Ф. Ф. ПРИТУЛО

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва • 1958

Федор Федосеевич Притуло

Методика изложения геометрических доказательств
в средней школе

Редактор *Л. А. Сидорова*
Технический редактор *В. Л. Волчек*
Корректор *Р. Б. Берман*

* * *

Сдано в набор 14/II 1958 г. Подписано
к печати 25/XI 1958 г. $84 \times 108^1/_{32}$
Печ. л. 6,75 (5,53) Уч.-изд. л. 5,22
Тираж 40 000 экз. А 09433

* * *

Учпедгиз Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфический комбинат Саратовского совнархоза
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59
Заказ № 462
Цена без переплета 1 руб. 40 коп. Переплет 50 коп.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Состояние знаний геометрических доказательств у многих учащихся нашей средней школы продолжает оставаться явно неблагополучным и внушает большую тревогу. Так, например, в одном из методических писем Министерства просвещения РСФСР говорится:

«Еще нередки случаи, когда учащиеся неясно представляют себе сущность дедуктивного процесса в геометрии — в частности — смысл доказательства и способы его отыскания. Учащиеся часто не понимают, зачем нужно доказательство и не чувствуют в нем потребности; логическая сущность доказательства от них ускользает. В результате многие учащиеся просто механически заучивают доказательства» [1].

Но в таких нередких случаях учащиеся не могут усвоить геометрию как систему знаний, они не в состоянии оценить доказательство как одно из важнейших и необходимых средств познания действительности и приобрести умение применять это средство самостоятельно; широкие же возможности для развития логического мышления и речи учащихся, заложенные в самом процессе изучения доказательств, остаются нераскрытыми и неиспользованными.

Доказательства, бесспорно, трудны для учащихся, но опыт лучших учителей, добивающихся понимания и сознательного усвоения доказательств учащимися (начиная с VI класса) неопровержимо свидетельствует о том, что те особые трудности, с которыми связано усвоение доказательств, вовсе не являются непреодолимыми. Значит, главную причину неудовлетворительного состояния

---

[1] Материалы к проведению августовских учительских совещаний в 1952 г. Математика. Управление школ МП РСФСР, 1952.

знаний доказательств нужно видеть не в возрастных особенностях учащихся, а в недостатках приемов и способов преподавания.

К сожалению, наша методика математики вопросу, как излагать доказательства, не уделяет до сих пор того особого внимания, которого он, несомненно, заслуживает.

Содержание работы, которую мы предлагаем сейчас вниманию учителя, имеет целью дать более полный ответ на этот вопрос.

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В этой главе геометрическое доказательство рассматривается в свете общего учения логики о доказательстве. При подборе и составлении примеров учитывалась возможность использования их на уроках или на занятиях математического кружка.

§ 1. ЗНАЧЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ В ГЕОМЕТРИИ.

В геометрии термин «доказательство» понимают как доказательство логическое.

Логическое доказательство есть мыслительный процесс обоснования данного суждения путем приведения ранее нам известных истинных суждений, из связи которых данное суждение вытекает как необходимое следствие.

Доказательство каждой геометрической теоремы преследует две цели:

1. Оправдание истинности теоремы

Оно достигается вскрытием тех логических связей между условием и заключением теоремы, в силу которых заключение необходимо следует из принятых (и существующих) условий.

2. Выяснение места (положения) данной теоремы среди других предложений геометрии.

В процессе отыскания доказательства выясняется, какие именно из ранее известных положений необходимы и достаточны для того, чтобы их логическая связь имела следствием данную теорему. Этим определяется место данной теоремы среди других теорем (в принятой системе аксиом). Располагая по этому принципу все теоремы геометрии, мы получаем определенную систему теорем, где каждая последующая выводится (дедуцируется) из предшествующих предложений, в конечном счете из аксиом.

Геометрия — дедуктивная система знаний. Ее строение характеризуется тем, что: «Из большого числа геометрических фактов, известных нам на основании многовековой практики человечества, мы принимаем некоторое число без доказательства. Те предложения, которые мы принимаем без доказательства и кладем в основу какой-либо науки, мы называем аксиомами. Все остальные предложения геометрии мы должны вывести из аксиом уже с помощью строгих логических умозаключений — мы должны их доказать» [1].

Очевидность того или иного геометрического предложения, не вошедшего в число аксиом, не освобождает нас от необходимости доказать его, так как цель и смысл доказательства не только в оправдании истинности данного предложения, но и в установлении последовательности, порядка теорем, в сведении геометрических предложений в стройную логическую систему.

§ 2. СОСТАВ И СТРУКТУРА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Логическое доказательство состоит из трех частей:

1. Тезис — доказываемое положение.

2. Основания или аргументы — суждения, на которые опирается доказательство.

3. Демонстрация или способ доказывания — рассуждение, выводящее из истинности принятых оснований истинность доказываемого тезиса.

Короче их можно охарактеризовать так:

1. Тезис — что доказывается.

2. Аргументы — чем доказывается.

3. Демонстрация — как доказывается, т. е. каким образом, почему именно аргументы доказывают тезис.

Абсолютно необходимыми условиями возможности перехода к демонстрации являются:

---

[1] Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, 1948, стр. 10.

1. Ясное и четкое понимание самого тезиса и всех предшествующих ему предложений, необходимых для доказательства.

2. Установление точного смысла терминов, встречающихся в тезисе и аргументах.

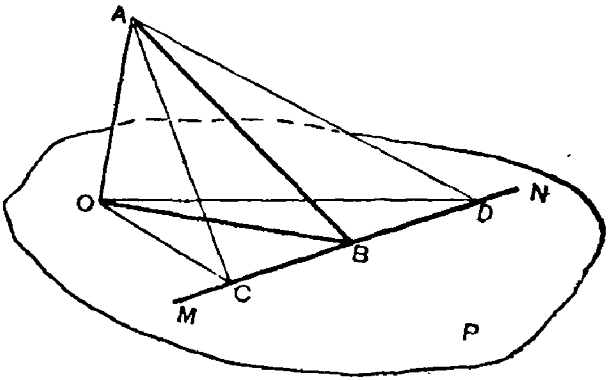
Без предварительного выполнения этих условий переход к демонстрации невозможен.

Сам термин «доказательство» употребляется в математике (и в логике) в смысле «рассуждение», устанавливающее истинность того или иного суждения, связь мыслей, приводящая к определенному выводу относительно тезиса. Иначе говоря, доказательство есть демонстрация — выведение тезиса из аргумента.

Более ясное и более полное представление о сущности и структуре доказательства может дать логический анализ доказательства той или иной теоремы. Возьмем в качестве примера теорему о трех перпендикулярах.

Теорема. *Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна и к самой наклонной.*

Дано: $AO \perp P$ и $MN \perp OB$, MN лежит в плоскости P. Требуется доказать: $MN \perp AB$ (черт. 1).



Черт. 1.

Дополнительное построение.

От точки B откладываем по обе стороны на прямой MN произвольные, но равные между собой отрезки $BC = BD$ и соединяем точки C и D с точками O и A (аксиомы).

Доказательство (демонстрация).

1-е умозаключение.

1) Если катеты одного прямоугольного треугольника равны катетам другого, то эти треугольники равны (теорема).

2) Треугольники OBC и OBD: а) прямоугольные (по условию $OB \perp CD$); б) катеты их равны ($BC = BD$ по построению, катет OB — общий).

Следовательно, $\triangle\ OBC = \triangle\ OBD$.

2-е умозаключение.

1) В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны (теорема).

2) Треугольники OBC и OBD равны (доказано), их стороны OC и OD лежат против равных углов ($\angle OBC = \angle OBD = d$ — по условию).

Следовательно, $OC = OD$.

3-е умозаключение.

1) Если из точки вне плоскости проведены две наклонные к плоскости, имеющие равные проекции, то эти наклонные равны (теорема).

2) AC и AD — наклонные, OC и OD — их проекции (по построению) и $OC = OD$ (доказано).

Следовательно, $AC = AD$.

4-е умозаключение.

1) Треугольник с двумя равными сторонами — равнобедренный (определение).

2) В треугольнике ACD $AC = AD$ (доказано).

Следовательно, $\triangle\ ACD$ — равнобедренный.

5-е умозаключение.

1) В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из его вершины, является высотой (теорема).

2) $\triangle\ ACD$ — равнобедренный (доказано) и AB — медиана, проведенная из его вершины (по построению).

Следовательно, AB — высота $\triangle\ ACD$.

6-е умозаключение.

1) Высота треугольника перпендикулярна к основанию (определение).

2) AB — высота $\triangle ADC$ (доказано), CD—его основание (чертеж).

Следовательно, $AB \perp CD$ и $AB \perp MN$, ч. т. д.

Как видим, в процессе доказательства были использованы в качестве аргументов: а) данные, содержащиеся в условии теоремы; б) ранее доказанные теоремы; в) аксиомы; г) определения.

Аргументы используются в посылках и притом так, чтобы из каждой пары посылок необходимо следовал вывод. Выводное суждение каждого умозаключения (силлогизма) является уже аргументом (поскольку оно уже доказано) по отношению к последующим силлогизмам, и каждый из этих новых аргументов обязательно используется в качестве посылки или части посылки при составлении последующих силлогизмов. Выводное суждение последнего силлогизма должно содержать доказываемый тезис.

Таким образом, демонстрация состоит из составления силлогизмов и расположения их в определенном порядке, причем порядок следования силлогизмов не менее важен, чем сами силлогизмы.

Следовательно, доказательство представляет собой систему умозаключений, логическую цепь силлогизмов, которая начинается с данных или ранее известных положений и заканчивается доказываемым тезисом.

Примечание Простейшие доказательства могут состоять из одного силлогизма В этом случае выводное суждение, являющееся доказываемым тезисом, предшествует посылкам и доказательство сводится к подбору посылок, из которых следовал бы тезис.

Например, доказать, что все квадраты подобны.
Подбираем посылки

1) Все правильные одноименные многоугольники подобны.

2) Все квадраты — правильные одноименные многоугольники.

Они и служат оправданием тезиса.

§ 3. ВИДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ.

Прямое доказательство.

Прямым доказательством называется доказательство, в котором аргументы непосредственно доказывают тезис. Прямые доказательства могут быть синтетическими и аналитическими. Рассмотрим эти виды доказательств.

В общелогическом смысле **анализ** означает расчленение и разложение — путь мышления от сложного к простому, от действия к причине, от следствия к основанию, от искомого к данным; **синтез** означает объединение и соединение — путь мышления от простого к сложному, от причины к действию, от данных к искомому. В таком же смысле термины «анализ» и «синтез» употребляются и в математике; однако, если этими терминами хотят охарактеризовать **способ доказательства**, то им придают узкоспециальное значение: это направление мысли в процессе доказательства или от заключения теоремы к ее условию, или от условия к заключению.

Анализ и синтез как методы доказательства определяются **Евклидом** следующим образом:

«Предположение доказывается аналитически, если искомое принимается за известное и на основании выведенных отсюда следствий получается известная истина; наоборот, оно доказывается синтетически, если с помощью известных истин доходим до искомой» [1].

Иное определение аналитического доказательства дано **Паппом**:

«В анализе искомое представляем себе уже найденным и смотрим, откуда оно получилось бы, и далее, что предшествовало бы этому последнему, пока, таким образом, идя назад, не дойдем до чего-либо известного — того, что могло бы послужить исходным пунктом. Этот путь мы называем анализом или, что все равно, обратным решением» [2].

Если A будет означать условие теоремы или ранее известное положение, а X — ее заключение, то ход мысли в этих приемах рассуждений можно изобразить так:

Синтез: $A \to \ldots \to Y \to X$.

Анализ Евклида: $X \to Y \to \ldots \to A$.

Анализ Паппа: $X \leftarrow Y \leftarrow \ldots \leftarrow A$.

Доказательство теоремы о трех перпендикулярах, приведенное в § 2, является примером синтетического доказательства. В нем, исходя из истинности основания, делают заключение об истинности первого следствия; первое следствие служит затем основанием для получения второго следствия и т. д., последнее следствие есть заключение тео-

---

[1] «Начала Евклида», кн. XI—XV, стр 292, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовського. 1950

[2] В. П. Шереметевский, Очерки по истории математики, 1940, стр 20.

ремы. Такой тип умозаключения вполне правомерен, это первый модус условно-категорического силлогизма (modus ponens):

1) Если A есть B, то C есть D.

2) A есть B.

Следовательно, C есть D.

В синтетическом доказательстве каждое предшествующее суждение (или суждения) является достаточным условием для обоснования последующего (или последующих), а поэтому существование A есть достаточное условие для существования X: из истинности A следует истинность X.

Рассмотрим доказательство той же теоремы о трех перпендикулярах по схемам анализа Евклида и Паппа.

1. Анализ Евклида.

Пользуясь тем же чертежом (черт. 1) и обоснованием построений, имеем:

1. Пусть $AB \perp CD$.

2. Тогда $\triangle\ ACD$ — равнобедренный (так как AB — медиана по построению), в котором $AC=AD$.

3. Следовательно, $OC=OD$ (как проекции равных наклонных AC и AD).

4. Следовательно, $\triangle\ BOC = \triangle\ BOD$ (OB — общая сторона и $OC=OD$ и $BC=BD$).

5. Следовательно, $\angle\ CBO = \angle DBO$ (как углы, лежащие против равных сторон в равных треугольниках) и они смежные.

6. Следовательно, $OB \perp CD$ или $OB \perp MN$, но это последнее утверждение верно (дано по условию).

