

*Учб. Библиотеки
Д. А. Волковскому.
Сараиловъ,
1904 г., 24-го марта.*

НАГЛЯДНЫЯ ПОСОБІЯ

ПРИ

ОБУЧЕНИИ АРИΘМЕТИКЪ

Изданія С. И. Шохорь-Троцкаго

а) для учениковъ низшихъ уч. зав.:

Арифметическій задачникъ для учениковъ. Вып. I (для одноклассныхъ начальныхъ школъ) Изд. 11-е, исправленное. Спб. 1903. Цѣна 20 коп.—То же. Вып. II (для учебныхъ заведеній съ полнымъ курсомъ арифметики). Изд. 3-е, исправленное и значит. дополненное. Спб. 1904. Цѣна 50 коп.

Арифметика для начальныхъ школъ. Спб. 1902. Ц. 15 к.

Арифметическій задачникъ для учениковъ школъ грамоты. Цѣна 15 коп.

б) для учителей низшихъ уч. зав.:

Арифметическій задачникъ для учителей. Вып. I, для одноклассныхъ начальныхъ школъ. Спб. 1903. Изд. 7-е, испр. и дополненное. Цѣна 75 коп.—То же. Вып. II, для учебныхъ заведеній съ полнымъ курсомъ арифметики. Изд. 2-е, испр. и доп. Цѣна 75 коп.

Методика арифметики. Ч. I, для учителей одноклассныхъ начальныхъ школъ. Изд. 7-е, исправл. и значительно дополненное. Спб. 1903. Стр. XVI+316. Ц. 1 рубль.—То же. Ч. II, для учителей уч. зав. съ полнымъ курсомъ арифметики. Стр. XVI+480. Ц. 2 р.

Арифметическій задачникъ для учителей школъ грамоты. Цѣна 30 коп.

Наглядность и наглядныя пособія при обученіи арифметикѣ. Спб. 1904. Стр. VIII+128. Ц. 25 коп.

в) для учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній:

Арифметическій задачникъ для учениковъ. Вып. Ia (для приготовительныхъ классовъ и первоначальнаго домашняго обученія). Спб. 1902. Цѣна 20 коп.—То же. Вып. II (для уч. заведеній съ полнымъ курсомъ арифметики). Изд. 3-е, испр. и доп. Спб. 1904. Ц. 50 коп.

г) для учителей среднихъ учебныхъ заведеній:

Методика арифметики для учителей приготовительныхъ классовъ, для родителей и воспитателей. Спб. 1903. Ц. 60 коп.

Методика арифметики. Ч. II, для учителей уч. зав. съ полнымъ курсомъ арифметики. Стр. XVI+480. Ц. 2 рубля.

Арифметическій задачникъ для учителей. Вып. II (для уч. зав. съ полнымъ курсомъ арифметики) Изд. 2-е, испр. и доп. Ц. 75 коп.

Наглядность и наглядныя пособія при обученіи арифметикѣ. Спб. 1904. Стр. VIII+128. Ц. 25 коп.

д) для классной комнаты:

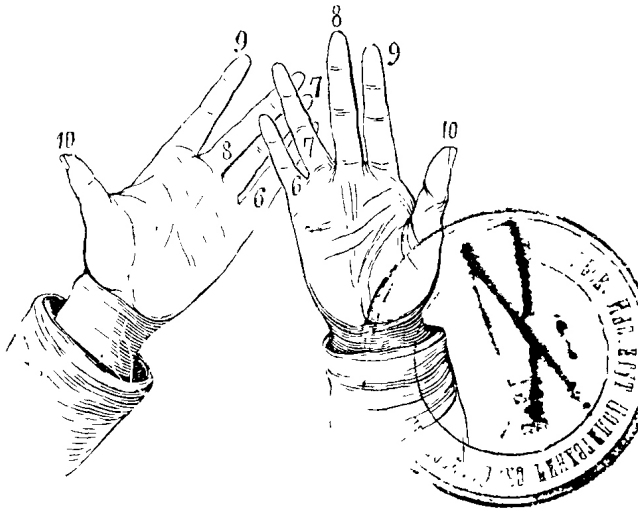
Таблица для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленияхъ. Спб. 1904. Изд. 3-е, испр. и доп. Цѣна 10 коп.

Наглядная таблица соотношеній вѣк. мѣръ протяженія. Спб. 1904. Ц. 60 коп.

С. И. Шохоръ-Троцкий

НАГЛЯДНОСТЬ
И НАГЛЯДНЫЯ ПОСОБІЯ
ПРИ ОБУЧЕНІИ
АРИѠМЕТИКЪ

Цѣна 25 к.



СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ

въ книжномъ складѣ Тверскаго Губернскаго Земства
и у В. В. ДУМНОВА (въ Москвѣ и Спб.)

Спб. 1904

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	СТР.
Предисловіе	VII
Введеніе. Необходимость наглядныхъ пособій при обученіи вообще	1
Глава I. Ариѳметическія наглядныя пособія	18
Глава II. Наглядныя пособія въ ариѳметикѣ первой сотни	43
Глава III. Ариѳметика многозначныхъ чиселъ	89
Глава IV. Прямая линія какъ наглядное пособіе	116
Алфавитный указатель вопросовъ и собственныхъ именъ	126

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ:

<i>Стран.:</i>	<i>Строка:</i>	<i>Напечатано:</i>	<i>Читай:</i>
3	5 сл.	ремеслакакъ	ремесла, какъ
8	20 св.	распоряженіи и	распоряженіи, и
9	1 сл.	принесь	принесю
13	11 св.	1421	1452
40	8 св.	геометрическіе	геометрическія
40	19 св.	прямая	прямые
46	2 св.	учителемъ и	учителемъ, и
51	4 сл.	являются	является
66	2 св.	два	двѣ
—	3 св.	два	двѣ
70	2 сл.	девять	девять
71	7 сл.	котораго	которыхъ
75	3 св.	больше	меньше
81	2 св.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$
87	12 св.	каждый	каждой
96	3 св.	14 да 7	14 да 14
97	2 св.	опять	опять
99	9 св.	слагаемыхъ	слагаемымъ
—	19 св.	277951	277651
—	21 св.	58700	5870
—	4 сл.	5	3
103	3 св.	39	29
128	2 сл.	110	112



ПРЕДИСЛОВІЕ.

*Учить других чему-либо
значитъ учить ихъ тому, что
они должны дѣлать для того,
чтобы тому научиться, чему
ихъ хотятъ научить.*

Ж а к о т о.

Если ученики не интересуются дѣломъ, то для нихъ не только корень ученія горекъ, но и плоды его не удовлетворительны. Для возбужденія же въ дѣтяхъ истиннаго интереса къ ученію необходимы искренняя любовь и даже уваженіе учителя къ ученикамъ и обязательно уваженіе его къ законамъ и условіямъ умственного и духовнаго развитія человѣка вообще, и малолѣтняго въ особенности.

Вслѣдствіе всего этого, для успѣшнаго обученія неизбѣжно необходимы также: а) простота и доступность учебнаго матеріала; б) самодѣятельность учениковъ при выработкѣ и уясненіи ими себѣ новыхъ представленій, и в) сознательность ихъ работы. Поэтому обязательны и полная наглядность приѣмовъ обученія, и настойчивая помощь наглядныхъ пособій. Только при этой помощи вполнѣ возможны сознательная работа творческаго воображенія и дѣятельнаго мышленія учениковъ и энергическая работа нестойкаго ихъ вниманія и мало-созидательной ихъ воли.

Когда рѣчь идетъ о помощи т. наз. наглядныхъ пособій, то при этомъ, къ сожалѣнію, слишкомъ часто считаютъ, что только учитель долженъ освѣщать, иллюстрировать то, чему онъ учить, съ помощью

наглядныхъ пособій. На самомъ же дѣлѣ необходимо, чтобы каждый ученикъ по возможности самодѣятельно и сознательно поработалъ надъ даннымъ вопросомъ, самъ прибѣгая въ этой работѣ къ помощи соотвѣтствующаго нагляднаго пособія. Только такая работа и даетъ учителю возможность сдѣлать учебный матеріалъ простымъ и доступнымъ, только она возбуждаетъ дѣтей къ самодѣятельности, дѣлаетъ ихъ работу сознательною и такимъ образомъ создаетъ и поддерживаетъ истинный ихъ интересъ къ дѣлу.

Предлагаемая книга освѣщаетъ случаи употребленія наглядныхъ пособій при обученіи ариѳметикѣ и многіе случаи примѣненія къ дѣлу такъ наз. внутренней наглядности.—Во „Введеніи“ освѣщается необходимость наглядныхъ пособій при обученіи вообще, какъ съ психологической точки зрѣнія, такъ и съ точекъ зрѣнія дидактической и педагогической.—Подъ ариѳметикою въ этой книгѣ разумѣется только совокупность всѣхъ ученій о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, надъ десятичными и обыкновенными дробями.—Для облегченія справокъ, къ книгѣ приложенъ „Алфавитный указатель вопросовъ и собственныхъ именъ“, въ ней упоминаемыхъ.—Основанія принятаго мною въ этой книгѣ раздѣленія задачъ на чисто-ариѳметическія и алгебраическаго характера выяснены подробно въ статьѣ моей подъ заглавіемъ „Объ ариѳметическихъ задачахъ алгебраическаго характера“, помѣщенной въ № 2 „Русской Школы“ за 1900 годъ.

Приношу свою искреннюю признательность уважаемому Н. В. Чехову за любезно сдѣланныя имъ по нѣкоторымъ вопросамъ обученія весьма цѣнныя замѣчанія разнаго рода.

С. Шохоръ-Троцкий.

ВВЕДЕНИЕ.

Необходимость наглядных пособій при обученіи вообще.

Человѣка окружаетъ міръ, назы- *Явленія внѣш-*
ваемый обыкновенно *внѣшнимъ, ве-*
щественнымъ или *матеріальнымъ*. Все, что въ *няго міра и ду-*
этомъ мірѣ совершается, составляетъ совокуп- *шевныя явленія.*
ность *явленій* внѣшняго міра, находящихся
часто во взаимной зависимости. Явленія же,
извѣстныя подѣ именемъ ощущеній, чувстви-
тельныхъ воспріятій, представленій, понятій, идей,
желаній, чувствованій, сужденій, рѣшеній, из-
вѣстны подѣ общимъ именемъ явленій *внутрен-*
няго міра человѣка, явленій *душевныхъ*. Такъ,
перемѣненіе какого-либо предмета изъ одного
мѣста пространства въ другое, свѣтъ зажженной
лампы, сотрясеніе воздуха, произведенное упав-
шею на полъ книгою, превращеніе личинки ка-
кого-либо насѣкомаго въ куколку — явленія при-
роды, явленія внѣшняго міра. (Въ этомъ смыслѣ
и крѣеобращеніе въ тѣлѣ человѣка, и его дыха-
ніе—тоже явленія внѣшняго міра). Ощущеніе же
звука или свѣта, представленія о нихъ, понятіе
объ источникѣ свѣта, идея электрической энер-
гій, желаніе разсмотрѣть данный освѣщенный
предметъ, удовольствіе, испытываемое при раз-
сматриваніи какой-либо картины, стремленіе пре-

кратить неприятное ощущение отъ слишкомъ яркаго свѣта, сужденіе о преимуществахъ электрическаго освѣщенія—явленія душевныя.

Чувства и ихъ органы.

Человѣкъ замѣчаетъ, сознаетъ явленіе внѣшняго міра, благодаря, прежде всего, тому, что оно вызываетъ въ его сознаніи то или иное *ощущеніе*, иногда для него безразличное, иногда же связанное съ чувствованіемъ, напр., пріятное для него или неприятное. Одни явленія внѣшняго міра воспринимаются человѣкомъ при непремѣнномъ участіи и при нѣкоторой особенной работѣ особыхъ органовъ, называемыхъ *органами чувствъ*. Таковы, напр., явленія свѣтотвоя и звуковыя, а равно явленія запаха, вкуса. Для воспріятія же нѣкоторыхъ другихъ ощущеній у человѣка нѣтъ отдѣльныхъ органовъ, подобныхъ уху, глазу, носу. Таковы, напр., явленія тепловыя и осязательныя разнаго рода. Для нихъ какъ бы органомъ является цѣлая совокупность или система первовъ и тканей, находящихся подъ дѣйствіемъ даннаго явленія особаго рода, но не представляющихъ особаго органа.

Мышечное чувство и его значеніе.

Для того, чтобы отличить шероховатый и теплый предметъ отъ гладкаго и болѣе холоднаго, часто достаточно прикосновенія этого предмета къ нѣкоторому участку кожнаго покрова человѣческаго тѣла или слабое перемѣщеніе поверхности этого предмета по поверхности кожнаго покрова.—Среди ощущеній разнаго рода очень важны ощущенія, испытываемыя при произвольномъ или непроизвольномъ движеніи человѣка и тѣхъ или иныхъ частей его тѣла, и ощущенія положенія тѣла и его частей въ пространствѣ. Этими ощущеніями человѣкъ обязанъ *мышечному*, такъ наз. *мышечному*, чувству, благодаря которому мы сознаемъ, что сидимъ, стоимъ и т. п., и благодаря которому мы

можемъ производить рядъ цѣлесообразныхъ и координированныхъ движеній, обусловливающихъ возможность физической работы того или иного рода. Благодаря мускульному чувству, мы можемъ двигаться, садиться, ложиться, вставать, подносить пищу и питье ко рту, часы—къ глазамъ, перо—къ чернильницѣ и бумагѣ, можемъ строгать, пилить, писать, рисовать, и вообще производить разныя работы, начиная съ самыхъ простыхъ и грубыхъ и кончая самыми сложными и тонкими.—Мускульному чувству человѣкъ обязанъ способностью глазного яблока поворачиваться въ разныя стороны и способностью глазного хрусталика увеличивать и уменьшать, въ случаѣ надобности, кривизну своей поверхности. Мускульному же чувству человѣкъ обязанъ работою своихъ органовъ рѣчи. Благодаря тому же чувству, глухонѣмые, обучающіеся по „устной методѣ“, научаются и говорить, и „читать съ губъ“ произносимое другими, несмотря на полное отсутствіе слуха. Всѣ изящныя искусства: живопись, ваяніе, инструментальная музыка, пѣніе, съ одной стороны, а съ другой стороны—ремесла какъ часовое, портняжное, рѣзьба по дереву и металлу, гравированіе, набираніе книгъ наборщиками и т. д., были бы невозможны, еслибы человѣкъ не обладалъ тонкимъ мускульнымъ чувствомъ, поддающимся, притомъ, усовершенствованію и воспитанію.—При выработкѣ пространственныхъ и числовыхъ представленій, лежащихъ въ основѣ всякаго математическаго знанія, которымъ обладаетъ человѣчество въ настоящее время, мускульное чувство играетъ въ высшей степени важную роль. Даже слѣпорожденные могутъ въ этихъ областяхъ знанія достигнуть болѣе или менѣе высокихъ ступеней разумнія, благодаря своему мускульному чувству. Глухонѣмые отъ рожденія, если они не

страдаютъ какою-либо болѣзнью *центровъ рѣчи и движенія* или какою-либо формою тупоумія, могутъ, какъ это замѣчено выше, научиться сознательному и цѣлесообразному употребленію своихъ органовъ рѣчи, возвращающему этихъ несчастныхъ человѣческому обществу.

Представленіе и воспоминаніе. По не одними ощущеніями, какъ мы видѣли выше, исчерпывается душевная жизнь человѣка. Когда мы *вспоминаемъ* о какомъ-нибудь испытанномъ нами ощущеніи, мы этого ощущенія уже не испытываемъ (въ полномъ значеніи этого слова), но мы дѣлаемъ это воспоминаніе все-таки предметомъ (объектомъ) нашего сознанія. Результатомъ этого воспоминанія является такъ называемое *представленіе*.—Ясны и вѣрны наши представленія только тогда, когда они являются результатомъ воспоминанія о чемъ-нибудь, нами испытанномъ, и когда воспоминанія эти ясны и согласны съ дѣйствительностью. Воспоминанія же ясны и согласны съ дѣйствительностью преимущественно тогда, когда ощущеніе известнаго рода испытано не разъ и когда на это ощущеніе своевременно обращалось *вниманіе*, каковое послѣднее зависитъ и отъ силы, и отъ надлежащей повторности ощущенія. Такъ, если я никогда не ѣдалъ ананаса, я не могу, понятно, вспомнить вкуса этого плода и тогда объ этомъ, особенномъ вкусѣ не имѣю представленія: Недостаточно ясно будетъ мое представленіе объ этомъ вкусѣ, если я его испыталъ только разъ, если не обратилъ на него почему-либо должнаго вниманія, если это было слишкомъ давно, и т. п.

Ассоціаціи представленій. Представленія, уже образованныя нами, мы можемъ *воспроизводить* болѣе или менѣе произвольно въ своемъ сознаніи. Мы можемъ и сопоставлять ихъ, съ другими, приводить представленія одного или раз-

наго рода въ ихъ взаимную связь. Мы можемъ, сверхъ того, дѣлать ихъ предметомъ нашего сужденія. — Иногда, одно представленіе произвольно вызываетъ цѣлый рядъ другихъ представленій. Подобное воспроизведеніе ряда представленій извѣстно подъ именемъ произвольной ассоціаціи представленій, и возможности подобной ассоціаціи мы обязаны многими радостями и др. чувствованіями, очень многими произведеніями искусства, открытіями и изобрѣтеніями. Какъ примѣръ произвольной ассоціаціи представленій, можно привести извѣстный всѣмъ, болѣе или менѣе музыкальнымъ, людямъ фактъ. Мотивъ много лѣтъ тому назадъ спѣтой при насъ пѣсни можетъ въ то время, когда мы слышимъ его въ случайномъ повтореніи, вызвать въ нашемъ воображеніи цѣлый рядъ такихъ ясныхъ и захватывающихъ воспоминаній, которыя какъ-бы переносятъ насъ въ иной міръ, въ инныя условія, въ иное время и инныя мѣста, и заставляютъ насъ какъ-бы пережить и почти переиспытать (хотя и не на дѣлѣ, а только въ воображеніи) давно уже нами пережитое, испытанное и чаще всего—безвозвратно и неумолимо канувшее въ вѣчность. — Чаще всего истинное знаніе сводится только къ произвольному или произвольному ассоцированію такихъ представленій и такихъ рядовъ представленій, которые *должны* быть ассоцированы, которыя роковымъ образомъ *должны* быть связаны въ отвѣчающія истинѣ ассоціаціи. Въ этихъ ассоціаціяхъ чаще всего вся сила знанія.

На почвѣ вѣрныхъ и ясныхъ *Важность представленій при образованіи понятій.* представленій возникаютъ точныя понятія, хотя бы даже и отвѣченныя по своему существу. На той же почвѣ и въ связи съ понятіями возникаютъ также творчески-плодоносныя идеи. — Какимъ образомъ возникаютъ понятія и идеи—излагается въ кур-

сахъ психологiи и логики, и здѣсь, конечно, не мѣсто было бы останавливаться на такихъ вопросахъ. Но для насъ, однако же, важно то, что *какъ безъ испытанныхъ ощущеній того или другого рода не можетъ быть болѣе или менѣе ясныхъ и вѣрныхъ представленій, такъ же точно безъ ясныхъ и вѣрныхъ представленій не могутъ возникнуть точныя понятія и творчески-плодоносныя идеи.* Мы возьмемъ, для примѣра, извѣстный анекдотъ о томъ, что будто бы Ньютона навело на мысль о всемірномъ тяготѣнн яблоко, упавшее съ яблони на землю. Хотя это—и анекдотъ, но въ немъ есть доля, если можно такъ выразиться, психологической правды. Если бы люди науки никогда не обращали вниманія на явленіе паденія тѣлъ на землю, то они, конечно, не замѣтили бы этого явленія, не имѣли бы представленія о немъ и не стали бы изучать его законовъ. Если бы Ньютонъ (1642—1727) никогда не видѣлъ падающаго тѣла, то и онъ не имѣлъ бы объ этомъ явленіи яснаго представленія и, конечно, не сблизилъ бы законовъ движенія луны вокругъ земли съ законами паденія тяжелыхъ тѣлъ на землю, брошенныхъ подъ угломъ къ горизонту. А въ такомъ случаѣ, Ньютонъ, конечно, не добрался бы до одной изъ самыхъ плодотворныхъ научныхъ идей, а именно до идеи о такъ называемомъ всемірномъ тяготѣнн. Недаромъ одинъ изъ самыхъ видныхъ современныхъ мыслителей-математиковъ (Фридрихъ Махъ) убѣжденъ въ томъ, что творческое воображеніе Ньютона, сблизившаго явленіе движенія луны вокругъ земли съ паденіемъ тѣлъ, находящихся вблизи земной поверхности, совершило работу, однородную съ тою, которую совершаетъ фантазія поэта, создающаго великое произведеніе поэзіи! „Безъ понятій,—говоритъ великій германскій мыслитель Кантъ (1724—1800),—

результаты непосредственнаго воззрѣнія (такъ называемой „интуиціи“) слѣпы“. Но тотъ же Кантъ тамъ же говоритъ, что „безъ интуицій (т. е. безъ непосредственнаго усмотрѣнія) соотвѣтствующія понятія безсодержательны, пусты“. — Если дѣло касается знаній, относящихся до вещественнаго, чувственнаго міра, то не менѣе справедливо и извѣстное изреченіе, говорящее даже не о представленіяхъ, а объ ощущеніяхъ, слѣдующее: „чего не было въ ощущеніи, тому не бывать и въ умѣ“. Ибо, чего не было въ нашемъ ощущеніи, о томъ мы не можемъ имѣть яснаго представленія, а разъ нѣтъ яснаго представленія, то не можетъ быть ни соотвѣтствующаго ему отвлеченнаго понятія, ни идеи, объединяющей знаніе, ни даже интереса къ знанію.

Все истинное человѣческое знаніе, относящееся до явленій внѣ- *Знаніе и представленій.*
шняго и внутренняго міра, состоитъ въ надлежащемъ сочетаніи, въ надлежащемъ ассоціированіи представленій, понятій и идей, — т. е. въ такомъ ассоціированіи, которое, при современномъ состояніи знанія, отвѣчаетъ дѣйствительности. Будетъ ли то историческій фактъ (напр., эпоха отечественной войны), или фактъ изъ области астрономіи (появленіе какой-либо кометы на небосклонѣ), законъ механики или сходство смысла и созвучіе двухъ словъ, взятыхъ изъ двухъ различныхъ языковъ, будетъ ли то явленіе общественное въ родѣ зависимости благосостоянія страны отъ уровня ея образованности, или явленіе чисто-психологическое въ родѣ того, что одинъ человѣкъ легко помнитъ звуки, а другой—лица, мы, во всякомъ случаѣ, о каждомъ изъ этихъ явленій знаемъ что-либо цѣльное только тогда, когда мы въ состояніи отдать себѣ ясный отчетъ въ связи этого явленія съ другими. И чѣмъ больше связей и зависи-

мостей между даннымъ явленіемъ и другими, съ которыми оно находится въ связи, намъ извѣстно, тѣмъ больше наше знаніе объ этомъ явленіи. Но, отдавая себѣ отчетъ въ этой связи, мы только ассоціируемъ уже имѣющіяся въ нашемъ распоряженіи представленія и понятія,—ассоціируемъ ихъ произвольно и непроизвольно, воспроизводя въ сознаніи тѣ представленія, которыя намъ нужны, и тѣмъ самымъ подавляя тѣ, которыя въ данномъ случаѣ не нужны.—Искусство ассоціирования, конечно, зависитъ и отъ нѣкоторыхъ личныхъ особенностей даннаго лица, отъ его индивидуальности и интересовъ. Но если это искусство падаетъ ниже извѣстнаго уровня, то знанія по данному вопросу могутъ оказаться для даннаго случая недостаточными. Чаще всего недостаточность знанія зависитъ отъ недостаточнаго запаса соотвѣствующихъ ясныхъ представленій, имѣющихся у даннаго лица въ полномъ его распоряженіи и отъ недостаточнаго интереса.

Словесное знаніе и его неудовлетворительность.

Наименѣе удовлетворительнымъ и даже наименѣе стойкимъ надо поѣтому непремѣнно считать такое знаніе, которое сводится къ умѣнію повторять только извѣстный рядъ извѣстныхъ словъ, съ которыми не связывается сколько-нибудь ясныхъ, если можно такъ выразиться, „своихъ собственныхъ“ представленій. Въ лучшемъ случаѣ такое знаніе можно считать *знаніемъ словъ*, и сводится оно только къ умѣнію произносить ихъ въ надлежащемъ порядкѣ, только кажущемся вѣрнымъ. На самомъ дѣлѣ этотъ порядокъ вѣренъ только для слушателя, понимающаго то, что говорятъ, но не для самого говорящаго. Это знаніе—не истинное, а кажущееся, обманчивое, поддѣльное, ложное знаніе. Разумное и согласное съ человѣческимъ достоинствомъ обученіе должно стремиться, конечно, не къ поддѣльному знанію, а къ знанію

истинному. А истинное знаніе состоитъ въ цѣлесообразномъ ассоцірованіи представленій, связанномъ съ самыми представленіями и ихъ содержаніемъ. При такомъ ассоцірованіи слова являются только средствомъ и результатомъ знанія, отнюдь не будучи тождественными съ послѣднимъ.

Вся задача разумнаго обученія *Представленія и обученіе.* дѣтей и взрослыхъ заключается, стало-быть, прежде всего, въ томъ, чтобы учащіяся своевременно *образовали* себѣ и *накопили* вѣрныя и ясныя представленія того или иного рода и этими представленіями надлежащимъ образомъ овладѣли, т. е. также въ томъ, чтобы учащіяся научились и должному сочетанію, цѣлесообразному *ассоцированію* надлежащихъ представленій.—Разсчитывать на то, что дѣти въ дошкольной и внѣ-школьной жизни сами приобрѣтутъ себѣ весь нужный для нихъ запасъ ясныхъ и вѣрныхъ представленій, невозможно. Во-первыхъ, запасъ этотъ зависитъ и отъ индивидуальности каждаго ученика въ отдѣльности, и отъ образа его до-школьной и внѣ-школьной жизни. Во-вторыхъ, очень многія представленія, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ, отсутствуютъ въ умѣ учениковъ по той причинѣ, что почти всѣ дѣти (и это—хорошо!) въ до-школьной и внѣ-школьной жизни живутъ своими интересами, которые совсѣмъ не въ состояніи дать имъ всѣхъ представленій, нужныхъ имъ для занятій въ школѣ. Къ счастью для дѣтей и для ихъ обученія, тотъ запасъ представленій, которыми дѣти обогащаются съ ранняго дѣтства и внѣ школы, все-таки очень великъ. Если бы этого не было, то, при плохомъ обученіи, не достигались бы даже и тѣ плачевные результаты, которые достигаются и при самомъ дурномъ обученіи. Но, съ другой стороны, это богатство дѣтскаго внутренняго міра представленіями принесъ теоріи и практикѣ

обученія также и большой вредъ. Благодаря ему, долго думали, что дѣтей можно учить, не зная ни психологии, ни гигиены дѣтской душевной жизни, ни тѣхъ педагогическихъ идеаловъ, которыхъ представителями были въ свое время Платонъ, Янъ-Амосъ Коменскій, Локкъ, Руссо, Песталоцци и др.—Какъ бы то ни было, задача обученія заключается какъ въ использованіи уже имѣющагося у учащихся, такъ и въ образованіи ими новаго запаса ясныхъ и вѣрныхъ представленій, а затѣмъ—въ томъ, чтобы научить учащагося надлежащему ихъ ассоцірованію.

Наглядность обученія и наглядныя пособія. Какимъ образомъ достигнуть этихъ двухъ цѣлей? Для этого необходимыми условіями являются *наглядность обученія и употребленіе* (во всѣхъ, для того подходящихъ, случаяхъ) такъ называемыхъ *наглядныхъ пособій*. Наглядными называются учебныя пособія, которыя служатъ для того, чтобы ученики своими чувствами (преимущественно зрѣніемъ, слухомъ, осязаніемъ и чувствомъ мускульнымъ) поработали на самомъ дѣлѣ и, такимъ образомъ, испытали бы тѣ ощущенія, на почвѣ которыхъ они могутъ себѣ составить вѣрныя и ясныя представленія того или иного рода. Это, большею частью, новыя для нихъ представленія о тѣхъ явленіяхъ, которыя подлежать ихъ уразумѣнію въ школѣ. Въ этомъ смыслѣ не только картины и рисунки, не только модели и чучела, засушенные растенія и образцы разныхъ произведеній природы или рукъ человѣческихъ, которые необходимо осматривать глазами и разглядывать, являются наглядными пособіями. Таковыми можно считать также разные физическіе и химическіе приборы, съ помощью которыхъ можно прослѣдить *ходъ* какихъ-либо явленій, модели этихъ приборовъ, а также приборы, служащіе для цѣлесообразныхъ работъ мускульнаго и дру

гихъ (а не одного лишь зрѣнія) чувствъ. Таковы, напр., циркули, линейки и др. приборы для *вычерчиванія* линій, русскіе торговые счеты для *вычисленій*, клѣтчатая бумага для *выполненія* нѣкоторыхъ чертежей, и т. п. Наглядными пособиями являются иногда руки и пальцы, служащіе, благодаря цѣлесообразнымъ жестамъ, для уясненія характера какого-либо движенія и его направленія, для указанія какого-либо дѣйствія и даже для выраженія какого-либо настроенія, чувствованія или желанія. Наглядныя пособия иногда рассчитываютъ, такимъ образомъ, не только на зрѣніе, но и на слухъ, на осязаніе, на мускульное чувство и даже на воображеніе.

Въ играхъ и въ другихъ своихъ ^{Важность} самостоятельныхъ занятіяхъ дѣти ^{наглядныхъ} сами охотно прибѣгаютъ къ предметамъ, кото- ^{посо-}рые служатъ какъ бы „наглядными“ пособиями. Они отождествляютъ стуль или палку съ лошадыю, коверъ—съ повозкой или санями, и т. д. Важность наглядности *обученія* сознавалась и взрослыми во всѣ времена, за исключеніемъ, можетъ-быть, нѣкоторыхъ полосъ мрачнаго средневѣковья, когда не было уваженія къ истинному знанію и къ истинному образованію, и когда обученіе отличалось особеннымъ пристрастіемъ къ словамъ, „вербализмомъ“. Къ сожалѣнію, школа и понынѣ иногда впадаетъ въ ту же ошибку, забывая, что слова учебника, учениковъ и даже самого учителя должны являться не источникомъ знанія, а средствомъ и часто — даже результатомъ его.

Самъ Божественный Учитель, уча людей взрослыхъ Высшей Правдѣ жизни, для выясненія Своего Божественнаго ученія, обращался къ *окружающимъ* предметамъ: „если вы будете имѣть вѣру съ горчичное зерно и скажете горѣ сей: перейди отсюда туда, и она перейдетъ“ (Мѡ. XVIII, 20). Позвавъ дитя, Христось *поставилъ его*

среди учениковъ своихъ и сказали: „истинно говорю вамъ, если не обратитесь и не будете какъ дѣти, не войдете въ Царство небесное“ (Мѳ. XVIII, 2). „Покажите Мнѣ монету, которою платится подать. Они подали Ему динарій. И говоритъ имъ: чье это изображеніе и надпись?“ (Мѳ. XXII, 19—20). „И взявъ дитя, поставилъ его посреди нихъ и, обнявъ его, сказалъ имъ: кто приметъ одно изъ такихъ дѣтей во имя Мое, тотъ принимаетъ Меня“ (Мк. IX, 36—37). Спаситель *указывалъ* на стѣны іерусалимскія и говорилъ одному изъ учениковъ Своихъ: „видите сіи великія зданія? все это будетъ разрушено, такъ что не останется камня на кампѣ“ (Мк. XIII, 2).—Онъ не только опирался на представленія, но прибѣгалъ даже къ непосредственному воздѣйствію на чувства Своихъ учениковъ.

