3», «4» или «5». В каждом из них имеется два подварианта одинаковой трудности для рядом сидящих учащихся (чтобы исключить списывание). Если это тренировочный, а не контрольный урок, то оценка «2» не ставится вовсе. Каждый ученик сам выбирает вариант. Если он справится с заданием, то получит заранее объявленную отметку, в противном случае его работа не оценивается. Для того чтобы все учащиеся научились выполнять более трудные упражнения, в конце урока ученики, решившие более трудный вариант, демонстрируют его решение на доске. Этот вид работы очень нравится школьникам, повышает их интерес к занятиям и дает положительные результаты.

Трудности на первых порах могут возникнуть из-за того, что некоторые учащиеся не умеют выбрать подходящий вариант. В таком случае необходима тактичная помощь учителя. Сложно подобрать упражнения для таких заданий. Вариант, оцениваемый более высоким баллом, должен включать и задание предыдущего варианта. Кроме того, иногда задача, заранее оцененная отметкой «3», может быть решена каким-нибудь оригинальным способом, заслуживающим оценки «5». Преподаватель, разумеется, сумеет исправить положение, повысить балл, сделав необходимые разъяснения.

В настоящее время вышел ряд сборников заданий для самостоятельных и контрольных работ [72, 84, 85], однако в них отсутствуют упражнения, дифференцированные по степени трудности. Создание таких сборников значительно облегчило бы применение указанного приема работы.

Другая методика индивидуализации работы учащихся разработана в рассмотренных выше книгах В. Л. Гончарова [88, 89]. Правда, степень трудности упражнения здесь одна и та же для каждого учащегося; работающий медленнее заканчивает его дома.

К тому, что было сказано о методических достоинствах системы упражнений В. Л. Гончарова, добавим, что в ней осуществляется требование о двойной целевой нагрузке заданий. Учащиеся видят в них вычислительную или графическую тренировку. Вместе с тем упражнения играют роль основательной функциональной пропедевтики; при этом исподволь дается понятие о графическом контроле вычислений, табличном контроле и связанной с ними идее непрерывности функции.

При обучении решению примеров и задач очень важно добиваться ускорения темпа их выполнения, в особенности, если речь идет о часто применяемых приемах решения. Часть работы должна проделываться устно, некоторые выкладки учащиеся со временем также сумеют проделывать в уме. Например, при решении несложных уравнений ученику вовсе не обязательно записывать каждый шаг, если преподаватель убежден, что учащийся хорошо понимает смысл проделанных в уме операций. Если не думать об ускорении темпов работы, то мы воспитаем тугодумов, не владеющих твердыми навыками работы. Разумеется, здесь, как и во всем преподавании, необходим индивидуальный подход к учащимся и нельзя сразу потребовать одинакового темпа работы от всех учеников.

Глава 2. Первые уроки алгебры

§ 1. Введение буквенной символики

Алгебра начинает изучаться во втором полугодии VI класса с темы «Буквенные выражения». В будущем, возможно, будет построен единый курс арифметики и алгебры и такой специальной темы в нем может и не быть. Тем не менее и в таком курсе необходимо будет рассмотреть три вопроса, связанных с начальным изучением алгебры. Это вопрос о введении буквенной символики, ознакомление с элементарными алгебраическими понятиями (алгебраическое выражение, формула, коэффициент, степень, показатель степени и др.), первоначальные сведения об уравнениях, составление и решение уравнений.

Переход к обозначению чисел буквами должен быть растянут на длительный срок и происходить еще в период изучения курса арифметики, уже в начальных классах. Учащиеся должны знать, для чего вводится буквенная символика. Буквы в алгебре употребляются:

1) для обозначений одного какого-нибудь определенного числа (e, π);

2) для обозначения неизвестного числа. Этот случай употребления буквы, как и первый, наиболее понятен учащимся: раз число неизвестно, то цифрами его обозначить невозможно. И поэтому для записи этого числа употребляют букву;

3) для обозначения любого числа из знакомого учащимся запаса чисел. Этот случай наиболее труден для школьников, что совершенно естественно. Из истории математики известно, что к мысли обозначать данное число буквой пришли очень поздно, тогда как для обозначения неизвестного числа и его степеней давно были введены буквы (Диофант, III в.). Именно с введения букв для обозначения любого неопределенного числа (Франсуа Виет, XVI в.) начинается быстрое развитие буквенной символики.

Для мотивировки употребления букв в последнем случае применяют следующие приемы.

Первый способ предполагает запись в символической форме различных предложений, известных учащимся в словесной форме. Буквенная запись позволяет длинную словесную формулировку заменить краткой формулой. Здесь используется запись основных законов арифметических действий, свойства нуля и единицы, правила вычитания суммы и разности, деления суммы и разности на какое-либо число, правила действий над дробями и др. В книге С. С. Бронштейна «Алгебра и ее преподавание в семилетней школе» [13, стр. 16—17] дан образец беседы, проводимой учителем при переходе к буквенной записи свойства суммы в зависимости от изменения слагаемых. Ставятся последовательно следующие вопросы: «Как изменится сумма, если к одному слагаемому прибавить 7? Зависит ли искомое изменение суммы от величины первоначально данных слагаемых или же только от того, сколько прибавлено к одному слагаемому? Необходимо ли для ответа на поставленный вопрос знать, чему равно каждое слагаемое, или ответ не зависит от значения каждого слагаемого и остается неизменным при любых значениях слагаемых? Как записать изменившуюся сумму при любых слагаемых? Достаточно ли пользоваться только числами?».

Второй способ введения буквенных обозначений состоит в выводе общих формул решения арифметических задач. Объяснения должны быть аналогичными вышеприведенным. Один из приемов обобщения арифметических формул решения задач мы рассмотрели выше (см. стр. 15). Другим вариантом этого приема является способ введения буквенных обозначений с помощью «чистого бланка» [6, стр. 56—58], т. е. оставление в записи свободного места для заполнения его различными числами из данного множества. При этом проводится аналогия с готовыми бланками для заполнения сегодняшней даты в сберкассах, для указания фамилии дежурного кассира и т. п.

Любопытный прием применил учитель С. М. Иванов [188]. Решается задача о нахождении числа мальчиков и числа девочек по сумме и разности этих чисел для каждого из трех параллельных классов. Решили для 6 «а», затем для 6 «б» класса. Перешли к решению такой же задачи для 6 «в» класса. Но оказывается, что учитель «забыл», сколько в этом классе всего учащихся и на сколько девочек больше, чем мальчиков. Приходится временно эти числа обозначить буквами. Задача решается в буквах до выяснения нужных данных. Когда, таким образом, формула получена, учитель вдруг «вспоминает» забытые данные и учащиеся совершают первое вычисление по формуле. При таком подходе ученики очень хорошо воспринимают идею буквенного обозначения данного числа, которое может быть каким угодно (из данного множества).

Обычно для составления формул используют задачи на проценты, на определение площадей и объемов и т. д. В каждую формулу вместо букв рекомендуется подставлять различные числа и производить по ней вычисления. На первых порах полезно требовать от учащихся применения двух способов записи каждого предложения о числах: словесного и буквенного. Затем следует постепенно переходить к символической форме записи и обязательно требовать прочитать каждую символическую запись.

Этот путь введения буквенных обозначений чисел в обычной форме малоэффективен. В конце концов учащиеся не узнают здесь ничего нового и не будут применять получаемые формулы, так как их не затрудняет обычный способ решения этих задач. Поэтому В. М. Брадис предлагает рассмотреть такую задачу, для решения которой удобно пользоваться заранее составленной формулой, т. е. когда формула имеет практическое значение. Например, можно составить удобную формулу для вычисления веса медной проволоки данного диаметра и данной длины. Удельный вес ее равен 8,8 *г/см*^{3}, диаметр — D *см*, длина — a *м*. Площадь сечения $S = 0{,}25D^2 \cdot 3{,}14 = 0{,}785D^2$ *см*^{2}. Объем $V = 0{,}785\ D^2 \times$ $\times 100a$ *см*$^3 = 78{,}5$ aD^2 *см*^{3}. Вес $P = 8{,}8 \cdot 78{,}5$ $aD^2 =$ $= 690{,}8$ aD^2 *г* $= 0{,}69$ aD^2 *кг*.

В практике применяется формула $P = 0{,}7$ aD^2*кг* [10, стр. 231].

Если нужно несколько раз вычислять объем медной проволоки различного сечения и длины, то, разумеется, нет смысла каждый раз производить снова все вычисления, гораздо удобнее воспользоваться полученной формулой. Этот прием могут использовать учащиеся, если они уже имеют понятие о составлении формул.

Интересен прием, приведенный В. Л. Гончаровым в его учебнике [87]. Для того чтобы учащиеся усвоили понятие формулы, сначала даются самые элементарные задачи на составление формул, причем решается достаточно большое число таких упражнений, работа при этом ведется постепенно. В задаче на определение стоимости нескольких карандашей и перьев последовательно меняются данные числа, затем они заменяются буквами (число карандашей и число перьев). После этого даются упражнения на вычисление по готовым формулам, составить которые учащиеся не могут. Тем не менее содержание соответствующих задач способно заинтересовать и убедить в полезности формул. Вот некоторые примеры.

1. Формула для перевода температуры по Фаренгейту в температуру по Цельсию

$$C^\circ = \frac{5(\Phi^\circ - 32)}{9}.$$

2. Формула для определения времени варки мяса

$$t = 20 + 30\ K,$$

где K — число килограммов мяса, t — время варки в минутах.

3. Формула определения нормального числа часов сна для человека до 18 лет

$$H = 8 + \frac{18 - T}{2},$$

где T — возраст в годах.

Определить по формуле, сколько часов надо спать новорожденному ребенку ($T = 0$)? Сколько надо спать четырехлетнему ребенку? 12-летнему? Каждому из ваших братьев и сестер? (Записывайте систематически.)

4. Формула определения номера валенок

$$B = \frac{2}{3}\ A + 1,$$

где A — номер ботинок.

Как вести запись систематически, видно из следующей таблицы, составленной для первой формулы:

Таблица 1

Φ°	C°
50	$\frac{5(50-32)}{9}=10$
60	$\frac{5(60-32)}{9}=15\frac{5}{9}=15{,}6$

Заметим попутно, что эти упражнения одновременно преследуют и цель функциональной пропедевтики. Таким образом, осуществляется двойная целевая установка выполнения упражнений, о чем говорилось выше.

§ 2. Ознакомление с методом уравнений

Этот вопрос не является новым для учащихся. В курсе арифметики они знакомились с простейшими уравнениями и некоторыми приемами их решения, а иногда и составляли уравнения по условию задач (в будущем, возможно, это будет предусмотрено программой). Если уравнения по условию задач не составлялись, то придется начать с простейших арифметических задач и решать их составлением уравнений. В книге А. Н. Барсукова [4] указана последовательность решения задач для первоначального знакомства с составлением уравнений. При этом предусматривается, что сначала учащимся прямо говорят, что обозначить через x, чему следует приравнять полученное выражение. Потом ученик сам должен уметь обозначить неизвестное и т. д.

Этот этап необходим для усвоения техники перевода задачи на алгебраический язык. Но при выполнении данных упражнений, так же как и при записи формул решения арифметических задач, учащиеся еще не видят большого смысла в этой работе, ибо могут решить предложенную задачу легко и без уравнения. Поэтому целесообразно вскоре предложить им для решения методом уравнения нетривиальную задачу. В. М. Брадис предлагает, например, для этого использовать следующую задачу, решаемую методом «предположения» (№ 455 из [69]): «8 р. 65 к. выплачено 20-копеечными и 15-копеечными монетами, всего дано в уплату 50 монет; сколько дано монет каждого достоинства?»

Задача легко решается путем составления уравнения: $20x + 15(50 - x) = 865$. Арифметическое решение ее явно труднее. Учащиеся смогут оценить достоинства алгебраического метода [10].

Высказывается предложение сразу начать с более сложной задачи, чтобы продемонстрировать преимущества алгебраического метода. В зависимости от подготовленности учащихся вопрос может быть решен тем или иным способом. Здесь все зависит от вкуса и такта учителя. То же можно сказать и о том, с какого случая употребления буквенных обозначений начать. Все указанные выше приемы введения букв одинаково доступны учащимся, одинаково опираются на их арифметические знания. С каждым употреблением букв учащиеся должны быть знакомы.

§ 3. Основные алгебраические понятия

Коэффициент. Более точное определение для начального знакомства имеется в книге П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова «Алгебра» [59]: «Цифровой множитель, стоящий перед буквенным выражением». Вообще это определение учащиеся не должны заучивать, так как коэффициент — не математическое понятие, а термин, из его определения не делается никаких логических выводов. Школьники должны лишь уметь правильно пользоваться этим термином. Следует иметь в виду, что в дальнейшем употребление термина будет расширено: «буквенные коэффициенты», «коэффициенты уравнения» и т. п. Большие затруднения вызывает у учащихся условный смысл коэффициента 1 и показателя 1. Не рекомендуется слишком рано отбрасывать их в записи буквенного выражения. Так, учительница М. П. Салум [213] на протяжении первого месяца знакомства с алгеброй практиковала следующие записи:

$$3м - 1м + 1м + 1м;\ 3a^2 - 2b^3 = 3a^1a^1 - 2b^1b^1b^1.$$

Полезно решать задачи на составление алгебраического выражения, когда коэффициент получает конкретное истолкование, например, выразить периметр квадрата, прямоугольника, площадь поверхности куба и т. п.

Порядок действий. В алгебре тот же порядок действий, что и в арифметике, но есть исключение: в алгебре знак умножения связывает компоненты действия сильнее, чем знак деления, поэтому знак умножения опускается. Например, $a:b \cdot c = a:(b \cdot c)$. Для устранения недоразумений В. Л. Гончаров указывает, что предпочтительнее пользоваться в качестве знака деления чертой или ставить скобки [87]. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров [59] предложили изменить порядок действий в арифметике и решать, например, так: $80:20 \cdot 2 = 80:40 = 2$, вместо обычного: $80:20 \cdot 2 = 4 \times 2 = 8$. Однако это предложение не нашло поддержки.

Типичные ошибки на порядок действий:

1) $7 \cdot 8 + 10:2 = 56 + 10:2 = 66:2$;

2) $5 \cdot 2^3 - 80:20 = 10^3 - 80:20 = 920:20$;

3) $ab + ab + ab = 3a \cdot 3b$ (разъяснить ошибку можно так: здесь три слагаемых ab);

4) $A + A = A^2$;

5) $A \cdot A = 2A$ (для разъяснения ошибки дать числовые примеры).

Для предупреждения ошибок полезны примеры вроде: $2 + 3^2 =$, $(2+3)^2 =$, $2 \cdot 3^2 =$, $(2 \cdot 3)^2 =$.

Алгебраическое выражение и формула. В отношении этих понятий еще нет установившейся терминологии. А. П. Киселев [100] формулой называет равенство (или неравенство) двух выражений. Таким образом, формула есть математическое предложение, а алгебраическое выражение является его частью.

П. С. Александров и А. Н. Колмогоров [59, стр. 17] дают такую формулировку: «Всякая запись чисел и действий над ними называется алгебраическим выражением», т. е. алгебраическое выражение оказывается широким понятием, включающим в себя и понятие формулы.

А. Н. Барсуков [64] вводит примерно такое же понятие алгебраического выражения: «Алгебраическим выражением называется запись, состоящая из чисел, обозначенных цифрами или буквами и соединенных знаками действий». Понятие формулы не вводится, а даются понятия равенства и неравенства. В другом месте [4] А. Н. Барсуков указывает, что неудобно всякое равенство называть формулой, например равенство $ax^2 + bx + c = 0$ лучше называть уравнением. Алгебраическое выражение можно назвать формулой, если оно относится к определенному объекту. Так, если выражение

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

отнести к уравнению $ax^2 + bx + c = 0$, то данное выражение будет формулой его корней.

В обыденной речи всякую математическую запись называют формулой. Поэтому В. Л. Гончаров [87, стр. 16] шире толкует слово «формула»: «Записи, составленные из математических знаков, чисел, букв и знаков действий, а также знаков равенства или неравенства, носят название формул... Формулы, которые составлены из чисел, букв и знаков действий и не содержат знаков равенства или неравенства, называются также алгебраическими (буквенными) выражениями». В этой трактовке алгебраическое выражение оказывается частным случаем формулы.

Мы уделили столько внимания толкованиям терминов «формула» и «алгебраическое выражение» не потому, что они имеют принципиальное значение. Важно лишь понять, что не стоит ломать копья вокруг вопроса, какое определение правильно: ни одно из них не приводит к недоразумениям. Фактически ни одно из них не является формальным определением (и не должно им быть), ибо из них не выводится никаких логических следствий. Это просто удобные термины, пользоваться которыми учащихся нужно научить. При этом следует придерживаться одной, выбранной учителем терминологии и не требовать ее заучивания.

Для лучшего усвоения понятия алгебраического выражения и формулы полезны упражнения не только на составление формул, но и на задачи обратного характера, т. е. составление задачи, которая решалась бы по заданной формуле. Пример: составить арифметическую задачу, которая решалась бы по формуле

$$\frac{ab + ck}{a + c}.$$

Обратные задачи всегда носят более творческий характер, чем прямые, развивают мышление учащихся. Часто ответы на них бывают неоднозначны, поэтому они развивают инициативу учащихся. Так, в данном случае могут быть составлены следующие задачи: «Сколько стоит один килограмм смеси товара, если смешано a *кг* одного сорта по b руб. за 1 *кг* и c *кг* другого сорта по k руб. за 1 *кг*?» или: «Чему равна средняя выработка за 1 день, если в первые a дней производительность была b деталей в день, а в следующие c дней производительность была k деталей в день?» и т. п.

Следует проделать ряд упражнений на чтение и запись алгебраических выражений. Дело в том, что здесь учащиеся встречаются с затруднениями, связанными с тем, что порядок чтения не совпадает с порядком записи алгебраического выражения. Алгебраическое выражение называется по последнему действию. Прежде чем прочесть выражение, полезно разобрать порядок действий, указываемый данным выражением. В книге К. С. Барыбина «Методика преподавания алгебры» [6, стр. 4—67] дается план такой работы. Опытные учителя для усвоения этого вопроса практикуют алгебраический диктант. В данном случае это диктант в прямом смысле этого слова: после того как учащиеся научатся читать алгебраические выражения, они записывают их под диктовку учителя. Заметим, что под математическим диктантом понимают и вид устных упражнений, при которых учащиеся, записывая лишь результат вычислений, выполняют ряд заданий, продиктованных учителем.

Глава 3. Тождественные преобразования в курсе алгебры

§ 1. Виды тождественных преобразований, изучаемых в курсе алгебры. Основные понятия темы

В восьмилетней школе в основном изучаются преобразования рациональных выражений (лишь в VIII классе учат простейшие преобразования квадратных радикалов): тождественные преобразования одночленов и многочленов, разложение на множители, преобразования алгебраических дробей. В программу старших классов входят тождественные преобразования иррациональных выражений, логарифмические преобразования, потенцирование, преобразования тригонометрических выражений, преобразования выражений, содержащих комплексные числа, суммирование прогрессий, бином Ньютона, теорема Безу, схема Горнера. Таким образом, тождественные преобразования, как и другие основные вопросы школьного курса, не входят в одну какую-нибудь тему, а изучаются во всем курсе алгебры.

Определение тождественности двух выражений следующее: два алгебраических выражения называются тождественными, если они принимают равные численные значения при соответственно равных числовых значениях букв из общей области допустимых значений. Тождеством называется равенство двух тождественных выражений. Для алгебраических дробей определение тождественности расширяется, и на основе так называемого алгебраического принципа продолжения, совпадающего по существу с принципом продолжения по непрерывности,* расширяется область допустимых значений для сократимой дроби, теряющей смысл при

* Принцип продолжения по непрерывности заключается в следующем: если в некоторой точке функция не определена, то дополнительным определением ей придается значение, равное ее пределу в этой точке, если, конечно, этот предел существует; таким образом, функция остается непрерывной и в дополненной области

значениях букв, равных корням общего множителя числителя и знаменателя. Приведем определение тождества двух рациональных выражений из учебника П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова: «равенство между двумя рациональными выражениями... будем называть тождеством, если оно справедливо при всех значениях входящих в него букв, кроме тех исключительных случаев, когда одна из сторон равенства (или обе сразу) становится бессмысленной» [59, стр. 109].

Тем самым множество допустимых значений для сократимой дроби расширяется следующим образом. Если сократимая дробь теряет смысл в некоторой точке, а тождественная ей несократимая дробь не теряет смысла в данной точке, то значение сократимой дроби в данной точке считается равным значению в этой точке тождественной с нею несократимой дроби. Именно на основании этого принципа продолжения мы можем свободно сокращать алгебраические дроби на многочленные множители. Например,

$$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2;\quad \frac{27x^3-8y^3}{3x-2y}=9x^2+6xy+4y^2.$$

Теперь значение первой дроби при $x=2$ считается равным 4, а второй при $x=\frac{2}{3}y$ принимается равным $12y^2$.

Нетрудно заметить, что алгебраический принцип продолжения области определения функции, позволяющий отождествлять алгебраическую дробь, теряющую смысл в некоторой точке, с выражением, получающимся из данной дроби после ее сокращения на многочленный множитель (обращающийся в этой точке в нуль, из-за чего дробь и теряет смысл), дает то же, что и принцип продолжения по непрерывности. Предел функции при аргументе, стремящемся к указанной точке, как раз будет равен значению в этой точке функции, полученной после сокращения. Так, в нашем примере предел дроби $\frac{x^2-4}{x-2}$ при x, стремящемся к 2, будет равен пределу $x+2$ при x, стремящемся к 2, или значению этой функции в точке 2, т. е. $2+2=4$.

Тождественное преобразование — это замена одного выражения другим, тождественно равным; смысл его сохраняется и для нового определения тождественности двух выражений. Тождественное преобразование состоит в применении к данному выражению основных свойств действий. Этим обеспечивается равенство значений данного и преобразованного выражений при любых наборах значений входящих в них букв.

В приведенных выше рассуждениях переплетаются две точки зрения на тождественность алгебраических выражений и тождественное преобразование: формальная и функциональная. С формальной точки зрения два выражения тождественны, если они могут быть получены друг из друга путем формальных преобразований, т. е. последовательной заменой одного выражения другим в результате применения того или иного правила тождественного преобразования, которое является следствием основных законов действий, или непосредственно самих законов действий. Тождественное преобразование с этой точки зрения есть процесс применения указанных правил к алгебраическому выражению.

С функциональной точки зрения два выражения тождественны, если они принимают одни и те же численные значения при произвольных системах значений букв, входящих в эти выражения. Тождественное преобразование — это замена данного выражения тождественным ему в указанном смысле. Но при этом нет способа производить эту замену. Функциональная точка зрения не позволяет доказать, что два выражения являются тождественными, так как обычно область допустимых значений для букв, входящих в алгебраическое выражение, является бесконечным множеством. Правда, функциональная точка зрения дает способ обнаружить нетождественность двух выражений, если при каком-то наборе допустимых значений букв эти выражения примут различные численные значения. Отсюда видно, что необходимо применять оба толкования тождественности двух выражений. Полезно четко выяснять каждый раз, с какой трактовкой этого понятия мы имеем дело в том или ином случае, в том или ином упражнении [48].

Необходимо обратить внимание на правильное оформление упражнений на доказательство тождеств. В практике случается, что доказываемое тождество переписывают несколько раз, одновременно преобразуя обе его части, зачастую заменяя их соответственно не-тождественными выражениями (перенося, например, некоторый член из одной части тождества в другую, что правомерно лишь для уже доказанного тождества), и, таким образом, доводят работу до получения очевидного тождества (записывают, например, что $0 = 0$, в чем никто не сомневается). Но при этом доказательство нельзя считать законченным, ибо можно прийти к верному предложению исходя и из неверного соотношения (например, возводя в квадрат заведомо неверное равенство $(-3)=3$). Поэтому следует либо преобразовывать одну из частей доказываемого тождества, заменяя ее последовательно тождественными выражениями, пока не получится выражение, стоящее в другой части доказываемого тождества, либо по отдельности преобразовывать обе части предложенного для доказательства тождества до получения одного и того же выражения.

Таким образом, запись может быть двоякой:

1) Доказать, что $A \equiv B$. Доказательство: $A \equiv A_1 \equiv \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv \ldots \equiv A_k \equiv B$.

2) Доказать, что $A \equiv B$. Доказательство: $A \equiv A_1 \equiv \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv \ldots \equiv C$, $B \equiv B_1 \equiv B_2 \equiv \ldots \equiv C$.

Для того чтобы с самого начала изучения сложных тождественных преобразований заинтересовать ими учащихся, можно применить прием М. П. Синельникова [45]. Учитель дает довольно сложное алгебраическое выражение, составленное из двух букв (например, $\frac{27x^3 - 8y^3}{9x^2 + 6xy + 4y^2}$), и предлагает вычислить его при значениях букв, задаваемых учениками.

Преподаватель сразу дает ответ, который учащиеся могут найти лишь после более или менее продолжительных вычислений. Проделав несколько раз опыт, который кажется фокусом и интригует школьников, учитель раскрывает секрет: он вычислял совсем другое выражение. Учащиеся убеждаются, что выражение $(x-y)$ дает всякий раз тот же результат, что получался у них. Проделывается еще несколько числовых подстановок в оба выражения. Этот прием очень наглядно подводит учеников к понятию «тождественные выражения». Вместе с тем у них появляется интерес к изучению правил, по которым можно данное сложное выражение заменить более удобным для вычислений.

§ 2. Цель тождественных преобразований

А. Я. Хинчин указывал [221], что одной из причин формализма в знаниях учащихся по математике является отсутствие четкого указания о цели того или иного тождественного преобразования в нашей учебной литературе. Известно, что зачастую учащийся, «упрощая» некоторое выражение, не знает, к какому виду он должен его привести. Ученик раскрывает все скобки, делает приведение подобных членов, а, заглянув в задачник, увидит, что ответ дан в виде произведения. В другой раз он разложит выражение на множители, а ответ окажется в виде многочлена. Особенно этот недостаток был присущ задачнику Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова [150—152]. Поэтому, приступая к выполнению того или иного тождественного преобразования, учащийся должен ясно представлять, для чего он это делает. Если упражнение дается независимо от конкретной задачи, то следует указать, к какому виду требуется привести данное выражение. Если такого указания нет, то учащийся должен быть приучен приводить выражение к определенному «каноническому» («предписанному») виду.

В учебнике П. С. Александрова и А. М. Колмогорова [59] определяются канонические представления для рациональных алгебраических выражений. Нормальным видом целого выражения считается многочлен, а дробного — отношение двух многочленов. При этом имеется в виду такое определение одночлена, каким пользуются в высшей алгебре (произведение коэффициента и нескольких букв, каждая из которых взята в некоторой степени); это определение, а не определение из учебника А. П. Киселева [100, 102] (выражение, в котором последнее по порядку действие не сложение или вычитание) перешло во все новые учебники.*

Согласно определению из учебника [59], имеются выражения, которые не являются ни одночленами, ни многочленами, но могут быть приведены к одному из этих видов или к их отношению. Например, $(a+b)^2$ может быть приведено к виду многочлена, а $\frac{(a+b)x^2}{x}$ — к виду

* В статье проф. Г. Б. Гуревича [273] предлагается это определение считать определением канонического вида одночлена.

$ax+bx$ и т. п. Таким образом, слово «упростить» некоторое выражение должно означать «привести его к каноническому (нормальному) виду».

Для иррациональных выражений нельзя указать один нормальный вид для всех выражений. Для некоторых иррациональных выражений, например вида $a+b\sqrt{c}$ (a, b — рациональные числа, c — фиксированное), И. В. Арнольд [3, стр. 54] предлагает указать, что они образуют поле, и поэтому можно поставить вопрос о приведении результата всех четырех действий (и даже шести действий) к такому же виду. Тем самым осмысленной становится, например, операция «уничтожения иррациональности в знаменателе дроби» или формула сложного радикала. Так, последняя формула дает ответ на вопрос, в каком случае квадратный корень «извлекается» в указанном поле, т. е. когда результат может быть представлен в данном виде. Аналогично можно подойти к полю чисел вида $a+b\sqrt[3]{k}+c\left(\sqrt[3]{k}\right)^2$ или убедиться, что числа вида $a+b\sqrt{k}+c\sqrt{p}$ в общем случае поля не образуют.

Например, рассмотрим числа вида $a+b\sqrt[3]{k}+c\left(\sqrt[3]{k}\right)^2$ (a, b, c — рациональные числа, k — фиксированное число).

Результат любого из четырех действий над двумя числами этого вида дает число того же вида. Произведение двух таких чисел можем представить следующим образом:

$$\left(a_1+b_1\sqrt[3]{k}+c_1\left(\sqrt[3]{k}\right)^2\right)\left(a_2+b_2\sqrt[3]{k}+c_2\left(\sqrt[3]{k}\right)^2\right)=$$

$$=(a_1a_2+b_1c_2k+b_2c_1k)+(a_1b_2+b_2b_1+c_1c_2k)\sqrt[3]{k}+$$

$$+(a_1c_2+a_2c_1+b_1b_2)\left(\sqrt[3]{k}\right)^2.$$

Частное представим в том же виде, если применим операцию «уничтожения иррациональности в знаменателе дроби». Для этого умножим числитель и знаменатель дроби

$$\frac{a_1+b_1\sqrt[3]{k}+c_1\left(\sqrt[3]{k}\right)^2}{a_2+b_2\sqrt[3]{k}+c_2\left(\sqrt[3]{k}\right)^2}$$

на выражение, сопряженное знаменателю в соответствии с тождеством:

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz),$$

т. е. умножим на $\left(a_2^2+b_2^2\left(\sqrt[3]{k}\right)^2+c_2^2k\sqrt[3]{k}-a_2b_2\sqrt[3]{k}-\right.$

$$\left.-a_2c_2\left(\sqrt[3]{k}\right)^2-b_2c_2k\right)=\left(a_2^2-b_2c_2k\right)+\left(c_2^2k-a_2b_2\right)\sqrt[3]{k}+$$

$$+\left(b_2^2-a_2c_2\right)\left(\sqrt[3]{k}\right)^2.$$

В знаменателе получится рациональное число $\left(a_2^3+b_2^3k+c_2^3k^2\right)$, а в числителе — число такого же вида, как и исходные числа, так как сопряженный множитель имеет этот же вид.

Для суммы и разности это свойство очевидно. Таким образом, можно установить, что цель преобразования подобных выражений — приведение их к указанному виду.

Тождественные преобразования становятся целенаправленными, когда они применяются к решению определенной задачи, например к решению неравенства, уравнения или к исследованию функций. Поэтому целесообразно изучать параллельно тождественным преобразованиям решение соответствующего вида уравнений и неравенств и включать в упражнения задачи на исследование функций. В задачниках П. А. Ларичева [109] и П. В. Стратилатова [139] решение уравнений распределено по соответствующим параграфам упражнений на тождественные преобразования.

Применяя то или иное тождество для решения конкретной задачи, необходимо уметь рассматривать его всесторонне. Так, например, формулу $(x-a)(x^2+ax+a^2)$ можно использовать и как формулу сокращенного умножения, и как формулу для деления x^3-a^3 на $(x-a)$, и как формулу для деления x^3-a^3 на (x^2+ax+a^2), и как формулу разложения x^3-a^3 на множители. То или иное ее применение диктуется условием данной задачи. Так, для вычисления выражения удобна форма x^3-a^3; если же это выражение является членом дроби и необходимо произвести сложение двух дробей, то его придется разложить на множители и т. п.

§ 3. Роль основных законов арифметики в обосновании правил тождественных преобразований. Сведение числа правил к минимуму

Тождественные преобразования следует изучать с учащимися так, чтобы у них создались четкие представления о логической основе правил тождественных преобразований. Эти правила являются теоремами, вытекающими из основных законов арифметики, к которым следует присоединить свойства модуля сложения (нуля) и модуля умножения (единицы). При этом надо иметь в виду, что после введения дробей и отрицательных чисел мы получаем поле рациональных чисел, в котором справедливы основные законы арифметики и неограниченно выполнимы операции вычитания и деления (за исключением деления на нуль). Поэтому вывод правил тождественных преобразований после этого носит самый общий характер, т. е. останется точно таким же для любого другого поля чисел, так как правила тождественных преобразований являются лишь логическими следствиями аксиом поля. Именно поэтому все формулы остаются справедливыми после введения иррациональных чисел и получения поля действительных чисел, а также после введения мнимых чисел и построения поля комплексных чисел, и нет необходимости снова их доказывать. Если учащиеся поймут значение основных законов арифметики, то им будет ясна причина совпадения правил действий над иррациональными выражениями с правилами действий над рациональными выражениями и сохранения этих же правил после введения мнимых чисел. Вместе с тем необходимо понимать, что до введения отрицательных чисел и дробей (т. е. пока нет поля чисел) мы не могли бы придать доказательствам общий характер, так как многие формулы были бы справедливы при ограничительных условиях и их пришлось бы впоследствии передоказывать, снимая эти ограничения (относящиеся к невыполнимости деления или вычитания).

Четкое знание основных законов действий и их связей с правилами тождественных преобразований позволит разгрузить память учащихся и будет способствовать сознательному усвоению материала. Число правил, подлежащих запоминанию, может быть ограничено самыми основными, остальные учащиеся могут непосредственно получать из основных правил с помощью законов действий. Например, можно не заучивать особые правила возведения в квадрат и куб степени, частного, произведения и т. п. Эти действия можно будет производить непосредственно на основании определения степени, частного, произведения и определения возведения в квадрат и куб. Впоследствии можно будет установить правила просто для возведения в любую степень.

Учащийся должен уметь по первому требованию учителя обосновать любое правило с помощью законов действий и необходимых определений. Для того чтобы этого добиться, необходимо на первых порах усвоения какого-либо правила не спешить с автоматическим его применением, а решать достаточное число примеров подробно, непосредственно на основании законов действий, т. е. многократно воспроизводить рассуждения, из которых вытекает данное правило. Постепенно учащиеся настолько усвоят эти рассуждения, что смогут многие их звенья проделывать в уме. Таким образом, приобретаются навыки в применении данного правила, которые доводятся до автоматизма. И после этого необходимо время от времени предлагать ученикам объяснять происхождение того или иного правила [163].

К каждому понятию и правилу тождественных преобразований можно подойти путем рассмотрения аналогичного вопроса из курса арифметики. Это значительно облегчает усвоение материала. Много конкретных примеров такого использования арифметических знаний учащихся имеется в книге С. Е. Ляпина и др. «Методика преподавания математики» [31].

В частности, тождественные преобразования можно поставить в связь с представлением одного и того же числа в различных видах в зависимости от действия, которое мы хотим над ним произвести, как например в преобразовании дроби:

$$\frac{24}{132}=\frac{3\cdot4\cdot2}{3\cdot4\cdot11}=\frac{2}{11} \text{ или } 24\cdot9=20\cdot9+4\cdot9 \text{ и т. п.}$$

Приведение подобных членов аналогично сложению именованных чисел и др.

В отдельных примерах следует обращать внимание учащихся на допустимые значения букв в тех или иных формулах при различных тождественных преобразованиях. Об этом полезно говорить с самого начала, при составлении простейших алгебраических выражений. Например, в записи любого двузначного числа $10x+y$ буква x может принимать значения от 1 до 9, а y — от 0 до 9. В записи четного числа $2x$ буква x может быть лишь целым числом и т. д. Эта работа продолжается и в дальнейшем, но следует знать меру, не увлекаться исследованиями ради самих исследований. Во всех упражнениях важно следить за тем, чтобы учащиеся видели за буквой число, вообще — любое, иногда — лишь из определенного множества. Полезно применять числовую проверку изучаемых тождеств, подчеркивая всякий раз ее недостаточность. На первых порах такая неполная проверка скажет учащимся больше, чем логическое доказательство.

В целях функциональной пропедевтики вычислительную работу рекомендуется оформлять в виде табличной записи.

§ 4. Сложение, вычитание и умножение одночленов и многочленов

Необходимо обратить внимание учащихся на двоякий смысл знака действия, имеющий особенно важное значение в алгебре: оперативный и результативный. В противном случае у них вызовет недоумение смысл алгебраических действий, в частности сложение неподобных одночленов. Нужно объяснить, что в алгебре действие может только обозначаться и полученное выражение считается результатом действия; вычисления производятся лишь после того, как будут даны числовые значения букв.

К. С. Барыбин [6] рекомендует ввести в курс алгебры термины, применяемые в некоторых зарубежных учебниках: «вычисленная сумма», «невычисленная сумма» и т. п. Вряд ли есть в этом необходимость. В связи с вопросом об алгебраической операции следует остановиться на статье проф. Г. Б. Гуревича [273], вызвавшей широкую дискуссию [271—282]. Основные положения статьи Г. Б. Гуревича были одобрены всеми его оппонентами (о необходимости повышения логического уровня преподавания алгебры, о важности функционального начала в курсе алгебры, о возможно более раннем решении уравнений и задач на их составление). Многие участники дискуссии признали полезным введение термина «канонический» (или простейший, общий) вид одночлена или многочлена. Как уже отмечалось выше (см. стр. 50), Г. Б. Гуревич предлагает обычный вид одночлена, определенный в учебнике [59], считать каноническим, а одночленом — алгебраическое выражение, в котором производятся одни лишь умножения. Поэтому первым видом изучаемых в начальной алгебре преобразований должно быть приведение одночленов к каноническому виду, причем приведение должно производиться непосредственно на основании сочетательного и переместительного законов умножения без применения специального правила.

Далее Г. Б. Гуревич выдвигает положение, что в начальной алгебре не должно быть действий сложения и вычитания одночленов, поскольку эти действия можно лишь обозначить; произвести же действия можно будет лишь после того, как будут указаны числовые значения букв. Он пишет: «Операции начальной алгебры суть преобразования выражений в тождественно им равные, т. е. замена одного порядка действий другим, ему равносильным (приводящим к тому же численному результату, что и прежний порядок действий); преобразования эти производятся на основе свойств (законов) действий» [273, стр. 41]. Точно так же, утверждает автор, можно обойтись без умножения одночленов, которое состоит в приведении одночлена к каноническому виду. Деление одночленов, как и деление многочленов, должно рассматриваться в теме «Алгебраические дроби».

После приведения одночленов к каноническому виду предлагается доказать теоремы: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $(a^m)^n = a^{mn}$, а затем перейти к приведению многочленов к каноническому виду, которое должно состоять в представлении в каноническом виде всех его членов и приведении подобных членов.

В этих предложениях заслуживает внимания стремление уменьшить число правил, подчеркивание значения основных законов действий, введение термина «теорема» вместо некоторых правил, что указывает на необходимость их доказательства. Достойно одобрения предложение заучивать словесные формулировки не всех формул. Далее в статье предлагается все преобразования целых выражений, кроме рассмотренных выше, называть «раскрытие скобок», хотя автор не возражает и против терминов «сложение многочленов» и «умножение многочленов», которые он считает синонимами термина «раскрытие скобок» в сумме или произведении. Интересно, что предлагается либо не устанавливать здесь особых правил, либо давать их в форме указаний об использовании основных свойств действий.

Так, рекомендуется, например, дать такое правило: «при раскрытии скобок в разности многочленов применяется правило о вычитании суммы». При этом автор не советует упоминать о перемене знаков: об этом учащиеся должны знать из свойств вычитания.

Предложения проф. Гуревича согласуются с высказанными нами выше соображениями о необходимости уменьшения нагрузки на память учеников за счет повышения уровня сознательного усвоения материала: фактически нет особого правила раскрытия скобок, так как оно производится на основе правила сложения или вычитания.

В учебнике [59] доказывается теорема: «число, противоположное сумме чисел, равно сумме всех чисел, противоположных слагаемым данной суммы». Отсюда и получается правило вычитания многочлена (или правило раскрытия скобок в разности многочленов по терминологии Г. Б. Гуревича). В книге [31] для предупреждения ошибки типа $a-(b-c)=a--b+c=$ $=a+b+c$ предлагается сформулировать правило вычитания многочлена следующим образом: «для вычитания многочлена нужно опустить знак вычитания, опустить скобки, в которые заключен вычитаемый многочлен, и приписать каждый член многочлена с противоположным знаком». Ясно, что это правило предполагает механическое усвоение. Предложение Г. Б. Гуревича имеет тенденцию, противоположную, оно акцентирует внимание на сознательности усвоения.

В младших классах не следует увлекаться буквенными показателями степени. При использовании же буквенного показателя следует отмечать, что множество допустимых значений для показателя — это натуральные числа.

При выводе правил умножения многочлена на одночлен и многочлена на многочлен применяются все основные свойства умножения, в частности распределительный закон умножения. Роль законов действий в этих рассуждениях должна каждый раз подчеркиваться. Необходимо обратить внимание на то, что при выводе второго правила распределительный закон умножения применяется дважды. При этом сначала весь многочлен-множитель рассматривается как одно выражение и на него умножается каждый член множимого многочлена. Затем распределительный закон умножения применяется для умножения каждого члена множимого на каждый член множителя:

$$(a + b + c)\ (k + p) = a(k + p) + b(k + p) + \\ + c(k + p) = (ak + ap) + (bk + bp) + (ck + cp) = \\ = ak + ap + bk + bp + ck + cp.$$

Здесь в неявном виде используется правило подстановки в тождество, в котором любую букву везде, где она входит в тождество, можно заменить любой другой буквой или выражением. В данном случае множитель в формуле распределительного закона заменили выражением $(k + p)$. Можно вначале это выражение обозначить одной какой-нибудь буквой, а затем подставить вместо нее данное выражение. Необходимо, чтобы учащиеся упражнялись в употреблении буквы не только для обозначения некоторого числа, но и алгебраического выражения.

В упражнения на умножение одночленов и многочленов полезно включить геометрические задачи на вычисление площадей фигур, размеры которых указаны на чертеже. Такие упражнения имеются в книгах [6, 87]. Необходимо познакомить учащихся, кроме обычного правила умножения многочленов, с более рациональным приемом умножения расположенных многочленов, когда произведение сразу располагается по степеням главной буквы и производится подсчет коэффициента данной степени главной буквы. Например,

$$(3x^2 + 2x - 5)(9x - 7) = 3\cdot 9x^3 + [3\cdot(-7) + 2\cdot 9]\,x^2 + \\ + [2\cdot(-7) + 9\cdot(-5)]\,x + (-5)(-7) = 27x^3 - 3x^2 - 59x + 35.$$

В этой теме учащиеся допускают следующие типичные ошибки:

1) смешение правила умножения степеней с правилом возведения в степень: $5x^2 \cdot 3x^4$ приравнивают $5 \cdot 3 \cdot x^{2 \cdot 4} = 15\, x^8$;

2) распространение правила умножения степеней одного основания на случай умножения степеней разных оснований: $2^5 \cdot 7^3$ считают равным 14^8;

3) сложение показателей степеней при сложении степеней (смешение с правилом умножения степеней): $2^3 + 2^4$ заменяют через $2^{3+4} = 2^7$;

4) неправомерное применение распределительного закона: $(a + b)^2$ заменяют на $a^2 + b^2$.

Предупредить такие ошибки можно, если обращать внимание учащихся на особенности каждого действия, на значение каждого слова в формулировке соответствующего оперативного правила, если заставлять перед началом выполнения преобразования проверить наличие условий для применения соответствующего правила.