7. Так как мы пришли к верному следствию, то отсюда заключаем, что верно и исходное положение, т. е., что $AB \perp CD$ или $AB \perp MN$.

Именно это последнее умозаключение и является уязвимым местом анализа Евклида, ставящим под сомнение все доказательство. В самом деле, здесь истинность доказываемого положения обосновывается истинностью вытекающего из него следствия, но такое обоснование неправомерно: истинность следствия еще не гарантирует истинности основания. Действительно, из посылок:

1. Если A есть B, то C есть D.

2. C есть D —

не следует с непреложной необходимостью, что A есть

B, так как истинное следствие может быть выведено и из ложного основания.

Например: 1) $5=-5$ — неверное равенство, но, выводя из него следствия, получим: $5^2=(-5)^2$ и $25=25$, т. е. приходим к верному равенству.

2) Из неверного утверждения — стороны треугольника пропорциональны углам — вытекает верное следствие: в равноугольном треугольнике все стороны равны.

Возможность получения истинных следствий из ложных оснований кроется в необратимости суждений. Переход от истинности следствия к истинности основания правомерен только в том случае, когда основание и следствия будут суждениями обратимыми, т.е. когда каждое из них является следствием другого.

В приведенных примерах как раз и встречаются необратимые суждения. В первом примере из равенства чисел вытекает равенство их квадратов, но обратное не имеет места: из равенства квадратов двух чисел не следует, что эти числа равны. Во втором примере второе суждение вытекает из первого, но первое не вытекает из второго.

Итак, в прямом доказательстве анализ Евклида в своем чистом виде (т. е. без проверки обратимости) не является методом строгого логического доказательства.

Примечание. Самый термин «анализ Евклида» употребляется нами только по сложившейся традиции. Установлено, что еще Платону был известен этот вид анализа и что еще Аристотелем был отмечен и его недостаток — возможность вывести истинное положение из ложного. Несомненно, это было известно и Евклиду.

«Этот недостаток анализа древних ясно сознавался ими, и потому, пользуясь анализом как методом исследования, разыскания, Евклид всегда идет путем синтеза при изложении доказательства, и если где и дает ему аналитическую форму (только в пяти теоремах книги XIII), то всегда считает нужным то же самое доказательство повторить в схеме синтеза, всегда непогрешимого, ибо верные посылки не могут дать неверного заключения», В. П. Шереметевский, Очерки по истории математики, 1940, стр. 20.

Анализ Паппа (в сокращенном виде).

Напомним, что доказывается теорема о трех перпендикулярах (черт. 1).

Доказательство.

1. Для того чтобы $AB \perp CD$, достаточно, чтобы $AC = AD$.

2. Чтобы $AC = AD$, достаточно, чтобы $OC = OD$.

3. Чтобы $OC = OD$, достаточно ...

. . . .

6. Достаточно $OB \perp CD$, но это дано по условию.

Таким образом, условие теоремы является достаточным основанием для предшествовавшего ему положения, которое в свою очередь является достаточным основанием для ему предшествовавшего и т. д.

В анализе Паппа условие теоремы служит достаточным основанием для истинности заключения именно потому, что каждое последующее суждение являлось достаточным основанием для каждого предшествующего; иными словами, каждое предшествующее положение являлось следствием последующего, и так как последнее суждение этой цепи есть суждение истинное, то истинны и все следствия, из него вытекающие, последним из которых и является заключение теоремы.

В анализе Паппа, так же как и в синтезе, мы заключаем от истинности основания к истинности следствия, поэтому анализ Паппа есть вполне правомерный способ доказательства.

Различие и сходство всех этих способов легче усматривается на примере из курса алгебры.

Пример. Доказать, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел больше их среднего геометрического.

Дано: $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

Доказать: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Синтез	Анализ Евклида	Анализ Паппа
1) Известно, что $(a-b)^2 > 0$,	1) Пусть $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.	1) Для того чтобы $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$,
2) Или $a^2 - 2ab + b^2 > 0$,	2) Отсюда $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$,	2) достаточно, чтобы $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$,
3) Отсюда $a^2 - 2ab + b^2 + 4ab > 4ab$,	3) или $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab$.	3) или $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab$.

4) или $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$.	4) Отсюда $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$;	4) Для этого достаточно, чтобы $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$.
5) Отсюда $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} > ab$.	5) Отсюда $a^2 + 2ab + b^2 - - 4ab > 0$,	5) Вновь достаточно, чтобы $a^2 + 2ab + b^2 - - 4ab > 0$,
6) или $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$,	6) или $a^2 - 2ab + b^2 > 0$,	6) или $a^2 - 2ab + b^2 > 0$,
7) следовательно, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$;	7) или $(a - b)^2 > 0$,	7) или $(a - b)^2 > 0$,
ч. т. д.	а это верно.	а это верно.

Общая цель обоих видов анализа — прийти к условию теоремы или к какому-нибудь ранее известному положению. Средства для достижения этой цели различны: в первом случае выводят цепь следствий из заключения теоремы, во втором — подыскивают для заключения теоремы цепь достаточных оснований. Различие средств определяет и неодинаковую ценность достигнутой цели: анализ Евклида требует еще проверки обратимости суждений (т. е. последующего синтеза), анализ Паппа в ней не нуждается.

Оба вида анализа не употребляются как методы изложения доказательства ни в школьных учебниках, ни в научных курсах. Первый из них потому, что он не обладает доказательной силой, второй—как весьма усложняющий изложение. Зато оба метода очень полезны и необходимы при отыскании доказательства. Особенно здесь ценен анализ Евклида, так как выводить легче, чем приводить. Подробнее на роли анализа мы остановимся в 4-й главе.

Косвенное доказательство.

Косвенным доказательством называется доказательство, в котором истинность тезиса обосновывается посредством опровержения истинности других положений.

Косвенное доказательство может быть или **апагогическим**, или **разделительным**.

В апагогическом косвенном доказательстве обоснование истинности данного суждения (тезиса) достигается путем доказательства ложности противоречащего ему суждения (антитезиса).

Это определение разъясним следующим образом.

Пусть требуется доказать, что

S есть P (тезис).

В случае прямого доказательства мы ищем основания, из которых вытекает данный тезис; в косвенном апагогическом доказательстве доказываем ложность суждения, противоречащего тезису, т. е. ложность суждения:

S не есть P (антитезис).

Если ложность антитезиса доказана, то этого достаточно для оправдания истинного тезиса, так как к тезису и антитезису, являющимся противоречащими суждениями, применим закон исключенного третьего: «Из двух противоречащих суждений всегда одно истинно, другое ложно, а третьего быть не может». Ложность одного из противоречащих суждений достаточна для оправдания истинности другого, и наоборот, — из истинности одного необходимо следует ложность другого.

Возьмем, например, два противоречащих суждения:

1. Данный четырехугольник — параллелограмм.
2. Данный четырехугольник — не параллелограмм.

Одно из этих суждений безусловно истинно, так как всякий четырехугольник, либо параллелограмм, либо не параллелограмм (третьего быть не может); одно из них обязательно ложно, так как не существует четырехугольника, который был бы и тем и другим: и параллелограммом и не параллелограммом.

Косвенное апагогическое доказательство называют «доказательством от противного». Логическая схема доказательства «от противного» такова:

Пусть S есть P — доказываемый тезис.

Предполагаем противное (в целях точности нужно было бы говорить «противоречащее»), т. е. что S не есть P, и выводим из этого предположения следствия до тех пор, пока не получим следствие, противоречащее какому-нибудь истинному положению A (ранее доказанному или входящему в условие теоремы). По закону противоречия два противоречащих суждения не могут быть одновременно истинными, а так как нам известно, что положение A истинно, то противоречащее ему следствие н е-A необходимо ложно.

Итак, ложность не-А установлена.

Так как наши рассуждения были правильными (по предположению), а все основания, кроме *S* не есть *P*, истинными, то отсюда и следует, что единственной причиной ложности следствия не-*A* является ложность допущенного нами положения: *S* не есть *P*. Значит, мы доказали, что суждение: *S* не есть *P* — ложно.

Это и есть первая часть доказательства «от противного» — приведение к нелепости, к абсурду.

Вторая часть состоит (как уже говорилось) в применении закона исключенного третьего—из ложности антитезиса «*S* не есть *P*», следует истинность доказываемого тезиса «*S* есть *P*».

Следует ли из ложности следствия ложность основания? Является ли такое умозаключение правомерным? Да, является. Этот вид умозаключения представляет собой 2-й модус условно-категорического силлогизма (modus tollens).

1. Если *A* есть *B*, то *C* есть *D*.
2. *C* не есть *D*.

Следовательно, *A* не есть *B*.

Ложное следствие не может быть получено из истинного основания. Из ложности следствия необходимо следует ложность основания.

Например:

1. Если данная пирамида правильная, то ее боковые ребра равны между собой.
2. Боковые ребра данной пирамиды не равны между собой.

Следовательно, данная пирамида не является правильной.

Напомним, что истинность следствия не доказывает, не гарантирует истинности основания. Пусть во второй посылке будет утверждаться наличие (истинность) следствия.

Имеем:

1. Если данная пирамида правильная, то ее боковые ребра равны между собой.
2. Боковые ребра данной пирамиды не равны между собой.

Вывод: данная пирамида правильная—неправомерен. Действительно, равные боковые ребра может иметь и неправильная пирамида.

Косвенное разделительное доказательство опирается на ту форму разделительно-категорического силлогизма, в которой большая посылка — разделительное суждение, а меньшая, путем приведения к нелепости, отрицает все возможности, кроме одной.

Пусть имеется истинное разделительное суждение:

S есть или P, или P_1, или P_2,

и пусть требуется доказать, что S есть P.

Если, предположив, что S есть P_1, мы придем к ложному следствию (нелепости), то, значит, мы доказали, что S не есть P_1. Если таким же образом мы докажем, что S не есть P_2, то отсюда и будет следовать, что S есть P.

Сам силлогизм примет такую форму:

1) S есть или P или P_1, или P_2.

2) S не есть ни P_1, ни P_2.

Следовательно, S есть P.

Примечание. Признаки (свойства) P, P_1 и P_2 должны быть несовместимыми и исчерпывать все возможные случаи.

Этим приемом мы пользуемся, например, при доказательстве равенства соответственных углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

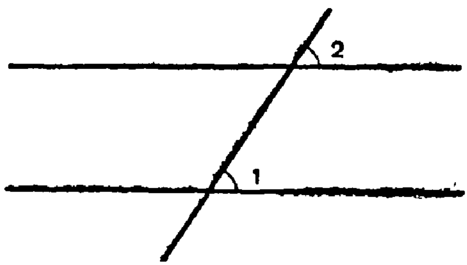
Большая посылка:

1. Соответственные углы, т. е. $\angle 1$ и $\angle 2$: а) либо равны: $\angle 1 = \angle 2$; б) либо $\angle 1 > \angle 2$; в) либо $\angle 1 < \angle 2$ (черт. 2).

Приводим к нелепости две последние возможности:

$\angle 1 > \angle 2$ и $\angle 1 < \angle 2$;

это и составит содержачие меньшей посылки. Силлогизм примет вид:



Черт. 2.

1) $\angle 1$ и $\angle 2$ — соответственные углы при параллельных, и имеются три и только три возможности: или $\angle 1 = \angle 2$, или $\angle 1 > \angle 2$, или $\angle 1 < \angle 2$;

2) суждение: $\angle 1 > \angle 2$ — ложно, суждение: $\angle 1 < \angle 2$ — ложно.

Следовательно, суждение: $\angle 1 = \angle 2$ — истинно.

§ 4. ОШИБКИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ.

Так как всякое доказательство состоит из трех частей (тезиса, аргументов и демонстрации), то ошибки доказательства могут быть трех видов:

1) ошибки относительно тезиса,
2) ошибки в аргументах (основаниях),
3) ошибки в демонстрации.

Ошибки относительно доказываемого тезиса.

1. Тезис должен быть суждением ясным и точно определенным. Прежде чем доказывать ту или иную теорему, нужно требовать, чтобы она была сформулирована полностью и не допускала двусмысленного толкования. Особенно часто встречается у учащихся тенденция к сокращению формулировки теоремы. Например: «Через три точки можно провести окружность» или «Равные наклонные имеют равные проекции».

С такой «экономией» нельзя мириться ни при каких обстоятельствах: всегда и всюду нужно требовать, чтобы доказываемая теорема была сформулирована полностью, с предельной точностью и ясностью.

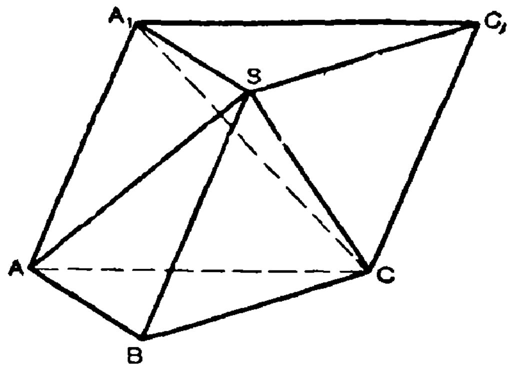
2. Тезис должен остаться тождественным, т. е. одним и тем же на протяжении всего доказательства.

Нарушение этого правила — уклонение от первоначального тезиса — называется подменой тезиса, игнорированием тезиса («ignoratio elenchi»).

Приведем примеры.