У Платона (429—347 до Р. Хр.), творца и родоначальника идеалистическихъ философскихъ системъ, есть указаніе на то, что вычисленію надо учить „на вѣвкахъ, плодахъ, цвѣтахъ и т. п.“—Ранѣе Сократъ (468—399 до Р. Хр.), уча философін, начиналъ съ примѣровъ, взятыхъ изъ обыденной жизни, говоря о сапдаліяхъ, мѣдникахъ и т. п. „ничтожныхъ“ предметахъ. Если бы онъ училъ дѣтей, то онъ не только говорилъ бы о „ничтожныхъ“ предметахъ, но ихъ показывалъ бы и цѣлесообразными вопросами заставлялъ бы дѣтей, какъ онъ это дѣлалъ со взрослыми учениками, *собственнымъ умомъ* добираться до истины относительно этихъ предметовъ и до тѣхъ мыслей, на которыя они наводятъ.—У индусовъ очень своеобразно развивалась математика, и они въ ней достигли весьма высокихъ ступеней знанія. Но у нихъ чертежъ служилъ не только для того, чтобъ облегчить уразумѣніе геометрическихъ истинъ; часто все *доказательство* сводится у нихъ къ чертежу и къ краткой

надписи: „смотри!“ — Въ такъ наз. „эпоху ита-
ліанскаго возрожденія наукъ и искусствъ“ (XV
и XVI вѣковъ) нѣкоторые гуманисты и естество-
испытатели (Леонбаттиста Альберти, Леонардо
да-Винчи) были уже сторонниками не книжнаго,
а нагляднаго и опытнаго уразумѣнія законовъ
природы. „Зачѣмъ мнѣ учиться и добывать зна-
ніе изъ книгъ, когда я могу учиться у общей
учительницы всѣхъ людей вообще и мудрецовъ
въ частности, у природы?“ — спрашивалъ Лео-
нардо да-Винчи (1421—1519).— Борясь противъ
односторонняго средневѣковаго аскетизма, Лю-
теръ (1483—1546) говоритъ, что нельзя воспи-
тывать душу отдѣльно отъ „тѣла“, имѣя при
этомъ въ виду не столько греческій идеаль
„здоровой души въ здоровомъ тѣлѣ“, сколько
необходимость воздѣйствія воспитателя на чело-
вѣческое тѣло для *воспитанія* души.— Оригенъ
(185—253) и многіе отцы церкви, напр., блажен-
ный Августинъ (353—430), Климентъ Алексан-
дрійскій († 217) и др. равнымъ образомъ созна-
вали необходимость наглядности обученія.

Славный и еще доселѣ въ высшей степени
авторитетный мыслитель - педагогъ Янъ-Амосъ
Коменскій (1592—1671) много разъ говоритъ
въ своей „Великой Дидактикѣ“ о томъ, какъ
необходима наглядность обученія. Напримѣръ:
„начало познанія должно всегда исходить изъ
ощущенія“; „ученіе надо начинать не со сло-
веснаго толкованія о вещахъ, а съ наблюденія
ихъ“; „ощущеніе — вѣрнѣйшій руководитель
памяти“, и т. п.— Тѣхъ же взглядовъ держались
всѣ сколько-нибудь крупныя теоретики и прак-
тики - педагоги всѣхъ временъ и народовъ:
Локкъ, Руссо, Песталоцци, Каптъ, Гербартъ,
Дистервегъ, Жакото, Массе, Ушинскій, Рѣдкинъ,
Рачинскій.

Въ старину царило зубреніе дѣтми непонят-

ныхъ словъ, потомъ появились такъ называемыя „объясненія“ учителя. Теперь начинается пробиваться сквозь рутину школьной учебы стремленіе къ развитію самодѣятельности учениковъ, къ тому, чтобы они видѣли видимое, слышали—слышимое, осязали—осязаемое, къ тому, чтобы у нихъ былъ „свой глазъ алмазъ“ и „своя рука—владыка“, чтобы они не уподоблялись ни ученымъ попугаямъ, ни тѣмъ болѣе—фонографамъ и грамофонамъ; къ тому, чтобы они были не безрукими, слѣпыми, глухими машинами и говорящими куклами, а были все время людьми (хотя и малолѣтними въ дѣтскіе свои годы); чтобы они пользовались всеѣмъ аппаратомъ своихъ чувствъ и чувственныхъ воспріятій, который является единственнымъ посредникомъ между природою и человѣческимъ разумѣніемъ.—Руссо прямо говоритъ: „такъ какъ все, постигаемое разумомъ, проникаетъ туда черезъ посредство органовъ чувствъ, то первая ступень къ развитію разума—чувственное разумѣніе, которое служить основаніемъ разумѣнія умственного. Первые наши учителя—это наши ноги, руки, глаза“.

*Важность
работы всехъ
чувствъ*

Извѣстно, что одни дѣти болѣе склонны къ образованію зрительныхъ, другіе—къ образованію слуховыхъ, третьи—къ образованію мышечныхъ представленій, и т. д. Есть дѣти, болѣе или менѣе равномерно работающія всеѣми своими чувствами и поэтому живущія, если можно такъ выразиться, въ мірѣ разнообразнѣйшихъ представленій. Надо ли считатьъ съ индивидуальностью учениковъ, или заставлять всехъ дѣтей работать всеѣми чувствами? Само собою разумѣется, что индивидуальность каждаго ученика надо принимать во вниманіе. Но именно поэтому и не надо ограничиваться только зрительными или слуховыми, или

преимущественно мышечными ихъ впечатлѣніями. Всякій ребенокъ и самъ найдетъ то наглядное пособие, которое наиболѣе отвѣчаетъ его индивидуальности: надо только предоставить ему свободный выборъ. Но для возможности этого выбора необходимо ребенку работать всѣми чувствами.— Важно и то, что, работая всѣми чувствами, ученикъ становится многостороннѣе и развиваетъ тѣ стороны духа, которыя, при пристрастіи учителя къ нагляднымъ пособиямъ одного рода, у ученика развивались бы слабо. Пусть у ученика работаютъ всѣ чувства, въ этомъ-то и состоитъ вниманіе учителя къ его индивидуальности.— Благодаря работѣ возможно большаго числа чувствъ ученика, образованныя имъ ясныя представленія будутъ опираться на большее количество сознательно пережитаго и перечувствованнаго. Это облегчитъ ему и работу надлежащаго ассоціирования, и работу разумнаго запоминанія и усвоенія. Благодаря сознательной работѣ возможно большаго числа чувствъ, ученикъ легко образуетъ себѣ надлежащія представленія, надлежащія понятія и идеи, усваиваетъ себѣ болѣе прочный запасъ знаній и свѣдѣній, приобретаетъ себѣ большій запасъ сознательныхъ навыковъ, вырабатываетъ себѣ большій интересъ къ ученію и знанію и становится все болѣе и болѣе господиномъ своей творческой воли и хозяиномъ своего творческаго сознанія.

Подъ именемъ „внутренней на- Такъ наз. внутренняя наглядность. гглядности“ разумѣютъ работу воображенія учениковъ, къ которой учителя часто прибѣгаютъ для цѣлей обученія и воспитанія.—Въ Св. Четвероевангеліи мы находимъ дивныя образцы воздѣйствія на воображеніе апостоловъ, къ каковому воздѣйствію Христосъ прибѣгалъ съ особенною любовью. Вся нагорная проповѣдь и всѣ притчи, которыми

Спаситель училъ Своихъ учениковъ и народъ, представляють собой недостижимый идеаль поль- зованія „внутренней наглядностью“ для цѣлей истиннаго воспитанія и обученія въ духъ Вѣч- ной Правды и Божественной Истины.

Само собою разумѣется, что „внутренняя на- глядность“ при начальномъ воспитаніи и обуче- ніи дѣтей тоже необходима. Глубоко ошибаются и жестоко вредятъ дѣлу воспитанія и обученія „малыхъ сихъ“ тѣ, кто думаетъ, что у дѣтей надо и можно воспитывать и развивать только умъ, — только сужденіе, только отвлеченную мысль. Глубоко ошибается и тотъ, кто думаетъ что умъ, сужденіе и отвлеченную мысль уча- щихся можно воспитать и развить, не дѣйствуя на ихъ чувства, на ихъ творческое воображеніе и на дѣятельную волю учениковъ.

*Значеніе инту-
итренней нагляд-
ности* Значеніе внутренней наглядно- сти безмѣрно велико. Ибо безъ ра- боты творческаго воображенія нѣтъ душевной жизни, нѣтъ ни мысли, ни разумнѣйши ни ученія, нѣтъ ни науки, ни искусства, ни ре- месль, нѣтъ чувствованій, нѣтъ человѣческих желаній, нѣтъ воли, нѣтъ ни человѣческих рѣшеній, ни истинно человѣческаго дѣйствія. Безъ работы творческаго воображенія человекъ обращается въ автомата, въ машину, т. е. впа- даетъ въ состояніе или болѣзненное, или не совмѣстимое съ человѣческимъ достоинствомъ. Но внутренняя наглядность можетъ опираться только на наглядность внѣшнюю и чувственную и чувственная наглядность всегда предше- ствуетъ въ жизни и должна предшествовать также въ школѣ той работѣ воображенія, къ ко- торой сводится такъ наз. внутренняя нагляд- ность. Повятно, что значеніе внутренней нагляд- ности при обученіи арифметикѣ, какъ и значе- ніе ея вообще для умственной работы человека

НЕОБХОДИМОСТЬ НАГЛЯДНЫХ ПОСОБИЙ ВООБЩЕ.

безмѣрно велико. Если съ этимъ согласиться, то невозможно не признать, что однимъ изъ ~~не-~~необходимѣйшихъ условій обученія арифметикѣ должно признать наглядность обученія и что необходимѣйшимъ условіемъ этой наглядности надо признать цѣлесообразныя наглядныя пособия и цѣлесообразное ихъ примѣненіе также при обученіи этому предмету.

Сводя во-едино все вышесказанное, можно прійти къ слѣдующимъ выводамъ: *Общіе выводы.*

а) Изъ всѣхъ чувствъ важнѣйшія для обученія суть: *зрѣніе, слухъ и чувство мускульное.*

б) *Безъ оцущеній нѣтъ представленій, а безъ представленій нѣтъ понятій, идей и знаній о явленіяхъ матеріальнаго міра.*

в) *Одно знаніе словъ безъ полной власти надъ ихъ смысломъ есть знаніе призрачное и ложное.*

г) Истинное знаніе состоитъ въ наличности представленій и въ должной ассоціаціи всѣхъ представленій, понятій и идей, составляющихъ матеріаль этого знанія.

д) Обученіе должно: 1) *создать* въ сознаніи дѣтей надлежащія представленія, понятія и идеи и 2) *привести* дѣтей къ умѣнью ихъ *ассоціировать*.

е) Это достижимо только *при полной наглядности* обученія и *при интересѣ* дѣтей къ знанію, каковой интересъ возможенъ только при наглядности обученія.

ж) При обученіи должны быть заинтересованы *всѣ чувства учениковъ*, важныя для обученія, а также ихъ *творческое воображеніе и воля.*

и) Наглядныя пособия вызываютъ *самодѣятельность* учениковъ, что для дѣла въ *высшей* степени необходимо.

1) *При обученіи арифметикѣ тоже должно господствовать основное начало всякаго обученія, а именно начало наглядности*

ГЛАВА I.

Арифметическія наглядныя пособія.

*Арифметика и
ея связь съ чув-
ственными вос-
пріятіями*

Счетъ и четыре дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами представляютъ собою *предметъ* арифметики.—Считать можно все, что поддается счету: естественные предметы (или вещи), явленія природы, дѣйствія, слова и т. д. Производить же арифметическія дѣйствія можно надъ числами. Но въ основѣ этихъ дѣйствій лежатъ представленія о дѣйствіяхъ надъ *совокупностями* предметовъ или явленій. Говоря иначе: если бы человѣку никогда не приходилось сваливать въ одну кучу двѣ группы предметовъ и отдѣлять отъ одной ихъ совокупности нѣкоторую часть этой совокупности, то не возникли бы также арифметическія дѣйствія сложенія и вычитанія. Если бы совокупности предметовъ не могли быть одинаковы по числу предметовъ, въ нихъ входящихъ, то никогда не могли бы возникнуть арифметическія дѣйствія умноженія и дѣленія. Если бы, даже, цѣлое никогда не приходилось дѣлить на нѣкоторое число одинаковыхъ частей, то никогда не возникли бы дроби и дѣйствія надъ ними. Однимъ словомъ, если бы не было предметовъ и явленій, поддающихся счету, и если бы не было цѣлыхъ предметовъ и ихъ частей

то не было бы никогда и арифметики. А отсюда вытекаетъ, что обученіе арифметикѣ должно опираться прежде всего на соотвѣтствующія зрительныя, осязательныя, мышечныя и слуховыя ощущенія и впечатлѣнія. При этомъ, къ числу мышечныхъ надо отнести, какъ мы видѣли во „Введеніи“, также тѣ ощущенія, съ которыми связано употребленіе нашихъ органовъ рѣчи не только у обладающихъ слухомъ и рѣчью, но также у оглохшихъ и даже у глухонѣмыхъ отъ самаго рожденія.

Если ученикъ только смотритъ *Классификація наглядныхъ пособій.* на данный предметъ, то онъ, казалось бы, испытываетъ только чисто-зрительное ощущеніе. Но ближайшее изслѣдованіе этого вопроса показываетъ, что его глазъ не остается неподвижнымъ и что къ этому чисто-зрительному ощущенію чаще всего присоединяется также мышечная работа, связанная съ передвиженіемъ глазного яблока и съ измѣненіемъ кривизны хрусталика при перемѣщеніи глазного яблока. А это перемѣщеніе необходимо для того, чтобы предметъ былъ рассмотрѣнъ какъ слѣдуетъ. Выходитъ, что даже чисто-зрительное ощущеніе, при *разсматриваніи* предмета, соединяется съ нѣкоторой мышечной работой. Равнымъ образомъ иногда и чисто-осязательное ощущеніе находится тоже въ нѣкоторой связи съ мышечнымъ чувствомъ. И т. д. Несмотря на это, возможно, однако же, раздѣлить всѣ наглядныя пособія на нѣсколько группъ, изъ коихъ одну составляютъ пособія зрительныя, другую зрительно-осязательныя, третью—зрительно-мышечныя, да еще—вычислительныя и, наконецъ, измѣрительныя и чисто-геометрическія. При этомъ можетъ случиться, это на одной ступени то или иное пособіе является чисто-зрительнымъ, на другой—также вычислительнымъ, и т. д.

*Окружающая
природа как со-
провождающая на-
глядные посо-
бий.*

Кромѣ описанныхъ ниже или мелькомъ упоминаемыхъ, такъ сказать, искусственныхъ наглядныхъ пособій, изготовленныхъ специально для обученія ариметикѣ, окружающая обстановка даетъ немовѣрное количество пособій, такъ сказать, естественныхъ. Вѣточка съ листьями на пей, столы и стулья, книжки въ книжномъ шкафу и разныя письменныя принадлежности, карточки разрѣзаной азбуки, коробка шведскихъ спичекъ, обрывки разорваннаго на части куска бумаги, стѣкла оконъ, тиканіе часовъ, шаги учителя и учениковъ, ритмическіе (какъ при управленіи хоромъ) взмахи рукою, мѣрно производимый учителемъ стукъ карандаша по столу, членораздѣльные звуки голоса учителя и ученика и т. п. могутъ служить отличными наглядными пособиями на соответствующихъ ступеняхъ курса, сближая обученіе ариметикѣ съ ежедневной жизнью и сродняя ученика съ арифметическими представленіями. Это сліяніе арифметическихъ интересовъ ученика съ интересомъ къ ежедневнымъ явленіямъ его жизни, пошятно, крайне важно во всѣхъ отношеніяхъ. Безъ этого сліянія создается рознь, приносящая вредъ обученію и не отвѣчающая требованіямъ жизни,—рознь, крайне вредная не только въ практическомъ, но и въ образовательномъ отношеніи.

*Раздѣленіе на-
глядныхъ посо-
бий.*

Къ чисто-нагляднымъ принадлежатъ: числовыя фигуры и чертежи, служащіе для выясненія какого-либо арифметическаго вопроса, если ихъ ученикъ только видитъ въ готовомъ видѣ, но самъ не выполняетъ, разныя таблицы и всякіе предметы, которые онъ только видитъ, но до которыхъ онъ не дотрагивается (окна, предметы, лежащіе на учительскомъ столѣ, и т. п.)

Къ наглядно-осязательнымъ принадлежатъ: кубики и другіе предметы, удобные для счета, палочки (такъ называемая „солома“, „спички“), еловые шишки, карандаши, пальцы рукъ, косточки шведскихъ счетовъ, если ихъ считаетъ самъ ученикъ и прикасается къ нимъ руками.

Изъ наглядно-вычислительныхъ пособій первое мѣсто принадлежитъ, конечно, русскимъ торговымъ счетамъ. Но къ ихъ числу могутъ быть присоединены также счеты шведскіе, спички и пальцы (послѣдніе—въ особенности для прибавленія и для таблицы умноженія), Пифагорова таблица умноженія и всяческія таблицы цифръ, написанныя на доскѣ, для производства дѣйствій надъ числами, или напечатанныя (напр., „Таблица Шохоръ-Троцкаго для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“, и т. п.).

Къ наглядно-измѣрительнымъ пособіямъ принадлежатъ образцы (модели) единицъ мѣры и изготовленные самими учениками изъ бумаги или изъ веревочки носители единицъ мѣры длины, а также квадраты, которыхъ площади равны квадр. аршину или футу, вершку или дюйму, и т. п.

Къ числу чисто-геометрическихъ пособій принадлежатъ геометрическіе чертежи и тѣла для всѣхъ случаевъ, когда ариѳметическій вопросъ касается геометрическихъ представленій (объ углѣ, о квадратѣ, о площади, о кубѣ и т. п.). Если ученикъ самъ выполняетъ чертежи, изготовляетъ фигуры и вообще производитъ работу мускульную, то это пособіе у зрячаго ученика является пособіемъ зрительно-мышечнымъ, у слѣплого же—чисто-мышечнымъ.

Обратимся преяде всего къ чисто-нагляднымъ учебнымъ пособіямъ.

а) Изъ нихъ наиболѣе употребительны „числовыя фигуры“. Такъ называются рисунки, въ которыхъ значки располо-

*Чисто-нагляд-
ныя пособія.*

*Числовыя фи-
гуры.*

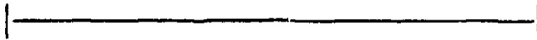
жены въ порядкѣ, принятомъ въ игральныхъ картахъ. Таковы, напр., фигуры:



Числовыя фигуры, въ которыхъ болѣе десяти значковъ, не цѣлесообразны въ виду того, что онѣ перестаютъ быть наглядными и, такимъ образомъ, лишаются своего значенія. Наилучшими значками для числовыхъ фигуръ являются точки, кружочки и косые крестики (вродѣ знака умноженія). Прямые кресты неудобны потому, что горизонтальныя части ихъ сливаются, при неаккуратномъ письмѣ, въ сплошную прямую линію и поэтому не достигаютъ цѣли.

Черточки. б) Изъ другихъ чисто-наглядныхъ и въ то же время не исключительно геометрическихъ) пособій надо пользоваться палочками, рисуемыми учителемъ на доскѣ не въ видѣ числовыхъ фигуръ, а рядомъ одна съ другою, — для упражненій въ однопочномъ и хоровомъ счетѣ. — Если ученики ихъ рисуютъ, то они служатъ и для подготовки дѣтей къ письму цифръ.

Прямая линія. в) Къ чисто-нагляднымъ пособиямъ принадлежитъ прямая линія съ рѣзко обо-



значенными концами, для выработки представлений: о цѣломъ, о части, о дѣленіи на части, о длинѣ, о нѣкоторыхъ мѣрахъ длины, и т. п. Чаще всего учитель съ помощью задачи относительно прямой линіи можетъ выяснитъ иное чисто-арифметическое ученіе лучше, чѣмъ съ помощью отвлеченныхъ разсужденій. Прямая линія, какъ мы увидимъ ниже, можетъ сослужить

большую службу при рѣшеніи даже самыхъ замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера.

Обзоръ наглядно-осязательныхъ *Наглядно-осязательныхъ пособій* *тѣльныхъ пособій* сдѣдуетъ начать съ кубиковъ такъ называемаго „ариметическаго ящика“.

а) Кубики являются удобнымъ *Кубики* наглядно-осязательнымъ пособіемъ почти на всѣхъ ступеняхъ обученія ариметикѣ, относящихся до дѣйствій надъ числами первой сотни. Они легко складываются въ группы, не сваливаются со стола, видимы всѣми учениками, ихъ можно ставить на планку классной доски, на верхъ рамы этой доски, или же на верхъ рамы шведскихъ счетовъ. Сверхъ того, они могутъ служить пособіемъ при рисованіи учениками квадратовъ и при образованіи учениками представленій о кубическихъ единицахъ мѣры.

б) Такъ называютъ совокупность *Ариом. ящикъ* нѣсколькихъ десятковъ кубиковъ, столбиковъ и досокъ. Изъ этихъ послѣднихъ двухъ пособій столбикъ представляетъ собою прямоугольный параллелепипедъ, основаніе котораго равно основанію кубика, а высота въ 10 разъ больше высоты кубика, доска же — параллелепипедъ, основаніе котораго въ 100 разъ больше основанія кубика, а высота равна высотѣ его. *Изъ всѣхъ этихъ предметовъ полезны только кубики.*—Бруски же отнюдь не выполняютъ своего назначенія, т. е. не даютъ вѣрнаго нагляднаго представленія о десяткѣ кубиковъ, равно какъ и доски не даютъ вѣрнаго нагляднаго представленія о сотнѣ кубиковъ. Дѣло въ томъ, что десятокъ и сотня представляютъ собою только новыя единицы *счета*, притомъ единицы составныя, но далеко не представляютъ собою такого же сплошнаго цѣлаго, каковымъ является каждый столбикъ (брусокъ) и каждая доска. Поэтому и при письменномъ обозначеніи чиселъ, и при выясненіи сущности

производства дѣйствія надъ двузначными и трехзначными числами *эти два пособія не оказываютъ никакихъ услугъ*. Они, напротивъ, искажаютъ вѣрное представленіе объ условности десятичной системы счисленія и о тѣхъ услугахъ, которыя эта условность оказываетъ производству дѣйствій. Здѣсь группа въ десять единицъ одного разряда *сливается* въ единицу слѣдующаго высшаго разряда, или же, наоборотъ, одна единица высшаго разряда, при надобности, совершенно свободно *распадается* на десять единицъ ближайшаго низшаго разряда. Въ столбикахъ же и въ доскахъ нѣтъ ничего подобнаго.— Въ виду этого, тѣ начальныя школы, въ которыхъ нѣтъ арифметическаго ящика, и не должны бы покупать его въ магазинахъ учебныхъ пособій. Всякій плотникъ или столяръ, по указанію учителя, а то и самъ учитель, могутъ приготовить сотню-другую кубиковъ.

*Отдѣльные
предметы.*

в) Въмѣсто кубиковъ можно употреблять какіе-либо другіе, болѣе или менѣе одинаковые по формѣ, предметы: камешки, еловые и сосновые шишки, деревянные палочки, и т. п. Есть, впрочемъ, случаи, когда аккуратно изготовленные кубики могутъ оказать особенную, имъ однимъ присущую, услугу. Въ этомъ случаѣ обойтись безъ кубиковъ трудно: это—при изученіи кубическихъ мѣръ.

Солома.

г) Что касается палочекъ, спичекъ, такъ называемой „соломы“, то это пособіе состоитъ изъ сотни-другой палочекъ одинаковой длины и оказываетъ неоцѣнимыя услуги при прохожденіи *нумерации* и при изученіи дѣтymi *производства сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ*.—Лучше всего, если палочки имѣютъ въ длину около полуаршина, а толщину не болѣе толщины карандаша. Конечно, изготовленіе этого учебнаго пособія для учителей не представитъ

уже никакихъ затрудненій. Въмѣсто выструганныхъ или выточенныхъ палочекъ можно довольствоваться (въ мѣстностяхъ, гдѣ растутъ камыши или растенія съ подходящими стволами) палочками естественными (напр., изъ раkitника, липы, вербы, осины). Дѣти могутъ и должны сами изготовить (каждый для себя и для товарищей своихъ) достаточное количество такихъ палочекъ.—Надо приучить дѣтей къ быстрому связыванію, съ помощью нитки, пучковъ по десяти спичекъ въ каждомъ. Полезно это связываніе производить безъ помощи узловъ, закладывая одинъ конецъ внутрь пучка, а другой протягивая въ промежутки между палочками. Это полезно для того, чтобы и развязываніе производилось быстро.—„Солому“ можно считать и наглядно-вычислительнымъ, при незначительныхъ вычисленияхъ, пособіемъ,—въ особенности на первыхъ ступеняхъ обученія.

д) Шведскіе счеты состоятъ изъ *Шведскіе счеты*. четырехугольной рамки, стоящей на ножкахъ. Въ ней продѣто восемь, десять или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, на каждой изъ которыхъ свободно могутъ двигаться по десяти деревянныхъ шаровъ. Кромѣ того, *на отдѣльномъ брускѣ*, или *сверху рамки*, иногда паходятся нѣсколько *вертикальныхъ* проволокъ, на которыя можно надѣть отдѣльные шары. На этихъ проволокахъ можно разработать нумерацію, и отчасти—сложеніе и вычитаніе многозначныхъ чиселъ. Шведскіе счеты могутъ служить хорошимъ *класснымъ* вычислительнымъ инструментомъ только на первыхъ ступеняхъ обученія, когда еще не приходится придавать проволокамъ условнаго значенія проволоки единиць, проволоки десятковъ и т. д., подобнаго значенія проволокамъ русскихъ торговыхъ счетовъ. Нѣтъ нагляднаго сходства между письменнымъ

обозначеніемъ многозначныхъ чиселъ съ помощью цифръ, при которомъ цифры стоятъ рядомъ въ *одной строкѣ*, и условнымъ обозначеніемъ многозначныхъ чиселъ на шведскихъ счетахъ, при которомъ обозначенія чиселъ разныхъ разрядовъ стоятъ *одно надъ другимъ*.

Вычислительные инструменты. Среди наглядно - вычислительныхъ инструментовъ первое мѣсто принадлежитъ, конечно, такъ называемымъ русскимъ торговымъ счетамъ.

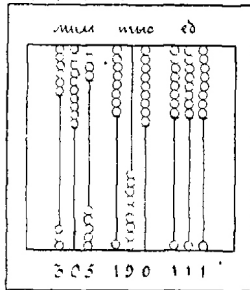
Торговые счеты. а) Съ помощью *торговыхъ* счетовъ можно выполнять очень многія вычисления, притомъ особенно легко — первыя два дѣйствія надъ многозначными числами. Торговые счеты у насъ извѣстны всѣмъ и каждому, а потому ихъ описаніе было бы излишнимъ. Должно, однако же, замѣтить, что большій (противъ обыкновеннаго) размѣръ счетовъ для школьнаго, въ классѣ, употребленія не только желателенъ, но даже просто необходимъ для того, чтобы ученики, сидящіе далеко отъ доски, могли ясно различать отдѣльныя косточки счетовъ. Понятно, что тѣ школы, въ которыхъ нѣтъ такихъ счетовъ, но есть такъ называемые шведскіе, не должны пріобрѣтать непременно торговые счеты, хотя шведскіе и не могутъ служить въ такой же мѣрѣ *инструментомъ* для вычисления. (Вспомнимъ, что въ шведскихъ счетахъ нельзя, какъ это замѣчено выше, придавать, безъ натяжки, проволокамъ, лежащимъ *горизонтально*, мѣстнаго разряднаго значенія: значенія проволоки единиць, десятковъ, сотенъ и т. д.). Вполнѣ возможно ограничиться пріобрѣтеніемъ торговыхъ счетовъ преимущественно предъ шведскими, такъ какъ первыя сравнительно дешевле послѣднихъ, могутъ ихъ замѣнить и употребительны въ жизни. Но тогда мѣстное значеніе проволокъ должно быть введено уже послѣ того, какъ сче-

ты отслужили свою службу въ качествѣ исключительно нагляднаго пособия.—Хорошо торговые классные счеты устраивать такъ, чтобы ихъ можно было вѣшать на стѣну и чтобы при этомъ проволоки шли горизонтально, а косточки не скатывались все въ одну сторону.

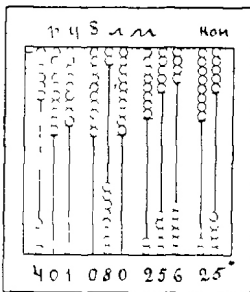
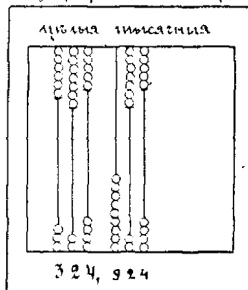
б) Во избѣжаніе неудобствъ обыкновенныхъ торговыхъ счетовъ для школы, пишущій эти строки къ счетамъ приспособляетъ для каждой проволоки такіе

Школьные счеты Школяр-Троицаго.

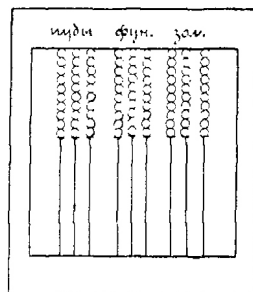
Числорація арабскими числами



Числорація десятичными дробями



Десятичные дроби



Составная или тысяча

щипчики (зажимы), съ помощью которыхъ можно достигнуть того, чтобы косточки не сваливались

внизъ, когда проволокамъ придано отвѣсное положеніе. Благодаря такому устройству, можно достигнуть, — повѣсивъ счеты такъ, чтобы проволоки шли отвѣсно. — полнѣйшаго соответствія между письменною нумераціею и нумераціею на счетахъ. Школьные счеты Шохоръ-Троцкого даютъ также возможность сдѣлать наглядными первыя два дѣйствія надъ составными именованными числами и надъ десятичными дробями. Это достигается записями на обѣихъ дощечкахъ, которыми снабжены эти счеты, и упомянутыми выше зажимами. (Вмѣсто зажимовъ, можно сдѣлать другое приспособленіе, испытанное на опытѣ: учитель свертываетъ въ трубочку небольшой кусокъ бумаги и вкладываетъ въ каждый шарикъ эту трубочку, а затѣмъ надѣваетъ шарикъ съ трубочкой на проволоку такъ, чтобы трубочка проходила между проволокой и внутреннимъ ходомъ шарика. Благодаря тренію и упругости трубочки, шарикъ, двигаясь свободно по отвѣсной проволокѣ, не падаетъ внизъ, а остается на томъ мѣстѣ, гдѣ его оставляютъ. Такое приспособленіе служитъ довольно долго и требуетъ отъ учителя лишь нѣкоторой затраты времени въ самомъ началѣ года). — Въ счетахъ Шохоръ-Троцкого, какъ и во многихъ другихъ школьныхъ счетахъ, проволоки легко вынимаются. Благодаря выдвигаемымъ пожаткамъ, школьные счеты Шохоръ-Троцкого можно поставить такъ, чтобы проволоки шли горизонтально (пиведская форма), и такъ, чтобы онѣ шли отвѣсно (нумераціонная форма). Ихъ можно также повѣсить въ томъ или иномъ положеніи. Изображеніе счетовъ дано выше. — употреблеііе школьныхъ счетовъ Шохоръ-Троцкого возможно при выясненіи: 1) письменнаго обозначенія чиселъ съ помощью арабскихъ цифръ, въ особенности чиселъ двузначныхъ, трехзначныхъ

и т. д., 2) письменнаго производства сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ, 3) при сложеніи и вычитаніи составныхъ именованныхъ чиселъ и 4) при обозначеніи десятичныхъ дробей и производствѣ первыхъ дѣйствій надъ ними.

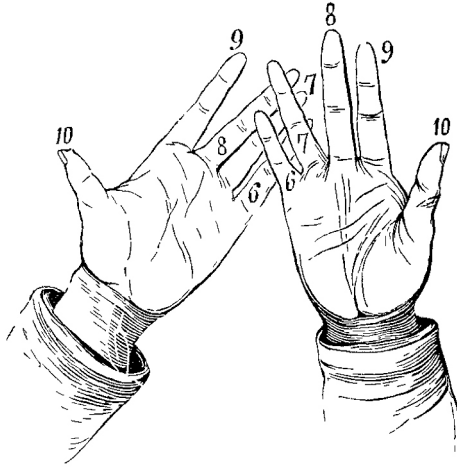
Не слѣдуетъ увлекаться слишкомъ частымъ примѣненіемъ счетовъ въ тѣхъ случаяхъ школьной практики, когда смѣло можно обойтись *изустнымъ* вычисленіемъ и когда вычисленіе *письменное должно предпочитать* вычисленію на счетахъ. Русскіе торговые счеты—вычислительный *инструментъ*, лишь въ Россіи исключаяющій во многихъ случаяхъ письменное производство дѣйствій. Поэтому въ благоустроенной школѣ они могутъ и должны быть только *пособіемъ* при обученіи ариѳметикѣ, а въ курсѣ этого предмета должны занимать только мѣсто пособія. Въ Зап. Европѣ, на практикѣ, даже служащие въ торговыхъ учрежденіяхъ, гдѣ быстрота вычисленій особенно важна, предпочитаютъ вычисленіе письменное и изустное вычисленіямъ на счетахъ. И у насъ, какъ и на всемъ свѣтѣ, школа должна распространять *грамотность и просвѣщеніе*, по предмету же ариѳметики учить *сознательному* устному и письменному производству четырехъ дѣйствій. Она поэтому не должна распространять употребленія счетнаго инструмента, который получилъ у насъ особенно большое распространеніе именно по причинѣ незначительнаго развитія въ Россіи грамотности и просвѣщенія.