§ 5. Формулы сокращенного умножения

Еще в процессе изучения темы «умножение многочленов» можно вывести некоторые формулы сокращенного умножения. Так, выполняя многократно умножение двух одинаковых двучленов, учащиеся замечают, какие члены получаются при таком умножении. Постепенно они отказываются от подробных записей и начинают сразу записывать результат умножения. На этом этапе учитель может позволить ученикам и впредь в аналогичных случаях производить умножение сокращенно. Так можно поступать и с другими формулами. При данной методике учащиеся, упражняясь в умножении многочленов, одновременно твердо усваивают некоторые формулы сокращенного умножения. Здесь применяется прием «заглядывания вперед». Когда не проводится такая подготовительная работа, учащиеся обычно слабо усваивают формулы сокращенного умножения, так как не могут запомнить большое число формул в течение короткого времени, отводимого на их изучение. Изучая эти формулы подряд, учащиеся начинают их смешивать. Не следует также торопить учеников запоминать формулы, пусть они лучше еще раз умножат многочлены непосредственно по общему правилу умножения многочленов.

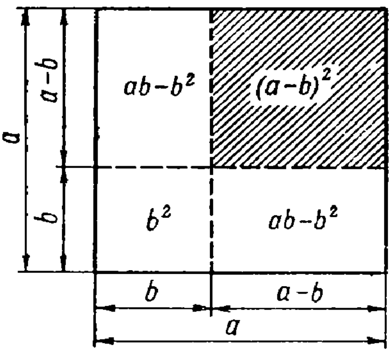
Очень важно уделить внимание вычислению одночленов, входящих в качестве элементов в формулы сокращенного умножения. Такую работу можно оформить в виде следующей таблицы (табл. 2):

Таблица 2

a	b	ab	$2ab$	a^2	b^2	a^3	b^3	$3a^2b$	$3ab^2$

Вместо a и b подставляются сначала числа, затем буквы, различные одночлены и многочлены.

Полезно иллюстрировать геометрически различные преобразования, в частности формулы сокращенного умножения. Особенно это важно для сравнения формул, которые учащиеся часто смешивают не только из-за поспешного изучения, но и в связи с внешним сходством при словесном обозначении. Например, «квадрат разности» и «разность квадратов». Первая формула иллюстрируется рис. 1, а вторая — рис. 2. Если заштрихованную на рис. 2 фигуру, изображающую разность квадратов $a^2—b^2$, разрезать по линии AC, то из полученных двух фигур можно сложить прямоугольник со сторонами $(a+b)$ и $(a—b)$ (рис. 3). Эти два чертежа очень наглядно иллюстрируют формулу «разность квадратов равна произведению суммы оснований на их разность» [10, стр. 239].



$$(a-b)^2=$$
$$=a^2-ab-(ab-b^2)=$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

Рис. 1.

Можно рассмотреть и обычную иллюстрацию этой формулы (рис. 4). Так, если прямоугольник *ANEF*, изображающий произведение $(a+b)\ (a-b)$, разрезать по

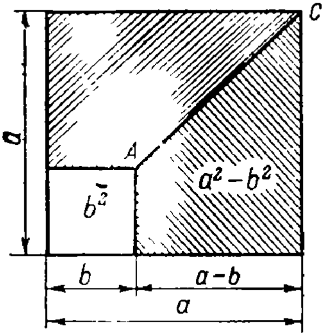


Рис. 2.

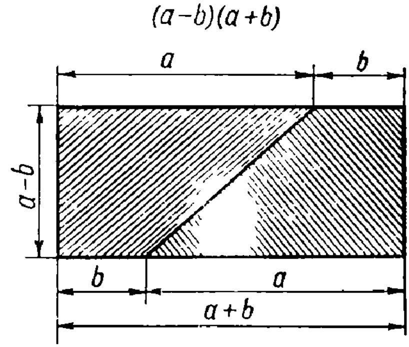
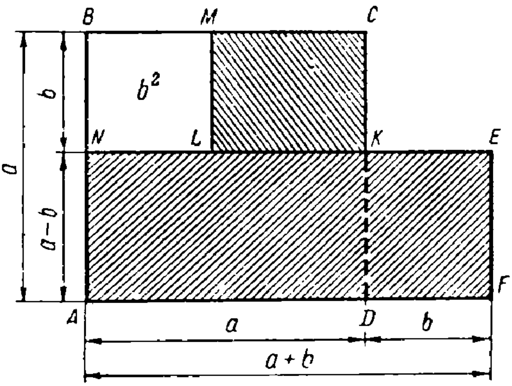


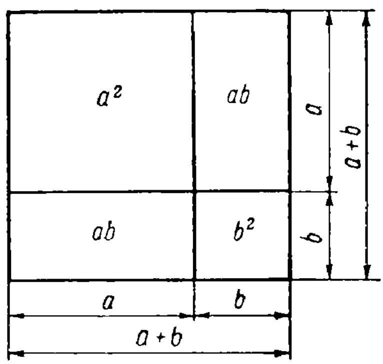
Рис. 3.

линии *KD* и отрезанный прямоугольник *KDFE* приложить к стороне *NK* оставшегося прямоугольника *ANKD*, то получим фигуру, площадь которой будет a^2-b^2



$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Рис. 4.



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Рис. 5.

(*ANLMCKDA*). Формула квадрата суммы иллюстрируется рис. 5. Но еще интереснее модель для демонстрации этой формулы, в которой значения a и b могут изменяться [26]. Эта модель представляет собою прямоугольный футляр с квадратным вырезом. В футляр вставляется прямоугольник с соответствующим чертежом. При выдвигании прямоугольника в квадратном вырезе появляется изменяющийся чертеж, иллюстрирующий формулу квадрата суммы (рис. 6).

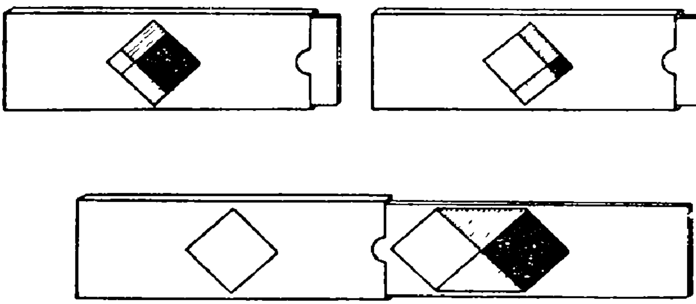


Рис. 6.

Для иллюстрации формул, в которые входят выражения третьей степени, необходимо использовать стереометрические образы. Например, существует модель

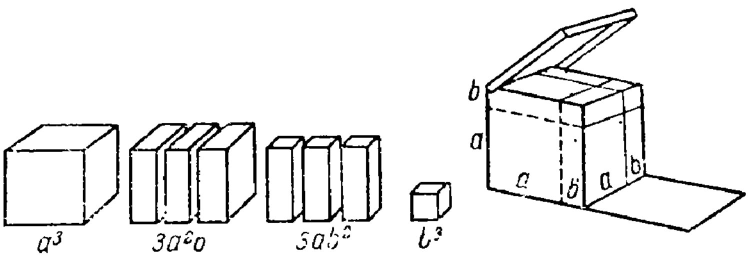


Рис. 7.

формулы куба суммы двух чисел в виде кубического футляра, в который вкладываются куб с ребром a, куб с ребром b, три параллелепипеда с основанием a^2 и высотой b, т. е. объемом a^2b, и три параллелепипеда с основанием b^2 и высотой a, т. е. объемом ab^2. Ребро футляра равно $(a+b)$ (рис. 7) [26].

Аналогично можно иллюстрировать и другие алгебраические тождества, например $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ (рис. 8) или $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$ (рис. 9).

В книге В. М. Брадиса «Методика преподавания математики в средней школе» [10] рекомендуется иллюстрировать алгебраические тождества с помощью несложных арифметических задач, решаемых двумя способами. Например, для формулы $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

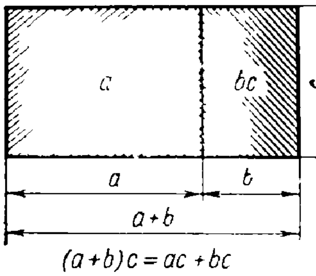


Рис. 8.

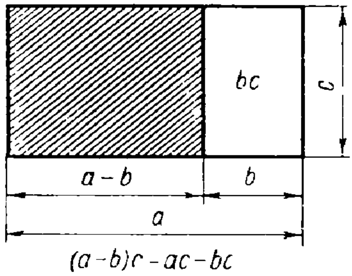


Рис. 9.

можно рассмотреть такую задачу: «Ученик купил a тетрадей. Из них b тетрадей он отдал товарищу. Сколько стоят тетради ученика, если каждая тетрадь стоит c коп.?» Можно число тетрадей ученика умножить на цену одной тетради, а можно из стоимости всех тетрадей вычесть стоимость тетрадей товарища.

Полезно показать, как применяются формулы сокращенного умножения для устных вычислений, хотя основное их применение — облегчение алгебраических преобразований. Так, с помощью формул легко вычислить 29^2, 39^2, $37 \cdot 43$, $37^2 - 13^2$. На первых порах такие вычисления производят большое впечатление на учащихся. Эти примеры могут даже служить введением к формулам сокращенного умножения, если поставить вопрос, как легче вычислить данное выражение.

Более интересное применение формул сокращенного умножения, имеющее и практическое значение, заключается в получении из них формул для приближенных вычислений. Так, например, если a мало, то из формулы квадрата суммы получается приближенная формула

$$(1 + a)^2 \approx 1 + 2a,$$

ибо значением a^2 можно пренебречь. Из формулы куба суммы получается формула при малом a:

$$(1 + a)^3 \approx 1 + 3a.$$

С применением формул приближенных вычислений учащиеся могли уже встретиться, решая упражнения на умножение многочленов. Так, из формулы $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab$ при малых a и b можно было получить формулу $(1 + a)(1 + b) \approx 1 + a + b$.

Для оценки точности полученных формул полезно в отдельных примерах подсчитать абсолютную и относительную погрешность результата.

Эти упражнения очень полезны, они закрепляют и углубляют знания учащихся по приближенным вычислениям, полученным в курсе арифметики, и делают осмысленными упражнения на закрепление формул. В дальнейшем число приближенных формул, с которыми ученики будут знакомы, возрастает. В частности, некоторые новые формулы для приближенных вычислений школьники получат из формулы бинома Ньютона (формулы для приближенного извлечения квадратного и кубического корней и др.).

В книге К. С. Барыбина [6] рекомендуется при изучении формул сокращенного умножения давать упражнения учащимся на выделение полного квадрата. В частности, указывается прием, основанный на применении формулы

$$x + 2hx = (x + h)^2 - h^2.$$

Так, чтобы выделить полный квадрат из выражения

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x,$$

h следует взять равным 3, и выражение примет следующий вид:

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2.$$

Аналогично

$$x^2 + 5x + 7 = (x + 2{,}5)^2 - (2{,}5)^2 + 7.$$

Полезно иметь в виду возражение против термина «неполный квадрат разности» для выражения $a^2 + ab + b^2$, содержащееся в статье [273], и предложение не давать словесной формулировки для этого выражения. В статье справедливо указывается, что, например, и выражение $a^2 + 2ab$ — тоже неполный квадрат суммы.

Проще запомнить формулу $a^3 + b^3$ в таком виде: произведение суммы $a + b$ на выражение $a^2 - ab + b^2$.

Если учесть, что в алгебре вместо двух действий — сложения и вычитания — можно рассматривать одно действие — алгебраическое сложение, то число формул сокращенного умножения можно уменьшить почти вдвое. К сожалению, в практике преподавания эта возможность по традиции не используется. В упомянутой выше статье дана убедительная аргументация в пользу такого сокращения.

§ 6. Деление одночленов и многочленов. Разложение на множители

Правило деления многочлена на одночлен доказывается проверкой на основании распределительного закона умножения или выводится с помощью распределительности деления. Существование и единственность частного и остатка от деления многочлена на многочлен в восьмилетней школе не доказывается. Обычно деление многочлена на многочлен разъясняется с помощью проведения аналогии с делением многозначных чисел. Как для деления целых чисел, так и для деления многочленов целесообразно начать объяснение с примера на умножение и после получения произведения поставить обратную задачу. Можно даже начать с примера на умножение по формулам сокращенного умножения. Таким образом, в первых примерах на деление получаем ответ, который был заранее известен. Благодаря этому учащиеся убедятся, что они достигли цели, и вместе с тем более конкретно представят себе суть задачи деления многочленов. С этой же целью полезно производить проверку умножением.

В учебнике В. Л. Гончарова «Начальная алгебра» [87] проводится фактически общее доказательство, но рассуждение ведется для двух конкретных многочленов. Для хорошо подготовленных учащихся это полезные упражнения на логические рассуждения.

При использовании арифметических аналогий нельзя забывать, как уже говорилось выше, существенных отличий алгебраического деления от арифметического. В качестве примера ошибки, которую можно при этом совершить, приведем рассуждение автора учебника

«Элементарная алгебра» А. П. Киселева [102]. В 25-м издании этого учебника (1913 г.) автор изменил обычное доказательство теоремы Безу и в предисловии объяснил это тем, что оно было ошибочным. Ведь речь идет о делении на двучлен $x-a$, а при обычном доказательстве мы полагаем $x=a$ в тождестве

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R(x). \tag{1}$$

Автору учебника показалось, что, таким образом, речь идет о делении на нуль, что недопустимо. Это заявление вызвало оживленную дискуссию на страницах журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» [228—234], в ходе которой А. П. Киселеву разъяснили, что рассуждение не содержит никаких погрешностей, так как речь идет об алгебраическом тождестве (1), которое не может нарушаться в единственной точке, будучи справедливым на бесконечном множестве точек $x \neq a$ [132].

На конкретном примере можно показать несовпадение понятия делимости в алгебре и арифметике. Так, из теоремы Безу вытекает, что двучлен $x^{2k}+a^{2k}$ не делится (алгебраически) на двучлен $x-a$. Это не значит, что целые числа, получившиеся при подстановке некоторых числовых значений вместо букв в эти двучлены, тоже не будут делиться одно на другое. Если взять $x=3$, $a=1$, $k=1$, то $\frac{3^2+1^2}{3-1}=\frac{10}{2}=5$, т. е. сумма квадратов двух целых чисел разделилась на разность оснований.*

Ученики сами легко подберут как в этом примере, так и в других, аналогичных, числовые значения, при которых деление произойдет нацело (в данном примере достаточно брать в качестве значений для x и a соседние нечетные числа при любом k, так как сумма нечетных чисел всегда четное число), что поможет им лучше уяснить суть дела. Из алгебраической делимости следует арифметическая делимость, если коэффициенты и аргументы принимают целые значения. Если же буквы могут принимать нецелые значения, то вопрос об арифметической делимости вообще не имеет смысла.

* Пример принадлежит проф. И. Я. Депману [25, б]

Полезно сопоставить также понятия целого и дробного выражения с точки зрения алгебры и арифметики.

Тема «Разложение на множители», так же как и тема «Формулы сокращенного умножения», требует много времени для усвоения. Поэтому ее следует подготовить в процессе изучения предыдущих тем: «Умножение», «Формулы сокращенного умножения» и «Деление многочленов». Естественно, что, подготавливая будущую тему, мы содействуем лучшему усвоению материала предыдущих тем, ибо строим изложение так, чтобы не было непроницаемых перегородок между связанными друг с другом вопросами, в частности между прямой и обратной задачами [226, 227].

Разложение на множители можно рассматривать параллельно с соответствующими упражнениями на умножение. Такого рода изучение материала дает больше материала для развития учащихся, чем однообразные упражнения на решение однотипных задач. Так, в качестве обратной задачи умножению по формулам сокращенного умножения можно на основании соответствующей формулы разлагать на множители. При изучении же темы «Разложение на множители» полезно, «забегая вперед», давать упражнения на упрощение алгебраических дробей, на приведение их к общему знаменателю, сложение и вычитание. Учащиеся увидят, что, так же как и в арифметике, разложение на множители имеет важное практическое значение для действия над алгебраическими дробями. (В курсе арифметики полезно параллельно с изучением теории делимости давать упражнения на сокращение дробей и на приведение их к общему знаменателю.) Можно также показать, что иногда разложение на множители дает выражение, более удобное для вычисления. Например, проще вычислить выражение $(a+b)^3$, чем многочлен $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Рассмотрение разложения на множители как задачи, обратной умножению многочленов, полезно не только в порядке подготовки к изучению этой темы, но и в смысле подхода к каждому конкретному приему разложения на множители в самой теме. Эта задача более неопределенная, чем задача нахождения одного из сомножителей по данному произведению и известному сомножителю (задача деления), так как оба сомножителя неизвестны. Сравнение двух задач позволит выяснить суть дела. Одновременно выясняется, что при вынесении за скобки общего множителя второй множитель представляет собою частное от деления всего многочлена на выносимый множитель. Это предупредит типичную ошибку: $ab + ac + a$ заменяют через $a(b + c)$. В данном случае задача разложения на множители совпадает с задачей деления, так как, кроме произведения, известен и один из сомножителей — именно тот, который выносится за скобки. Следует особое внимание уделить вынесению за скобки -1, т. е. перемене знака у всех членов многочлена с постановкой перед скобками минуса. Полезны также упражнения на вынесение необщих множителей за скобки.

Поскольку нельзя привести общее правило для разложения многочлена на множители, то для приобретения некоторого навыка в разложении на множители важна тренировка. Можно также систематизировать попытки в поисках способа разложения, т. е. указать следующий порядок: 1) вынесение за скобки; 2) применение формул сокращенного умножения (если имеем двучлен — пытаться обнаружить разность квадратов, сумму или разность кубов, если имеем трехчлен — поискать квадрат суммы или разности, если четырехчлен — куб суммы или разности); 3) применение способа группировки; 4) разбиение члена на слагаемые с последующей группировкой. Более сложные упражнения по данной теме можно найти в книге С. С. Бронштейна [13], но в восьмилетней школе не следует увлекаться слишком трудными примерами.

§ 7. Алгебраические дроби

Алгебраическая дробь — обобщение понятия арифметической дроби. Членами алгебраической дроби могут быть любые числа: целые, дробные, иррациональные (положительные и отрицательные), мнимые, алгебраические выражения, принимающие любые числовые выражения. Поэтому алгебраические дроби не сохраняют все свойства арифметических. Так, для алгебраической дроби, вообще говоря, неверно утверждение: если числитель больше знаменателя, то дробь больше единицы (можно взять для примера дробь с положительным числителем и отрицательным знаменателем). А если члены дроби — буквенные выражения, то их чаще всего трудно сравнить по величине: результат зависит от числовых значений букв.

Изучая тему «Алгебраические дроби», особенно важно обращать внимание на допустимые значения букв, так как запрещение делить на нуль остается в силе при любых обобщениях понятия о числе.

Все действия над алгебраическими дробями обосновываются исходя из определения дроби как частного от деления двух алгебраических выражений, т. е. в конечном счете как частного двух чисел.

Основное свойство частного (дроби), правило сложения дробей, правило умножения и деления дробей представляют собою теоремы, доказательство которых вполне доступно учащимся. Они должны быть доказаны, как и некоторые прежде упоминавшиеся теоремы. Тем самым преподавание алгебры достигнет того же логического уровня, который соблюдается в начальном преподавании геометрии.

Приведем для примера доказательство основного свойства дроби. Пусть дробь обозначена так: $\frac{a}{b} = k$. По определению дроби как частного можно записать, что $a = bk$. Если $c \neq 0$, то можем умножить обе части полученного равенства на c: $ac = bkc$ или $ac = (bc)k$. Отсюда $\frac{ac}{bc} = k$. Это свойство необходимо для сложения дробей с разными знаменателями. Правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями — следствие распределительности деления.

Как уже говорилось выше, в статье Г. Б. Гуревича [273] предлагается деление одночленов и многочленов отнести к теме «Алгебраические дроби», что должно привести к упрощению изложения. Так сделано в учебниках Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского [143, 144], в которых этот материал изложен достаточно четко.

В указанной статье предлагается основное свойство дроби вывести из правила умножения дробей. Вряд ли это необходимо, так как сложение дробей школьники изучают раньше. Особенное внимание обращается в этой статье на употребление черты вместо знака двоеточия.

При изучении алгебраических дробей необходимо показывать рациональные приемы вычислений. Например, преобразуя сложные дроби, вместо приведения к общему знаменателю обоих членов дроби рациональнее, воспользовавшись основным свойством дроби, умножить оба члена сложной дроби на наименьшее кратное всех знаменателей. Например,

$$1)\quad \frac{x - \frac{1}{1-x}}{1 + \frac{x}{1-x^2}} = \frac{x - x^3 - (1+x)}{1 - x^2 + x} = \frac{x^3+1}{x^2 - x + 1};$$

$$2)\quad \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) : \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) =$$

$$= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)^2 + (x+y)^2}$$

(умножаем делимое и делитель на $(x^2 - y^2)$). Преобразования в числителе и знаменателе полученной дроби могут быть произведены устно. Окончательный ответ:

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Полезно обратить внимание учащихся на то, что при сокращении дробей и приведении к общему знаменателю в алгебре неудобно пользоваться терминами арифметики: «наибольший общий делитель», «наименьшее общее кратное», «наименьший общий знаменатель». Можно говорить о наибольшем показателе степени той или иной буквы, входящей в общий делитель (если этот показатель числовой). Можно говорить о простейшем знаменателе. Например, о выражениях a и a^2 нельзя дать однозначного ответа, какое из них больше. Это зависит от значения, придаваемого букве a. Лучше всего на такой вопрос ответить с помощью построения графиков зависимости $y = x$, $y = x^2$, из которых сразу видно (рис. 10), что при $a < 0$ и при $1 < a < \infty$ $a^2 > a$, а при $0 < a < 1$ $a^2 < a$.

Необходимо иметь в виду типичные ошибки учащихся в преобразовании алгебраических дробей. Одна из ошибок состоит в том, что сокращаются не множители, а слагаемые. Например, $\frac{a^2b+ac}{a+c}$ они приравнивают $\frac{ab+c}{1+c}$. Для предупреждения подобной ошибки на первых порах нужно подробно раскладывать на множители числитель и знаменатель при сокращении дроби. Если ошибка допущена, то для ее разъяснения полезно сделать одну-две числовые подстановки в правую и левую части полученного равенства.

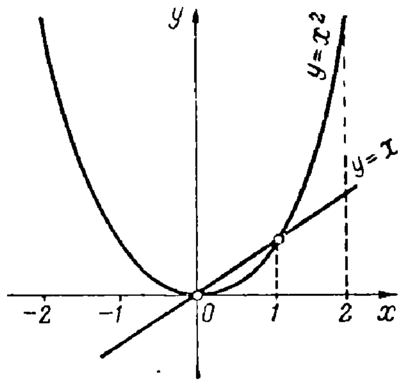


Рис. 10.

Вторая ошибка состоит в следующем. Учащиеся забывают, что знак черты дроби заменяет скобки, и при вычитании дроби они меняют знаки не у всех членов:

$$\frac{2b+c}{a}-\frac{3a-5}{2a} \text{ считают равной } \frac{(2b+c)2-3a-5}{2a}.$$

Для предупреждения этой ошибки полезно сначала ставить в скобки вычитаемый числитель:

$$\frac{2b+c}{a}-\frac{3a-5}{2a}=\frac{(2b+c)2-(3a-5)}{2a}.$$

Встречается ошибка, когда $\frac{a+b}{cd}$ переписывают в виде $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$.

Чтобы убедиться в неправильности преобразования, нужно проделать обратную операцию; как всегда, полезны числовые подстановки.

Ошибка при перемене знаков у членов дроби:

$$\frac{5a}{3x-2}-\frac{2a+3}{2-3x}+\frac{8a-7}{3x+2} \text{ преобразуют в } \frac{5a}{3x-2}+$$
$$+\frac{2a+3}{3x+2}+\frac{8a-7}{3x+2}.$$

Эта ошибка аналогична той, когда ученики при вычитании дроби изменяют знаки не у всех членов:

$$\frac{(a-2)^3}{(2-a)^2} \text{ заменяют через } \frac{(a-2)^3}{-(a-2)^2}.$$

Здесь предварительно следует остановиться на том, что означает перестановка членов квадрата разности:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = [-(b-a)][-(b-a)] =$$
$$= (b-a)^2.$$

Наконец, отметим ошибку, состоящую в том, что вместо единицы, остающейся после сокращений, пишут нуль (эта ошибка связана с ошибкой при вынесении за скобки, когда пропускается единица, остающаяся после вынесения соответствующего множителя): $\frac{3ab}{15a^2b}$ приравнивают нулю (или $5a$).

Интересен общий прием предупреждения типичных ошибок, состоящий в отыскании условий, при которых преобразование, вообще говоря, ошибочное оказывается справедливым [205, 273].

В теме «Алгебраические дроби» вводятся нулевой и отрицательный показатели, причем только как особые обозначения частного от деления любого, отличного от нуля, числа на самое себя и частного от деления единицы на степень ненулевого основания. Не следует в данной теме проводить рассуждения, объясняющие целесообразность принятых определений. Учащиеся младших классов, не искушенные в логических тонкостях, могут принять эти рассуждения за доказательство самих определений, т. е. считать их теоремами. Никакие длительные объяснения здесь не исправят дела, поэтому следует лишь показать удобство использования этих обозначений для записи очень малых чисел и в других случаях. Когда действовала старая учебная программа, сведения об отрицательном и нулевом показателях вводились сразу в полном объеме, ученики знакомились с определением и его мотивировкой. И все же, несмотря на то, что это были учащиеся старших классов (IX, одно время — VIII), они не всегда отчетливо представляли себе, что речь идет об определении, а не о теореме. Опытные учителя знакомили школьников с мотивировкой определений уже после того, как учащиеся хорошо их усвоили. Новая программа позволяет осуществить это еще лучше: мотивировка определения дается в теме «Степенная функция», т. е. спустя два года после первой встречи с этими понятиями.

§ 8. Тождественные преобразования в старших классах

Среди видов тождественных преобразований, изучаемых в старших классах, большое место занимают преобразования иррациональных выражений. Трудности здесь связаны главным образом с многозначностью символа $\sqrt[n]{a}$ и с тем, что в поле действительных чисел этот символ не всегда имеет смысл. Приходится различать случаи, когда показатель корня четный и когда он нечетный. Если показатель корня нечетный, то в поле действительных чисел всегда существует $\sqrt[n]{a}$, который имеет единственное значение. Если $n = 2k$, то при $a<0$ $\sqrt[2k]{a}$ в поле действительных чисел не существует; при $a = 0$ он равен нулю, а при $a > 0$ имеет два значения: $\sqrt[2k]{a}$ и $-\sqrt[2k]{a}$.

Для достижения однозначности корня четной степени вводят понятие арифметического корня (неотрицательное значение радикала из неотрицательного числа). Если радикалы означают арифметические корни, то усложняются преобразования выражений, содержащих радикалы. Результат преобразования будет зависеть от значений, принимаемых буквами. В этом случае необходимо иметь в виду следующую формулу (определение арифметического корня):

$$\sqrt[2k]{[f(x)]^{2k}} = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Основное свойство радикала можно применять, если под радикалом находится неотрицательное число. Формулы вынесения множителя из-под знака радикала и введения множителя под знак радикала справедливы лишь для положительного множителя. Для отрицательного множителя формулы принимают вид:

$$\sqrt[2k]{a^{2k} b} = \sqrt[2k]{|a|^{2k} b} = |a| \sqrt[2k]{b} = \begin{cases} a\sqrt[2k]{b}, & a \geqslant 0, \\ -a\sqrt[2k]{b}, & a < 0, \end{cases}$$

$$a\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k} b}, & a \geqslant 0, \\ -\sqrt[2k]{a^{2k} b}, & a < 0. \end{cases}$$

Так,

$$\sqrt{(3-a)^2(a-1)^6} = \begin{cases} (3-a)(1-a)^3 \text{ при } a \leqslant 1 \text{ и } a \geqslant 3, \\ (3-a)(a-1)^3 \text{ при } 1 \leqslant a \leqslant 3. \end{cases}$$

Для нахождения знака выражения $(3-a)(1-a)^3$ следует рассмотреть три интервала, на которые числовая ось делится корнями многочлена 1 и 3.

В примере с использованием основного свойства корня учащиеся допустят ошибку, если не учтут знака подкоренного выражения.

Рассмотрим пример: выполнить действия и упростить

$$\left(\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{\sqrt{3}}{9}}\right)\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}.$$

Решая этот пример, учащиеся в зависимости от способа решения могут получить различные ответы, если не заметят, что $\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}$ представляет собою отрицательное число и, прежде чем приводить его к показателю 6, не вынесут знак минус за знак радикала. Именно, если умножать, сразу раскрывая скобки, то получим:

$$\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}}\sqrt[6]{(1-3\sqrt{3})^2} +$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(1-3\sqrt{3}\right)} =$$

$$\sqrt[6]{(28+6\sqrt{3})(28-6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} - 1} =$$

$$=\sqrt[6]{676}-\frac{\sqrt[3]{26}}{3}=\sqrt[3]{26}-\frac{\sqrt[3]{26}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{26}.$$

Если сначала привести все корни к показателю 6, затем перемножить, то получим

$$\sqrt[6]{676}+\sqrt[6]{\left(\frac{26}{27}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{26}.$$

Между тем правильное решение должно быть таким:

$$-\sqrt[6]{(28+6\sqrt{3})(28-6\sqrt{3})}+\sqrt{\frac{1}{27}-1}=$$

$$=-\sqrt[3]{26}-\frac{\sqrt[3]{26}}{3}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{26},$$

т. е. прежде чем приводить радикал третьей степени из отрицательного числа к показателю 6, следовало знак минус вынести за знак радикала:

$$\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{(1-3\sqrt{3})^2}.$$

Заметим, что в данном примере учащиеся могли избежать приведения радикала к показателю 6, если бы заметили, что под знаком радикала шестой степени стоит полный квадрат положительного числа, и сократили показатель корня и показатель подкоренного выражения:

$$\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(1+3\sqrt{3})^2}=\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}}.$$

При рассмотрении радикалов четной степени из буквенных выражений необходимо исследовать допустимые значения букв. Так, для выражения $\sqrt{4a^2(1-a^2)}$ допустимыми значениями являются $-1\leqslant a\leqslant 1$. Кроме того, если мы хотим получить арифметическое значение корня, то найдем две формулы:

$$\sqrt{4a^2(1-a^2)}=\begin{cases}2a\sqrt{1-a^2} & \text{при } 0\leqslant a\leqslant 1,\\ -2a\sqrt{1-a^2} & \text{при } -1\leqslant a\leqslant 0.\end{cases}$$

Обратим внимание на вывод правил действий над радикалами. Один из распространенных способов их доказательства состоит в проверке доказываемого тождества возведением в соответствующую степень обеих его частей и получении справедливого равенства, т. е. в проведении аналитического рассуждения, которое, как известно, дает достоверный вывод лишь при условии, что всякий шаг обратим. В нашем случае это будет иметь место, если извлечение корня будет однозначной операцией. Таким образом, рассуждения подобного рода справедливы для арифметических корней и для корня нечетной степени из отрицательного числа. (Основное свойство радикала, как было видно из рассмотренных примеров, следует применять для последнего случая, приводя корень нечетной степени из отрицательного числа к нечетному показателю, а если его нужно применять к четному показателю, то сначала выносят знак минус из-под знака радикала [125, 164].)

В учебнике А. П. Киселева [100, 102], в котором применялся способ проверки доказываемого тождества, делалась оговорка, что в соответствующем разделе будут рассматриваться арифметические значения радикалов, но не выяснялось, почему сделано ограничение. В других учебниках алгебры используется способ доказательства, при котором каждая часть доказываемого тождества обозначается некоторой буквой, применяется определение радикала, в результате чего авторы приходят к выводу, что обе части доказываемого равенства равны. При этом тоже используют однозначность извлечения корня, но не исходят при преобразованиях из доказываемого равенства. Например, в книге В. М. Брадиса и др. «Алгебра» [76] дается следующее доказательство основного свойства радикала.

Нужно доказать, что

$$\sqrt[m]{a^k} = \sqrt[pm]{a^{pk}}.$$

Обозначим $\sqrt[m]{a^k} = x$, а $\sqrt[pm]{a^{pk}} = y$. Тогда, по определению радикала, $a^k = x^m$ и $a^{pk} = y^{pm}$. Возведя первое равенство почленно в степень p, получим $a^{kp} = x^{pm}$. Отсюда $x^{pm} = y^{pm}$. Если числа положительные, то арифметические корни из обеих частей этого тождества будут равны, т. е. $x = y$.

В любом случае необходимо четко выяснить, для какого значения радикала доказывается соответствующее тождество, при каких ограничениях оно установлено, где в рассуждении учитывались указанные ограничения.

В старших классах вполне уместно обратить внимание на доказательство существования арифметического корня из положительного числа, при котором последовательно находятся десятичные знаки корня. Доказательство этой теоремы может быть проведено на частном примере, но в общем виде, что вполне доступно учащимся [65, 76, 81 и др.].

Общее доказательство можно найти в книгах [125, 143, 144 и др.].

Полезно включить в число упражнений не только примеры на уничтожение иррациональности в знаменателе, но и на уничтожение иррациональности в числителе алгебраической дроби. При этом хорошо использовать такие примеры, в которых это преобразование необходимо, как при вычислении некоторых пределов. Пусть надо вычислить

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

Сокращая на $\sqrt{x}-2$ и приводя числитель к рациональному виду, легко вычисляем нужный предел:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Полезно, так же как и при вынесении за скобки, практиковать вынесение из-под знака радикала и необщих множителей, предлагая задачи, где такое преобразование оказывается целесообразным.

Отметим еще, что обычно не ставят в связь с тождественными преобразованиями формулы суммирования арифметической и геометрической прогрессий, а изучая следствия из теоремы Безу, не видят их связи с формулой суммы геометрической прогрессии. А между тем эта формула, если ее читать справа налево, является частным случаем теоремы о делимости разности двух одинаковых степеней на разность их оснований:

$$a(q^k-1):(q-1) = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{k-1}.$$

В заключение приведем некоторые типичные ошибки, допускаемые учащимися в тождественных преобразованиях, изучаемых в старших классах:

1) неправильное извлечение арифметического корня: $\sqrt{a^2}$ считают равным a, тогда как $\sqrt{a^2}=|a|$;

2) незакономерное применение распределительного закона на недистрибутивные операции: а) $\sqrt{a+b}$ извлекают так: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, б) $\lg(a+b)$ записывают в виде $\lg a+\lg b$;

3) ошибки, вызванные нечетким усвоением основных определений:

а) $\frac{a^x}{a^y}$ считают равным $a^{\frac{x}{y}}$, б) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^8}}$ оказывается равным a.

Предупреждение этих ошибок обеспечивается логикой изложения всего курса алгебры, гарантирующей сознательное овладение техникой формальных преобразований.

Глава 4. Методика изучения понятия о числе в средней школе

§ 1. Последовательность расширения понятия о числе

По установившейся традиции, нашедшей отражение и в последних школьных программах, расширение понятия о числе в курсе математики происходит в следующей последовательности: натуральные числа, нуль, дроби (положительные), отрицательные числа и множество рациональных чисел, иррациональные числа и множество действительных чисел, мнимые числа и множество комплексных чисел. Более логична, однако, другая последовательность: натуральные числа, нуль, целые числа, рациональные числа, действительные числа, комплексные числа [48]. При этом выполнялись бы следующие условия. В каждом случае расширения понятия о числе множество ранее известных учащимся чисел оказывается подмножеством полученной более широкой области чисел. Все арифметические операции и отношения, имеющие смысл в первоначальном множестве чисел, определены также и в расширенном множестве чисел. В расширенном числовом множестве выполнима некоторая операция, которая не может быть произведена или не всегда возможна в первоначальном множестве (цель производимого расширения числового множества — сделать выполнимой эту операцию). При этом новое числовое множество является минимальным множеством, для которого справедливы перечисленные требования. Именно поэтому множество натуральных чисел расширяется сначала до множества целых чисел, а затем лишь до множества рациональных чисел.

Указанный порядок расширения понятия о числе применяется в курсах теоретической арифметики. В последнее время выдвигается предложение ввести эту схему и в школьную программу [41, 48, 60, 123]. До недавнего времени считалось установленным, что учащиеся младших классов с большим трудом усваивают отрицательные числа ввиду их абстрактного характера.

Поэтому признавалось желательным возможно более позднее введение отрицательных чисел. По-видимому, одной из причин начала изучения алгебры только во втором полугодии VI класса было также стремление отодвинуть ознакомление с отрицательными числами (о необходимости в самом начале курса алгебры иметь в своем распоряжении отрицательные числа будет сказано при рассмотрении соответствующей темы). Однако эксперименты, проводящиеся под руководством проф. Л. В. Занкова, П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, К. И. Нешкова [27, 123, 176, 183, 204], говорят об обратном. Ведь до этих пор никакого опыта более раннего изучения отрицательных чисел не было, так что убеждение в недоступности этого материала было чисто умозрительным.

Эти эксперименты доказывают, что ученики начальной школы способны овладеть значительно большим и более глубоким объемом материала, чем традиционный, при условии усовершенствования методики обучения, когда главное внимание направлено не на механическое усвоение и работу памяти, а на всестороннее умственное развитие учащихся. Эти исследования, надо думать, окажут решающее влияние на все дальнейшее развитие методики преподавания в школе. Но сейчас мы остановимся лишь на вопросе усовершенствования схемы расширения понятия о числе в средней школе.

Итак, эксперименты убеждают нас, что можно изучать отрицательные числа по крайней мере начиная с IV класса и, следовательно, применять более логичную последовательность расширения понятия о числе. Следует, однако, задуматься над вопросом, почему же раньше никто не пришел к убеждению, что этот материал более доступен, чем представлялось обычно, что необходимо экспериментально проверить эту гипотезу?

Разумеется, здесь сыграли большую роль общий подъем и оживление методической мысли, характерные для последних лет развития нашей школы, выдвижение на первый план различных активных методов работы, в частности перенесение центра тяжести на усовершенствование начальной школы. Но дело и в другом. Если мы хотим получить теоретическим или экспериментальным путем однозначный ответ на вопрос о доступности той или иной темы для учащихся данного возраста, необходимо прежде всего договориться об уровне, на котором раскрывается тема. В рассматриваемом случае, когда приходили к выводу о недоступности изучения отрицательных чисел для учеников младших классов, имели в виду логические вопросы, связанные с принципом перманентности и обоснованием правил действий над новыми числами. Эти вопросы и сейчас относят к темам, изучаемым в старших классах, а в более полном объеме — к обзорным темам выпускного класса (не исключено, что в дальнейшем психологические исследования изменят и это убеждение).

То же самое относится к изучению дробей. Почему изучение дробей более доступно, чем изучение отрицательных чисел? Разумеется, дроби имеют большее применение в практике, чем отрицательные числа, и в этом важная причина их большей доступности. Но не меньшую роль играет то, что при их изучении не ставятся глубокие теоретические вопросы. Учащиеся учатся в основном вычислениям с дробями. Аналогично строится работа с отрицательными числами в указанных экспериментах. Стараются развить практические навыки учащихся в обращении с отрицательными числами, обогатить их представления конкретными примерами использования отрицательных чисел (температурная шкала, числовая прямая и т. п.).

С другой стороны [48], если сравнивать не самые понятия отрицательного (целого) и дробного чисел, а структуры соответствующих числовых множеств, то окажется, что, введя сначала целые отрицательные числа и присоединив их к множеству натуральных чисел и нулю, мы получим множество целых чисел, структура которого значительно проще структуры множества рациональных чисел. Первое множество представляет собою дискретное множество, а второе — множество всюду плотное, свойство же плотности множества учащиеся представляют с трудом. Поскольку в современной математике понятие структуры множества играет основную роль и при каждом расширении понятия о числе мы должны выявить и основные особенности структуры нового расширенного числового множества, получаем еще один аргумент в пользу изменения порядка изучения расширения понятия о числе (однако нельзя согласиться с положением, выдвинутым в работе [48], о том, что главное внимание нужно уделять изучению структуры числового множества, а не самим числам. Важно и то и другое).

В дальнейшем будем рассматривать последовательные этапы расширения понятия о числе в средней школе, придерживаясь второго порядка.

§ 2. Первое расширение понятия о числе. Нуль как число

Первое расширение понятия о числе, которое ученики усваивают после ознакомления с натуральными числами, — это понятие о нуле как числе. Первоначально для учащихся нуль не число, а нечто противоположное понятию числа: знак для обозначения отсутствия числа. Переход этого понятия в свою противоположность происходит незаметно для учеников на протяжении длительного времени. Оперируя с целыми положительными числами, школьники приучаются производить и над нулем те же действия, которые они производят с числами. Вычитая из некоторого числа равное ему, они получают нуль как отрицание наличия числа. Но уже здесь делается первый шаг на пути признания нуля числом, ибо он появляется как результат действия над числами. Далее, производя действия над целыми числами, в записи которых встречается нуль, ученики прибавляют нуль к нулю, вычитают нуль, умножают нуль на число, отличное от нуля, и т. п. Постепенно они научатся производить с нулем такие же действия, как с другими числами, решать примеры, в которых нуль оказывается равноправным компонентом действия над числами, сам является числом. Правда, здесь вступает в силу одно очень важное ограничение, которое сохраняется при всех дальнейших расширениях понятия о числе, снимающих многие ограничения (например, вычитание большего числа из меньшего и т. п.). Это безоговорочное запрещение делить на нуль. Данное условие будет доступно пониманию учащихся, если они хорошо усвоят умножение на нуль и определение деления как обратного действия по отношению к умножению. Задача этого деления состоит в том, чтобы найти такое число x, что его произведение на нуль даст делимое a: $x \cdot 0 = a$. Возможны два случая.

1. Делимое $a \neq 0$. Следовательно, нужно найти число x, произведение которого на нуль дало бы число, от-

личное от нуля. Но такого числа найти невозможно, так как произведение любого числа на нуль равно нулю.

2. Делимое $a = 0$. Отыскивается число, произведение которого с нулем дало бы нуль. Как известно, любое число удовлетворяет этому условию. Таким образом, если мы захотим разделить число на нуль, то либо не найдем ни одного числа, которое могло бы оказаться результатом такого деления, либо можем в качестве такого результата взять любое число, что противоречит требованию однозначности каждой арифметической операции. Отсюда ясно, что на нуль делить нельзя. Это можно разъяснить и учащимся V класса.

В объяснении действия с нулем трудность возникает в одном случае умножения: если при умножении нуля на число, отличное от нуля, легко объяснить результат, сведя дело к сложению нескольких нулей, т. е. опираясь на уже известное определение умножения как сложения равных слагаемых и истолковывая нуль как «ничто», то при умножении на нуль этими средствами не обойтись. Здесь необходимо ввести новое определение. Трудно рассчитывать на то, что ученики младших классов, где уже приходится производить действия с нулем, в состоянии оценить данную логическую ситуацию. В этом и нет особой необходимости. Учащиеся легко соглашаются принять условие, о котором им говорит учитель. Оно кажется им естественным, ибо находится в соответствии с их представлением об обязательности переместительного закона умножения, а возможно, в еще большей степени с представлением о нуле как пустом месте. В методике В. Г. Чичигина [51] рекомендуется сделать так, чтобы учащиеся приняли естественным это условие и одновременно условие относительно умножения на единицу путем распространения и на эти случаи свойства монотонности умножения. Будем рассматривать, как изменяется произведение при уменьшении множителя на единицу:

$$12 \cdot 7 = 84; \qquad 12 \cdot 4 = 48;$$
$$12 \cdot 6 = 72; \qquad 12 \cdot 3 = 36;$$
$$12 \cdot 5 = 60; \qquad 12 \cdot 2 = 24.$$

Замечаем, что произведение все время уменьшается на 12. Естественно, что следующее произведение должно оказаться равным 12, а следующее за ним — нулю:

$$12 \cdot 1 = 12; \qquad 12 \cdot 0 = 0.$$

Это рассуждение, как и ссылка на переместительный закон умножения, показывает целесообразность принятия «условий» (определений): $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$, если мы хотим сохранить переместительный закон умножения или монотонность умножения и для новых случаев умножения.