1. Теорема «Два перпендикуляра к данной прямой параллельны», не зависит от 5-го постулата Евклида. Пользуясь этой теоремой, можно выполнить построение: через данную точку вне прямой провести параллельную ей прямую и притом единственную. Однако, если бы теперь мы стали утверждать, что тем самым доказан 5-й постулат, то это и было бы «подменой тезиса». Действительно, из того, что данным способом можно построить единственную прямую, еще не следует, что она вообще может быть только единственной. Существуют и другие способы выполнения заданного построения, и нет гарантий, что каждый из них не приведет к построению прямой, отличной от той, которая была получена данным, определенным способом.

2. При доказательстве теоремы об объеме треугольной пирамиды учащиеся нередко допускают ошибку, считая, что высотами пирамид $SABC$ и CSA_1C_1 являются соответственно ребра призмы SB и CC_1 (черт. 3). Эту ошибку подсказывает и стандартное наглядное пособие — деревянная модель прямой треугольной призмы, составленной из трех равновеликих пирамид.



Черт. 3.

Наличие такой ошибки означает и уклонение от тезиса: фактически теорема доказывается не для любой треугольной пирамиды, а только для такой, у которой боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания.

Когда в доказательстве общего положения рассматриваются не все частные случаи, то это тоже «игнорирование тезиса»: из справедливости тезиса в отдельных (не всех) частных случаях еще не следует его истинность вообще. Если, например, при доказательстве теоремы косинусов ограничиваются рассмотрением случаев, когда сторона лежит либо против острого угла, либо против тупого, то тем самым игнорируется тезис, где говорится о квадрате л ю б о й стороны треугольника, т. е. и такой, которая лежит против прямого угла.

Ошибка «ignoratio elenchi» встречается и в опровержениях, т.е. в доказательстве ложности данного тезиса.

Если, например, считают опровергнутым (ложным) данный тезис на том основании, что ложны те аргументы, из которых он вытекает, или потому, что обнаружены ошибки в демонстрации, то в обоих таких случаях имеет место подмена тезиса. В самом деле, ложность аргументов еще не означает ложности выведенного из них тезиса; не исключено, что данный тезис мог быть выведен и из других и притом уже истинных аргументов; не исключено также, что для данного тезиса может быть приведено другое доказательство и притом такое, которое уже не будет содержать ошибок. Ранее уже были рассмотрены примеры, подтверждающие, что истинное следствие (тезис) может быть выведено и из ложного основания, а такая, например, ошибка в демонстрации, как заключение от истинности следствия к истинности основания (анализ Евклида), могла быть допущена и при доказательстве истинного тезиса. Напомним, кстати, что опровержение самого тезиса достигается выводом из него ложного следствия или доказательством истинности противоречащего ему суждения (антитезиса).

ОШИБКИ В ОСНОВАНИЯХ (АРГУМЕНТАХ).

Основное правило. *Аргументы доказательства должны быть суждениями, истинными не подлежащими сомнению.*

Любое нарушение этого правила означает ошибку в аргументах. Из нее не вытекает ложность тезиса, — ошибка в аргументах предрешает ложность доказательства, и тезис остается недоказанным, сомнительным.

Типичные ошибки в аргументах следующие.

1. Основное заблуждение («error fundamentalis»).

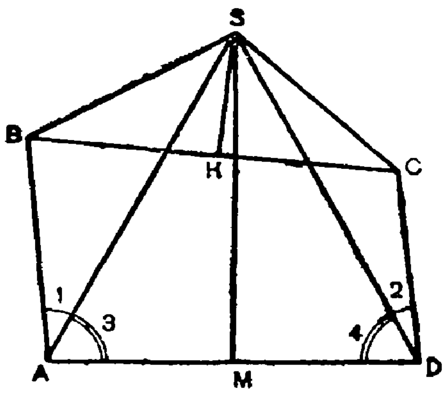
Ошибка состоит в том, что в качестве аргумента используется ложное суждение. Часто эта ошибка подсказывается неверно выполненным чертежом.

Возьмем, например, софизм «прямой угол равен острому».

«Доказательство».

Пусть $AB \perp AD$ и CD наклонная к AD. Тогда $\angle BAD$ — прямой и $\angle CDA$ — острый. Пусть $CD = AB$ (черт. 4).

Соединим B с C, и пусть K — середина отрезка BC и M — середина AD. Проведем $MS \perp AD$ и $KS \perp BC$ (существование общей точки S следует из того, что BC и AD не параллельны). Соединим точку S с точками A, B, C и D.

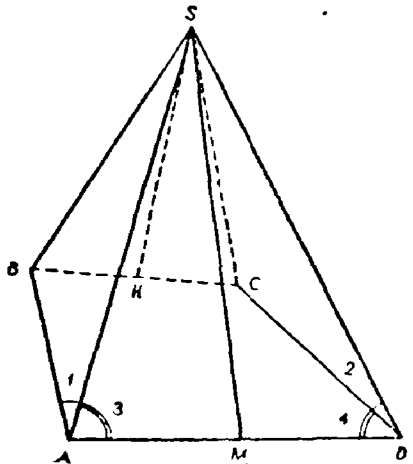


Черт. 4.

Тогда: $\triangle ABS = \triangle SCD$ (по трем сторонам) и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, с другой стороны: $\angle 3 = \angle 4$ (так как $SA = SD$).

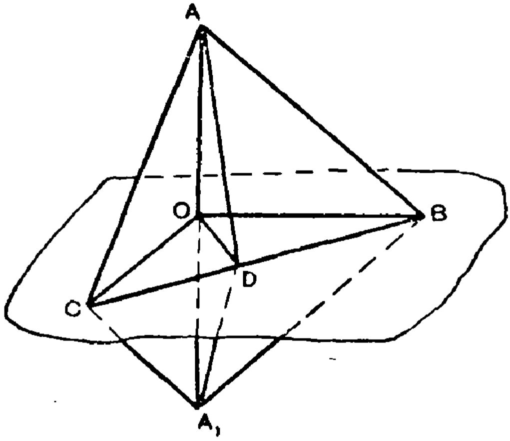
Следовательно, $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, или $\angle BAD = \angle CDA$.

Мы «доказали», что прямой угол равен острому. Основная ошибка (заблуждение) в этом доказательстве подсказана неверным чертежом, где $\angle CDA = \angle 4 + \angle 2$. Более точный чертеж (черт. 5) показывает, что SD не пересекает отрезок BC, т. е., что на самом деле $\angle CDA = \angle 4 - \angle 2$.



Черт. 5.

Довольно распространенным видом «error fundamentalis» является ошибка — «от сказанного с условием к сказанному без условий». Она состоит в том, что некоторое положение, являющееся верным только при наличии определенных условий, употребляется в качестве аргумента доказательства как верное безусловно, без ограничивающих его условий. Источником этой ошибки является неполная формулировка теорем и определений, употребляемых в процессе доказательства.

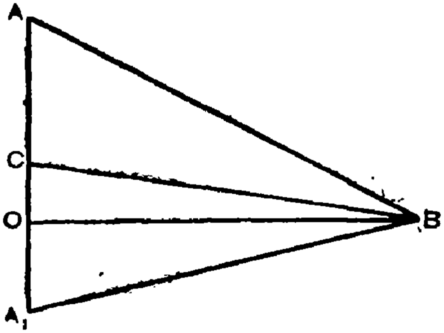


Черт. 6.

Например, в процессе доказательства признака перпендикулярности прямой к плоскости приходится доказывать равенство наклонных AB и A_1B (черт. 6). Очень часто учащиеся «доказывают» их равенство указанием на то, что AB и A_1B имеют общую проекцию OB, ссылаясь при этом на «теорему»:

если наклонные имеют равные проекции, то они равны. В такой формулировке упускается существенно важное, ограничивающее условие — наличие общей точки, из которой проведены наклонные.

Значение этого условия и, попутно, недопустимость сокращенных формулировок вообще должны быть сейчас же разъяснены. Для этого достаточно сделать соответствующий чертеж. Так, например, наклонные AB, A_1B и BC имеют общую проекцию OB, но они не равны между собой (черт. 7). Чертеж, сделанный в точном соответствии с той формулировкой, которую дают учащиеся, помогает выяснить ошибочность приводимого ими аргумента и убеждает учащихся в необходимости пользоваться точными, полными формулировками теорем и определений.



Черт 7.

2. «Petitio principii».

В буквальном переводе «petitio principii» означает «требование основания»: мы требуем, чтобы в качестве оснований были представлены нам такие суждения, которые действительно являются основаниями. «Petitio principii» называют и самую ошибку, состоящую в нарушении этого требования. В этом смысле «petitio principii» есть логическая ошибка — «предвосхищение основания», состоящая в том, что в качестве аргумента берется предложение сомнительное, — такое, которое само нуждается в доказательстве. Для вскрытия этой ошибки не требуется установления ложности данного аргумента, — достаточно показать, что он не встречается среди ранее известных нам положений (аксиом, теорем). Но в таком случае данный аргумент сомнителен, он уже не может служить основанием доказательства.

«Предвосхищение основания» нередко порождается наглядными представлениями, и чем проще, чем более очевидны эти представления, чем чаще повседневная практика убеждает нас в том, что они соответствуют действительности, тем труднее распознать в них один из источников «petitio principii». Иногда мы и не подозреваем о возможности появления этой ошибки там, где опыт и наблюдения нам подсказывают, что «иначе быть не может», что «это само собой разумеется», — мы просто не замечаем необходимости логического доказательства таких элементарных положений; нелегко бывает и выяснить, что именно в наших рассуждениях остается недоказанным и при помощи чего оно может быть доказано.

Потребовалось, как известно, много труда и времени, чтобы вскрыть подобного рода «petitio principii» в доказательствах Евклида. Оказалось, что кроме аксиом, ранее доказанных положений и строго определенных понятий, в доказательствах Евклида встречаются и такие аргументы, единственным обоснованием которых служит их наглядная очевидность. Нигде, например, не доказываются и не помещены в списке аксиом такие, неоднократно используемые в доказательствах, положения, как существование точек пересечения двух окружностей, одна из которых проходит через одну внутреннюю и одну внешнюю точку относительно другой, или пересечение прямой, проходящей через внутреннюю точку окружности, с этой окружностью в двух точках и т. д.; нигде не определяются такие понятия, как «внутри», «между», «движение». Употребление такого рода аргументов является, конечно, «предрешением основания».

Для доказательства, что прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности, пересекает эту окружность (имеет с нею две общие точки), нужно ввести аксиомы непрерывности, чтобы установить свойства движения, необходимы аксиомы конгруентности и т. д. Это означает, что система аксиом Евклида не обладала свойством достаточности: из нее не могли быть выведены все положения, необходимые для строго логического построения курса геометрии. Поэтому Евклид неизбежно должен был обращаться к наглядным представлениям.

Только при современном состоянии аксиоматического метода изложения геометрии, удовлетворяющего требованию полноты принятой системы аксиом, мог быть поставлен, а затем и решен вопрос о полной ликвидации ошибок типа «предвосхищение основания», порождаемых наглядными представлениями. Но требование полноты системы аксиом во всей его строгости неприменимо к школьному учебнику, — здесь мы должны заранее примириться с неизбежностью использования в доказательствах некоторого минимума наглядности, допуская тем самым вытекающие отсюда «petitio principii». Круг этих ошибок вполне определяется принятым в преподавании учебником, и всякие иные ошибки этого типа являются недопустимыми, — это уже те ошибки, с которыми учитель должен неустанно бороться и пресекать их самым решительным образом. Нельзя мириться ни с малейшим расширением круга «petitio principii», допускаемых самим учебником, — иначе мы не сможем сохранить должного уровня логической строгости курса, не предупредим получение учащимися ошибочных выводов при использовании ими в качестве оснований недоказанных суждений, складывающихся под влиянием наглядных образов.

«Предвосхищение основания» особенно опасно и часто встречается при самостоятельном решении задач на доказательство. Если, читая готовое доказательство по учебнику, ученик защищен от произвольного расширения круга этих ошибок самим учебником, то при самостоятельном отыскании и построении доказательства учащимся очень трудно отличить *желаемое* от действительного, подсказанное чертежом и интуицией от того, что может и должно быть строго доказано. Здесь от ученика требуется большое напряжение внимания, главное же — отчётливое и ясное понимание недопустимости использования недоказанных положений. Но добиться такого понимания можно лишь тогда, когда учитель настойчиво и терпеливо и в каждом отдельном случае будет разъяснять учащимся, что использование в доказательстве непроверенного, недоказанного суждения всегда является ошибкой, и когда такое суждение приводит нас к неверным выводам, и когда оно помогает нам доказать действительно истинное положение.

3. «Круг в доказательстве» («Circulus in demonstrando»).

Сущность этой ошибки в том, что предложение *A* выводится при помощи предложения *B*, доказательство же *B* опирается на *A* как на свое основание.

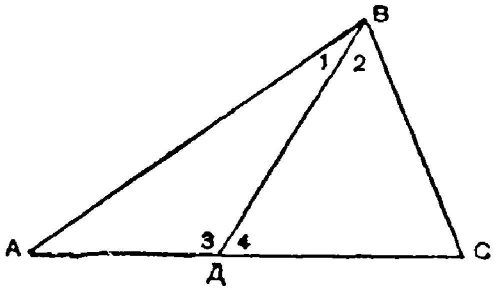
Это частный вид «предвосхищения основания», где недоказанным положением, используемым в качестве аргумента доказательства, является сам доказываемый тезис или часть его, или предложение, эквивалентное тезису, или такое, истинность которого обусловлена истинностью тезиса.

Рассмотрим, например, одно из доказательств теоремы: сумма углов треугольника равна $2\,d$.

Доказательство.