в) Не надо забывать, что къ *Пальцы рукъ*. числу наглядно-вычислительныхъ пособій принадлежатъ, въ особенноти на первыхъ ступеняхъ обученія, всякіе предметы. Среди нихъ пальцы, казалось бы, должны бы занимать первое мѣсто. Пальцы *помогаютъ* вычисленію, притомъ преимущественно при отысканіи суммы

какого-либо числа съ однопозначнымъ, помощью присчитыванія.—На первыхъ ступеняхъ запрещать дѣтямъ употребленіе пальцевъ съ этою цѣлью, отнюдь, не слѣдуетъ: это наглядно-вычислительное пособіе принадлежитъ, конечно, къ числу самыхъ естественныхъ. Но необходимо постепенно *освободить* учениковъ отъ привычки всегда прибѣгать къ помощи пальцевъ, т. е. путемъ упражненій, довести до *знанія* такъ называемой таблицы сложенія.—Какъ это ни странно, пальцы, какъ счетный инструментъ, на первыхъ порахъ не принадлежатъ къ числу цѣлесообразнѣйшихъ наглядныхъ пособій. Во-1-хъ, ученики *знаютъ*, сколько у нихъ пальцевъ на одной рукѣ и на обѣихъ, часто не умѣя ихъ сосчитать. Во-2-ыхъ, для того, чтобы сосчитать число пальцевъ, ученику надо отрѣшиться отъ ненужныхъ и мѣшающихъ ему осязательныхъ ощущеній. Во-3-хъ, у малолѣтнихъ мускульное чувство еще такъ мало развито, что считать указательнымъ пальцемъ лѣвой руки всѣ пальцы правой руки для нихъ иногда бываетъ трудно, такъ какъ пальцы являются то считаемыми предметами, то орудіемъ счета, „счетчикомъ“.

Пальцы рукъ при умноженіи. г) Другое значеніе имѣютъ пальцы обѣихъ рукъ при усвоеніи дѣтями труднѣйшей для усвоенія на-память части таблицы умноженія, начиная съ произведенія 6×6 . Конечно, прежде чѣмъ приступить къ усвоенію дѣтями на-память таблицы умноженія, *должно вѣдаться въ томъ—понимаютъ ли они:* 1) *цѣль дѣйствія умноженія,* 2) *простѣйшіе случаи его примѣненія,* и 3) *цѣль усвоенія таблицы наизусть.* *Добираться до произведеній какимъ-нибудь образомъ, притомъ изустно, должны вѣдать всѣ ученики,* какъ бы много на это ни потребовалось труда, и объ этомъ рѣчь впереди. Въ свое время, лучше всего вести упражненія

въ повтореніи таблицы умноженія хоромъ, и провѣрятъ познания учащихъся—на каждомъ въ отдѣльности. —Но, *при отысканіи* данныхъ таблицы умноженія почти безъ вычисленій, очень большія услуги можетъ оказать именно пальцевой, *чисто-инструментальный*, способъ усвоенія части таблицы умноженія, начинающейся съ произведенія 6×6 . Этотъ способъ употреблялся въ древности римлянами, у которыхъ вообще было раз-



вѣто вычисленіе съ помощью приборовъ и пальцевъ. — Способъ этотъ, будучи довольно занимателенъ, даетъ и орудіе для усвоенія труднѣйшей части таблицы умноженія наизусть, а на практикѣ приводитъ къ блестящимъ результатамъ.

Въ этомъ случаѣ пальцы являются какъ бы замѣною написанной таблицы умноженія.

Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: мизинецъ каждой руки обозначаетъ 6, безымянный палецъ — 7, средній — 8, указательный — 9, большой — 10. Чтобы узнать, сколько будетъ, напр., 8×7 , надо (какъ показано на рисункѣ) сложить пальцы,

обозначающіе 6 и 7 одной руки, съ пальцами, обозначающими 6, 7, и 8 другой. Тогда каждый изъ сложенныхъ пальцевъ обозначаетъ десятковъ; въ данномъ случаѣ десятковъ будетъ 5; число же свободныхъ пальцевъ одной руки надо помножить на число свободныхъ пальцевъ другой,—въ данномъ случаѣ, стало-быть, 2 надо помножить на 3. Затѣмъ 5 дес. надо сложить съ полученнымъ произведеніемъ, и эта сумма (56) составитъ произведеніе 5×7 . Другой примѣръ: надо узнать, сколько будетъ 9×8 ; складываю пальцы, обозначающіе 6, 7, 8 и 9 на одной рукѣ, съ пальцами, обозначающими 6, 7 и 8, на другой; получимъ 7 десятковъ + 2×1 , т. е. 72, каковое число и есть произведеніе 9×8 .—Третій примѣръ: 6×6 ; складываю пальцы обѣихъ рукъ, обозначающіе 6, т. е. мизинцы, получаю: 2 десятка + 4×4 , т. е. 20 + 16, или 36, каковое число и есть произведеніе 6×6 .—Этотъ способъ опредѣленія произведеній однопальныхъ чиселъ, не мевъшихъ 6-ти, нѣрѣдко употребляется взрослыми людьми на югѣ Франціи, въ Италіи, въ Испаніи, въ Румыніи, а также у насъ, въ Бессарабіи, Малороссіи и др. мѣстахъ.—Основаніи этого способа, конечно, не надо объяснять учащемуся, такъ какъ они не довольно просты. Въ нихъ не представляется и надобности, при толькой постановкѣ этого правила.—По сдѣланнымъ пишушимъ эти строки и его друзьями наблюденіямъ, дѣти въ очені скоромъ времени перестаютъ пользоваться пальцами, хотя во время усвоенія этотъ пріемъ ихъ болѣе интересуетъ, чѣмъ написанная таблица

Пифагорова таблица умноженія

д) Къ числу наглядно-вычислительныхъ пособій принадлежатъ такъ наз. Пифагорова таблица умноженія. Но особенно полезна она не въ обычнот формѣ (см. слѣдующую страницу).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Въ этой формѣ надо, какъ извѣстно, пользоваться правиломъ: „чтобы найти 6×7 , веди пальцемъ по строкѣ, начинающейся числомъ 6, до тѣхъ поръ, пока дойдешь до столбца, начинающагося числомъ 7“, и т. д. Пифагорова таблица въ этой, обычной, формѣ, къ сожалѣнію, не особенно полезна. Громадны за-то услуги ея, если ее *развить* на глазахъ учащагося. Тогда она полезна не только для цѣлей обученія ариметикѣ, но и для усвоенія учениками вѣрнаго представленія о площади прямоугольнаго четырехугольника, а также и въ смыслѣ развивательномъ. — Предположимъ, что надо разработать таблицу умноженія 6-ти на разныя цѣлыя числа. Беру одну клѣтку и ставлю въ ней цифру 1, къ ней приставляю еще клѣтку, въ которую ставлю цифру 2, и т. д. вплоть до шестой клѣтки включительно (можно, впрочемъ, этихъ цифръ и не писать!):

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Присоединяю къ этому ряду клѣтокъ еще одинъ рядъ такихъ же клѣтокъ, и записываю въ послѣдней—число 12, т. е. число веѣхъ клѣтокъ въ обоихъ рядахъ. Такъ поступаю еще съ од-

1	2	3	4	5	6
					12

нимъ рядомъ клѣтокъ, и т. д.—Если и ученики это дѣлаютъ постепенно, т. е. такъ, чтобы клѣтки съ цифрами постепенно и притомъ, при полномъ уразумѣннн ими всего происходящаго, подъ ихъ руками, предъ ихъ глазами и при участнн ихъ во всей работѣ, появлялись на бумагѣ, и если это продолжать до любого предѣла, то въ концѣ-концовъ получатся части такъ называемой Пифагоровой таблицы. Напр., та часть таблицы, гдѣ изображено четырежды шесть, не только уму и воображенню учащагося будетъ

гораздо болѣе говорить, по и уму и воображенню учителя скажетъ гораздо болѣе, чѣмъ сколько та же таблица говорить въ готовомъ видѣ.

Упражненіе въ *собственноручномъ* изготовленіи учениками (на глазахъ учителя) подобной *развивающейся* таблицы не только сослужить великую службу усвоенію на-память таблицы умноженія, но и общему развитію учащихъся. Въ этомъ случаѣ заинтересованнымъ является и ихъ мышечное чувство, что для дѣла крайне важно.— Ученики поймутъ, что изобрѣтеніе этой таблицы не напрасно приписывается какому-то греческому мудрецу (по имени Пифагоръ), жившему въ VI в. до Р. X.—Чтобы ученики приобрѣли *изустный навыкъ* перемноженія двухъ однозначныхъ чиселъ, надо соблюдать слѣдующее правило. Ученики, нарисовавъ два ряда клѣтокъ, всякій разъ сосчитываютъ, сколько всего клѣтокъ въ данномъ прямоугольникѣ, и говорятъ вслухъ: „дважды шесть двѣнадцать“, а нарисовавъ три ряда, сосчитываютъ и говорятъ: „трижды-шесть восемнадцать“, и т. д. и т. д.

Рисованіе давно уже въ западно-европейской, и особенно въ американской школѣ заняло подобающее этому, въ высшей степени важному, предмету мѣсто. Русской школѣ до этого еще очень далеко, а потому пользоваться всякимъ случаемъ для упражненія дѣтей въ этомъ искусствѣ не только дозволительно, но даже прямо обязательно. Не надо при этомъ думать, что упражненія, подобныя выше намѣченнымъ, при обученіи ариметикѣ не уместны, такъ какъ они, будто бы, не имѣютъ ничего общаго съ арифметикою. Это — невѣрно.

г) Къ числу пособій, служащихъ для усвоенія учениками *способовъ* вычисленія, принадлежатъ табли-

Таблица для упражненій въ изустныхъ вычисленияхъ.

цы, на которыхъ напечатанъ рядъ цифръ и ихъ совокупностей. „Таблица Шохоръ-Троцкого для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленияхъ“ (изд. 3-е, доп.) содержитъ рядъ цифръ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	14	15	11	16	19			
10	20	21	24	27	26			
40	50	60	70	80	90			
36	49	64	81	91	93			
23	37	43	59	97	73			
75	68	66	62	69	38			
56	91	57	51	68	78			
111	117	119		121	144			

Выписывать каждый день, на время, рядъ цифръ на доскѣ, конечно, неудобно. Гораздо лучше повѣсить подобную таблицу на одну изъ свободныхъ стѣнъ классной комнаты, съ тѣмъ, чтобы въ таблицѣ можно было съ любымъ отдѣленіемъ класса обращаться во всякое время. „Таблица Шохоръ-Троцкого“ въ третьемъ изданіи заключена въ раму, нижняя и верхняя часть которой представляютъ собою аршинъ въ его соотношеніяхъ къ вершку, дюйму, сотой долѣ сажени и сантиметру; боковыя же части рамы представляютъ собою метръ въ его соотношеніяхъ къ сантиметру, аршину (22½ в.), футу (3 ф. 3 д. 3 линіи слишкомъ) и сотой долѣ сажени (48 сотокъ).

*Употребленіе
таблицы.*

„Таблица“ эта, при надлежащемъ ея употребленіи въ классѣ, приводитъ къ очень хорошимъ результатамъ. Среди уро-

ка, послѣ письменнаго вычисленія, можно заставить одно отдѣленіе встать и обратиться лицомъ къ „Таблицѣ“ и начать упражненія въ изустномъ вычисленіи: взявъ въ руки палочку, учитель (смотря по надобности) предупреждаетъ, что дѣти должны все показываемое либо прибавлять, либо все вычитать, либо первыя два числа сложить, слѣдующее — вычесть, четвертое—опять прибавить, пятое — опять вычесть, и т. д. Учитель можетъ, показывая число, сказать: „прибавить“, потомъ, показавъ слѣдующее число, сказать: „помножить“, затѣмъ—„вычесть“, и т. д. Классъ же, приученный къ соблюденію такта, по указанію и безмолвной командѣ учителя, можетъ хорошо, въ теченіе двухъ-трехъ минутъ и долѣе, поупражняться въ почти самостоятельномъ изустномъ вычисленіи. Оно является ступенью, какъ бы переходною, отъ изустныхъ вычисленій подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя къ изустнымъ, совершенно самостоятельнымъ, вычисленіямъ.—Благодаря этимъ класснымъ, съ помощью „Таблицы“, вычисленіямъ, при которыхъ ученики стоятъ, а учитель почти не говоритъ, классъ освѣжается, учитель же нѣсколько отдыхаетъ. (Въ особенности этотъ отдыхъ нуженъ тѣмъ учителямъ, которые, къ сожалѣнію, склонны къ слишкомъ громкому веденію урока, — отъ каковой склонности, какъ извѣстно, очень трудно, хотя и слѣдуетъ, освободиться).—Молчаливыя или самыя краткія указанія учителя относительно того, что ученики должны дѣлать, имѣютъ очень важное психологическое и воспитательное значеніе. При этомъ условіи, воспитываются и рѣчь, и воля, и вниманіе учениковъ, а зрительныя ихъ впечатлѣнія, при помощи весьма немногихъ слуховыхъ, являются источникомъ умственной и мускульно-рѣчевой работы.

Извѣстно, что дѣти, всегда вычисляющія по

полному требованію учителя, приучаются изустно вычислять только по этому полному требованію, какъ бы подаваясь внушенію и голосу учителя. Но они за-то оказываются слабыми въ *самостоятельныхъ* изустныхъ вычисленияхъ, переходъ къ которымъ и облегчается описанною выше „Таблицею“. Сверхъ того, „Таблица“ можетъ быть полезна при задаваніи ученикамъ самостоятельныхъ работъ въ тѣхъ школахъ, въ которыхъ не употребляются книжки, предназначенныя спеціально для учениковъ, а если и употребляются, то съ недостаточнымъ для даннаго отдѣленія количествомъ числовыхъ примѣровъ.

Модели единицъ мѣры. Наглядно-измѣрительными пособиями являются, при обученіи арифметикѣ, конечно, прежде всего модели (образцы) единицъ мѣры.

а) Для выясненія и укрѣпленія въ умѣ учащагося представленій и понятія о величинахъ, единицахъ мѣры и измѣреніи, прямо необходимо собраніе мѣръ длины и вѣса, хотя бы самыхъ важныхъ въ жизни: 1) аршинъ съ подраздѣленіями на вершки и футъ съ подраздѣленіями на дюймы, 2) фунтовая гиря въ обычной въ торговлѣ формѣ, допускающей взвѣшивание и частей фунта, или же фунтовая и золотниковая гири, 3) модель четверика.—Производство раздробленія и превращенія именованныхъ чиселъ и производство четырехъ дѣйствій надъ этими числами лишены всякой основы, если ученики только на-память знаютъ единичныя отношенія мѣръ и не имѣютъ наглядныхъ представленій о томъ, что они на-память знаютъ. Крайне неестественною надо считать такую постановку упомянутаго выше „знанія“, при которой ученикъ не сознаетъ—что больше: аршинъ или футъ, при которой ученикъ не представляетъ себѣ, что аршинъ содержитъ 28 дюймовъ, а

футъ—только 12, что футъ, поэтому, меньше половины аршина на 2 дюйма, и т. п. Въ этомъ смыслѣ крайне полезно измѣрить съ дѣтьми главнѣйшіе размѣры и величины, встрѣчающіеся въ обыденной школьной жизни: длину и ширину листа бумаги, стола, доски, длину цѣлаго карапаша, вѣсъ нѣкоторыхъ предметовъ, ростъ нѣкот. учениковъ и учителя, и т. п. Употребленіе моделей понятно само собою.—Что касается понятія объ измѣреніи, то оно не представляетъ затрудненій, если учитель не забудетъ начала наглядности (по возможности осязательной) ради кажущагося ускоренія дѣла. — Только въ крайнемъ случаѣ можно удовлетвориться изображеніемъ единицъ мѣры на доскѣ, что, впрочемъ, для единицъ вѣса, конечно, не цѣлесообразно ни въ какомъ случаѣ.—Весьма важно, чтобы въ школѣ были хоть какіе-нибудь вѣсы и разновѣсы—въ крайнемъ случаѣ хотя бы даже только пружинные, стоимость которыхъ вмѣстѣ съ разновѣсомъ въ настоящее время очень невелика (около двухъ рублей).—Къ числу моделей можно отнести циферблатъ съ подвижными на немъ стрѣлками. Объ этомъ пособіи рѣчь впереди.

б) Существуютъ въ продажѣ та- *Таблицы мѣръ.*
 блицы, на которыхъ изображены главнѣйшія единицы мѣръ. Такія таблицы содержатъ изображеніе многихъ мѣръ и сначала слишкомъ развлекаютъ вниманіе учениковъ. Полезно, поэтому, переносить занимающія въ данное время учениковъ мѣры съ таблицы также на классную доску.—Пишущимъ эти строки составлена „Наглядная таблица соотношеній нѣк. мѣръ протяженія“. Ея особенность состоитъ въ томъ, что каждое изъ соотношеній (1 метръ = $22\frac{1}{2}$ вершка = 39 дюйм.; 1 кв. дюймъ = 6,451 кв. см., 1 куб. верш. = 5,4 кубич. дюйма., 1 куб. дюймъ = 16,38 куб. см. и т. п.) *видно* изъ чертежа.

Мѣры длины в) На классную доску или, вѣрнѣе — на края ея, должны быть перенесены и отмѣчены надрѣзомъ нѣкоторые мѣры длины: аршинъ (съ одной стороны доски), футъ (съ другой стороны), а также метръ и т. п., дабы эти мѣры длины были всегда у учениковъ предъ глазами и подъ руками. *Это необходимо.*

Геометрическія пособія. Наглядно-геометрическія средства для усвоенія дѣтьми вѣрныхъ геометрическихъ представленій сводятся преимущественно къ чертежамъ, выполняемымъ учениками и учителемъ на доскѣ, и учениками въ своихъ тетрадяхъ, притомъ безъ помощи линейки и циркуля. — При разумной постановкѣ обученія, ученики должны научиться выполнять простѣйшіе чертежи, какъ отъ руки, такъ и съ помощью линейки и циркуля: они должны правильно проводить прямыя линіи, строить прямыя углы, квадраты, и т. д. Для выработки представленій объ объемѣ прямоугольнаго параллелепипеда и куба, должно прибѣгать къ имѣющимся подъ руками кубикамъ. Вообще желательно, чтобы ученики *зрѣлиемъ и съ помощью работы рукъ* составляли себѣ вѣрныя геометрическія представленія. — Къ числу наглядно-геометрическихъ пособій принадлежитъ, конечно, также и развивающаяся Пифагорова таблица умноженія.

Дробные счеты и представленія о дроби. Иногда въ школахъ встрѣчаются такъ называемые „дробные“ счеты. Главная составная ихъ часть — трубки, называемыя, вмѣсто косточекъ, на проволоки шведскихъ счетовъ и долженствующія сдѣлать наглядными половину, четверть и др. доли цѣлаго, а также дроби, числители которыхъ больше единицы: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ и т. д. Къ сожалѣнію, пригодность этихъ счетовъ для намѣченной цѣли весьма мала. Дѣло въ томъ, что: 1) всѣ

составныя части этихъ счетовъ представляютъ собою не что иное, какъ только трубки извѣстной длины, и каждая изъ нихъ — только трубочка, притомъ, безотносительно говоря, цѣлая; 2) это — пособіе чисто-зрительное, со слишкомъ малою возможностью привлечь мускульное чувство учениковъ къ образованію представленія о дроби. (Гораздо цѣлесообразнѣе при образованіи представленія о доляхъ и дробяхъ брать величины: длину аршина, фута, вершка и дѣлить эти величины на двѣ или болѣе одинаковыхъ частей: половину аршина никому не придетъ въ голову считать тоже аршиномъ).— Столь же мало, какъ дробные счета, даютъ предметы, которыхъ часть составляетъ того же имени предметъ: палочка и половина его (тоже палочка) шнурокъ и половина шнурка, карандашъ и половина карандаша (тоже карандашъ), и т. д. За-то яблоко и поль-яблока, картофелина и половина картофелины, листъ бумаги и поль-листа, полный кругъ и поль-круга и т. д. — наглядныя пособія, на первыхъ порахъ наиболѣе подходящія и, во всякомъ случаѣ болѣе цѣлесообразныя во всѣхъ отношеніяхъ, чѣмъ трубочки такъ наз. „дробныхъ“ счетовъ.

Когда первыя трудности образованія представленія о долѣ и о дроби учениками преодолены, для дальнѣйшей работы учениковъ надъ дробями наилучшимъ пособіемъ служить прямая линія. Надъ прямою линіею каждый ученикъ можетъ работать не только зрѣніемъ, но и дѣятельнымъ мускульнымъ чувствомъ, участвующимъ и при выработкѣ глазомера, и при черченіи, и при нанесеніи точекъ дѣленія, и при составленіи дроби изъ долей.

Когда ариметическія представленія, почерпнутыя изъ работы надъ наглядными пособіями, накопились въ достаточномъ количествѣ и при-

Такъ называемая внутренняя наглядность.

учились къ надлежащему самоассоцірованію, воспроизводящая и творческая сила воображенія дѣтей въ состояніи выполнить ту работу, которая ранѣе выполнялась непосредственнымъ усмотрѣніемъ. Ранѣе ученикъ долженъ былъ *видѣть* на столѣ кубики, *осязать* ихъ, *брать* въ руки, *перекладывать* ихъ съ мѣста на мѣсто. Но наступаетъ моментъ, когда онъ можетъ *представить* себѣ, что на столѣ стоятъ кубики, что онъ ихъ видитъ, что онъ ихъ осязаетъ, что онъ ихъ беретъ въ руки, что онъ ихъ перекладываетъ съ мѣста на мѣсто. „Внутренней наглядности“ помогаютъ цѣлесообразныя, сознательныя и иногда бессознательныя, движенія, дѣлаемая ученикомъ въ то время, когда онъ воспроизводитъ мысленно ту или иную, уже ранѣе выполнявшуюся, работу своихъ органовъ чувствъ.

Общіе выводы Общие выводы изъ всего предыдущаго сводятся къ слѣдующему:

а) Каждому наглядному пособию *свое мѣсто* въ курсѣ, и каждой ступени обученія ариметикѣ соответствуютъ *свои наглядныя пособия*.

б) Цѣль большинства наглядныхъ пособій — не облегченіе *вычислений*, а привитіе уму и соображенію учениковъ *надлежащихъ арифметическихъ представленій и навыковъ*.

в) Употребленіе того или иного нагляднаго пособия обусловливается психологическими и воспитательными соображеніями.

г) Значеніе мускульнаго чувства при обученіи арифметикѣ *громадно*.

д) Уча дѣтей арифметикѣ, слѣдуетъ прежде всего учить ихъ сознательному и самостоятельному *употребленію наглядныхъ пособій*.

ГЛАВА II.

Наглядныя пособія въ ариѳметикѣ первой сотни.

Къ ариѳметикѣ первой сотни относятся: а) счетъ, б) сложеніе двухъ однозначныхъ чиселъ, в) сложеніе двухъ двузначныхъ чиселъ, сумма которыхъ не болѣе ста, г) вычитаніе однозначнаго числа изъ однозначнаго или двузначнаго и вычитаніе двузначнаго числа изъ двузначнаго же и изъ ста, д) умноженіе однозначнаго числа на однозначное же, умноженіе двузначнаго числа на однозначное въ случаѣ, когда произведеніе не болѣе ста, е) дѣленіе однозначнаго числа на однозначное же, дѣленіе двузначнаго числа на однозначное, въ случаѣ если частное равно однозначному числу, ж) дѣленіе ста на 10. (Дѣленіе же двузначнаго числа на однозначное при двузначномъ частномъ, вообще, требуетъ нѣкотораго такого приѣма, который сближаетъ это дѣленіе съ дѣленіемъ многозначнаго числа на однозначное, и ознакомленіе съ этимъ приѣмомъ можно отнести къ ариѳметикѣ многозначныхъ чиселъ).—Къ ариѳметикѣ первой сотни можно приурочить и ознакомленіе дѣтей съ представленіями: о долѣ, о части, о дроби, о нѣкоторыхъ единицахъ мѣры, о прибыли, убыткѣ и т. п., а также объ условныхъ значеніяхъ выраженій: „больше на столько-то“

Содержаніе ариѳметики первой сотни.

„меньше во столько-то“, „увеличить на столько-то“, „уменьшить на столько-то“, „увеличить во столько-то разъ“, „уменьшить во столько-то разъ“ и съ значеніемъ вопросовъ: „на сколько больше“, „на сколько меньше“, „во сколько разъ больше“ и „во сколько разъ меньше?“ Чтобы не пропустить какого-либо случая примѣненія наглядныхъ пособій при обученіи ариѳметикѣ первой сотни, надо держаться какого-либо опредѣленнаго распорядка курса, и мы изберемъ тотъ, который положенъ въ основу тѣхъ книгъ для учителя и пособій для учениковъ, которыя составлены авторомъ настоящихъ строкъ *). Само собою разумѣется, что это не помѣшаетъ учителю, пользующемуся другими пособиями, прослѣдить всю ту послѣдовательность, въ которой наглядныя пособия появляются въ курсѣ ариѳметики первой сотни.—*Всѣ вычисленія этого курса должны быть изустными.* Записки не обращаютъ ихъ въ письменныя и нужны только для упражненій.

*Порядокъ
работы при об-
ученіи ариѳме-
тики.*

Если только учитель придаетъ нагляднымъ пособиямъ при обученіи ариѳметикѣ надлежащее значеніе и не держится устарѣлыхъ нынѣ методъ обученія (напр., методы изученія чиселъ по Грубе или методы вызубриванія учениками наизусть того, что подлежитъ усвоенію), то порядокъ работы долженъ быть, на всякой ступени занимающаго насъ курса (да и на всякой ступени курса дальнѣйшаго), слѣдующій: сначала должно предложить: 1) пѣлесообразныя задачи *на наглядномъ пособіи*, наиботѣе подходящемъ для данной ступени, и работу для рукъ, глазъ и рѣчи учениковъ надъ этими задачами; 2) затѣмъ подобныя же задачи въ обыденной жизни и уже

*) Заглавія этихъ книгъ и пособій приведены на обложкѣ настоящей брошюры.

работу *воображенія* учениковъ надъ этими задачами; 3) далѣе—отвлеченныя задачи (если въ нихъ есть надобность) и работу для *сужденія* учениковъ надъ этими задачами, но и здѣсь не исключается возможность возвращаться, въ случаѣ надобности, къ нагляднымъ пособіямъ; 4) потомъ идетъ логическій выводъ изъ всей работы (если таковой есть) со стороны учениковъ съ поправками учениковъ и учителя и выводъ учителя, гдѣ примѣненіе нагляднаго пособія тоже можетъ понадобиться; 5) должно закрѣпить выводъ въ представленіи и разумѣніи учениковъ и предложить ученикамъ *мыслительныя* и *словесныя* упражненія въ этомъ направленіи, что можетъ иногда тоже потребовать помощи наглядныхъ пособій и часто сводится къ придумыванію *самими учениками* задачъ и примѣровъ относительно наглядныхъ пособій.

Только на высшихъ ступеняхъ обученія можно иногда опускать задачи на наглядныхъ пособіяхъ, и то лишь въ случаѣ, если въ помощи этихъ послѣднихъ нѣтъ прямой надобности.—Зато на высшихъ ступеняхъ надо неустанно пользоваться внутреннею наглядностью, опирающейся на чувственную. Нѣтъ такого случая въ дѣлѣ обученія чему бы то ни было, когда вниманіе учителя къ наглядности было бы вредно для учениковъ (ср. стр. 15, 16 и 42). Даже при образованіи самыхъ отвлеченныхъ понятій помощь наглядности, или помощь творческой фантазіи человѣка, не можетъ оказать ему вреда. Даже для развитія у человѣка привычки и навыка въ отвлеченномъ мышленіи, эта помощь играетъ весьма значительную роль, помогая этому мышленію и дѣлая его только производителнѣе и согласнѣе съ истиной. Поэтому особенно важно, чтобы ученики *сами придумывали* такія задачи на наглядныхъ

пособіяхъ, которыя совершенно подобны предложеннымъ въ классѣ учителемъ и рѣшали бы эти задачи общими силами. Пока ученики этого умѣнія не достигли, результаты работы не могутъ считаться вполне удовлетворительными.

Счетъ до 10-ти и до 20-ти. Прежде чѣмъ учить какому-бы то ни было арифметическому вычисленію, надо дѣтей научить сознательному и вѣрному счету, сначала до 10-ти, а потомъ— до 20-ти. Ибо безъ счета нѣтъ числа, а безъ числа нѣтъ вычисленія.—Часто дѣти даже не понимаютъ *цѣли* счета. Вы спрашиваете, сколько у васъ кусочковъ бумаги въ рукѣ, сколько ключей въ карманѣ, и ребенокъ вамъ смѣло отвѣчаетъ: „пять“, „семь“ и т. п. Онъ иногда даже не умѣетъ сказать того, что нужно въ этомъ случаѣ, а именно: „не знаю!“ Опъ къ вопросу о числѣ *равнодушенъ*. Ему тогда надо считать.

Цѣль счета. Для выясненія *цѣли* счета, надо предлагать вопросы относительно предметовъ, хотя и видимыхъ дѣтьми, но ими еще не сосчитанныхъ. Для этого дѣла могутъ служить *всякіе* предметы: карандаши, листочки бумаги, книжки, карточки разнѣзной азбуки. Здѣсь же вы убѣдитесь, умѣютъ ли дѣти считать сознательно и вѣрно.—Случается, что ребенокъ отлично знаетъ слова: одинъ, два, три и т. д., т. е. умѣетъ *произносить* ихъ въ надлежащемъ порядкѣ и даже понимаетъ *цѣль* счета, но не въ состояніи дѣйствительно сосчитать соответствующаго его словеснымъ знаніямъ *сознательный* числа предметовъ, коль скоро это *считъ.* число превышаетъ нѣкоторый предѣлъ. Этотъ предѣлъ часто значительно ниже предѣла извѣстныхъ ему числительныхъ *именъ*. Напр., вы даете ребенку болѣе или менѣе значительное количество кубиковъ и требуете отъ него, чтобы онъ сосчиталъ, сколько ихъ. Сна-

чала дѣло идетъ довольно складно: произнося то или другое числительное имя, ученикъ отдѣляетъ (*необходимая работа мускульнаго чувства!*) одинъ изъ сосчитываемыхъ предметовъ отъ остальныхъ, еще не сосчитанныхъ. Но вскорѣ онъ начинаетъ отбирать либо больше, либо меньше, предметовъ, чѣмъ слѣдуетъ, сбивается въ счетѣ и, конечно, такимъ образомъ дѣлаетъ ошибку противъ самой цѣли, противъ сущности этого дѣла. Это значить, что онъ считать (сознательно считать) не умѣетъ. Если же онъ ошибокъ не дѣлаетъ, то считать умѣетъ.—Поэтому учитель долженъ убѣдиться не только въ знакомствѣ дѣтей со *словами*, сопровождающими счетъ, и порядкомъ этихъ словъ, но также въ дѣйствительномъ *умѣніи сосчитать то или другое количество предметовъ*.—Неудобны въ началѣ (для провѣрки умѣнія считать) пальцы собственныхъ рукъ ребенка, такъ какъ можетъ случиться, что ребенокъ не въ состояніи сосчитать пальцевъ правой своей руки указательнымъ пальцемъ лѣвой, хотя онъ и знаетъ, что на правой рукѣ пять пальцевъ. Этому счету тоже надо научить: это—необходимая работа мускульнаго чувства, которая въ свое время тоже принесетъ свои плоды.