Учащиеся склонны считать эти предложения не определениями, а следствиями основных законов арифметики, в незыблемости которых они убеждены, поскольку не встречали ничего иного. Рассуждения, выясняющие целесообразность определения, представляются им его доказательством. В этом нет ничего удивительного, если мы вспомним, что и в истории математики дело обстояло именно таким образом. Ученые математики прошлого так же, не задумываясь, переносили основные законы арифметики и на область новых чисел и выводили из этих законов правила действия над новыми числами. Так поступал и Леонард Эйлер при установлении правила умножения на дробь, на отрицательное число и в других случаях [34, стр. 66, 103].

Задуматься над законностью подобных рассуждений пришлось лишь тогда, когда оказалось невозможным сохранить все известные свойства чисел в новой числовой области. Интересен в этом отношении знаменитый спор о значении произведения $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$, где a и b — положительные числа. Эйлер полагал, что это произведение равно $+\sqrt{ab}$ Потом он добавил, что это произведение может быть равным как $+\sqrt{ab}$, так и $-\sqrt{ab}$. С этим не согласились Бернулли, Безу и некоторые другие математики [34, стр. 146—147]. Ошибка здесь заключалась в применении правила умножения радикалов из положительных чисел при умножении мнимых чисел. В ту эпоху еще не была выяснена логическая основа теории мнимых чисел.

Как же излагается данный вопрос в школьном учебнике арифметики? Здесь сначала определяются действия над натуральными числами, а основные законы действий оказываются следствиями этих определений. Действие умножения на нуль и единицу не может быть истолковано принятым определением умножения как повторного сложения, для этих случаев необходимо дополнительное определение. Правило умножения на нуль и единицу невозможно вывести из основных законов арифметики, поскольку эти законы установлены пока лишь для тех случаев умножения, которые подходят под первоначальное определение. До тех пор, пока не определены правила умножения для новых случаев, неизвестно, обладает ли умножение на нуль и единицу переместительным или иными свойствами.

Мы уже отметили, что учащимся эти тонкости непонятны, и нет нужды вначале их подчеркивать. Лучше после краткого разъяснения, подобного приведенному, быстрее перейти к упражнениям на оперирование новыми определениями. В процессе такой работы ученики усвоят больше, чем путем долгих объяснений малодоступных вопросов.

Для учителя важно хорошо понимать логическую сторону этого вопроса, уметь критически оценить материал различных учебников, в частности, видеть логическую ошибку, допускаемую в некоторых старых учебниках, когда основные законы действия считаются справедливыми без необходимых обоснований [134].

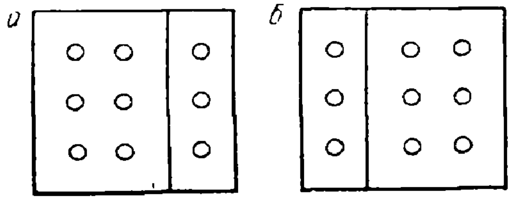
Кроме того, из сказанного можно сделать и другой методический вывод. Поскольку справедливость основных законов действий не вызывает у учащихся сомнений, то не лучше ли будет именно эти законы принять в качестве аксиом, а из них выводить новые правила действий? Ученики опять-таки не до конца поймут, что это еще одно условие, зато остальное не вызовет никаких затруднений. Именно по такому пути пошел в своем руководстве известный французский математик Эмиль Борель, написавший свои книги в духе реформистского движения начала XX в. [75].

Такой подход к вопросу следует учитывать в преподавательской практике. И поскольку логические тонкости учащиеся младших классов до конца не поймут, при обоих вариантах изложения, возможно, следует отдать предпочтение последнему, как более доступному.

§ 3. Общие идеи, связанные с развитием понятия о числе

а) Основные законы арифметики. Принцип перманентности

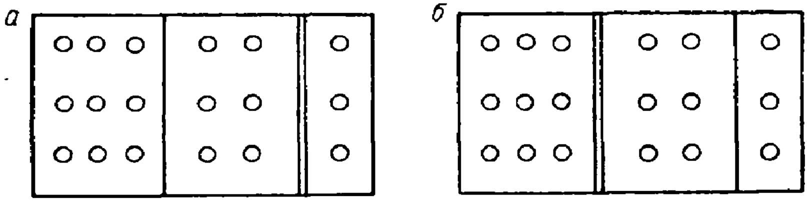
Все основные вопросы, которые возникают на каждом этапе расширения понятия о числе, встречаются уже при первом расширении понятия о числе. Это прежде всего принцип перманентности. Он лежит в основе новых определений. Уже здесь оказывается невозможным сохранить все свойства действий, а именно приходится исключить действие деления для нового числа. Далее, учащимся трудно отличить определение от теоремы, они считают новые правила доказанными, а не принятыми условно. Собственно говоря, для них основные законы



$a+b=b+a$

Рис. 11.

арифметики, как и аксиомы геометрии, настолько «очевидны», что они не видят необходимости их доказывать или принимать условно. Напротив, новые правила действий кажутся ученикам менее наглядными, и они испытывают потребность в их обосновании. С этим необходимо считаться в преподавании.

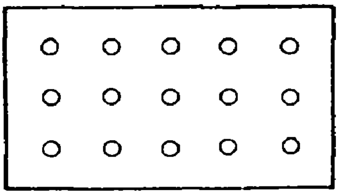


$(a+b)+c=a+(b+c)$

Рис. 12.

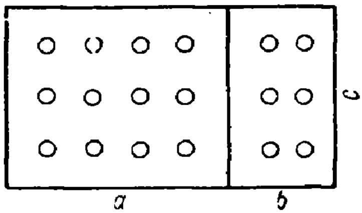
Поскольку основные законы арифметики играют главную роль в расширении понятия о числе, следует уделять им достаточное внимание на протяжении всего курса. В арифметике эти законы применяются для устных вычислений и обоснования правил действий над положительными числами. Им необходимо дать наглядное геометрическое представление. Для этого существуют различные приемы. Так, Ж. Таннери [50, стр. 37—38] предложил рассмотреть на чертеже собрание предметов, подсчет числа которых не зависит от порядка сложения. На рис. 11, *а, б* достаточно стереть вертикальную черту, чтобы заметить, что в обоих случаях получится одна и та же сумма.

Так же легко проиллюстрировать сочетательный закон сложения (рис. 12, *а, б*) и законы умножения (рис. 13, 14, 15).



$a \cdot b = b \cdot a$

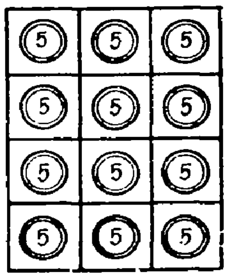
Рис. 13.



$(a+b)c = ac + bc$

Рис. 14.

Другой способ иллюстрации законов действий состоит в изображении слагаемых отрезками или прямоугольниками для законов сложения (рис. 16, *а, б*, 17, *а, б*), а для законов умножения — в изображении результатов действия площадями прямоугольников и объемами прямоугольных параллелепипедов (рис. 18, 19; см. рис. 8).



$5(4 \cdot 3) = (5 \cdot 4)3 = (5 \cdot 3)4 = 5 \cdot 4 \cdot 3,$
$a(bc) = (ab)c = (ac)b = abc$

Рис. 15.

Удобен способ, предложенный П. А. Компанийцем [317, стр. 113—114] для изучения свойств произведения. Этот метод состоит в вычислении площади прямоугольника, разбитого на квадратные единицы, различными способами (рис. 20, *а, б*).

Имея в виду дальнейшее развитие понятия о числе и математической операции, необходимо уже при изучении основных законов действий над натуральными числами подчеркивать аналогию, имеющуюся в действиях сложения и умножения, вычитания и деления. Переместительный закон сложения соответствует переместительному закону умножения. Для обоих действий применим и сочетательный закон. Ни вычитание, ни деление не обладают переместительным свойством. Уже упоминалось о желательности подчеркнуть аналогию в изменении суммы и произведения в зависимости от компонентов действий, равно как аналогию в изменении разности и частного в зависимости от того, как меняются

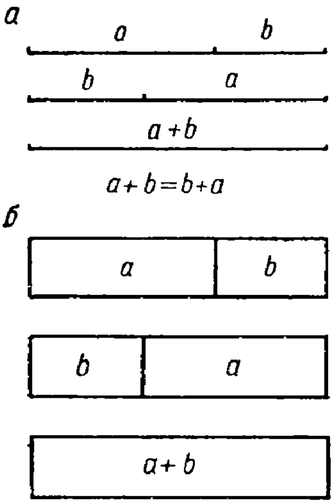


Рис. 16.

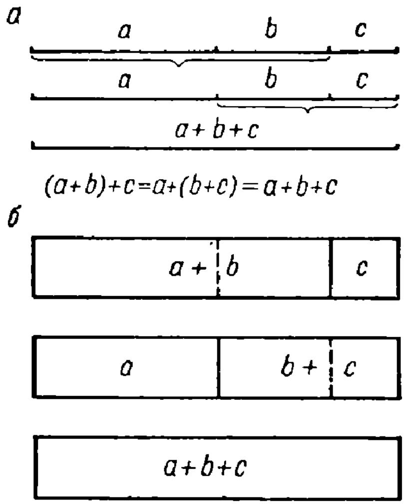


Рис. 17.

члены действий. Так же полезно подчеркнуть аналогию между нулем и единицей, модулями сложения и умножения. Все это облегчит усвоение материала и подготовит к пониманию важнейшего понятия математики — идеи изоморфизма. Ведь все отмеченные аналогии суть не что иное, как проявления изоморфизма между аддитивной и мультипликативной числовыми группами.

Рассмотрим более подробно принцип перманентности, лежащий в основе расширений понятия о числе. Этот принцип сводится к следующим требованиям.

1. Правила действий над новыми числами и правила сравнения их между собою и со старыми числами определяются так, что для них сохраняются основные законы арифметических действий. Речь идет именно об

основных законах, так как все свойства сохранить не удается.

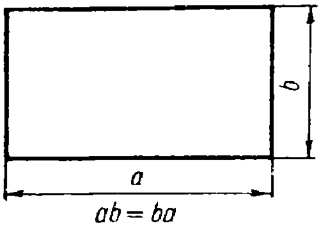


Рис. 18.

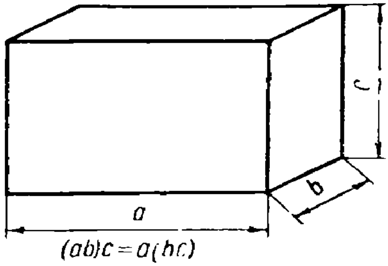


Рис. 19.

2. Правила действий над прежними числами оказываются частным случаем правил действий над новыми числами, а множество прежде введенных чисел оказывается подмножеством расширенного множества, полученного присоединением к прежним числам новых чисел.

3. Задачи, решавшиеся с помощью некоторого действия, когда данными были числа первоначального числового множества, должны решаться тем же действием и в том случае когда данные берутся из расширенного числового множества.

Из этих положений последнее, как увидим дальше, чаще всего применяется в практике преподавания, хотя является наиболее искусственным с точки зрения учащихся.

Значение принципа перманентности легко уяснить с формальной точки зрения. Ясно, что, сохраняя основ-

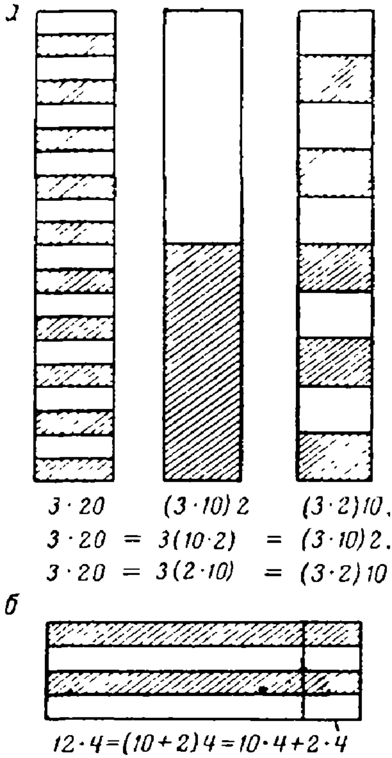


Рис. 20.

ные законы арифметики, мы оставляем весь формальный аппарат арифметики и алгебры. Если бы при каждом расширении понятия о числе изменялись законы действий, то мы должны были иметь столько же различных арифметик и алгебр, сколько различных категорий чисел мы ввели При этом усложнился бы весь математический аппарат. Однако математический аппарат не создается ради него самого. Он служит для изучения явлений природы. Если старый математический аппарат не достаточен для изучения некоторых закономерностей, то приходится поступиться удобствами этого инструмента и построить новый, как и делается при введении комплексных чисел, кватернионов и т. п. В чем же объективный смысл принципа перманентности, постоянства основных законов арифметики, установленных вначале только для операций с натуральными числами? И почему почти всегда удается сохранить эти законы, хотя вводятся числа, на первый взгляд кажущиеся прямой противоположностью ранее известным числам?

Дело в том, что числа мы используем для характеристики значений различных величин, а действия над числами соответствуют действиям над этими значениями величин. Так, если два числа характеризуют два значения длины отрезка, то сумма чисел измеряет отрезок, представляющий сумму двух отрезков, длины которых характеризуются слагаемыми числами. Переместительность сложения чисел является отражением свойства переместительности сложения отрезков. Это общее свойство суммы отрезков, не зависящее от того, какие отрезки мы уже научились характеризовать числами, а какие нет. И поскольку мы в дальнейшем вводим числа и действия над ними для характеристики значений тех же величин и действий над ними (например, сумма чисел должна по-прежнему характеризовать сумму отрезков), естественно, что свойство переместительности должно сохраниться и для сложения отрицательных, дробных и иррациональных чисел. Поскольку этим же свойством обладает и сумма векторов, то это свойство сохранится и для суммы комплексных чисел. То же относится и к другим действиям и их свойствам. Разумеется, длина отрезка — только один из примеров величин, изоморфных множеству действительных чисел, с помощью которого эти величины могут изучаться.

Таким образом, смысл принципа перманентности состоит в том, что, создавая теорию натуральных чисел, мы уже абстрагировали вместе с понятием числа и действия над числами и самые общие свойства этих действий, которые относятся к действиям над любыми значениями величин и не зависят от способа их измерения.

В выпускном классе в обзорных лекциях можно подвести итог развитию понятия о числе и выяснить значение принципа перманентности в его различных аспектах.

б) Операторное истолкование числа

Другая общая идея, имеющая важное значение для расширения понятия о числе,— это операторное истолкование числа. Ее полезно разъяснить уже при изучении действий над натуральными числами. Суть идеи состоит в следующем. В каждой арифметической операции участвуют два компонента. И хотя с формальной точки зрения многие действия являются коммутативными и, следовательно, компоненты действия в них равноправны, при конкретном истолковании смысла действия эти компоненты играют различную роль. Так, одно из чисел как бы играет пассивную роль, над ним производится действие, которое указывается вторым компонентом. Этот компонент является активным числом действия, оператором, обозначающим, что надо сделать с первым компонентом, чтобы получить результат действия. Проследим роль компонентов в отдельных математических операциях.

Сложение: $a + b = c$. Здесь первое слагаемое следует рассматривать как пассивный компонент сложения. Над ним производится действие, а именно: к нему прибавляется второе слагаемое, являющееся указателем действия. Оно показывает, сколько единиц следует прибавить («присчитать») к первому слагаемому.

Вычитание: $a - b = c$. Здесь даже термины «вычитаемое» и «уменьшаемое» показывают неравноправность компонентов. Действие производится над уменьшаемым. Вычитаемое является оператором. Оно показывает, на сколько единиц следует уменьшить уменьшаемое.

Умножение: $a \cdot b = c$. Здесь также сами термины «множимое» (то, что множится) и «множитель» (тот, который «множит») подчеркивают различную роль сомножителей. Множимое является пассивным участником действия, множитель указывает, сколько раз множимое нужно повторить слагаемым, т. е. является оператором.

Деление: $a : b = c$. Термином «делимое» отмечают пассивное число в действии, а термином «делитель» — оператор, показывающий, на сколько равных частей делят делимое. Делитель может иметь и другое конкретное истолкование, если мы имеем деление по содержанию. Тогда делитель обозначает число, «измеряющее» делимое; при делении узнаем, сколько раз делитель содержится в делимом в качестве слагаемого.

Эти два конкретных истолкования деления стоят в прямой связи с различной ролью сомножителей. При делении на равные части мы по известному произведению и данному множителю находим неизвестное множимое. При делении по содержанию мы по известным произведению и множимому определяем неизвестный множитель. Поскольку умножение (как и сложение) обладает переместительным свойством, то имеем одно обратное действие деления (как и вычитание), хотя смысл этого действия может быть различным.

В книге В. Г. Чичигина [51, стр. 51—53] показывается, как разъяснить учащимся, почему две различные конкретные задачи на деление по содержанию и на равные части можно решать одинаково. В этом пособии рассматривается следующая задача: «Служащий ежемесячно вносил в сберкассу по 12 руб. и накопил сумму в 72 руб. (без процентов) для летнего отдыха Сколько месяцев он делал взносы?»

Учащиеся записывают решение задачи в виде

$$72 \text{ руб.} : 12 \text{ руб.} = 6 \text{ (мес.)}.$$

Выясняют, что поскольку умножение — это повторное сложение, то деление можно произвести как повторное вычитание:

$$72-12-12-12-12-12-12 = 0.$$

Таким образом, делением по произведению и множимому находится множитель, или число, на которое нужно умножить делитель, чтобы получить делимое, т. е. узнается, сколько раз одно число содержится в другом.

Затем решается задача: «В магазин доставили 72 *кг* конфет в 12 одинаковых пакетах. Сколько килограммов конфет было в каждом пакете?»

Учащиеся записывают решение:

$$72 \textit{ кг} : 12 = 6 \textit{ кг}.$$

Здесь по произведению и множителю необходимо найти множимое, т. е. разделить число на равные части. Но и эту задачу можно решить вычитанием, т. е. свести к делению по содержанию: положим в каждый пакет по 1 *кг* конфет, тогда из общего числа конфет останется 72—12 = 60 (*кг*). Таким образом, в каждом пакете будет столько килограммов конфет, сколько раз 12 содержится в 72.

Свойство переместительности умножения и позволяет обе конкретные задачи на деление истолковать одинаково и решать одним алгоритмом деления.

Возведение в степень: $a^b = c$. Здесь основание степени является пассивным компонентом, а показатель степени — оператором, указывающим, сколько раз нужно основание степени взять сомножителем. Поскольку действие некоммутативно, то существуют два обратных действия: извлечение корня (нахождение основания по степени и показателю степени) и логарифмирование (нахождение показателя степени по степени и основанию степени).

Выяснение конкретного смысла каждого действия и роли компонентов поможет в дальнейшем выяснить смысл действий над новыми числами.

Этой же цели служит введение изображения чисел на числовом луче уже при изучении натуральных чисел и действий над натуральными числами. При этом можно конкретно представить различие между пассивным и активным компонентами действия. Вначале следует ограничиться рассмотрением операторов (переходов) первой ступени. При изучении отрицательных чисел полезно дать и понятие об операторе второй ступени.

Уже в начальной школе при решении арифметических задач учащиеся встречались с изображением данных в задаче чисел с помощью отрезков. Поэтому у них не вызовет затруднений изображение различных чисел на числовом луче, где выбрана начальная точка и определенный отрезок взят в качестве единицы измерения. Поставив в конце отрезков числа, выражающие их длины, они получат числовой луч, числа на котором выражают расстояния соответствующих точек от начала отсчета (рис. 21).

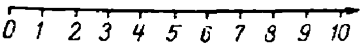
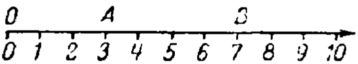
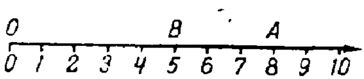


Рис. 21.



$OA = a_0 = 3$,
$AB = b_n = 4$,
$OB = (a+b)_0 = 7$

Рис. 22.



$OA = a_0 = 8$,
$BA = b_n = 3$,
$OB = (a-b)_0 = 5$

Рис. 23.

После ряда упражнений по нанесению точек на числовой луч и чтения отметок на числовом луче следует познакомить учащихся и с изображением действий на числовом луче. Для истолкования действий первой ступени можно ввести понятие об операторах первой ступени как о «переходах» на числовом луче. Сложение двух отметок на числовом луче нельзя конкретно истолковать: сложив расстояния точек A и B от начала отсчета, мы ничего не узнаем. Эта сумма не имеет конкретного смысла. Но совершенно понятно, что если мы к расстоянию точки A от начала отсчета прибавим «переход» в том же направлении на несколько единиц, то узнаем, на каком расстоянии от начала отсчета мы окажемся, совершив из точки A переход на соответствующее число шагов.

Итак, первое слагаемое — отметка на числовом луче, а второе — переход. Сумма означает новую отметку на числовом луче:

$$a_о + b_п = (a + b)_о,$$

где о — отметка на числовом луче, а п — переход в b шагов (единиц) на числовом луче (рис. 22).

Легко также истолковать сложение двух переходов на числовом луче как суммарный переход:

$$a_п + b_п = (a + b)_п.$$

Соответственно этому истолковывается и иллюстрируется на числовом луче операция вычитания. Вычитая из отметки $a_о$ переход $b_п$, узнаем, в какой точке $(a - b)_о$ мы находились до совершения перехода $b_п$. Чтобы найти эту точку на числовом луче, мы должны передвинуться из точки $a_о$ влево на $b_п$ шагов (рис. 23). Вычитая из перехода $a_п$ переход $b_п$, определяем первый переход, который был совершен до перехода $b_п$. Наконец, вычитая из одной отметки другую, узнаем, какой переход нужно совершить, чтобы от одной точки перейти к другой.

В результате упражнений учащиеся должны усвоить, что для прибавления нужно передвинуться на числовом луче в том же направлении, в котором откладывается расстояние, а для вычитания — влево от отметки, т. е. в противоположном направлении. Уяснение этих положений значительно облегчит в дальнейшем конкретное истолкование действий над отрицательными числами [2, 3, 87].

§ 4. Введение отрицательных чисел. Множество целых чисел

Как известно из истории математики, отрицательные числа сначала считались фиктивными, ложными. Ими пользовались как удобными символами при решении уравнений, отрицательный же корень уравнения отбрасывался [34, стр. 84]. Конкретное истолкование отрицательных чисел впервые дали индийские математики: отрицательными числами обозначали «долг», а положительными — «имущество». Они признали также существование двух корней квадратного уравнения, сделав шаг вперед по сравнению с Диофантом. Так, Бхаскара

Ачария (XII в.) для уравнения $x^2-45x=250$ дает решение $x=50$ и $x=-5$. «Но,— говорит он,— второго значения в данном случае брать не следует, так как оно не соответствует условию задачи», и добавляет: «Люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел» [29, стр. 108].

Полные права отрицательные числа получили лишь после опубликования «Геометрии» Рене Декарта (1637), который ввел отрицательные координаты, т. е. с тех пор, как они стали служить числовыми характеристиками конкретных величин, имеющих два противоположных направления.

Отсюда можно сделать два методических вывода. Первый состоит в том, что эта тема требует довольно высокого логического развития учеников. Учащимся было бы легче ее усвоить, если придерживаться исторического порядка: окажется, что мы встречаемся с затруднениями в решении уравнений и появится необходимость в усовершенствовании математического аппарата, с тем чтобы операция вычитания стала неограниченно выполнимой. Тогда учащиеся сумеют оценить необходимость расширения понятия числа и будут более подготовлены к усвоению этого вопроса, так как к тому времени достаточно продвинутся в изучении алгебры. Попытка подобного построения теории отрицательных чисел имелась в учебнике В. Фридмана [145].

Однако такое изложение требует значительно большего времени, чем обычное (т. е. по действующей программе). Дело в том, что, доказывая формулы алгебры до введения отрицательных чисел, мы везде, где встречается операция вычитания, должны делать оговорку: «при условии, что вычитаемое не больше уменьшаемого». После изучения отрицательных чисел придется все формулы передоказывать, снимая прежнее ограничение. Вводя же отрицательные числа в начале курса, мы получаем в свое распоряжение числовое поле со всеми основными законами действий (имеется в виду, что к началу курса алгебры учащиеся уже знают дроби). Формальные выводы правил тождественных преобразований после этого носят вполне общий характер и переносятся на все дальнейшие более широкие числовые поля, которые мы получим после добавления иррациональных, а затем мнимых чисел. Благодаря этому мы в дальнейшем и не возвращаемся к правилам тождественных преобразований, а лишь выясняем, что в расширенном числовом множестве сохраняются основные законы действий.

Этими соображениями и диктуется раннее введение отрицательных чисел. Поэтому не следует добиваться усвоения учащимися младших классов принципиальных логических вопросов, связанных с теорией отрицательных чисел, оставляя это для старших классов. Зато здесь важна максимальная конкретизация всех изучаемых понятий. Это второй методический вывод.

а) Различные приемы введения отрицательных чисел

Научный способ изложения в форме теории пар неприемлем для первоначального ознакомления с теорией целых чисел. В дореволюционных изданиях учебника А. П. Киселева [102] была попытка такого изложения, известная под названием «условного метода изложения». Рассматривалась «невозможная разность», например 3—7. Далее говорилось следующее: из 3 нельзя вычесть 7, но мы «условимся» вычитать в этом случае из 7 число 3 и перед полученной разностью ставить знак минус, полученное число будет числом отрицательным. Далее принимался ряд «условий» относительно действий с введенными отрицательными числами.

Такое изложение подверглось резкой критике со стороны передовых учителей математики, и в 1911 г. А. П. Киселев от него отказался.

С тех пор в учебнике А. П. Киселева понятие об отрицательных числах вводится в связи с рассмотрением величин, которые имеют противоположный смысл (долг— имущество, путь вверх — вниз, влево — вправо и т. п.).

Отметим, что множество направленных величин весьма ограниченно, ибо многие величины могут отсчитываться от абсолютного нуля, например можно пользоваться шкалой абсолютных температур и обойтись без отрицательных чисел для характеристики температурных состояний. Нет также необходимости вводить отрицательные числа для сокращения речи при обозначении величин, чтобы, например, вместо предложения «3 *см* вправо или 3 *см* влево» записать — 3 *см* или + 3 *см*.

Однако, рассматривая не только состояния (значения) различных величин, но и их изменения, мы получим неограниченное множество направленных величин, ибо даже у величин, имеющих абсолютный нуль (например, посевная площадь), изменения могут происходить в двух направлениях. Для сравнения двух значений величины, т. е. для нахождения числовой характеристики изменения состояния величины, надо уметь производить вычитание неограниченно. Отсюда вытекает широкая применимость отрицательных чисел для изучения изменения величин.

Поэтому в учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [59, стр. 32—34] отрицательные числа вводятся для характеристики изменений (увеличений и уменьшений) величин. Приведем пример из этого учебника.

«Будем высоту, на которую поднялся стратостат, вылетевший в 6 часов утра, измерять в метрах. Допустим, что эта высота изменялась так:

Момент времени	Высота в метрах
6 часов утра	0
9 часов утра	12 000
12 часов дня	20 000
1 час дня	22 000
2 часа дня	22 000
3 часа дня	20 000
6 часов дня	0

При этом высота в 0 *м*, указанная для 6 часов утра, обозначает, что в момент вылета стратостат еще совсем не успел подняться. Будем теперь подсчитывать изменения высоты за разные промежутки времени:

Момент времени	Изменение высоты
с 6 часов утра до 9 часов утра	увеличение на 12 000
с 9 часов утра до 12 часов дня	увеличение на 8 000
с 12 часов дня до 1 часа дня	увеличение на 2 000
с 1 часа дня до 2 часов дня	высота не изменилась
с 2 часов дня до 3 часов дня	уменьшение на 2 000
с 3 часов дня до 6 часов дня	уменьшение на 20 000

Мы видим, что с 12 часов дня до 1 часа дня высота изменилась на 2000 *м*. С 2 часов дня до 3 часов дня высота изменилась тоже на 2000 *м*. Но в первом случае изменение состояло в *увеличении* на 2000 *м*, а во втором — в *уменьшении* на 2000 *м*. Для обозначения этих двух разных изменений у нас имеется одно единственное число 2000. Это различие приходится выражать словами, говоря в одном случае «увеличение на 2000 *м*», а в другом —«уменьшение на 2000 *м*».

Мы видим, что известных из арифметики положительных чисел недостаточно, чтобы выражать *изменения* величин без дополнительных приписок «увеличение» и «уменьшение».

Существует другой, гораздо более удобный, способ выражения изменений величин. По этому способу обычные *положительные* числа употребляются только для выражения *увеличений*. Для выражения же *уменьшений* употребляются особые новые числа, называемые *отрицательными*. Например, увеличение высоты на 2000 *м* выражается просто числом 2000, без приписки «увеличение». Уменьшение же высоты на 2000 *м* выражается новым числом, которое называется *минус две тысячи* и пишется —2000...

Число *нуль* будет употребляться для выражения отсутствия как увеличения, так и уменьшения.

Перепишем по новому способу таблицу изменений высоты стратостата:

Момент времени	Изменение высоты в метрах
с 6 часов утра до 9 часов утра	12 000
с 9 часов утра до 12 часов дня	8 000
с 12 часов дня до 1 часа дня	2 000
с 1 часа дня до 2 часов дня	0
с 2 часов дня до 3 часов дня	—2 000
с 3 часов дня до 6 часов дня	—20 000»

В этом учебнике дается следующее определение: «Положительные числа служат для выражения увеличений величин. Для выражения уменьшений величин вводятся новые, отрицательные числа. При этом каждому положительному числу a соответствует свое особое отрицательное число $—a$, выражающее уменьшение на a единиц измерения».

Попытки использования идеи изменения величины встречались в некоторых старых учебниках, где положительные и отрицательные числа рассматривались как «прибавляемые» и «вычитаемые», однако использование «вычитаемых» без «уменьшаемых» являлось довольно искусственным.

В учебнике В. Л. Гончарова [87] в основу знакомства с отрицательными числами положены графические представления, отрицательные числа вводятся как отметки точек на оси. Предварительно проделывается достаточное число упражнений на числовом луче. Затем откладываются отрезки влево от точки 0 и полученные точки обозначаются значками -1, -2, -3, ... Вообще, каково бы ни было число x, влево от 0 получаются точки $-x$ (говорят не точки со значком минус x, а «минус x»). Точка $-x$ симметрична точке x относительно точки 0. Точка 0 симметрична сама себе, точка -0 совпадает с 0. Знаки -1, -2, -3, ... рассматриваются как числа. Те числа, которые изображаются точками, лежащими вправо от 0, называются положительными. Новые числа, изображаемые точками, лежащими влево от 0, называются отрицательными. Число 0 ни положительно, ни отрицательно.

В учебнике Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского [143, 144] введение отрицательных чисел начинается с рассмотрения задачи, решаемой вычитанием, а именно с задачи об изменении уровня воды в реке в течение двух суток.

Рассмотрим эту задачу: во время сильных дождей уровень воды в реке поднялся на a сантиметров в течение суток. В течение следующих суток уровень воды понизился на b сантиметров. Какой будет уровень воды по истечении этих двух суток?

Задача решается для конкретных значений a и b. Поэтому в одних случаях приходится из a вычитать b, а в других — из b вычитать a, т. е. одну и ту же задачу приходится решать по различным формулам в зависимости от числовых данных, что неудобно. Надо найти способ решения задачи, при котором одной формулой можно охватить все случаи.

Представим себе, что задача поставлена так: пусть в начале первых суток вода стояла на A *см* выше дна реки. В конце первых суток вода будет находиться на

$(A + a)$ *см* выше дна реки, к концу вторых суток — на $(A + a - b)$ *см* выше дна реки. Далее в учебнике говорится: «формулой $A + a - b$ охватываются все случаи, которые могут представиться в задаче. Решение выглядит так, как будто бы к числу A, определяющему уровень воды в начале первых суток, добавляется число $a - b$». Пусть $a = 15$ *см*, $b = 10$ *см*. Высота над уровнем дна реки будет по истечении двух суток $A + a - b = A + 5$. Но если a меньше b, то разность $a - b$ не имеет смысла, а для вычисления по формуле $A + a - b$ нужно от числа A отнять некоторое число.

Затем дается следующее определение отрицательного числа: «Каждому положительному числу сопоставляется число, называемое *отрицательным*. При этом считается, что добавление к какому-нибудь числу отрицательного числа равносильно вычитанию соответствующего положительного [144, стр. 46]. Дальше указано: число, добавление к которому отрицательного числа равносильно вычитанию соответствующего положительного, нужно считать достаточно большим, чтобы это вычитание имело смысл. Здесь в определение отрицательного числа уже входит правило сложения, однако сами авторы его для этой цели не используют. Определение применяется лишь для объяснения того, что с введением отрицательных чисел становится неограниченно выполнимой операция вычитания. Затем показывается применение отрицательных и положительных чисел для описания изменений величины, т. е. авторы дают изложение, аналогичное имеющемуся в учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. Мотивировка введения отрицательных чисел необходимостью решать одну и ту же задачу всегда по одной формуле для учащихся довольно абстрактна. Им задачи кажутся различными, и они не испытывают особой необходимости решать их одинаковым способом.

В учебнике А. Н. Барсукова [64] отрицательные числа вводятся для изображения расстояний на температурной шкале и изменений температуры, причем нет четкого разграничения различного смысла употребления отрицательных чисел в обоих случаях.

Большого внимания заслуживает схема истолкования отрицательных и положительных чисел, предложенная И. В. Арнольдом [2]. Эта схема разъясняется с помощью наглядного пособия, изображающего на листе картона одночашечные весы с подвижной стрелкой, вращающейся вокруг точки, в которой прикреплен и связанный со стрелкою «противовес» (рис. 24).

К этим «весам» изготовляются макеты разновесок и воздушных шариков. Шарик прикрепляется к чаше и «тянет» ее вверх с силою 1 *г*, разновеска, прикрепленная к чаше, «тянет» ее вниз тоже с силою 1 *г*. Если на чаше поставлено несколько гирек, то стрелку следует установить на соответствующее деление выше нуля. Если к чаше прикреплено несколько шариков, то стрелка должна опуститься на соответствующее число единиц. Шкала стрелки, таким образом, изображает положительные и отрицательные нагрузки. В этой схеме, как и в схеме Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского, каждому положительному числу соответствует отрицательное, дающее с ним в сумме нуль, она гораздо нагляднее иллюстрирует две противоположно направленные силы. Шарики символизируют отрицательные числа, гири — положительные. Эта схема особенно хорошо помогает разъяснить действия над отрицательными и положительными числами (первой ступени).

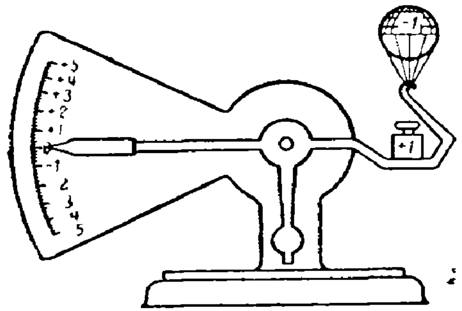


Рис. 24.

Если сравнить способы введения отрицательных чисел в различных пособиях то можно прийти к выводу, что наиболее конкретно и доступно этот вопрос изложен в учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [59], где вначале рассматриваются изменения величин. В конце концов, ни при одном способе изложения не обойтись без этого понятия, но здесь оно введено наиболее четко. Такой же уровень конкретности достигается в схеме И. В. Арнольда («гири — шарики»), где определение отрицательных чисел позволяет легко истолковать действия над ними. Числовую ось нельзя обойти ни при одном способе изучения отрицательных чисел. Если с нее начинать, как делает В. Л. Гончаров (а также К. И. Нешков [123]), то необходима предварительная подготовка в изображении чисел на числовом луче (об этом сказано выше).

Схема П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова ценна тем, что позволяет показать связь между необходимостью характеризовать отрицательными и положительными числами величины, имеющие два направления, и неограниченной выполнимостью операции вычитания: изменения величин находятся вычитанием из нового значения предыдущего; разность может быть либо положительной, либо отрицательной. Таким образом, устанавливается связь между практическими задачами и внутренними потребностями математики в расширении формального аппарата. То же достоинство имеется в схеме Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского.

Полезно давать на уроке как можно больше примеров на применение отрицательных чисел. Ряд упражнений имеется в задачнике П. А. Ларичева [109]. Но одну-две схемы выбирают в качестве основных, к которым обращаются постоянно (схемы «долг — имущество», числовая ось, «пири — шарики»). После введения отрицательных чисел вводятся термины «противоположные числа» и «абсолютная величина числа». Эти термины объясняются в соответствии с принятым определением отрицательных чисел. Например, в учебнике В. Л. Гончарова противоположные числа — это числа, расположенные симметрично на оси относительно точки 0. Так как нуль симметричен сам себе, то $+0 = -0 = 0$, т. е. нуль противоположен сам себе. Абсолютная величина — расстояние от начала координат независимо от направления. Из определений отрицательных чисел в учебниках Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского, а также П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова сразу вытекает определение противоположных чисел. Абсолютная величина определяется через понятие противоположного числа.

Далее вводится обозначение противоположного числа постановкой перед числом знака минус: $-a$ обозначает число, противоположное числу a. Отсюда вытекает правило двойных знаков:

$$-(+a) = -a, \qquad +(+a) = +a,$$
$$-(-a) = +a, \qquad +(-a) = -a$$

(знак плюс можно опускать).

В старых учебниках, в том числе в учебнике А. П. Киселева, абсолютная величина определялась как «число, взятое без знака». Это неправильно, так как чисел без знака не бывает. Абсолютная величина — всегда положительное число или нуль.

Не используется в современном курсе математики и термин «относительные числа», фигурировавший в старых учебниках.

б) Сравнение целых чисел. Действия над целыми числами

Сравнение целых чисел вводится по определению, которое дается в соответствии с принципом перманентности, так чтобы распространить на отрицательные числа свойства расположения положительных чисел. Если положительные числа расположить на оси, то вправо их значения увеличиваются, а влево — уменьшаются. Поэтому принимается определение: отрицательные числа меньше положительных чисел и меньше нуля, а из двух отрицательных чисел то больше, у которого абсолютная величина меньше (оно расположено правее).

Это положение хорошо иллюстрирует схема «долг — имущество». Так, в старинном учебнике Н. Фуса образно пояснялось: «Когда кто ничего не имеет и даже еще 50 рублей должен, то он действительно имеет 50 рублями менее, нежели ничего, ибо если бы кто подарил ему 50 рублей на уплату долга, то он и тогда бы ничего не имел, хотя был бы богатее прежнего» [2, стр. 41]. Хорошо также привлечь для объяснения этого определения термометрическую шкалу: высота ртутного столбика понижается с уменьшением тепла.

Однако надо иметь в виду, что это все пояснения, а не доказательства правила сравнения целых чисел, которое является определением — частью определения отрицательных чисел (как и правило сложения и правило умножения отрицательных чисел).

После того как дано определение сравнения целых чисел, обнаруживается, что с введением отрицательных чисел изменяется и роль числа нуль. Это число имеет два смысла: абсолютный нуль и относительный нуль. В первом смысле число нуль означает отсутствие величины. Во втором — это число характеризует некоторое условное начало отсчета и вовсе не означает отсутствия величины, а указывает ее определенное значение. Так, 0°С не значит, что тело не имеет температуры, а показывает значение этой величины. По другой шкале отсчета та же температура выразится не нулем, а другим числом, например 32°Ф. Можно рассмотреть и другие примеры (отсчет времени, высоты над уровнем океана и т. п.).

Отметим, что рассмотренное выше определение сравнения целых чисел эквивалентно следующему предложению: число a больше (меньше или равно) числа b тогда и только тогда, когда разность $a - b$ больше (меньше или равна) нулю. Это предложение удобнее применять при доказательстве свойств неравенств и самих неравенств. Если его принять в качестве определения неравенства целых чисел, то предыдущее определение может быть доказано, т. е. перейдет в разряд теорем. Обычно вводят первое определение, как более доступное и не зависящее от действий над новыми числами, которые изучаются позже. При изучении же неравенств доказывается теорема о сравнении чисел с помощью определения знака их разности.

Уже в теме «Целые числа» учащиеся должны свободно пользоваться выражениями «положительное число» и «число, большее нуля» («отрицательное число» и «число, меньшее нуля») как равнозначными, а также символической записью $a > 0$ ($a < 0$).

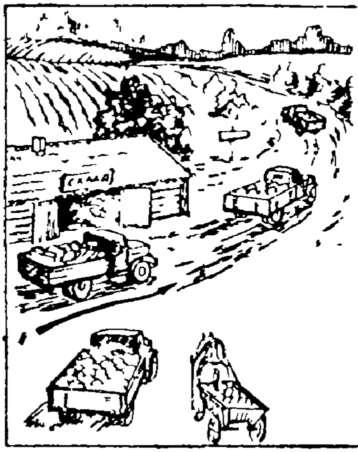
Сложение целых чисел. Это действие объясняется в зависимости от схемы, которая положена в основу введения отрицательных чисел. По П. С. Александрову и А. Н. Колмогорову [59] суммой двух чисел называется число, выражающее то изменение величины, которое произойдет в результате двух последовательных ее изменений, характеризующихся слагаемыми числами. Правило выводят из решения задачи, в которой нужно найти результат двух изменений величины, при этом рассматриваются различные случаи сложения в зависимости от данных чисел. Результат учащиеся отыскивают по смыслу. В качестве примера можно рассмотреть суммирование двух операций на сберегательной книжке. Аналогичный пример приведен в книге И. В. Арнольда [2, стр. 45]. Здесь рассматривается состояние склада, на который привозится и с которого увозится некоторый материал. Задача может быть оформлена в виде следующей таблицы (табл. 3):

Таблица 3

Запись операций	Операция	Результат последовательных операций	Состояние склада
2728 +2 2730	+2		+2
+18 2748	+18	+2+(+18)= +20	+20
—5 2743	—5	+20+(—5)= +15	+15
—23 2720	—23	+15+(—23)= —8	—8
—4 2716	—4	—8+(—4)= —12	—12
+12 2728	+12	—12+(+12)=0	0
—3 2725	—3	0+(—3)= —3	—3

П. Я. Дорф [26] положил эту идею в основу наглядного пособия (рис. 25). Аналогично можно решать задачу на нахождение среднего арифметического с использованием отрицательных чисел.

По-иному сложение чисел объясняется при использовании числовой оси. Положительные и отрицательные числа характеризуют соответственно переход вправо или влево по числовой оси. Число, выражающее суммарный переход, есть сумма чисел, характеризующих слагаемые переходы. Аналогичным будет объяснение сложения на примере температурной шкалы [64] или с помощью задачи на движение поезда. Здесь, как уже говорилось, отрицательные и положительные числа определяют состояние и изменение величины. Сложение двух отметок на шкале или двух показаний термометра не имеет объективного смысла. Это примеры чисто скалярных величин, для которых выполняются лишь аксиомы скалярного расположения. Изменения величин образуют аддитивную величину, т. е. такую, для которой определена операция сложения, удовлетворяющая известным аксиомам. Всякое изменение — сумма нескольких изменений. Рассматривая на числовой оси различные зна-



Контора Счет		
На 1 IX 34 мешка		
Привоз	Вывоз	итог
61 47 18	100 60	
На 2 IX 160	160	0
29 36 11	60 40	
На 3 IX 76	100	- 24

Рис. 25.