Пусть дан произвольный треугольник ABC.

Разобьем его отрезком BD (D — произвольная точка стороны AC) на два треугольника (черт. 8). Обозначая через x пока неизвестную нам сумму углов треугольника будем иметь:



Черт. 8.

$$\angle A + \angle 1 + \angle 3 = x,$$
$$\angle C + \angle 2 + \angle 4 = x.$$

Складывая эти равенства, получим:
$(\angle A + \angle C + \angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 2x,$
и так как 1-е слагаемое левой части есть сумма углов треугольника ABC, а второе — сумма смежных углов, то
$x + 2d = 2x$, и отсюда $x = 2d$.

Уязвимое место в этом доказательстве — обозначение суммы углов каждого треугольника одной и той же буквой x. Такое обозначение можно признать законным если предполагать, что эта сумма не меняется при переходе от одного треугольника к другому. Таким образом, среди аргументов данного доказательства вскрывается следующее предложение: сумма углов треугольника есть величина постоянная для всех треугольников.

Здесь уместно напомнить (имея в виду предыдущие примеры), что вскрытие неявных аргументов само по себе еще не предрешает порочности доказательства, т. е. вовсе не обязательно, чтобы в нем перечислялись решительно все основания. В противном случае пришлось бы излагать доказательства только в той форме, которая была приведена на странице 8 (пример логического анализа доказательства теоремы о трех перпендикулярах).

Итак, пропуск отдельных аргументов в какой-то оправданной и допустимой мере является законным и не дает поэтому формального права считать такое доказательство несостоятельным. В то же время неявные аргументы требуют особо пристального внимания, так как с их употреблением связаны наиболее трудно уловимые ошибки в основаниях доказательства.

Вернемся к нашему примеру. Мы уже дали точную формулировку недостающего предложения. Теперь возможны два случая.

1. Это предложение ранее нам было известно (доказано или постулировано). В целях придания доказательству большей ясности и убедительности можно пополнить его данным предложением, но, независимо от этого, строгость доказательства была и останется безупречной (поскольку остальные аргументы и демонстрация не вызывают сомнений).

2. Данное предложение ранее нам не было известно (т. е. не доказано и не постулировано), с ним мы встречаемся впервые. Этого уже достаточно, чтобы считать его употребление в доказательстве ошибкой «petitio principii». Возможность, что данная ошибка могла быть порождена наглядными представлениями, здесь исключается: постоянство суммы углов треугольника никак нельзя отнести к непосредственно усматриваемым фактам. Теперь легко убедиться, что мы встретились с «кругом в доказательстве».

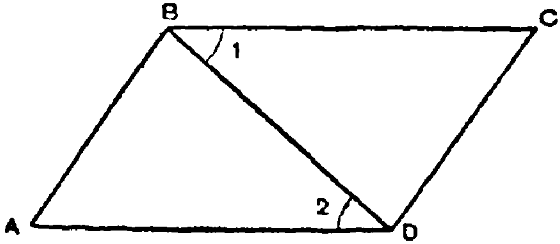
Действительно, если признать истинность тезиса — сумма углов всякого треугольника равна $2d$ — то отсюда немедленно следует, что эта сумма постоянна. Таким образом, истинность аргумента обусловлена истинностью тезиса. Это и есть «круг в доказательстве».

Ясно, что в таком случае рассматриваемое доказательство порочно и тезис остался недоказанным.

«Круг в доказательстве» в ответах и рассуждениях учащихся — *прямое следствие непонимания* учащимися смысла доказываемой теоремы и принципиального значения строгой последовательности теорем в цепи доказательств (возможность выведения данной теоремы только из предшествующих предложений).

Например, доказывая теорему. *Четырехугольник, у которого противоположные стороны равны, есть параллелограмм*, ученик помнит, что вначале нужно доказать равенство треугольников ABD и BDC и пытается это сделать следующим образом:

«Треугольник ABD равен треугольнику BCD, так как у них: BD — общая сторона, $BC = AD$ по условию и $\angle 1 = \angle 2$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC» (черт. 9).



Черт. 9.

Ясно, что этот ученик не разобрался в формулировке теоремы, не отделил условия от заключения, не имеет ясного представления о том, что именно нужно было доказать. Поэтому в числе аргументов и появилась параллельность сторон AD и BC, т. е. такое положение, которое составляет часть доказываемого тезиса. Это и есть «круг в доказательстве».

Если в качестве аргумента доказательства приводится одно из последующих предложений или дается новое «доказательство» ранее известной теоремы на основании последующих, то это тоже «круг в доказательстве», проистекающий из-за непонимания логического строения геометрии.

«Круг в доказательстве» во всех его видах — грубая логическая ошибка, нетерпимая ни на одной стадии обучения.

Ошибки в демонстрации.

Предварительно дадим краткие сведения о силлогизме. **Силлогизмом** называется **дедуктивное умозаключение**, в котором из двух данных суждений (посылок) выводится третье суждение (заключение).

Типичной формой силлогизма является подведение частного случая под общее положение.

Возьмем пример.

Все квадраты — правильные многоугольники.

∴ Данная фигура — квадрат.

Следовательно, данная фигура — правильный многоугольник.

Понятия, входящие в силлогизм, называются терминами.

Средним термином называется термин, входящий в обе посылки и отсутствующий в заключении (в нашем примере «квадрат»).

Меньшим термином называется подлежащее заключения («данная фигура»).

Большим термином называется сказуемое заключения («правильный многоугольник»).

Больший и меньший термины называют крайними терминами.

Посылка, содержащая больший термин, называется большей посылкой, посылка, содержащая меньший термин, — меньшей.

Наш пример силлогизма составлен по следующей общей схеме:

$$\frac{\begin{array}{c} M - P \\ S - M \end{array}}{S - P},$$

где M — средний термин, S и P — крайние термины.

Назначение среднего термина — служить связью между крайними.

Как видим, смысл силлогизма в том, что, опираясь на знание отношений крайних терминов к среднему, данное в посылках, мы получаем в заключении знание об отношении, существующем между крайними терминами.

Достоверность (истинность) заключения силлогизма определяется совокупностью двух условий: 1) истинностью посылок, 2) соблюдением правил вывода.

Поскольку посылки силлогизма являются аргументами доказательства, то несоблюдение первого условия есть ошибка в аргументах. Когда не соблюдается второе условие, то это и есть ошибка в демонстрации.

Итак, ошибки в демонстрации состоят в нарушении правил силлогизма. Этих правил семь. Рассмотрим их.

1. В силлогизме должно быть три и только три термина.

Нарушение этого правила — ошибка, называемая «учетверением терминов». Она происходит чаще всего из-за нечеткости терминологии, когда один и тот же термин употребляется в посылках в различных смыслах.

Например:

Все точки круга равноудалены от центра.

Сегмент — часть круга.

Вывод. Все точки сегмента равноудалены от центра.

Неверный вывод получился потому, что в первой посылке термин «круг» употреблен в смысле «окружность», в посылках оказалось четыре термина вместо трех.

2. Средний термин должен быть распределен хотя бы в одной из посылок.

Поясним, что термин распределен в суждении, если он мыслится во всем объеме, т. е. если в нем мыслится весь класс предметов, о которых говорится в суждении; термин не распределен в суждении, если он мыслится в части своего объема, т. е. когда в нем мыслится только часть класса предметов.

Возьмем, например, суждение «все параллелограммы — четырехугольники».

Так как здесь мыслится все параллелограммы, то термин «параллелограмм» распределен. Термин «четырехугольник» — не распределен, так как в суждении имеются в виду не все четырехугольники, а только те из них, которые являются параллелограммами.

В суждении «Некоторые студенты — шахматисты» термин «студенты» не распределен, так как здесь мыслятся не все («некоторые») студенты; термин «шахматисты» тоже не распределен, так как есть шахматисты, которые не являются студентами.

Перейдем к самому правилу.

Возьмем пример.

Все призмы — многогранники.

Данное тело — призма.

Вывод. Данное тело — многогранник.

Здесь средним термином является «призма» и он распределен в первой посылке, так как в ней мыслится весь класс призм, что и обеспечивает правомерность вывода.

Но из посылок: Все призмы — многогранники. Данное тело — многогранник — не следует вывод, что данное тело — призма, так как здесь средним термином является «многогранник», который не распределен (т. е. мыслится только в части своего объема) в каждой из посылок. Действительно, в класс многогранников входят не только призмы и не только данное тело. Возможно, что данное тело действительно является призмой, но такой вывод не следует из наших посылок, он ими не обусловлен. С таким же, например, основанием можно считать, что данное тело есть пирамида.

Распределенность среднего термина хотя бы в одной из посылок — необходимое условие правомерности заключения.

3. Термин, не распределенный в посылках, не может быть распределен в заключении.

Например:

Все ромбы — параллелограммы.

Все квадраты — ромбы.

Здесь второе правило соблюдено (средний термин «ромб» распределен в первой посылке), но заключение «все параллелограммы — квадраты» было бы неправильным, так как термин «параллелограмм» не распределен. Заключение силлогизма не может дать больше того, что содержится в посылках: если какой-нибудь крайний термин берется в одной из посылок только в части своего объема, то он не может быть взят во всем объеме в заключении. Правильным выводом из данных посылок будет: некоторые параллелограммы — квадраты.

Из данных посылок можно сделать и другой вывод: все квадраты — параллелограммы. Такой вывод вполне правомерен, так как термин «квадрат» распределен в посылке; это дает право взять его в полном объеме в заключении.

4. Из двух отрицательных посылок нельзя вывести никакого заключения.

Например:

Призма не является круглым телом. Ни одна пирамида не есть призма.

Несмотря на наличие общего термина («призма») и на то, что он распределен в обеих посылках, мы не можем вывести из них заключение: нельзя установить какую-нибудь связь или отсутствие всякой связи между крайними терминами, так как общий термин не связан ни с одним из них.

5. Если одна из посылок есть отрицательное суждение, то и заключение может быть только отрицательным.

Примеры.

1. Ни один прямоугольный треугольник не является равносторонним.

Данный треугольник — прямоугольный.

Вывод. Данный треугольник не равносторонний.

2. В параллелограмме противоположные стороны равны.

В четырехугольнике *АВСД* противоположные стороны не равны.

Вывод. Четырехугольник *АВСД* — не параллелограмм.

Четвертое и пятое правила дополняют друг друга и их можно объединить. Действительно, если иметь в виду только качество посылок силлогизма, то возможны только три случая:

1. Обе посылки — утвердительные суждения.
2. Одна — утвердительное суждение, другая — отрицательное.
3. Обе посылки — отрицательные суждения.

Правила четвертое и пятое устанавливают: в первом случае заключение может быть только утвердительным, во втором — только отрицательным, в третьем — никакого заключения сделать нельзя.

6. Из двух частных посылок не следует никакого заключения.

Приведем пример.

Некоторые параллелепипеды — правильные многогранники.

Некоторые прямые призмы — параллелепипеды.

Следует ли из этих посылок, что некоторые прямые призмы — правильные многоугольники? — Нет, не следует.

Чтобы убедиться в этом, достаточно обратить внимание на то, что в данных посылках вообще нет распределенных терминов, значит, не распределен и средний термин («параллелепипед») ни в одной из посылок. Но в таком случае (правило второе) заключение не следует с непреложной необходимостью.

Недостаточность частных посылок для обоснования вывода следует уже из того, что в аналогичных случаях можно вывести не только истинные суждения, но и ложные.

Например:

Некоторые параллелограммы — квадраты.

Некоторые четырехугольники с неравными диагоналями — параллелограммы.

Здесь тоже напрашивается вывод: некоторые четырехугольники с неравными диагоналями — квадраты. Но этот вывод оказывается ложным.

Мы убедились, что при помощи частных посылок можно с одинаковым успехом выводить как истинные, так и ложные суждения. Это и значит, что частных посылок (несмотря на их истинность) недостаточно для обоснования вывода; иными словами, из частных посылок не следует никакого вывода.

7. Если одна из посылок частная, то и заключение может быть только частным.

Приведем примеры.

1. Все параллелепипеды — призмы.

Некоторые правильные многогранники — параллелепипеды.

Вывод. Некоторые правильные многогранники — призмы.

2. Ни одна трапеция не является правильным многоугольником.

Некоторые четырехугольники — трапеции.

Вывод. Некоторые четырехугольники не являются правильными многоугольниками.

Эти примеры показывают, что при наличии одной частной посылки заключение не может быть общим.

ГЛАВА II

ВОСПИТАНИЕ ПОТРЕБНОСТИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ.

§ 1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА.

Почему на уроках геометрии возникает проблема воспитания у учащихся потребности в доказательстве?

Прежде всего — в силу того общего соображения, что отношение учащихся к знаниям имеет чрезвычайно важное значение в деле обучения. Когда говорят о возбуждении и поддержании у учащихся интереса к данному предмету, об их внимании и активности, о состоянии дисциплины на уроках, то во всех таких случаях идет речь и о проявлении определенного отношения учащихся к знаниям, к учебному процессу в целом.

С этой точки зрения воспитание потребности в доказательстве *необходимо для выработки* у учащихся должного отношения к доказательствам, без которого стало бы невозможным успешное изучение и усвоение самих доказательств. Ясно, что подобное соображение имеет общий характер, его можно высказать по поводу любого раздела курса школьной математики (и не только математики), а поэтому, чтобы оправдать необходимость постановки задачи воспитания потребности в доказательстве как **специальной** проблемы, нужны какие-то дополнительные аргументы. Приведем два из них.