Русскія имена числительныя *Имена числительныя перваго десятка другъ на друга не похожи. (Только „девять“ и „десять“ сходны, но это сходство, благодаря особенному мѣсту десяти среди другихъ чиселъ перваго десятка, не мѣшаетъ усвоенію дѣтьми этихъ именъ).* Затруднительны для произношенія иногда только слово „четыре“, у шепелявящихъ или картавящихъ дѣтей. — Усваивать тѣ или другія числительныя имена не только второго, но и перваго десятка, дѣти должны, *не отрываясь отъ наглядныхъ пособій*.—Что касается

числительныхъ именъ второго десятка, то, за исключеніемъ слова „двадцать“, всѣ они по составу своему (этимологически) въ русскомъ языкѣ (да и въ другихъ славянскихъ языкахъ) однородны. Во всѣхъ этихъ числительныхъ именахъ важную составную часть представляютъ собою предлогъ „на“ и измѣненное слово „десять“, замѣняемое звукомъ „дцать“.—Предлогъ „на“ обязываетъ учителя соответственно смыслу предлога воспользоваться наглядными пособиями. Положивъ десять карандашей такъ:

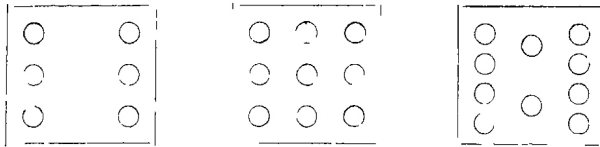


надобно на нихъ (перпендикулярно къ нимъ) положить еще *три* карандаша и спросить, что сдѣлано. Далѣе надо заставить дѣтей сдѣлать то же самое и обратить ихъ вниманіе на то, что положены *три на десять* и что въ такихъ случаяхъ говорятъ „три-на-дцать“. Учителю не надо бояться этого кажущагося уклоненія въ область словообразованія: естественное языковое чутье малолѣтнихъ гораздо больше, чѣмъ это кажется непосвященному. (Надо сказать, что къ этому чувству учениковъ, къ сожалѣнію, не довольно часто обращаются учителя, родители и воспитатели). Только слово „двѣнадцать“ требуетъ вниманія также къ своей части „двѣ“ (а не два), слово „четырнадцать“—къ сокращенной формѣ „четыре“ вм. „четыре“; въ словахъ же „пятнадцать“, „шестнадцать“ и т. д. замѣчательно твердое произношеніе буквы „т“ предъ „н“

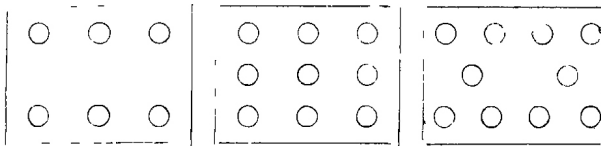
Произношеніе числительныхъ или ихъ. Здѣсь также приходится бороться съ областнымъ или некаждаемымъ дѣтскимъ произношеніемъ: „шншншнцать“, „шаш-

нацать“, и т. д. — Въ именахъ числительныхъ перваго десятка приходится обращать вниманіе на часто искажаемая дѣтми слова и на областные способы произношенія пѣк. словъ: четыре („чатыри“, „цетыре“ и т. п.), пять („пять“), восемь, девять и десять („восимь“, „девить“, „десить“, „дзевять“, „дзесяць“ и т. п.).

Въ качествѣ самостоятельныхъ *Рисованіе на упражненій на той же ступени этой ступени.* крайне полезно рисованіе учениками квадратиковъ и числовыхъ фигуръ. Сначала можно разрѣшить ученикамъ изготовленіе этихъ рисунковъ съ помощью розданныхъ имъ квадратиковъ изъ бумаги или картона, или съ помощью кубиковъ. Еще лучше, если дѣти *на-глазъ* рисуютъ нарисованный учителемъ на доскѣ квадратъ или приколотый къ доскѣ кусокъ бумаги квадратной формы. (Эти упражненія въ рисованіи квадрата дадутъ ученикамъ и возможность утвердиться въ ясныхъ представленіяхъ о верхѣ, низѣ, о правомъ, лѣвомъ, о четырехъ „уголкахъ“, о чертахъ верхней, нижней, правой боковой, лѣвой боковой, и т. п.) Когда дѣти достаточно поработали зрѣніемъ и мускульнымъ чувствомъ въ этомъ направленіи, ихъ можно на- *Числовыя фигурь.* учить изображенію числовыхъ фигуръ, — не больше десяти значковъ въ каждой. Кружки легче косыхъ крестиковъ, косые крестики лучше прямыхъ (въ прямыхъ можетъ произойти сліяніе вертикальныхъ частей въ одну прямую, а горизонтальныхъ — въ другую). — Дѣти должны рисовать числовыя фигуры по требованію учителя и по собственному желанію. Кружки и крестики можно замѣнить также точками, если рисованіе крестиковъ и даже кружечковъ для дѣтей сначала слишкомъ трудно. — Если рисованіе числовыхъ фигуръ



для дѣтей затруднительно потому, что они не умѣютъ помѣщать такъ много значковъ въ квадраты, то имъ можно разрѣшить выполнение продолговатыхъ прямоугольниковъ:



Палочкирядомъ. Полезно на этой ступени поупражнять дѣтей также въ рисованіи ими нѣсколькихъ палочекъ рядомъ:

| || || | || | и т. д. до десяти палочекъ включительно.

Полезна этия упражненія въ рисованіи. Всѣ эти упражненія принесутъ въ послѣдствіи большую пользу дѣтямъ, насыщая ихъ сознание цѣлымъ рядомъ числовыхъ представленій, и время, на нихъ затраченное, окупится въ послѣдствіи сторицей.— Въ начальной школѣ съ тремя отдѣленіями упражненія эти могутъ послужить къ тому, что „звучовики“, съ первыхъ же дней своего пребыванія въ школѣ, начнутъ заниматься такимъ дѣломъ, которое имѣетъ отношеніе не только къ надлежащему пріученію ихъ къ роли учениковъ, но и къ ариѳметикѣ, какъ къ учебному предмету.

Значеніе упражненій въ рисованіи

Учителю надо хоть разъ въ жизни стать на этотъ путь упражненія зрѣнія и мускульнаго чувства учениковъ, для того, чтобы въ послѣдствіи ни-

когда не оставлять этого пути. Столько пользы, радостей и удовольствія извлекають ученики изъ этихъ, казалось бы, столь скромныхъ, работъ. Бояться же того, что ученики „потеряють“ при этомъ много времени, отнюдь не слѣдуетъ: не теряють они много времени, а выиграють много времени, обыкновенно ими почти безо всякой пользы теряемаго на такъ называемыхъ „первыхъ урокахъ“ ариѳметики. Повысится при этомъ и *воспитывающая* сторона обученія.

Кромѣ предметовъ, ученики должны научиться считать дѣйствія: удары карандашомъ, произ- Счетъ дѣйствій и единицъ мѣры олинъ. водимые учителемъ болѣе или менѣе ритмически, шаги учителя и учениковъ, бой часовъ и тиканіе маятника, звуки, произносимые учителемъ и учениками, взмахи рукой, вставаніе съ мѣста при этомъ вообще полезномъ гимнастическомъ упражненіи.—Полезно научить счету вершковъ въ аршинѣ. Но при этомъ считающій ученикъ долженъ вести указательнымъ пальцемъ, а еще лучше—заостренной палочкой, карандашомъ или ногтемъ, поставленнымъ перпендикулярно къ аршину, отъ черточки до черточки, отдѣляющихъ начало вершка отъ его конца. То же самое справедливо для дюймовъ въ футѣ. Ученикъ долженъ умѣть отмѣривать нѣсколько вершковъ или дюймовъ, два аршина, два, три или четыре фута и т. д.—Здѣсь же можно положить начало упражненіямъ въ измѣреніи размѣровъ нѣкоторыхъ школьныхъ принадлежностей: карандашей, длины тетради, ширины стола и т. п. (см. стр. 39). Даже дѣленіе, на-глазъ, данной прямой на двѣ одинаковыя и неодинаковыя части, на три одинаковыя и неодинаковыя части и т. п., не являются на этой ступени преждевременнымъ упражненіемъ. Все дѣло въ томъ, *какъ* вести подобныя упражненія и *къ чему* съ ихъ помощью стремить-

Пальцы рук. ся.—Въ свое время надо пробовать приучать дѣтей къ счету пальцевъ собственныхъ рукъ. Въ случаѣ неуспѣха, можно оставлять эти упражненія на нѣкоторое время. Но они очень нужны для будущаго и для развитія въ дѣтяхъ болѣе тонкаго мускульнаго чувства.—При этомъ можетъ оказаться, что у одного ребенка „счетчикомъ“ является вся свободная рука, у другого—два пальца ея, у третьяго—одинъ указательный или одинъ большой палецъ руки. Одинъ держитъ одну руку отдѣльно отъ другой (такой ребенокъ считаетъ указательнымъ пальцемъ свободной руки), другой кладетъ, считая пальцы правой руки, правую руку на лѣвую, какъ это дѣлають, подходя „подъ благословеніе“, и считаетъ пальцы большимъ пальцемъ лѣвой руки. Одинъ загибаетъ отсчитываемые пальцы, другой ихъ перебираетъ и къ нимъ только прикасается пальцемъ-счетчикомъ.—Надо ученикамъ въ этомъ дѣлѣ, какъ и вообще, давать побольше разумной свободы, и тогда каждый найдетъ болѣе для него удобный пріемъ и надъ этимъ поработаетъ.

Классные счеты. Къ счету косточекъ на классныхъ счетахъ, особенно — въ ихъ „шведской“ формѣ (т. е. при горизонтально расположенныхъ проволочкахъ), надо также привлекать всѣхъ учениковъ класса. При этомъ ученикъ не долженъ заслонять счетовъ, а долженъ стоять сбоку или такъ, чтобы счеты находились между нимъ и классомъ.—Особенно важно упражненіе на счетахъ для нагляднаго выдѣленія въ сознаніи учениковъ представленія о *десяткахъ* и для приученія къ ритмическому счету, связанному со стукомъ косточекъ и съ ритмическимъ движеніемъ считающей руки ученика.

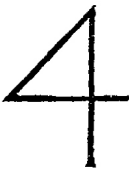
Письмо арабскихъ цифръ. Когда дѣти научились сознательно считать, то рядомъ со словеснымъ (звуковымъ), зрительнымъ и му-

скульно-двигательнымъ усвоеніемъ счета можно поставить *условное*, т. е. цифровое, обозначеніе первыхъ девяти чиселъ перваго десятка.—Говоря иначе: дѣти умѣютъ *считать* предметы и дѣйствія, умѣютъ *изображать* известное количество значковъ и *рисовать* известное число квадратиковъ, и ихъ остается еще научить *обозначать* (съ помощью *условныхъ*, болѣе или менѣе произвольно выбранныхъ, значковъ) всѣ такъ называемыя „арабскія цифры“, за исключеніемъ нуля. Боязнь, что дѣти будутъ, даже при надлежащей постановкѣ дѣла, смѣшивать цифры съ числами, не основательна.— Съ помощью „Таблицы для изустныхъ вычисленій“ можно опредѣлить, знакомы ли дѣти съ какими-либо цифрами или не знакомы. Во всякомъ случаѣ ихъ надо научить письму цифръ арабскихъ, а не римскихъ, такъ какъ, во-первыхъ, арабскія цифры нужнѣе римскихъ и, во-вторыхъ, въ арабскихъ цифрахъ болѣе проявляется *условность* ихъ. Дѣйствительно: римскія цифры упо- *Римскія цифры* употребляются только на циферблатахъ часовъ, при обозначеніи столѣтій и при именахъ царей, папъ и королей, носящихъ общее имя (Александръ III, Левъ XIII или Людовикъ XIV). Съ другой стороны, римскія цифры I, II, III представляютъ собою рядъ палочекъ и не достаточно условны. Сверхъ того, въ то время какъ при обозначеніи чиселъ арабскими цифрами господствуютъ слатательное (аддитивное) начало и начато умноженія (мультипликативное), въ римской нумераціи начало умноженія совсѣмъ не находитъ примѣненія (тридцать обозначается не такъ III, а такъ: XXX). Здѣсь получаетъ примѣненіе чуждый арабской нумераціи вычитательный (субтрактивный) принципъ при обозначеніи девяти (IX), сорока (XL) и т. п., гдѣ число, обозначающее равнѣе другого, вычитается изъ этого по-

слѣдпяго. Всѣ эти особенности римской нумераціи дѣлають ее мало-пригодною именно для первыхъ ступеней обученія.

Порядокъ цифръ. Начинать обученіе письму цифръ можно не въ ихъ числовомъ порядкѣ, а въ порядкѣ, болѣе удобномъ также для цѣлей *письма*. Если считать, что прямыя линіи дѣтямъ легче даются, чѣмъ полуовалы, то лучше всего начинать съ цифръ: 4, 7 и 1, но не прямо съ цифры 1, потому что цифра 1 не достаточно условна, а, наоборотъ, вполне изобразительна. Если же считать, что полуовалы даются дѣтямъ легче, то можно принять слѣдующій порядокъ: 6, 3, 9, 5, 8, 2. Если, наконецъ, считать, что отсутствіе условности въ цифрѣ 1 не столь вредно, то можно начинать съ цифры 1 и даже склониться къ тому, чтобы дѣти учились сначала письму римскихъ цифръ.

Упраженія. Какъ бы то ни было, каждой арабской цифрѣ должны быть посвящены упражненія, спеціально для нея приспособленныя. Напр., обозначенію четырехъ единицъ арабскою цифрою могутъ претпествовать упражненія въ родѣ слѣдующихъ: „Сколько карандашей у меня въ рукѣ? (надо, чтобы ихъ было четыре).—Сколько книжекъ на столѣ? (тоже). И т. п. — Сколько угловъ въ комнатѣ?—Сколько ногъ у лошади?—Сколько ногъ у собаки?—Сколько колесъ у телеги?—Сколько пожекъ у стола?—Сколько угловъ у классной доски?— Кто знаетъ, — какъ написать четыре?.. — Четыре пишутъ такъ: косую черту сверху внизъ *нальво*, потомъ—прямую черту слѣва *направо*, наконецъ — сверху прямо *внизъ*“.—



Эта форма цифры согласна съ требованіями такъ называемаго прямого письма и старонагліійскаго образца. Цифры старо-

*Начертаніа
цифръ.*

англійскаго образца могутъ имѣть и такія начертанія:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (разнаго роста)

или

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (одного роста).

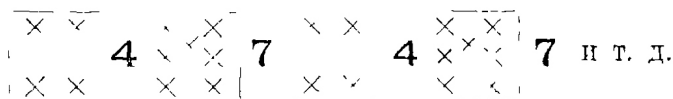
Цифры прямого письма и старо-англійскаго образца имѣютъ слѣдующую форму:

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Преимущества старо-англійскаго образца сводятся къ слѣдующему: а) къ отсутствію излишнихъ украшеній и прилатковъ (петли при письмѣ четверки, перекладины при письмѣ семерки); б) къ невозможности смѣненія одной цифры съ другою (девятки съ четверкой, четверки съ семеркой, нуля съ шестеркой); в) къ легкости этого шрифта для дѣтей, и г) къ ихъ четкости.

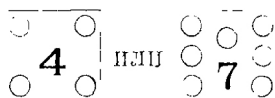
Самостоятельныя упражненія состоятъ въ начертаніи усваиваемыхъ съ соответствующими послѣднимъ числовыми фигурами:

Самостоятельныя упражненія учениковъ.


 4 7 4 7 и т. д.

Для этой цѣли можно, если, къ тому же, желательно соблюсти экономію на бумагѣ, пользоваться уже нарисованными раѣе числовыми фигурами. Если промежутки между квадратиками

недостаточно велики, то дѣти могутъ писать со-
отвѣтствующія цифры внутрь квадратиковъ,
напр., такъ:



*Прибавленіе и
отниманіе одной
единицы съ первой
десятикой.*

Секретъ прибавленія одной еди-
ницы къ какому угодно числу за-
ключается, какъ извѣстно, въ томъ,
что дѣлающій это вычисленіе долженъ *произне-*
сти имя числительное, слѣдующее за тѣмъ чи-
слительнымъ именемъ, которое обозначаетъ пер-
вое слагаемое. Такъ, если къ семи надо при-
бавить одинъ, то надо только сказать слово „во-
семь“, слѣдующее за словомъ „семь“, и резуль-
татъ прибавленія назвать, т. е. изустно найдены.
Сообразно съ симъ, всякое наглядное пособіе
(спички, палочки, карандаши, бумажки, косточки
счетовъ, кубики, значки, нарисованные учите-
лемъ и учениками, и главное — пальцы рукъ)
должно вести только къ открытію учениками
этого секрета. — Равнымъ образомъ секретъ вы-
читанія одной единицы изъ какого угодно числа
сводится къ тому, что дѣлающій это вычисленіе
долженъ *назвать* число, непосредственно пред-
шествующее уменьшаемому. Здѣсь равнымъ обра-
зомъ необходимо обращаться къ нагляднымъ по-
собіямъ того же рода; не столь удобны, какъ при
сложеніи, только пальцы рукъ. — Для того, чтобы
у учениковъ былъ въ распоряженіи также какой-
нибудь матеріалъ для самостоятельныхъ упра-
вленій, надо ограничиться сначала случаями,
когда слагаемое, къ которому прибавляется еди-
ница, не больше восьми, а уменьшаемое, изъ
котораго вычитается единица, не больше девяти.
Эти ограниченія необходимы до тѣхъ поръ, пока

ученики не научатся обозначать, съ помощью арабскихъ цифръ, чиселъ большихъ десяти.

Знаки сложенія и вычитанія, не *Знаки сложенія, вычитанія и равенства.* должны, особенно на первыхъ порахъ, называться плюсомъ и минусомъ, такъ какъ послѣднія два слова ничего не говорятъ сознанію учениковъ. Запись $2 + 1 = 3$ ученики могутъ читать „два да еще одинъ будетъ три“ и „два да (или прибавить) одинъ будетъ три“. Эти способы чтенія лучше слѣдующаго: „къ двумъ прибавить одинъ“, такъ какъ въ этомъ послѣднемъ есть неумѣстная, на этой ступени, трудность склоненія именъ числительныхъ и предлогъ „къ“, который въ записи „ $2 + 1 = 3$ “ отсутствуетъ. Предлогъ же „къ“ вреденъ потому, что арифметическія записи должны (особенно въ началѣ) по возможности соответствовать словесному переводу записи. Въ этомъ смыслѣ полезно, если ученики, рисуя вертикальную часть знака плюса, говорятъ „да“, а рисуя горизонтальную его часть, говорятъ „еще“.—Нѣчто подобное полезно принимать во вниманіе и при выполненіи записи $4 - 1 = 3$. Читать эту запись такъ: „четыре безъ одного будетъ три“, конечно, можно; но при этомъ есть трудность сочетанія предлога „безъ“ съ родительнымъ падежомъ. А однимъ изъ основныхъ началъ разумнаго обученія должно служить правило, которое Коменскимъ выражено такъ: „по одной трудности за-разъ!“ Поэтому лучше читать запись „ $4 - 1 = 3$ “ слѣдующимъ образомъ: „четыре, долой (или отнять) одинъ, будетъ три“. Здѣсь нѣтъ словъ „долой“ и „отнять“ слѣдуетъ внимательный падежъ, сходный съ именительнымъ.—Для того же, чтобы подготовить учениковъ къ знаку для обозначенія того, что выражается словомъ „долой“, можно пользоваться кубиками, лежащими на столѣ, и жестомъ руки, отодвигающимъ или смахивающимъ одинъ кубикъ на-полъ, или жестомъ руки

стремительно отодвигающимъ вправо косточку съ проволоки шведскихъ счетовъ, и т. п. Тогда знакъ минусъ, стремительно изображаемый на доскѣ или въ тетради, напомнимъ ученикамъ дѣйствию отдѣленія, отодвиганія, т. е. отбавленія или вычитанія одной единицы.—Подобными ассоціаціями чувственно соединенныхъ представленій пренебрегать, конечно, не слѣдуетъ. Поэтому, въ виду важности такихъ ассоціацій, пальцы рукъ для вычитанія одной единицы являются, при ознакомленіи со знакомъ минусъ, пособіемъ, не достаточно цѣлесообразнымъ.

Десятокъ какъ единица счета. Съ десяткомъ, какъ единицею счета, дѣти часто знакомы, благодаря своему вѣтвильному опыту. Но отсюда еще не слѣдуетъ, что учителю здѣсь дѣлать нечего. Наоборотъ: даже въ случаѣ полного знакомства дѣтей съ этимъ представленіемъ, надо все знаніе учениковъ, относящееся до десятка, еще болѣе насытить наглядными представленіями. Наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ въ этомъ случаѣ является „солома“. Нѣсколько пучковъ такъ наз. „соломы“ и палочекъ (по десяти штукъ въ каждомъ пучкѣ) ученики должны сами связать. Полезны и косточки счетовъ, при чемъ полезно, если на нѣкоторыхъ проволокахъ по „десятку“ косточекъ, а на другихъ больше и меньше, чѣмъ по десятку.—Чтобы узнать, достаточно ли ясно у ученика представленіе о десяткѣ, надо взять не одинъ, а нѣсколько десятковъ какихъ-либо предметовъ (кубиковъ, еловыхъ шишекъ, палочекъ, грифелей и т. п.) и предложить простой вопросъ: „сколько здѣсь десятковъ?“ Если ученики станутъ считать десятки, пришивая при счетѣ десяткъ за единицу счета, то у нихъ о десяткѣ представленіе уже болѣе или менѣе вѣрное.—Послѣ этого можно взять *одинъ* десятокъ предметовъ и еще нѣсколько такихъ же предметовъ и предло-

жить вопросъ, сколько взято всего предметовъ этого рода. Это упражненіе нужно для укрѣпленія въ умѣ учениковъ представленія о томъ, что числа второго десятка (17, 13, 14 и т. п.) *составляются* изъ одного десятка и еще нѣсколькихъ отдѣльныхъ единицъ. Далѣе можетъ идти упражненіе противоположнаго содержанія: группа въ 15 отдѣльныхъ предметовъ должна быть разбита на двѣ группы, изъ которыхъ одна представляетъ собою полный десятокъ, а другая—нѣсколько отдѣльныхъ единицъ. — Упражненія этого рода необходимы не только сами по себѣ, но являются также подготовительными для нумераціи первыхъ одиннадцати двузначныхъ чиселъ (10, 11, 12... 18, 19 и 20).—Шведскіе счеты для упражненій этихъ вполне пригодны.

Нумерацію первыхъ двузначныхъ чиселъ ученики должны усваивать не въ естественномъ („натуральномъ“) порядкѣ этихъ чиселъ, т. е. не начиная съ письменнаго, съ помощью арабскихъ цифръ, обозначенія десяти единицъ. Ибо это обозначеніе содержитъ въ себѣ нѣсколько трудностей. Неудобно также начинать обученіе нумераціи съ одиннадцати (обѣ цифры одинаковы, и zapomнить, какая изъ единицъ обозначаетъ десятокъ и какая—единицу, поѣтому, трудно) и съ двѣнадцати (соединеніе двухъ рядомъ стоящихъ цифръ не достаточно порякаетъ вниманіе учениковъ). Лучше всего начинать съ болѣе отдаленныхъ чиселъ второго десятка: съ 17-ти, 14-ти, и т. д. Затѣмъ можно перейти къ обозначенію 12-ти, 11-ти и, наконецъ, 10-ти, гдѣ нуль, такимъ образомъ, является только условнымъ знакомъ для обозначенія того, что, сверхъ десятка, нѣтъ ни одной отдѣльной единицы.—Можно сначала, слѣдуя Чеху (австрійскому педагогу первой половины XIX вѣка) нарисовать два кружка ря-

Нумерація первыхъ двузначныхъ чиселъ.

домъ (двѣ „тарелки“), условиться въ первый кружокъ записывать число десятковъ (1), а во второй справа— число отдѣльныхъ единицъ. Если во второй нѣтъ единицъ, то оставимъ пустую тарелку, и т. д. Но особенной въ томъ надобности нѣтъ, хотя нѣкоторую пользу это можетъ принести).— Шведскіе счеты не пригодны.

Прибавленіе и отниманіе единицъ во второмъ десяткѣ Когда обозначеніе десяти единицъ и чиселъ второго десятка усвоено, можно перейти на наглядныхъ пособіяхъ къ прибавленію одной единицы къ числу второго десятка и къ отниманію одной единицы изъ числа второго десятка и изъ десяти. На наглядныхъ пособіяхъ ученики убѣждаются, что чаще всего (въ этихъ случаяхъ) десятокъ остается неприкосновеннымъ и что, только въ случаѣ отниманія одной единицы изъ десяти или двадцати и въ случаѣ прибавленія одной единицы къ девятнадцати, „цифра“ единицъ измѣляется:

$10 - 1 = 9$, $20 - 1 = 19$, $9 + 1 = 10$ и $19 + 1 = 20$.
Палочки („солома“ или „спички“) — пособіе даже при самыхъ неблагоприятныхъ матеріальныхъ условіяхъ существованія школы. Можно достигнуть того, чтобы увѣкъ безъ исключенія учениковъ спички были подъ руками, — одинъ пучекъ въ десять спичекъ и десять свободныхъ. Это пособіе дастъ ученикамъ полную увѣренность въ вычисленіяхъ занимающей насъ ступени и оставляется дѣтьми тотчасъ по минованіи въ немъ надобности — На этой ступени русскіе счеты съ вертикально идущими проволоками (а счеты Шохоръ-Троцкого, сверхъ того,

*) Можно условиться („договориться“) число десятковъ записывать безъ „тарелки“, а число единицъ (чтобы онѣ „не разсыпались“) записывать сначала въ тарелку, а потомъ и безъ „тарелки“: въ случаѣ же, когда отдѣльныхъ единицъ нѣтъ, рисовать уже пустую „тарелку“, и т. п.

еще съ зажимами для удержанія паверху каждой проволоки тѣхъ косточекъ, которыя не нужны) полезны. Въ особенности они полезны тогда, когда на-лицо взять только двѣ проволоки, и на крайней, соотвѣтствующей мѣсту единиць, взять только девять косточекъ, а на находящейся слѣва ея, только одну косточку. Съ ихъ помощью отлично освѣщаются нумерація всѣхъ чиселъ отъ 10-ти до 19-ти включительно, а также прибавленіе и отниманіе единицы въ случаяхъ, когда сумма и уменьшаемое не больше 19-ти.

Великое значеніе имѣеть „солома“ также при усвоеніи дѣтми Сложеніе и вычитаніе въ предѣлы перваго десятика. двухъ дѣйствій: сложенія всякихъ двухъ однозначныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ не больше десяти, и вычитанія въ случаяхъ, когда уменьшаемое не больше десяти. — Два одинаковыхъ слагаемыхъ дѣти научаются складывать быстро ($2+2$, $3+3$, $4+4$, $5+5$). Сложеніе одинаковыхъ слагаемыхъ. Причины этого кроются только въ томъ особенномъ свойствѣ двухъ повторяемыхъ звуковъ, что они легче ассоціируются съ третьимъ звукомъ, и въ сравнительно легкой воспринимаемости и легкомъ усмотрѣніи зрѣніемъ двухъ одинаковыхъ группъ. Поэтому, для усвоенія сложенія двухъ одинаковыхъ слагаемыхъ, не требуется особенно многочисленныхъ упражненій на наглядныхъ пособияхъ. Лучшимъ въ этомъ случаѣ пособіемъ являются пальцы рукъ, причемъ на обѣихъ надо тогда брать одинаковое число одинаковыхъ, распрямленныхъ или пригнутыхъ къ ладони, пальцевъ.

Секретъ прибавленія двухъ единицъ дѣти усваиваютъ тоже бы- Сложеніе равныхъ слагаемыхъ стро: они сначала уразумѣваютъ, что при этомъ сложеніи какъ бы „перескакиваютъ“ одно число

(7+2 не 8, а 9), и этому не мало способствуют наглядныя пособія. Прибавленію же трехъ единицъ къ 4-мъ, 5-ти, 6-ти и 7-ми дѣти научаются путемъ, такъ сказать, логическимъ: 4 да 2 шесть, да еще 1 семь. Но и этотъ логическій путь вычисленія скорѣе и полнѣе усваивается, если прибѣгать къ нагляднымъ пособіямъ.

Перестановка слагаемыхъ Съ помощью наглядныхъ пособій быстро и вполне усваивается также перемѣщеніе слагаемыхъ въ случаяхъ, когда второе слагаемое больше перваго. Дѣйствительно: что 2 да 7 все равно, что 7 да 2, на наглядныхъ пособіяхъ постигается зрительнымъ и мускульнымъ чувствами непосредственно. А потому и здѣсь наглядныя пособія для всего класса и для отдѣльныхъ учениковъ чрезвычайно полезны. Если къ нагляднымъ пособіямъ прибѣгать какъ слѣдуетъ, то эта часть таблицы сложенія усваивается дѣтьми съ большимъ успѣхомъ и легкостью. Числовыя фигуры, рисуемыя учителемъ и учениками *на классной доскѣ* (чтобы легко было стирать значки фигуръ при вычитаніи), тоже могутъ быть весьма полезны. Но при этомъ, конечно, между числовыми фигурами нельзя ставить знакъ дѣйствія, и послѣ нихъ — знакъ равенства. Пользоваться числовыми фигурами ученики и учитель должны слѣдующимъ образомъ. Нарисовавъ фигуру, къ ея значкамъ присоединить еще нѣсколько значковъ, или изъ нихъ стереть нѣкоторыя, и, производя всѣ эти „дѣйствія“, произнести: „было пять кружковъ, прибавлено еще два кружка, стало семь кружковъ“.

Перестановка двухъ слагаемыхъ, когда второе больше перваго, должна быть не навязана ученикамъ, а ими самими *изобрѣтена*, какъ спасеніе отъ слишкомъ продолжительнаго причеситыванія.—Когда слагаемыя отличаются одно отъ другого на одну или двѣ единицы, причемъ

второе больше перваго, то можно прибѣгнуть къ промежуточному сложению двухъ одинаковыхъ слагаемыхъ. Пусть напр., требуется вычислить 3 да 5; 3 да 3 будетъ 6, да еще 2 будетъ 8, и т. п.—Вообще надо развивать въ ученикахъ *находчивость* и *гибкость* въ вычисленияхъ, а не приучать ихъ пользоваться только правилами.—Важна при этомъ работа двухъ чувствъ: зрѣнія и чувства мускульнаго. Одного зрѣнія недостаточно потому, что движенія глаза недостаточно рѣзки, когда мы переводимъ ихъ справа налево и обратно. Гораздо рѣзче движенія руки, показывающей сначала четыре и пять, а потомъ—въ противоположномъ направленіи пять и четыре.

Запимающая насъ часть таблицы вычитанія требуетъ не столько наглядныхъ пособій для опредѣленія *результатовъ* вычитанія, сколько для установленія *связи* между сложениемъ и вычитаніемъ, выражаемой, напр., слѣдующими равенствами:

Связь вычитанія со сложениемъ.

$7+2=9$, $9-2=7$ и $9-7=2$ и т. п. Изъ перваго равенства *логически* вытекаютъ остальные два.—Но прежде чѣмъ добратся до этого путемъ логическимъ, надо ознакомиться съ *фактомъ* существованія этой связи, и для этой цѣли должны служить цѣлесообразныя упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, но непременно въ связи со словеснымъ установленіемъ этихъ фактовъ. При этомъ должно обращать вниманіе на логическія ударенія на словахъ, напр.: „семь да еще два будетъ *девять*“; девять, долой два, будетъ *семь*, а девять, долой *семь*, будетъ два“. (Подчеркнутыя слова надо читать съ логическимъ удареніемъ и повышеніемъ тона въ первой фразѣ на словѣ „девять“, а въ третьей—на словѣ „семь“, и съ пониженіемъ тона во второй фразѣ на словѣ „семь“, а въ третьей—на словѣ „два“). Такимъ образомъ будутъ достигнуты должныя зритель-

ния, мускульныя и слуховыя ощущенія и представленія. — Что же касается пальцевъ рукъ, то они—подходящее пособіе *при сложеніи* въ предѣлѣ перваго десятка, но мало пригодны—при вычитаніи въ этомъ же предѣлѣ.—Для упражненій классныхъ удобны счеты въ ихъ шведскомъ видѣ. Въ самостоятельныхъ же своихъ упражненіяхъ ученики могутъ пользоваться спичками.—Для самостоятельныхъ упражненій въ вычитаніи полезно сопоставленіе упражненій въ вычитаніи съ соответствующими упражненіями въ сложеніи, дабы и такимъ образомъ воздѣйствовать на зрѣніе учениковъ, напр., такихъ:

$$4+5=, 9-5=, 9-4= \text{ и т. п.}$$

Но само собою разумѣется, что злоупотребленіе подобными упражненіями отнюдь не желательно. А потому рядомъ съ подобными упражненіями должны стоять также упражненія другихъ видовъ, напр.:

$$7+2, 9-3, 10-2 \text{ и т. п.}$$

Смѣшанныя упражненія. На наглядныхъ пособіяхъ, въ случаѣ надобности, можно сначала прорабатывать также смѣшанныя упражненія вида:

$$10-2+1-2+2-5-1 \text{ и т. п.}$$

Примѣненіе прѣвосходящаго. Равнымъ образомъ на наглядныхъ пособіяхъ должно прорабатывать слѣдующіе случаи: а) прибавленіе однозначнаго числа къ десятку (это—повторительное упражненіе); б) вычитаніе изъ числа втораго десятка его отдѣльныхъ единицъ, в) вычитаніе его десятка, г) прибавленіе къ числу втораго десятка столькихъ единицъ, чтобы не получалось новаго десятка ($12+3, 15+4$ и т. п.), и д) вычитаніе изъ числа втораго десятка столькихъ единицъ, чтобы въ остаткѣ получилось не менѣе десяти ($19-3, 15-2$ и т. п.).—Въ качествѣ ласнаго нагляднаго пособія можно употре-

блять счеты какъ шведскіе, такъ и русскіе; ученики же могутъ, при самостоятельныхъ своихъ работахъ, пользоваться „соломой“.—Назначеніе пособій въ этомъ случаѣ, какъ и во всѣхъ другихъ, только въ томъ, чтобы ученики постигли *пріемъ* дѣйствія, а не опредѣляли, съ помощью пособія, только результатъ его.—Въ данныхъ выше случаяхъ все дѣло въ только томъ, что десятокъ или остается неприкосновеннымъ (случай а, б и г), или исчезаетъ (случай в).