чения двух последовательных переходов и определяя, каким одним переходом можно заменить каждый раз оба перехода, учащиеся выводят правило сложения целых чисел, принимаемое как определение. Можно конкретно объяснить и сложение отметки на оси и перехода как получение новой отметки на оси.

Очень наглядно истолковывается сложение целых чисел на схеме «гири — шарики». Схема весов иногда применялась для объяснения правила сложения отрицательных чисел, но поскольку слагаемые нагрузки прикладывались к различным чашкам, у школьников не возникало представления о действии как о соединении этих нагрузок. Производимое действие поэтому не ассоциировалось в их сознании с привычным понятием о сложении. У них возникал вопрос, почему, производя иногда действие сложения, а иногда вычитания, мы всякий раз говорим, что это действие сложения. Из всех рассмотренных схем объяснения отрицательных чисел схема одночашечных весов наиболее наглядно дает ответ на этот вопрос: мы отрицательные и положительные нагрузки помещаем вместе, на одну и ту же чашу весов. Естественно, что результативная нагрузка — сумма приложенных нагрузок. Устанавливая стрелку весов, ученики с интересом и вполне сознательно усвоят правило сложения целых чисел.

Вычитание целых чисел. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Правило вычитания доказывается на основе этого определения и определения сложения. Объяснение его соответствует тому, как давалось правило сложения. Если сумма находилась как результат двух изменений величины, то разность может иметь следующий смысл: после двух изменений величина изменилась на a единиц. Каково было первое изменение, если второе составляло b единиц?

Действием вычитания можно решать и другие две задачи: находить разность двух состояний величины, определяя изменение от одного состояния до другого, а также разность между состоянием величины и изменением, отыскивая первоначальное состояние величины.

Проще всего нахождение одного из двух последовательных изменений величины по другому и суммарному, и этим можно ограничиться, не усложняя в начальном обучении вопроса. Две другие задачи приведены здесь для полноты картины.

В учебнике Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского [143] объяснение проводится следующим образом. Пусть нужно найти разность $5-(-3)$. Обозначим ее буквой x: $5-(-3)=x$ или $x+(-3)=5$. Видно, что к (-3) нужно прибавить положительное число. Если прибавим $(+3)$, получим нуль, значит надо прибавить еще $(+5)$:

$$(5+(+3))+(-3)=5, \text{ следовательно,}$$

$$x=5+(+3)=8.$$

На числовой оси объяснение может быть таким. Какой переход нужно совершить после перехода (-3), чтобы суммарный переход был $(+5)$? (рис. 26). На оси видим, что этот переход равен $+8$. Тот же результат получим, если от конца уменьшаемого перехода отложим переход, противоположный вычитаемому. Рассматривая различные случаи и записывая результаты, получаем:

$$(-5)-(-3)=-2,\ (-5)+(+3)=-2,$$
$$(-5)-(+3)=-8,\ (-5)+(-3)=-8,$$
$$(+5)-(-3)=+8,\ (+5)+(+3)=+8,$$
$$(+5)-(+3)=+2,\ (+5)+(-3)=+2.$$

Отсюда видно, что вычитание заменяется прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Это можно доказать в общем виде, если отрицательные числа

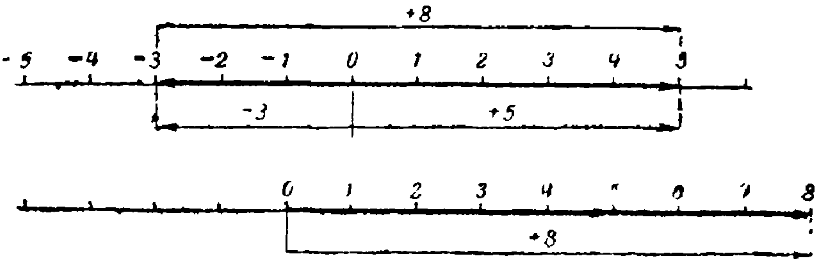


Рис. 26.

изучаются в VI классе. Так, в учебниках [59] и [143—144] доказывается теорема: «Разность равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому», т. е. $a-b=a+(-b)$. Проверим, что число $a+(-b)$ удовлетворяет определению разности. Действительно, $a+(-b)+b=a+((-b)+b)=a+0=a$. Докажем единственность числа, удовлетворяющего определению разности. Пусть x — другое число, тоже удовлетворяющее нашему требованию: $x+b=a$. Прибавим к обеим частям этого равенства по $(-b)$: $x+b+(-b)=$ $=a+(-b)$ или $x=a+(-b)$, т. е. x не может отличаться от числа $a+(-b)$. Доказательство единственности в VI классе можно и опустить, если учитель найдет свой класс для этого неподготовленным.

Схема «гири — шарики» позволяет наглядно представить операцию вычитания в конкретном смысле как «отнятие» нескольких единиц путем снятия гирек или шариков. Кроме того, на ней можно показать, что вычитание можно проводить неограниченно, так как если с чаши уже нечего снимать, то можно на нее положить противоположную нагрузку. Если нужно отнять +5, то можно добавить 5 шариков, а если нужно отнять (—3), то можно положить 3 гири. Замена вычитания прибавлением противоположного числа также, как видим, представляется очень наглядно.

Понятие алгебраической суммы. Поскольку в алгебре вычитание всегда можно заменить сложением, то фактически мы имеем только одно действие — алгебраическое сложение. Поэтому знак действия один — знак сложения. Это позволяет его не писать, а лишь подразумевать, записывая подряд слагаемые числа с их знаками. Вот почему, если у нас знаки действия сложения и вычитания, то мы сначала везде вычитание заменяем сложением, затем опускаем знаки сложения. Получаем запись чисел, между которыми стоят знаки плюс и минус, относящиеся к числам. Эта запись называется алгебраической суммой.

В некоторых учебниках были введены два различных знака для обозначения знака числа и знака действия. На первых порах это полезно, но, как видно из изложенного, в дальнейшем теряет свой смысл.

Для иллюстрации сложения и вычитания целых чисел на числовой оси можно использовать наглядное пособие в виде двух линеек, из которых одна может двигаться вдоль другой подобно шкале логарифмической линейки (рис. 27, *а, б, в, г, д*) [6, стр. 41].*

Другое наглядное пособие изготовляется в виде термометрической шкалы, где столбик ртути поднимается и опускается. В пособии столбик изображается шнуром, одна половина которого белая, а другая черная. Шнур пропускается в отверстия шкалы, помещенные в ее концах, и завязывается (рис. 28). Как наглядное пособие можно использовать таблицу с изображением профиля местности (рис. 29) [26].

Умножение целых чисел. Правило умножения целых чисел также является определением. Цель всяких пояснений этого определения — показать его целесообразность с точки зрения принципа перманентности. Но, как уже говорилось, учащиеся младших классов еще не в состоянии осознать сущность этого принципа и зачастую принимают пояснения за доказательство, по-

* В статье З. И. Трошковой [218] описаны такие линейки, изготовленные из двух бумажных полос. Одна из них шире другой, и ее края загибаются, образуя паз, в котором может перемещаться вторая полоса. Деления нанесены на внутренней полосе и на нижнем загибе внешней полосы.

требность в котором испытывают, сталкиваясь с новыми необычными правилами.

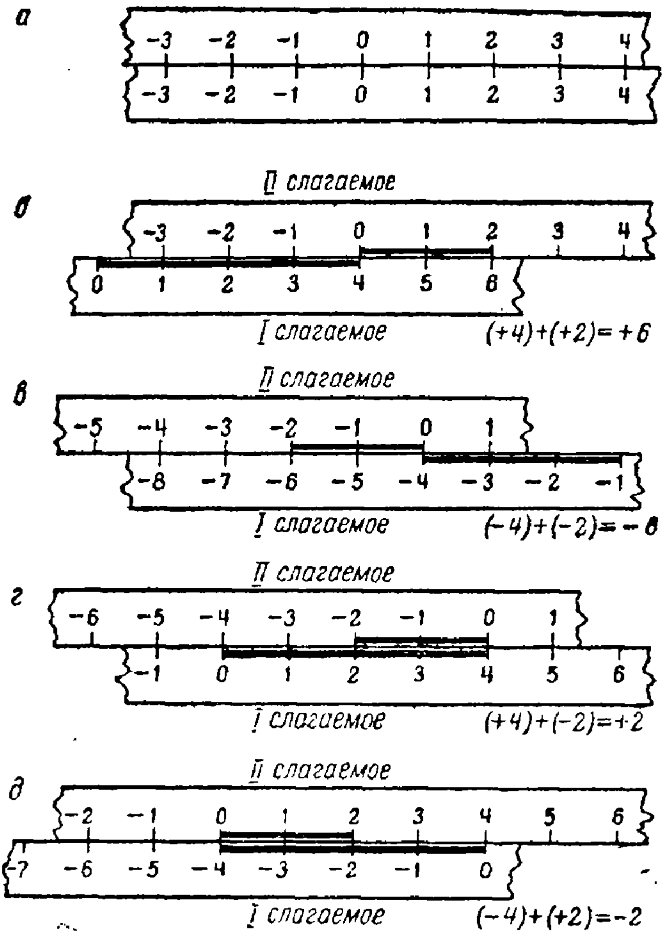


Рис. 27.

Так обстояло дело, когда изучение велось по учебнику А. П. Киселева [100]. В нем рассматривалась задача о движении поезда, который в 12 *ч* находился на станции Бологое, между Москвой и Ленинградом. Нужно было узнать его расстояние от этой станции через несколько часов. При этом скорость могла иметь два знака в зависимости от направления движения, время после полудня отсчитывалось в положительном направлении, а до полудня было отрицательным. По смыслу ученики определяли ответ задачи, которая должна решаться умножением. Отсюда устанавливали правило умножения, которое выглядело в их глазах теоремой. Решение задач на умножение, в которых фигурируют две направленные величины, разумеется, должно пояснять применение умножения отрицательных чисел.

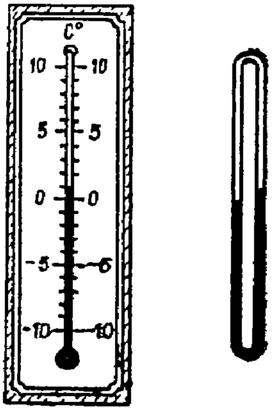


Рис. 28.

Кроме задачи на движение, может рассматриваться задача о показаниях на шкале термометра через несколько часов после некоторого момента или за несколько часов до данного момента, если каждый час температура изменялась [64], или задача об определении пути перемещения винта вдоль его оси по числу оборотов и длине шага [2]. Направление оборотов и длина шага могут быть противоположны по знаку.

Однако для того чтобы учащиеся не приняли рассуждения в задачах за доказательство правила умножения отрицательных чисел, в новых учебниках [59, 87] начинают с формулировки правила умножения. Так, в учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [59] дается правило: произведение двух множителей равно: 1) произведению абсолютных величин множителей, если оба множителя положительны или оба множителя отрицательны; 2) произведению абсолютных величин множителей, взятому со знаком минус, если один из множителей положителен, а другой отрицателен; 3) нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

В тексте учебника (напечатанном мелким шрифтом) объясняется, что это правило является определением и нет смысла спрашивать, верно ли оно. Можно только спрашивать, целесообразно ли оно выбрано. В основном тексте говорится, что в дальнейшем будет видно, что правило установлено в соответствии с потребностями практики. Имеется в виду глава, посвященная применению умножения и деления отрицательных чисел, которое рассматривается лишь после установления свойств этого действия, введения операции деления и др.

В этой главе рассматривается применение правила умножения отрицательных чисел к задаче определения пути по скорости и времени, показывается, что коэффициент пропорциональности может быть и отрицательным, он означает не только пропорциональное увеличение второй величины, но и изменение ее направления.

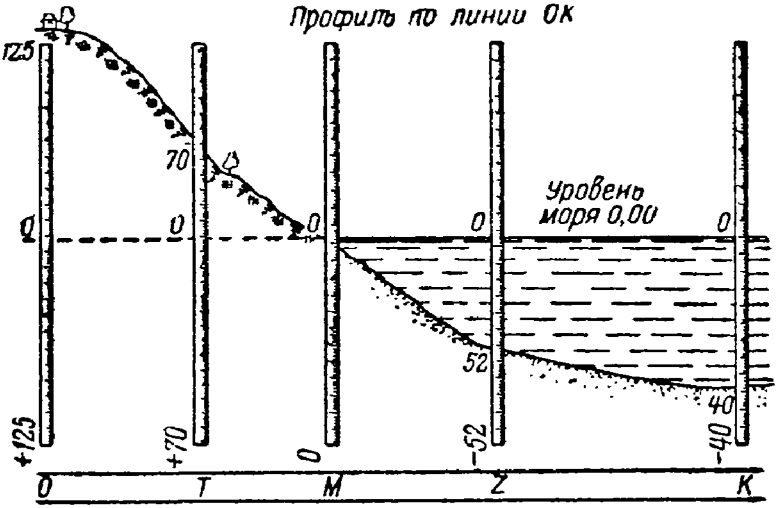


Рис. 29.

В учебнике А. Н. Барсукова [64] в главе о сложении формулируются требования принципа перманентности и говорится, что правило сложения устанавливается в соответствии с этими требованиями, то же повторяется в главе об умножении, но поскольку правила даются после решения задач, то можно думать, что результат их изучения будет тот же, что и при работе по учебнику А. П. Киселева [100], т. е. вряд ли учащиеся поймут, что имеют дело с определением.

Пользуясь учебником [59], учащиеся не будут думать, что правило умножения было доказано и, разумеется, овладеют применением этого правила. Вообще учащиеся охотно усваивают правила всякой новой игры и так же легко могут принять, что «минус на минус дает плюс». Но они хотят знать, почему это так. Пояснение, что так нужно для практики, в некоторой мере удовлетворительно, но необходимо более прямое доказательство.

С этой точки зрения большого внимания заслуживает операторная точка зрения на число. Правило умножения может быть доказано, если определить, что означает действие, указываемое отрицательным множителем, оператором в действии умножения. Это определение имеет и другое преимущество перед определением правила умножения: оно аналогично определению умножения на положительное число.

В соответствии со смыслом отрицательного числа умножение на него должно в чем-то быть противоположным умножению на положительный множитель. Поэтому учащимся покажется вполне естественным и не вызовет потребности в его доказательстве следующее определение: умножить на отрицательный множитель — значит повторить множимое слагаемым столько раз, сколько единиц во множителе, и в результате переменить знак на противоположный (или повторить слагаемым несколько раз число, противоположное множимому). Множитель здесь выступает в роли оператора второй ступени. Его применение к оператору первой ступени (переходу) дает новый оператор первой ступени, новый переход. Так, произведение (—3)·(—5) означает новый переход, который получится из перехода (—3), если его растянуть в пять раз и изменить направление на противоположное (переход на 15 единиц вправо). В этом смысле производится действие умножения в задаче на движение поезда. Но можно это действие истолковать и иначе, рассматривая оба сомножителя как операторы второй ступени, а произведение — как результат последовательного применения двух операторов второй ступени, т. е. такой третий оператор второй ступени, применение которого равносильно последовательному применению первых двух операторов.

Ясно, что если мы некоторый переход сначала растянем в три раза и изменим направление на противоположное, а затем растянем еще в пять раз и опять переменим направление на противоположное, то получим переход первоначального направления, растянутый в 15 раз. Таким образом, последовательное применение операторов (—3) и (—5) равносильно растяжению перехода в 15 раз без изменения его направления, т. е. $(-3)\cdot(-5) = +15$.

Двукратное изменение направления на противоположное равносильно сохранению направления — «минус на минус дает плюс». Такое определение напоминает

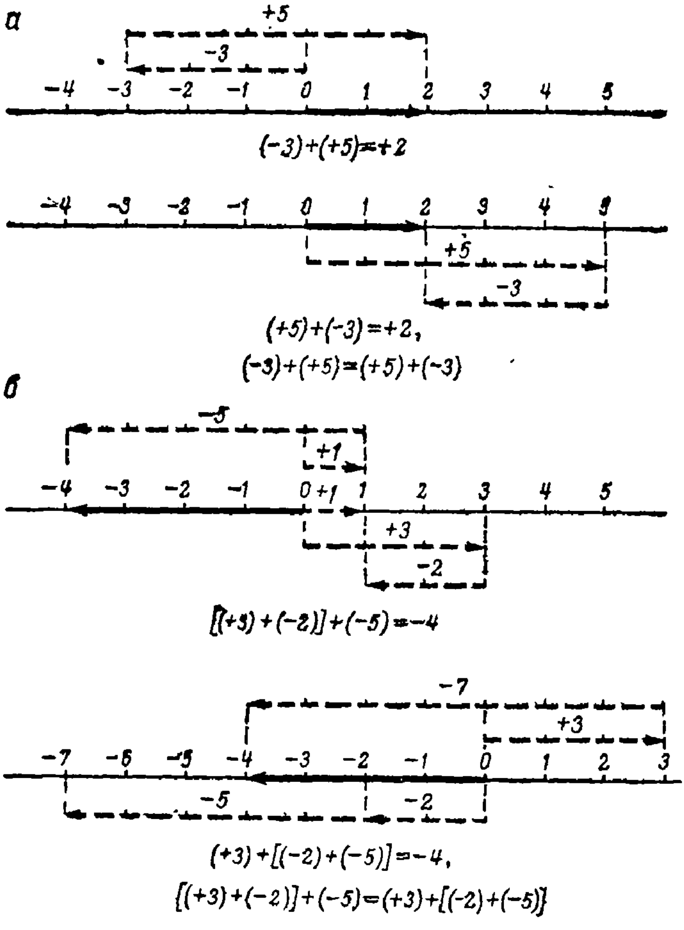


Рис. 30.

общее определение умножения Коши, которое рассматривается ниже.

После того как даны определения действий над отрицательными числами и уяснен их конкретный смысл, необходимо проверить выполнение основных законов арифметики для новых чисел, отметить, какие появились новые свойства, отличные от свойств положительных чисел. Например, умножение теперь не всегда означает увеличение, в прямой пропорциональной зависимости увеличение значений одной величины в несколько раз не всегда увеличивает другую во столько же раз. Если коэффициент пропорциональности отрицательный, то будет возрастать абсолютная величина второй величины, но поскольку ее направление изменяется на противоположное, то она будет уменьшаться, и т. д.

Полезно дать графическую иллюстрацию основных законов действий для отрицательных компонентов (рис. 30, *а, б*; см. рис. 9).

§ 5. Дробные числа. Множество рациональных чисел

а) Умножение на дробь

Следующий этап расширения понятия о числе и математической операции связан с введением дробных чисел. Элементарное понятие о дробном числе учащиеся получают уже в начальной школе. Это понятие о дроби как о нескольких долях единицы. Здесь речь идет лишь о расширении понятия счетной единицы: можно считать их долями единицы. Этого понятия вполне достаточно для разъяснения преобразования дробей (сокращения и приведения к общему знаменателю), сравнения их и для объяснения действий первой ступени. Новый смысл действия и новое истолкование числа приходится ввести при переходе к умножению на дробь. К умножению дроби на целое число можно применить старое определение умножения и его можно понять, если известно сложение дробей. Вся трудность заключается именно в умножении на дробь.

В старых учебниках встречались ошибочные объяснения, использующие в неявном виде принцип перманентности, из-за чего получалась ошибка типа «логический круг». В одних случаях речь шла о переместительном законе умножения, с помощью которого умножение на дробь заменяли умножением дроби на целое число [134, изд. 3-е]. В других применяли монотонность умножения, считая, что произведение некоторого целого на $\frac{3}{4}$ должно быть в 4 раза меньше произведения этого числа на 3

[134, изд. 1-е и 2-е]. Иногда использовали при умножении на дробь правило умножения на целое частное. Таким образом, на умножение дробей распространяли законы умножения целых чисел, тогда как для умножения на дробь эти законы должны быть следствиями правила умножения. Здесь положение вполне аналогично тому, которое рассмотрено при определении умножения на нуль.

В настоящее время в большинстве учебников применяется так называемый метод целесообразных задач, предложенный С. И. Шохор-Троцким [52].

Этот метод в некоторых учебниках использовался и при изложении теории отрицательных чисел.

Так рассматривается задача, которая решается умножением, если данные числа — целые. Затем данное число берется дробным.

Задача решается учащимися по смыслу двумя действиями, которые затем объединяются в одну запись. Далее ученикам объясняют, что поскольку раньше эта задача решалась умножением, то надо считать, что мы произвели умножение на дробь.

Возьмем задачу: «1 *кг* сахарного песку стоит 78 коп. Сколько стоит 3 *кг* песку? 2 *кг*? $\frac{2}{3}$ *кг*?»

Отвечая на первый вопрос задачи, 78 коп. умножим на 3:

$$78 \text{ коп.} \cdot 3 = 2 \text{ р. } 34 \text{ к.}$$

Отвечая на второй вопрос, получаем:

$$78 \text{ коп.} \cdot 2 = 1 \text{ р. } 56 \text{ к.}$$

Чтобы ответить на третий вопрос задачи, мы должны найти $\frac{2}{3}$ от числа 78.

Учащиеся уже умеют решать эту задачу. Для этого они сначала узнают одну треть числа 78, для чего разделят 78 на 3 и получат 26 коп. Затем найдут две трети числа 78, умножив 26 коп. на 2. Получат 52 коп. Оба действия можно объединить в одну запись:

$$(78 : 3) \cdot 2 = 52 \text{ коп. или } \frac{78}{3} \cdot 2 = \frac{78 \cdot 2}{3} = 52 \text{ коп.}$$

Поскольку желательно одну и ту же задачу решать одинаковым действием, мы здесь тоже будем говорить, что умножили 78 на $\frac{2}{3}$, т. е. запишем так:

$$78 \cdot \frac{2}{3} = \frac{78 \cdot 2}{3} = 52.$$

Таким образом, дается определение: умножить на дробь значит найти эту дробь от множимого.

Отсюда получаем правило: чтобы умножить на дробь, нужно число умножить на числитель дроби и полученное произведение разделить на знаменатель дроби.

Это рассуждение, как уже отмечалось, представляет собою один из аспектов принципа перманентности и отражает существо вопроса. Однако оно не устраняет у учащихся младших классов вопроса, почему, во-первых, производя и умножение и деление, мы говорим, что произвели умножение (почему не деление?). Во-вторых, почему мы считаем это одним действием, а не двумя? В-третьих, почему после умножения число уменьшится, а не увеличится.

Сложность темы «Умножение на дробь» вызвала оживленную дискуссию на страницах журнала «Математика в школе» в 1950 г. [235—239]. В результате обсуждений появились некоторые предложения, помогающие разрешить возникшие трудности.

Итогом дискуссии можно считать вывод, что основная трудность может быть преодолена, если принять операторную точку зрения на множитель. Такое предложение выдвигает в своей статье М. Ф. Шинова [239], хотя прямо об этом и не говорит, и именно эта статья положительно оценена в итоге дискуссии редактором журнала А. Н. Барсуковым [235].

Отметим, что операторная точка зрения на число применялась и раньше. Большое внимание ей уделил Н. И. Лобачевский [114]. Операторным по своему смыслу является приводившееся в старых учебниках арифметики общее определение умножения Коши: умножить одно число на другое — значит составить из множимого новое число так, как множитель составлен из единицы. Это определение охватывает различные случаи умножения. Так, умножая на целое число, мы повторяем множимое столько раз, сколько единиц во множителе, т. е.

составляем произведение так, как множитель составлен сложением единиц. Например,

$$6 \cdot 3 = 6+6+6,$$

$$3 = 1+1+1.$$

Умножая на отрицательное число, мы поступаем так же: меняем знак множимого и складываем его столько раз, сколько единиц во множителе. Но так можно получить и отрицательный множитель из положительной единицы

$$6(-3) = (-6) + (-6) + (-6),$$

$$-3 = (-1) + (-1) + (-1).$$

Умножая на дробь, например на $\frac{2}{3}$, мы составляем произведение из множимого делением на три равные доли и сложением двух таких долей, т. е. так же, как $\frac{2}{3}$ составлены из единицы:

$$6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{6}{3} = 2+2,$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Это определение может быть применено и к умножению на мнимое число. Однако оно не лишено недостатков, к которым относится его общий характер. Далее из определения не видна связь действия умножения с решением практических задач на умножение. Наконец, оно не является в таком виде достаточно четким. Дело в том, что множитель из единицы можно составить различными способами. Так, будем считать, что $\frac{2}{3}$ составлены из единицы следующим образом:

$$\frac{2}{3} = \frac{1+1}{1+1+1}.$$

Тогда получим при умножении 6 на $\frac{2}{3}$ таким способом неверный ответ:

$$\frac{6+6}{6+6+6} = \frac{2}{3}.$$

Последний недостаток, как и первый, устраняется, если давать аналогичное определение для умножения на целое число, отрицательное, дробное отдельно и объяснять, каким способом множитель составляется из единицы. Так, определение Серре [51] для умножения на дробь лишено указанных недостатков: «умножить какое-либо число на дробь значит разделить его на столько равных частей, сколько единиц в знаменателе дроби, и взять столько таких частей, сколько единиц в числителе». Достоинством этого определения является его операторный характер, что очень важно для облегчения усвоения нового понятия.

Такой же принцип соблюдается в работах И. В. Арнольда [2, 3, 161], где дается операторное определение умножения на дробь, по форме близкое определению умножения на положительное целое число, позволяющее поэтому легко связать определение умножения с применением этого действия к решению задач на умножение. Выражение «взять множимое несколько раз» распространяется на дробный множитель. Чтобы переход к новому определению был более естественным, полезно начинать с примеров, где результат получается целым, а множитель — смешанное число, а затем перейти к дробному множителю.

Например, пусть множимое будет восемь. Умножить его на два значит взять две восьмерки. Умножить его на три значит взять три восьмерки. Умножить восемь на два с половиной значит взять две с половиной восьмерки, т. е. $8+8+4$. Умножить его на полтора значит взять его полтора раза, т. е. $8+4$. Умножить восемь на $2\frac{3}{4}$ значит взять две и три четверти восьмерки, т. е. $8+8+2+2+2$. Умножить 8 на $\frac{3}{4}$ значит взять три четвертых восьмерки, т. е. $2+2+2$. Умножить на $\frac{1}{4}$ значит взять четвертую часть восьмерки, т. е. $8\cdot\frac{1}{4}=2$, и т. д.

Приходим к определению умножения на дробь: умножить на дробь $\frac{a}{b}$ значит взять множимое $\frac{a}{b}$ раза. Поскольку остается выражение «взять несколько раз», то понятно, почему новое действие называется опять умножением. С другой стороны, это определение легко применяется к решению задач на умножение, в которых всегда приходится одно число брать несколько раз слагаемым.

Против употребления оборота речи «взять $\frac{2}{3}$ раза» выдвигалось возражение, что оно лишено смысла, так как понятие «раз» по существу дискретно. Однако в обыденной речи уже давно вошло в употребление выражение «в два с половиной раза больше», «в полтора раза меньше» и т. п. Кроме того, здесь речь идет о процессе дробления, применяемого к множимому, которое не является дискретным.

В основе изложения, рекомендуемого в статье М. Ф. Щиновой [239], по существу лежит операторное определение, но без применения выражения типа «$\frac{2}{3}$ раза». Для усвоения материала предлагается составить следующую таблицу [239]:

$10 \cdot 3$ значит «взять» 3 десятка,

$10 \cdot 2$ — 2 десятка,

$10 \cdot 1$ — один десяток,

$10 \cdot 2\frac{1}{2}$ — $2\frac{1}{2}$ десятка.

$10 \cdot \frac{3}{5}$ — $\frac{3}{5}$ десятка.

$\frac{1}{8} \cdot 3$ — три восьмушки,

$\frac{1}{8} \cdot 2$ — две восьмушки,

$\frac{1}{8} \cdot 1$ — одну восьмушку,

$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$ — половину восьмушки.

Все это иллюстрируется на чертеже долями круга (рис. 31).

После рассмотрения таблицы учащиеся поймут определение: умножить число на дробь значит взять эту дробь от множимого.

В работе [239] содержится также указание, помогающее учащимся понять, что два действия принимаются за одно. Для этого надо припомнить случаи из арифметики, где тоже имелась аналогичная условность. Например, запись 325— сокращенная запись суммы 300 + 20 + + 5. Запись $3\frac{2}{5}$ — сокращенная запись суммы $3 + \frac{2}{5}$. Далее в определении умножения на натуральное число мы также несколько действий сложения считали одним действием умножения.

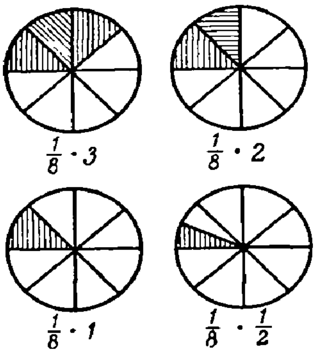


Рис. 31.

Для устранения трудности, связанной с уменьшением числа при умножении на правильную дробь, предлагается изменить традиционную последовательность изучения вопросов темы [235]. Рекомендуется располагать различные случаи умножения в порядке возрастания трудности (эта последовательность соблюдалась нами при рассмотрении различных примеров на умножение): 1) умножение на целое число; 2) умножение целого числа на смешанное число; 3) умножение дроби на смешанное число; 4) умножение на правильную дробь; 5) умножение на дробь, в которой числитель равен единице. Таким образом, в конце оказались как раз те случаи умножения, которые особенно отличаются от умножения на целое число. К этим случаям нужно переходить лишь тогда, когда учащиеся получили уже некоторые навыки в технике умножения и освоились с понятием умножения на дробь. Они должны понять, что умножением числа на правильную дробь находится часть числа, которая меньше множимого.

Весьма полезно для этих случаев рассмотреть также задачу о вычислении площади прямоугольника [52] двумя способами [10]. Решим такую задачу: найти площадь прямоугольника со сторонами $\frac{3}{4}$ *м* и $\frac{3}{5}$ *м*.

Первый способ. Нужно $\frac{3}{4}$ умножить на $\frac{3}{5}$, т. е. взять $\frac{3}{5}$ от $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}.$$

Второй способ. Решаем в целых числах:

$$\frac{3}{4}\ \text{м}=75\ \text{см},\ \frac{3}{5}\ \text{м}=60\ \text{см}.$$

Площадь прямоугольника равна

$$75\cdot 60\,(\text{кв. см})=4500\,(\text{кв. см})=\frac{45}{100}\,(\text{кв. м})=$$
$$=\frac{9}{20}\,(\text{кв. м}).$$

Решение в целых числах, подтверждающее результат, полученный с помощью правил умножения дробей, для учащихся будет веским доводом в пользу нового правила, хотя на первых порах они предпочитают последний способ. Геометрическое представление умножения дробей (рис. 32) также сыграет свою роль в этом направлении [52].

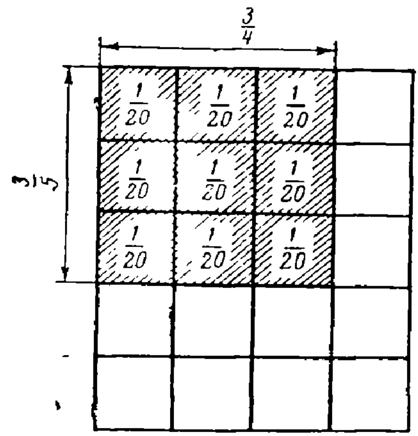


Рис. 32.

Если умножение на дробь усвоено, то не возникает затруднений и при изучении остального материала. Как и для целых чисел, деление определяется как действие, обратное умножению, и правило деления выводится из этого определения, а также из правила умножения на дробь. Неправильно было бы поэтому определять деление как действие нахождения числа по известной его дроби. Это следует из определения деления как обратной операции. Случай деления, когда частное больше делимого, хорошо поясняется задачей на деление по содержанию (это использовал еще Л. Н. Толстой в своей «Азбуке» [141].

Рассмотрим задачу: «Сколько выйдет прутиков для счетов длиною $\frac{3}{4}$ *м* из 6 *м* проволоки?» В 6 *м* содержится $\frac{24}{4}$ *м*, а следовательно, $\frac{3}{4}$ *м* содержится в них $24:3=8$ раз.

Отсюда

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8 \text{ (раз)}.$$

Нередко после изучения правила деления дробей учащиеся допускают ошибки, смешивая правила умножения и деления дробей. Поэтому выдвигалось предложение [235] дать одно общее правило деления на дробь: чтобы разделить на дробь, достаточно делимое умножить на число, обратное делителю. Это предложение целесообразно. Но более существенным в предупреждении указанных ошибок является глубокое понимание смысла обеих операций. Оно может быть достигнуто решением задач на оба действия и применением операторного подхода к определению действий. Кроме того, сознательному усвоению этих понятий будет способствовать не изолированное, а параллельное решение обратных задач на нахождение части числа и числа по его части, на нахождение дроби от числа (умножение на дробь) и на нахождение числа по его дроби (деление на дробь) [226, 227]. Сопоставление этих задач поможет выяснить их различие.

б) Последовательность изучения тем «Десятичные дроби» и «Обыкновенные дроби»

Этот вопрос неоднократно рассматривался в методической литературе. Еще в период движения за реформу преподавания в дореволюционной школе шла речь о том, чтобы вначале изучать десятичные дроби, как имеющие большое практическое значение [35, 44, 56, 194]. В наше время этот вопрос тоже неоднократно поднимался.

В проекте программы, который в настоящее время уже реализован в десятилетней школе, предусматривалось изучение десятичных дробей до обыкновенных, увеличение числа часов, отводимых на изучение десятичных дробей. Однако при введении этой программы в V классе было сделано примечание, что временно, вплоть до появления нового учебника, остается прежний порядок изучения указанных тем. Между тем в Молдавской ССР сначала стали изучать десятичные дроби, был создан соответствующий учебник [138]. Эксперимент в таком же направлении проводится в некоторых школах РСФСР под руководством К. И. Нешкова, который написал руководство по изучению арифметики в V классе (содержащее ряд других оригинальных методических идей, в частности о соединении преподавания арифметики и алгебры) [123]. В связи с этим на страницах журнала «Математика в школе» развернулась дискуссия по вопросу о последовательности изучения материала [14, 15, 245—256]. Участники спора так и не пришли к единому мнению. Вопрос, вероятно, решит практика. Во всяком случае можно сделать вывод, что если большее практическое значение десятичных дробей не вызывает сомнений ни у кого, то каждый порядок изучения имеет свои достоинства и недостатки, которые с теоретической точки зрения уравновешивают друг друга. Рассмотрим основные из них.

В пользу изучения десятичных дробей до обыкновенных выдвигаются следующие мотивы. Во-первых, десятичные дроби могут быть объяснены учащимся при рассмотрении десятичной системы нумерации целых положительных чисел. В записи натуральных чисел каждая разрядная единица, стоящая правее, в 10 раз меньше предыдущей разрядной единицы. Если после разряда единиц поставить запятую и продолжить запись, то первая разрядная единица после запятой должна означать десятые доли единицы, а следующая — сотые доли и т. д. Таким образом, нумерация десятичных дробей является естественным продолжением нумерации натуральных чисел.

Во-вторых, все арифметические действия значительно проще выполняются в десятичных дробях, чем в обыкновенных.

В-третьих, десятичные дроби имеют гораздо большее практическое применение, чем обыкновенные.

В пользу изучения обыкновенных дробей до десятичных высказываются такие соображения. Десятичные дроби являются частным случаем обыкновенных дробей, и все правила действий над десятичными дробями легко вытекают как простые следствия из правил действий над обыкновенными дробями. Если же десятичные дроби изучаются раньше, то правила действий первой ступени могут быть легко объяснены на основании истолкования десятичных дробей как совокупности новых разрядных единиц, но действия второй ступени объяснить нельзя, оставаясь на этой точке зрения. Либо придется дать эти правила догматически, либо опереться на общее понятие дроби и ввести определение умножения на десятичную дробь. Но тогда придется давать это определение дважды: один раз для умножения на десятичную дробь и второй — для умножения на обыкновенную дробь. Именно по этому последнему пути и пошли авторы новых учебников [123, 138].*

Далее, действия над некоторыми обыкновенными дробями легче, чем над десятичными, у которых обычно большие знаменатели. Так, для устных вычислений гораздо удобнее дроби $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$, чем дроби 0,25; 0,5; 0,75; 0,125 и т. п.

Основное свойство дроби, которое необходимо для объяснения действий первой ступени над десятичными дробями, не может быть выяснено, если не стать на точку зрения общего понятия о дроби. Проще это сделать для обыкновенных дробей с небольшими знаменателями.

Если обыкновенные дроби изучаются после десятичных, то всю теорию дробей нужно строить снова, так как из частного случая нельзя вывести правил для общего случая.

В настоящее время, как указывалось, в большинстве школ страны сначала изучаются обыкновенные дроби. Но соображения в пользу десятичных дробей нашли отражение в программе: увеличено число часов, отводимых на изучение десятичных дробей.

* Можно также, как указывалось, пойти еще по третьему пути, постулируя необходимые свойства нового действия, например, монотонность умножения.

Необходимо указать на еще один вариант изучения десятичных и обыкновенных дробей, а именно на их параллельное изучение [91, 113]. После общего определения дроби рассматривается ее частный случай. Так же изучаются все свойства и правила действий над теми и другими дробями. Такой эксперимент проводился Е. В. Вандышевой [170].

Заметим еще, что если десятичные дроби изучаются после обыкновенных, то для вывода, например, правила умножения, кроме получения его как частного случая общего правила умножения дробей, возможен другой способ, основанный на свойстве монотонности умножения. Это свойство уже установлено на основании общего определения умножения на дробь (разумеется, общего доказательства в младших классах не дается, свойства проверяются на отдельных числовых примерах, но учащиеся знают, что это свойство может быть доказано на основе определения). Поскольку десятичная дробь — частный случай обыкновенной, то умножение на нее тоже обладает свойством монотонности. Поэтому мы можем сначала перемножить данные числа как целые, не обращая внимания на запятые, чем увеличиваем искомое произведение в известное число раз. Для получения правильного ответа переносим запятую влево, чем в соответствующее число раз уменьшаем полученное произведение.

Этот вывод даже проще обычного, но без дополнительных допущений правомерен только при указанном порядке расположения тем (см. сноску на стр. 126).

§ 6. Введение иррациональных чисел. Множество действительных чисел

В восьмилетней школе стараются избежать вопросов, связанных с понятием непрерывности и бесконечности (хотя полностью этого достичь невозможно). В частности, не затрагивается вопрос о недостаточности множества рациональных чисел для решения как алгебраических задач, так и задач на измерение.

Учащиеся строят графики, не задумываясь над тем, что они могут быть разрывными, так как строят их только для рациональных абсцисс: ведь практически и для всех рациональных абсцисс нельзя построить соответствующие точки графика. При извлечении квадратного корня тоже сознательно упускается из виду, что не из всякого рационального числа извлекается рациональный корень, поскольку практически достаточно обойтись некоторым приближенным значением и для рационального значения корня. Ученики с помощью таблиц находят нужные им приближенные значения и этим ограничиваются.

Точно так же учащиеся убеждены, что каждый отрезок имеет определенную длину, а фигура — определенную площадь и т. п. Эти интуитивные представления вполне естественны, так как практически нельзя обнаружить существование несоизмеримых отрезков. Однако дальнейшее изучение математики невозможно без расширения понятия об измерении и о числе.

При этом необходимо связать соответствующие вопросы курса геометрии и алгебры и ввести иррациональные числа для потребностей измерения. Дело в том, что когда иррациональные числа впервые вводились (например, в учебнике А. П. Киселева [100]) как неизвлекаемые корни из рациональных чисел, то у учеников создавалось представление об иррациональных числах как только о неизвлекаемых корнях. Хотя в средней школе мы не можем обойтись без введения иррациональных чисел, это не означает, что надо давать строгую теорию иррациональных чисел. И не только потому, что большинство научных теорий иррациональных чисел мало доступно для учащихся, но и потому, что в средней школе достаточно создать верные представления о сущности вопроса и предоставить большие возможности для применения новых понятий.

Прежде всего ученики должны понять, что множество рациональных чисел оказывается недостаточным для измерения любого отрезка. Необходимо доказать существование несоизмеримых отрезков. В учебнике геометрии А. П. Киселева [101] с помощью алгоритма Евклида доказывалось, что диагональ квадрата несоизмерима со стороною квадрата. Так, сначала доказывалось, что если алгоритм Евклида по отношению к двум отрезкам является бесконечным, то отрезки несоизмеримы, а затем, что процесс откладывания стороны квадрата на диагонали, остатка — на стороне квадрата и т. д. бесконечен.

Иногда в качестве примера несоизмеримых отрезков берутся стороны равнобедренного треугольника с углом при вершине 36°. Здесь бесконечность процесса откладывания соответствующих отрезков доказывается несколько проще (рис. 33).

В учебнике геометрии Н. А. Глаголева [83] доказательство существования несоизмеримых отрезков проводится при изучении теоремы Пифагора, из которой

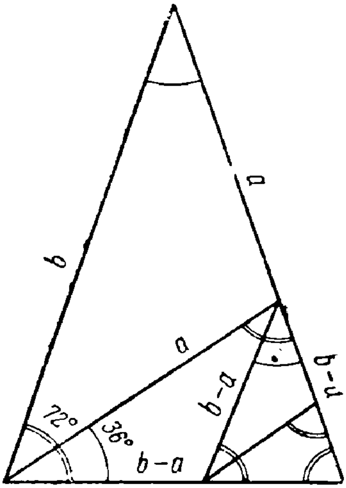


Рис. 33.

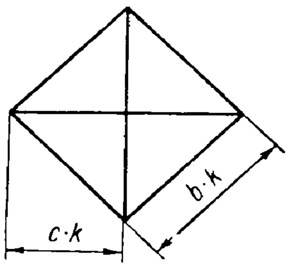


Рис. 34.

вытекает несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. С психологической точки зрения учащихся не удовлетворяет то, что им сообщают факты, которые будут доказаны еще не скоро.

Более простой подход предложили П. С. Александров и А. Н. Колмогоров [158]. Сначала устанавливается факт, что не существует такого рационального числа, квадрат которого был бы равен 2. Затем несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной устанавливается методом от противного с помощью чертежа (рис. 34): на диагонали данного квадрата строится квадрат. Легко видеть, что площадь второго квадрата ровно вдвое больше площади первого квадрата. Если бы сторона первого квадрата была соизмерима с его диагональю, то их общая мера содержалась бы целое число раз в каждой из них. Пусть эта мера k. Пусть в стороне квадрата она содержится c раз, а в диагонали — b раз. Тогда площадь первого квадрата равна $(c \cdot k)^2$, а площадь второго — $(b \cdot k)^2$ и $(c \cdot k)^2 \cdot 2 = (b \cdot k)^2$. Отсюда получаем: $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2$. Но $\frac{b}{c}$ — частное двух целых чисел и число рациональное. Получили, что если сторона квадрата соизмерима с его диагональю, то существует рациональное число, квадрат которого равен 2.

Это доказательство в некоторой степени нарушает научную систему изложения, так как здесь используется понятие площади до того, как полностью введено измерение отрезков: общее определение площади опирается на возможность измерить любой отрезок. Но в школьной программе площади квадрата, прямоугольника и т. д. для рациональных измерений изучают раньше, так что «чистота метода» программой не предусматривается, лишь бы не нарушалась логика изложения предмета. Ввиду простоты приведенное доказательство помещено в некоторые учебники [76, 125, 143, 144].