1. Без всякого преувеличения можно утверждать, что усвоение доказательств требует от учащихся наибольшего напряжения мышления, но для детей отвлеченное мышление тяжело, а поэтому в процессе изучения доказательств возникает большая опасность проявления у учащихся отрицательного отношения к учебному материалу и учитель обязан особо и специально озаботиться предупреждением и ликвидацией такой опасности.

2. На выработку у учащихся положительного отношения к изучаемому материалу оказывает самое благотворное влияние понимание учащимися применимости и приложимости приобретаемых ими знаний, — первоначальное же ознакомление с доказательствами создает о них, в этом отношении, самое невыгодное впечатление.

Если, например, применимость и полезность арифметического правила или геометрической теоремы почти не нуждаются в доказательстве, так как эти правила и теоремы непосредственно используются для решения примеров, задач и вопросов прикладного характера, то с доказательствами дело обстоит значительно сложнее. Здесь ученик не видит прямого и непосредственного использования изучаемого материала; более того, ему представляется случай убедиться в бесполезности доказательств, так как он замечает, что доказательство данной теоремы не воспроизводится и не повторяется ни в практических приложениях геометрии, ни при решении задач, ни в доказательствах новых теорем: во всех таких случаях мы ограничиваемся ссылкой на теорему, не приводя ее доказательства. Вполне поэтому естественны и законны недоуменные вопросы учащихся:

— *Для чего нужны доказательства?*

— Зачем доказывать, когда нам и так ясно или когда мы верим учебнику?

Такие и подобные им вопросы отражают стремление ученика определить свое отношение к изучаемому материалу, и оно, несомненно, окажется отрицательным, если учитель не будет уделять этим вопросам особого и самого серьезного внимания.

Назначение и цели доказательств далеко не очевидны; учителю еще предстоит убедить учащихся в необходимости и ценности доказательств, и это вовсе не простое и не легкое дело.

Этих двух дополнительных аргументов (трудность доказательств и неясность целей их изучения) уже достаточно, чтобы признать необходимым выделение задачи воспитания у учащихся потребности в доказательстве в особую, специальную проблему методики преподавания геометрии.

Успешное решение этой проблемы имеет большое значение и в свете общих целей воспитания и образования. Действительно, воспитание потребности в доказательстве вырабатывает у учащихся стремление к обоснованию своих суждений, к проверке истинности суждений, а это и есть воспитание важнейшей черты логического мышления — его доказательности. Но мышление необходимо для сознательного усвоения каждой науки (не только геометрии) и в предстоящей учащимся практической деятельности. Следует также учесть, что при помощи доказательного мышления достигается убежденность учащихся в истинности приобретаемых ими знаний.

Теперь и становится ясным, что воспитание потребности в доказательстве имеет важное значение не только для сознательного усвоения самих доказательств, но и для всего учебного процесса в целом. Именно с такой более широкой точки зрения следовало бы рассматривать цели воспитания потребности в доказательстве.

Мы ответили на вопрос, почему **должно** заняться воспитанием потребности в доказательстве; теперь возникает второй вопрос: **как** это следует делать?

Ответу на него и посвящено все остальное содержание этой главы.

Так как данная проблема почти не разработана в методической литературе, то прежде всего ощущается необходимость в установлении основных, принципиальных положений и в устранении неясностей в их понимании, в этом и состоит наша главная задача.

§ 2. ОБ ОПРАВДАНИИ НЕОБХОДИМОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПУТЕМ ВОЗБУЖДЕНИЯ СОМНЕНИЙ В СПРАВЕДЛИВОСТИ ТЕОРЕМЫ.

Воспитание потребности в доказательстве начинается с оправдания введения доказательств, с убеждения учащихся в их необходимости.

Одним из средств для достижения этой цели является прием предварительного возбуждения сомнений в справедливости теоремы. Поскольку этому приему отводится ведущая роль в нашей методической литературе, мы считаем необходимым остановиться сейчас на выяснении его истинного значения.

Рассмотрим относящееся к данному вопросу высказывание Н. М. Бескина:

«Надо сначала посеять в учениках сомнение в том, справедлива ли данная теорема, а потом уже это сомнение разрешить. Это один из важных, основных принципов преподавания математики»[1].

О степени важности этого принципа будет идти речь ниже, а сейчас зададимся вопросом: достаточен ли он? Иначе говоря, достигаем ли мы цели (т. е. оправдания перед учащимися необходимости доказательства), руководствуясь данным принципом?

Мы не поставили бы этот вопрос, если бы шла речь об учащихся старших классов (например, VIII), если бы подразумевался ученик, уже понимающий ценность доказательства, приобретший известный навык в логических рассуждениях и способный к критической оценке различных способов устранения сомнений; но вовсе не такого ученика имеет в виду Н. М. Бескин, показывая применение выдвигаемого им принципа для оправдания необходимости доказательства теоремы о равенстве прямых углов. Здесь речь идет об ученике VI класса, об ученике, только приступающем к изучению геометрии. В этой связи, в отношении учащихся VI класса, мы утверждаем, что данный принцип недостаточен. Покажем это на примере, приводимом самим автором.

«Пусть даны,— говорит Н. М. Бескин,— два прямых угла; это значит лишь то, что каждый из них равен своему смежному... Следует ли отсюда, что эти прямые углы равны?— Это не очевидно. Другими словами, смежные прямые углы равны между собой по определению, но верно ли это для несмежных прямых углов?»[2].

Наличие сомнений и рассматривается Н. М. Бескиным как уже достаточное условие для оправдания необходимости доказательства. Вот с этим и нельзя согласиться. В самом деле, не исключено и более чем вероятно, что в данном и в аналогичных случаях ученик прежде всего попробует разрешить сомнения опытным путем. Начертив, например, две пары равных смежных углов, он вырежет эти углы и попытается совместить любой из углов первой пары с любым из углов второй пары. Если и были сомнения, то теперь они отпадают: ученик убеждается, что несмежные прямые углы при наложении совмещаются и, значит, они равны. В аналогичных случаях он может обратиться к

---

[1] Н. М. Бескин, Методика геометрии, 1947, стр. 71.
[2] Там же, стр. 88.

рассмотрению разнообразных моделей и чертежей, к измерению, построению.

Дело не только в том, что такая опытная проверка проще, доступнее, понятнее учащимся, но и в том, что она дает реальные, зримые, осязаемые результаты, в то время как вся убедительная сила доказательства опирается на понимание учащимися необходимости следования выводов из посылок.

Перед учеником два пути, два средства устранения сомнений и убеждения, и если бы ему была предоставлена возможность свободного их выбора, то, несомненно, он предпочел бы опытную проверку логическому доказательству. Поскольку же мы говорим об оправдании доказательства, то перед нами возникает самая важная и самая трудная задача — поставить дело так, чтобы положение вещей постепенно изменилось, чтобы учащиеся добровольно и сознательно предпочли обратное — логическое доказательство опытной проверке. Именно этот момент и упускается Н. М. Бескиным.

При оправдании доказательства нужно исходить из того, что в сознании учащихся VI класса еще нет готовой и сколько-нибудь прочной связи между сомнениями и логическим доказательством, что нам предстоит помочь учащимся в установлении и закреплении такой связи.

Нужно разъяснить учащимся не только недостатки привычного для них приема умозаключения от частного к общему, указать на неточность измерений и незавершенность опыта, но и убедить их в том, что логическое доказательство свободно от этих недостатков, что оно обладает качествами, придающими ему большую убедительную силу по сравнению с такими средствами убеждения, как измерение и опытная проверка справедливости теоремы для отдельных частных случаев. Такими ценными отличительными качествами логического доказательства являются общность, точность и объективность. Осознание этих качеств учащимися — длинный, трудный, но единственно правильный путь оправдания необходимости доказательства.

§ 3. ОБЩНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Общность геометрического доказательства состоит в том, что доказанная теорема истинна всегда; заключение теоремы будет справедливым для всех частных случаев, допускаемых ее условием. Исследование и рассмотрение отдельных частных случаев не может дать знание о всех случаях. Знание, распространяющееся на все частные случаи, дает только логическое доказательство и потому именно, что оно обладает общностью.

Разъяснение учащимся этого качества доказательства естественно начинать с выявления недостатков неполной индукции, подбирая вначале такие примеры, где этот вид умозаключения наталкивал бы нас на явно неверный вывод.

Например: 1. а) Медь при нагревании расширяется.

б) Стекло при нагревании расширяется.

в) Ртуть при нагревании расширяется.

Эти верные суждения подсказывают вывод: все тела при нагревании расширяются, но он оказывается ложным.

2. Легко подметить, что числа 11, 31, 41, 61, 71 являются простыми числами, но общее утверждение, основанное на наблюдении этих частных случаев: «все двузначные числа, оканчивающиеся единицей, являются простыми»,— неверно.

3. Если в выражение

$$m^2 - m + 41$$

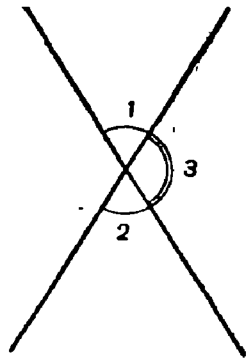
подставлять вместо m числа: 1, 2, 3, 4, ..., 40, то получаются простые числа. Однако при $m = 41$ получаем:

$41^2 - 41 + 41 = 1681$ (составное число).

Такие и аналогичные им примеры имеют целью убедить учащихся в неправомерности, незаконности общего суждения, основанного на рассмотрении отдельных (не всех) частных случаев.

Но геометрическое доказательство связано с чертежом и понимание учащимися общности геометрического доказательства зависит от правильного понимания роли и назначения чертежа. Вполне мыслимо осуществить геометрическое доказательство только логическими средствами без каких бы то ни было чертежей; практически же удобнее, легче построить доказательство, имея перед глазами чертеж или воспроизводя его мысленно.

Сама же возможность и законность использования единичного чертежа для доказательства общего положения обусловлена тем, что в единичном содержится общее. Хотя это общее и не дано нам непосредственно в восприятии, но мы можем путем абстракции выделить в данном воспринимаемом нами явлении или факте то общее, что присуще всем предметам определенного класса. Это позволяет нам считать фигуру, изображенную на данном чертеже единичной представительницей определенного класса фигур, и если в процессе доказательства мы опираемся только на те пространственные соотношения между элементами нашей единичной фигуры, которые необходимо принадлежат всем фигурам данного класса, то это значит, что мы оперируем общими свойствами класса предметов (фигур), а поэтому наши выводы будут обладать общностью, они распространяются на все фигуры данного класса.



Черт. 10.

Перейдем к разъяснению учащимся роли и назначения чертежа в доказательстве.

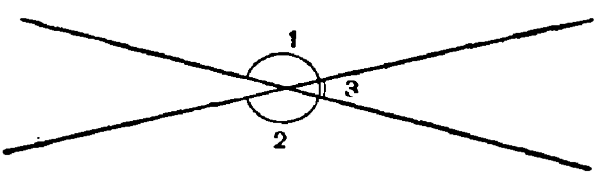
Возьмем в качестве первого и простейшего примера теорему о вертикальных углах. После того как она доказана, поставим вопрос: будет ли наша теорема справедлива всегда, для любых вертикальных углов? Чтобы ответить на этот вопрос, обратим внимание на ту часть доказательства, где мы пользовались данным чертежом:

$$1)\ \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ;$$
$$2)\ \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ;$$

отсюда: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3$

и т. д. (черт. 10).

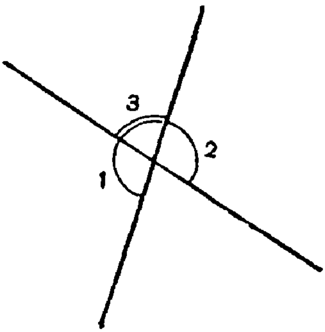
Мы видим, что с чертежом связаны только первые два равенства. Справедливость этих равенств не вызывает



Черт. 11.

сомнений, но существенное значение имеет наличие в них одного и того же угла, т. е. $\angle 3$. Возникает вопрос: всегда ли, для любой ли пары вертикальных углов существует угол, смежный с каждым из углов данной пары?

Из определения вертикальных углов следует, что такой угол ($\angle$ 3) существует всегда. Наглядно это можно иллюстрировать при помощи чертежей 11 и 12. Значит, в нашем доказательстве использовано общее свойство всех вертикальных углов, а поэтому наша теорема доказана для всяких, для любых вертикальных углов—она справедлива всегда.



Черт. 12.

Чтобы отчетливее выявить чисто иллюстративную, только вспомогательную роль чертежа, полезно провести одну или несколько аналогий между арифметическим и геометрическим доказательствами. Напомним, например, доказательство признака делимости на 3 из курса арифметики А. П. Киселева. «Возьмем какое-нибудь число, например 2457

$$\begin{aligned} 2457 = 999 + 999 \qquad\qquad\qquad & + 2 + \\ + 99 + 99 + 99 + 99 \qquad & + 4 + \\ + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 & + 5 + 7 \end{aligned}$$»[1].

Здесь число 2457 играет ту же самую роль, что и наш единичный чертеж в геометрии. Разложение числа 2457 осуществлено таким образом, что мы не сомневаемся в возможности повторить аналогичное разложение для любого числа, и уверены, что последняя колонка слагаемых в любом случае будет состоять из цифр самого числа. Хотя рассуждения и проводятся при помощи числа 2457, но индивидуальные свойства этого числа не участвуют в доказательстве, — оно опирается только на общие свойства чисел. В этом и состоит полная аналогия в использовании чертежа и численного примера в геометрическом и арифметическом доказательствах.