Сложеніе однозначнаго числа съ однозначнымъ же въ случаѣ двузначной суммы (7+5, 8+3 и т. д.) опирается на все предыдущее и содержитъ въ себѣ лишь одну трудность. Ученики должны понять, что раньше всего имъ надо къ большому слагаемому прибавить столько единицъ меньшаго, чтобы получить ровно десять единицъ (7+3, 8+2 и т. п.).—Наглядныя пособія—шведскіе счеты, палочки, кубики, но отнюдь не числовыя фигуры, даже не торговые счеты и не счеты Шохоръ-Троцкаго. Пальцами ученики тоже могутъ пользоваться. Пусть, напр., требуется рассчитать, сколько будетъ восемь да шесть. Восемь пальцевъ надо себѣ представить, а шесть пальцевъ взять на рукахъ: пять на одной, и одинъ—на другой. Затѣмъ надо сообразить, что восемь да два будетъ десять; эти два пальца, напр., указательный и большой, одной руки надо собрать и устранили изъ расчета. Тогда останется еще 4 пальца, которые надо прибавить къ десяти, получится четырнадцать.—Что касается русскихъ счетовъ, то къ нимъ надо обратиться попозже, и для этого взять только двѣ проволоки: на лѣвой одну косточку, а на правой—десять штукъ (но не девять, какъ на стр. 61, когда вопросъ шелъ о *нумерации*, а не о вычисленіи на счетахъ). Подыдемъ всѣ косточки наверхъ, зажмемъ ихъ

*Сумма двухъ
однозначныхъ
чиселъ больше
10-ти.*

зажимами. Потомъ положимъ восемь косточекъ (два сверху зажемъ зажимомъ), потомъ прибавимъ эти два, отмѣтимъ одинъ десятокъ лѣвой проволокой, подыдемъ десять косточекъ-единицъ наверхъ, а потомъ изъ нихъ внизъ возьмемъ только четыре. Говорить же будемъ такъ: восемь да два—десять, да еще четыре—четырнадцать. Важно при этомъ съ помощью нагляднаго пособія уяснить себѣ лишь *порядокъ* и *цѣль* вычисленій, а не результатъ ихъ.—Сложеніе двухъ равныхъ слагаемыхъ, для дѣтей на этой ступени тоже легче сложенія двухъ различныхъ слагаемыхъ (ср. стр. 61). Но это не мѣшаетъ освѣщенію логическаго смысла и содержанія этого сложенія съ помощью наглядныхъ пособій. Это не мѣшаетъ пользоваться и этими суммами равныхъ слагаемыхъ для отысканія суммы слагаемыхъ не равныхъ. Дѣйствительно: разъ 7 да 7 четырнадцать, то 7 да 9 все равно что 7 да 7 да еще два. Этотъ „выводъ“ тоже лучше дѣлать сначала на наглядныхъ пособіяхъ, а потомъ уже изустно.—Но важнѣе всего, конечно, все-таки помощь десятка и десятичной системы.

Опираясь на десятокъ, можно дѣтей научить и вычитанію однозначнаго числа изъ числа второго десятка въ тѣхъ случаяхъ, когда въ остаткѣ получается однозначное число. Наглядныя пособія—тѣ же: палочки, кубики, косточки шведскихъ счетовъ, русскіе счеты, но отнюдь не числовыя (слишкомъ громоздкія для этихъ случаевъ) фигуры.—Весь секретъ въ этомъ случаѣ вычитанія состоитъ въ томъ, что раньше всего надо въ остаткѣ получить десятокъ. Если изъ 12-ти надо вычесть 5, то раньше надо сначала вычесть двѣ единицы, а потомъ изъ оставшихся десяти единицъ вычесть еще три.—Особенно цѣлесообразнымъ, на этой ступени обуче-

*Уменьшаемое
число 2-го десяти-
ятка, вычитаемое
и остатокъ
однозначны.*

нія, является пучекъ палочекъ въ десять штукъ, который придется развязать при этомъ дѣйствіи.

Прежде чѣмъ перейти къ умноженію въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ, необходимо проработать сначала сложеніе нѣсколькихъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ не больше двадцати единицъ. Наилучшими наглядными пособиями здѣсь могутъ служить кубики и другіе (даже только воображаемые) предметы, а также косточки шведскихъ или русскихъ счетовъ. Но особенно долго, однако же, не приходится останавливаться на этихъ упражненіяхъ, если предыдущее усвоено какъ слѣдуетъ.

Вначалѣ умноженіе представляетъ собою только сложеніе одинаковыхъ слагаемыхъ, описываемое только другими словами и записываемое только другими знаками. Такъ, вмѣсто того, чтобы говорить: „четыре да еще четыре да еще четыре“, говорятъ: „три раза по четыре“, или короче: „три раза четыре“, или еще короче: „трижды четыре“. Записываютъ же это не такъ:

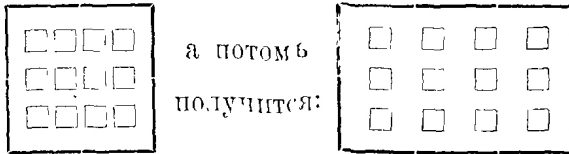
$4 + 4 + 4$, а слѣдующимъ образомъ: 4×3 . Отсюда вытекаетъ, что вначалѣ всѣ наглядныя пособия должны служить только для выясненія этихъ способовъ замѣны однихъ *словъ* другими. — Но даже при произведеніяхъ, меньшихъ 20-ти, приходится для вычисленія переставлять сомножителей (вм. того, чтобы вычислять, сколько будетъ шестью-три, можно вычислить, сколько будетъ трижды-шесть, и т. п.). Въ этомъ случаѣ наглядныя пособия (кубики, косточки шведскихъ счетовъ, кучки карточекъ разнѣной азбуки, и т. п., но не палочки) оказываютъ великую услугу. Надо, аккуратно и при участіи учениковъ, положить въ горизонтальный рядъ, близко одинъ къ дру-

Сложеніе нѣск. различныхъ и одинаковыхъ слагаемыхъ.

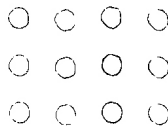
Умноженіе при произведеніи, не больше 20-ти.

Перемѣна порядка множителей.

тому, — четыре кубика (4 шарика шведскихъ счетовъ), подъ ними—на большемъ разстояніи, чѣмъ на какомъ находятся эти кубики (шарики) одинъ отъ другого, еще четыре, а подъ этими—еще четыре. Послѣ этого надо сдвинуть первые три кубика (шарика) этихъ рядовъ, слѣдующіе три и т. д., а потомъ—полученные столбцы раздвинуть. Стало-быть, сначала будетъ:



Первая изъ этихъ фигуръ даетъ весьма наглядное представленіе о произведеніи 4×3 , вторая же — о произведеніи 3×4 (четырежды 3).— Совсѣмъ не пригодны для этой простой цѣли счеты русскіе, такъ какъ съ ихъ помощью можно убѣдиться только въ томъ, что *результаты* получаются въ обоихъ случаяхъ одинъ и тѣ-же, а это далеко не все. — Крайне важно въ этомъ мѣстѣ курса заинтересовать мускульное чувство учениковъ. Пусть каждый прежде всего нарисуетъ *спрочками* такую фигуру:



или соответствующую часть Пифагоровой таблицы (см. 34).

Пусть онъ далѣе рукою покажетъ слѣва направо первую строку и скажетъ: „четыре“, пусть покажетъ точно такъ же (т. е. двигая рукою) вто-

рую строку и скажетъ: „еще четыре“, пусть то же самое сдѣлаетъ еще разъ, и въ концѣ-концовъ скажетъ двѣ фразы: „здѣсь три раза по четыре“ и „будетъ двѣнадцать“. Когда это продѣлано, пусть покажетъ сверху внизъ первый столбецъ кружковъ и скажетъ: „три кружка“, пусть такъ же поступитъ съ остальными столбцами и, въ концѣ-концовъ, скажетъ: „четыре раза три“ и „будетъ тоже двѣнадцать“. Тогда онъ непосредственнымъ усмотрѣніемъ въ полномъ смыслѣ этого слова („интуиціей“) увидитъ, что *не только одно и то же* получается отъ умноженія 4-хъ на 3 и 3-хъ на 4, но что и единицы-то произведенія однѣ и тѣ же и что разница — только въ томъ порядкѣ, въ которомъ мы беремъ эти единицы. Къ упражненіямъ этого рода надо привлекать всѣхъ учениковъ—и особенно мало-подвижныхъ, инертныхъ, притомъ не по разу только, а при всякомъ случаетъ, когда учитель можетъ заподозрить у учениковъ не довольно ясное пониманіе этого основнаго закона умноженія *).

Нумерація двузначныхъ чиселъ, являющаяся необходимымъ условіемъ дальнѣйшаго курса ариметики (если не считать полезнымъ скорѣйшій переходъ къ дѣленію), требуетъ примѣненія почти всѣхъ, намъ извѣстныхъ, наглядныхъ пособій, за исключеніемъ, конечно, числовыхъ фигуръ и такъ наз. шведскихъ счетовъ (по причинѣ горизонтальнаго положенія ихъ проволокъ).—Но само собою, конечно, разумѣется, что

*Нумерація дву-
значныхъ чи-
селъ.*

*) Въ моихъ книжкахъ, для внесенія разнообразія въ занятія и для нѣк. другихъ цѣлей, рядомъ съ умноженіемъ двухъ чиселъ, дающихъ въ произведеніи не болѣе 20-ти, помѣщены нѣк. упражненія для выработки въ умѣ учениковъ представленій и понятія о половинѣ, четверти и трехъ четвертяхъ. Примѣненіе наглядныхъ пособій къ этимъ вопросамъ освѣщено ниже.

надобно прежде всего научить учениковъ вѣрному и сознательному счету (не вычисленію, а именно счету) предметовъ. Въ противномъ случаѣ можетъ оказаться, что ученики будутъ считать: „двадцать девять, двадцать десять, двадцать одиннадцать“ и т. п., и даже неясно будутъ понимать, что послѣ тридцати девяти идетъ сорокъ, послѣ сорока девяти—пятьдесятъ, послѣ восьмидесяти девяти—девяносто, а послѣ девяноста девяти—сто.—Считать надо предметы не крупные, но многочисленныя и поддающіеся складыванію въ кучки: кубики, спички, еловые шишки, кусочки бумаги, аккуратно нарѣзанной, и т. п. Шведскіе счеты съ косточками, панизанными по десяти штукъ на проволоку, тоже цѣлесообразны.—Позже можно обратиться и къ счетамъ русскимъ, но „пабрать“ каждый десятокъ надо на проволоку единицъ, не перескакивая изъ десятка въ десятокъ безъ вниманія къ отдѣльнымъ единицамъ.—Спички, связанные въ пучки по десяти спичекъ въ каждомъ, оказываютъ услуги неоцѣнныя.—Пользоваться пальцами можно при счетѣ *явленной*. Учитель стучитъ ритмически довольно медленно и не слишкомъ сильно, карандашомъ по столу, а ученики хоромъ или въ одиночку считаютъ, сколько разъ онъ стукнулъ, на пальцахъ, не пригибая ихъ, пока не насчитано десяти ударовъ. Какъ только насчитано десять ударовъ, пригибается мизинецъ лѣвой руки, и счетъ продолжается дальше до тѣхъ поръ, пока это нужно.—Небезполезно, при этомъ, научить дѣтей (какъ это пѣкаторые и дѣлаютъ) также счету въ слѣдующей формѣ: одинъ, два, три... восемь, *девять*, *десять*: одинъ, два, три... восемь, *девять*, *двадцать*; одинъ, два, три... восемь, *девять*, *тридцать*; одинъ, два, три... восемь, *девять*, *сорокъ* и т. д.—При обученіи письменной нумераціи, наибольшую услугу изъ наглядныхъ

пособій оказываютъ „спички“, связанныя въ пучки по десяти штукъ въ каждомъ, и русскіе счеты.—При употребленіи русскихъ счетовъ, хорошо пользоваться такими, въ которыхъ можно взять по девяти (а не по десяти) косточекъ на каждой изъ двухъ проволокъ. Въ этихъ случаяхъ только пужны двѣ проволоки (остальные должны быть свободны отъ косточекъ или совсѣмъ вынуты), а на каждой проволокѣ нужно только по девяти косточекъ: только тогда и будетъ полная аналогія между обозначеніемъ двузначныхъ чиселъ на письмѣ и на счетахъ. Счеты, конечно, должны имѣть вертикально направленные проволоки (сравни стр. 27).

Переходя къ сложенію двухъ *Сложеніе двухъ двузначныхъ чиселъ.* двузначныхъ чиселъ, надо соблюдать, какъ извѣстно, нѣк. послѣдовательность упражненій, хотя бы, напр., слѣдующую: 1) сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, не дающимъ новаго десятка ($32 + 5$); 2) сложеніе круглыхъ десятковъ ($20 + 30$); 3) сложеніе двузначнаго числа о двухъ значащихъ цифрахъ съ двузначными круглыми ($34 + 20$); 4) сложеніе двузначнаго числа съ двузначнымъ же, не дающимъ новаго десятка ($34 + 25$); 5) сложеніе двузначнаго съ однозначнымъ, дающимъ въ суммѣ круглое число ($36 + 4$); 6) сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, дающимъ новый десятокъ и образующимъ некруглое двузначное число ($37 + 6$); 7) сложеніе двухъ двузначныхъ чиселъ, отдѣльныя единицы котораго образуютъ новый десятокъ ($37 + 23$ и $37 + 26$).—При разработкѣ всѣхъ этихъ случаевъ съ помощью наглядныхъ пособій, наибольшія услуги оказываютъ „спички“ и русскіе счеты. Но это послѣднее пособіе должно быть снабжено уже тремя проволоками, и на двухъ изъ нихъ должно быть (какъ это наблюдается

въ обыкновенныхъ русскихъ счетахъ) по десяти (а не по девяти) косточекъ, а на третьей—только одна косточка, такъ какъ при сложеніи двухъ двузначныхъ чиселъ можетъ получиться, сверхъ отдѣльныхъ десятковъ и единицъ, только одна сотня.—Шведскіе счеты пригодны только для случаевъ: 1-го, 2-го и 3-го (см. выше). Для остальныхъ же они, особенно вначалѣ, неудобны потому, что десятки перваго слагаемаго отдѣлены отъ десятковъ втораго отдѣльными единицами перваго слагаемаго. Вслѣдствіе этого, подлежащее сложеніе на шведскихъ счетахъ въ этихъ случаяхъ требуетъ какъ-разъ того знанія, котораго съ ихъ помощью не достигъ. Еще менѣе пригодны на этой ступени кубики и столбики (см. стр. 23).—Пальцы рукъ могутъ быть полезны въ томъ случаѣ, если нѣкоторымъ изъ нихъ своевременно придавать значеніе десятковъ.

*Вычитаніе дву-
значныхъ чи-
селъ.*

При вычитаніи равнымъ образомъ должно соблюдать извѣстную послѣдовательность, приблизитель-но подобную той, которая выше намѣчена для сложенія двухъ двузначныхъ чиселъ. — Изъ наглядныхъ пособій наиболѣе пѣлесообразны опять-таки „спички“ и русскіе счеты. Но большую пользу могутъ принести и счеты шведскіе въ особенности, если на-лицо пѣтъ соломы или спичекъ. Шведскіе счеты для сложенія, какъ мы видѣли выше, не всегда удобны; но это не исключаетъ ихъ пригодности для вычитанія, ибо вычитаемое не откладывается на счетахъ, а только изустно и на дѣлѣ вычитается.—Даже при самомъ затруднительномъ случаѣ вычитанія, а именно: когда отдѣльныхъ единицъ (перваго разряда) въ вычитаемомъ больше, чѣмъ въ уменьшаемомъ (52—26), помощь шведскихъ счетовъ чрезвычайно велика, прямо научая дѣтей сначала вычитать число, въ которомъ отдѣль-

ныхъ единицъ 1-го разряда столько-же, сколько ихъ въ уменьшаемомъ (52—22), съ тѣмъ чтобы потомъ уже изъ круглаго числа вычесть оставшее (30 — 4 = 26).

Когда ученики усвоили себѣ *на столько-то больше*, извѣстное количество навывковъ въ сложеніи, полезно ихъ сроднить со значеніемъ условнаго *утвердительнаго* выраженія: „на столько-то (на 5, на 6, на 20 и т. п.) больше“ (но не съ условнымъ значеніемъ логически труднаго вопроса: „на сколько больше?“). Наглядное пособіе, здѣсь наиболѣе удобное, представляютъ собою кубики или другіе предметы, которые легко класть на столъ. Менѣе удобны шведскіе счеты, еще неудобнѣе (для начала) счеты русскіе, совсѣмъ не удобны пальцы.—Предлогъ „на“ здѣсь теряетъ свой первоначальный смыслъ, а потому на него именно и должно обратить вниманіе съ помощью наглядныхъ пособій. Полезно, если этотъ предлогъ появляется въ двухъ значеніяхъ: въ первоначальномъ и новомъ. Учитель говоритъ (и то, что онъ говоритъ, онъ долженъ также и дѣлать): „Дѣти, смотрите, что я буду дѣлать! Я поставлю на этотъ столъ 6 кубиковъ; въ сторонѣ ставлю тоже 6, а *на нихъ* — еще 3 кубика; здѣсь, стало-быть, 6 куб., а тутъ — тоже 6 кубиковъ, да еще 3.—Что я сдѣлалъ?—Расскажите. (Ученики рассказываютъ).—Это говорятъ и иначе,—говорятъ: „здѣсь 6 кубиковъ, а тутъ *на три кубика больше*“ (нѣкоторые изъ учениковъ или всѣ повторяютъ и продѣлываютъ то же самое).—Теперь я кладу сюда 4 кубика, а сюда—4 да еще 2, и говорю: „здѣсь 4 кубика, а здѣсь на два кубика больше“.—Такъ ли я сказалъ?—У меня въ одномъ карманѣ 4 коп., въ другомъ на двѣ копейки больше. Что это значить? (Это значитъ, что въ другомъ карманѣ тоже 4 коп., да еще двѣ).—У одного крестьяни-

на въ огородѣ 7 грядокъ, а у другого—на 4 грядки больше“ и т. д.—Переходъ къ воздѣйствію на воображеніе учениковъ (къ помощи такъ наз. „внутренней наглядности“) долженъ быть сдѣланъ не раньше полнаго усвоенія учениками смысла этого выраженія.—*Важнѣе всего, чтобы ученики сами дѣлали то же, что дѣлаетъ учитель.* Бояться при этомъ такъ называемой потери времени значитъ не знать—сколько времени ученики въ теченіе всего курса дѣйствительно бесполезно теряютъ отъ того, что они не усвоили себѣ своевременно условнаго значенія выраженія: „на столько-то больше“.

На столько-то меньше. Утвердительное выраженіе „на столько-то (на 5, 6, 20) меньше“ усваивается въ связи съ предыдущими упражненіями на наглядныхъ пособіяхъ и съ соответствующими, почти чисто-словесными, упражненіями. „Кладу на столъ 9 кубиковъ, а на стулъ столько же, т. е. тоже 9 кубиковъ; здѣсь 9 и здѣсь тоже 9; снимаю два кубика со стула и кладу ихъ обратно въ ящикъ; гдѣ больше?—А гдѣ меньше?—На столѣ, стало-быть, 9 кубиковъ, а на стулѣ не хватаетъ двухъ кубиковъ,—были бы еще 2 кубика, и тогда на стулѣ-бы ихъ было столько же, сколько ихъ на столѣ...—Говорятъ: „на стулѣ меньше кубиковъ на два, чѣмъ на столѣ“.—Теперь кладу на столъ 10 кубиковъ и на стулъ столько же; снимаю со стула 4 кубика; на сколько здѣсь на стулѣ, меньше, чѣмъ на столѣ?..—Говорятъ также: „четырьмя меньше“... *)—Все дѣло только въ томъ, чтобы дѣти сроднились съ мыслью, что разъ одно число меньше другого на столько-то, то другое боль-

*) Многоточіе означаетъ, что предшествующее ему должно быть повторено не разъ и разработано, съ помощію вопросовъ и на дѣлѣ, т. е. съ помощію наглядныхъ пособій, самими учениками.

ше перваго на столько же, и обратно: если одно число больше другого на столько-то, то другое больше перваго на столько же.

Когда смыслъ утвердительныхъ выраженій: „на столько-то больше“ и „на столько-то меньше“ Вопросъ: „на сколько больше или меньше?“ дѣтми усвоены, ими легко усваивается и смыслъ *вопросовъ*: „на сколько больше?“ и „на сколько меньше?“—Помощь наглядныхъ пособій сводится здѣсь къ тому, что на наглядныхъ пособіяхъ ученики усваиваютъ себѣ, что для рѣшенія каждаго изъ этихъ вопросовъ надо *отдѣлить* отъ большаго числа *столько же* его единицъ, сколько ихъ въ меньшемъ. При этомъ (какъ всегда) здѣсь важенъ не отвѣтъ на вопросъ, а самый *смыслъ* вопроса.—Со значеніемъ выраженій: „длиннѣе“, „короче“, „выше“, „ниже“, „глубже“, „шире“, „уже“, „тяжелее“ и „легче“ надо дѣтей знакомить тоже на наглядныхъ пособіяхъ, *измѣрѣя* и давая *дѣтямъ* возможность измѣрять длину, высоту, глубину, ширину и вѣсъ подходящихъ для того предметовъ. Эта затрата времени опять-таки будетъ не потерей его, а чистымъ его выигрышемъ.

Если учитель желаетъ, послѣ Во сколько-то разъ больше. того какъ ученики вполне усвоили себѣ значеніе выше рассмотрѣнныхъ условныхъ выраженій, перейти къ работѣ другого рода, чтобы занятія не показались ученикамъ слишкомъ однообразными, то онъ можетъ обратиться еще къ одному выраженію, доступному ученикамъ. Таково выраженіе: „во столько-то разъ (5 разъ, въ 3 раза, въ 6 разъ) больше“. Совершенно не пригодно выраженіе: „во столько-то разъ меньше“, когда ученики еще ничего не знаютъ относительно дѣленія. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ столь же неумѣстны вопросы: „во сколько разъ больше?“ и „во сколько разъ меньше?“—

Если же учитель боится уснащать близкіе одинъ къ другому моменты выраженіями, глубоко различными по существу, но сходными по своей словесной формѣ („на два больше“ и „въ два раза больше“), то онъ можетъ отложить ознакомленіе учениковъ съ выраженіемъ „во столько-то разъ больше“ до болѣе глубокаго уразумѣнія учениками умноженія въ предѣлахъ таблицы умноженія.—Во всякомъ случаѣ, для уразумѣнія учениками смысла выраженія „во столько-то разъ больше“ наглядныя пособія прямо необходимы, при томъ преимущественно отдѣльные предметы (кубики, тетради, карандаши, палочки и т. п.). Счеты шведскіе, а особенно русскіе, мало пригодны, такъ какъ на нихъ не всегда очевидны соотношенія между двумя числами: хотя на шведскихъ счетахъ (не говоря уже о русскихъ) число косточекъ, изъ которыхъ 10 написаны на одной проволоцѣ, а остальные двѣ—на другой, больше, чѣмъ четыре косточки, написанныя на третьей, въ три раза, но это не очевидно. Поэтому болѣе цѣлесообразны упражненія въ родѣ слѣдующихъ: „Я кладу на стулъ 4 кубика; на столъ же я кладу другіе 4 кубика, да еще 4, да еще 4, т. е. 3 раза по 4 кубика.—Что я сдѣлалъ?“...—Въ такомъ случаѣ говорятъ: „на стулѣ 4 кубика, а на столѣ въ три раза (или *втрое*) больше“...—Говорятъ не „три раза больше“, а „въ три раза больше“...—У меня въ одномъ карманѣ 5 копеекъ, а въ другомъ въ два раза больше.—Что это значитъ? (Что значитъ, что въ другомъ карманѣ 5 коп. да еще 5 копеекъ, или два раза по 5 коп.“).

*Таблица умно-
женія и вычита-
нія ея содер-
жаніе.*

Такъ наз. „таблица умноженія“ усваивается на наглядныхъ пособіяхъ легко, если дѣти умѣютъ складывать и вычитать двузначныя числа. Вопросъ только въ томъ, обладаютъ ли дѣти до-

статочною гибкостью въ сложеніи одинаковыхъ слагаемыхъ и въ вычитаніи изъ двузначнаго уменьшаемаго.—Наглядныя пособія: развивающаяся Пифагорова таблица и пальцы рукъ освѣщены въ главѣ I-ой съ достаточною полнотою (см. стр. 29—35). Равнымъ образомъ выяснена та помощь, которую могутъ оказать наглядныя пособія при выясненіи перестановки сомножителей (стр. 68).—Намъ остается только уяснить себѣ работу органовъ рѣчи и слуха у нормальныхъ дѣтей и работу однихъ органовъ рѣчи у глухонѣмыхъ при такъ наз. усвоеніи учениками таблицы умноженія на-память *).—Обратимся прежде всего, конечно, къ обученію нормальныхъ дѣтей.—Извѣстно, что рядъ словъ тѣмъ легче запоминается, чѣмъ больше, помимо ихъ внутренняго содержанія, такихъ имѣется на-лицо ассоціацій, которыя почему-либо помогаютъ этому „запоминанію“, или вѣрнѣе: легкому воспроизведенію этого ряда словъ. Однимъ изъ такихъ средствъ служить *выразительность* словъ или простая *музыкальность* сочетанія звуковъ. Такъ напр., слова пѣсни легче запоминаются вмѣстѣ съ мотивомъ ея, чѣмъ безъ мотива, ритмическая рѣчь (такъ наз. „бѣлые стихи“) — легче, чѣмъ проза, речитованная рѣчь — легче, чѣмъ не речитованная. Причина этого кроется въ чувственной ассоціаціи музыкальнаго элемента съ элементами мускульнаго чувства, работающаго въ нашихъ органахъ рѣчи, когда мы говоримъ, и элементами внутренняго содержанія словъ, дѣйствующими на наше сознание. Въ такъ наз. „таблицѣ умноженія“ этотъ

*) Незнакомымъ съ современнымъ состояніемъ обученія глухонѣмыхъ надо принять къ свѣдѣнію, что нынѣ глухонѣмыхъ учатъ говорить на томъ или другомъ языкѣ. См. сочиненіе П. М. Лаговекаго: *Обученіе глухонѣмыхъ устной рѣчи* СПб. 1903.

последній элементъ силенъ только при небольшихъ множителяхъ (при умноженіи на 2, на 4, отчасти на 3 и на 5) и весьма слабъ при умноженіи на 6, на 7, на 8 и на 9. Дѣло въ томъ, что, сколько бы разъ ученикъ на урокахъ ни добрался до того, что шесть разъ девять дѣйствительно 54, *сознаніе* ученика (пока онъ еще не научился безошибочно произносить этотъ результатъ безъ вычисленія) вовсе не такъ работаетъ, чтобы для него этотъ результатъ былъ болѣе ясенъ, чѣмъ 53, или 56, или 61. Непосредственному возрѣнію истинный результатъ вовсе не кажется болѣе подходящимъ, чѣмъ только-что указанные невѣрные результаты.—Для насыщенія же, такъ сказать, результатовъ таблицы умноженія такими ассоціаціями, которыя помогаютъ ея усвоенію, именно и служатъ тѣ мускульныя ощущенія, которыя связаны съ изготовленіемъ частей Пифагоровой таблицы умноженія и съ пальцевой таблицей. Но не малое значеніе имѣютъ при этомъ также ритмическое и насыщаемое разными тонами *произношеніе* данныхъ таблицы умноженія. Поэтому, сверхъ упражненій въ постоянномъ и сознательномъ *отыскиваніи* результатовъ таблицы умноженія, полезно упражнять дѣтей въ ритмическомъ и музыкально-оснащенномъ *произношеніи* этихъ результатовъ).—Обращая вниманіе только на ритмъ послѣдовательно взятыхъ результатовъ таблицы умноженія, легко убѣдиться въ слѣдующемъ. При умноженіи всѣхъ однозначныхъ чиселъ на два, получаютъся слова таблицы, отвѣчающія тремъ четвертямъ счета: дважды-два четыре, дважды-три шесть и т. д.

*) Съ точки зрѣнія музыкальнаго (вѣрнѣе: тональнаго) содержанія данныхъ таблицы умноженія, сколько мнѣ извѣстно, не сдѣлано никакихъ экспериментальныхъ изслѣдованій. А это—вопросъ далеко не безынтересный.

(жирныя буквы поставлены для счета). При умноженіи на 3, начиная съ семи, получаются слова, отвѣчающія четыремъ четвертямъ счета: „трижды-семь двадцать одинъ“, „трижды-восемь двадцать четыре“, и т. д. Этими свойствами и надо пользоваться, и дѣтей, при классномъ обученіи, надо приучить къ хорошему, размѣренному произнесенію таблицы умноженія. (При одичномъ же, можно ученика научить даже маршировкѣ иодъ произносимые имъ звуки таблицы умноженія). При этомъ надо добиться того, чтобы ученики и впоследствии, даже на высшихъ ступеняхъ обученія, произнося какія-либо слова таблицы умноженія, прибѣгали къ тону и счету, музыкально ими уже усвоеннаго, ряда словъ, а не произносили бы этихъ словъ безъ размѣра. Но къ подобнымъ упражненіямъ можно обращаться (ср. стр. 30) только тогда, когда ученики уже вполне ясно поняли умноженіе, его смыслъ и цѣль и научились вполне сознательно добираться до результатовъ таблицы умноженія разнообразнѣйшими способами. *Въ противномъ случаетъ всякія упражненія въ родѣ вышеприведенныхъ приносятъ только вредъ.*—Надо упомянуть еще объ одномъ наглядномъ пособіи, весьма полезномъ въ случаѣ, если учитель почему-либо совсѣмъ не сочувствуетъ слуховому способу усвоенія таблицы умноженія на-память. Таковымъ пособіемъ является дѣйствительная, написанная или напечатанная, таблица умноженія, находящаяся въ рукахъ ученика во все то время, пока онъ въ ней нуждается и пока, стало-быть, не усвоитъ себѣ ея на-память, благодаря зрѣнію и частому ея примѣненію вслухъ. По всей вѣроятности, такая табличка требуется особенно для слѣдующихъ результатовъ *):

*) Первое мѣсто въ этихъ записяхъ, какъ извѣстно, занимаетъ множимое, а второе—множитель, чего никогда забывать не слѣдуетъ.

$6 \times 6 = 36$	$7 \times 7 = 49$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 9 = 81$
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 8 = 72$	
$8 \times 6 = 48$	$9 \times 7 = 63$		
$9 \times 6 = 54$			

Изъ нихъ самыя трудныя отмѣчены болѣе жирнымъ шрифтомъ. Трудности эти (у русскихъ дѣтей) обуславливаются отчасти чисто-звуковыми условіями. Въ то время какъ, напр., 6×6 и 8×6 приводятъ къ рифмованнымъ звукамъ, результатъ 8×7 требуетъ отъ ученика неудобнаго сочетанія звука *ль* со звукомъ *н'*, ибо семью-восемь пятьдесятъ шесть. И т. п.—Для учениковъ такъ наз. „двигательнаго“ (моторнаго) типа наибольшее значеніе имѣютъ, конечно, письменныя самостоятельныя упражненія въ таблицѣ умноженія, Пифагорова таблица и пальцы рукъ; для дѣтей типа зрительнаго—писанныя или печатныя таблички, а для дѣтей слухового—ритмическія упражненія. Но такъ какъ дѣтей чистыхъ типовъ не много, а большинство принадлежитъ къ типамъ смѣшаннымъ, и такъ какъ даже дѣти опредѣленнаго типа много приобрѣтаютъ, благодаря упражненіямъ, не свойственнымъ ихъ типу, то, конечно, желательно, чтобы всѣ дѣти освоились съ такъ наз. таблицей умноженія съ помощью всѣхъ указанныхъ чувственныхъ пособій (ср. стр. 14) обученія арифметикѣ *).