Из существования несоизмеримых отрезков вытекает, что не все отрезки при данной единице измерения имеют длину, если пользоваться лишь рациональными числами. Запас этих чисел достаточен только для измерения отрезков, соизмеримых с единицей длины. Отношение отрезка, соизмеримого с единицей измерения, к этому единичному отрезку, т. е. его длина, выражается (как это следует из определения соизмеримости двух отрезков) целым или дробным рациональным числом. Отношение отрезка, несоизмеримого с единицей длины, к единице не может быть выражено никаким рациональным числом. Для такого отрезка мы не сможем найти длину, оставаясь в области рациональных чисел (а других чисел мы пока не имеем).

При десятичном процессе измерения (когда единица длины каждый раз делится на десять равных частей) длина отрезка, соизмеримого с единицей длины, выразится либо конечной десятичной дробью (в частности, целым числом), либо бесконечной периодической десятичной дробью (если отрезок соизмерим с единицей, но несоизмерим ни с какой десятичной долей единицы). Периодичность бесконечной десятичной дроби, выражающей рациональную длину измеряемого отрезка, следует из процесса деления, с помощью которого рациональное число обращают в десятичную дробь. При делении натурального числа на любое натуральное число может получиться только конечное число различных остатков (не превосходящее делителя). Следовательно, при бесконечном делении некоторый остаток должен повториться, а за ним должны повториться остальные остатки и соответствующие цифры частного — получится периодическая дробь.

Если же отрезок несоизмерим с единицей измерения, то при десятичном процессе измерения получится бесконечная непериодическая десятичная дробь, так как в противном случае (если бы получилась конечная десятичная дробь или бесконечная, но периодическая десятичная дробь) результат измерения можно было бы обратить в обыкновенную дробь и оказалось бы, что отношение отрезка к единице длины выражается рациональным числом, т. е. он соизмерим с единичным отрезком.

В большинстве учебников иррациональное число определяется как бесконечная непериодическая десятичная дробь (это изложение примыкает к теории Вейерштрасса), т. е. как в статье П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [158] (см. также [219]).

В учебнике Д. К. Фаддеева, И. С. Соминского [144] иррациональное число определяется как длина отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба, а затем показывается, как можно находить приближения этого числа в виде десятичных дробей.

После выяснения недостаточности множества рациональных чисел для измерения отрезков и введения иррациональных чисел необходимо установить, что между множеством точек на числовой прямой и множеством действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие. Поскольку иррациональные числа вводятся для измерения отрезков, несоизмеримых с единицей длины, то сразу получается, что для каждого отрезка можно найти действительное число, выражающее его отношение к единице длины. Обратное положение (каждому действительному числу соответствует некоторый отрезок, и притом единственный, такой, что его длина выражается данным действительным числом) есть геометрическая аксиома непрерывности прямой. В большинстве учебников она явно не формулируется. В некоторых новых учебниках [62, 65, 76] подчеркивается это взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством действительных чисел. В учебнике И. А. Гибша [81] указывается, какая здесь используется аксиома. В учебнике [143, 144] аксиома непрерывности прямой формулируется явно в форме Кантора: для всякой стягивающейся последовательности вложенных друг в друга промежутков на прямой существует точка, принадлежащая всем промежуткам последовательности. Отсюда выводится непрерывность множества действительных чисел.

Можно не считать обязательным доказательство непрерывности множества действительных чисел в средней школе, но совершенно необходимо выяснить различие в структуре множества рациональных чисел и множества действительных чисел. Ученики должны понимать, что множество рациональных чисел является всюду плотным множеством, что между любыми двумя рациональными числами можно вставить сколько угодно других рациональных чисел, но тем не менее такое множество не является непрерывным, при этом множество «разрывов» оказывается более густым, чем множество рациональных точек. Следует прибегнуть к некоторым образам, чтобы сделать нагляднее эти весьма тонкие вопросы. Так, Н. Н. Лузин приводил такое сравнение: если представить, что рациональные точки не пропускают лучи солнца и поставить прямую на пути солнечных лучей, то нам покажется, что лучи пробиваются почти сплошь через прямую. В учебнике С. И. Туманова [142, стр. 255] применен такой образ: пусть рациональные точки окрашены в черный цвет, а иррациональные — в красный; тогда прямая нам представлялась бы сплошь красной. О мощности множества иррациональных чисел можно дать понятие, рассматривая иррациональные числа, получаемые из рационального последовательным разрушением периода бесконечной периодической десятичной дроби. Поскольку из каждого рационального числа можно таким способом получить множество иррациональных чисел, то у школьников создастся некоторое представление о том, что мощность иррациональных чисел больше мощности рациональных чисел. Далее выясняется непрерывность множества действительных чисел, вытекающая из непрерывности множества точек на прямой.

Для пояснения того, что каждое иррациональное число имеет вполне определенное место на числовой оси, полезно дать геометрическое построение некоторых иррациональных чисел, например, квадратных корней из натуральных чисел (рис. 35) с помощью теоремы Пифагора.

После того как введены иррациональные числа, устанавливаются правила сравнения их между собою и вводятся определения действий над ними. Первый вопрос не вызывает затруднений и во всех учебниках излагается примерно одинаково. Наибольшие трудности возникают при определении действий над иррациональными числами. Из всех научных теорий иррациональных чисел более доступной считалась теория Кантора — Мере, рассматривающая стягивающиеся последовательности вложенных друг в друга сегментов. Поэтому во многих учебниках, начиная с учебника А. П. Киселева, результат действия над иррациональными числами рассматривается как число, заключенное между всеми приближенными значениями результата, взятыми по недостатку, и всеми приближенными его значениями, взятыми по избытку [76, 90, 100, 142].

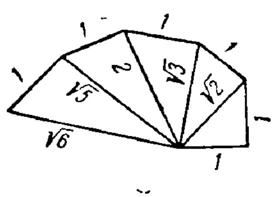


Рис. 35.

Такое громоздкое определение не создает у учащихся представления о результате действия над иррациональными числами и вообще об иррациональном числе как об определенном единственном числе. Это подтверждают эксперименты В. К. Матышука [202], который провел контрольную работу среди лучших учеников различных школ для выяснения их знаний об иррациональных числах. Выяснилось, что школьники считают иррациональное число «неточным», «приближенным», «колеблющимся», не имеющим определенного места на числовой оси. Многие учащиеся считали, что числа π, $\sqrt{2}$,

$\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$ нельзя сложить друг с другом, что это можно сделать лишь с числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ и т. п.*.

Другой причиной таких нечетких представлений об иррациональных числах В. К. Матышук считает неудачную терминологию («точный корень» и «неточный корень»). Он советует употреблять термины «приближенное значение корня» и «точное значение корня». Тогда учащимся будет ясно, что $\sqrt{2}$ —точный корень, а соответствующие десятичные дроби — его приближенные значения.

Далее он предлагает при определении действий над иррациональными числами прежде всего начать с геометрического изображения суммы. Например, пусть нужно сложить $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Мы уже видели, что можно точно построить отрезки, имеющие такую длину. На числовой прямой последовательно отложим эти отрезки, длина их суммы выразится суммой чисел $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (рис. 36).

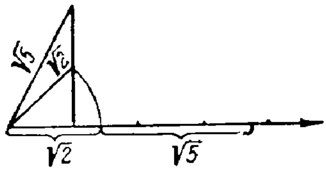


Рис. 36.

* В школах Эстонской ССР проводилась проверка на тему: что выносят учащиеся из школы об иррациональном числе [216]. Результаты проверки, проведенной в IX, X, XI классах, совпадают с выводами В. К. Матышука. Были предложены два вопроса: 1) какие числа называются иррациональными? 2) для какой цели расширяют множество рациональных чисел добавлением иррациональных?

Отвечали ученики, учившиеся у 17 различных учителей. На первый вопрос ответили 455 учащихся, на второй — 480.

Получено правильных ответов:

на первый вопрос	на второй вопрос
из IX классов — 5%,	из IX классов — 4%,
из X классов — 15%,	из X классов — 2%,
из XI классов — 48%.	из XI классов — 23%.
Из общего числа — 22%.	Из общего числа — 10%.

Как видно, большинство учащихся не приобретает в школе знания того, что такое иррациональное число, для чего создано это понятие, т. е. ничего не усваивает из этой темы. Любопытны ответы учащихся: «Иррациональным числом называется дробное число», «Иррациональным числом называется до бесконечности делимое число», «Иррациональные числа — это бесконечные десятичные дроби», «При помощи иррациональных чисел можно произвести вычисление точнее» и др.

Эти ответы указывают на слабые места в методике изучения иррациональных чисел и подтверждают сказанное выше.

Для выяснения понятия иррационального числа и суммы иррациональных чисел В. К. Матышук предлагает использовать таблицы приближенных значений чисел $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (табл. 4, 5, 6).

Таблица 4

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$$
$$1,41421<\sqrt{2}<1,41422$$
$$1,414213<\sqrt{2}<1,414214$$
$$1,4142135<\sqrt{2}<1,4142136$$
$$1,41421356<\sqrt{2}<1,41421357$$
$$1,414213562<\sqrt{2}<1,414213563$$
$$1,4142135623<\sqrt{2}<1,4142135624$$
$$1,41421356237<\sqrt{2}<1,41421356238$$
$$1,414213562373<\sqrt{2}<1,414213562374$$
. . . .

$$\sqrt{2}=1,414213562373\ldots$$

Таблица 5

$$2<\sqrt{5}<3$$
$$2,2<\sqrt{5}<2,3$$
$$2,23<\sqrt{5}<2,24$$
$$2,236<\sqrt{5}<2,237$$
$$2,2360<\sqrt{5}<2,2361$$
$$2,23606<\sqrt{5}<2,23607$$
$$2,236067<\sqrt{5}<2,236068$$
$$2,2360679<\sqrt{5}<2,2360680$$
$$2,23606797<\sqrt{5}<2,23606798$$
$$2,236067977<\sqrt{5}<2,236067978$$
$$2,2360679774<\sqrt{5}<2,2360679775$$

Продолжение

$$2{,}23606797749 < \sqrt{5} < 2{,}23606797750$$

$$2{,}236067977499 < \sqrt{5} < 2{,}236067977500$$

. . . .

$$\sqrt{5} = 2{,}236067977499\ldots$$

Таблица 6

$$3 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 5$$

$$3{,}6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}8$$

$$3{,}64 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}66$$

$$3{,}650 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}652$$

$$3{,}6502 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}6504$$

$$3{,}65027 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}65029$$

$$3{,}650280 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}650282$$

$$3{,}6502814 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}6502816$$

$$3{,}65028153 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}65028155$$

$$3{,}650281539 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}650281541$$

$$3{,}6502815397 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}6502815399$$

$$3{,}65028153986 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}65028153988$$

$$3{,}650281539872 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3{,}650281539874$$

. . . .

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3{,}65028153987\ldots$$

Рассматривая эти таблицы, ученики замечают, что можно определить абсолютно точно любой десятичный знак иррационального числа и результата действия над иррациональными числами (нет необходимости так подробно исследовать и произведение, уже на примере сложения учащиеся получат о нем правильные представления), ибо этот десятичный знак оказывается одинаковым у приближения с недостатком и у приближения с избытком и в дальнейшем не меняется, что позволяет последовательно записать вполне определенные десятичные знаки этого числа.

И. В. Арнольд [3] применяет в таком случае выражение данная цифра «устанавливается», т. е. при дальнейших уточнениях уже не изменяется. Кроме того, он предлагает ограничиться рассмотрением какой-либо последовательности приближенных значений по недостатку или по избытку, так как и с ее помощью можно заметить, что цифры постепенно устанавливаются. При этом с иррациональными числами следует обращаться так же, как и с бесконечными периодическими дробями: либо производить вычисления, ограничиваясь заданным числом знаков, либо начинать действия с высших разрядов (для этого необходимо заглядывать на один-два знака вперед, чтобы учесть переход через десяток).

Например,

$$\begin{array}{r} 2{,}3719\ldots \\ +3{,}5912\ldots \\ \hline 5{,}9631\ldots \end{array}$$

Здесь при сложении цифр высших разрядов, заглядывая вперед, мы усилили на единицу цифру 8 десятых долей и цифру 2 тысячных, так как $7 + 9 = 16$, $9 + 2 = 11$.

Такая методика была реализована еще в учебнике проф. Д. А. Граве [90]. В настоящее время такое изложение находим в курсе проф. И. К. Андронова [60].

Если в курсе арифметики была проведена необходимая пропедевтика в обращении с бесконечными периодическими десятичными дробями, то иррациональные числа будут казаться учащимся столь же естественными, как и десятичные дроби.

В других новых учебниках [62, 65, 143—144] также можно заметить попытки ограничиться рассмотрением одной последовательности приближенных значений после общего определения с помощью двойных последовательностей (строго эта теория излагается в учебнике И. А. Гибша [81]).

Для большей конкретизации результатов действий над иррациональными числами полезно, кроме геометрической интерпретации суммы иррациональных чисел, познакомить учащихся с геометрической иллюстрацией произведения, либо рассматривая площадь прямоугольника [110—112] (рис. 37, *б*), либо производя построение четвертого пропорционального по формуле $x : a = b : 1$, как это сделано в учебнике [143—144] (рис. 37, *а*). Аналогично в этом учебнике иллюстрируется деление. Возведение в степень разъясняется с помощью графика степенной функции $y = x^n$.

Заметим, что в учебнике [62] $\sqrt{2}$ изображается не как гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника, как в большинстве пособий, а как абсцисса графика функции $y = x^2$ для ординаты $y = 2$.

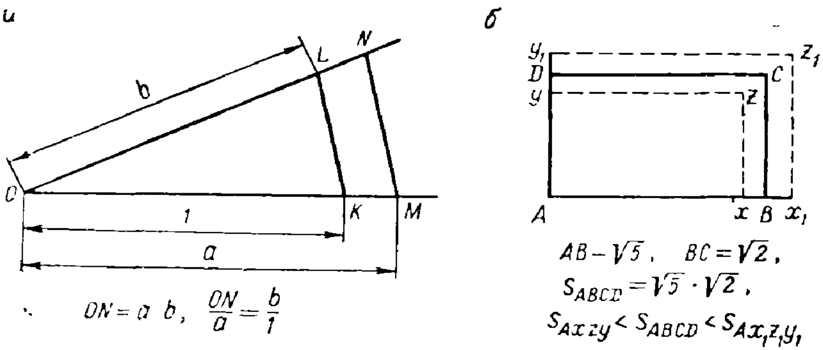


Рис. 37.

Но основное значение имеет практика вычисления с любой наперед заданной степенью точности по правилам приближенных вычислений. При вычислениях с иррациональными числами можно дать понятие о точном учете погрешностей по способу границ [157].

Необходимо также обратить внимание на то, что в результате действий над иррациональными числами могут получаться как иррациональные, так и рациональные числа. Для этого нужно привести примеры на сложение бесконечных непериодических десятичных дробей, когда в сумме получается бесконечная периодическая десятичная дробь. Такие примеры есть в книге И. К. Андронова [60]. Для закрепления материала полезно дать вопросы из задачника А. П. Ларичева [109, №№ 374, 375, 376].

В заключение остановимся на одном вопросе, связанном с определением иррационального числа. В старых изданиях учебника А. П. Киселева [102, до 23-го изд.] иррациональное число определялось как предел его рациональных приближений. В таком определении содержится логический круг, ибо до введения иррациональных чисел и действий первой ступени над ними не всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел имеет предел. Кроме того, чтобы проверить, что некоторое число x является пределом данной последовательности, нужно убедиться, что абсолютная величина разности $|x - a_n|$ стремится к нулю. Для этого надо уметь вычислять эту разность, т. е. иметь определение вычитания иррационального числа из рационального. Последнего можно избежать, если рассматривать двойные последовательности, но первое замечание остается в силе: в области рациональных чисел не всякая сходящаяся последовательность (т. е. последовательность, удовлетворяющая признаку сходимости Коши) имеет предел. В таком случае, по определению, самую эту последовательность и принимают за новое число, называемое иррациональным (если вводят иррациональные числа с помощью сходящейся последовательности или говорят, что эта последовательность определяет новое число).

Аналогично поступают при других построениях теории иррациональных чисел. После того как введены иррациональные числа и получено непрерывное множество действительных чисел, каждая сходящаяся последовательность рациональных чисел, как и всякая фундаментальная последовательность действительных чисел, имеет предел. Тогда можно результаты операций над иррациональными числами определить как пределы (как видно из сказанного, для действий первой ступени при этом необходимо рассматривать двойные последовательности). Такое определение степени с иррациональным показателем дано в некоторых учебниках [62, 65, 76, 142, 143, 144].

§ 7. Введение мнимых чисел. Поле комплексных чисел

Эта тема в школьном учебнике А. П. Киселева [100] изложена совершенно неудовлетворительно: у учащихся не создавалось правильного представления о мнимых числах. Кроме того, объем школьной программы не позволяет показать применение комплексных чисел в электротехнике, гидромеханике, теории упругости и т. п. Поэтому высказывается предложение исключить эту тему из школьной программы (так сделано в школах ГДР) Подобная мысль, например, высказана крупным советским математиком проф. А. Я. Хинчиным [221 а].

Все же тема «Комплексные числа» при всех перестройках программы по математике, имевших место за последние 20 лет, в школьном курсе сохранилась. Это объясняется тем, что эта тема завершает школьный курс алгебры, а именно расширение понятия о числе заканчивается введением мнимых чисел, ибо поле комплексных чисел представляет собою максимальное числовое поле, в котором сохраняются еще основные законы арифметики (хотя уже здесь не удается сохранить сравнение чисел по величине). Далее, изучение уравнений, занимающих центральное положение в курсе алгебры наряду с понятием функции, может быть закончено только после введения мнимых чисел, так как иначе не может быть сформулирована так называемая «основная теорема алгебры» о существовании корня любого алгебраического уравнения (правда, эта теорема дается без доказательства).

Поскольку тема остается в программе, необходимо устранить по возможности недостатки в методике ее преподавания, из-за которых учащиеся не понимали смысл и значение комплексных чисел.

Во-первых, надо конкретно интерпретировать комплексные числа. Во-вторых, важно показать все доступные учащимся примеры применения комплексных чисел к решению математических задач.

Как известно из истории математики, комплексные числа, так же как и отрицательные, получили полное признание лишь после того, как была найдена их геометрическая интерпретация. Поэтому в школьной практике следует опереться на геометрическое истолкование комплексных чисел.

Прежде чем перейти к введению мнимых чисел, необходимо проследить развитие понятия о числе в предыдущих классах. Здесь следует подчеркнуть как алгебраическую, так и геометрическую сторону вопроса, выяснить цели каждого расширения понятия о числе и общие принципы, в соответствии с которыми совершалось расширение понятия о числе. Каждое расширение понятия связано с необходимостью открытия новых путей решения задач, не разрешимых старыми средствами. В случае расширения понятия о числе с алгебраической точки зрения речь идет о расширении области допустимых значений для неизвестного при решении уравнения, иначе говоря, о том, чтобы постепенно сделать разрешимым любое алгебраическое уравнение. Практическое значение этого вопроса тоже ясно: задача, для которой составлено уравнение, может оказаться неразрешимой в некоторой числовой области, если неразрешимо данное уравнение. Расширение понятий производится в соответствии с принципом перманентности, сущность которого здесь разъясняется учащимся (можно воспользоваться, например, учебником [143, 144]).

С геометрической точки зрения оказывается, что изученный до сих пор запас чисел достаточен, чтобы охарактеризовать положение любой точки на прямой или любой направленный отрезок прямой.

Как же можно охарактеризовать положение любой точки на плоскости или любой отрезок плоскости, если нас интересует не только длина отрезка, но и его положение на плоскости? Здесь придется рассмотреть пару действительных чисел (a, b) (декартовы координаты точки или вектора), либо пару чисел $[\rho, \varphi]$ (полярные координаты). Эту пару чисел будем считать новым числом — комплексным. Над отрезками, расположенными на плоскости и имеющими определенное направление, т. е. над векторами, можно производить такие же операции, как и над отрезками прямой. Если мы пару чисел будем считать числом, то естественно возникает задача по двум комплексным числам, характеризующим слагаемые (или перемножаемые) векторы, найти число, характеризующее сумму векторов (произведение их). Это число можно назвать суммой (произведением) соответствующих чисел.

При таком изложении ученики познакомятся по определению с правилами действия над векторами. Эти определения имеют вполне конкретный смысл. Поэтому вводимые затем формальные определения действий над комплексными числами будут вполне оправданы в глазах учащихся. Они смогут убедиться, что аналогичное соответствие между действиями над числами и действиями над отрезками имело место для действительных чисел. Оно представляет собою частный случай соответствия между операциями над любыми векторами плоскости и комплексными числами. Для этой цели правило сложения векторов удобно сформулировать не по «правилу параллелограмма», а по «правилу треугольника»:

для получения вектора-суммы необходимо к концу первого слагаемого приложить начало второго, и началом вектора-суммы будет начало первого слагаемого, а концом — конец второго. Тогда ясно, что правило сложения направленных отрезков на прямой является частным случаем этого правила и что сумма векторов, так же как и сумма направленных отрезков, представляет собою один переход, заменяющий два последовательных перехода.

Точно так же операторное определение умножения векторов является обобщением определения умножения направленных отрезков прямой. Направленный отрезок как оператор второй ступени при умножении обозначал растяжение множимого отрезка в несколько раз и поворот на 0° или на 180° (если множитель был отрицательным, т. е. его аргумент как компонент комплексного числа равнялся 180°). Точно так же вектор-множитель как оператор означает растяжение множимого в несколько раз и поворот на угол, равный аргументу множителя.

При таком определении умножения легко обнаруживается существование такого вектора (и соответствующего ему комплексного числа), что его двукратное применение как множителя означает перемену знака действительного числа на противоположный: для этого достаточно вектор на оси x дважды повернуть на 90°. Если модуль этого вектора взять равным 1, то получится вектор [1; 90°], квадрат которого равен —1, т. е. число i.

В новой числовой области оказывается выполнимой операция извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Число i появляется вполне естественно при таком изложении.

При геометрическом введении комплексных чисел для определения действий первой ступени удобно воспользоваться декартовыми координатами, а для определения действий второй и третьей ступеней — полярными координатами. В учебнике И. А. Гибша [81] этот материал так и дается. В других новых учебниках тоже используется геометрическая теория, причем алгебраическая форма комплексного числа появляется лишь после определения всех действий над комплексными числами [62, 76]. При этом число i вводится после определения умножения как поворота и растяжения вектора-множимого. Оно характеризует поворот на 90°, и квадрат его оказывается равным —1. Это операторное истолкование множителя делает весьма конкретным смысл мнимой единицы и всех операций над комплексными числами.

Операторная теория излагается в учебниках для вузов [61, 116, 149]. В учебнике И. К. Андронова [60] комплексные числа вводятся сразу в алгебраической форме, но действительная и мнимая части истолковываются как коэффициенты при единичных векторах осей Ox и Oy, так что изложение фактически тоже геометрическое. В остальных учебниках [65, 98, 100, 142, 143—144] изложение начинается с алгебраической формы, но везде дается геометрическое изображение комплексного числа и истолкование действий (кроме учебника [100], где не дается геометрическая иллюстрация действий). Такое изложение носит более формальный характер и недостаточно конкретизирует смысл комплексных чисел. В ряде учебников $\sqrt{-1}$ обозначается через i, хотя это неточно. В учебнике Л. Н. Барсукова [65] этот корень обозначается $\pm i$.

Необходимо предостеречь от ошибки, встречавшейся в старых учебниках и методиках при геометрическом истолковании мнимой единицы [220]. Это повторение исторической ошибки Аргана, когда соотношение, справедливое для положительных отрезков, неправильно распространяли на отрицательные отрезки. На координатной плоскости из начала координат как из центра строилась единичная полуокружность. Далее применялась теорема, согласно которой отрезок перпендикуляра, восставленного из любой точки диаметра полуокружности до пересечения с нею, есть среднее геометрическое между отрезками диаметра. В качестве отрезка перпендикуляра брался радиус OM (рис. 38). Тогда отрезки диаметра OB и OA соответственно равнялись $+1$ и -1, а $OM=\sqrt{OB\cdot OA}=\sqrt{(+1)(-1)}=\sqrt{-1}$. Использование

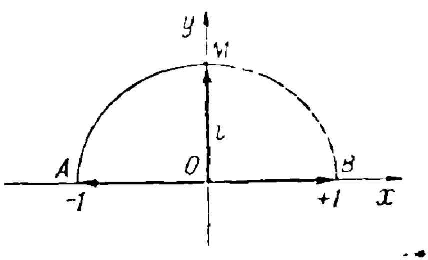


Рис. 38.

известной геометрической теоремы здесь совершенно неправомерно, так как она доказана только для положительных отрезков.

Во многих учебниках в записи $a + bi$ a называют действительной частью числа, а bi — мнимой. Правильнее называть мнимой частью число b, так как новое понятие можно определить через уже известное. Символ же bi выражен через новый символ и сама запись bi еще условна, так как умножение не определено. В учебниках В. М. Брадиса, И. А. Гибша [76, 81] мнимой частью называют число b.

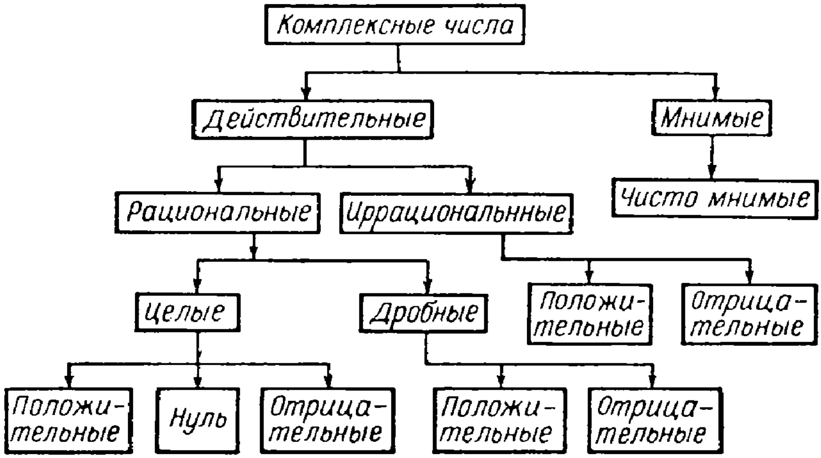


Рис. 39.

В учебнике [65] приведена классификация всех категорий чисел, изученных учащимися, которая помогает уяснить соотношения между различными числовыми множествами (рис. 39). Полезно также для этой цели использовать изображение числовых множеств с помощью кругов Эйлера, где буквы N, C, R, D, K соответственно обозначают множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел [48] (рис. 40).

В заключение приведем примеры применения комплексных чисел.

1. *Теорема.* Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, есть опять сумма квадратов двух целых чисел [50, 143, 144].

Доказательство. Пусть $m = a^2+b^2$; $n=c^2+d^2$, где a, b, c, d — целые числа. Тогда

$$m = (a + bi)(a - bi),$$

$$n = (c+di)(c-di),$$

отсюда

$$m \cdot n = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di).$$

Перегруппируем сомножители:

$$mn = [(a + bi)(c + di)][(a - bi)(c - di)] = [(ac - bd) + (ad + bc)i][(ac - bd) - (ad + bc)i] = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

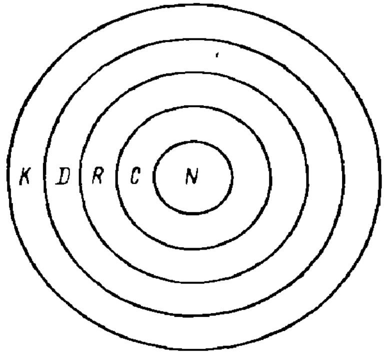


Рис. 40.

Теорема доказана. Можно перегруппировать сомножители иначе и получить второе представление произведения mn в виде суммы двух квадратов:

$$mn = [(a + bi)(c - di)][(a - bi)(c + di)] =$$

$$= [(ac + bd) + (bc - ad)i][(ac + bd) - (bc - ad)i] =$$

$$= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2.$$

Пример 1. $a = 3$, $b = 1$, $c = 4$, $d = 2$, $m = 3^2+1^2=10$. $n = 4^2+2^2=20$; $mn = 10 \cdot 20 = (3 \cdot 4 - 1 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 2 + 1 \cdot 4)^2 = 10^2+10^2$ или $10 \cdot 20 = (3 \cdot 4 + 1 \cdot 2)^2 + (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2)^2 = 14^2 + 2^2$.

В частности, если $a = c$ и $b = d$, получаем тождество: $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$.

Второе представление здесь дает исходное произведение.

Пример 2. $29 = 2^2+5^2$; $29^2=(2^2-5^2)^2+(2\cdot2\cdot5)^2=21^2+$ $+20^2=841$.

Квадрат суммы квадратов двух целых чисел есть сумма квадратов двух целых чисел.

2. Вывод формул для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ [124, 143, 144].

Разложим выражение $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ по формуле бинома Ньютона, а затем по формуле Муавра и сравним действительные и мнимые части двух равных комплексных чисел:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + iC_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi -$$
$$- C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi - iC_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$
$$+ C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots$$

или

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots) + i(C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi -$$
$$- C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots).$$

С другой стороны, по формуле Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Отсюда

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi -$$
$$- C_n^6\cos^{n-6}\varphi\sin^6\varphi + \ldots,$$

$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$
$$+ C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots$$

При $n=2$ получим

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi;\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

При $n=3$ найдем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi;\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi,$$

Правило умножения комплексных чисел можно применить и к выводу формул для тригонометрических функций от суммы любого числа слагаемых, частным случаем которых являются выведенные формулы тригонометрических функций кратных дуг. Так, получим следующие формулы:

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n (P_1 - P_3 + P_5 - \cdots),$$

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n (1 - P_2 + P_4 - \cdots),$$

где $P_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{tg}\alpha_n$, $P_2 = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_3 + \cdots + \operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n$, $\ldots$, $P_k = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \cdots \operatorname{tg}\alpha_k + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \cdots \operatorname{tg}\alpha_{k+1} + \cdots$

есть сумма всевозможных произведений тангенсов, взятых по k. Для доказательства нужно рассмотреть n комплексных чисел

$$x_1 = \cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1,\ x_2 = \cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \cos\alpha_n + i\sin\alpha_n.$$

Перемножив эти числа, найдем:

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\cdots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

Перемножив эти же числа, как многочлены, получим нужные формулы [124].

Эти формулы, возможно, удастся вывести лишь на занятиях в кружке. Во всяком случае учитель должен дорожить каждым примером применения комплексных чисел, доступным учащимся. В этом направлении можно также использовать ряд работ [195, 211, 224].

После изучения комплексных чисел следует дать понятие о группе, идее изоморфизма, с которой ученики уже встречались, понятие о современной алгебре и об алгебраических структурах [30, 185, 196, 208, 221].

Глава 5. Методика изучения уравнений в курсе алгебры восьмилетней и средней школы

§ 1. Понятие уравнения и тождества

В старых учебниках алгебры, в том числе в учебнике алгебры А. П. Киселева, уравнение и тождество характеризовались как два вида равенства (равенство определяется как два числа или два выражения, соединенные между собою знаком равенства). Уравнение рассматривалось как равенство, удовлетворяющееся лишь при некоторых значениях неизвестного, а тождество — как равенство, удовлетворяющееся при всех значениях неизвестного.

Эти определения, характеризующие уравнение и тождество как виды одного понятия и дающие слишком узкое понятие об уравнении, вызвали появление ряда критических работ, обсуждавших определение уравнения и связь между уравнением и тождеством. Так, А. Н. Барсуков [5] определение уравнения считает неудовлетворительным по той причине, что оно исключает из понятия уравнения такие уравнения, которые удовлетворяются тождественно, и уравнения, не имеющие решений. Между тем, составляя уравнение по условию задачи, мы не можем заранее знать, имеет ли оно конечное число корней или удовлетворяется тождественно, или вообще не имеет решения. Следовательно, пока уравнение не решено, трудно сказать, решали ли мы уравнение, или доказывали тождество, или вообще имели дело с чем-то, не являющимся ни тождеством, ни уравнением (если окажется, что уравнение не имеет решения).

Далее А. Н. Барсуков указывает, что ответ на вопрос, имеет уравнение решение или нет, а также удовлетворяется ли оно тождественно, может быть различным в зависимости от того, в какой числовой области мы разыскиваем решение уравнения, т. е. зависит от области допустимых значений для неизвестного. Получится, что данное равенство в одной области допустимых значений для неизвестного (или для параметров в параметрическом уравнении) будет уравнением, в другой — тождеством, а в третьем — ни тем и ни другим.

Например, уравнение $|x| = x$ в области натуральных чисел удовлетворяется тождественно, но уже в области целых чисел оно не удовлетворяется тождественно. Уравнение $x + 5 = 2$ в области положительных чисел не имеет решения, но имеет решение в области целых чисел. Уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения в области рациональных чисел, но имеет его в области действительных чисел.

В новых учебниках, начиная с учебника П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [59], дается другое определение уравнения, устраняющее указанные недостатки определения А. П. Киселева и оставляющее возможность дальнейшего обобщения. Приведем определение из этого учебника: «Каждое равенство, в котором одна буква считается неизвестной, а остальные (если они есть) считаются известными, называется уравнением с одним неизвестным». Решить уравнение — значит найти те значения неизвестного, при которых равенство обращается в верное числовое равенство. Ясно, что здесь заранее не предопределяется существование корней и их число.

Это определение позволит дать в дальнейшем функциональное определение уравнения как равенства двух функций (в VIII классе) и как некоторую логическую функцию.

Если мы имеем уравнение $F(x) = \Phi(x)$ (для простоты записан общий вид уравнения с одним неизвестным), то можно рассматривать два множества — множество допустимых значений для неизвестного M и множество решений N. Тогда представляются следующие три случая: 1) множество N является собственной частью множества M, 2) множество N — пустое множество, 3) множества M и N совпадают.

В первом случае уравнение имеет решения, но не удовлетворяется тождественно. Во втором оно не имеет решений. В третьем случае уравнение удовлетворяется тождественно в заданной области допустимых значений. Наряду с уравнением в этом случае можно записать тождество и поставить задачу не решения уравнения, а доказательства тождества в данной области допустимых значений.

Таким образом, данное равенство (например, $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$) может рассматриваться и как тождество, и как уравнение в зависимости от постановки задачи. В некоторых учебниках и методиках [21, стр.122] поэтому встречались следующие объяснения. Уравнение — это равенство, выражающее вопрос, при каких значениях неизвестного оно становится верным числовым равенством. Тождество — утверждение, что данное равенство верно при всех (допустимых) значениях неизвестного.

Ввиду различий во взглядах на соотношение между уравнением и тождеством анализ этих понятий не прекратился и после выхода работы А. Н. Барсукова [240—244].

Так, С. И. Новоселов [241], анализируя различные определения понятий уравнения и тождества, считает, что по существу здесь идет речь о категориях различного рода, а поэтому и несравнимых друг с другом. Это различие в курсах высшей алгебры отмечается наличием двух символов — знака равенства ($=$) и знака тождества ($\equiv$). Последний часто заменяется знаком равенства, когда нет опасности смешения понятий. Новоселов показывает, что над тождествами можно производить операции, недопустимые для уравнений. Например, для тождеств имеет место закон транзитивности: если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$. Для уравнений этот закон неприменим. Так, уравнения $x^2=1$, $1 = x^3$ и $x^2 = x^3$ не находятся между собою ни в какой связи, т. е. множество решений у всех трех уравнений не совпадает. Множество решений первого уравнения $+1$, -1, множество решений второго уравнения $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, множество решений третьего уравнения 0, 0, 1.

Это различие между уравнением и тождеством подчеркивается обязательным требованием, выдвигаемым в методических руководствах и каждым учителем, переписывать каждый раз заново уравнение, заменяя его равносильным, при этом преобразование цепочкой запрещается. При тождественных же преобразованиях такая запись цепочкой вполне допускается, а иногда даже рекомендуется.*

Другие свойства тождества — это свойства симметрии и рефлексивности. Эти три свойства являются характеристическими свойствами всех соотношений «типа равенства» (равенство чисел, равносильность уравнений, подобие, конгруэнтность, равновеликость фигур, параллельность, тождественность многочленов и др.). Эти соотношения называются соотношениями эквивалентности и часто служат принципом отождествления объектов определенного множества, например пар натуральных чисел, представляющих целые числа.

Поэтому тождественные преобразования могут изучаться независимо от уравнений. Задача доказательства тождества — это иная задача по сравнению с задачей решения уравнений. Все это верно, однако не противоречит тому, что тождество — частный случай уравнения и как таковой имеет специфические свойства. В этом С. И. Новоселов не прав.

Для лучшего анализа понятия уравнения Новоселов прибегает к терминологии математической логики. Уравнение с этой точки зрения представляет собою суждение о наличии равенства между значениями двух функций. Это суждение может быть верным, или неверным, или верным при одних значениях неизвестного (аргумента) и неверным при других значениях аргумента. Решение уравнения состоит в выяснении того множества значений аргумента, при которых равенство имеет место, т. е. суждение о наличии равенства оказывается верным. (Мы здесь видим более точно выраженную мысль, что «уравнение — это вопрос», которую С. И. Новоселов сначала отвергает [241] и с которой соглашается позже [242].)

Смешение понятий тождества и уравнения происходит, по мнению С. И. Новоселова, из-за отсутствия в элементарной алгебре двух знаков, имеющихся в высшей алгебре. Для этих знаков полезно было бы иметь и два

* Нужно иметь в виду, что при расширенном определении тождества (см. стр. 47) закон транзитивности следует применять с осторожностью. Необходимо следить за тем, чтобы оба тождества определялись на одном и том же множестве. Так, применяя формально закон транзитивности к двум тождествам $10^{\lg x} = x$ и $-10^{\lg(-x)} = x$, получаем неверное равенство $10^{\lg x} = 10^{\lg(-x)}$.

различных термина (для знаков $=$ и $\equiv$) при обозначении тождества и уравнения (условного равенства).

Однако вряд ли было бы целесообразно вводить новые термины специально для начального преподавания, так как на практике можно избежать смешения понятий и при пользовании одним знаком и одним термином. Каждый раз задача ставится достаточно определенно, и у школьников нет возможности сомневаться в том, о чем идет речь. Учитель должен ясно представлять себе вопрос и не смешивать понятия в своем преподавании. Конечно, если учитель найдет полезным использовать на первых порах оба знака, применяемых в высшей алгебре, то он может это сделать и при отсутствии второго знака в учебнике.

Итак, в начальном обучении алгебре вполне можно остановиться на определении уравнения П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, затем перейти от него к функциональному определению. Как упоминалось, это определение легко обобщается в определение, использующее терминологию математической логики, характеризующее уравнение как логическую функцию [244]. Эта последняя точка зрения используется в начальной теории уравнений [9].

Противопоставляя понятия тождества и уравнения и их свойства, необходимо иметь в виду, что при решении уравнений мы пользуемся как свойствами тождеств (преобразуя отдельные части уравнения, заменяя их тождественными им функциями), так и свойствами уравнений, т. е. теоремами о равносильности уравнений (заменяя уравнение равносильным ему уравнением, части которого могут не быть тождественными частями первого уравнения). Например, в уравнении $2(x+2)=3(x-1)+$ $+5$ мы сначала раскрываем скобки и приводим подобные члены, т. е. применяем тождественные преобразования частей уравнения $2x+4=3x-3+5$; $2x+4=3x+2$. Затем, применяя первую теорему о равносильности, переносим известные члены в одну часть уравнения, а неизвестные — в другую: $3x-2x=4-2$. Здесь уже совсем другие части уравнения. Затем опять делаем приведение подобных членов: $x=2$ и приходим к уравнению, корни которого очевидны. Для избежания возможного смешения в обоих случаях рекомендуется переписать уравнение, отделяя записи знаком препинания (обычно точкой с запятой).

С этими двумя видами преобразований, применяемых при решении уравнений, связаны и две группы типичных ошибок, допускаемых учащимися при решении уравнений: 1) ошибки в тождественных преобразованиях (например, ошибки в знаках при приведении дробей к общему знаменателю), 2) ошибки в преобразованиях на основе теорем о равносильности уравнений (например, отбрасывают знаменатель в одной части уравнения, не умножая на него вторую часть уравнения. Так, заменяют уравнение $\frac{8-x}{6} - \frac{5-4x}{3} = x + 6$ неравносильным уравнением $8-x-2(5-4x) = x+6$). Для предупреждения этой ошибки не следует пользоваться термином «отбрасываем знаменатель». Такой операции в алгебре нет. Следует говорить: «умножаем обе части уравнения на одно и то же выражение, отличное от нуля».

§ 2. Методика обучения составлению уравнений по условию задачи

В решении любой задачи можно обнаружить те же четыре этапа, какие по традиции четко выделяются при решении геометрических задач на построение. Эти этапы легко заметить и в процессе решения арифметических и геометрических задач. Проследим данные этапы в решении задачи методом составления уравнений.

Первый этап — анализ. Предполагая, что искомый элемент уже построен, мы пытаемся установить связи, существующие между ним и данными, зависимость искомого элемента от данных элементов. Мы идем от искомого элемента к данным и при этом рассуждаем о нем, как о данном. Это характерная особенность аналитического метода рассуждения. Совершенно аналогично мы действуем при составлении уравнения по условию задачи. Обозначив неизвестное число некоторой буквой, мы рассуждаем о нем так, как если бы оно нам уже было известно, и стараемся установить функциональную зависимость между ним и данными числами. Полученное в результате этих поисков уравнение и представляет собою функциональную зависимость искомого числа от заданных чисел, позволяющую вычислить искомое число, оперируя над данными числами. Точно так же, как в задаче на построение, в результате анализа мы составляем план построения (вычисления) искомого элемента с помощью данных элементов.

Второй этап — построение. Ему в нашем случае соответствует решение уравнения, выражение неизвестного числа уже в виде явной функции от данных, если они заданы параметрически, или вычисление неизвестного, если данные — известные числа.

Третий этап — доказательство. Ему отвечает проверка найденных корней по уравнению и условию задачи.

Наконец, четвертый этап — исследование условий возможности построения и числа решений. В решении задач методом уравнений и самих уравнений этот этап всегда присутствует явно и под тем же названием: исследование задач и уравнений.

Поэтому нам необходимо рассмотреть методику изучения уравнений и решения задач методом составления уравнений по указанным четырем этапам.

Из четырех составных частей процесса решения задач методом составления уравнений наибольшие трудности для учащихся представляют первый и последний этапы (аналогично задачам на построение). Если вдуматься в существо вопроса, то сразу станет ясно, отчего это происходит Ведь именно эти два этапа — составление уравнения и исследование его решений — совершенно не формализованы. Остановимся сначала на процессе составления уравнения по условию задачи. В настоящее время в учебниках алгебры мы нигде не встретимся с «правилом» составления уравнения по условию задачи. Между тем многие теоремы школьного курса алгебры сформулированы в форме правил. Например, такие правила существуют для решения уравнений первой степени, квадратных уравнений (формула решения квадратного уравнения и т. д.). В этих правилах говорится, что для того чтобы решить уравнение такого-то вида, нужно последовательно проделать определенные действия. В некоторых случаях указывается совершенно определенный алгоритм. Такого алгоритма не существует для составления уравнения по условию задачи.