Приведем весьма ценные и незаслуженно преданные забвению приемы разъяснения общности доказательства из руководств А. Острогорского и С. И. Шохор-Троцкого.

Прием А. Острогорского.

В качестве примера А. Острогорский берет теорему: *Каждая хорда меньше диаметра одного с ней круга.*

---

[1] А. П. Киселев, Арифметика, 1955, стр. 54.

«Пусть,— говорит Острогорский,— в круге проведены диаметр и хорда. Ученики скажут, что диаметр больше этой хорды. Если провести еще несколько хорд, то сразу ученики скажут, что все они короче диаметра. В этом можно убедиться и путем измерения. Теперь нужно решить вопрос: можно ли сказать, что в с е хорды короче диаметра? Предстоит убедить учеников, что такое обобщение невозможно, так как хорд бесчисленное множество и все их нельзя перемерить. Кроме того, очень трудно и почти невозможно решить путем измерения вопрос о хорде, проведенной из конца диаметра под очень малым углом к нему. Отсюда вытекает необходимость прийскать другой способ решения вопроса, который дал бы возможность распространить наш вывод на все хорды. Этим способом и является умозрительное доказательство»[1].

Мы видим здесь очень удачное использование приема — сделать ясное неясным, пробудить у учащихся сомнения в существовании казалось бы вполне очевидного факта. Но этого мало, этого недостаточно для перехода к доказательству,— Острогорский убеждает учащихся в невозможности разрешить возникшие сомнения путем исследования частных случаев. Совершенно ясно, что только на основании такого убеждения вытекает необходимость прийскать другой способ. Но и этим еще не достигается полное оправдание введения умозрительного доказательства,— нужно убедить учащихся, что этот способ действительно решает задачу обобщения.

А. Острогорский рекомендует следующий путь:

«Общность рассуждения или умозрительного доказательства выводится не из повторения его на нескольких чертежах, а из разбора частей доказательства.

...Можно ли концы каждой хорды соединить с центром? Всегда ли, в таком случае, хорда будет прямой, а радиусы образуют ломаную, опирающуюся на одни с хордой концы?..

Разобрав таким образом доказательство, мы вправе сказать, что, говоря об одной хорде, мы разумеем все хорды»[2].

---

[1] А. Острогорский, Материалы по методике геометрии, 1884, стр. 65.

[2] Там же, стр. 66.

Соглашаясь с Острогорским, что только таким путем может быть вскрыта общность доказательства и действительно оправдана перед учащимися необходимость обращения к дедукции, мы хотим сделать несколько уточняющих замечаний.

1. Хотя общность доказательства не вытекает из повторения его на нескольких чертежах, но варьирование чертежа все же необходимо: оно помогает осознанию общности, без него нельзя обойтись при «разборе частей доказательства».

2. Следовало бы более точно выяснить, почему, «говоря об одной хорде, мы разумеем все хорды», т. е. подчеркнуть, что наши рассуждения опирались только на общие свойства хорд и диаметра, что мы пользовались только теми свойствами, которые присущи всем хордам и всем диаметрам.

Прием С. И. Шохор-Троцкого.

Рассматривается теорема о внешнем угле треугольника.

«Самое трудное,— говорит Шохор-Троцкий,— это полное уяснение себе учениками, почему справедливое относительно внешнего угла одного начерченного нами особенного треугольника справедливо также относительно всего остального бесчисленного множества нами не начерченных треугольников?.. При каких условиях доказанное для одного случая может считаться доказанным для всех случаев?»

Чтобы это выяснить, ставятся вопросы:

«Всякую ли сторону треугольника можно разделить пополам? Всякую ли вершину данного треугольника можно соединить прямой с серединой противолежащей стороны? Всякую ли медиану можно продолжить?

...Вывод. Для всякого ли треугольника справедлива теорема о внешнем угле?— Да, так как то, что мы делали при доказательстве ее для данного треугольника, не зависело от формы и величины треугольника и может быть повторено для всякого треугольника»[1].

Пример Шохор-Троцкого несколько беднее примера Острогорского. Здесь не ставится под сомнение существование доказываемого факта и не выясняется невозможность устранения сомнений опытным путем (в данном случае то

[1] С. И. Шохор-Троцкий, Геометрия на задачах. Книга для учителя, 1913, стр. 110.

и другое было бы и осуществимым, и полезным); что же касается общности доказательства, то она выясняется с достаточной отчетливостью и полнотой. Мы убеждены, что доказательство «может быть повторено для любого треугольника». Следовательно, теорема справедлива всегда.

Пример Шохор-Троцкого приведен нами с целью показать несколько иной вариант разъяснения общности, который можно рассматривать как дополнение варианта, предложенного Острогорским. В одном подчеркивается, что речь идет о всех предметах данного класса (все хорды), в другом — что доказательство не зависит от чертежа (от формы и размеров треугольника); там ставятся вопросы: можно ли?, всегда ли?, здесь — всякую ли?

В конечном счете это одно и то же, однако в практике учителя должны быть использованы оба варианта, так как разнообразие предлагаемых вопросов и различные подходы к решению поставленной проблемы, несомненно, помогут учащимся глубже и лучше понять суть дела. К сожалению, в обоих примерах рассуждения проводятся слишком абстрактно, не выходят из сферы чистого умозрения. По нашему мнению, это очень серьезное упущение: без должной конкретизации, без рассмотрения различных вариантов чертежей представления учащихся об общности доказательства не могут быть достаточно содержательными и ясными.

Нас не может удовлетворить и постановка проблемы в целом у обоих авторов. В самом деле, каждый из них выбирает некоторую определенную, «подходящую» теорему, показывает на ней, в чем именно состоит общность доказательства, и этим дело заканчивается. Но, во-первых, та и другая из приводимых ими теорем далеко не первые теоремы школьного курса, и это означает, что выяснение общности доказательства дается с большим запозданием; во-вторых, нельзя ограничиваться только демонстрацией общности на одном и пусть даже и на нескольких примерах.

Мы не можем, не имеем права откладывать выяснение общности доказательства до подходящего, благоприятного случая. Это означало бы, что смысл и значение предшествующих доказательств остались для учащихся неясными, а пользование дедукцией — неоправданным. Нельзя оспаривать тот очевидный факт, что для заучивания доказательств вовсе не требуется ни малейшего представления об его общности, но если иметь в виду сознательное усвоение доказательства, то понимание учащимися его общности нужно всегда, оно необходимо в каждом случае, при доказательстве любой теоремы.

Общность — существенно важное и необходимое свойство (признак) каждого доказательства, и нельзя поэтому усвоить смысл того или иного доказательства, не понимая его общности. Если все разъяснения общности можно иногда изложить в двух, трех словах, как например, в ранее приведенной теореме о вертикальных углах, то это еще не значит, что в таких случаях оно не является необходимым, что им можно пренебречь. Вовсе нет необходимости проводить полный анализ общности каждого доказательства; в подавляющем большинстве случаев учитель может и должен ограничиться самыми краткими указаниями и пояснениями, но обойтись без них нельзя ни в одном случае.

Чаще всего эти краткие пояснения могут быть исчерпаны двумя, тремя вопросами учителя в процессе доказательства или после доказательства.

Например, к теореме о существовании окружности, проходящей через три точки, могут быть предложены вопросы:

Всегда ли два перпендикуляра к пересекающимся прямым будут иметь общую точку и только одну?

Всегда ли можно провести окружность любым радиусом с центром в данной точке?

Вопросы к теореме об объеме треугольной пирамиды:

Можно ли любую треугольную пирамиду достроить до призмы?

Можно ли любую треугольную призму разрезать на три части так, чтобы каждая из них оказалась треугольной пирамидой?

§ 4. ТОЧНОСТЬ И ОБЪЕКТИВНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Если бы мы захотели опытным путем убедиться в справедливости одной из самых простых теорем, например теоремы о вертикальных углах, и нам удалось бы, измеряя углы транспортиром, получить одинаковые результаты, скажем по 43°, то следует ли отсюда, что эти углы *точно* равны между собой. Анализ процесса измерения показывает, что для такого вывода мы не имеем достаточных оснований.

В самом деле:

1) Точность отсчета по транспортиру не превышает 0,°5.

2) Нет гарантии, что центр транспортира точно совпадал с вершиной угла и одна из сторон угла точно совпадала с диаметром.

3) Стороны углов могли быть неодинаковой толщины.

4) Нет гарантии, что наше зрение нас не обманывает.

Достаточно привести любое из этих соображений, чтобы от нашей уверенности, что каждый из углов в точности равен 43°, не осталось и следа. Но подобные соображения можно высказать по поводу оценки результатов всякого измерения, и, следовательно, опираясь только на измерения, мы не можем утверждать, что факт, объявляемый в теореме, вполне точно соответствует действительности.

Это прежде всего относится к теоремам о метрических соотношениях. Например:

1) С какой бы точностью мы ни измеряли углы данного треугольника, в результате получаются только приближенные числа, сумма которых может быть только приближенным числом. Мы имеем основание утверждать, что сумма углов приблизительно равна 180°, вопрос же о точном значении этой суммы остается открытым.

2) Измерив гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника и проделав над полученными приближенными числами соответствующие действия, мы увидим, что квадрат приближенного числа, выражающего длину гипотенузы, оказывается таким приближенным числом, которое почти совпадает с приближенной суммой квадратов приближенных чисел, выражающих длины катетов. Это все, что может дать нам опыт.

Данных наблюдения, измерения и опыта недостаточно во многих случаях для вынесения определенного суждения и о качественной стороне явления.

Например, достаточно одного взгляда, чтобы сказать, что любая хорда, значительно удаленная от центра, меньше диаметра того же круга, но это свойство выступает уже не так ярко и не столь очевидно, если взять хорду, расположенную ближе к центру. Оценка «на глаз» становится в этом случае невозможной, и мы вынуждены обратиться к инструментам, к измерению. Но, измеряя хорды, незначительно удаленные от центра, мы неизбежно столкнемся со случаями, когда приближенная разность длин диаметра и хорды будет равна или меньше погрешности измерения.

В таких случаях нельзя утверждать что-либо определенное об отношении длин измеряемых отрезков и вопрос остается открытым.

Приведем примеры, где идет речь о вопросах конструктивного, позиционного характера.

1. Проходит ли третья медиана треугольника через точку пересечения двух первых медиан?

2. Будет ли прямая, перпендикулярная к радиусу в конце его, лежащему на окружности, иметь с окружностью только одну общую точку?

3. Лежит ли четвертая вершина равнобедренной трапеции на окружности, проходящей через первые три вершины этой трапеции?

Никакое построение, как бы тщательно оно ни было выполнено, не может разрешить и устранить возникающие во всех таких случаях сомнения.

Теперь и возникает вопрос: почему же доказательство дает более точное знание действительности? Во-первых, потому, что доказательство не связано непосредственно с опытом и измерениями и, следовательно, свободно от их недостатков; во-вторых, логическое доказательство является объективным (строгим).

Логическое доказательство объективно, так как оно строится в строгом соответствии с законами правильного (логического) мышления. Логические формы, используемые в доказательстве, не зависят от психики человека, от его переживаний, настроений, характера, они не являются классовыми, это общечеловеческие формы мышления, имеющие характер объективных законов. В процессе доказательства мы не можем делать произвольные выводы, мы ощущаем непреложность, необходимость следования вывода из посылок, чувствуем принудительный и от нас не зависящий характер вывода,—и мы оказываемся вынужденными либо сделать этот вывод, либо признать его истинность, если он нам предъявлен. Поскольку доказательство подчинено объективной закономерности форм логического мышления, оно, безусловно, является объективным и, следовательно, точным.

Осознание учащимися объективности доказательства — длительный и сложный процесс, находящийся в прямой зависимости от степени умственного развития учащихся, от качества и количества усвоенных ими приемов и навыков логического мышления.

Уже в начале курса нужно разъяснить учащимся, что правильность и точность результатов доказательства достигается не только тем, что мы исходим и пользуемся только ранее проверенными положениями, но и тем, что наши рассуждения в процессе доказательства построены правильно. На данном этапе преждевременно было бы говорить о каких-либо правилах умозаключений, — достаточно обратить внимание учащихся на непреложность, необходимость следования выводов из посылок.

Например, в доказательстве теоремы о вертикальных углах из равенств:

$$1)\ \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ,$$
$$2)\ \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ —$$

был сделан вывод:

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3.$$

Поставим вопросы:

1) Правилен ли этот вывод? 2) На чем он основан? 3) Можно ли вместо знака равенства поставить *знак неравенства*?

В ы в о д. Если две величины порознь равны третьей, то мы не можем считать их неравными, мы должны признать их равенство.

Далее, из последнего равенства следовало, что

$$\angle 1 = \angle 2.$$

Поставив те же вопросы, мы убеждаемся, что никакого иного вывода об отношении этих углов сделать нельзя: если от равных величин отнять равные, то необходимо, неизбежно останутся равные.

Такой анализ доказательства убеждает учащихся в необходимости следования выводов из посылок, в невозможности получения иных выводов, — это и служит подтверждением правильности рассуждений.

Понимание строгости, объективности доказательства связано с постепенным осознанием учащимися законов правильного мышления. Не давая и не требуя точной формулировки этих законов, нужно поставить дело так, чтобы в процессе каждого доказательства отчетливо выступали требования определенности, последовательности, непротиворечивости и обоснованности суждений, чтобы ученик каждый раз убеждался в недопустимости нарушения любого из этих требований.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КАК ЭЛЕМЕНТ ЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ.