*) Что касается обученія глухонѣмыхъ, то не только всѣ мускульно-двигательныя, но даже разсчитанныя больше на слухъ, чѣмъ на мускульное чувство, ритмическія упражненія, могутъ имъ принести великую пользу. Для того, чтобы убѣдиться въ томъ, какъ много глухонѣмые могутъ извлечь познаній и навыковъ, благодаря мускульному чувству, достаточно вспомнить о прямо сказочныхъ успѣхахъ глухонѣмой и слѣпой американки Эленъ Келлеръ, владѣющей чуть не тремя языками (Богдановъ-Верезовскій, „Положеніе глухонѣмыхъ въ Россіи“ Спб. 1901). Весьма поучителенъ также фактъ, сообщаемый въ № 232

Прежде чѣмъ перейти къ дѣленію чиселъ, *необходимо*, чтобы ученики получили ясныя представленія о простѣйшихъ доляхъ (половинѣ и четверти), а также полезно, чтобы они получили представленія и о другихъ доляхъ (трети, пятой долѣ и т. п.), а также о дробяхъ, составленныхъ изъ четвертей.—Наглядными пособиями должны въ этомъ случаѣ служить такіе предметы, половины которыхъ не могутъ носить того же имени, что цѣлыя. Поэтому неудобны: карандашъ, палочка, кусокъ бумажки и т. п., а удобны: листъ бумаги, картофелина, яблоко, бумажный кругъ известной величины, единицы мѣры длины (аршинъ, футъ, или вершокъ и дюймъ).—Упражненія могутъ быть въ родѣ слѣдующаго: „Вотъ листъ бумаги. Разрываю (еще лучше: „разрѣзаю“) его пополамъ; эта часть—половина листа.—А эта?—Поль-листа да поль-листа вмѣстѣ, что составлять? и т. п.—Вотъ два полулиста бумаги. Каждый изъ этихъ полулистовъ я разрѣзаю пополамъ; получаю *четыре четвертушки* бумаги...—Ск. въ полулистѣ *четвертушекъ*?—Вотъ одна четвертушка бумаги; она составляетъ одну *четверть*, *одну четвертую долю* листа; вотъ еще одна четверть.—Какую долю листа составляетъ четверть его и еще четверть? (*Половину*).—Вотъ четверть листа бумаги; вотъ еще одна четверть и вотъ еще одна; ск. всего здѣсь четвертей листа?

„Спб. Вѣд.“ за 1903 годъ: „...Публику (присутствовавшую на актѣ въ Беркемской, близъ Брюсселя, школѣ для глухонѣмыхъ) поразило одно невѣроятное явленіе: вызванные на эстраду ученики (глухонѣмые отъ рожденія) совершенно свободно и громко отвѣчали на вопросы губернатора, декламировали стихи и вели между собою разговоры... Но когда подъ звуки оркестра, ученики запѣли хоромъ разныя пѣсни и народный гимнъ, восторгъ публики не зналъ предѣловъ“.

(Три)).—Къ тремъ четвертямъ прибавляю одну четверть.—Отъ полулиста отрѣзана четверть листа бумаги и отдана кому-нибудь изъ васъ...—Что больше: одинъ листъ бумаги или полъ-листа? полъ-листа или четверть его? полъ-листа или три четверти?—Всѣ эти вопросы падо, въ случаѣ надобности, предлагать въ связи съ имѣющимися предъ глазами учениковъ наглядными пособіями и съ дѣйствіями, дѣйствительно производимыми надъ наглядными пособіями не только учителемъ, но и самими учениками.

Обозначеніе дробей: ¹/₂, ¹/₄ и ¹/₄. Даже способъ обозначенія дробей съ помощью записей числителя и знаменателя можно провести болѣе или менѣе наглядно. Начинать обученіе дѣтей обозначенію дробей лучше съ обозначенія трехъ четвертей, а не съ обозначенія половины или четверти. Дѣло въ томъ, что слова „половина“ и „четверть“ не на столько отвѣчаютъ ихъ цифровой записи, какъ слова „три четверти“, гдѣ числитель полностью названъ, а знаменатель (4) хоть папоминаеть слово „четверть“.—Черту между обозначеніями числителя и знаменателя можно ввести такъ: „нарисуемъ, что мы листъ бумаги разрѣзали, т. е. проведемъ черточку (конечно, горизонтальную).—Умѣете ли вы обозначить число „три“ помощью цифры? (Умѣемъ).—Запишемъ. (Учитель надъ чертой пишетъ цифру 3).—Что здѣсь написано? (Три!)—И хочу обозначить три *четверти*; вотъ у меня подъ цифрой 3 черточка, а подъ чертой я запишу, на сколько частей разрѣзать листъ.—Что я запишу? (цифру 4.)—Что я сдѣлаю?..—Валя, сдѣлай то же самое!—Костя, то же самое!..—Эта чер-

*) Слова „половина“ и „четверть“, обозначающія отвлеченныя понятія, уму и воображенію дѣтей, недостаточно развитымъ, не говорятъ столько, сколько реченія „*полъ-яблока*“, „*четвертушка*“ бумаги и т. п.

точка и цифра 4 обозначаютъ, что цѣлое *разрѣзано* на *четыре* одинаковыя части...—Цифра же 3 надъ чертою обозначаетъ, что такихъ частей (*долей*) взято три"... И т. д.—Нагляднымъ, для самостоятельнаго изготовленія учениками, пособіемъ можетъ служить чертежъ:

1			
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

длинною, если возможно, въ одинъ вершокъ.

Представленіе не столько объ *Остальные дроби съ однозначными знаменателями.* обозначеніи другихъ долей и дробей, сколько о самомъ существованіи другихъ долей, конечно, необходимо учащемуся раньше, чѣмъ онъ приступитъ къ дѣленію чиселъ. Къ счастью дѣтей, нѣкоторое представленіе о существованіи другихъ долей у нихъ есть. Къ несчастью же для дѣтей, обыкновенно считается необходимымъ раньше „проходить“ съ ними дѣленіе *чиселъ*, а потомъ уже переходить къ „курсу“ дробей, предпославъ ему многое множество вовсе не подходящаго матеріала (о дѣлителяхъ, о наименьшемъ кратномъ числѣ, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и т. п.). —На всякій случай здѣсь можно замѣтить, что всякія упражненія въ складываніи учениками, по глазомѣру, бумажки извѣстной длины на равныя между собою части, *упражнение въ высшей степеніи полезное.*—Полезно также черченіе прямой и раздѣленіе ея на нѣсколько одинаковыхъ частей по глазомѣру, а равно раздѣленіе круга (тоже по глазомѣру) на нѣсколько одинаковыхъ секторовъ. Эти упражненія требуютъ не много времени, но ведутъ къ очень важнымъ

результатамъ, а именно къ образованію въ умѣ учениковъ вѣрныхъ и ясныхъ представлений о цѣломъ и о доляхъ цѣлаго. А все это весьма важно и само по себѣ, и *прямо необходимо* для предстоящей работы надъ дѣленіемъ.

Два вида дѣленія. Дѣленіе чиселъ, какъ извѣстно, слѣдуетъ различать двоякаго рода: въ одномъ случаѣ число дѣлится на *известное число* одинаковыхъ частей, а въ другомъ—на извѣстныя одинаковыя части. Въ первомъ случаѣ требуется узнать, какъ велика *каждая* изъ одинаковыхъ частей, во второмъ—*число* одинаковыхъ частей.—Начинать надо съ упражненій въ дѣленіи на извѣстное число одинаковыхъ частей.

Дѣленіе на известное число одинаковыхъ частей. Наглядными пособиями при дѣленіи перваго рода должны служить отдѣльные предметы (кубки, карточки, слова шишки, спички), но отнюдь не счеты, и особенно—не счеты торговые. Надо начинать съ дѣлимаго болѣе или менѣе значительнаго, притомъ удовлетворяющаго слѣдующимъ условіямъ: 1) оно должно дѣлиться на цѣло безъ остатка на какое-либо однозначное число, и 2) частное должно быть тоже числомъ однозначнымъ.—Цѣль употребленія нагляднаго пособия—уразумѣніе учениками: а) возможности дѣйствительнаго раздѣленія даннаго *числа* кубиковъ или другихъ предметовъ на извѣстное число одинаковыхъ частей, и б) возможности *вычисленія* величины каждой части безъ дѣйствительнаго дѣленія, а съ помощью таблицы умноженія.—Первою должна быть задача въ родѣ слѣдующей: „*раздать* на самомъ дѣлѣ 35 карточекъ или спичекъ пяти мальчикамъ“, а вторую: „какъ *разсчитать*, по сколько достанется каждому?“ Первую ученики должны разрѣшить на самомъ дѣлѣ, *раздавая* предметы

всѣмъ пяти мальчикамъ по одному предмету на каждого, а вторую они должны рѣшать, *придумывая*, по сколько предметовъ можетъ достаться каждому: по одному—мало, по два—тоже мало (почему мало?) и т. д.—Въ результатѣ получится то, что ученики поймутъ истинную связь дѣленія съ умноженіемъ.—Когда это будетъ достигнуто, можно обратиться къ случаямъ, когда дѣленіе совершается съ остаткомъ (но, конечно, тоже при однозначномъ дѣлителѣ и однозначномъ частномъ). А послѣ этого можно обратиться и къ случаямъ, когда, при однозначномъ дѣлителѣ, въ частномъ получается 10 единицъ, и когда при дѣлителѣ, равномъ 10, въ частномъ получается однозначное число ($60 \overline{) 6}$, $62 \overline{) 6}$, $60 \overline{) 10}$ и $62 \overline{) 10}$).—За знакъ дѣленія на извѣстное число одинаковыхъ частей лучше всего принять знакъ $\frac{\quad}{\quad}$, который пишется, какъ выше указано.

За знакъ дѣленія на извѣстныя Дѣленіе на извѣстныя части. части можно принять другой знакъ (а именно двоеточіе), дабы различныя по своему смыслу дѣйствія, въ цѣляхъ требованій наглядности, обозначались и знаками различными, по крайней мѣрѣ, на низшихъ ступеняхъ обученія арифметикѣ.—Наглядными же пособиями при дѣленіи на извѣстныя одинаковыя части могутъ служить опять-таки отдѣльные предметы, а не счеты, особенно—не счеты торговые.—Порядокъ упражненій подобенъ тому, который приведенъ выше для дѣленія перваго рода, а именно: сначала дѣти должны убѣдиться а) въ самой возможности разложенія даннаго числа предметовъ на группы по столько-то единицъ въ каждой группѣ, и б) въ возможности *вычисленія* числа частей съ помощью таблицы умноженія.

Съ помощью наглядныхъ Связь обоихъ видовъ дѣленія. пособій можно освѣтить и взаимную связь между обоими видами дѣленія. Если 35

спичекъ надо раздать пяти мальчикамъ поровну, то каждый получитъ по 7-ми спичекъ, т. е. по столько спичекъ, сколько группъ по пяти спичекъ содержится въ 35-ти спичкахъ. Дѣйствительно: раздавая спички 5-ти мальчикамъ, я могу сначала взять пять спичекъ, ихъ раздать всёмъ мальчикамъ, потомъ взять еще пять спичекъ и ихъ раздать пяти мальчикамъ, и т. д. Все дѣло—только въ томъ, чтобы ученики сами *на дѣлѣ выполняли* всѣ тѣ дѣйствія, о которыхъ говорится въ этомъ разсужденіи, и тогда они поймутъ, что численные результаты, получаемые въ записяхъ

$$35 \text{ сп. } \div 5 \text{ и } 35 \text{ сп. } : 5 \text{ сп.}$$

одинаковы не по случайности, а по необходимости. Но въ первомъ случаѣ получается, что

$$35 \text{ сп. } \div 5 = 7 \text{ сп. (искомая группа)}$$

а во второмъ, что

$$35 \text{ сп. } : 5 \text{ сп.} = 7 \text{ (число групп)}.$$

Должно, однако же, помнить, что полное освѣщеніе этой связи болѣе или менѣе доступно ученикамъ только на высшихъ ступеняхъ обученія и что для дѣла полезнѣе, если ученики на низшихъ ступеняхъ обученія больше обращаютъ вниманія не на трудно постижимое сходство, а на очевидное различіе между обоими случаями дѣленія.

Ключевые вопросы „во сколько разъ больше или меньше?“ На занимающей насъ ступени обученія вполне умѣстно усвоеніе учениками смысла вопроса: „во сколько разъ больше или меньше?“ (ср. стр. 75). Смысль этого вопроса уясняется легко въ связи съ упражненіями, относящимися сначала до смысла положительныхъ выраженій: „увеличить во столько-то разъ“ и „больше во столько-то разъ“, а также „уменьшить во столько-то разъ“ и „меньше во столько-то разъ“. —Когда же очередь дошла до занимающаго

насъ *вопроса*, то ученики должны ясно понять на наглядныхъ пособіяхъ, что все дѣло только въ раздѣленіи даннаго числа на части, изъ которыхъ въ каждой столько же единицъ, сколько единицъ во второмъ числѣ (ср. стр. 85)

При прохожденіи дѣленія, въ *Единицы мѣры*. курсъ должно быть введено по возможности большіе единицы мѣры (фунтъ, лоть, аршинъ, дюймъ, метръ) и упражненій въ ихъ дѣленіи на извѣстное число одинаковыхъ частей. Вообще единицы мѣры должны появляться въ курсѣ не сразу, а постепенно, на каждый, сколько-нибудь для того подходящей, ступени. — Большого вниманія заслуживаютъ мелкія единицы вѣса: лоть и золотики. Если въ числѣ школьныхъ учебныхъ пособій есть какіе-нибудь маленькіе (въ родѣ аптекарскихъ) вѣсы, то дѣти должны изъ оловянной бумаги, въ какую заворачиваютъ чай, — въ крайнемъ случаѣ изъ бумаги обыкновенной, — приготовить комочки вѣсомъ въ золотики, а при достаточной для того чувствительности вѣсовъ — даже комочки вѣсомъ въ долю. Точно также полезно самостоятельное взвѣшивание дѣтьми разныхъ предметовъ дѣтскаго обихода. Этотъ самостоятельный разновѣсъ принесетъ дѣтямъ большую пользу, чѣмъ выучиваніе такъ наз. „таблицы мѣръ“, назусть, которымъ иногда начинаютъ „статью“ объ именованныхъ числахъ. — Весьма полезно и гораздо полезнѣе, чѣмъ это безсмысленное выучиваніе назусть, также изготовленіе дѣтьми изъ бумаги (или изъ деревянныхъ прутьевъ) самостоятельнаго аршина, фута и метра съ подраздѣленіями по имѣющимся въ школѣ образцамъ мѣръ длины.

Сводя во-сдвигъ изложенное выше, *Общие выводы*. можно прійти къ слѣдующимъ общимъ выводамъ.

а) Арифметика первой сотни на всѣхъ своихъ ступеняхъ не только допускаетъ, но *требуетъ*

широкаго и многообразнаго примѣненія *почти всѣхъ* наглядныхъ пособій.

б) Есть степени обученія, на которыхъ нѣкоторыя наглядныя пособия совсѣмъ не цѣлесообразны, но на которыхъ за-то другія—прямо обязательны.

в) Въ торговыхъ счетахъ, когда они служатъ не вычислительнымъ, а *нагляднымъ*, пособиемъ для освѣщенія *десятичной нумераціи* число косточекъ на каждой проволоцѣ должно быть равно *девяти*, а не *десяти*, ибо значащихъ цифръ въ десятичной нумераціи только девять. Для *вычисленія* же на счетахъ необходимо, чтобы на каждой проволоцѣ было по десяти косточекъ.

г) Наглядныя пособия служатъ иногда не только для образованія подлежащихъ ариѳметическихъ представленій, но помогаютъ даже *разсужденію*, облегчая процессъ послѣдняго и не нарушая его логическаго смысла.

д) Наглядныя пособия въ ариѳметикѣ первой сотни помогаютъ также усвоенію такъ наз. „таблицъ“ сложенія и умноженія и уразумѣнію условнаго значенія употребляющихся въ ариѳметикѣ искусственныхъ выраженій („больше на столько-то“, „увеличить и уменьшить на столько-то“ и „во столько-то разъ“, и т. п.).

е) Они даютъ обильный и отличный матеріаль для *самыхъ первыхъ* задачъ, съ помощью которыхъ ученики образуютъ себя первыя ариѳметическія представленія, и избавляютъ дѣтей отъ нецѣлесообразной работы словесной памяти, т. е. какъ-разъ того вида памяти, который въ ариѳметикѣ играетъ послѣднюю роль.

ж) Учитъ дѣтей ариѳметикѣ первой сотни значить учить ихъ прежде всего цѣлесообразному употребленію наглядныхъ пособій.

ГЛАВА III.

Арифметика многозначных чиселъ.

Для нумераціи трехзначныхъ чиселъ наилучшимъ пособіемъ Нумерація многозначныхъ чиселъ. служатъ счеты Шохоръ-Троцкаго, но только съ проволоками по *девяти* (а не по десяти) косточекъ на каждой. При этомъ условіи существуетъ полное сходство письменнаго, съ помощью арабскихъ цифръ, обозначенія чиселъ съ обозначеніемъ на счетахъ.—Спички уже теряютъ свое прежнее значеніе въ качествѣ нагляднаго пособія, такъ какъ ихъ потребовалось бы тогда очень много и такъ какъ пачки спичекъ въ десять пучковъ, по десяти спичекъ въ каждомъ пучкѣ, ужъ слишкомъ громоздки. Хорошо, если хоть одна такая пачка есть на-лицо, чтобы съ ея помощью воздѣйствовать на зрѣніе и воображеніе учениковъ и чтобы они не начали слишкомъ легко относиться къ сотнѣ.—Но само собою разумѣется, что ученики должны умѣть *считать* въ предѣлѣ первой тысячи, т. е. безошибочно и сознательно переходить изъ одного десятка въ другой и изъ одной сотни въ слѣдующую. — Хорошо продѣлать съ учениками слѣдующее упражненіе (время, на него затраченное, окупится необычайной ясностью представленія о способѣ полученія чиселъ): одинъ ученикъ рисуетъ черточки (горизонтально, чтобы онѣ не были похожи на обозначеніе числа, одну черточку подъ другой), и когда онъ нарисуетъ ихъ десять штукъ, онъ же кладетъ деся-

токъ на русскихъ счетахъ; тогда другой повторяетъ ту же операцію еще разъ, и т. д. Такимъ образомъ ученики научатся серьезно относиться къ числамъ, а не только механически обозначать ихъ помощью цифръ. Они также поймутъ одну изъ выгодъ условнаго обозначенія чиселъ: считать единицы долго и хлопотно, а обозначить его—недолго и просто.—Очень занимаетъ учениковъ и слѣдующее поучительное, но наглядное упражненіе: одинъ ученикъ *считаетъ* единицы, другой же *у себя отмѣчаетъ*, загибая по одному пальцу на одной изъ рукъ, только *число* десятковъ, а третій отмѣчаетъ у себя, также на пальцахъ, только *число* сотенъ. Третій, такимъ образомъ, является *счетчикомъ и изобразителемъ цифры сотенъ*, второй—*цифры десятковъ*, а третій—въ концѣ концовъ—*счетчикомъ-носителемъ* цифры отдѣльныхъ единицъ. Ставить при этомъ этихъ трехъ учениковъ надо лицомъ къ классу рядомъ, притомъ такъ, чтобы „цифра“ сотенъ стояла, считая отъ лѣвой руки къ правой, на первомъ мѣстѣ, „цифра“ десятковъ—на второмъ, а „цифра“ единицъ—на третьемъ мѣстѣ. Когда одна изъ этихъ цифръ—нуль, то ученикъ, ее изображающій, можетъ обѣ руки заложить за спину.

Сложеніе трехзначныхъ чиселъ.

Когда дѣти убѣдились, что складывать изустно можно только „легкія“ трехзначныя числа (300 да 200, 500 да 75, 820 да 110 и т. п.), то можно обратиться къ счетамъ Шохоръ-Троцкаго съ проволоками *по десяти* (а не по девяти) косточекъ на каждой. На этомъ пособіи дѣти убѣдятся въ удобствѣ *вычисленія* на счетахъ. Но въ этомъ случаѣ торговые счета будутъ уже не нагляднымъ пособіемъ, а *вычислительнымъ* инструментомъ, замѣняющимъ *изустный* счетъ. Появленіе ряда тысячъ въ результатѣ сложенія не только не вредно, но даже полезно. Проволоку тысячъ

надо взять на большемъ разстояніи отъ проволоки сотенъ, чѣмъ то разстояніе, на которомъ находятся одна отъ другой проволоки сотенъ, десятковъ и единицъ: надо вынуть четвертую проволоку. Это окажетъ услугу при нумераціи тысячъ.

Для наведенія же учениковъ на *Письменное сло-
женіе трехзнач-
ныхъ чиселъ.* мысль о способѣ такъ наз. письменнаго сложенія и о пользѣ этого способа, надо обратиться уже не къ счетамъ, а къ „соломѣ“, хотя бы даже въ числахъ, набранныхъ спичками, было не больше одной сотни. Вѣдь весь вопросъ только въ томъ, что можно начать работу сложенія не съ единицъ высшаго разряда, а съ единицъ самаго низшаго разряда, и что полученные при этомъ десятки можно прибавить къ десяткамъ. — Основное начало обученія, наглядность его приемовъ, требуетъ такой послѣдовательности, чтобы ученики какъ бы сами изобрѣтали способы, болѣе цѣлесообразные, чѣмъ ранѣе ими усвоенные. Понятно, что сначала надо брать примѣры, въ которыхъ отъ сложенія разряда единицъ не получается ни одного десятка, а отъ сложенія десятковъ — ни одной сотни (213 + 324 и т. п.)

Когда это достигнуто, естественно обратиться еще къ тому способу письменнаго сложенія, который подобенъ сложенію изустному или сложенію на счетахъ, т. е. начинать его съ единицъ высшихъ разрядовъ, чтобы убѣдиться въ томъ, что онъ не всегда удобенъ. Въ неудобствѣ же его для всѣхъ случаевъ, когда отъ сложенія единицъ низшаго разряда получается хоть одна единица высшаго, ученики должны убѣдиться во-очію, *собственными опытами*, а не изъ словъ учителя. Въ этомъ и будетъ состоять наглядность приема. А когда ученики, всѣ до единаго, убѣдились въ неудобствахъ такого производства сложенія на письмѣ, тогда можно навести учениковъ на мысль, что

*Переходъ къ
письменному
производству
сложенія.*

можно начинать производство сложения съ единиць низшаго разряда. (Что числа удобнѣе записывать столбцами, до этого ученики должны ранѣе *сами* додуматься). Для этой цѣли полезнѣе всего обратиться не къ счетамъ, а опять-таки къ соломѣ, хотя бы, какъ это замѣчено выше, спичекъ въ нашемъ распоряженіи было не особенно много.—Здѣсь можно обратиться къ внутренней наглядности, подѣйствовавъ на воображеніе учениковъ и заставивъ ихъ *представить себѣ* составленіе сначала десятковъ изъ единицъ перваго разряда, затѣмъ сотенъ—изъ единицъ втораго разряда, и т. д.

*Письменное
производство
вычитанія.*

Письменное производство вычитанія требуетъ тѣхъ же предосторожностей. Въ то время, какъ изустное вычитаніе даже трехзначныхъ чиселъ представляетъ трудности весьма значительныя, производство этого вычитанія на счетахъ требуетъ, такъ сказать, только техническаго навыка.

*Вычитаніе на
счетахъ.*

Этотъ послѣдній пріобрѣтается только съ помощью многочисленныхъ упражненій. Поэтому, если не у каждаго ученика есть свой экземпляръ небольшихъ русскихихъ счетовъ, то школа дать дѣтямъ навыкъ этотъ почти не въ состояніи, — въ особенности при трехгодичномъ курсѣ. Обязывать же къ тому школу нѣтъ основанія (ср. стр. 27). Сравнительная трудность производства вычитанія на счетахъ должна быть дѣтями понята и привести ихъ въ послѣдствіи къ убѣжденію, что письменное производство вычитанія представляетъ значительныя выгоды.—Нагляднымъ же пособіемъ,

*Солома и раз-
дробленіе ед-
ницы.*

наиболѣе для того подходящимъ, является опять-таки солома, причемъ такъ называемый и не наглядный „заѣмъ“ единицы замѣняется „развязываніемъ“ ея или ея „раздробленіемъ“. Раздробле-

пiемъ (а не займомъ) должно быть это преобразованiе и при письменномъ производствѣ дѣйствiя. — Прекраснымъ прiемомъ является обращенiе къ внутренней наглядности, опирающейся на слѣдующiй „денежный“ примѣръ: „у одного человѣка 326 р., притомъ слѣдующими деньгами: 3 сотенныхъ кредитныхъ билета, двѣ золотыхъ монеты, по 10-ти рублей каждая, и 6 рублевиковъ; изъ нихъ онъ долженъ отдать долгу 158 рублей. Какъ онъ это сдѣлаетъ?“ Очевидно, что здѣсь рѣчь идетъ о „размѣнѣ“ денегъ, по размѣнѣ этотъ долженъ быть произведенъ ариметически — цѣлесообразно: надо размѣнять одну десятирублевку на рублевки, а одну сторублевку — на десятирублевки.

Для дальнѣйшихъ успѣховъ въ письменномъ производствѣ сложения и вычитанiя надъ многозначными числами надобно овладѣть нумерацiею этихъ послѣднихъ въ большемъ объемѣ (впрочемъ, не далѣе миллионовъ). Счеты Шохорь-Троцкаго или вообще русскiе счеты являются въ этомъ случаѣ наилучшимъ нагляднымъ пособiемъ. Для болѣе быстраго и безошибочнаго достиженiя цѣли полезно соблюсти слѣдующiя условiя: 1) ученики должны умѣть считать, т. е. вѣрно переходить изъ одного десятка въ другой, изъ одной сотни въ другую, изъ одной тысячи — въ слѣдующую, изъ одного десятка тысячъ въ слѣдующiй и т. д.; 2) проволоку на счетахъ сначала надо взять только шесть, потомъ — семь (седьмую для отдѣльныхъ миллионовъ), и только по мѣрѣ надобности прибавлять по одной проволоку — слѣва; 3) между проволокою простыхъ тысячъ и сотенъ и между проволокою миллионовъ и сотенъ тысячъ надо сдѣлать промежутокъ, вынувъ прочь по одной проволоку въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ; 4) на каждой про-

Денежные примѣры.

Нумерацiя многозначныхъ чиселъ.

волокъ надо взять только по девяти (а не по десяти) косточекъ. — Упражненія должны быть сходны съ упражненіями, охарактеризованными на стр. 89, и тогда легкій переходъ къ цифровому обозначенію чиселъ будетъ вполне обеспеченъ. — Между низшею *цифрой* класса тысячъ и вышею *цифрой* класса единицъ, а равно между низшею цифрой класса миллионѣвъ и вышею цифрой класса тысячъ, не надо ставить ни запятой, ни точки, а лучше всего дѣлать промежутки, величиною приблизительно съ цифру, т. е. надо писать такъ: 13 256; 2 603 375, и т. д. — Очень важенъ одинъ пунктъ. Научившись писать большія числа, дѣти начинаютъ относиться легкомысленно и не довольно вдумчиво къ вопросу о *величинѣ* чиселъ, и тысяча кажется имъ меньше своихъ настоящихъ размѣровъ, не говоря уже о миллионѣ. На это надо обратить свое вниманіе, и лучшимъ для того средствомъ можетъ служить усиленная работа воображенія надъ вопросами такого рода: тысяча дней много ли больше, чѣмъ три года? большой ли столбикъ получится (это надо сдѣлать съ аршинномъ въ рукахъ), если положить тысячу тетрадей, — одну на другую? (при рѣшеніи этого вопроса надо, конечно, избѣгать примѣненія дѣленія). Хотя дѣти еще не умѣютъ производить такъ называемаго „превращенія“ именованныхъ чиселъ, но во всякомъ случаѣ должно объяснить дѣтямъ, что миллионъ — число громадное. Для этого могутъ служить, напр., слѣдующіе факты: въ году минутъ сче- томъ всего 525 600, т. е. немного болѣе полу-милліона; отъ Рождества Христова до настоящаго времени прошло гораздо меньше одного милліона дней; чтобы пройти 1 000 000 верстъ, надо идти 35 дѣтъ безъ малаго, если проходить по 5 верстъ въ часъ и ежедневно ходить по де-

сяти часовъ.—Очень полезно сообщить дѣтямъ подобныя свѣдѣнія даже въ томъ случаѣ, когда они еще не въ состояніи провѣрить этихъ данныхъ. Но еще полезнѣе возвратиться къ нимъ, когда они уже умѣютъ умножать и дѣлить многозначныя числа. Въ этомъ случаѣ полезно вычислить съ ними, какую длину займетъ одинъ миллионъ пятачковъ, если пятакъ положить къ пятаку—все въ одномъ направленіи, какой высоты столбикъ образуется, если положить одинъ миллионъ пятачковъ другъ на дружку, и т. п.

Сложеніе многозначныхъ чиселъ и вычитаніе ихъ не представляетъ никакихъ трудностей помимо тѣхъ, о которыхъ говорится на страницахъ 90 и 91, а потому на этомъ останавливаться не представляется надобности.—При вычитаніи предположеніе, будто существуютъ денежные знаки тысячерублеваго и высшихъ достоинствъ, позволительно, такъ какъ раздробленіе одной единицы въ 10 единицъ ближайшаго низшаго достоинства учениками постигнуто.—Вычисленіе на счетахъ должно относиться преимущественно до сложенія многозначныхъ чиселъ, и только при достаточномъ для того досугѣ — также къ вычитанію. Но косточекъ на каждой проволоцѣ надо тогда взять по десяти, а не по девяти, какъ при изученіи нумераціи.

Сложеніе и вычитаніе многозначныхъ чиселъ.

Умноженіе многозначныхъ чиселъ на однозначное должно опираться на наглядность письменную. Для этого достаточны упражненія въ родѣ слѣдующихъ:

Умноженіе на однозначное число.

322	567	322 × 4
322	567	567 × 4
+ 322	+ 567	475 × 4
322	567	217 × 4

и т. п. Надо при этомъ только обратить вниманіе учениковъ на два пункта: 1) что имъ не надо говорить: 7 да 7 четырнадцать, 14 да 7 двадцать восемь, а надо прямо говорить: 4-жды 7 двадцать восемь, 8 пишу, два въ умѣ, и т. п.; 2) что единицы, оставшіяся въ умѣ, разумнѣе прибавлять не къ слагаемымъ, т. е. (см. 3-ій примѣръ) не къ 6-ти, а къ новому произведенію 6-ти на 4, т. е. къ 24-мъ.—Благодаря всему этому, ученики, сдѣлавъ нѣсколько примѣровъ, поймутъ размѣръ того благодѣянія, которое оказываетъ человѣку таблица умноженія и сокращенная запись.—Замѣна умноженія однозначнаго числа на многозначное умноженіемъ однозначнаго на многозначное должна быть выяснена съ помощью уже извѣстныхъ ученикамъ приемовъ перемѣщенія однозначныхъ сомножителей (ср. стр. 68) и съ помощью разсужденій, слѣдующимъ образомъ опирающихся на внутреннюю наглядность: пусть требуется расчитать, во что обойдутся 2 321 аршинъ ситца по 7 коп. за аршинъ; для этого сначала заплатимъ за 2 321 арш. *по одной копейкѣ* за аршинъ; покупка обойдется тогда въ 2 321 копейки; заплатимъ *еще* по одной копейкѣ за аршинъ, тогда доплатимъ еще 2 321 копейку; все ли мы заплатили, что слѣдуетъ? и т. д.—При выясненіи этого умноженія однозначнаго числа на многозначное съ помощью счетовъ, тоже очень легко убѣдиться, что оно сводится, собственно говоря, къ болѣе цѣлесообразному умноженію многозначнаго числа на однозначное.

Дѣленіе многозначнаго числа на однозначное.

Когда умноженіе многозначныхъ чиселъ на однозначныя учениками усвоено вполнѣ, то можно перейти къ дѣленію многозначныхъ чиселъ на однозначныя. Начинать надо, конечно, съ двузначныхъ дѣлимыхъ, дающихъ двузначныя же частныя. Нагляднымъ пособіемъ, наиболѣе для

этой ступени подходящимъ, является въ началѣ опять-таки „солома“. Впослѣдствіи же чувственная наглядность уже не нужна, а можно обратиться къ задачамъ надъ денежными знаками.—Но и при этомъ строго надо отличать дѣленіе на известное *число* одинаковыхъ частей отъ дѣленія на *известныя* одинаковыя части. Въ первомъ случаѣ приходится только „размѣнивать“ единицы одного разряда въ единицы ближайшаго низшаго разряда, во второмъ же приходится поступать нѣсколько сложнее.—Пусть требуется раздѣлить 8 563 руб. на три одинаковыя части; 6 тыс. раздѣлимъ на три одинаковыя части, получимъ въ каждой части по двѣ тысячи, а въ остаткѣ тоже двѣ тысячи; „размѣняемъ“ тысячи на сотни, получимъ 20 сотенъ, да еще 5 сотенъ, всего 25 сотенъ, которыя надо раздѣлить на 3 одинаковыя части, и т. д.—Пусть предложена другая задача: „куплено сукна на 8 563 рубля, по 3 рубля за аршинъ; сколько куплено аршинъ?“ Здѣсь не приходится „мѣнять“ въ житейскомъ смыслѣ этого слова. Тутъ сначала приходится, если мы не желаемъ впасть въ отвлеченности, дѣйствовать инымъ способомъ на воображеніе учениковъ. А именно: 8 тысячъ рублей содержитъ 6 тысячъ рублей, да еще двѣ тысячи, а 6 тысячъ все равно, что 2 000 разъ по 3 рубля; стало-быть, дѣля 6 000 рублей на части по 3 р. въ каждой, получаемъ, что такихъ частей 2 000. Осталось 2 000 рублей да 500 руб., т. е. 25 сотенъ рублей. Но 25 сотенъ рублей все равно, что 24 сотни рублей да еще сотня рублей, а 24 сотни рублей — то же, что 800 разъ по 3 рубля. Стало-быть, 3 р. въ 24-хъ сотняхъ рублей содержится 800 разъ. И т. д.—Время, потраченное на подобныя упражненія, окупится впослѣдствіи, при усвоеніи учениками механизма кратнаго сравненія.