В старых учебниках алгебры были попытки указать некоторое общее правило составления уравнений по условию задачи. Известны три основных правила такого рода: правило Коши (или Лакруа, или правило проверки), правило перевода и правило сравнения. Первое правило состоит в следующем. Для того чтобы составить уравнение, надо обозначить неизвестное буквой, например буквой x, и проделать с ним и данными числами все вычисления, которые необходимо сделать, чтобы проверить, верно ли найдено решение.

Второе правило (называемое правилом Ньютона) гласит: чтобы составить уравнение, необходимо условие задачи перевести с родного языка на алгебраический язык. Очень хорошо разъясняется это правило в книге Я. И. Перельмана [37, стр. 36—37], где дается отрывок из «Универсальной арифметики» Исаака Ньютона (1707), в которой впервые формулировалось данное правило.

Наконец, третье правило — правило сравнения — требует составить два разных выражения для одной и той же величины и поставить между ними знак равенства.

Хороший методический анализ всех этих общих правил содержится в книге А. Н. Барсукова [5].

Если вдуматься в эти правила, то обнаружится, что каждое из них с определенной стороны характеризует процесс составления уравнения по условию задачи. Обозначая неизвестное буквой и проделывая над ним и над данными числами действия, связывающие неизвестное число с данными, поступаем так, как поступали бы при проверке решения по условию задачи. Составляя алгебраические выражения, представляющие части уравнения, мы как бы переводим условие задачи с обычного языка на алгебраический. Мы действительно составляем два алгебраических выражения, между которыми можно поставить знак равенства. Поэтому на более позднем этапе обучения методу составления уравнений, возможно, полезно сообщить учащимся эти правила. Во всяком случае учитель должен быть с ними знаком.

Однако дело в том, что эти правила не сможет применить тот, кто не умеет составлять уравнения по условию задачи. Например, если предложить ученику, впервые решающему задачу, не поддающуюся простому арифметическому решению, решить ее, пользуясь одним из правил (алгебраически обозначить неизвестное число через x и проверить, правильно ли оно найдено, или «перевести» задачу с родного языка на алгебраический), то он не сможет этого сделать.

Я. И. Перельман в связи с этим указывает: «... Язык алгебры весьма немногословен; поэтому перевести на него удается далеко не каждый оборот родной речи» [37, стр. 37].

Точно так же, для того чтобы проверить решение, ученик должен уметь производить действия над буквенными выражениями, анализировать условие задачи, т. е. составлять уравнение. Ведь эти правила не указывают, как это сделать, какие действия и в каком порядке нужно для этого произвести. Вряд ли и возможно дать один алгоритм составления уравнения для любой задачи. Эти правила по существу представляют собою тавтологию: для составления уравнения нужно его составить. Поэтому ученик окажется беспомощным при решении задачи, зная какое-либо из этих правил (или все вместе) или не зная их. Недаром в старой школе, да и в первые годы работы советской школы, составление уравнений представляло для учащихся огромные трудности. Публиковалось множество статей, в которых обсуждалась методика обучения составлению уравнений по условию задач (среди них, например, такая: «Уравнение — больное место в преподавании алгебры» [212]).

А. Н. Барсуков [5], проанализировав и обобщив весь этот материал, пришел к выводу, что идти нужно по совершенно другому пути. Надо не искать какие-то универсальные «правила» составления уравнений, а обучать учащихся с помощью системы упражнений решать задачи на составление уравнений. Эта система должна обеспечивать приобретение достаточно большого и разнообразного опыта в применении уравнений и охватывающих все основные типы рассуждений, которые встречаются при составлении уравнений. Для того чтобы учитель мог справиться с этой проблемой, он должен ясно представлять себе систему задач, знать основные типы этих задач.

Собственно говоря, эта идея (создание целесообразной системы упражнений) лежит в основе современных программированных учебников. Если такие учебники будут созданы, то учитель получит уже готовую систему упражнений (не только для развития навыков составления уравнений). Надо думать, что и тогда роль учителя не сведется к слепому следованию за учебником. Но и тогда ему нужно будет иметь ясное представление о системе построения учебника, о принципах, положенных в основу его построения. При этом он должен всегда иметь в виду, что учебник никогда не сможет быть одинаково пригодным для любого учащегося. В настоящее время, когда в распоряжении учителя имеется лишь задачник (в котором хотя и имеется достаточное количество задач на составление уравнений, но не указано, в какой последовательности эти задачи решать и все ли решать необходимо), очень полезно использовать разумно составленную классификацию задач, позволяющую обозреть необходимый объем работы. Такая классификация имеется в книге А. Н. Барсукова [5] для уравнений первой степени.

Все задачи на составление уравнений Барсуков делит прежде всего на два больших цикла: пропедевтический и основной. Каждый из циклов должен обеспечить преодоление одной из двух трудностей, испытываемых учащимися при составлении уравнений: в составлении алгебраических выражений и в постановке знака равенства между алгебраическими выражениями (частями уравнения).

Задачи, входящие в пропедевтический цикл, по своему содержанию являются типовыми арифметическими задачами. Решение их приводит к уравнению вида $ax + b = c$ (неизвестное содержится лишь в одной части уравнения). С точки зрения составления уравнения — это наиболее простые задачи: нужно составить лишь одно алгебраическое выражение и условие задачи ясно указывает, к какому числу его следует приравнивать.

Задачи основного цикла — это алгебраические задачи. Их решение приводит к уравнению вида $ax + b = cx + d$. Приходится составлять два алгебраических выражения. Полученные выражения не равны между собою, а находятся в известном кратном или разностном отношении. Учащимся необходимо научиться правильно их уравнивать. Например, они должны уметь по-разному записать в виде равенства утверждение: «Число x на a единиц меньше числа y» или утверждение: «Число x в a раз меньше числа y». Первое утверждение, например, они должны уметь свободно записать в одном из трех видов: 1) $x + a = y$; 2) $x = y - a$; 3) $y - x = a$.

Каждый цикл делится на подгруппы задач, постепенно усложняющиеся. Каждая группа задач соответствует тому теоретическому материалу, который изучается в данный момент. В пропедевтическом курсе задачи группируются по степени сложности составляемого алгебраического выражения. Для подготовки к составлению уравнений рекомендуется также решать арифметические задачи, в которых все или некоторые данные заменены буквами. Во втором цикле задачи группируются по виду составляемого уравнения. В работе дается и примерный набор задач, который можно использовать дополнительно к школьному задачнику.

Из классификации следует, что решение задач методом уравнений А. Н. Барсуков рекомендует производить на протяжении всего изучения курса алгебры. Для того времени, когда работа писалась, это явилось смелой идеей, так как было принято сначала изучить уравнения в VII классе, а затем применять их к решению задач. В настоящее время программа требует знакомить учащихся с понятием уравнения уже в первой теме и применять его в дальнейшем курсе алгебры по мере изучения соответствующих тождественных преобразований. При этом получается, что до изучения темы «Уравнения первой степени» в VII классе, когда ученики знакомятся с общей теорией решения уравнений, они уже должны решать задачи, относимые А. Н. Барсуковым к пропедевтическому циклу, так как уравнения, получаемые при этом, могут решаться на основе арифметических знаний. После изучения основных свойств уравнений учащиеся могут приступить к решению задач из основного цикла.

В последнее время все большее признание и экспериментальное подтверждение получает идея возможно более раннего ознакомления школьников с методом решения задач с помощью составления уравнений. Экспериментальная работа ведется с учениками V, а также IV классов. Так, на Центральных педагогических чтениях 1965 г. большой интерес вызвало сообщение Н. Г. Миндюк (учительницы одной из московских школ) об экспериментальной работе по созданию, начиная с IV класса, единого курса арифметики и алгебры, ведущейся под руководством К. И. Нешкова [204]. Интересен также эксперимент, проводившийся М. Ф. Мартыновой [268].

Когда методика изучения уравнений в едином курсе арифметики и алгебры будет разработана, пропедевтический цикл задач на составление уравнений, по-видимому, сможет быть пройден в IV и V классах.

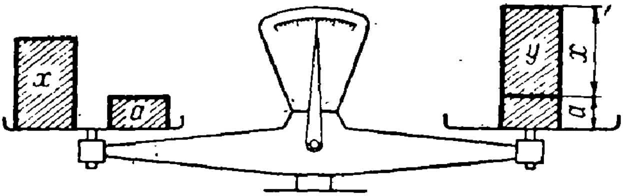
Итак, основной путь обучения учащихся решению задач методом составления уравнений заключается в применении системы упражнений. Для уравнений первой степени и их систем такая классификация разработана в книге А. Н. Барсукова [5]. Для уравнений второй степени дело обстоит проще, так как новых трудностей здесь уже почти нет. Ко времени изучения этих уравнений учащиеся довольно свободно будут их составлять, если упражнения на решение задач первой степени решались систематически.

Рассмотрим некоторые частные методические приемы обучения составлению уравнений.

Для облегчения анализа условия задачи полезно, особенно на первых порах, применять графическую запись условия задачи, а иногда и иллюстративную, как при решении арифметических задач. В частности, составление уравнения (и его решение) может быть объяснено с помощью весов. Становится ясным, как нужно поступить, чтобы оба выражения находились «в равновесии». Легко, например, проиллюстрировать рассмотренные выше три формы записи утверждения, что одно число на столько-то единиц меньше другого (рис. 41, *а, б, в*).

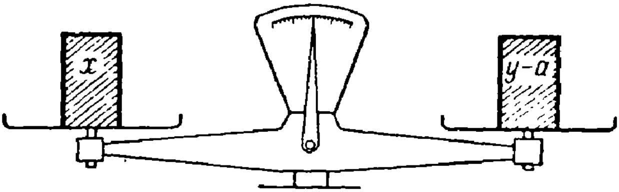
При составлении уравнений применяются три формы записи, последовательно сменяющие друг друга. На первом этапе можно использовать обычную форму вопросов. Затем следует применить форму записи решения с пояснением каждого действия. Наконец, переходят к схематической записи. Подготовительным шагом к этой записи может служить табличная запись условия, например, следующей задачи [191]: двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 12 *ч*. Первый, работая отдельно, мог бы выполнить ту же работу на 10 *ч* скорее второго. За сколько часов мог бы выполнить эту работу каждый из них, работая отдельно?

а



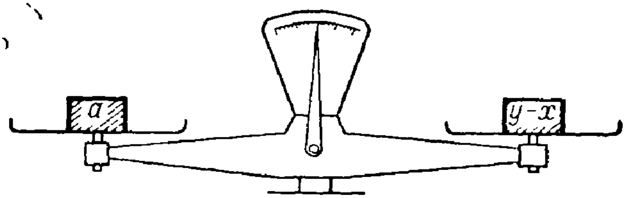
$x+a=y$

б



$x=y-a$

в



$a=y-x$

Рис. 41.

Величины, входящие в условие задачи,— время и объем работы. Пусть время второго рабочего x, тогда время первого $x-10$. Составляем таблицу (табл. 7).

Таблица 7

Величины	1-й рабочий	2-й рабочий	Оба рабочих
Время	$(x-10)$ *ч*	x *ч*	12 *ч*
Объем работы, выполняемой за 1 *ч*	$\frac{1}{x-10}$ всей работы	$\frac{1}{x}$ всей работы	$\frac{1}{12}$ всей работы
Объем работы, выполняемой за 12 *ч*	$\frac{12}{x-10}$ всей работы	$\frac{12}{x}$ всей работы	1

Так как, работая вместе, рабочие могут выполнить за 12 *ч* всю работу, то $\frac{12}{x-10}+\frac{12}{x}=1$.

Важное значение имеет удачный выбор неизвестного и выбор основного соотношения между двумя составляемыми выражениями [13]. В частности, следует иметь в виду, что легче составить систему уравнений с несколькими неизвестными, чем одно уравнение с одним неизвестным. Составляя одно уравнение с одним неизвестным, мы фактически исключаем остальные неизвестные в уме, что, разумеется, труднее, чем явная запись зависимости с несколькими неизвестными. Поэтому не следует ограничивать учащихся в количестве выбранных неизвестных. Лишние неизвестные постепенно будут исключены.

§ 3. Методика решения уравнений

Уравнения, как уже отмечалось, решаются на протяжении всего курса алгебры параллельно с изучением соответствующих видов тождественных преобразований. Простейшие уравнения рассматриваются в курсе арифметики, а в будущем, по-видимому, войдут в него, начиная с IV класса (возможно, это будет объединенный курс арифметики и алгебры).

В зависимости от класса меняется как способ решения уравнений, так и его обоснование. До VII класса (по действующей программе) можно ограничиться решением уравнений на основе определения и свойств арифметических действий, т. е. используя правила нахождения неизвестного компонента действия по одному из данных и результату действия. Для VII класса предлагаются различные способы изложения теории уравнений, обосновывающей правила решения уравнений. Наиболее распространенным является обоснование правил решения уравнений на основе теории равносильности уравнений. При этом в VII классе теоремы о равносильности уравнений формулируются в форме «основных свойств уравнений». Доказательство проводится обычно на частных примерах уравнений, но сами рассуждения носят общий характер.

В учебнике А. Н. Барсукова [64] основные свойства уравнений показываются на примерах без обобщения. Общее доказательство удобно проводить с использованием функционального символа для обозначения неизвестного. В этой форме доказательство можно дать при изучении уравнений в IX классе. Тогда аналогично доказываются и теоремы о равносильности неравенств.

В учебнике А. П. Киселева [100] общее доказательство дается для теорем о равносильности неравенств. При этом части неравенства обозначены буквами A и B, из-за чего трудно уловить суть доказательства, так как нельзя записать результат подстановки в уравнение (неравенство) предполагаемого решения. Учащимся может показаться, что в рассуждениях имеется логический круг. Мы используем положение, что к обеим частям верного равенства можно прибавить одно и то же число, а доказываем это свойство для уравнений, но из записи не видно, где уравнение, а где верное равенство: «$A<B$. Пусть a — решение этого неравенства, тогда, — говорит Киселев, — после подстановки в него числа a мы получим верное неравенство». Записать это мы не можем, а должны лишь подразумевать. При использовании функционального символа записывается все: $f(x) < \varphi(y)$ — исходное неравенство. $f(a) < \varphi(a)$ — верное неравенство, полученное подстановкой вместо x одного из решений неравенства.

Поскольку уяснение теории равносильности может представлять для учащихся младших классов затруднения, а арифметический способ пригоден лишь для уравнений, отнесенных к пропедевтическому курсу, т. е. к случаю, когда неизвестное находится лишь в одной части уравнения, важно найти способы, позволяющие избежать обращения к этой теории при начальном изучении алгебры. Интересен в этом отношении учебник В. Л. Гончарова [87]. Здесь вся теория решения уравнений сводится к непосредственному применению свойств верных равенств (тождеств). Достигается это тем, что делается допущение о существовании корня уравнения и предполагается, что буквой x обозначен данный корень. Тогда уравнение можно рассматривать как верное равенство и, пользуясь свойствами этих равенств, получить из него следствия, которые являются тоже верными равенствами. Заменяя одно верное равенство другим, мы придем к равенству вида $x=a$. Это означает, что если верно, что уравнение имеет решение, то это решение должно равняться a. Подстановкой в исходное уравнение остается проверить, верно ли было наше предположение о существовании корня. Если уравнение удовлетворится, то предположение оказывается верным и найдено его единственное решение (других решений быть не может, так как полученное следствие есть необходимое условие существования корня).

Здесь важно понять значение проверки корня при таком построении теории. Она является составной частью решения уравнения и проводится не только для контроля вычислений, как в случае решения уравнения на основании теории равносильности. Это довольно тонкий логический момент, который может быть и не вполне осознан учащимися младших классов. Чтобы сделать это более понятным, нужно показать, что предположение о существовании корня может оказаться неверным. Для этого следует привести примеры уравнений, не имеющих решений (такие примеры имеются и в учебнике А. Н. Барсукова [64]).

Данное изложение теории уравнений заслуживает внимания еще и потому, что оно приложимо и к обоснованию решения систем линейных уравнений. В учебнике Киселева [100] этот вопрос совершенно не обоснован. В 1-й части учебника Барсукова теоремы о равносильности систем формулируются, но не доказываются.* Теория же В. Л. Гончарова [87] вполне доступна для учащихся. В младших классах средней школы желательно ограничиться простейшими соображениями, не акцентируя внимания на логических тонкостях. Впоследствии, овладев техникой решения уравнений и применением их к решению конкретных задач, ученики смогут сознательно воспринять и необходимые общие рассуждения. К этому времени у них может появиться и интерес к логическим вопросам.

Идею В. Л. Гончарова развивает А. Л. Бондарев [9, 166], делая излишней проверку решения, которая у Гончарова является органической частью решения

* Доступное учащимся обоснование теории линейных систем уравнений дано в книге И. А. Гибша [20].

уравнения. Уравнение рассматривается как логическая функция. Учащиеся знакомятся с понятием верного и неверного числового равенства. Уравнения при одних значениях неизвестного представляют собою верные равенства, при других — неверные. При этом характер истинности уравнения при основных операциях, применяемых для решения линейных уравнений, не меняется. Это происходит по той причине, что неверные равенства обладают теми же основными свойствами, что и верные. Здесь отпадает необходимость в особой теории равносильности (эта же теория применима и к обоснованию линейных систем).

Работа А. Л. Бондарева проверялась экспериментально, однако его идеи еще не нашли отражения в школьных учебниках.

Аналогичную трактовку вопроса можно найти в работах А. А. Столяра [244, 48], М. Е. Драбкиной [94] и др.

§ 4. Проверка решения уравнения и проверка решения задачи

Следует различать проверку корня уравнения и проверку решения по условию задачи. Корень уравнения может быть верным, но не удовлетворять условию задачи. Дело в том, что уравнение не всегда отражает все требования задачи. При решении задачи полезно уже после составления уравнения выяснить, все ли условия задачи оно выражает. Для этого следует записать дополнительные условия в форме, может быть, некоторых неравенств и получить смешанную систему, полностью выражающую требования задачи. Тогда проверка решения этой смешанной системы может оказаться и проверкой решения по условию задачи.

Возможно, дополнительные условия придется записать словесно. Например, «Решением могут быть лишь натуральные числа» и т. п. Если ясно, что уравнение полностью отражает условие задачи, то нет необходимости производить проверку по условию задачи. В каждом конкретном случае должен быть выяснен вопрос о соотношении между уравнением и условием текстовой задачи и о том, как должна производиться проверка решения задачи.

Проверка решения задачи и корня уравнения является полезным упражнением, помогающим лучше осознать смысл решения задачи и уравнения. Однако нельзя требовать, чтобы проверялись решение каждой задачи и корень каждого уравнения после его решения. Учитель сам должен определить, сколько примерно упражнений должно быть выполнено, чтобы учащиеся научились производить проверку.

В дальнейшем, разрешив не делать проверки, он лишь время от времени дает задание проверить корень для закрепления полученного навыка. Но преподаватель должен быть уверен, что учащиеся по первому требованию сумеют произвести проверку.

Случается, что при проверке корня уравнения допускают неправильную форму записи, подставляя корень в обе части уравнения и переписывая их до тех пор, пока не приходят к равенству $0 = 0$. Это недопустимо потому, что верное следствие получают и из неверного равенства, а также при таком переписывании можно незаметно для себя произвести неравносильную операцию.

Правильная форма записи состоит в том, что отдельно вычисляется левая и правая части уравнения и выясняется, получено ли одно и то же число. Подставлять найденные корни необходимо в исходное уравнение. Систему уравнений следует проверять по каждому уравнению. Необходимо обратить внимание учеников на то, что одно решение системы состоит из нескольких чисел.

Проверка решения буквенных уравнений — один из видов осмысленных упражнений на тождественные преобразования (как и решение параметрических уравнений и преобразование функции для его исследования).

§ 5. Исследование уравнений и задач на составление уравнений

Исследование уравнений и задач, решаемых методом составления уравнений, вообще говоря, не совпадающие между собою проблемы. Здесь следует повторить сказанное о проверке корня уравнения и проверке решения по условию задачи. Поскольку можно записать все условия задачи в виде смешанной системы и, вероятно, некоторых дополнительных условий, выражаемых лишь словесно, то сосредоточим наше внимание на исследовании решений уравнения.

В старой программе средней школы по математике в курсе X класса значилась тема «Неравенства и исследование уравнений». До этого никаких исследований при решении уравнений, за исключением исследования корней квадратного уравнения по дискриминанту, не проводилось. А. Я. Хинчин [221 а] обратил внимание на нелепость такой постановки вопроса и указал на отрыв исследования уравнения от его решения как на одну из причин формализма в знаниях учащихся по математике. Он отметил, что задача исследования уравнения сама по себе, независимо от вида уравнения, не может быть определена. Нельзя ответить на вопрос, что значит исследовать уравнение. Ответ на этот вопрос будет зависеть от того, какое уравнение исследуется. Один смысл имеет исследование линейного уравнения с одним неизвестным, другой — исследование линейной системы, третий — исследование квадратного уравнения. Еще иной смысл имеет, например, исследование иррационального уравнения и т. п.

Поэтому необходимо исследование производить не по отдельной теме, а по всем темам, в которых изучаются уравнения, и не в конце темы, а при решении каждого уравнения, когда появляется такая необходимость. Исследование уравнения должно быть составной частью решения уравнения. Оно делает содержательным само решение.

В результате критики А. Я. Хинчина, начиная с 1947 г., в объяснительной записке к программе указывалось, что тема «Исследование уравнений» должна систематизировать знания об исследовании уравнений, которые получены учащимися в курсах VII и VIII классов, причем сведения о трехчлене второй степени, приобретенные в VIII классе, должны быть дополнены теоремой о знаке трехчлена и иллюстрацией этой теоремы на графике трехчлена. Затем ученики переходят к изучению способа решения неравенств второй степени, что позволит проводить исследование решений числовых и буквенных квадратных уравнений и задач, которые приводят к этим уравнениям.

Данное указание сохранялось в объяснительной записке к программам вплоть до 1962 г. В новой программе в курсе «Алгебра и элементарные функции» исследование уравнений уже не выделяется, а вопрос этот распределен по соответствующим темам.

В период разработки новых программ [38, 40] и обсуждения, в частности, предложения А. Я. Хинчина об исследовании уравнений значение этого вопроса было преувеличено. В некоторых методических работах предлагалось значительно увеличить количество упражнений по исследованию решений различного вида уравнений. В процессе обсуждения, в котором, кроме педагогов, приняли участие и видные математики, все было поставлено на свои места. Ученые указали, что в школьную программу необходимо включать лишь вопросы, которые имеют общеобразовательное значение. В частности, не следует проводить исследование решений уравнений ради самого исследования. Достаточно дать отдельные примеры более или менее полного исследования, а в других случаях накладывать на параметры определенные условия, ограничивающие объем исследования. Само собою разумеется, что в младших классах эти вопросы должны занимать меньше времени, чем в старших. Тем не менее важно начинать вводить элементы исследования в младших классах. Учащиеся должны хорошо знать, что никогда нельзя делить на буквенное выражение, не задумываясь о возможном равенстве его нулю. Ученики должны помнить об ограниченности операции извлечения корня и т. п. Многочисленные упражнения на действия с арифметическим значением радикала также излишни. Часть упражнений необходимо проделывать без ограничений, накладываемых требованием оперировать с арифметическим корнем. Уравнения с буквенными коэффициентами не следует выделять в особую тему, их надо решать параллельно соответствующим видам уравнения и постепенно, как было сказано, вводить элементы исследования.

Хорошие примеры такого исследования, вводимого в младших классах, имеются в статье Г. А. Кудреватого [93]. Например, уравнение $ax + bx = a^2 - b^2$, $(a + b)x = a^2 - b^2$. Если дается ответ $x = a - b$, то в условии надо указывать, что $a + b \neq 0$. Если же такой оговорки не сделано, то учащимся предлагается рассмотреть все случаи и дать полный ответ: 1) $x = a - b$, если $a + b \neq 0$; 2) данное уравнение есть тождество при $a + b = 0$.

Элементы исследования, естественно, появляются при решении уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе. Например, решение уравнения

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}$$

должно начинаться с выяснения допустимых значений неизвестного: $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

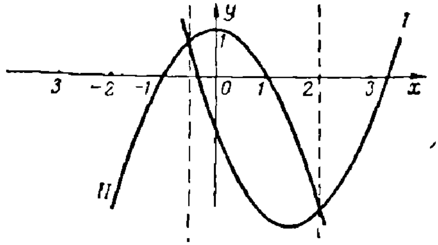
Полезным является графическое истолкование различных случаев исследования уравнений и их систем. В частности, полезно графически истолковать равносильные преобразования уравнений, а также потерю и приобретение корней. В первом случае точки пересечения кривых, представляющие части уравнения, имеют одни и те же абсциссы. В последнем число точек пересечения меняется при замене уравнения неравносильным. Этот вопрос хорошо разработан в статье И. Иванова [187], в которой дано 10 таблиц, иллюстрирующих последовательные шаги в решении уравнения, получение равносильных уравнений, приобретение и потерю корней. Приведем две таблицы. Табл. 8 (табл. 1 у И. Иванова) иллюстрирует равносильные преобразования уравнения; при каждом шаге кривые, изображающие правую и левую части уравнения, меняются, но точки их пересечения все время имеют одни и те же абсциссы и число точек пересечения не изменяется. Табл. 9 (табл. 4 у И. Иванова) показывает появление постороннего корня вследствие расширения области допустимых значений для неизвестного при потенцировании: возникает лишняя точка пересечения кривых, изображающих части уравнения. Несколько аналогичных чертежей можно найти в статье И. С. Збарского [186].

Для исследования линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными полезно ввести определители второго порядка.

При исследовании квадратного уравнения можно рекомендовать схему, предложенную И. А. Гибшем [18]. Автор весьма обстоятельно рассматривает вопрос об исследовании решений задач. Он вводит параметры $P = \frac{c}{a}$, $S = \frac{b}{a}$, $D = b^2 - 4ac$ и обращает внимание на то, что когда $P < 0$, то и $ac < 0$, а следовательно, $D = b^2 - 4ac = b^2 + (-4ac) > 0$, т. е. в этом случае, не

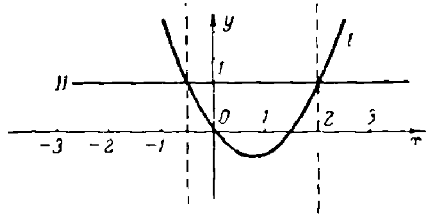
Уравнение:

$$x^2 - 3x - 1 = 1 - x^2$$



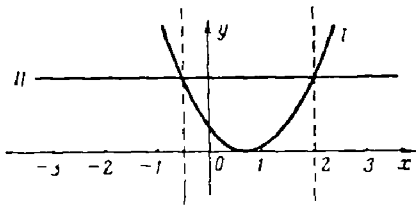
I. Перенесение неизвестных членов в левую часть уравнения, известных — в правую; почленное деление на 2:

$$x^2 - \frac{3}{2}x = 1$$



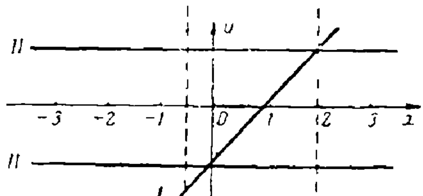
II. Выделение полного квадрата в левой части уравнения:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$



III Извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения:

$$x - \frac{3}{4} = \pm\frac{5}{4}$$



IV. Нахождение неизвестного x:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 2$$

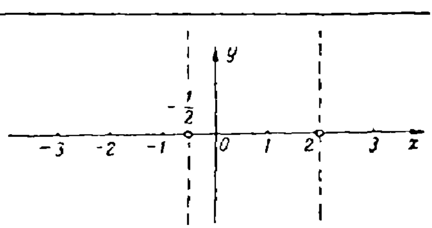
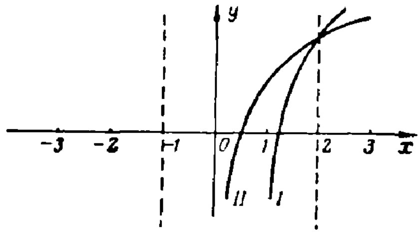
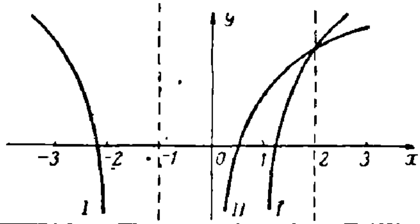
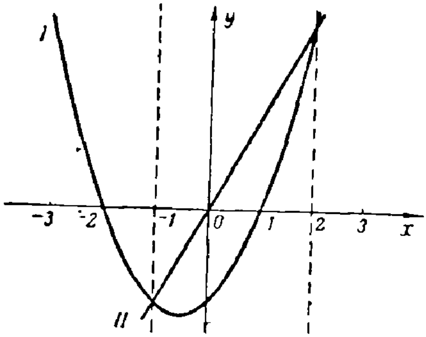
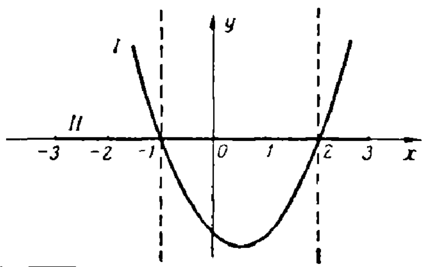
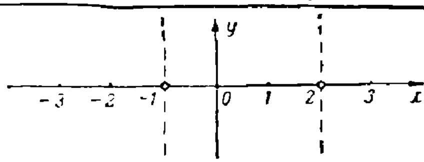


Таблица 9

Уравнение: $\log_2(x+2)+\log_2(x-1)=$ $=1+\log_2 x$	
I. Применение теорем о логарифмировании: $\log_2[(x+2)(x-1)]=$ $=\log_2 2x$	
II. Потенцирование обеих частей уравнения: $(x+2)(x-1)=2x$	
III. Приведение квадратного уравнения к нормальному виду: $x^2-x-2=0$	
IV. Решение квадратного уравнения: $x_1=-1,\ x_2=2$	

вычисляя дискриминанта, можно утверждать, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два неравных действительных корня. Поэтому получается схема исследования (табл. 10).

Таблица 10

P	D	S	Вывод (x_1 и x_2 — корни, $x_1 < x_2$)
—	Вычислять не надо	+	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$
—		—	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
+	+	+	$x_1 > 0,\ x_2 > 0$
+	+	—	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$
+	—	Вычислять не надо	Действительных корней нет

§ 6. Некоторые методические замечания

1. Для более конкретного усвоения понятия об уравнении при первом ознакомлении с этим понятием полезны предложенные В. Л. Гончаровым упражнения на «угадывание» значения неизвестного [87].

Подобные упражнения имеются и в экспериментальных материалах для IV класса К. И. Нешкова [123]. Здесь очень четко выступает понятие переменного как «пустого места» и ясна функциональная зависимость частей уравнения от значений неизвестного, поскольку ученик, «угадывая», будет делать числовые подстановки в обе части уравнения. Вместе с тем будет проведено пропедевтическое ознакомление с понятием об уравнении как переменном суждении о равенстве.

Приведем примеры из учебника В. Л. Гончарова [87, стр. 27]:

«25. Постарайтесь догадаться, при каком числовом значении буквы x будет верно каждое из следующих равенств:

1) $x + 8 = 15$; 2) $5 + x = 20$; 3) $x - 13 = 7$;

4) $12 - x = 1$; 5) $x \cdot 3 = 24$; 6) $2x = 5$;

7) $\frac{x}{3} = 24$; 8) $\frac{12}{x} = 2$.

26. В первом из примеров пункта 25 вопрос можно поставить следующим образом.

«К какому числу нужно прибавить 8, чтобы получилось 15?»

Или:

«Нужно найти число, сумма которого с числом 8 равна 15».

Поставьте подобным же образом вопросы, относящиеся к примерам 2—8.

27. Рассмотрите равенство

$$5x - 2 = 4x + 3.$$

Попробуйте подобрать такое числовое значение x, при котором это равенство оказывается верным».

2. К понятию о том, что является решением системы линейных уравнений, лучше всего подойти с помощью построения графика сначала одного уравнения с двумя неизвестными, а затем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Полезно рассмотреть и таблицы значений соответствующих функций и заметить одинаковую пару значений x и y каждой из таблиц [143, 144].

3. Вывод формулы решения квадратного уравнения возможен различными способами. Наиболее употребительны два следующих.

А. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ приводится к виду

$$\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q.$$

Из обеих частей извлекается квадратный корень:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ и т. д.}$$

При этом может возникнуть вопрос, почему двойной знак ставится лишь в одной части уравнения. Полезно тогда проделать небольшое исследование: пусть дано равенство $a^2 = b^2$. Извлечем из его частей квадратный корень и поставим двойной знак в обеих частях полученного равенства. Тогда

$$\pm a = \pm b.$$

Здесь записано четыре равенства: а) $a = b$, б) $a = -b$, в) $-a = b$, г) $-a = -b$, но существенно различаются только два, так как первое равносильно четвертому, а второе — третьему. Если мы возьмем первые два из них, то получим то же, что при постановке двойного знака только в одной части равенства.

В. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ приводится к виду

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = 0.$$

Левая часть раскладывается на множители по формуле разности квадратов. Тогда вопрос о двойном знаке не возникает. Кроме того, этот способ удобен для объяснения того, почему кратный корень считаем два раза: поочередно приравнивается нулю сначала первый, а затем второй множитель левой части. Последнее следует еще объяснить графически: точка касания оси Ox с параболой есть точка слияния двух корней квадратного уравнения.

4. При доказательстве теоремы Виета ее полезно вывести сначала для неприведенного квадратного уравнения, чтобы предупредить ошибку учащихся, которые забывают при нахождении суммы и произведения корней неприведенного квадратного уравнения делить соответствующие коэффициенты на старший коэффициент.

Необходимо доказать как прямую, так и обратную теорему Виета и проанализировать, при решении каких задач применяется каждая из них в отдельности, при каких — обе одновременно. В практике на это часто не обращают внимания, чем наносится вред развитию логического мышления учащихся.

Рассмотрим следующие задачи, выполняемые на основании теоремы Виета: 1) определение знаков корней квадратного уравнения (не решая его); 2) проверка найденных корней; 3) составление квадратного уравнения путем определения его коэффициентов по сумме и произведению коэффициентов; 4) устное нахождение корней квадратного уравнения; 5) вычисление симметрических функций от корней данного квадратного уравнения без нахождения его корней.

Ясно, что для решения первой задачи достаточно знать прямую теорему Виета, указывающую, чему равны сумма и произведение корней квадратного уравнения, выраженные через коэффициенты этого уравнения. То же касается и пятой задачи.

Относительно второй задачи можно сказать следующее. Если корни не удовлетворяют теореме Виета, то утверждать, что корни найдены неправильно, можно на основании лишь прямой теоремы Виета, которая дает необходимое условие для корней квадратного уравнения, но если они ей удовлетворяют, то утверждать, что корни найдены правильно можно лишь после того, как доказана обратная теорема, дающая достаточное условие для корней квадратного уравнения. Поскольку квадратное уравнение имеет единственную пару корней, то обратная теорема Виета фактически устанавливает, что по данной сумме и произведению можно найти единственную пару чисел.

Третья задача решается на основании обратной теоремы Виета. Для решения четвертой задачи требуются обе теоремы, так как, найдя два числа, сумма и произведение которых соответствуют коэффициентам уравнения, мы знаем на основании обеих теорем Виета, что это свойство корней уравнения и только их.

Мы так подробно остановились на этом вопросе потому, что в учебнике алгебры [100] было опущено доказательство обратной теоремы и некоторые учителя до сих пор не делают необходимого анализа.

5. Иррациональные уравнения по новой программе подробно не изучаются, а рассматриваются лишь их отдельные примеры. Этот вопрос подробно исследован в книгах И. А. Гибша [19, 81]. Материал, изложенный в работе [19] и выходящий за рамки школьной программы, уместно использовать на занятиях математического кружка. В этой же книге содержится большое число примеров графического решения иррациональных уравнений. Полезно использовать также приведенную в ней теорему [19, стр. 8]: «Если обе части уравнения

$$f(x) = g(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — выражения, содержащие неизвестное x, мы возведем в квадрат, то мы получим уравнение

$$f^2(x) = g^2(x), \qquad (2)$$

которое удовлетворяется как всеми корнями данного уравнения (1), так и всеми корнями уравнения

$$f(x) = -g(x), \tag{3}$$

сопряженного с данным уравнением (1), и только этими числами», и следствие из этой теоремы [19, стр. 10]: «Если уравнение (3), сопряженное с данным уравнением (1), не имеет корней, то уравнение (2), полученное из данного уравнения (1) путем возведения обеих частей его в квадрат, равносильно данному уравнению (1)». Автор, кроме того, рекомендует производить замену уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

равносильной системой $f(x) = [g(x)]^2$, $g(x) \geqslant 0$ и предлагает также теорему [19, стр. 52]: «Если обе части уравнения

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — выражения, содержащие неизвестное x, мы возведем в куб, то получим уравнение

$$f^3(x) = g^3(x), \tag{2}$$

равносильное уравнению (1)» (имеется в виду, что уравнение решается в поле действительных чисел).

§ 7. Об изучении неравенств в школе

Решение неравенств следует производить параллельно с решением уравнений соответствующего вида. Как уравнения, так и различного вида неравенства должны решаться на протяжении всего курса алгебры. Свойства неравенств и уравнений аналогичны, а их отличия друг от друга при параллельном изучении лучше будут уяснены учащимися. Эта мысль, начиная с 1950 г., была отражена в программах по математике, предусматривавших изучение линейных неравенств в младших классах. Однако в процессе последней перестройки программ (1960/61 учебный год) этот вопрос из программы восьмилетней школы исчез и неравенства изучаются только в IX классе [38, 39].

В проекте программы [41] это положение исправляется: понятие о неравенстве и решении простейших неравенств вида $x < b$, $a < x < b$, $|x| < a$ вводится наряду с понятием об уравнении с IV класса, в V классе дается понятие о выделении областей в координатной плоскости, координаты точек которых удовлетворяют условиям:

$$a \leqslant x \leqslant b, \text{ или } c \leqslant y \leqslant d, \text{ или } a \leqslant x \leqslant b \text{ и } c \leqslant y \leqslant d.$$

Затем линейные неравенства с одним и двумя неизвестными решаются при изучении линейной функции, а квадратные неравенства — при изучении квадратного трехчлена.

В младших классах сведения о неравенствах должны излагаться наглядно на числовых примерах путем изображения чисел на числовой оси и координатной плоскости (рис. 42, *а, б*). В старших классах основные свойства неравенств и теоремы о равносильности неравенств должны быть доказаны.

Теоремы о равносильности неравенств доказываются аналогично доказательству теорем о равносильности уравнений, о чем говорилось выше. Теоремы о свойствах тождественных неравенств могут доказываться двумя способами.

Первый способ состоит в замене неравенства равенством и сведении всех доказательств к использованию свойств равенств, а именно неравенство $a > b$ заменяется равенством $a = b + k$, где $k > 0$.

Второй способ состоит в непосредственном применении определения неравенства $a > b$, если и только если $a - b > 0$. Целесообразнее использовать второй метод, который позволяет учащимся приобрести практические навыки в обращении с неравенствами. Отметим, что первый способ легче второго, так как не требует применения новых знаний.

Для решения квадратных неравенств, дробных неравенств и неравенств высших степеней, которые могут быть сведены к линейным, необходимо сначала твердо усвоить решение четырех систем линейных неравенств с одним неизвестным:

а) $\begin{cases} x-a>0, \\ x-b>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-a<0, \\ x-b<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-a<0, \\ x-b>0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-a>0, \\ x-b<0. \end{cases}$

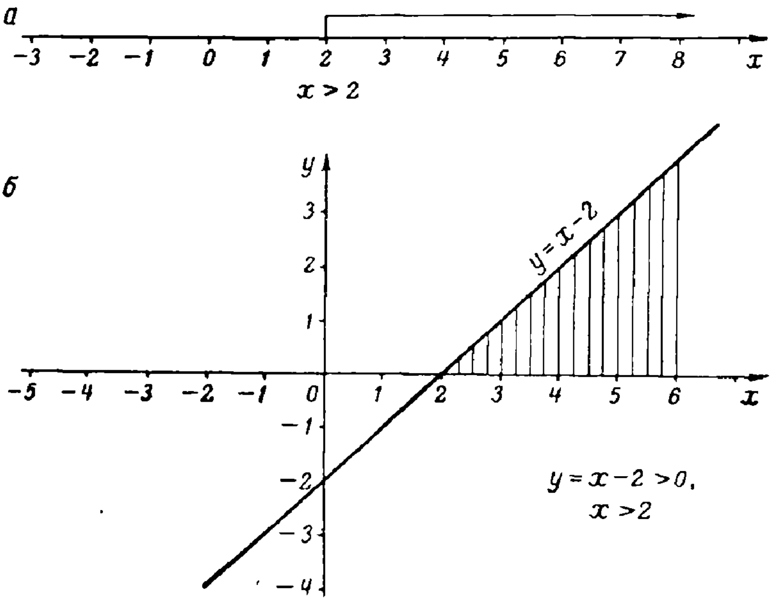


Рис. 42.

Если положим, что $a > b$, то решениями этих систем будут соответственно следующие:

а) $x > a$ (рис. 43); б) $x < b$ (рис. 44); в) $b < x < a$ (рис. 45); г) четвертая система тождественно ложна (рис. 46).

Далее при решении неравенства второй степени с одним неизвестным следует различать системы неравенств, которые конструируются с помощью союза «и»,

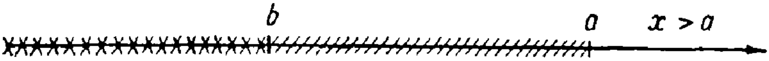


Рис. 43.

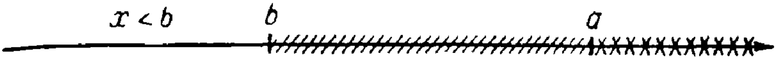


Рис. 44.

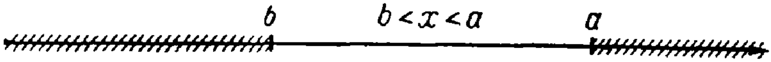


Рис. 45.

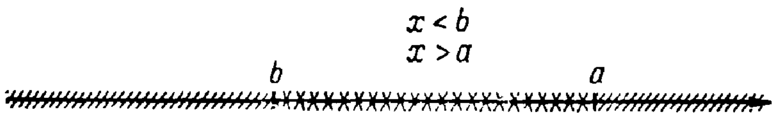


Рис. 46.

и комбинацию систем, которая конструируется с помощью союза «или». Именно для решения неравенства

$$(x-b)(x-a)>0,\ b<a$$

записываем комбинацию двух систем:

$$\begin{cases} x-b>0, \\ x-a>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-b<0, \\ x-a<0. \end{cases}$$

Ответ получим в виде $x<b$ или $x>a$.

Учащиеся не всегда различают союзы «и» и «или». В математической логике специально изучаются конструкции предложений при помощи этих союзов. Первая конструкция называется конъюнкцией предложений и бывает истинной только в том случае, когда истинны и первое и второе предложения, соединенные союзом «и». Второе сложное предложение называется дизъюнкцией предложений и бывает истинным, когда хотя бы одно из соединенных союзом «или» предложений истинно (или оба вместе).

Понятия конъюнкции и дизъюнкции и их простейшие свойства вполне доступны пониманию учащихся. Если они их усвоят, то многие вопросы математики учитель сможет объяснить более точно, а следовательно, более понятно.