Вопрос «почему», который мы ставим, требуя доказательств того или иного факта, может быть вызван сомнениями в существовании факта и тогда требование— «докажите» будет означать: убедите нас в том, что он существует. Именно с этой точки зрения мы и рассматривали вопрос о воспитании у учащихся потребности в доказательстве. Мы рассмотрели общность, точность и объективность доказательства как те его качества, осознание которых необходимо для того, чтобы учащиеся могли понять, в чем именно состоит убедительная сила доказательства, почему оно может устранить сомнения, почему оно служит средством убеждения, средством познания истины.

Убежденность ученика в истинности преподносимых ему знаний — существенно необходимое и важное условие сознательного усвоения учебного материала и воспитания мышления. Рассматривая доказательство как средство убеждения, можно утверждать, что воспитание у учащихся потребности в доказательстве есть одновременно и воспитание у них потребности в личном убеждении.

Но вопрос «почему» имеет и другой смысл. Мы можем не сомневаться в существовании самого факта, но тем не менее ставим этот вопрос и потому именно, что нам непонятно происхождение факта, неизвестны основания, из которых он вытекает, неясна его закономерность. В таком случае требование — «докажите» означает, что мы требуем объяснения факта, установления его закономерности, вскрытия логических связей между ним и ранее известными положениями. В этих целях данный факт нужно доказать — включить его в уже сложившуюся в нашем сознании систему знаний.

Можно, например, не сомневаться в том, что бо̀льшей наклонной соответствует бо́льшая проекция, но нужно чем-то объяснить этот факт, понять его закономерность, установить его взаимосвязь с другими фактами,— тогда мы и обращаемся к доказательству как к средству осознания данного факта.

Намечается, таким образом, и вторая линия, по которой должно идти воспитание потребности в доказательстве: доказательство необходимо в целях объяснения, осознания факта; им пользуются для выяснения оснований, из которых вытекает данное положение как необходимое их следствие, для вскрытия логических связей между данным и другими предложениями геометрии и, в конечном счете, для построения геометрии как дедуктивной системы знаний. Назовем условно эту вторую линию развития и воспитания потребности в доказательстве задачей объяснения (в соответствии с ее первоначальным назначением), сохранив для первой линии название задачи убеждения.

Мы не отрицаем, что для достаточно развитого мышления обе линии почти сливаются, что здесь они трудно различимы, и, говоря: «убедимся в этом», мы можем подразумевать и то, и другое — и устранение сомнений, и объяснение (обоснование). Но на первом этапе систематического курса геометрии задачи убеждения и объяснения еще не объединяются в сознании учащихся, и нужно с этим считаться, указывая учащимся, что доказательство необходимо в обеих целях.

Требование объяснения факта не является для учащихся ни неожиданным, ни новым. С ним они уже достаточно ознакомились при изучении других предметов; несомненно, что учащиеся уже начали ощущать и потребность в объяснении как необходимом условии понимания изучаемого материала. Учитель геометрии должен опираться на эту потребность и разъяснять учащимся, что в геометрии доказательство является и объяснением. В процессе доказательства мы узнаем: на какие ранее известные положения опирается доказываемое предложение, почему оно с ними связано и каким образом из них вытекает, — это знание и есть объяснение факта.

Возьмем, например, теорему о внешнем угле треугольника.

Ее доказательство не только оправдывает справедливость теоремы, но и дает знание, почему она справедлива. Действительно, здесь была установлена возможность построения такого вспомогательного треугольника, один из углов которого является частью внешнего угла и равен внутреннему углу данного треугольника, не смежному с внешним.

У учащихся VI класса еще сильна тенденция к простому запоминанию фактов; изучение доказательств может и должно быть использовано для действенной борьбы с этой тенденцией, для осознания учащимися необходимости объяснения фактов. Кроме того, задача убеждения, понимаемая как устранение сомнений в справедливости теоремы, не является обязательной целью доказательства каждой теоремы школьного курса, тем более в младших классах. Нужно считаться с тем, что для учащихся этих классов очевидная наглядность факта имеет очень большое, а иногда и решающее значение; было бы преждевременно и антипедагогично требовать от них абсолютного недоверия к наглядности.

Мы считаем, что было бы неправильным начинать изучение курса с провозглашения общего абстрактного принципа — «во всем нужно сомневаться», или «нельзя ничему верить»; нам кажется, что подобные декларации ничего, кроме вреда, принести не могут. Исходить из этого принципа — это значит не видеть весьма существенных различий между теоремами в смысле их доступности живому созерцанию, в зависимости от большей или меньшей степени их очевидности. Например:

1. Если вращать секущую вокруг внешней точки, то бросается в глаза и становится очевидным тот факт, что по мере удаления секущей от центра окружности внутренняя часть секущей уменьшается. Теорема: бóльшая хорда ближе к центру — усматривается нами непосредственно, она наглядно очевидна, она дана живым созерцанием.

2. Если рассматривать треугольник, то факт, что сумма его углов равна 180°, нельзя отнести к непосредственно усматриваемым фактам, он не дается нам живым созерцанием.

Нельзя подходить с одинаковой мерой сомнений к каждому из этих случаев. В первом случае мы видим, что нам не на что опереться, кроме как на голословно утверждаемый принцип неверия, но тогда следовало бы говорить уже не о пробуждении сомнений, а об их навязывании; во втором случае имеется возможность обосновать сомнения, подвести под них реальную базу, убедить учащихся в возможности существования сомнений, — здесь можно говорить о действительном возбуждении сомнений. Отсюда следует, что, приступая к изучению систематического курса геометрии, нужно исходить не из принципа — «посеять сомнения любой ценой и при любых обстоятельствах», а из индивидуальных особенностей каждой теоремы, из учета конкретных условий, позволяющих обосновать сомнения, сделать их законными в глазах учащихся и только в таких случаях ставить необходимость доказательства в зависимость от наличия сомнений.

Когда учащиеся не понимают роли и назначения доказательства и не испытывают в нем потребности, то это происходит и потому, что в их сознании необходимость доказательства поставлена в непременную, в необходимую связь с сомнениями, с задачей убеждения. Когда мы слышим от учащихся: «Не нужно доказывать, мы и так верим» или: «В геометрии доказывается то, что ясно и без всякого доказательства», то и в том, и в другом, и во многих иных случаях мы видим, что в сознании учащихся прочно укоренилось представление о существовании непременной связи между сомнениями и доказательством и они не понимают необходимости доказательства, когда эта связь прерывается, когда они ее не ощущают. Чтобы не допустить образования у учащихся таких превратных представлений о необходимости доказательства, учитель должен, во-первых, осмотрительно пользоваться сомнениями, выдвигая их только там, где они могут быть оправданы; во-вторых, разъяснять учащимся, что сомнений может и не быть, но это еще не освобождает нас от необходимости доказывать и потому именно, что мы обязаны дать объяснение данному факту — установить его закономерность, выяснить, чем он вызван.

Еще раз обращая внимание на то совершенно бесспорное положение, что воспитание потребности в доказательстве немыслимо без осознания учащимися его необходимости, мы хотим, чтобы не менее бесспорным и заслуживающим общего признания стало и то положение, что осознание необходимости доказательства не может опираться только на задачу убеждения,— необходимо и очень важно, чтобы это осознание опиралось и на задачу объяснения.

Только при таком условии возможна плодотворная и успешная работа учителя по воспитанию у учащихся потребности в доказательстве.

Чтобы выяснить смысл и значение нашего последнего утверждения, необходимо еще раз обратиться к пониманию роли сомнений в нашей методической литературе.

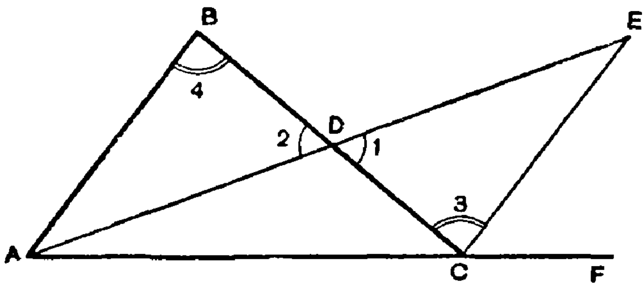
Так, в методике В. М. Брадиса говорится:

«Нет в преподавании геометрии ничего более печального, чем заучивание учащимися доказательства того, в чем у них никакого сомнения нет»[1].

---

[1] В. М. Брадис, Методика преподавания математики, 1954, стр. 348

Мы видим, что здесь принципу — «сделать ясное неясным», придается универсальное значение, что возможность плодотворного изучения доказательства поставлена в непременную, в необходимую связь с сомнениями. Вот против такой непременной связи доказательств с наличием сомнений мы и возражаем. Мы считаем, что такая установка в преподавании геометрии может привести к таким последствиям, как бесполезная затрата времени, непонимание учащимися необходимости доказательства,



Черт. 13.

преждевременный и опасный подрыв доверия учащихся к наглядной убедительности в случаях, когда мы еще вынуждены на нее опираться.

Сомнения должны быть оправданными, а вовсе не притянутыми «за волосы». Ученик должен знать, почему возникают сомнения. Но такое знание во многих случаях еще недоступно учащимся, оно превышает их силы и не следовало бы его навязывать. Если учитель понимает, что, оперируя необоснованными сомнениями, он ставит себя в ложное положение, но готов примириться с ним, имея в виду такую высокую цель, как оправдание доказательства, то он ошибается вдвойне, забывая, что кроме задачи убеждения существует и вторая и притом действительно непременная цель каждого доказательства — задача объяснения.

На эту сторону дела мы и хотели обратить внимание, касаясь понимания роли сомнений в нашей методической литературе.

Обратимся к непосредственному рассмотрению задачи объяснения.

Напомним, что объяснение при помощи доказательства состоит в приведении оснований и во вскрытии тех логических связей между ними, в силу которых доказываемый факт необходимо имеет место. В целях более полного и точного выяснения этих оснований и связей полезно проводить логический анализ некоторых доказательств.

Приведем еще один пример такого анализа:

Теорема о внешнем угле треугольника.

Дано: $\angle BCF$ — внешний угол $\triangle ABC$.

Доказать: $\angle BCF > \angle B$ (черт. 13).

Дополнительное построение:

1. Проводим медиану AD, откладываем $DE = AD$ и соединяем E с C (свойства прямой, аксиомы).

Доказательство.

1-е умозаключение.

1) Вертикальные углы равны (теорема);
2) $\angle 1$ и $\angle 2$ — вертикальные (определение).

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

2-е умозаключение.

1) Треугольники, у которых две стороны и угол между ними соответственно равны между собой, равны (теорема).
2) В треугольниках ABD и DEC:
$\angle 1 = \angle 2$ (ранее доказано),
$BD = DC$ (определение),
$AD = DE$ (построение).

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle DEC$.

3-е умозаключение.

1) В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы (теорема).
2) $\triangle ABD = \triangle DEC$ (доказано),
$\angle B$ и $\angle 3$ — углы этих треугольников, лежащие против равных сторон AD и DE (чертеж).

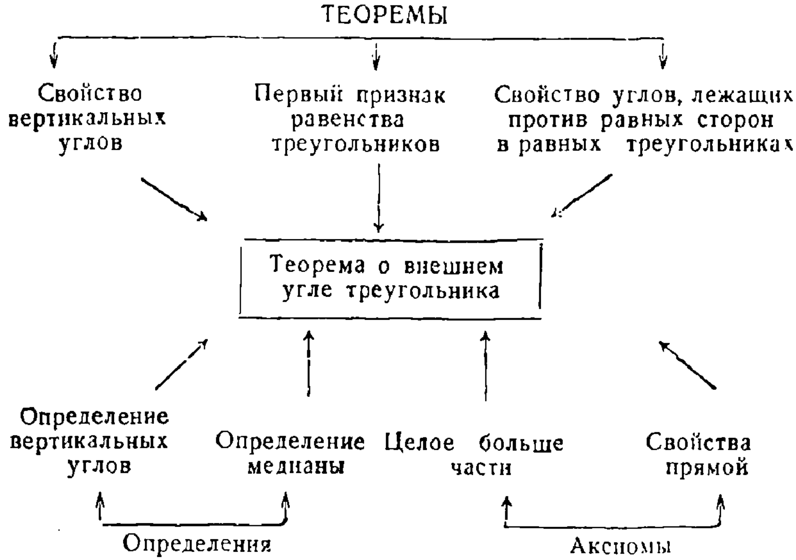
Следовательно, $\angle B = \angle 3$.

4-е умозаключение.

1) Целое больше части (аксиома).
2) $\angle 3$ — часть угла BCF (чертеж),
$\angle B = \angle 3$ (доказано).

Следовательно, $\angle BCF > \angle B$, ч. т. д.

Результат анализа доказательства желательно представить наглядно в виде следующей таблицы:



Логический анализ доказательства с последующей демонстрацией таблиц (аналогичных приведенной) и вычерчивание таких таблиц учащимися помогают им лучше уяснить связи между данной теоремой и предшествующими положениями; понять, что каждая теорема опирается на предшествующие ей положения как на основания и в свою очередь служит основанием для доказательства последующих теорем; осознать, что каждая теорема есть определенное звено в системе фактов геометрии, имеющее двусторонние связи (т. е. и с предшествующими, и с последующими звеньями), что выпадение какого-либо звена означает нарушение системы (разрыв цепи), а принятие той или иной теоремы без доказательства означало бы невозможность включения ее в систему, невозможность определения ее места и значения в системе изучаемых теорем.

Это подводит учащихся к более широкому и глубокому пониманию задачи объяснения.