Умноженіе на 10. Для надлежащаго усвоенія учениками производства умноженія многозначнаго числа на многозначное необходимо, какъ извѣстно, чтобы они вполнѣ усвоили себѣ не только механизмъ умноженія на 10, на 100, на 1 000 и т. д. (т. е. приписку нулей къ цифровому обозначенію множимаго), но и самую сущность этого умноженія. Наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ является „солома“, но ея тогда требуется нѣсколько сотенъ. Цѣлесообразнѣе сложеніе десяти одинаковыхъ стагаемыхъ, а также перестановка сомножителей. Начинать надо, конечно, съ умноженія однопозначнаго и двухзначнаго числа на 10, а не прямо съ умноженія многозначнаго числа.—Разсужденія о томъ, что при умноженіи на десятокъ, каждая де единица увеличивается въ 10 разъ, не приводятъ къ цѣли. Гораздо лучше перемѣна порядка сомножителей: надо помножить 37 на 10; но 10 разъ по 37-ми все равно, что 37 разъ по 10-ти, а 37 разъ по 10-ти все равно, что 10 разъ по 10-ти, да еще 10 разъ по 10-ти да еще 10 разъ по 10-ти, получится 300,—да еще 7 разъ по 10-ти, всего получится 370.

Умноженіе на 20, 30 и т. д. Помноженіе на другое число десятковъ (на 20, 30 и т. д. до 100 включительно) надо вести, тоже обращаясь къ такъ называемой „внутренней наглядности“: 10 разъ 37 будетъ 370, а 20 разъ 37 будетъ то же что 10 разъ 37 да еще 10 разъ 37. И т. п.—Вся игра въ приписываніе нулей должна быть открыта самими учениками, а отнюдь не навязана имъ учителемъ.

Перемноженіе многозначныхъ чиселъ. Умноженіе многозначнаго числа на многозначное же вообще лишь по столько пуждается во внесеніи большей наглядности въ обученіе этому производству, по сколько обычный порядокъ помно-

женія сначала на цифру единицъ множителя, потомъ на цифру десятковъ его, далѣе на цифру сотенъ и т. д., вовсе не удовлетворяетъ требованіямъ начала наглядности пріемовъ обученія. Когда я говорю, что данное множимое надо взять слагаемымъ 357 разъ, то естественно, что его надо взять сначала 300 разъ слагаемымъ, потомъ — еще 50 разъ слагаемымъ и, наконецъ, еще 7 разъ слагаемымъ, а не наоборотъ. Поэтому цѣлесообразно располагать вычисленія (и этимъ расположеніемъ именно и будетъ удовлетворенъ принципъ наглядности пріемовъ обученія, а также принципъ сознательности работы) сначала такъ:

$$а) \quad 876 \times 354 = 310\ 104$$

$$876 \times 300 = *) \quad 87600 \times 3 = 262\ 800$$

$$876 \times 50 = *) \quad 8760 \times 5 = 43\ 800$$

$$876 \times 4 = 3\ 504$$

затѣмъ такъ:

$$б) \quad 587 \times 473 = 277\ 951$$

$$58700 \times 4 = 234\ 800$$

$$58700 \times 7 = 41\ 090$$

$$587 \times 3 = 1\ 761$$

а въ концѣ-концовъ такъ:

$$в) \quad 587 \times 473 = 277\ 651$$

$$2348$$

$$4109$$

$$1761$$

*) Записи $876 \times 300 =$ и $876 \times 50 =$ могутъ быть опускаемы и замѣняемы изустными замѣчаніями о томъ, что требуется 876 помножить на 300, а для этого надо 876 помножить на 100, полученное же произведеніе 87600 (его надо записать подъ записью множимаго) помножить на 3, и т. д. Но особенно ускорять переходъ къ третьему образцу записей и къ обычно употребляемому и ничѣмъ, кромѣ рутины, не оправдываемому образцу, не слѣдуетъ. Это — ускореніе кажущееся и вредное.

Раздробленіе именованныхъ чиселъ. Къ умноженію на всѣхъ ступеняхъ примыкаетъ рѣшеніе соответствующихъ задачъ на раздробленіе простыхъ и составныхъ именованныхъ чиселъ. Такъ, когда изучается таблица умноженія, можно предлагать задачи: „въ сажени 3 аршина; сколько аршинъ въ 5-ти саженьяхъ, или въ 5 саженьяхъ и 2-хъ аршинахъ?“ и т. п. Когда дѣти научились складывать двузначныя числа, они могутъ разрѣшать вопросы о томъ, сколько вершковъ въ пяти аршинахъ, сколько дюймовъ въ сажени, и т. п.

Къ умноженію многозначныхъ чиселъ слѣдуетъ приурочивать упражненіе въ раздробленіи такихъ именованныхъ чиселъ, гдѣ единичныя отношенія выходятъ за предѣлы перваго десятка и гдѣ множителемъ можетъ явиться многозначное число. При этомъ надо соблюдать только два условія: 1) *знакомство дѣтей съ мѣрами должно быть вполне нагляднымъ* и 2) *расположеніе вычисленій тоже должно быть прозрачно и наглядно*. Даже такой невозможный въ жизни примѣръ, какъ раздробленіе 4-хъ пуд. 17 ф. 23 л. 1 зол. и 84-хъ долей въ доли, пріобрѣтаетъ нѣкоторый смыслъ, какъ задача, если вычисленія располагать такъ:

$$4 \text{ пуда } 17 \text{ ф. } 23 \text{ зол. } 84 \text{ д.} = 1638036 \text{ долей}$$

$$I) 40 \text{ ф.} \times 4 = 160 \text{ ф.}; 160 \text{ ф.} + 17 \text{ ф.} = 177 \text{ фун}$$

$$II) 32 \text{ л.} \times 177 = 5664 \text{ л.}; 5664 \text{ л.} + 23 \text{ л.} = 5687 \text{ л.}$$

354

531

$$III) 3 \text{ зол.} \times 5687 = 17061 \text{ зол.};$$

$$17061 \text{ зол.} + 1 \text{ зол.} = 17062 \text{ зол.};$$

$$IV) 96 \text{ зол.} \times 17062 = 1637952 \text{ л.};$$

$$\frac{1706200}{- 68248}^*)$$

$$- 68248$$

*) 1706200 получилось отъ умноженія числа 17062 на 100 а 68248—отъ умноженія числа 17062 на 4.

Во главу навыковъ въ дѣленіи Дѣленіе на од-
нозначное число
единицъ высшаго
разряда. многозначныхъ чиселъ должно по-
ставить: а) дѣленіе на однозначное
число (выше разсмотрѣнное) и б)
дѣленіе на 10, на 100, на 1000 и т. д.—При дѣленіи
на одну единицу любого высшаго разряда (какъ
и вообще при усвоеніи дѣленія) надо различать
оба вида дѣленія. Въ обоихъ случаяхъ тре-
буется *различъ* (см. стр. 96) единицъ одного
разряда въ единицы низшаго, совершенно по-
добный тому, какой полезенъ при дѣленіи на
однозначное.—Для усвоенія же дѣтскими дѣленія
на нѣсколько единицъ какого-либо высшаго
разряда, полезно упражненіямъ въ этомъ дѣ-
леніи предпослать нѣкоторыя упражненія слѣ-
дующаго содержанія:

Когда надо раздѣлить длину это- Подготовка къ
дѣленію на нѣск.
дѣсятковъ, со-
тень и т. д. го стола на шесть одинаковыхъ
частей, я раздѣлю ее сначала на 3
одинаковыя части, а потомъ каждую треть на...?
и т. п. (все—на примѣрахъ нагляднаго и дѣй-
ствительнаго раздѣленія длины!)—Надо разрѣ-
зать яблоко на 4 одинаковыя части; можно раз-
дѣлить его пополамъ, а потомъ полученное по-
поламъ...—Когда надо разрѣзать конецъ верев-
ки на 6 одинаковыхъ частей, то можно его сна-
чала разрѣзать пополамъ, а потомъ полученное
на три одинаковыя части (наглядно!)...—Если
надо разрѣзать листъ бумаги на двадцать оди-
наковыхъ частей, то можно сначала разрѣзать
его пополамъ, а потомъ каждую половину на 10
одинаковыхъ частей, или сначала на 10 одина-
ковыхъ частей, а потомъ каждую часть попо-
ламъ (наглядно!). И т. п.—Раздѣлить 60 на 20
одинаковыхъ частей! (Сначала на 10 равныхъ
частей, получимъ 6, полученное пополамъ!). И т. п.

Для дальнѣйшаго усвоенія уче- Числа нррмьмъ,
закругльмьмъ и
нвалкругльмьмъ. никами дѣленія полезно различать

числа: а) круглыя (20, 30... 90, 200, 300,....900 и т. д.), б) закруглимья (19, 29, 39, 38, 296, 389, 589, 40, 32, 51, 411, 507 и т. д.), и в) неза-
круглимья (15, 25, 36, 152, 449, 561, 744 и г. п.).—
Раньше всего, путемъ внутренней наглядности,
ученики должны понять, что закруглимья чи-
сла существуютъ. Для этого можно прибѣгнуть
къ упражненіямъ слѣдующаго рода:

Если у меня 21 рубль, я могу сказать, что у
меня слиш ко мь 20 рублей; если у меня 19
рублей, я могу сказать, что у меня безъ мала-
го 20 рублей...—Числа: 31 и 32 близки къ
30-ти; 41 и 42—близки къ сорока; 28 и 29 близ-
ки къ 30-ти, 38 и 39 близки къ сорока...—У меня
59 рублей; много-ли мнѣ не хватаетъ до шести-
десяти?...—Шестьдесятъ круглое число, пять-
десять, сорокъ, двадцать—тоже...— Скажите-ка
какое-нибудь круглое число!..—У меня 49 копейкъ,
закруглите!..—У одного человека 68 коп., за-
круглите!.. Сколько будетъ?—11 и 12 близки къ
какому числу?...—21 и 22—къ какому?—41 и 42—
къ какому?—58 и 59? и т. п.

*Дѣленіе пред-
метовъ.* Переходъ къ дѣленію на закру-
глимое число можетъ опираться на
внутреннюю наглядность, обращающуюся къ за-
дачѣ о раздѣленіи какого-нибудь предмета (напр.
пирога) на закруглимое число (напр., на 29)
одинаковыхъ частей. Ученики должны понять:
а) что предметъ *легче* раздѣлить на 30 одинако-
выхъ частей, б) что это дозволительно, если мы
остатокъ тоже раздѣлимъ на 29 одинаковыхъ
частей, и в) что при этомъ мы не слѣлаемъ *ни-*
какой ошибки.

*Расчетъ цифръ
частнаго при
дѣленіи на за-
круглимое число.* Прислупить къ дѣленію числа
на закруглимаго дѣлителя можно,
напр., слѣдующимъ образомъ.
Пусть надо раздѣлить 738 на 29 частей; я буду
поступать такъ: если 7 сотенъ раздѣлить на 29

частей, сотни въ каждой части не получится: это ясно... Раздробимъ 7 сот. въ десятки, и т. д.—Теперь надо 73 десятка раздѣлить на 39 одинаковыхъ частей. Мы же 73 десятка—раздѣлимъ не на 29, а на 30 одинаковыхъ частей: сначала 73 десятка раздѣлимъ на десять частей, а полученные 7 десятковъ раздѣлимъ на 3 части; получимъ въ каждой части 2 цѣлыхъ десятка; а теперь разсчитаемъ—сколько у насъ „разойдется“ десятковъ на самомъ дѣлѣ, если возьмемъ такихъ частей всего 29 и въ каждую часть положимъ 2 десятка: 29 разъ 2 десятка—то же, что 2 раза 29 десятковъ, т. е. то же, что 58 десятковъ...—Нераздѣленныхъ десятковъ осталось 15... И т. д.—При кратномъ сравненіи поступаютъ аналогичнымъ образомъ.

При дѣленіи труднѣе всего „за- Дѣленіе на не-
закругленное
число. даваться“ цифрою частнаго въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлитель—число незакругленное. Лучше всего при этомъ дѣлать двѣ изустныя пробы, т. е.—изустно найти такимъ образомъ двѣ пробныхъ цифры вмѣсто одной искомой, и на ихъ основаніи найти искомую.—Пусть данъ примѣръ: раздѣлить 1575 на 35. Раздѣлимъ 157 десятковъ на 30 одинаковыхъ частей, получимъ, что въ каждой части не болѣе 5-ти десятковъ; раздѣлимъ на 40, получимъ, что въ каждой части не менѣе 3-хъ десятковъ. Очевидно, что пять десятковъ—слишкомъ много, а трехъ десятковъ слишкомъ мало. Возьмемъ въ каждую часть по 4 десятка, и т. д. Искомая цифра частнаго въ этомъ случаѣ равна цѣлой части средняго арифметическаго обихъ пробныхъ частныхъ, и это ученики *безъ всякихъ правилъ* и терминовъ въ состояніи понять и усвоить, если только приучить ихъ къ спокойному и сознательному опредѣленію двухъ пробныхъ частныхъ.—Обратиться къ совершенно житейскому

примѣру тоже не мѣшаетъ, съ тѣмъ, чтобы показать, что когда за столомъ 25 человѣкъ и надо раздѣлить каравай хлѣба на 25 одинаковыхъ частей, то, попробовавъ раздѣлить его на 20 частей, мы *обдѣлимъ* 5 человѣкъ, а попробовавъ раздѣлить на 30 частей, мы получимъ слишкомъ большой остатокъ. Поэтому намъ необходимо дать каждому такой кусокъ, чтобы онъ былъ меньше, чѣмъ двадцатая доля каравая, и больше, чѣмъ тридцатая его доля.

Превращеніе именованныхъ чиселъ. Превращеніе именованныхъ чиселъ примыкаетъ къ дѣленію (вѣрнѣе: къ кратному сравненію двухъ именованныхъ чиселъ), и усвоеніе дѣтми этого преобразования тоже много выигрываетъ при соблюденіи требованій внутренней наглядности. Эта послѣдняя приводитъ къ тому, что превращеніе дѣтн производятъ не по правиламъ, а по самому смыслу вопроса, не содержащаго въ себѣ ничего существенно новаго, если не дѣлать предмета поклоненія изъ общепринятыхъ способовъ расположенія вычисленій при этомъ преобразованіи. Все дѣло въ *рядѣ* задачъ: а) сколько *минуть* въ одномъ милліонѣ секундъ? б) а сколько часовъ въ такомъ-то числѣ минутъ (которое получено отъ рѣшенія первой задачи)? в) а сколько сутокъ въ такомъ-то числѣ часовъ? и т. д. Когда подобный *рядъ* задачъ разрѣшенъ на основаніи соображенія, то ученики поймутъ, что требованіе, выражаемое сначала чуждыми имъ разумѣнію словами: „превратить 1 000 000 секундъ въ единицы вышшаго наименованія“, только замѣняетъ собою цѣлый рядъ очень простыхъ и понятныхъ задачъ.

Задачи на (Особенное мѣсто въ курсѣ ариметики занимаютъ такъ наз. „задачи на время“, такъ какъ вопросы, предлагаемые въ этихъ „календарныхъ“ задачахъ (большую

частью изысканно-безжизненных), соприкасаются съ вопросами объ „эрѣ лѣтосчисленія“. Начипать надо, конечно, съ работы надъ часами дня и ночи, при чемъ нагляднымъ пособіемъ должны служить стѣнные или карманные часы и циферблатъ со стрѣлками. На этомъ послѣднемъ дѣти должны научиться „ставить“ время, — когда ученики усвоили себѣ обозначеніе часа дня и ночи и поняли, что началомъ сутокъ является полночь, можно перейти къ выработкѣ ясныхъ представлений: а) о началѣ недѣли, б) о началѣ мѣсяца, и в) о началѣ года. Когда эти представленія на цѣлесообразныхъ задачахъ выработаны, можно перейти къ представленію о началѣ лѣтосчисленія, т. е. о полуночи, послѣ которой наступилъ первый годъ отъ Рождества Христова, и о томъ, что это значитъ, когда говорятъ, напр., объ освобожденіи крестьянъ, что оно совершилось 19-го февр. 1861 г. — Остальное уже не трудно, особенно если своевременно заинтересовать учениковъ вопросами житейски понятными, напр., о томъ, сколько дней осталось до Пасхи, сколько дней отдѣляютъ праздникъ Покрова отъ праздника Рождества Христова, ит. п. — Обыкновенный, и особенно отрывной, календарь является не столько нагляднымъ пособіемъ, сколько предметомъ, съ которымъ учениковъ надо научить обращаться не только ради уразумѣнія или рѣшенія задачъ „на время“, но и ради гораздо болѣе важнаго для учениковъ приобщенія ихъ къ нѣкоторымъ культурнымъ интересамъ.

Въ ученіи о десятичныхъ дробяхъ ^{Десятичная дробь и ея обозначеніе.} важнѣе всего нумерація. — Обозначеніе ихъ можетъ быть приурочено къ счетамъ Шохоръ-Троцкаго. Полезно при этомъ сначала оставить слѣва только три проволоки съ шариками для цѣлыхъ трехзначныхъ чиселъ и постепенно присоединять еще по одной проволоки (для де-

сятыхъ долей, для сотыхъ и т. д.), отмѣчая смыслъ этихъ долей снизу на дощечкѣ и отдѣляя запятою (на той же дощечкѣ) проволоку единиць отъ проволоки десятыхъ. Тѣ же счеты помогутъ и чтенію десятичныхъ дробей, и первымъ двумъ дѣйствіямъ надъ этими дробями.— Для нумераціи нужны проволоки съ девятью шариками на каждой, а для первыхъ двухъ дѣйствій— съ десятью шариками на каждой.

Задачи на квадр. и кубич. мѣры. Какъ ни трудно внесеніе въ курсъ нѣк. учебныхъ заведеній, особенно—1 начальныхъ школъ, крайне важныхъ основныхъ геометрическихъ представленій, но, для практическихъ цѣлей и съ точки зрѣнія требованій образовательныхъ, они прямо необходимы. Представленія о прямой, объ углѣ, объ отвѣсномъ и о горизонтальномъ направленіяхъ, о перпендикулярѣ, объ окружности, объ измѣреніи угловъ градусами, о параллельныхъ прямыхъ, о квадратѣ, о прямоугольникѣ, о площади, о кубѣ, объ объемѣ, о прямоугольномъ брусьѣ (параллелепипедѣ) прямо необходимы.—Но всѣ эти представленія должны и могутъ выработаться въ сознаніи учениковъ не благодаря отвлеченнымъ опредѣленіямъ, а только благодаря рисованію и черченію. Не надо думать, что всѣ эти представленія требуютъ такой обработки, которая практикуется въ учебникахъ геометріи и въ основѣ которой лежатъ опредѣленія, аксіомы и теоремы съ доказательствами послѣднихъ. Не останавливаясь на каждомъ изъ вышенамѣченныхъ представленій, приведу слѣдующій рядъ упражненій, дающій понятіе о способѣ веденія относящихся сюда начальныхъ уроковъ:

Предварительныя геометрическія упражненія. Вотъ точка; проведемъ изъ нея на доскѣ прямую...—Можно ли отъ руки? (Можно)...—Но можно и съ помощью линейки...—Что мы провели?

(Прямую).—Откуда? (изъ точки).—Въ какомъ направленіи? (Вотъ въ этомъ!..) — Много ли можно изъ точки провести прямыхъ? (Сколько угодно).—Вотъ прямая линія...—А это—не прямая...—Это—тоже линія, но не прямая!.. и т. д. (Ученики должны, конечно, и сами поупражняться въ проведеніи прямыхъ линій на доскѣ, на полу, въ тетради).—Проведу прямую изъ точки...—Что я сдѣлалъ?...—Проведу изъ той же точки еще одну прямую въ направленіи прямо-противоположномъ... — Гдѣ направленіе прямо противоположное?.. (Всѣ, безъ исключенія, ученики должны поупражняться въ изображеніи прямыхъ и въ продолженіи прямыхъ въ ту же и прямо-противоположную сторону).—Проведу прямую изъ точки...—Проведу другую прямую, въ другомъ направленіи, но не въ прямо-противоположномъ...—Что получилось?... — Получился уголь... — Начертите уголь!.. — Еще уголь!..—Гдѣ вершина угла?...—Гдѣ стороны его?...—Кто знаетъ?...—Начертимъ уголь!..—Еще одинъ!..— Вырѣжемъ изъ бумаги такой же уголь, какъ второй!..—На длину сторонъ не смотрите,—уголь все тотъ же, хотя бы стороны его были меньше сторонъ этого угла...—Вотъ уголки изъ бумаги—одинаковые, хоть у нихъ стороны и разные...—Это—углы равные между собою...—Этотъ уголь равенъ тому...—Вотъ уголь!—Начертимъ еще одинъ!..—Вырѣжемъ изъ бумаги уголь, равный второму...—Вотъ первая сторона (нижняя) перваго угла, вотъ вторая сторона перваго угла...—Гдѣ первая сторона второго, гдѣ вторая сторона второго угла? — Приложимъ первую сторону вотъ этого (вырѣзаннаго изъ бумаги) угла ко второй сторонѣ перваго, вершину угла (вырѣзаннаго изъ бумаги) на вершину, и т. д.—Мы сложили два угла...—Мы получили сумму двухъ угловъ...—Въ этомъ новомъ углѣ гдѣ первая

сторона, гдѣ вторая?..—Какой уголь образуютъ эти двѣ стороны?..—Какіе тутъ углы равны между собою? (первый и третій).—Вотъ два угла *).—Сложимъ ихъ..—Что получимъ? (Не получимъ угла)..—Вторая сторона второго угла и первая перваго образуютъ ли уголь? (Нѣтъ, не образуютъ)..—Что же онѣ составляютъ? (Онѣ составляютъ одну прямую, одну прямую линію)..—Такіе два угла называются прямыми углами, и каждый изъ этихъ угловъ называется тоже прямымъ угломъ!..—Сложить слѣдующіе два угла!—Найти сумму вотъ такихъ двухъ угловъ!..—Прибавить вотъ этотъ уголь къ слѣдующему!.. И т. д.—Возьмемъ прямую (прямую линію!) и на ней точку..—Изъ этой точки проведемъ на доскѣ еще прямую...—Сколько получилось угловъ? (Два)..—Можно ли провести изъ точки на прямой такую прямую, чтобы оба угла были равны между собою?..—Проведемъ...—Получимъ ли прямые углы?..—Когда получимъ два прямыхъ угла?—Два прямыхъ угла можно получить, если изъ точки на прямой проведемъ другую прямую такъ, чтобы оба угла, которые при этомъ получатся, были одинаковы...—Проведите прямые углы...—Изъ куска бумаги вырѣжемъ два прямыхъ угла...—Разорвемъ бумажку такъ, чтобы получилось два прямыхъ угла (сложимъ кусокъ бумаги сначала, какъ слѣдуетъ)...—Начертите одинъ прямой уголь...—Любая сторона прямого угла,—такъ говорятъ,—перпендикулярна къ другой сторонѣ...—Говорятъ также „перпендикуляръ“ къ данной прямой...—Вотъ прямая, а вотъ точка на ней...—Проведемъ изъ этой точки перпендикуляръ къ этой прямой...—Проведите перпендикуляры къ слѣдующимъ

*) Надо взять два прямыхъ угла, оторванныхъ отъ осмужки бумаги.

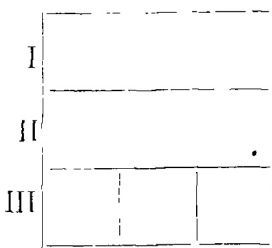
прямымъ, изъ слѣдующихъ точекъ (вверхъ, вбокъ, внизъ, влево, вправо!)...—Проведемъ прямой уголъ; отъ вершины его отложимъ на каждой сторонѣ одинаковыя прямыя (одинаковые отрезки, отрезки прямыхъ линій)...—Вершина прямого угла—начало обоихъ отрезковъ...—А гдѣ концы этихъ отрезковъ?...—Изъ конца одного отрезка проведемъ перпендикуляръ къ этому отрезку... Получимъ ленту, полосу...—Изъ конца другого отрезка проведемъ перпендикуляръ къ этому отрезку... Получимъ кусокъ ленты, кусокъ полосы...—Это четырехугольникъ...—Почему? Потому, что здѣсь четыре угла)...—Это прямоугольный четырехугольникъ...—Почему? (Потому что всѣ четыре угла—прямые углы)...—Но въ какомъ прямоугольномъ четырехугольникѣ, очевидно, всѣ четыре стороны равны между собою...—Какой четырехугольникъ называется квадратомъ...

У пола въ классѣ есть своя площадь...—На столѣ въ классѣ есть своя площадь...—Не всѣ столы оклеены клеенкой...—Площадь оконнаго стекла меньше площади листа бумаги, занимаемая листомъ бумаги, если его положить на столъ и развернуть...—Портретъ, висѣющій на стѣнѣ, больше площади классной доски или площади стола?—Начертимъ квадратъ, въ которомъ каждая изъ четырехъ сторонъ имѣетъ длину вершка...—Площадь этого квадрата называется квадратнымъ вершкомъ...—Какъ начертить квадратъ, площадь котораго—квадратный аршинъ?...—Какъ начертить квадратъ, площадь котораго—квадратная сажень?... И т. д.—Квадратный аршинъ болѣе квадратнаго вершка во сколько разъ...

Учителямъ, которые не учатъ дѣлать рисованія, говоря бы даже только объ этой рисованію, какой имѣется въ виду въ

Названіе площадей.

этой книгѣ, всегда кажется, что измѣреніе площадей—ученіе трудное.—Почему въ одной кв. сажени не 3, а 9 квадратныхъ аршинъ? Только потому, что изъ квадрата, котораго сторона 3 аршина,



можно составить три полосы, ленты (въ родѣ I, II и III, на чертежѣ), и что площадь каждой полосы содержитъ въ себѣ ровно 3 *квадратныхъ* арш.—Аналогичное справедливо для опредѣленія величины площади прямоугольника, котораго дли-

на 7 дюймовъ, а высота, напр., 4 дюйма. Пиагорова таблица, если ученики умѣютъ *рисовать* эту таблицу, все дѣло сводить къ нѣсколькимъ рисункамъ. Отъ этихъ рисунковъ легко можно перейти къ измѣренію площадей стола, пола, скамьи, листа бумаги.

Объемъ. Что касается кубическихъ мѣръ и измѣренія объемовъ куба и прямоугольнаго параллелепипеда, то ученіе объ этомъ измѣреніи не представляетъ столь значительной, какъ ученіе объ измѣреніи нѣкоторыхъ площадей, практической важности.—Измѣреніе объема куба исчерпывается только нагляднымъ выясненіемъ того, почему, напр., въ кубической сажени не 3, и даже не 3 раза 3 кубическихъ аршина, а 3 раза 9 кубическихъ аршинъ.—Кубики здѣсь необходимы. Необходимо ученикамъ складывать изъ нихъ параллелепипеды и кубы въ 8, въ 27, а если возможно, то и въ 64 кубика.—Почему въ кубической сажени не 3 куб. аршина, и даже не 3 раза 3 кубическихъ аршина, а 3 раза 9 кубическихъ аршинъ, т. е. 27 кубическихъ аршинъ? — Кубъ, котораго объемъ—куб. сажень, можетъ быть раздѣленъ на 3 одинаковыхъ слоя, пласта, изъ которыхъ каждый, въ свою очередь,

можетъ быть раздѣленъ на 3 одинаковыя части, и объемъ каждой изъ этихъ частей равенъ 3-мъ куб. аршинамъ. По подобной же причинѣ въ кубическомъ аршинѣ не 16 кубическихъ и не 16 разъ 16 кубическихъ вершковъ, а 16 разъ 256 кубическихъ вершковъ.—Хорошо, если ученики учатся также рисовать кубы, хотя бы и не совершенно съ точки зрѣнія перспективной вѣрности. На рисунокѣ тоже можно намѣтить „слои“ (пласты), на которые распадается кубъ или параллелепипедъ. При этомъ не надо рисовать невидимыхъ реберъ куба или параллелепипеда.—Если учитель пожелаетъ и найдетъ возможнымъ подольше остановиться на терминахъ и разъясненіяхъ, то онъ могъ бы это сдѣлать, примѣрно, слѣдующимъ образомъ: Тѣломъ называютъ не только человѣческое Тѣло, кубъ, равныя кубы и т. п. тѣло, но и всякій предметъ, всякую вещь, которая состоитъ изъ вещества: изъ дерева, желѣза, мѣди, изъ камня, стекла...— Назовите тѣла!..— Всякое тѣло занимаетъ много или мало мѣста, много или мало *пространства*...—*Количество* этого пространства (*сколько* пространства занимаетъ тѣло?) называется *объемомъ* тѣла... — Что больше: объемъ полѣна или объемъ карандаша?.. объемъ морковки или объемъ рѣдьки?.. объемъ картофелины или горошинки?..—Бревно можно обтесать разное...—Можно изъ дерева сдѣлать тѣло, чтобы оно было похоже на *кубикъ*... — Ящикъ можно сдѣлать такой, чтобы онъ имѣлъ видъ (т. е. *форму*) кубика, куба..., чтобы онъ имѣлъ форму кубическую...—Покажите длину, ширину и высоту куба...—Объемъ куба, котораго длина—аршинъ, называется *кубическимъ аршиномъ*...—И т. п.

Въ Россіи мѣры длины, поверх- Соотношенія мѣръ разныхъ системъ. ностей и объемовъ (особенно мѣры длины) употребляются разныхъ системъ: русскія

(аршинъ съ подраздѣленіемъ на вершки), англійскія (футъ съ подраздѣленіемъ на дюймы) и метрическія. Сверхъ того, въ технику весьма употребительны такъ наз. „сотки“, т. е. сотыя доли сажени. Всѣ соотношенія мѣръ одной и той же системы, а равно и мѣръ разныхъ системъ должны усваиваться дѣтми по возможности *путемъ нагляднымъ*. Важно, чтобы дѣти прежде всего *увидѣли*, что метръ = $22\frac{1}{2}$ вершкамъ приблизительно, что метръ = 3 фут. 3 дюйм. и 4 линіямъ безъ малаго, что аршинъ = 71 см. слишкомъ, и т. п. Важно также, чтобы они *могли увидѣть*, что 4 вершка = 7 дюймамъ, а *потомъ разсчитать*, почему это такъ, а не иначе, и т. п. Только при этомъ условіи они вполне овладѣютъ мѣрами длины и ихъ соотношеніями. Для болѣе повышеннаго курса нѣчто подобное справедливо также относительно взаимныхъ соотношеній пѣк. мѣръ площадей и объемовъ.—Помочь въ этомъ дѣлѣ могутъ соотвѣтствующія таблицы, напр., „Наглядная таблица соотношеній пѣк. мѣръ протяженія“, изд. Шохоръ-Троцкимъ.—Для мѣръ длины достаточна рама, которою снабжена „Таблица Шохоръ-Троцкого для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ“, въ 3-мъ, исправленномъ и дополненномъ, изданіи.