В частности, эти понятия помогают разобраться в решении различных совокупностей неравенств. Поэтому в методической литературе имеется предложение о введении некоторых вопросов математической логики в школьный курс [48, 94, 8]. В первых двух книгах данный вопрос рассматривается в различных темах школьного курса, в частности при решении уравнений и неравенств. В последней книге речь идет о применении элементов математической логики только для решения неравенств. При этом необходимые свойства конъюнкции и дизъюнкции (сочетательность, переместительность, распределительность дизъюнкции относительно конъюнкции) доказываются применительно к неравенствам и выделяются лишь нужные для их решения.

Для отличия союзов «и» и «или» авторы применяют специальные символы, которые можно ввести в школьное употребление. Именно для системы неравенств, т. е. для союза «и», они сохраняют фигурную скобку; $x—a<0$ и $x—b<0$ записывается как обычно:

$$\begin{cases} x - a < 0, \\ x - b < 0, \end{cases}$$

а для дизъюнкции неравенств, т. е. для союза «или», вводится квадратная скобка; $x—a<0$ или $x—b<0$ запишется так:

$$\left[\begin{array}{l} x - a < 0, \\ x - b < 0. \end{array} \right.$$

Полезно также ввести общий символ неравенства V.

Авторы показывают, как введение этих символов и использование свойств конъюнкции и дизъюнкции упрощает ход решения неравенств и их систем. Они дают также способ решения неравенств высших степеней, который можно объяснить ученикам на занятиях математического кружка. Этот способ сводит решение такого неравенства к простому формализованному преобразованию.

На уроке полезно познакомить учащихся с графическим методом решения неравенства высшей степени. Пусть многочлен $P(x)$ неравенства вида $P(x) \vee 0$ разложен на множители (линейные и неприводимые квадратные трехчлены). Поскольку неприводимые квадратные

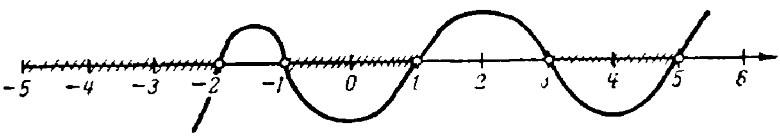


Рис. 47

трехчлены сохраняют знак старшего коэффициента, а кратные множители в четной степени неотрицательны, то мы сумеем данное неравенство заменить равносильным вида

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_k) \vee 0,$$

где можно считать $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k$. Если теперь рассмотреть интервалы числовой прямой, образуемые точками $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то каждый из них будет интервалом знакопостоянства многочлена левой части неравенства. Остается выбрать из них те, которые удовлетворяют данному неравенству. Для этого нужно лишь по числу множителей левой части определить, удовлетворяет ли неравенству первый слева интервал $(-\infty, x_1)$, в котором все линейные множители отрицательны, или второй. А затем следует выбирать интервалы через один, так как многочлен, после того как он принял значение, равное нулю, меняет свой знак, если его соответствующий корень простой. Для большей наглядности можно изобразить схематически график многочлена левой части и область решения, как например на рис. 47, для неравенства $[x-(-2)][x-(-1)](x-1)(x-3)(x-5)>0$.

Здесь области, не являющиеся решением неравенства на числовой оси, вычеркнуты, и решение состоит из трех интервалов: $-2<x<-1$, $1<x<3$ и $x>5$.

Этим способом удобно решать и квадратное неравенство, не сводя его к решению дизъюнкции двух систем, как это делают обычно. При этом в случае неравенства вида

$$(x-3)(x-5)<0,$$

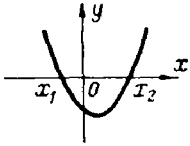
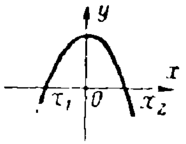
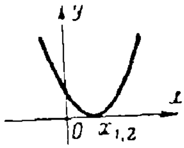
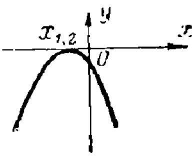
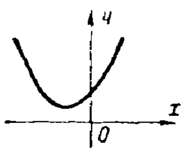
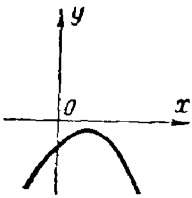
составляя две системы

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-5<0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-3<0, \\ x-5>0, \end{cases}$$

решают и вторую систему, не замечая сразу, что $x-3$ больше, чем $x-5$, и вторая система заведомо ложна. Учащиеся чисто механически обнаруживают, что вторая система противоречива, и не задумываются, почему так всегда получается. Это ведет к формальным знаниям. Рассматривая последовательно интервалы знакопостоянства функции, ученики будут видеть, что лишь в интервале корней оба линейных множителя имеют противоположные знаки и тогда может удовлетворяться данное неравенство. Так же полезно решать дробные неравенства $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \vee 0$, заменяя их равносильным $f(x)\varphi(x) \vee 0$.

Различные случаи решения квадратного неравенства можно свести в таблицу (табл. 11) [23, стр. 63—65]. Аналогичные таблицы полезно составлять для различных случаев решения и исследования системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, для решения квадратного уравнения и др.

Таблица 11

D, $x_1 < x_2$	a	Графики	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$b^2 - 4ac < 0$	$a > 0$		Удовлетворяется при $x < x_1$ или при $x > x_2$	Удовлетворяется при $x_1 < x < x_2$
	$a < 0$		Удовлетворяется при $x_1 < x < x_2$	Удовлетворяется при $x < x_1$ или $x > x_2$
$b^2 - 4ac = 0$	$a > 0$		Удовлетворяется при всех действительных значениях x, кроме $x = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	Неравенство не имеет решений
	$a < 0$		Неравенство не имеет решений	Удовлетворяется при всех действительных значениях x, кроме $x = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$b^2 - 4ac < 0$	$a > 0$		Удовлетворяется при всех действительных значениях x	Неравенство не имеет решений
	$a < 0$		Неравенство не имеет решений	Удовлетворяется при всех действительных значениях x

Глава 6. Методика изучения функции

§ 1. Определение понятия функции

Понятие функции в своем развитии прошло через несколько этапов. Впервые идея функции появляется у Декарта, который обратил внимание на соответствие между отрезками, представляющими собою абсциссу и ординату точки некоторой кривой. Таким образом, первоначальное определение функции имело геометрический характер, так как рассматривалось изменение отрезка по определенному закону. Такое представление о функции было у Ньютона и Лейбница (последнему принадлежит термин «функция»).

Постепенно понятие функции получило аналитическое определение. Первая попытка аналитического определения принадлежит Якову Бернулли, который характеризует функцию, как «величину, составленную из некоторой переменной и каких-нибудь постоянных». Такое воззрение на функцию сохранилось и в XVIII в. Аналогичное определение было дано Иоганном Бернулли (1718), затем его несколько уточнил Л. Эйлер (1748): «Функция переменной величины есть аналитическое выражение, составленное каким-нибудь способом из этой переменной величины и из чисел или постоянных величин». Но Эйлер называет также функцией «линию, проведенную от руки», причем аналитическое определение считает более узким, чем геометрическое [10, стр. 259—260].

Объем понятия функции, введенного с помощью аналитического определения, зависит от того, какие операции мы относим к аналитическим, какими средствами пользуемся для задания функциональной зависимости. Здесь можно провести аналогию с так называемыми неразрешимыми геометрическими задачами древних греков (задачи о квадратуре круга, о трисекции угла, об удвоении куба). Эти задачи являются неразрешимыми, если ограничить средства построения, а именно, если использовать лишь циркуль и линейку. Уже древнегреческие математики дали несколько решений каждой из этих задач, применяя другие инструменты для построения.

Если пользоваться только конечным числом алгебраических операций, то многие функции, относимые к элементарным, не смогут быть выражены аналитически и их нельзя назвать функциями, если пользоваться аналитическим определением в таком смысле. Такие элементарные функции, как общая степенная функция, показательная функция, логарифмическая, тригонометрические функции, т. е. элементарные трансцендентные функции, не подойдут под аналитическое определение функции. Запись, например, тригонометрических функций не представляет собою «формулы», так как она не указывает, какие операции и в каком порядке необходимо произвести над аргументом, чтобы получить соответствующее значение функции. Обозначения $\sin x$, $\arcsin x$, $\lg x$ и т. п. не задают некоторую функцию, это лишь условное обозначение определенной функции. Они остались от так называемой синкопированной алгебры, предшествовавшей современной символической алгебре. В синкопированной алгебре употреблялись обозначения, представлявшие сокращенные записи соответствующих слов.

Если ограничить определение функции, считая ее заданной некоторой алгебраической формулой, то возникнет затруднение с функциями, задаваемыми несколькими формулами, например в записи формулы для пути при равномерном движении на отдельных участках, с различной скоростью на разных отрезках.

Во времена Эйлера недостаточно четко было выяснено само понятие аналитического выражения и вопрос об аналитическом задании функции. Поэтому полагали, что не для всякой кривой, проведенной от руки, можно записать аналитическое выражение. В настоящее время этот вопрос решается известной теоремой Вейерштрасса. Всякая функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a; b]$, является пределом равномерно сходящейся на сегменте $[a; b]$ последовательности многочленов $P_n(x)$ (и, следовательно, может быть представлена в виде суммы равномерно сходящегося на $[a; b]$ ряда многочленов).

Таким образом, чтобы всякая непрерывная функция была аналитической, т. е. могла быть представлена в виде алгебраического выражения или формулы, надо для составления формулы, кроме алгебраических операций, ввести основную операцию математического анализа — предельный переход. Тогда под аналитическое определение подойдут элементарные трансцендентные функции, разложимые в степенные ряды. Если же допустить неоднократное применение предельного перехода, то аналитически можно представить и разрывные функции. Например, функция Дирихле, равная единице для всех рациональных значений аргумента и нулю для всех его действительных значений, может быть представлена в виде выражения, содержащего два предельных перехода:

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \left[\lim_{n \to \infty} (\cos m!\,\pi x)^{2n}\right].$$

Аналитическое определение оказывается с такой точки зрения довольно широким, однако и оно не полностью отражает современное понимание функции. Понятие функции является основным в современной математике и позволяет классифицировать ее на разделы в соответствии с видом изучаемых функций. При этом понятие функции получает большую степень обобщения.

В первоначальной идее функциональной зависимости выделяется на первое место соответствие между элементами двух множеств любой природы. Так, аналогом понятия функции в геометрии служит понятие геометрического преобразования, устанавливающее соответствие между двумя точечными множествами.

Между тем аналитическое определение функции не только ограничивает способ задания ее, но и имеет в виду установление соответствия не между множествами любой природы, а между двумя переменными величинами, т. е. множествами, удовлетворяющими определенным требованиям (аксиомам величины). В современных курсах анализа дается определение, снимающее это ограничение: если каждому элементу x некоторого множества X поставлен в соответствие определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X определена некоторая функция Y.

Это определение в той его части, которая подчеркивает идею соответствия, восходит к Н. И. Лобачевскому, хотя у последнего речь еще идет только о соответствии между числами: «Общее понятие требует, чтобы функцией от данного x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно меняется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое дает средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или зависимость может существовать и оставаться неизвестна... Обширный взгляд теории допускает зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими принимать как бы данными вместе» [31 б, стр. 149]. Это определение иногда называют табличным. В 1837 г. аналогичное общее определение было сформулировано математиком Дирихле и вошло под его именем в курсы анализа. Сейчас его называют также определением Дирихле — Лобачевского.

Обратим внимание на то, что в современном определении, подчеркивающем соответствие между элементами двух множеств любой природы, исключен не только термин «величина», но и термин «переменная», не упоминается о взаимной изменяемости двух величин, находящихся в функциональной зависимости, которая фигурирует во всех определениях функции от возникновения этого понятия вплоть до начала XX в. Соответствие дано как бы уже в готовом, застывшем виде. Это статическое определение не случайно. Цель его — исключить из формулировки неявно присутствующее в динамических определениях (говорящих о переменных величинах и изменяемости) понятие времени, привнесенное в математику из механики.

Однако для учащегося, не искушенного в математических тонкостях, здесь замаскирован и сам факт, что в этой формулировке на математическом языке описывается взаимная зависимость и взаимоизменяемость величин в природе. Ведь именно в этом и заключается все значение понятия функции в математике, с помощью которого она изучает законы природы. Ф. Энгельс писал в «Диалектике природы»: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *не-*

медленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем».*

Вместе с тем самое общее определение функции, стремящееся охватить ее применение сразу во всех разделах математики, в котором поэтому вместо переменных величин фигурируют абстрактные множества, в математическом анализе почти не находит применения. Весь классический анализ был построен без этого общего определения. Таким образом, для первоначального изучения нет никакой необходимости в самом общем определении. Более того, оно может привести к непониманию учениками самой сущности понятия функции. Причина этого не в его сложности. Понятия множества и соответствия между двумя множествами вполне доступны для понимания учащихся, и последних необходимо постепенно знакомить с этими важнейшими для математики понятиями (методика такой работы изложена, например, в книгах [48, 190, 215]). В настоящее время проводятся соответствующие эксперименты с учащимися IV класса [47]. Но дело здесь в необходимости подчеркнуть идею взаимоизменяемости величин. Имея это в виду, можно отдать предпочтение тому определению, из которого не изгнана идея переменной величины. Такой точки зрения придерживались и виднейшие ученые-математики (А. Я. Хинчин, В. Л. Гончаров и др.). Правда, противоположная точка зрения имеет авторитетного защитника, например, в лице проф. А. И. Маркушевича [198]. Но если проследить за литературой по этому вопросу, то можно заметить, что все же большинство ученых, методистов и учителей поддерживают точку зрения А. Я. Хинчина. Последний считает полезной идею переменной величины сохранить даже в определении функции для первого курса физико-математических факультетов [148]. Попытка свести все к высшей степени формализации не нужна и вредна для школы, она способна выхолостить все ценное, что содержится в понятии функции.

Следовательно, приемлемым для школы будет определение функции, подчеркивающее понятие соответствия и сохраняющее понятие переменной величины. Напри-

* Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1965, стр. 224.

мер такое: переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому допустимому значению величины x соответствует некоторое определенное значение величины y. Величину x называют независимой переменной или аргументом, а величину y — зависимой переменной.

Подобное определение не дается на первых уроках по изучению функции. Сначала следует подчеркнуть зависимость изменения одной величины от изменения значений другой величины. При этом полезно взять уже известные примеры из физики, геометрии и др. Затем объясняется понятие допустимого значения и соответствия. Только после этого можно дать приведенное определение. Затем следует подвести под это определение и постоянную функцию.

В учебнике А. П. Киселева [100] указано три способа задания функции: графический, аналитический, табличный. К этому необходимо добавить задание функции словесным описанием (занимательный пример такого задания функции используется в фокусе «феноменальная память» [36]), задание функции несколькими формулами $\left(\text{например, } y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}\right)$.

Это важно, потому что, отдавая предпочтение функциям, задаваемым одной формулой, как наиболее простым и чаще встречающимся в практике, мы должны вместе с тем добиться, чтобы ученики не отождествляли функцию с формулой.

В выпускном классе можно в обзорных лекциях познакомить учащихся с развитием понятия функции и подвести их к современному определению, дать даже некоторые сложные искусственные примеры функций, например функции Дирихле, $[x]$ (целая часть от x), $\operatorname{sign} x$ и т. п. Вообще же увлекаться такими примерами нет надобности [147, 178, 185, 214, 221].

§ 2. Функциональная пропедевтика

Тема «Функции и графики» изучается в VIII классе. Она является заключительной темой курса алгебры восьмилетней школы. Вся программа восьмилетней школы должна подготавливать к изучению этой темы. Это очень ясно сформулировано в объяснительной записке к программе восьмилетней школы по математике.

Так, в объяснительной записке к программе по арифметике сказано [38, стр. 7]: «Изучение зависимостей между величинами в курсе арифметики V класса проводится в связи с решением задач... Знакомство с примерами конкретных зависимостей величин используется в VI классе при прохождении темы «Прямая и обратная пропорциональность величин»... К пониманию графического изображения зависимости между величинами готовят учащихся систематически проводимые в курсе арифметики построения диаграмм».

В объяснительной записке к программе по алгебре говорится [38, стр. 12]: «Простейшие графики (график температуры, равномерного движения и др.) изучаются в VI классе, причем предполагается, что термины «система координат», «ось абсцисс», «ось ординат» и т. п. здесь учащимся не сообщаются. Система координат и связанные с ней вопросы специально изучаются в VII классе.

При изучении графиков простейших функций учащиеся должны научиться не только строить, но и читать графики...

Вопросы функционально-графического характера рассматриваются при изучении различных тем программы, с тем чтобы ознакомление с ними происходило в течение более или менее длительного времени...

Весь материал, относящийся к функциям, повторяется и углубляется в специальной теме «Функции и их графики», заключающей курс алгебры восьмилетней школы. В этой теме должна быть введена функциональная терминология, более глубоко изучены линейная и квадратная функция, а также освещены с функциональной точки зрения некоторые вопросы из пройденного ранее материала, чтобы эта тема носила итоговый, заключительный характер по отношению ко всему курсу алгебры восьмилетней школы».

Таким образом, в объяснительной записке к программе намечен довольно полный план действий для проведения функциональной пропедевтики. Этот план дополняется конкретными указаниями к программе по другим темам. Так, перед изучением систем линейных уравнений с двумя неизвестными рекомендуется вводить их геометрическое изображение. Это сделано в учебнике А. Н. Барсукова [64]. Еще в большей степени геометрическое изображение линейного уравнения с двумя неизвестными используется в учебнике «Алгебра» Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского [143, 144]. Здесь с помощью геометрического изображения вводится само понятие о системе уравнений и ее решении. Такой подход можно использовать и при работе по учебнику А. Н. Барсукова.

Полезно строить графики не только прямо пропорциональной и линейной зависимости, для того чтобы у учащихся не создалось слишком узкое представление о виде графиков. Интересный материал для осуществления намеченной программы можно найти у В. Л. Гончарова [87, 88].

§ 3. Степень с рациональным показателем. Степенная функция

В новой программе для средней школы [40] восполнен пробел, имевшийся в старой программе: введена тема «Степенная функция» (она входит в тему «Степень с рациональным показателем. Степенная функция»). К изучению этой темы учащиеся подготовлены программой восьмилетней школы, в соответствии с требованиями которой они уже научились строить графики ряда степенных функций как с целыми, так и с дробными показателями (правда, вместо дробного показателя использовался знак радикала). В этой теме предварительно обосновываются действия над степенями с рациональными показателями, изучаются отдельные степенные функции $\left(\text{с показателями } 1, 2, 3, -1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, а затем — их общие свойства. В эту же тему входит понятие об арифметическом корне и действиях над радикалами. Свойства степенной функции обосновываются исходя из свойств степени.

Изучение темы начинается с расширения понятия о показателе степени: вводятся степени с целыми показателями и с любыми рациональными показателями. С нулевым и отрицательным показателями степени ученики уже знакомы как с особыми обозначениями. В данной теме доказываются свойства степени с нулевым и отрицательным показателями, из чего вытекает, что эти обозначения не случайны, что степени с отрицательным и нулевым показателями обладают теми же свойствами, что и степени с натуральными показателями, и введение этих показателей позволяет снять некоторые ограничения на действия со степенями, которые приходилось соблюдать при оперировании только с натуральными показателями степеней. Разъясняя целесообразность этих определений, необходимо позаботиться, чтобы учащиеся правильно поняли смысл соответствующих рассуждений и не приняли их за доказательство определений.

Здесь имеется в виду, например, следующее рассуждение:

$$\frac{a^k}{a^k} = 1, \quad \frac{a^k}{a^k} = a^{k-k} = a^0.$$

Следовательно, $a^0 = 1$. Но преобразование $\frac{a^k}{a^k} = a^{k-k}$ мы не имеем права производить до введения нулевого показателя степени, так как правило деления степеней одного основания доказано лишь для случая, когда показатель делимого больше показателя делителя. До этих пор символ a^0 лишен какого бы то ни было смысла точно так же, как если бы мы в показателе степени поставили любой значок (здесь нас вводит в заблуждение тот факт, что показатель — нуль, т. е. число, а мы привыкли, что числовой показатель означает какое-то определенное действие, а значит, a^0 обязательно должно чему-то равняться). Смысл произведенного преобразования в следующем: необходимо выяснить, что получится, если расширить правило деления степеней для случая равенства показателя делимого и делителя. Оказывается, для этого мы должны ввести нулевой показатель и считать степень с нулевым показателем по определению равной единице. При этом основание степени не может быть равным нулю.

Аналогичные рассуждения проводятся для мотивировки определений отрицательного и дробного показателей степени. Чтобы подчеркнуть, что это — определения, целесообразно их мотивировку дать после доказательства свойств новых показателей и приобретения некоторых навыков в оперировании с ними: в процессе этой работы ученики сами могут заметить, что прежние ограничения, налагавшиеся на действия с натуральными показателями, теперь могут быть сняты. Разумеется, учащиеся только в том случае сумеют оценить значение новых понятий, если в предыдущем изложении везде в достаточной степени подчеркивались ограничения в операциях над степенями (правило деления степеней можно было применять только для случая, когда показатель делимого больше показателя делителя, правило извлечения корня из степени — только для случая, когда показатель подкоренного выражения делится на показатель корня).

Очень полезно дать конкретное истолкование отрицательному и дробному показателям степени так, как рекомендуется в работах И. В. Арнольда [3, 61, 161] и С. И. Шварцбурда [223].

Конкретное истолкование рационального показателя степени, в котором раскрывается существо аналогии в действиях над дробями и в действиях над радикалами, позволяет сделать очевидными все правила действий над радикалами и над степенями с дробными показателями. Оно говорит о том, что аналогия между дробным показателем и дробным коэффициентом не случайная, а представляет собою следствие изоморфизма, существующего между множеством действительных чисел с операцией сложения и множеством положительных чисел с операцией умножения.* Действительно, дробный коэффициент показывает, какую часть множимого следует взять, т. е. на сколько равных слагаемых следует разбить множимое и сколько этих слагаемых сложить. Например,

$$\frac{1}{2}\cdot 16=\frac{1}{2}(8+8)=8,$$

т. е. взяли одно слагаемое из двух, составляющих число 16, т. е. половину («аддитивную», или «слагаемую») числа 16:

$$\frac{3}{4}\cdot 16=\frac{3}{4}(4+4+4+4)=4+4+4=12,$$

т. е. взяли три из четырех равных слагаемых, из которых состоит число 16, или три четверти (аддитивные) числа

* Об изморфизме см. статью А. Л. Бондарева [165].

16, или взяли число 16 (слагаемым) «три четверти раза».

Совершенно аналогично $\sqrt{16}$, или $16^{\frac{1}{2}}$, означает, что число 16 надо разложить на два равных сомножителя и взять один из них, т. е. взять половину («мультипликативную», или «множимую») числа 16.

$$\sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$$

или

$$\underbrace{16}_{4\,\cdot\,4}{}^{\frac{1}{2}} = 4,$$

$$\sqrt[4]{\underbrace{16^3}_{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^{\frac{3}{4}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Таким образом, взяли три из четырех равных сомножителей, из которых состоит число 16, или три четверти (мультипликативные) числа 16, или взяли число 16 три четверти раза сомножителем.

Отсюда ясно, что все правила действий над степенями с дробными показателями могут быть получены простым перефразированием правил действий над выражениями с коэффициентами, если слова «прибавить», «отнять» заменить соответственно словами «умножить», «разделить», а слова «умножить», «разделить»— словами «возвести в степень» и «извлечь корень».

Рассмотрим два основных свойства действий над степенями: правило умножения двух степеней одного основания и правило возведения степени в степень.

Первое правило «при перемножении двух степеней одного основания п о к а з а т е л и складываются» ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$) есть перефразировка правила приведения подобных членов, по которому складываются коэффициенты, т. е. правила «при сложении двух подобных членов складываются их коэффициенты» ($ma + na = (m + n)a$).

Второе правило «для в о з в е д е н и я степени в с т е п е н ь нужно перемножить п о к а з а т е л и степеней» соответствует правилу «для умножения выражения на число достаточно умножить на это число коэффициент данного выражения».

Это соответствие между коэффициентом и показателем степени, характерное для натуральных показателей, распространяется и на дробные коэффициенты и показатели степени при конкретном операторном истолковании дробного показателя степени, что и составляет сущность аналогии между действиями над показателями и дробями. Без такого объяснения учащимся кажется, например, случайным, что при умножении радикалов приходится приводить их к общему показателю аналогично приведению к общему знаменателю двух дробей при сложении и т. п.

Так же конкретно истолковывается отрицательный показатель степени. В противоположность положительному он показывает, сколько раз основание степени следует взять не множимым, а делителем:

$$a^{-3}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}.$$

§ 4. Степень с иррациональным показателем. Понятие о логарифме

Прежде чем ввести понятие логарифма и логарифмической функции, необходимо произвести дальнейшее расширение понятия о показателе степени.

Понятие о степени с иррациональным показателем может быть дано двумя способами. При первом оно вводится так же, как вводилось иррациональное число.

Таблица 12

Показатели степени / Числа	1	2	3	4
$10^{0,1}$	1,2589	1,5849	1,9953	2,5119
$10^{0,01}$	1,0233	1,0471	1,0715	1,0965
$10^{0,001}$	1,0023	1,0046	1,0069	1,0092
$10^{0,0001}$	1,0002	1,0005	1,0007	1,0009

При втором используется понятие предела. Поскольку мы уже имеем все множество действительных чисел, то существует в этом множестве предел последовательности степеней, показатели которых представляют собою последовательные рациональные приближения некоторого иррационального числа. Этот предел можно по определению принять за степень с данным иррациональным показателем.

Чтобы понятие иррационального показателя было доступнее пониманию учащихся, их полезно ознакомить с элементарным способом приближенного вычисления степени 10 с десятичным показателем, предложенным И. В. Арнольдом [3] и примененным С. И. Шварцбурдом [223]. Полученная при этом таблица может быть использована для вычисления логарифма элементарным способом и его конкретного истолкования. Сначала определяется приближенное значение $10^{0,1}$ исходя из приближенного равенства $10^3 \approx 2^{10}$; $10^{0,3} \approx 2$; $10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,16$; $10^{0,2} = 10^{0,5} : 10^{0,3} \approx 3,16 : 2 = 1,58$; $10^{0,1} = \sqrt{1,58} \approx 1,26$ (с избытком). Затем вычисляется $10^{0,01}$: $10^{0,01} = \sqrt[5]{10^{0,05}}$; $10^{0,05} = \sqrt{10^{0,1}} \approx \sqrt{1,26} \approx 1,12$; $10^{0,01} = \sqrt[5]{1,12} = 1 + \alpha$; $1,12 = (1+\alpha)^5 \approx 1 + 5\alpha$; $5\alpha \approx 0,12$; $\alpha = 0,024$; $10^{0,01} \approx 1.024$. Ввиду того что величина числа α мала, пренебрегаем его степенями выше первой. Аналогично можно приближенно вычислить степень $10^{0,001}$ и др. После этого учащимся станет понятно, что, вычисляя с большей степенью точности, можно получить таблицу следующего вида (табл. 12) [3]:

5	6	7	8	9
3,1623	3,9811	5,0119	6,3096	7,9433
1,1220	1,1482	1,1749	1,2023	1,2303
1,0116	1,0140	1,0162	1,0186	1,0209
1,0012	1,0014	1,0016	1,0018	1,0021

По такой таблице можно вычислить степень 10 с любым четырехзначным десятичным показателем простым умножением чисел таблицы. Все вычисления вполне доступны учащимся, они делают понятной идею возведения в дробную степень. Вместе с тем становится более конкретным понятие степени с иррациональным показателем, определяемой последовательностью степеней с рациональными показателями. Десятичные знаки у членов этой последовательности постепенно «устанавливаются», т. е. в дальнейшем уже не меняются у всех членов последовательности. Сначала определяется цифра (или цифры) целых единиц, затем цифра десятых, сотых и т. д. долей степени с иррациональным показателем, так как каждый член последовательности можно рассматривать как приближенное значение степени с иррациональным показателем. Начиная с какого-то члена последовательности, некоторая цифра, например число сотых, не изменяется, поэтому такое же число сотых будет и в определяемой этой последовательностью степени с иррациональным показателем степени (табл. 13).

Таблица 13

(по избытку)	(по недостатку)
$10^2 = 100$,	$10^1 = 10$,
$10^{1,5} = 31,6227...$,	$10^{1,4} = 25,1189...$,
$10^{1,42} = 26,3026...$,	$10^{1,41} = 25,703...$,
$10^{1,115} = 26,0015...$,	$10^{1,414} = 25,941...$,
$10^{1,4143} = 25,9597...$,	$10^{1,4142} = 25,9537...$,
$10^{1,41422} = 25,9549...$,	$10^{1,41421} = 25,9543...$,
$10^{1,414214} = 25,95453...$,	$10^{1,414213} = 25,95452...$,
$10^{1,4142137} = 25,95456...$,	$10^{1,4142136} = 25,95456...$,

С помощью табл. 12 можно вычислять приближенно и десятичный логарифм числа, притом способ вычисления конкретизирует понятие логарифма. Возьмем, например, число 35791. Поскольку логарифм — число, показывающее, сколько раз в качестве сомножителя в данном числе содержится число десять (если речь идет о десятичном логарифме) или его «мультипликативные» доли, то прежде всего выделим целую степень десяти, содержащуюся в качестве сомножителя в нашем числе: $35791 = 10^4 \cdot 3,5791$. В остатке от деления нашего числа на 10^4, т. е. в 3,5791, уже не содержится 10 в качестве сомножителя. В нем может содержаться некоторое число раз сомножителем «десятая часть 10»: $10^{0,1} = 1,2589$. По первой строке табл. 12 находим наибольшую степень этого числа, не превосходящую 3,5791. Это 3,1623, т. е. $10^{0,5}$. Теперь наше число представим в виде: $35791 = 10^4 \cdot 10^{0,5} \times \frac{3,5791}{3,1623} = 10^4 \cdot 10^{0,5} \times 1,1318$. В сомножителе 1,1318 может содержаться уже лишь сотая мультипликативная доля 10, т. е. $10^{0,01} = 1,0233$. Находим во второй строке табл. 12 наибольшую степень этого числа, содержащуюся в числе 1,1318. Это $10^{0,05} = 1,1220$. Наше число представим в виде: $35791 = 10^4 \cdot 10^{0,5} \cdot 10^{0,05} \cdot \frac{1,1318}{1,1220} = 10^4 \cdot 10^{0,5} \cdot 10^{0,05} \cdot 1,0087$. Разыскиваем в третьей строке, какая степень $10^{0,001}$ содержится в числе 1,0087. Найдя число 1,0069, представим наше число в виде: $35791 = 10^4 \cdot 10^{0,5} \cdot 10^{0,05} \cdot 10^{0,003} \times \frac{1,0087}{1,0069} = 10^4 \cdot 10^{0,5} \cdot 10^{0,05} \cdot 10^{0,003} \cdot 1,0018$

В последней строке табл. 12 найдем, что $1,0018 = 10^{0,0008}$. Окончательно получим: $35791 = 10^4 \cdot 10^{0.5} \cdot 10^{0,05} \times 10^{0,003} \cdot 10^{0,0008} = 10^{4,5538}$. Следовательно, десятичный логарифм числа 35791 равен 4,5538.

Все вычисления можно расположить следующим образом:

35791	10000			
	3,5791	3,1623		
	3,1623	1,1318	1,1220	
	4 1680	1,1220	1,0087	1,0069
	31623	98000	1,0069	1,00178
	100570	89760	18000	
	94869	82400	10069	
	57010	78540	79310	
	31623		70483	
	253870		88270	
	252984		80552	

Нет необходимости вести вычисления с таким числом знаков, как в этом примере. Здесь это сделано лишь для того, чтобы убедиться, насколько просто можно получить логарифм числа с верными четырьмя знаками, применяя таблицу И. В. Арнольда (полученный результат совпадает с результатом, взятым из таблиц логарифмов В. М. Брадиса). В классе можно пользоваться сокращенной таблицей с тремя строками и числами, округленными до третьего десятичного знака. Тогда результат, хотя и менее точный, будет получен еще быстрее. Разумеется, речь идет лишь об одном или двух примерах на вычисление логарифмов элементарным способом, позволяющих сделать понятие логарифма более понятным учащимся. Впоследствии (из обзорных лекций) ученики должны узнать, как были составлены таблицы первоначально, и получить понятие о современных способах составления таблиц логарифмов и других таблиц [1]. На занятиях в кружке можно познакомить учащихся и с другими элементарными способами вычисления логарифмов [10, 42, 182, 184, 207, 210]. Арифметическая подготовка к введению понятия логарифма может быть проведена и так, как предлагает И. Г. Польский [209]. С самого начала учащимся дается в руки таблица антилогарифмов, т. е. таблица значений показательной функции, а затем таблица логарифмов. Первая используется для вычисления любых степеней числа 10. Вторая позволяет любое число представить сперва в виде степени числа 10, а затем с помощью первой таблицы вычислить нужную степень этого основания. После этого дается определение логарифма как показателя степени, а затем проводится его операторное истолкование. Работа с обеими таблицами, как и с таблицей И. В. Арнольда, преследует цель конкретизировать понятие сначала рациональной, а затем и иррациональной степени.

Укажем, что операторное истолкование логарифма делает прозрачным смысл формулы перехода от логарифмов с одним основанием к логарифмам с другим основанием. Примеры, решаемые механически по этой формуле (учителя обычно сообщают ее учащимся, хотя это и не требуется по программе), выполняются устно, непосредственно исходя из определения логарифма.

Действительно, логарифм представляет собою результат «мультипликативного» измерения данного числа данным основанием, т. е. показывает, сколько раз основание логарифмов содержится в данном числе в качестве сомножителя. Совершенно аналогично результат обычного (аддитивного) измерения показывает, сколько раз единица измерения содержится в данном числе в качестве слагаемого. Поэтому формула перехода от логарифмов с одним основанием к логарифмам с другим основанием — не что иное, как формула перехода от одной единицы измерения к другой, а модуль перехода есть коэффициент пропорциональности, равный отношению соответствующих единиц измерения. Если, например, некоторая длина измерена в метрах, а мы хотим ее измерить в сантиметрах, то достаточно число метров, выражающих эту длину, умножить на число сантиметров в одном метре, т. е. на 100, или разделить на число метров в одном сантиметре, т. е. разделить на $\frac{1}{100}$. Коэффициент перехода или пропорциональности равен отношению 1 *м* : 1 *см* или числу, обратному отношению 1 *см* : 1 *м*.

Точно так же, если мы знаем логарифм некоторого числа по основанию, например a, то для получения логарифма данного числа по основанию b необходимо первое число умножить на коэффициент пропорциональности, показывающий, сколько раз в основании a, т. е. в старой единице измерения, содержится новая единица измерения b. Следовательно, это первое число надо умножить на $\log_a b$ или разделить на обратное число, т. е. на число, показывающее, сколько раз основание a содержится в b:

$$\log_b N = \log_b a \cdot \log_a N = \frac{\log_a N}{\frac{1}{\log_b a}} = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Если пользоваться операторным истолкованием логарифма, то, например, равенство

$$\log_b N = 2\log_{b^2} N$$

становится совершенно очевидным, т. е. нет необходимости пользоваться формулой перехода от одного основания логарифма к другому.

Также очевидно, что

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

Аналогично могут быть решены и другие примеры на применение формулы перехода к новому основанию логарифмов.

§ 5. Показательная и логарифмическая функции

По старой программе понятиям показательной и логарифмической функций отводилось весьма ограниченное время, а главное внимание уделялось логарифмическим вычислениям. В настоящее время логарифмические вычисления, в особенности с большим числом знаков, окончательно утратили практическое значение. Еще недавно можно было утверждать, что в общеобразовательной школе нет необходимости практиковаться в вычислениях с помощью многозначных логарифмических таблиц, так как на практике эти вычисления могут понадобиться лишь астрономам и геодезистам. Но сейчас астрономы имеют в своем распоряжении электронные вычислительные машины и поэтому отпала необходимость в логарифмических вычислениях, так как их точность для современной астрономии недостаточно высока.

Постепенно, как видим, значение логарифмов как мощного орудия вычисления утратилось, новые вычислительные средства и машины отодвинули логарифмические вычисления на второй план. Этот процесс отразился и в школьном преподавании. Семизначные таблицы Вега, которыми пользовались в гимназиях в XIX в., были вытеснены пятизначными таблицами логарифмов Е. М. Пржевальского, а теперь в школе пользуются четырехзначными таблицами В. М. Брадиса. Когда в школу вводились четырехзначные таблицы, то высказывались опасения, что при пользовании такими таблицами отпадет необходимость производить интерполяцию и учащиеся не ознакомятся с этим важным понятием, что было обязательным при пользовании таблицами Пржевальского. Такие аргументы, разумеется, не были достаточно основательными, так как с идеей интерполяции (линейной) можно познакомить учащихся при работе с другими таблицами, имеющими большее практическое значение, чем многозначные таблицы логарифмов. В программу введено изучение логарифмической линейки, точность которой достаточна для большинства практических расчетов. В дальнейшем не исключено, что время, отводимое на логарифмические вычисления в школе, будет еще более ограничено.

Если логарифмические вычисления и не имеют большого практического значения, то идея этих вычислений интересна сама по себе и поэтому она не может быть исключена из программы. Наглядные понятия о ней можно дать, если начать с рассмотрения достаточно большой таблицы степеней числа 2 (доведя до 2^{50} или до 2^{25}). Она легко составляется, и ее можно выполнить на больших листах бумаги. Тогда можно продемонстрировать «моментальные» вычисления с числами, которые записаны в этой таблице и имеют большое число знаков. Учителю придется только производить действие ступени, на единицу меньшей, над номерами чисел таблицы, которые представляют собою логарифмы этих чисел по основанию два. Речь идет о действиях второй и третьей ступени над числами таблицы.

Например, чтобы «моментально» перемножить числа $2048 \cdot 1024$, достаточно сложить номера этих чисел в нашей таблице $(11+10=21)$ и найти в ней 21-е число (2 097 952), так как $2048 \cdot 1024 = 2^{11} \cdot 2^{10} = 2^{21} = 2\,097\,952$. Эти вычисления произведут большое впечатление на учащихся, но они сами могут заметить, что таким способом можно оперировать лишь с числами данной таблицы, в которую попали немногие числа. А затем, естественно, уместно перейти к задаче составления более плотной таблицы и дать понятие об элементарном способе вычисления десятичных логарифмов, о котором говорилось выше, и познакомить с таблицей логарифмов Брадиса.

Означает ли перспектива сведения к минимуму логарифмических вычислений в школе возможность исключения этой темы из школьной программы? Разумеется, не означает. Тема останется, но центр тяжести будет перенесен на изучение свойств показательной и логарифмической функций, имеющих большое применение в естествознании и технике. Дело в том, что эти функции описывают на математическом языке многие конкретные зависимости, встречающиеся в природе: закон показательной функции — это закон органического роста, или непрерывных сложных процентов (непрерывной геометрической прогрессии). Основное характеристическое свойство показательной функции заключается в том, что равным абсолютным приращениям аргумента соответствуют равные относительные приращения функции:

$$y = Ba^x, \quad y_1 = Ba^{x+\Delta x} = ya^{\Delta x} = yk, \text{ где } k = a^{\Delta x}.$$

Данное свойство можно выразить и так: приращения функции пропорциональны значениям функции в данной точке ($y = y_1 - y = Ba^{x+\Delta x} - Ba^x = Ba^x(a^{\Delta x} - 1) = yc$, где коэффициент пропорциональности $c = a^{\Delta x} - 1$). Отсюда вытекает, что прирост имеющейся массы вещества пропорционален данной массе. Это и есть закон непрерывных сложных процентов, или закон органического роста. По нему происходит прирост живой древесины, размножение бактерий, радиоактивный распад ($a < 1$) и целый ряд других процессов. Интересный материал по этой теме содержится во многих пособиях [3, 60, 127, 174]. Основная идея логарифмических вычислений находит применение в устройстве логарифмической линейки, имеющей важное практическое значение. Эта же идея применяется для построения номограмм на логарифмической и полулогарифмической бумаге и т. п. [60, 167, 168, 169, 172].

Полезно разъяснить связь показательной функции с геометрической прогрессией. Вставляя между членами геометрической прогрессии несколько средних геометрических, сколь угодно уплотняем эту последовательность. Применяя предельный переход, получаем показательную функцию, которая с этой точки зрения рассматривается как непрерывная геометрическая прогрессия.

Полное представление о логарифмической функции можно дать только на основании понятия обратной функции, с которым учащиеся должны быть ознакомлены уже в восьмилетней школе. А именно, понятие об обратной функции следует ввести уже при ознакомлении с простейшими функциями. Примеры обратных функций можно дать при изучении линейной, квадратной и кубической функций. Такие простейшие примеры позволяют объяснить, почему функции называются обратными. Это происходит потому, что их последовательное применение приводит к исходному значению аргумента. Проделав над результатом прямой операции, указываемой прямой функцией, операцию, предписываемую обратной функцией, мы «уничтожаем» действие, произведенное прямой функцией, проделав же обратную операцию, а затем прямую над некоторым значением аргумента, мы его не изменяем.

Например, по определению функции $y = x^2$ значению x соответствует значение x^2, а по определению функции $y = \sqrt{x}$ значению x^2 соответствует опять исходное значение x. Таким образом, извлекая квадратный корень из x^2, опять получаем x (и обратно, $(\sqrt{x})^2 = x$).

Изучение конкретных двух взаимно обратных функций полезно проводить сначала на графике прямой функции. Учащиеся должны понимать, что так же, как одно и то же уравнение задает две функции при одной и той же зависимости, — один и тот же график выражает две функции, связанные этой зависимостью. Только для соблюдения общепринятого стандарта в обозначениях мы меняем обозначения при перемене ролей двух взаимосвязанных величин. От этого меняется и расположение графика относительно осей координат. Вначале следует строить график обратной функции (уже в новых обозначениях) по точкам, используя график (или таблицу значений) прямой функции. После сравнения графиков можно сделать вывод об их симметричности относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Для наглядности можно воспользоваться графиком, начерченным на прозрачном материале (калька, плексиглас, стекло). Можно применять наглядное пособие, представляющее собою квадратную рамку, вращающуюся вокруг соответствующей диагонали квадрата. На эту рамку прикалывают начерченный график [206].

Отметим, что имеющееся в учебнике Киселева замечание о том, что логарифмирование есть одна из двух обратных операций по отношению к операции возведения в степень, справедливо лишь для рациональных показателей. Возведение в иррациональную степень не может рассматриваться как алгебраическая операция,

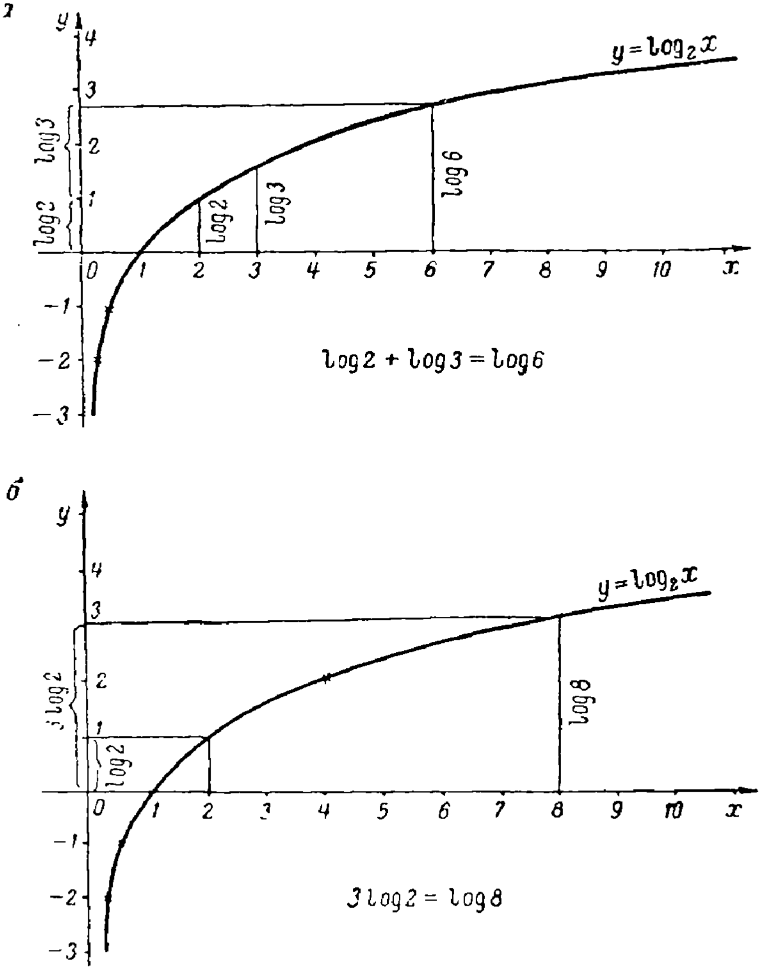


Рис. 48.