Родная рѣчь на урокахъ арифметики. Каждый урокъ, посвящаемый какому угодно изъ учебныхъ предметовъ, долженъ быть въ то же время урокомъ родного языка. Поэтому и на урокахъ арифметики учитель долженъ не только самъ соблюдать требованія чистоты своей рѣчи, но и дѣтей всегда побуждать къ тому же. — Не избѣгая (въ случаѣ надобности) областныхъ словъ или выраженій для установки значенія какого-либо неизвѣстнаго дѣтямъ слова, учитель также долженъ постепенно и своевременно пріучать дѣтей къ рѣчи книжной и литературной, въ лучшемъ

смыслъ этого слова.—Особенно трудно дается дѣтямъ употребленіе разныхъ причастныхъ формъ, отглагольныхъ именъ существительныхъ и книжныхъ оборотовъ рѣчи съ союзами, придаточными предложениями, и т. п., словъ иностранныхъ (сумма, квадратъ, линія, результатъ, вертикальный и т. п.), терминовъ, образованныхъ изъ словъ устарѣлыхъ, нынѣ не употребительныхъ (знаменатель, наименованіе, кратное число, слагаемое и т. п.). Чрезвычайно трудно привить дѣтямъ литературныя и книжно-сухія формы и обороты рѣчи съ устарѣлыми именами существительными, съ причастіями и дѣепричастіями, съ относительными мѣстоименіями „который“, „чей“ въ косвенныхъ падежахъ, и т. п. Только постепенно-методическое и вдумчиво-наглядное преодоленіе этихъ трудностей на урокахъ по всѣмъ предметамъ обученія можетъ дать должныя результаты и приблизить къ цѣли. Уроки арифметики, конечно, не должны составлять исключенія изъ этого общаго правила.

Особенныя трудности представля- *Наглядность въ терминахъ.*
 етъ собою полное усвоеніе учениками арифметическихъ терминовъ, не говорящихъ, по причинѣ устарѣлости ихъ и книжности ихъ возникновенія, почти ничего ни уму, ни языковому чутью учениковъ.—Слово „слагаемое“, напр., происходитъ отъ глагола „слагать“, употребительнаго преимущественно въ формѣ совершеннаго вида („сложить“). Кромѣ того, причастія въ страдательныхъ формахъ своихъ вообще необычны въ дѣтской и ежедневной рѣчи. Здѣсь приходится не скрывать эти трудности отъ учениковъ, а наоборотъ надо поставить дѣтей въ возможность смѣло и сознательно употреблять эти формы. Поэтому необходимы и соотвѣтствующія предварительныя упражненія: умѣемъ ли мы складывать, с л а г а т ь?... то, что мы любимъ,—

любимое, что бросаемъ — бросаемое, что читаемъ — читаемое, а что складываемъ, „слагаемъ“ — слагаемое, и т. п. — Еще менѣе говорятъ уму и воображенію учениковъ термины дѣлитель и множитель, такъ какъ ученики смутно чувствуютъ, что мы при этомъ какъ бы одушевляемъ числа, но не понимають, по какому праву мы это дѣлаемъ. Они понимаютъ, что учитель учитъ, сочинитель сочиняетъ, но что множитель множить, а дѣлитель дѣлить — для нихъ не осязательно, не ясно и даже страшно. И въ этомъ случаѣ надо оказать должное воздѣйствіе прямо, если можно такъ выразиться, на языковое чутье учениковъ. Отъ нихъ не надо скрывать всего того, что является въ данномъ терминѣ живымъ и творчески-образнымъ началомъ. Наоборотъ: ихъ надо навести на уразумѣніе этого начала, опираясь не на внѣшнія, отвлеченныя (схоластическія и діалектическія) опредѣленія понятій, а на самый смыслъ занимающихъ насъ словъ и словесныхъ формъ. Ученики должны понимать, что множитель какъ бы множить и, такимъ образомъ, какъ бы дѣйствуетъ. (Всему этому, конечно, не мѣсто ни на первыхъ ступеняхъ обученія, ни даже на одной какой-либо опредѣленной высшей ступени курса. Этому мѣсто на разныхъ ступеняхъ курса). То же справедливо относительно способовъ и времени усвоенія учениками термина „дѣлитель“. Если, при этомъ, всѣ методическія предосторожности будутъ соблюдены, то смѣшеніе двухъ сосѣднихъ терминовъ (множимое и множитель, или дѣлимое и дѣлитель), часто наблюдаемое въ школьной практикѣ, будетъ прямо невозможнымъ. — Что касается термина „частное“, то его усвоеніе не доставляетъ ученикамъ ровно никакихъ огорченій, если связь этого слова съ понятнымъ словомъ часть учениками подмѣчена и если она приурочена къ самому

наглядному случаю дѣйствія дѣленія.—Наиболѣе труднымъ и, можетъ-быть, поэтому и наименѣе употребительнымъ на урокахъ ариметики является весьма важный терминъ „отношеніе одного числа къ другому“. Здѣсь справедлива опять-таки та же, выше намѣченная, необходимость полнаго вниманія учителя къ языковому чутью учениковъ. Ученики, на извѣстной ступени обученія, могутъ понять и понимаютъ выраженія: „я отношусь къ тебѣ хорошо“, „мои отношенія къ роднымъ“ и т. д., если на эти выраженія и ихъ смыслъ учитель обращаетъ должное вниманіе. Отсюда же перейти (но не на томъ же непремѣнно урокъ) къ смыслу и значенію термина „отношеніе 6-ти къ 3-мъ“ вовсе не такъ трудно, какъ это можетъ показаться учителю, слишкомъ рѣдко пробующему учить дѣтей языку,—не грамматикѣ, а языку живому и творчески-созидательному.—Не надо только, при этомъ, родного языка бояться, не надо думать, что бессмысленно заучить что-либо наизусть и бессмысленно вызвать опредѣленіе термина на-память для дѣтей легче и интереснѣе, чѣмъ что-либо понять, чѣмъ почувствовать смыслъ и значеніе хотя бы даже и книжнаго слова. Надо только помнить, что смыслъ этотъ коренится не въ отвлеченныхъ опредѣленіяхъ, а въ первоисточникѣ словъ даннаго языка, въ животворномъ и познающемъ духѣ народномъ, въ постоянно зиждительномъ и вполне естественномъ, всегда дѣятельномъ и неустаннымъ творчествѣ какъ взрослога чело-вѣка, такъ и всякаго ребенка на поприщѣ ихъ родного языка.

Сведя во-едино всѣ случаи при- *Общія выводы.*
мѣненія наглядныхъ пособій при усвоеніи дѣт-
ми ариметики многозначныхъ чисель, легко
прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) Изъ наглядныхъ пособій наибольшую роль.

въ арифметикѣ многозначныхъ чиселъ могутъ играть русскіе счеты (или школьные счеты Шохоръ-Троцкого).

2) Принципъ наглядности можетъ и долженъ соблюдаться, когда предоставленъ выборъ между записями разнаго вида,—причемъ записямъ болѣе нагляднымъ должно оказывать предпочтеніе.

3) Изученіе данныхъ такъ наз. „таблицы мѣръ“ тоже должно быть по возможности подчинено всѣмъ требованіямъ принципа наглядности.

4) Въ задачахъ на именованія числа соотвѣтственныя данныя такъ наз. „таблицы мѣръ“ должны по возможности чаще повторяться, *дѣйствуя* на зрительную и слуховую память учениковъ, и почти вовсе не *требую* специальной работы мускульно-словесной памяти при практически-бесполезномъ и образовательно-вредномъ заучиваніи этихъ данныхъ наизусть.

5) Воздѣйствіе на наглядность внутреннюю является въ арифметикѣ многозначныхъ чиселъ не только необходимымъ условіемъ *работы* учениковъ, но и неизбѣжнымъ условіемъ уразумѣнія ими многочисленныхъ *пріемовъ вычисленія*, а также смысла *терминовъ* въ тѣхъ случаяхъ, когда къ чувственнымъ нагляднымъ пособіямъ прибѣгнуть невозможно.

ГЛАВА IV.

Прямая линія какъ наглядное пособіе.

Графическій методъ. „Числа и линіи.—читаемъ мы у Кондорсе, одного изъ ученыхъ XVIII вѣка,—говорятъ воображенію дѣтей гораздо болѣе, чѣмъ, это можетъ казаться неосвященному. Поэтому числа и линіи представляютъ собою наиблѣжайшее средство для упражненія дѣтей въ мышленіи, не рискующее ихъ обить съ

толку“. Къ этому можно добавить, что числа въ связи съ линіями иногда даютъ въ результатѣ наиболѣе ясныя ариѳметическія представленія. Графическій методъ употреблялся не только у древнихъ греческихъ геометровъ, но и позже, въ вѣка, предшествовавшіе XVIII и XIX вѣкамъ, вѣкамъ расцвѣта математическихъ наукъ преимущественно не-геометрическаго содержания. А въ настоящее время графическій методъ употребляется всегда, когда мы занимаемся нагляднымъ описаніемъ и даже изслѣдованіемъ какого-либо явленія, поддающагося этому методу.— Въ естественныхъ наукахъ, въ статистикѣ и вообще во всѣхъ тѣхъ областяхъ знанія, гдѣ встрѣчаются величины разнаго рода, графическій методъ освѣщаетъ вѣрно и необыкновенно быстро тотъ или другой вопросъ, относящійся также до измѣненія величинъ.

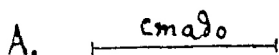
Представленіе о доляхъ дается *Прямая линія въ курсѣ обыкновенныхъ дробей.* прямою линіею очень легко. Начертивъ двѣ прямыя одинаковой длины и раздѣливъ одну изъ нихъ (даже по глазомѣру) на 6 одинаковыхъ частей, а другую— на 10 одинаковыхъ частей, ученикъ непосредственно усматриваетъ, что шестая доля болѣе десятой, что $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ и т. п. Раздѣливъ каждую шестую долю пополамъ, ученикъ усматриваетъ, что $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Раздѣливъ каждую шестую долю на 3 одинаковыхъ частей, а каждую десятую— на 3 одинаковыя части, ученикъ усматриваетъ, что въ обоихъ случаяхъ получились тридцатая доли, т. е. что и шестая, и десятая доли *выражаются* въ тридцатыхъ доляхъ. И т. д.— Какъ при сокращеніи дробей, такъ и при приведеніи дробей къ общему знаменателю услуги прямой линіи громадны. Равнымъ образомъ эти услуги громадны при уясненіи себѣ учениками смысла нахожденія *части* величины, при на-

хожденіи части цѣлаго числа, при нахожденіи части дроби. Во всѣхъ этихъ случаяхъ только не надо бояться подробностей и чертежа, и все потраченное на нихъ время окупится сторицей.—Возьмемъ хоть одинъ примѣръ изъ довольно высокой ступени курса: требуется вычислить, какую часть цѣлой единицы составлять $\frac{3}{5}$ семи восьмыхъ. Раздѣлимъ прямую на восемь одинаковыхъ частей, подчеркнемъ семь восьмыхъ, послѣднюю изъ взятыхъ нами восьмыхъ долей отдѣлимъ отъ остальной части болѣе длинной отвѣсной чертой. Тогда $\frac{1}{8}$ ярко выдѣлится изъ цѣлой единицы. Намъ надо найти $\frac{3}{5}$ это величины. Для этого мы каждую изъ нашихъ семи восьмыхъ долей раздѣлимъ на пять одинаковыхъ частей. Мы получимъ все *сороковыя* доли цѣлой величины. Потомъ отъ каждой восьмой доли, раздѣленной на 5 одинаковыхъ частей, заберемъ $\frac{3}{5}$ доли ея и начертимъ $2\frac{1}{40}$.—Стоить учителю хоть на одинъ часъ стать на эту точку зрѣнія, и онъ на всю жизнь пойметъ все великое значеніе пнупцій, лежащихъ въ прямой линіи, при прохожденіи какого бы то ни было курса дробей.

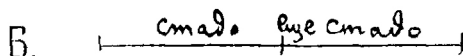
Задачи алгебраическаго характера. Прямая линія оказываетъ громадную услугу также при рѣшеніи наиболѣе замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера, часто предлагаемыхъ въ такъ наз. арифметическихъ задачникахъ.—Не имѣя возможности предложить здѣсь рѣшеніе всѣхъ задачъ этого рода съ помощью прямой и отсылая читателя къ 7-му изданію первой части „Методики арифметики“ Шохоръ-Троцкого, гдѣ предложено рѣшеніе важнѣйшихъ алгебраическихъ задачъ съ помощью прямой линіи (стр. 286—297), приведу рѣшеніе только трехъ задачъ.

Задача „о гусяхъ“. Пусть предложена известная задача „о гусяхъ“, гласящая такъ:

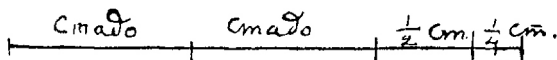
летѣло стадо гусей, имъ попался на-встрѣчу гусь; „здравствуйте, сто гусей!“ сказалъ онъ стаду, а ему отвѣтили: „нѣтъ, насъ не сто гусей; когда бы насъ было еще столько, сколько насъ теперь, да еще полъ-столька, да еще четверть-столька, да еще ты, гусь, съ нами, то насъ было бы сто“; сколько гусей въ этомъ стадѣ?— Пусть въ этомъ стадѣ вотъ сколько гусей (усиліе интуиціи, мысли и воображенія!):



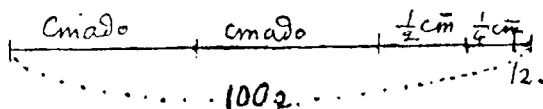
Если прибавить еще столько, то получится:



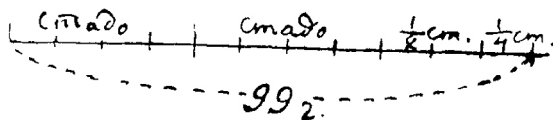
Если прибавить еще полъ-столька, да еще четверть-столька, то получится (чертежъ А):



A.



B.



B

Если прибавить еще одного гуся и если этого гуся обозначить маленькой черточкой (новая, но естественно вытекающая из всего разсужденія, идея!), то получимъ чертежъ B (см. выше), въ которомъ послѣдній отрѣзокъ обозначаетъ одного гуся. Въ остальныхъ же частяхъ 99 „гусей“, причемъ остальное состоитъ изъ двухъ стадъ да еще половины стада да еще четверти стада, т. е. изъ двухъ стадъ съ тремя четвертями такого же стада. Узнаемъ, сколько здѣсь всего четвертей стада, получимъ новый чертежъ B, изъ котораго очевидно, что гусей 99, а четвертей стада счетомъ 11 (4 въ одномъ стадѣ, еще 4—въ другомъ такомъ же стадѣ; двѣ—въ половинѣ стада, и одна—въ четверти). И т. д.

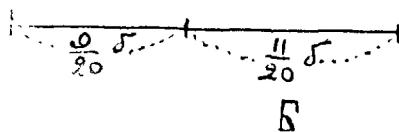
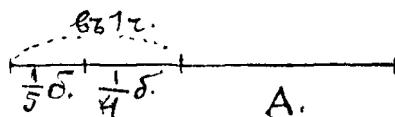
Задачи о „бассейнахъ“.

Часто встрѣчаются въ задачникахъ задачи о бассейнахъ, такъ какъ ихъ составленіе не требуетъ отъ составителей никакого труда и размысленія.—Возьмемъ задачу, гласящую такъ: „бассейнъ наполняется двумя кранами; однимъ онъ можетъ быть наполненъ въ 4 часа, а другимъ въ 5 часовъ; во сколько времени наполнится пустой бассейнъ, если открытъ оба крана?“ Пусть въкоторая прямая изображаетъ величину всего бассейна (еще лучше, если это—прямая отвѣсная, вертикальная; тогда нижнія части прямой лучше сближаютъ наполненіе бассейна съ составомъ прямой изъ частей). Первый кранъ наполняетъ его въ 5 часовъ, стало-быть, въ часъ наполнится чрезъ этотъ кранъ только одна пятая доля бассейна. Черезъ второй весь бассейнъ наполняется въ 4 часа, а въ часъ наполнится одна четверть бассейна (чертежъ A на слѣд. стр.).

Такъ какъ первый кранъ наполняетъ одну пятую долю бассейна, а второй кранъ въ тотъ же часъ наполнитъ четверть бассейна, то обоими

кранами въ часъ наполняется (см. черт. А) одна пятая да одна четверть; какая часть бассейна? (Одна пятая $\frac{1}{5}$ часа, а одна четверть $\frac{1}{4}$ часа, вмѣстѣ $\frac{9}{20}$).

Осталось $\frac{11}{20}$ долей бассейна (черт. Б). Теперь уже можно рассуждать такъ: на $\frac{9}{20}$ бассейна понадобится часъ времени, еще на $\frac{9}{20}$ понадобится также одинъ часъ, итого пойдетъ 2 часа, и останутся не наполненными только $\frac{2}{20}$ доли бассейна. Но для одной двадцатой доли бас-

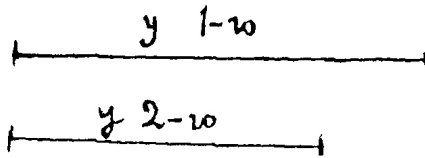


сейна необходима $\frac{1}{9}$ доля часа, а для двухъ двадцатыхъ— $\frac{2}{9}$ доли часа, т. е. $120 \text{ м.} : 9 = 13\frac{2}{9}$ минуты. И т. д. *)

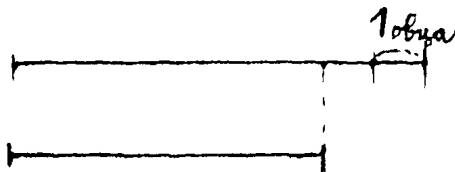
Къ числу трудныхъ задачъ ал-*Задача о пастухахъ.* геометрическаго характера принадлежать тѣ задачи съ двумя неизвѣстными, въ которыхъ обѣ неизвѣстныя величины подвергаются измѣненіямъ, и мы знаемъ только извѣстныя соотношенія между данными величинами и между результатами упомянутыхъ измѣ-

*) Какъ ни странно уподобленіе бассейна прямой линіи (впрочемъ, не болѣе странно, чѣмъ уподобленіе всякой величины и стада гусей—прямой линіи), но опытъ показываетъ, что эта странность ничтожна по сравненію съ тѣми трудностями, которыми исполнено отвлеченное „рассужденіе“ надъ отвлеченными числами, ничего не говорящими ни уму, ни воображенію учениковъ.

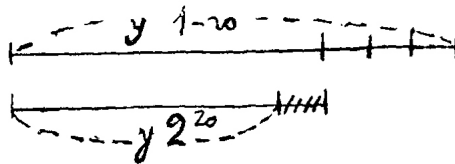
неній. Такова, напр., весьма древняя задача о пастухахъ: „два пастуха встрѣтились и одинъ сказалъ другому: дай мнѣ одну овцу, и у меня будетъ тогда вдвое болѣе, чѣмъ у тебя; въ отвѣтъ на это другой сказалъ: отдай мнѣ одну изъ своихъ, и тогда у насъ будетъ поровну; сколько овецъ у каждого изъ нихъ?“—Прежде всего: не поровну ли у нихъ и теперь? Положимъ, что поровну (это очень полезный въ методическомъ отношеніи пріемъ), тогда число овецъ у каждого изображалось бы прямыми одинаковой длины. Но стоитъ, по условію, одну „овцу“ (кусочекъ первой прямой) отнять отъ перваго и отдать второму, и мы не получимъ, что у нихъ послѣ этого то же будетъ поровну; стало-быть, у нихъ не могло быть поровну вначалѣ. У котораго же изъ нихъ больше? (Конечно, у перваго). Тогда овецъ



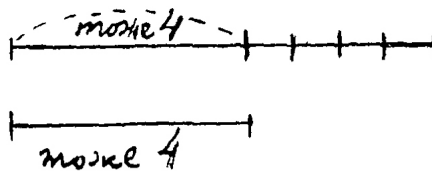
Какой длины кусочекъ „изображаетъ“ одну овцу или: сколько надо отрѣзать отъ верхней прямой, чтобы этимъ отрѣзкомъ уравнивать обѣ линіи? Пробуемъ и видимъ, что одна



овца изображается небольшимъ кускомъ и что у перваго пастуха на двѣ овцы больше, чѣмъ у втораго. Это—уже важный выводъ. Теперь отнимемъ у втораго пастуха одну овцу и отдадимъ ее первому; получимъ чертежъ



Зачеркнутая часть второй прямой и крайняя правая часть первой обозначаютъ овцу, отданную вторымъ пастухомъ первому. Послѣ этого останется сравнить полученныя прямыя



чтобы увидѣть, что у перваго пастуха станетъ больше, чѣмъ у втораго, на четыре овцы. Но, по условію, у него будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у втораго; стало-быть, у втораго будетъ четыре овцы, а у перваго—восемь. Сколько будетъ у каждаго, когда второй дастъ первому одну овцу? И т. д. *)—*Ошибки при черчении полезны.*

*) Само собой разумѣется, что можетъ встрѣтиться такая алгебраическая задача съ двумя и даже съ одной неизвѣстной величиною, для разрѣшенія которой съ помощью прямой линіи требуется нѣкоторое остроуміе. Но, во-первыхъ, остроуміе потребовать можетъ для разрѣшенія той же задачи и безъ помощи прямой линіи; во-вторыхъ, самая попытка къ облеченію задачи въ геометрическую форму попутно можетъ разъяснить ученику сущность задачи настолько, что ему скорѣе, чѣмъ при отвлеченномъ рѣшеніи ея, придетъ въ голову надлежащій приемъ рѣшенія.

*Условія упо-
требленія пря-
мой ліній.*

Во избѣжаніе какихъ-либо недо-
разумѣній, слѣдуетъ помнитъ: 1) здѣсь чертежи приведены такъ, что какъ-только понадобилось измѣнить чертежъ, мы тотчасъ же беремъ другой, чтобы такимъ образомъ имѣть возможность усмотрѣть весь ходъ измѣненія чертежа: на практикѣ же рѣшеніе можно проводить, конечно, и на одномъ чертежѣ; 2) выше приведены не самые изящные, а самые согласные съ условіями предложенныхъ задачъ, способы рѣшенія ихъ; введеніе же болѣе изящныхъ приемовъ—дѣло изобрѣтательности,—при томъ изобрѣтательности не учителя (это было бы навязчиво и худо), а самихъ учениковъ (это—только и хорошо!); 3) если задача ученикамъ безъ всякаго участія учителя дается почему-либо легко, то введеніе прямой линіи, какъ средства для рѣшенія этой задачи, конечно, не нужно; 4) пользуясь прямой линіей, какъ нагляднымъ и доступнымъ пособіемъ, ученики будутъ избавлены отъ необходимости „изучать“ такъ называемыя „типическія“ задачи, каковое „изученіе“ приносить только вредъ; 5) не учитель, а сами ученики должны чертить на клас-
сной доскѣ и въ своихъ тетрадяхъ или на доскахъ прямыя линіи, и не учитель, а сами ученики должны добиваться смысла этихъ линій, сводить ариметическіе вопросы къ вопросамъ о прямыхъ, поправлять, стирать, снова чертить и придумывать выходы изъ разныхъ затрудненій; 6) учитель долженъ приходить къ ученикамъ только на помощь, притомъ лишь въ случаѣ необходимости; излагать же, какъ съ помощью прямой рѣшить каждую задачу, учитель не долженъ, такъ какъ изложеніемъ оной прямо уничтожить образовательную силу и вспомогательное значеніе прямой линіи, какъ нагляднаго пособія; 7) въ крайнемъ случаѣ

можно на одной или на двухъ задачахъ показатъ, какъ пользоваться этимъ орудіемъ, но работать ученики должны самостоятельно, хотя и подъ добрымъ руководствомъ своего учителя; 8) вообще показъ здѣсь, какъ и во многихъ другихъ случаяхъ, важнѣе и цѣлесообразнѣе „разказа“, и ученику легче и полезнѣе на основаніи показа, чѣмъ на основаніи разказа, уяснить себѣ содержаніе и рѣшеніе замысловатыхъ задачъ алгебраическаго характера; но лучше всего собственная работа учениковъ надъ выполненіемъ цѣлесообразныхъ чертежей.

Сводя во-едино изложенное выше о прямой линіи, какъ наглядномъ пособіи при обученіи ариѳметикѣ, можно прійти къ слѣдующимъ общимъ выводамъ: *Общія
выводы.*

а) Не надо думать, что при обученіи ариѳметикѣ графическіе приемы труднѣе отвлеченной и діалектической обработки вопросовъ.

б) Нѣкоторыя ученія ариѳметики, напр., о дробяхъ, въ прямой линіи имѣютъ помощницу исполнѣ надежную и наиболѣе цѣлесообразную.

в) Замысловатая задачи алгебраическаго характера получаютъ, при рѣшеніи ихъ съ помощью прямой линіи, непосредственный (интуитивный) смыслъ, совершенно доступный ученикамъ и не противорѣчающій внутреннему содержанію задачъ.

г) Если избѣгнуть рѣшенія ариѳметическихъ задачъ алгебраическаго характера въ курсѣ ариѳметики почему-либо невозможно, то единственнымъ, кромѣ уравненій, средствомъ для надлежащаго ихъ усвоенія учениками является прямая линія въ качествѣ самаго простаго, всегда находящагося подъ руками и прямо могущественнаго, интуитивно-нагляднаго пособия.

Алфавитный указатель вопросовъ и соб- ственныхъ именъ.

- Августинъ**, блаж.: 13.
Аксиомы: 106.
Альберти: 13.
Арифметическій ящикъ: 23, 24.
Ассоціація представлений: 4, 5, 8, 9, 10, 17, 58.
Богдановъ-Березовскій: 80.
Больше во столько-то разъ: см. „условныя выраженія“.
Больше на столько-то: см. „условныя выраженія“.
Величина милліона: 94.
Величина чиселъ: 90, 94.
Вербализмъ: 11, см. „знаніе“.
Взвѣшиваніе: 87.
Вниманіе: VII, 4, 37.
Воля: VII, 15, 17, 37.
Воображеніе: VII, 5, 6, 11, 17, 45, 93, 94, 97, 98, 119.
Во сколько разъ больше или меньше: см. „условныя выраженія“.
Воспоминаніе: 4, 5.
Вычисленія изустныя: 35, 37, 38, 56, 72.
Вычисленія письменныя: 91, 92.
Вычитаніе: 43, 56, 60, 64, 66, 92, 95.
Вѣсы: 39, 87.
Геометрическія представленія: 3, 21, 24, 40, 106.
Гербартъ: 13.
Глуховымые: 3, 4, 19, 77, 80, 89.
Графическій методъ: 116.
Грубе: 44.
Денежныя примѣры: 93, 95, 96, 97.
Десятичныя дроби: 28, 29, 105.
Десятокъ: 23, 24, 52, 55, 58, 65, 66.
Дистервергъ: 13.
Доли единицы: 69, 81, 83.
Дроби: 81, 82, 83, 112.
Дѣленіе: 43, 84, 85, 96, 97, 101, 102, 103.
Евангеліе: 11, 12, 15.
Единицы мѣры: 21, 38, 40, 40, 41, 51, 81, 87, 100, 111.
Жакото: VII, 13.
Жесты: 11, 57.
Задачи алгебраическаго характера: 118, 124.
Задачи на наглядныхъ пособіяхъ: 44, 45, 84.
Задачи на „время“: 104.
Знаки дѣйствій: 57, 67, 85.
Знаніе: 7, 8, 9, 11, 17, 38.
Зрѣніе: 3, 10, 19, 40, 41, 61, 63, 64, 79, 112, 116.
Игры дѣтей: 11.
Идеи: 5, 6, 7, 15, 17.
Измѣреніе: 39, 51, 75, 87, 110.

- Имена числительныя: 46, 47, 48.
- Индивидуальность учениковъ: 9, 14, 15, 69.
- Индусы: 12.
- Интересъ: VII, 17, 20.
- Интуиціи: 7, 69, 118, 119, 125.
- Искусства: 3.
- Кавтъ: 6, 7, 13.
- Квадратныя мѣры: 21, 106, 109, 110.
- Квадратъ: 49, 109.
- Келлеръ: 80.
- Климентъ Александрійскій: 13.
- Коменскій: 10, 13, 57.
- Ковдорсе: 114.
- Кубки: 21, 23, 58, 65, 67, 68, 73, 76, 110.
- Кубич. мѣры: 21, 24, 106, 110.
- Лаговскій: 77.
- Леонардо да-Винчи: 13.
- Локкъ: 10, 13.
- Любовь къ ученикамъ: VII.
- Лютеръ: 13.
- Махъ: 6.
- Масе: 13.
- Меньше во столько-то разъ: см. „условныя выраженія“.
- Меньше на столько-то: см. „условныя выраженія“.
- Міръ внутренній: 1, 9.
- Міръ вишній: 1, 9, 18, 20.
- Модели единиць: см. „единицы мѣры“.
- Мускульное чувство: 2, 3, 10, 15, 17, 19, 21, 35, 37, 40, 41, 42, 47, 62, 63, 68, 77, 78, 80, 116.
- Наглядность внутренняя: 11, 15, 16, 41, 42, 45, 74, 92, 93, 98, 102, 104, 116.
- чувственная: 10, 11, 12, 15, 16, 17, 97.
- Наглядность обученія: 10, 11, 16, 17, 91, 98, 99, 116.
- Наглядныя пособія: 10, 11, 19, 44, 47, 69, 88.
- На сколько больше: см. „условныя выраженія“.
- На сколько меньше: см. „условныя выраженія“.
- Нуль: 59.
- Нумерація: 24, 25, 26, 28, 59, 61, 69, 71, 89, 93, 105.
- Ньютоновъ: 6.
- Общіе выводы: 17, 42, 87—88, 115, 125.
- Органы рѣчи: 3, 4, 14, 19, 77.
- чувствъ (или ощущеній): 2, 14, 15, 17, 42.
- Оригенъ: 13.
- Осязавіе: 2, 11, 19, 21.
- Ощущеніе: 1, 2, 4, 6, 7, 10, 13, 17, 19.
- Палочки: см. „черточка“ или „спичка“.
- Пальцы рукъ: 11, 21, 29, 30, 31, 32, 47, 52, 56, 61, 63, 64, 65, 70.
- Память: 13, 15, 77, 88, 116.
- Перемѣна порядка слагаемыхъ: 62.
- сомножителей: 67, 96, 98.
- Песталоцци: 10, 13.
- Пифагорова таблица: 21, 32, 33, 35, 68, 77, 110.
- Пифагоръ: 35.
- Платонъ: 10, 12.
- Понятіе: 5, 6, 7, 15, 17, 114.
- Потеря времени: 51, 74, 75, 97, 99, 112.
- Превращеніе им. чис.: 104.
- Представленія ариметическія: 42, 43, 50, 88, 117.
- вообще: 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 17.
- пространственныя: 23, 33, 40, 106; „геометрическія“.
- Придумываніе задачъ учениками: 45, 46.
- Прямая линія: 22, 41, 51, 83, 116—125.

- Раздробленіе имен. чиселъ:** 38, 100.
- Расположеніе вычисленій:** 99, 100.
- Рачинскій:** 13.
- Рисованіе:** 23, 35, 49, 50, 53, 68, 89, 106, 109, 110, 111.
- Руссо:** 10.
- Русскіе счеты:** см. „счеты русскіе“.
- Рѣдкнѣ:** 13.
- Рѣчь учениковъ:** 35, 37, 45, 46, 48, 49, 63, 96, 110, 115.
- Самодѣтельность:** VII, 1, 14, 17, 42, 87, 124.
- Самостоятельныя упражненія учениковъ:** 38, 49, 55, 56, 87.
- Сложеніе:** 43, 56, 60, 61, 63, 64, 65, 67, 71, 90, 91, 95.
- Слухъ:** 10, 64, 87, 80, 116.
- Сократъ:** 12.
- Слѣпые:** 3, 21.
- Солома:** см. „спички“.
- Составныя именов. числа:** 28, 29.
- Спички:** 21, 24, 25, 58, 60, 61, 64, 65, 67, 71, 92, 97, 98.
- Счетъ:** 18, 43, 46, 47, 15, 70, 89.
- Счеты дробные:** 40.
- Счеты торговые (русскіе):** 11, 21, 25, 26, 63, 67, 70, 71, 72, 76, 82, 92, 93; ихъ истинное значеніе: 29.
- Счеты шведскіе:** 21, 25, 52, 58, 60, 64, 65, 67, 70, 72, 76.
- Счеты Шохоръ-Троцкаго:** 27, 60, 89, 90, 93, 105, 116.
- Таблица мѣръ:** 39, 110, 116.
- наглядная (соотношеній вѣк. мѣръ протяженія): 39, 112.
- умноженія: 80, 81.
- Шохоръ - Троцкаго для изустныхъ вычисленій: 21, 35, 36, 51, 112.
- Теоремы:** 106.
- Термины:** 111, 114.
- Торговые счеты:** см. „счеты“.
- Умноженіе:** 43, 67, 95, 97, 98.
- Условныя выраженія:** 43, 73, 75, 86, 88.
- Ушинскій:** 13.
- Центры рѣчи:** 4.
- Цифры:** 53, 55.
- Чертежъ:** 11, 12, 20, 21, 40, 83, 106, 114, 118, 124.
- Черточки:** 22, 25, 50, 89.
- Чеховъ:** VIII.
- Чехъ:** 59.
- Числовыя фигуры:** 20, 21, 49, 55, 62, 65, 68.
- Чувствованіе:** 2; 11, 16.
- Шведскіе счеты:** см. „счеты“.
- Шохоръ-Троцкій:** 110, 118.
- Языкъ:** 115.