так как здесь мы имеем дело с предельным переходом. Необходимо рассмотреть две функции: $y = a^x$ и $y = x^b$. Обратная функция по отношению к первой есть логарифмическая. Функция, обратная по отношению ко второй функции, т. е. к степенной, тоже будет степенной функцией: $x = y^{\frac{1}{b}}$ [175].

При изучении графика логарифмической функции полезно на нем проиллюстрировать, кроме хода изменения функции, также теоремы о логарифмировании, т. е. показать, что прямо по графику можно, например, перемножить два числа, являющихся абсциссами точек графика, если сложить их ординаты и найти абсциссу точки графика, ордината которой равна полученной сумме ординат. Аналогично рассматриваются и другие теоремы о логарифмировании (рис. 48, *а, б*). Такие иллюстрации послужат хорошей подготовкой к обоснованию действий на логарифмической линейке. При изучении логарифмической линейки и вычислениях с помощью логарифмических таблиц необходимо закрепить и развить знания и навыки учащихся в области приближенных вычислений, в частности выяснить вопрос о границах погрешностей при вычислениях по таблицам. Материал по этой теме имеется в литературе [11, 12, 125, 171, 173].

Все сказанное относится к общепринятой методике изучения логарифмической и показательной функций. Однако надо иметь в виду и другие способы введения этих понятий. Так, в связи с идеей более раннего введения в школьный курс важных математических понятий проф. А. И. Маркушевич сделал предложение совершенно перестроить традиционную методику введения понятия о логарифме, связав его с понятием площади [200].

Использованная литература

1. Книги по методике и истории математики

1. Абельсон И. Б. Рождение логарифмов. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Арнольд И. В. Отрицательные числа в курсе алгебры. М.—Л., Изд. АПН РСФСР, 1947.
3. Арнольд И. В. Показатели степени и логарифмы в курсе элементарной алгебры. М., Изд. АПН РСФСР, 1949.
4. Барсуков А. Н. Первые уроки алгебры в VI классе. М., Учпедгиз, 1953.
5. Барсуков А. Н. Уравнения первой степени в средней школе. М., Учпедгиз, 1952.
6. Барыбин К. С. Методика преподавания алгебры. Пособие для учителей восьмилетней школы. М., «Просвещение», 1965.
7. Берзонас А. Д. Некоторые приемы, помогающие сознательному усвоению курса математики в VI классе. В помощь учителю математики. Душанбе, 1954.
8. Блох А. Ш., Неверов Г. С. Решение неравенств. Минск, Изд. М-ва высш., средн. спец. и проф. образов. БССР, 1962.
9. Бондарев А. Л. Общее учение об уравнениях в средней школе. Краснодар, «Сов. Кубань», 1958.
10. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе. Изд. 3-е. М., Учпедгиз, 1954.
11. Брадис В. М. Средства и способы элементарных вычислений. Пособие для учителей средней школы. Изд. 3-е, испр. и доп. М., Учпедгиз, 1954.
12. Брадис В. М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. М., Изд. АПН РСФСР, 1962.
13. Бронштейн С. С. Алгебра и ее преподавание в семилетней школе. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1946.
14. Волков И. Ф., Парно И. К. О преподавании десятичных дробей в V классе восьмилетней и средней школы. Пособие для учителей и студентов педагогических институтов. Кишинев, «Картя молдовеняскэ», 1960.
15. Волков И. Ф., Парно И. К., Спатару Н. Х. и др. О преподавании обыкновенных дробей после десятичных в V классе восьмилетней школы. Пособие для учителей и студентов педагогических институтов. Кишинев, «Картя молдовеняскэ», 1962.
16. Гайдуков И. И. Абсолютная величина. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1964.
17. Гельфанд М. С. Преподавание темы «Производная функция» в X классе школы рабочей молодежи. М., Изд. АПН РСФСР, 1958.
18. Гибш И. А. Исследование решений задач с параметрическими данными. М., Изд. АПН РСФСР, 1952.

19. Гибш И. А. Иррациональные уравнения в курсе средней школы. М., Изд. АПН РСФСР, 1954.
20. Гибш И. А. Уравнения 1-й степени в средней школе. М., Учпедгиз, 1956.
21. Гибш И. А. Методика обучения алгебре в VI классе восьмилетней школы. М., Изд. АПН РСФСР, 1963.
22. Гольдберг А. Г. Функции и их исследование. Производная. Из опыта учителя. Л., Учпедгиз, 1957.
23. Григорьев Н. И. Неравенства в курсе алгебры 10 класса. Л., Учпедгиз, 1956.
24. Гурский И. П. Функции и построение графиков. Изд. 2-е, испр. М., «Просвещение», 1964.
25. а) Депман И. Я. Рассказы о математике. Л., Детгиз, 1954.
б) Депман И. Я. Рассказы о старой и новой алгебре. Л., Детгиз, 1967.
26. Дорф П. Я. Наглядные пособия по математике и методика применения их в средней школе Пособие для учителей. Изд. 3-е, переработ. и дополн. М., Учпедгиз, 1960.
27. Занков Л. В. Новое в обучении арифметике в I классе. М., «Просвещение», 1964.
28. Из опыта работы учителей математики средних школ Кировоградской области. Киев, «Радянська школа», 1962.
29. Кэджори Ф. История элементарной математики. Пер. с англ. Изд. 2-е. Одесса, 1917.
30. Лавров А. А. Обобщающие уроки по арифметике и алгебре в X классе в системе повторения. Брянск, изд. газ. «Брянский рабочий», 1957.
31. а) Методика преподавания математики. Пособие для учительских институтов. Изд. 2-е, испр. Л., Учпедгиз, 1955.
б) Ляпин С. Е., Гастева С. А., Квасникова З. Я., Крельштейн Б. И. Методика преподавания математики. Ч. 2. Пособие для учителей математики VIII—X классов средней школы. Л., Учпедгиз, 1956.
в) Гастева С. А., Крельштейн Б. И., Ляпин С. Е., Шидловская М. М. Методика преподавания математики в восьмилетней школе. М., «Просвещение», 1965.
32. Марнянский И. А. Элементы математического анализа в школьном курсе математики. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1964.
33. Милованова Л. Н. Функции и их исследование. М., Изд. АПН РСФСР, 1958.
34. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1953.
35. Мрочек В. Р., Филиппович Ф. В. Педагогика математики. Спб., 1910.
36. Перельман Я. И. Занимательные задачи и опыты. М., Детгиз, 1958.
37. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Изд. 10-е, стереотип. М., Физматгиз, 1959.
38. Программы восьмилетней школы. На 1965/66 учебный год. Математика. V—VIII классы. М., «Просвещение», 1965.
39. Программы средней школы. На 1959/60 учебный год. Математика. М., Учпедгиз, 1959.

40. Программы средней школы. На 1965/66 учебный год. Математика. М., «Просвещение», 1965.
41. Программы средней школы. Математика. М., 1965 (Академия педагогических наук РСФСР). Проект для обсуждения (на правах рукописи).
42. Ремез Е. Я., Маергойз Д. М. (Ремез Э. Я., Маэргойз Д. М.) Логарифми та зв'язані з ними питання шкільної математики. Київ — Львів, «Радянська школа», 1949.
43. Репьев В. В. Очерки по методике преподавания алгебры. Горький, Кн. изд., 1958.
44. Симон М. Дидактика и методика математики. Изд. 3-е, М., ГИЗ, 1922.
45. Синельников М. П. О привитии учащимся интереса к математике (из опыта работы учителя школы рабочей молодежи № 2 ст. Москва). Смоленск, 1954.
46. Смирнова О. И. Функции в курсе математики 10 класса. Примерная методическая разработка темы «Функции и их исследование. Производная». М., Учпедгиз, 1956.
47. Тетрадь по математике № 4. Учени IV класса школы № г. Составил А. А. Столяр. М., 1964.
48. а) Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики. Минск, «Вышэйшая школа», 1965.
б) Столяр А. А. Методы обучения математике. Минск, «Вышэйшая школа», 1966.
49. Чистяков В. Д. Математические вечера в средней школе. М., Учпедгиз, 1958.
50. Чистяков И. И. Методика алгебры. Для высших педагогических учебных заведений и для преподавателей средней школы. М., Учпедгиз, 1934.
51. Чичигин В. Г. Методика преподавания арифметики. Для учительских институтов. М., Учпедгиз, 1949.
52. Шохор-Троцкий С. И. Методика арифметики. Пособие для учителей средней школы. М., Учпедгиз, 1935
53. Эрдниев П. М. Развитие навыков самоконтроля при обучении математике. М., Учпедгиз, 1957.
54. Эрдниев П. М., Сравнение и обобщение при обучении математике. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1960.
55. Эрдниев П. М. Методика упражнений по арифметике и алгебре (прямая и обратная задачи в элементарной математике). Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1965.
56. Юнг Дж. Как преподавать математику. Изд. 4-е, доп. и испр. Пг., 1918.
57. Юшкевич, А. П. История математики в средние века. М., Физматгиз, 1961.

2. Учебники, задачники, сборники упражнений

58. Агафонов В. М. Устные контрольные работы по математике. Для восьмилетней школы. М., «Просвещение», 1965.
59. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Алгебра. Ч. 1. Пособие для средних школ. М., Учпедгиз, 1939 (обл. 1940).
60. Андронов И. К. Математика для техникумов (курс единой математики). М., «Высшая школа», 1965.

61. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1938.
62. Ашкинузе В. Г., Шоластер Н. Н. Алгебра и элементарные функции. Пособие для старших классов средней школы. М., «Просвещение», 1964.
63. Баранова И. В., Ляпин С. Е. Задачи на доказательство по алгебре. М., Учпедгиз, 1954.
64. Барсуков А. Н. Алгебра. Ч. 1. Учебник для VI и VII классов семилетней и средней школы. Изд. 11-е. М., «Просвещение», 1966.
65. Барсуков А. Н. Алгебра. Ч. 2. Учебник для VIII—X классов средней школы. М., Учпедгиз, 1957.
66. Барыбин К. С., Исаков А. К. Сборник задач по математике для VIII—X классов. Пособие для учителей средней школы. М., Учпедгиз, 1952.
67. Бем Д. А., Волков А. А., Струве Р. Э. Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры. Ч. 1. М., 1914. Ч. 2, 1915.
68. Бем Д., Волков А., Струве Р. Сокращенный сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры. Ч. 1. Изд. 12-е. М.—Л., ГИЗ, 1929. Ч. 2. Изд. 9-е, 1930. Ч. 3. Изд. 3-е, 1923.
69. Березанская Е. С. Сборник задач и упражнений по арифметике для V и VI классов семилетней и средней школы. М., Учпедгиз, 1952.
70. Березанская Е. С., Нагибин Ф. Ф. Упражнения для устных занятий по алгебре (для VI и VII классов средней школы). М., Учпедгиз, 1949.
71. Березанская Е. С., Нагибин Ф. Ф. Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии. Для VIII—X классов средней школы. Пособие для учителей. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1955.
72. Блошкин Б. Ф. Самостоятельные и контрольные работы по математике для X класса. М., Учпедгиз, 1961.
73. Богушевский К. С., Сикорский К. П. Сборник задач по математике для повторения. Пособие для учителей V—VII классов средней школы. М., Учпедгиз, 1953.
74. Практические упражнения в алгебре, составленные по последнему распределению преподавания математики в гимназиях А. Н. К. Больманом. В трех частях. Спб., 1875.
75. Борель Э Элементарная математика. 1. Арифметика и алгебра Пер. с нем. Одесса, 1911.
76. Брадис В. М., Истомина Н. С., Маркушевич А. И., Сикорский К. П. Алгебра. Ч. 2. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1960.
77. Бычков Ф. Сборник примеров и задач, относящихся к курсу элементарной алгебры. Изд. 25-е. Пг., 1917.
78. Волков А. Н., Волкова А. М., Ширяева Т. Л. Самостоятельные и контрольные работы по математике для IX класса. Пособие для учителей. М. «Просвещение», 1966.
79. Выгодский М. Я. Краткий учебник высшей математики. Пособие для самообразования. Изд. 2-е. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

80. а) Германович П. Ю. Вопросы и задачи на соображение. Арифметика и алгебра. Пособие для средней школы. Л., Учпедгиз, 1956.
б) Германович П. Ю. Вопросы и задачи на соображение. Для VIII—X классов. Алгебра, геометрия, тригонометрия. Л., Учпедгиз, 1957.
в) Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. М., Учпедгиз, 1960.
81. Гибш И. А. Алгебра. Пособие для учителей IX—XI классов. М., Учпедгиз, 1960.
82. Гирш Мейер. Собрание примеров, формул и задач из буквенного вычисления и алгебры. Спб., 1861.
83. Глаголев Н. А. Элементарная геометрия. Ч. 1. Планиметрия. Для VI—VIII классов семилетней и средней школы. Изд. 3-е. М., Учпедгиз, 1954.
84. а) Годыцкий М. Г., Дорофеенко М. П. Сборник самостоятельных и контрольных работ по алгебре и геометрии. Для VIII класса. Минск, «Народная асвета», 1965.
б) Годыцкий М. Г., Дорофеенко М. П. Сборник самостоятельных и контрольных работ по алгебре и геометрии. Для VI—VII классов. Изд. 2-е. Минск, «Народная асвета», 1965.
85. Годыцкий М. Г., Дорофеенко М. П. Сборник самостоятельных и контрольных работ по алгебре, элементарным функциям и геометрии. Для IX класса. Минск, «Народная асвета», 1966.
86. Гончаров В. Л. Алгебра (учебный материал для опытной проверки). Ч. 1. Для VI класса. М., Изд. АПН РСФСР, 1949. Ч. 2. Для VII класса, 1950.
87. Гончаров В. Л. Начальная алгебра. VI—VII классы. Пособие для учителей математики с методическими указаниями и образцами контрольных работ. Изд. 2-е. М., Изд. АПН РСФСР, 1960.
88. Гончаров В. Л. Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика. М.—Л., Изд. АПН РСФСР, 1947.
89. Гончаров В. Л. Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием в старших классах школы. М., Изд. АПН РСФСР, 1948.
90. Граве Д. Начала алгебры. Классное руководство для гимназий и других средних учебных заведений. Пг., 1915.
91. Грацианский Н. И. Рабочая книга по математике для V года обучения. М. — Л., ГИЗ, 1928.
92. Давыдов А. К. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учительских и педагогических институтов. Изд. 2-е, переработ. М., Учпедгиз, 1959.
93. Давыдов У. С. Задачи на исследование уравнений с решениями и методическими указаниями. Пособие для учителей. Изд. 2-е. Минск, Учпедгиз, 1962.
94. Драбкина М. Е. Логические упражнения по элементарной математике. Минск, «Вышэйшая школа», 1965.
95. Зайцев И. Л. Курс высшей математики для техникумов. Изд. 6-е, переработ. М., Физматгиз, 1963.
96. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. Изд. 3-е, доп. М., «Наука», 1965.

97. Игнатьев В. А., Пономарев С. А., Обуховская Е. Н. Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике. Пособие для учителей. Изд. 2-е. доп. М., Учпедгиз, 1952.
98. Калинин Р. А. Алгебра и элементарные функции. Изд. 2-е, испр. М., «Наука», 1966.
99. Кипнис И. М. Сборник прикладных задач на неравенства. Пособие для учителей. Изд. 2-е, доп. М., «Просвещение», 1964.
100. Киселев А. П. Алгебра. Ч 1. Изд. 29-е. М., Учпедгиз, 1955. Ч. 2. Изд. 42-е, 1964
101. Киселев А. П. Геометрия. Ч. I. Планиметрия. Учебник для VI—IX классов семилетней и средней школы. Изд. 21-е. М., Учпедгиз, 1962.
102. Киселев А. П. Элементарная алгебра. Изд. 33-е (3-е). М., 1923.
103. Клионовский А. К. Смешанные алгебраические задачи. Повторительный курс V, VI, VII и VIII классов гимназий. Изд. 7-е, доп. Калиш, 1910.
104. Корницкий Н Д. Производственные вопросы и задачи прикладной арифметики. Ч. I. М.—Л., ГИЗ, 1925. Ч. 2, 1925.
105. а) Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции. Учебное пособие для учащихся IX класса средней школы. М., «Просвещение», 1966.
б) Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции. Учебное пособие для учащихся X класса средней школы. М., «Просвещение», 1966.
106. Крейдлин Е. Г. Устные контрольные работы по математике. Для VIII—X классов. М., Учпедгиз, 1961.
107. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. Изд. 5-е. М., «Наука», 1964.
108. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Изд. 8-е. М., «Наука», 1965.
109. Ларичев П. А. Сборник задач по алгебре. Ч. 1. Изд. 18-е. М., «Просвещение», 1966. Ч. 2. Изд. 16-е, 1965.
110. Лебединцев К. Ф. Курс алгебры для средних учебных заведений. Ч. 1. Киев, 1909. Ч. 2, 1910.
111. Лебединцев К. Ф. Руководство алгебры. Ч. 1. Изд. 11-е. М.—Л., ГИЗ., 1928. Ч. 2. Изд. 9-е, 1928.
112. Лебединцев К. Ф. Концентрическое руководство алгебры. Для средних учебных заведений. Ч. 1. Пг. — Киев, 1913. Ч. 2, 1917.
113. Лебединцев К. Ф. Счет и мера. Ч. 2. М.—Л., ГИЗ, 1923.
114. Лобачевский Н. И. Алгебра или вычисление конечных. Казань, 1834.
115. Лоповок Л. М. Математические диктанты для V—VIII классов. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1965.
116. Ляпин Е. С. Курс высшей алгебры. Изд. 2-е, переработ. М., Учпедгиз, 1955.
117. Ляпин С. Е., Баранова И. В. Сборник задач по элементарной математике. Арифметика и алгебра. Пособие для педагогических институтов. М., Учпедгиз, 1960.
118. а) Майер Р. А. Из опыта изучения функций и пределов в старших классах. М., «Просвещение», 1964.

б) Майер Р. А. Задачи по формированию функциональных понятий. Пособие для учителей V—VIII классов. М., «Просвещение», 1965.

119. а) Макарычев Ю. Н. Система изучения элементарных функций в старших классах средней школы. Учебно-методическое пособие для учителей. М., «Просвещение», 1964.
б) Макарычев Ю. Н., Нешков К. И. Алгебра. Учебные материалы для VI класса. М., «Просвещение», 1966.

120. Малинин А., Буренин К. Руководство алгебры и собрание алгебраических задач для гимназий, реальных училищ и учительских институтов. Изд. 13-е. М., 1913.

121. Миндюк Н. Г. Математика. Учебные материалы для V класса. Ч. I. М., «Просвещение», 1965.

122. а) Муравин К. С. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре для восьмилетней школы. Пособие для учителя. М., «Просвещение», 1965.
б) Муравин К. С., Крейдлин Е. Г. Сборник задач по алгебре для VI—VIII классов. М., «Просвещение», 1964.
в) Муравин К. С. Математика Учебные материалы для V класса. Ч. 2. М., «Просвещение», 1965.

123. а) Нешков К. И. Математика. Учебные материалы для IV класса. Ч. I. М., Изд. АПН РСФСР, 1963. Ч. 2, 1963. Ч. 3, 1964 (на правах рукописи).
б) Нешков К. И. Система изложения курса арифметики в V классе. М., Изд. АПН РСФСР, 1963.

124. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. Изд. 4-е. М., «Высшая школа», 1959.

125. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. Изд. 7-е. М., «Высшая школа», 1965.

126. Окунев А. Я. Высшая алгебра. Изд. 4-е, переработ. М., Учпедгиз, 1958.

127. Палей А. М. Практические задачи по алгебре на прогрессии и логарифмы. Минск, «Народная асвета», 1963.

128. Курс чистой математики, составленный по поручению Беллевена профессорами математики Аллезом, Билли, Пюиссаном и Будро. Изд. 8-е. М., 1863.

129. Погорелов А. И. Сборник задач по алгебре. М., Учпедгиз, 1949.

130. Полозова Н. Н. Сборник упражнений и задач по алгебре для VI и VII классов семилетней и средней школы. Пособие для учителей. Л., Учпедгиз, 1949.

131. Привалов И. И., Гальперн С. А. Основы анализа бесконечно малых. Изд. 3-е, переработ. М., «Физматгиз», 1959.

132. Проскуряков И. В. Числа и многочлены. Изд. 2-е. М., «Просвещение», 1965.

133. Ривкинд Я. И. Элементарные задачи по математическому анализу. (Введение в анализ.) Минск, «Вышэйшая школа», 1965.

134. Сахаров А. Б. Арифметика. Опыт методического изложения предмета. Изд. 2-е, испр. и доп. Спб., 1910.

135. Сивашинский И. Х. Элементарные функции и графики. Теория и задачи с решениями. М., «Наука», 1965.

136. Смирнов И. И. Сборник вопросов и задач по тригонометрии. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1962.

137. Соминский И. С. Элементарная алгебра. Дополнительный курс. Изд. 3-е. М., Физматгиз, 1964.
138. Арифметика. Учебник для V класса. Кишинев, «Картя молдовеняскэ», 1964.
139. Стратилатов П. В. Сборник задач по тригонометрии. Для IX и X классов средней школы. Изд. 9-е. М., «Просвещение», 1965.
140. Тарасов Н. П. Курс высшей математики для техникумов. Изд. 12-е, переработ. М., Физматгиз, 1963.
141. Толстой Л. Н. Полн. собр. соч., т. 22. Азбука, ч. IV. М., Гослитиздат, 1957.
142. Туманов С И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. Изд. 2-е, испр. и доп. М., Учпедгиз, 1962.
143. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Алгебра. Ч. 1. М.—Л., Учпедгиз, 1951. Ч. 2, 1954.
144. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Алгебра для самообразования. Изд. 3-е, испр. М., «Наука», 1966.
145. Фридман Вл. Г. Концентрический учебник алгебры для мужских гимназий, реальных училищ и для самообразования. Ч. 1. М., 1912. Ч. 2, 1913.
146. Фус. Н. Начальные основания алгебры, извлеченные из оснований сей науки знаменитого Эйлера и ныне вновь изданные от главного правления училищ. Спб., 1810.
147. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. Изд. 3-е, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
148. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. Изд. 3-е, стереотип. М., Гостехиздат, 1957.
149. Шапиро Г. М. Высшая алгебра. Изд. 2-е. М., Учпедгиз, 1936. Изд. 4-е, доп., 1938.
150. Шапошников Н. А., Вальцов Н. К. Методически обработанный сборник алгебраических задач с текстом общих объяснений и разнообразными практическими указаниями. Ч. 1. Для классов III и IV. Изд. 26-е. Харьков, 1922.
151. Шапошников Н. А., Вальцов Н. К. Сборник алгебраических задач. Ч. 2. Для классов V, VI, VII и VIII гимназий и соответствующих классов других учебных заведений. Изд., 25-е. М., 1918.
152. Шапошников Н. А., Вальцов Н. К. Сборник алгебраических задач. Ч. 1. Изд. 17-е. М., Учпедгиз, 1949. Ч. 2. Изд. 29-е, 1950.
153. Шкларин А. Б., Федянов А. М., Сандлер Б. Г. Алгебраические задачи в технике (сборник задач). М., Учпедгиз, 1962.
154. Шмулевич П. К. Сборник математических задач, предлагавшихся на конкурсных экзаменах при поступлении в специальные высшие учебные заведения. Ч. 2. Алгебра. Изд. 9-е. Пг., 1917.

3. Методические статьи

155. Александров П. С. Научное содержание школьного курса алгебры. «Математика в школе», 1946, № 4, № 5.
156. Александров П. С. Математика как наука. В кн.: Вопросы общей методики математики. Изв. АПН РСФСР, вып. 92, 1958.

157. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях. В кн.: Вопросы преподавания математики в средней школе. М., Учпедгиз, 1961.
158. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Иррациональные числа. В кн.: Вопросы преподавания математики в средней школе. М., Учпедгиз, 1961.
159. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. Изв. АПН РСФСР, вып. 6, 1946.
160. Арнольд И. В. О задачах по арифметике. «Математика в школе», 1946, № 2.
161. Арнольд И. В. Операторное истолкование числа в курсе элементарной математики. Изв. АПН РСФСР, вып. 4, 1946.
162. Ашкинузе В. Г. Изучение функций и их графиков в курсе алгебры VIII класса. В кн.: Политехническое обучение в преподавании математики. М., Изд. АПН РСФСР, 1956.
163. Беляев В. И. Об обосновании правил тождественных преобразований рациональных выражений в курсе VI — VII классов. Уч. зап. Коломен. пед. ин-та, т. 2, сер. физ.-мат., вып. 1, 1958.
164. Беляев В. И. Только ли на свойствах арифметического корня основаны преобразования радикалов? В кн.: Из опыта преподавания алгебры в средней школе. М., Учпедгиз, 1958.
165. Бондарев А. Л. Вопросы изоморфизма в школьном курсе математики. В кн.: Наш опыт. Сборник методических статей. Краснодар, изд. «Сов. Кубань», 1957.
166. Бондарев А. Л. Опыт изучения уравнений как переменных суждений о равенстве. В кн.: В помощь учителю. Сборник методических статей (математика). Краснодар, изд. «Сов. Кубань», 1959.
167. Бороданов М. М. Элементарные трансцендентные уравнения и способы их решения. Уч. зап. Горно-Алтайск. пед. ин-та, вып. 3, т. 2, 1958.
168. Бороданов М. М. Использование логарифмической и полулогарифмической бумаги для графического решения показательных и логарифмических уравнений. Уч. зап. Горно-Алтайск. пед. ин-та, вып. 3, т. 2, 1958.
169. Бороданов М. М. Трансцендентные уравнения в курсе средней школы. В кн.: Из опыта работы учителей математики. Алгебра. Тригонометрия. М., Изд. АПН РСФСР, 1959.
170. Вандышева Е. В. О совместном изучении обыкновенных и десятичных дробей в курсе арифметики V класса. Докл. АПН РСФСР, 1962, № 2, № 4.
171. Вандышева Е. В. Приближенные вычисления при употреблении логарифмических таблиц. В кн.: Из опыта работы учителей математики. Алгебра. Тригонометрия. М., Изд. АПН РСФСР, 1959.
172. Вандышева Е. В. О применении логарифмической и полулогарифмической бумаги. «Математика в школе», 1960, № 4.
173. Васильев М. Г. Логарифмические вычисления с приближенными данными. «Математика в школе», 1954, № 3.
174. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. О некоторых приложениях показательной и логарифмической функции. «Математика в школе», 1959, № 5.

175. Винокуров А. Н. Логарифмирование как обратная операция. Уч. зап. Новосибир. пед. ин-та, вып. 10, 1955.
176. Гальперин П. Я., Запорожец А. В., Эльконин Д. Б. Проблемы формирования знаний и умений у школьников и новые методы обучения в школе. «Вопросы психологии», 1963, № 5.
177. Гнеденко Б. В. Роль математики в развитии техники и производства. «Математика в школе», 1962, № 1.
178. Гончаров В. Л. Идея функции в преподавании математики в средней школе. «Сов. педагогика», 1945, № 3.
179. Гончаров В. Л. Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика. Изв. АПН РСФСР, вып. 6, 1946.
180. Гончаров В. Л. Вопросы преподавания алгебры в семилетней школе под углом зрения подготовки к практической деятельности. Изв. АПН РСФСР, вып. 32, 1950.
181. Гончаров В. Л. Математика как учебный предмет. В кн.: Вопросы общей методики математики. Изв. АПН РСФСР, вып. 92, 1958.
182. Гуркин В. А. Простой способ вычисления логарифмов. «Математика в школе», 1958, № 5.
183. Давыдов В. В. Опыт введения элементов алгебры в начальной школе. «Сов. педагогика», 1962, № 2.
184. Доморяд А. П. О вычислении логарифмов. Уч. зап. Ташкент. пед. ин-та, вып. 7, 1959 (колонтит. 1957).
185. Дьедонне Ж. Абстракция в математике и эволюция алгебры. В кн.: Пиаже Ж. и др. Преподавание математики. М., Учпедгиз, 1960.
186. Збарский И. С. Вопросы обучения построению графиков и исследование функций. В кн.: Из опыта работы учителей математики. Алгебра. Тригонометрия. М., Изд. АПН РСФСР, 1959.
187. Иванов И. О. О графической интерпретации преобразований уравнений. Уч. зап. Псков. пед. ин-та, вып. 4, 1957.
188. Иванов С. М. Как я подготовляю учащихся к переходу от арифметики к алгебре. В кн.: Опыт работы Дагестанской школы, Махачкала, 1953.
189. Ирошников Н. П. Функциональный подход к изучению школьного курса алгебры. В кн.: Вопросы повышения качества знаний учащихся по математике. М., Изд. АПН РСФСР, 1955.
190. Карпенко Г. М. Изучение функций в V и VI классах на основе понятий множеств и соответствия. «Математика в школе», 1949, № 6.
191. Касторский К. М. Решение задач на составление уравнений первой и второй степени с помощью табличной записи. В кн.: Из опыта работы учителей математики. Алгебра. Тригонометрия. М., Изд. АПН РСФСР, 1954.
192. Колмогоров А. Н., Функции, графики, непрерывность функций. «Математика в школе», 1965, № 6.
193. Кудреватый Г. А. О допустимых значениях букв при решении уравнений. «Математика в школе», 1952, № 6.
194. Лебединцев К. Ф. Вопрос о дробях в курсе арифметики, В кн.: Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Т. 2 (секции). Спб., 1913.

195. Литвинов Н. Н. О некоторых вопросах применения комплексных чисел в элементарной математике. Уч. зап. Тобольск. пед. ин-та, вып. 1, 1958.
196. Лихнерович А. Проникновение духа современной алгебры в элементарную алгебру и геометрию. В кн.: Пиаже Ж. и др. Преподавание математики. М., Учпедгиз, 1960.
197. Маергойз Д. М. Аналогия в педагогическом процессе. (На математическом материале.) «Математика в школе», 1947, № 1.
198. Маркушевич А. И. Понятие функции. В кн.: Вопросы преподавания математики в средней школе. М., Учпедгиз, 1961,
199. Маркушевич А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе. «Математика в школе», 1962, № 2.
200. Маркушевич А. И. Логарифмическая и показательная функции в школе. «Математика в школе», 1965, № 3.
201. Маркушевич А. И. Вывод формул для объемов геометрических тел в X классе с использованием производной. «Математика в школе», 1965, № 6.
202. Матышук В. К. Учение об иррациональном числе в средней школе. «Математика в школе», 1947, № 5.
203. Мацкина Р. Ю., Мацкин М. С. К вопросу о преподавании элементов математического анализа в средней школе. Уч. зап. Глазов. пед. ин-та, вып. 6, 1959.
204. Миндюк Н. Г. Опыт преподавания единого курса арифметики и начальной алгебры в V классе. «Математика в школе», 1965, № 6.
205. Минковский В. Л. Об одном приеме борьбы с ошибками учащихся по алгебре. «Математика в школе», 1948, № 4.
206. Образ К. И. О приборе для демонстрирования прямой и обратной функции. «Математика в школе», 1954, № 6.
207. Остапов Г. К. Элементарные методы вычисления логарифмов. «Математика в школе», 1955, № 2.
208. Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления. В кн.: Пиаже Ж. и др. Преподавание математики. М., Учпедгиз, 1960
209. Польский И. Г. О преподавании показательной и логарифмической функции в средней школе. В кн.: Из опыта работы учителей математики. Алгебра. Тригонометрия. М., Изд. АПН РСФСР, 1959.
210. Попов П. С. Об одном элементарном способе нахождения десятичных логарифмов чисел. Уч. зап. Чкалов. пед. ин-та, вып. 11, 1957.
211. Решение одной геометрической задачи посредством комплексных чисел. «Математика в школе», 1963, № 2.
212. Рудницкий. Уравнение — больное место в преподавании алгебры. «Математика и физика в школе», 1936, № 5.
213. Салум М. П. Первые уроки алгебры. В кн.: Математика в школе. Вып. 2. Киев, «Радянська школа», 1948.
214. Севбо В. Историческое развитие и современная научная трактовка понятия функциональной зависимости. «Математика в школе», 1946, № 4.
215. Сикорский Р. И. Формирование понятий множества и соответствия в курсе арифметики и алгебры средней школы. Уч. зап. Омск. пед. ин-та, вып. 5, 1956.

216. Телгмаа А. (Telgmaa A.). Iärkjärgalise lähendamise meetodist koolimatemaatikas. Tallin, 1965.
217. Токарчук Н. Г. Наглядное пособие для истолкования понятия предела числовой последовательности. «Математика в школе», 1951, № 3.
218. Трошкова З. И. Наглядные пособия как средство повышения качества знаний учащихся по математике. В кн.: Учителя математики о своей работе. Воронеж, Кн. изд., 1963.
219. Фихтенгольц Г. М. Иррациональные числа в средней школе. В кн.: Математическое просвещение. Вып. 2, М., Гостехиздат, 1957.
220. Фурсенко В. Об одной распространенной ошибке, связанной с геометрическим изображением комплексного числа. «Математика в школе», 1937, № 3.
221. а) Хинчин А. Я. О формализме в школьном преподавании математики. В кн.: А. Я. Хинчин. Педагогические статьи. М., Изд. АПН РСФСР, 1963.
б) Хинчин А. Я. О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики. В кн.: А. Я. Хинчин. Педагогические статьи. М., Изд. АПН РСФСР, 1963.
в) Хинчин А. Я. Основные понятия математики и математические определения в средней школе. В кн.: А. Я. Хинчин. Педагогические статьи. М., Изд. АПН РСФСР, 1963.
222. а) Хмура А. А. Адрес опыта — Кировоград. «Учительская газета» от 11 февраля 1965 г.
б) Хмура А. А. Опыт применения системы уроков по математике в старших классах. «Сов. педагогика», 1966, № 7.
223. Шварцбурд С. И. Опыт операторного истолкования числа в школьной практике. В кн.: Из опыта работы передовых учителей математики. М., Изд. АПН РСФСР, 1950.
224. Чистяков И. И. Приложение свойств комплексных чисел к решению неопределенных уравнений. «Математика и физика в школе», 1936, № 5.
225. а) Шеварев П. А. Опыт психологического анализа алгебраических ошибок. Изв. АПН РСФСР, вып. 3, 1946.
б) Шеварев П. А. К вопросу о природе алгебраических навыков. Уч. зап. Гос. науч.-исслед. ин-та психологии, т. 2, 1941.
226. Эрдниев П. М. О роли прямых и обратных связей при обучении математике. «Вопросы психологии», 1962, № 6.
227. Эрдниев П. М. О научных основах построения системы упражнений по предметам физико-математического цикла. «Сов. педагогика», 1962, № 7.

4. Статьи, в которых обсуждаются некоторые дискуссионные вопросы методики алгебры

а) Дискуссия о делении многочленов

228. Буницкий Е. Л. О делении многочленов. «Вестн. опыт. физики и эксперим. математики», 1915, № 626.
229. Каган В. Ф. Арифметическое и алгебраическое деление (по поводу § 76 в 25-м издании «Элементарной алгебры» А. Киселева). «Вестн. опыт. физики и эксперим. математики», 1913, № 8 (596).

230. Каган В. Ф. По поводу статьи А. Киселева в № 602 «Вестника». «Вестн. опыт. физики и экспериm. математики», 1914, № 604.
231. Каган В. Ф. О законе тождества целых функций. «Вестн. опыт. физики и эксперим. математики», 1914, № 622.
232. Киселев А. Некоторые замечания к статье прив.-доц. В. Кагана «Арифметическое и алгебраическое деление (по поводу § 76 в 25-м издании «Элементарной алгебры» А. Киселева). «Вестн. опыт. физики и эксперим. математики», 1914, № 602.
233. Тимченко И. Ю. О тождестве многочленов. «Вестн. опыт. физики и эксперим. математики», 1915, № 631.
234. Эйчес В. Еще к вопросу о доказательстве теоремы Безу. «Вестн. опыт. физики и эксперим. математики», 1914, № 621.

б) Дискуссия об умножении и делении на дробь

235. Барсуков А. Н. Об умножении на дробь (к итогам дискуссии). «Математика в школе», 1950, № 6.
236. Добротин А. Н. К методике преподавания умножения и деления дробей. «Математика в школе», 1949, № 1.
237. Кашин Н. И. Об умножении и делении на дробь. «Математика в школе», 1949, № 2.
238. Севастьянов П. Я. Умножение обыкновенных дробей. «Математика в школе», 1949, № 1.
239. Щинова М. Ф. По поводу статей об умножении и делении на дробь. «Математика в школе», 1950, № 6.

в) Дискуссия о понятиях уравнения и тождества

240. Бешкарев В. П. Имеет ли уравнение вопросительный смысл? «Математика в школе», 1956, № 5.
241. Новоселов С. И. О понятиях уравнения и тождества. «Математика в школе», 1954, № 1.
242. Новоселов С. И. О трактовке понятия уравнения. «Математика в школе», 1959, № 1.
243. Петров В. П. Какой смысл имеет уравнение? «Математика в школе», 1959, № 1.
244. Столяр А. А. К вопросу о трактовке понятия уравнения. «Математика в школе», 1959, № 1.

г) Дискуссия о последовательности изучения тем «Обыкновенные дроби» и «Десятичные дроби»

245. Александров С. А. О преподавании обыкновенных и десятичных дробей в школах Молдавской ССР. «Математика в школе», 1962, № 1.
246. Березанская Е. С. По поводу статьи И. Ф. Волкова и И. К. Парно о преподавании десятичных дробей до обыкновенных в школах Молдавской ССР. «Математика в школе» 1961, № 5.
247. Бычков Б. П. По поводу изучения десятичных дробей до обыкновенных в школах Молдавской ССР. «Математика в школе», 1961, № 5.

248. Вейцман И. Б. Еще раз о порядке изучения десятичных и обыкновенных дробей. «Математика в школе», 1962, № 2.
249. Волков И. Ф., Парно И. К. О преподавании десятичных дробей в школах Молдавской ССР. «Математика в школе», 1961, № 2.
250. Горенштейн Б. Е. По поводу статьи И. Ф. Волкова и И. К. Парно. «Математика в школе», 1962, № 1.
251. Лысенко П. В. Десятичным дробям — свое законное место в арифметике. «Математика в школе», 1962, № 1.
252. Мацкин М. С. К вопросу о порядке изучения обыкновенных и десятичных дробей в школьном курсе арифметики. «Математика в школе», 1962, № 2.
253. Мельников К. С. К вопросу об изучении обыкновенных и десятичных дробей в курсе арифметики. «Математика в школе», 1962, № 1.
254. Михайлевич М. Б. О порядке изучения десятичных и обыкновенных дробей. «Математика в школе», 1961, № 5.
255. Рейзельман Е. Н. Наш опыт изучения десятичных дробей до обыкновенных. «Математика в школе», 1962, № 1.
256. Чваньков И. Т. По поводу изучения десятичных дробей до обыкновенных. «Математика в школе», 1962, № 2.

д) Дискуссия об арифметическом и алгебраическом методах решения арифметических задач

257. Андронов И. К. О новой мере в постановке вопроса решения сложных задач арифметическим методом. «Математика в школе», 1964, № 1.
258. Антонов П. К. Арифметические задачи быстро забываются. «Математика в школе», 1964, № 1.
259. Арсентьев П. В. Против «натаскивания». «Математика в школе», 1964, № 1.
260. Арясов Б. И. О решении задач арифметическим и алгебраическим способами. «Математика в школе», 1954, № 3.
261. Белоусов А. А. О чем говорит мой опыт. «Математика в школе», 1964, № 1.
262. Богуславский И. П. Решение типовых задач — необходимость. «Математика в школе», 1964, № 1.
263. Домбровская Э. Ф. О подготовительном этапе к решению задач с помощью уравнения в курсе арифметики V класса. «Математика в школе», 1966, № 1.
264. Кухарь В. М. За арифметический метод решения задач. «Математика в школе», 1964, № 1.
265. Левин А. Н., Смирнова В. В. О необходимости решения типовых задач. «Математика в школе», 1963, № 1.
266. Людмилов Д. С. Важное средство развития логического мышления. «Математика в школе», 1963, № 1.
267. Марнянский И. А. Наши возражения. «Математика в школе», 1963, № 1.
268. Мартынова М. Ф. Об алгебраическом методе решения задач в V классе. «Математика в школе», 1963, № 3.
269. а) Принцев Н. А. Об арифметическом способе решения задач на вычисление. «Математика в школе», 1953, № 2.

б) Принцев Н. А. Шире применять алгебраический метод. «Математика в школе», 1964, № 1.

270. Турецкий Е. Н. Обучение пятиклассников решению задач алгебраическим методом. «Математика в школе», 1966, № 1.

е) Дискуссия о терминологии и понятиях начальной алгебры

271. Антонов П. К. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 5.

272. Буданцев П. А. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 6.

273. Гуревич Г. Б. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1962, № 6; 1963, № 6.

274. Канин Е. С. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 6.

275. Килина Н. Г., Нагибин Ф. Ф. О некоторых вопросах методики начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 4.

276. Литвинов Н. Н О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 5.

277. Медведенко А. Д. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 6.

278. Москалев А. А. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 6.

279. Новоселов С. И. По поводу статьи Г. Б. Гуревича. «Математика в школе», 1963, № 3.

280. Петров В. П. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 5.

281. Пискарев Г. Ф. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 6.

282. Чернов В. М. О терминологии и понятиях начальной алгебры. «Математика в школе», 1963, № 5.

Оглавление

Глава 4. Методика изучения понятия о числе в средней школе

Глава 5. Методика изучения уравнений в курсе алгебры восьмилетней и средней школы

Глава 6. Методика изучения функции

Шустеф Фрида Максовна

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ. Минск, „Вышэйшая школа", 1967.

223 стр. с илл. 512

Редактор *Н. Веревкина.* Обложка *Г. Малышева.* Худож. редактор *В. Валентович.* Техн. редактор *М. Кислякова.* Корректор *А. Белянкина*

АТ 00468. Сдано в набор 5/VI 1967 г. Подп. к печати 27/XI 1967 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$ типогр. № 1. Печ. л. 7(11,76). Уч.-изд. л. 10. Изд. № 66-21. Тип. зак. 4889. Тираж 10 000 экз. Цена 28 коп.

Издательство „Вышэйшая школа" Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Редакция физико-математической литературы. Тем. план 1967 г., № 28. Минск, ул. Кирова, 24.

Типография мелкопечатных изданий Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Минск, ул. Свердлова, 28.