Если первоначально доказательство воспринималось только как логическое обоснование (объяснение) данного, отдельного геометрического факта, то теперь выясняется и еще одно назначение доказательств: систематическое и последовательное доказывание решительно всех геометрических теорем есть в то же время и установление всех логических связей между ними, благодаря чему геометрия представляет собой не собрание отдельных разрозненных фактов и не простую их сумму, а стройную систему совокупности фактов; следовательно, доказательство есть существенно важный и необходимый элемент логического метода геометрии, определяющего ее строение.

Такое понимание этой цели доказательства вырабатывается, конечно, постепенно и доступно в полном объеме только учащимся старших классов. Особое значение для выяснения этой цели имеет обзор курса планиметрии в IX классе в связи с переходом к изучению стереометрии. Здесь полезно попытаться построить «родословное дерево геометрии», начинающееся с аксиом и первоначальных понятий и переходящее в последовательность теорем. Мы говорим «попытаться» в том смысле, что в школьном курсе нельзя дать полную систему аксиом, и в том смысле, что вовсе не следует и не нужно перечислять решительно все пройденные теоремы. Если такое «дерево» и не соответствовало бы в точности научному построению курса, то все же оно правильно отражало бы самую идею аксиоматического построения геометрии, роль доказательств в таком построении и значение аксиом как отправного пункта процесса доказывания.

К началу курса стереометрии работа учителя по воспитанию потребности в доказательстве должна быть завершена. К этому времени учащиеся должны ясно и отчетливо понимать цели и назначение доказательства, быть убежденными в его необходимости и потребность в доказательстве должна быть осознанной и устойчивой. Конечно, эта потребность будет укрепляться и развиваться и в процессе изучения стереометрии, но это будет теперь происходить само собою, не требуя специального внимания и заботы учителя.

ГЛАВА III

ЦЕЛИ ИЗУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ.

«Во всяком преподавании должны быть цель и суждение на твердых началах».

Н. И. Лобачевский.

Целями доказательств мы занимались и в предыдущей главе, имея в виду главным образом понимание этих целей учащимися. Здесь мы ставим вопрос: как должен понимать цели изучения доказательств учитель?

Глубоко ошибаются те учителя, которые еще склонны ограничивать значение этого вопроса областью «чистой теории». Вопрос о целях преподавания — всегда и прежде всего вопрос практический. Почему, например, изучение доказательств в школе еще нередко протекает на крайне низком идейном уровне и с неизбежно плачевными результатами такого «изучения»?

Если мы ответим, что здесь имело место и отсутствие у учителя достаточно ясного представления о целях учебного процесса, то это будет вполне соответствовать истинному положению вещей. Цели доказательств далеко не очевидны не только для ученика, неясное и неполное их понимание наблюдается и у многих учителей. Полное и точное определение целей обучения в процессе изложения доказательств имеет поэтому большое практическое значение.

§ 1. ОБ ОСВЕЩЕНИИ ЦЕЛЕЙ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ В МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЕ.

Основная наша задача не может быть решена без предварительного ознакомления с состоянием вопроса в наших методических руководствах.

Рассмотрим точку зрения Н. М. Бескина: «Доказательства теорем в курсе геометрии приводятся не для того, чтобы убедить учеников в справедливости теорем» [1].

Категорическая форма этого высказывания представляется нам неоправданной.

Действительно, если ученика VI класса и нельзя еще рассматривать как «критически мыслящую личность», то все же некоторый жизненный опыт ребенка и годы обучения в школе уже приучили его к вопросу: а так ли это?; в какой-то мере он уже ощущает потребность в личном убеждении, и было бы неправильным ожидать и требовать от ученика VI класса слепого, безотчетного доверия и подчинения учителю и учебнику. Задача учителя состоит вовсе не в том, чтобы глушить эту потребность, а в том, чтобы всемерно ее поддерживать, укреплять и развивать. Убежденность — необходимая черта сознательного знания, и уже поэтому нельзя игнорировать те широкие возможности и перспективы для укрепления и развития потребности в личном убеждении, которые возникают при изучении доказательств. Из того, что задачу убеждения нельзя ставить в связь с оправданием необходимости доказательства каждой теоремы, вовсе не следует, что этой задачей можно пренебречь вообще, во **всех** случаях. Ее нужно рассматривать как одну из целей доказательств многих теорем курса VI и тем более VII классов. В дальнейшем же, при правильной постановке работы по воспитанию потребности в доказательстве, мы вправе ожидать и надеяться, что настанет время, когда необходимость личного убеждения путем доказательства будет осознаваться учащимися во всех решительно случаях (независимо от наличия сомнений и убедительности наглядных представлений), что задача убеждения станет реальной целью доказательства любой теоремы.

Мы видим, что полное отрицание задачи убеждения противоречит истинным целям доказательств, оно обесценивает их образовательное и воспитательное значение.

Точка зрения В. М. Брадиса на задачу убеждения нам уже известна (глава II).

Категорическая форма высказываний авторов обоих пособий заставляет считать неприемлемой каждую из высказанных ими точек зрения: первую — как **полностью** отрицающую задачу убеждения, вторую — как ставящую

[1] Н. М. Бескин, Методика геометрии, 1947, стр. 75.

доказательство в непременную связь с сомнениями и, следовательно, с задачей убеждения.

Единодушное и полное признание получила другая цель — научить учащихся доказывать.

Так, Н. М. Бескин говорит: «Доказательства приводятся для того, чтобы ученики овладели методами геометрических доказательств и могли самостоятельно строить доказательства» [1].

У В. М. Брадиса читаем: «Необходимо добиваться не заучивания готовых доказательств, а выработки навыка в самостоятельном проведении доказательств» [2].

В пособии под редакцией С. Е. Ляпина: «Надо достигнуть не только знания ряда теорем и умения воспроизводить их доказательства, но и умения самостоятельно найти доказательство несложной теоремы» [3].

Что можно сказать об этой цели?

Умение доказывать, выработка навыка в самостоятельном проведении доказательств, несомненно, имеет преимущество по сравнению с заучиванием доказательств, с простым их воспроизведением. Но представим себе, что нам предложен вопрос — для чего нужно решать задачи — и мы дали бы на него такой ответ: задачи нужно решать не для того, чтобы их заучить и воспроизводить, а для того, чтобы приобрести навык, умение в решении задач, научиться самостоятельно решать задачи.

Бесспорно, что такая цель имеет право на признание. Но сейчас же возникает новый вопрос: можно ли ограничиться этой целью и не следует ли здесь иметь в виду и иные, более глубокие и более важные цели? Над этим вопросом следует задуматься и в случае, когда идет речь о приобретении навыка в доказывании.

В чем состоит значение данного навыка или умения?

«Это необходимо, — говорит Н. М. Бескин, — потому, что в курсе геометрии невозможно предусмотреть всех мелких геометрических положений, с которыми ученику придется столкнуться при решении задач, при изучении смежных предметов или в практической деятельности» [4].

---

[1] Н. М. Бескин, Методика геометрии, 1947, стр. 75.

[2] В. М. Брадис, Методика преподавания математики, 1954, стр. 360.

[3] «Методика преподавания математики» под ред. С. Е. Ляпина, 1955, стр. 366.

[4] Н. М Бескин, Методика геометрии, 1947, стр 75.

Как видим, умение «самостоятельно строить доказательство» необходимо для разрешения «мелких геометрических положений», не предусмотренных в курсе геометрии. Это, конечно, правильно и не вызывает каких-либо возражений. Нас интересует другое: чем можно объяснить, что ни здесь, ни в дальнейшем автор не называет никакой иной области знания или практики, где это умение было бы необходимым и полезным?

Очевидно только тем, что такое умение (навык) находит применение т о л ь к о в сфере указанных «геометрических положений» и вне этой сферы оно не может быть использовано. В самом деле, в методической литературе не приводится более широкого обоснования необходимости приобретения этого умения по сравнению с тем ее обоснованием, которое дается Н. М. Бескиным. Если этот навык (умение) ставится многими авторами в связь с решением задач на доказательство, то и в этом случае область применения навыка не выходит из рамок внутренних нужд самой геометрии.

Признание особой ценности данного умения (с чем мы вполне согласны) оставляет часто в тени другую его сторону — определенную ограниченность области его применения и использования. Нас не может поэтому удовлетворить достижение такого результата, как приобретение учащимися навыка в доказывании. Труд и время, затрачиваемые на изучение доказательств, могут быть оправданы только существованием более важных и более глубоких целей.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ЦЕЛИ.

Главными, основными целями изучения геометрических доказательств в средней школе нужно считать:

1. Познание пространственных форм материального мира и отношений между ними при помощи дедукции.
2. Развитие логического мышления и речи учащихся.

В подчиненном отношении к этим основным целям находятся:

1. Задача убеждения.
2. Задача обоснования.
3. Приобретение навыка в самостоятельном построении доказательств.

Взаимная связь и обусловленность основных целей состоит в том, что познание при помощи дедукции воспитывает и развивает логическое мышление; заботясь же о развитии логического мышления, мы создаем и расширяем возможности использования дедукции как метода познания действительности.

Содержание и ценность первой из основных целей были раскрыты в предыдущих главах.

Остановимся подробнее на второй.

Поставим вопрос: имеем ли мы основания выдвигать задачу воспитания мышления и речи учащихся как одну из главных целей изучения доказательств и есть ли необходимость в этом?

О воспитывающем значении изучения математики очень хорошо сказал М. И. Калинин в речи, обращенной к учащимся средней школы:

«Во-первых, математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. Недаром говорят, что математика — это гимнастика ума. Я не сомневаюсь, что голова у вас ломится от мыслей. Но эти мысли надо упорядочить, дисциплинировать, направить, если так можно выразиться, в русло полезной работы. Вот математика и поможет вам справиться с этой задачей» [1].

Мы не ошибемся, если отнесем это высказывание М. И. Калинина в первую очередь к доказательствам и потому именно, что при их изучении возникает возможность в наибольшей мере, по сравнению с другими разделами школьной математики, способствовать развитию логического мышления учащихся, оказать благотворное влияние на упорядочение их мыслей, помочь им в дисциплинировании ума.

Приведем высказывание В. М. Брадиса: «Изучение геометрии преследует и воспитательную цель, развивая логические навыки учащихся... Правильно рассуждать они учатся на занятиях любым предметом учебного плана, но ни в одной другой дисциплине рассуждения не занимают столь большого и видного места как в геометрии» [2].

Нисколько не погрешив против истины, позволим себе продолжить мысль В. М. Брадиса следующим образом: правильные рассуждения в курсе самой геометрии занимают наиболее видное место в процессе доказательства.

Мы считаем возможным и допустимым такое истолкова

---

[1] М. И. Калинин, О коммунистическом воспитании, 1946, стр. 93.

[2] В. М. Брадис, Методика преподавания математики, 1954, стр. 328.

ние высказываний М. И. Калинина, В. М. Брадиса и многих аналогичных высказываний других авторов потому, что, рассматривая доказательство как цепь, как систему умозаключений, его можно считать и логическим упражнением; именно в доказательстве осуществляется наиболее непосредственное, наиболее полное и последовательное применение и использование законов и форм логического мышления. Нигде (за исключением самой логики) так ярко, отчетливо и последовательно не применяется и не осуществляется требование обоснованности мышления, как в доказательстве; само содержание доказательств ставит нас в наиболее близкое, прямое и непосредственное соприкосновение с законами и формами логического мышления.

Эта характерная, специфическая особенность доказательств, определяющаяся их содержанием, служит достаточным основанием, чтобы выдвинуть и подчеркнуть задачу воспитания *логического мышления и развития речи* как особую, как специальную цель изучения доказательств в школе.

Главное же, конечно, не в том, что можно поставить такую цель, а в том, что ее д о л ж н о ставить и не только как главную, но и как ближайшую и непременную цель каждого, буквально каждого доказательства.

Трудно представить себе преподавателя математики, который не знал бы, что изучение доказательств должно способствовать развитию и укреплению навыков и приемов логического мышления; но такое знание оказывается чисто формальным и совершенно бесполезным для дела знанием, если учитель на каждом шагу и во всех случаях (объяснение, закрепление, опрос) не учит учащихся правильно рассуждать, не прививает им навыки логического мышления, не следит за речью учащихся, не вырабатывает у них умения точно и правильно выражать свои мысли.

Именно эту сторону дела мы имеем в виду, когда говорим о задаче воспитания мышления и речи как ближайшей и непременной цели каждого доказательства, и теперь добавим, что возможность сознательного усвоения и понимания доказательств зависит от того, насколько учитель осознает необходимость постановки такой цели и насколько последовательно, планомерно и настойчиво он стремится к ее осуществлению.

ГЛАВА IV

ПРОЦЕСС ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

В практике некоторых учителей все объяснение доказательства исчерпывается дословным и точным воспроизведением текста учебника, чертежа учебника и даже буквенных обозначений. При таком методе преподавания остается неясным и непонятным для учащихся самое важное и наиболее для них трудное: строение и правильность отдельных умозаключений, их связь и последовательность, возможность варьирования чертежа, основная идея доказательства, главное и второстепенное, существенное и несущественное. Когда все эти вопросы оказываются вне поля зрения учителя, когда они выпадают из его объяснения, то возможность понимания доказательства для большинства учащихся исключается, им остается только механически запоминать и заучивать рассказ учителя и текст учебника.

Тогда и приобретает особое, почти магическое значение фраза: «что и требовалось доказать»; она якобы все покрывает и оправдывает: и нежелание учителя утруждать себя объяснением, и непонимание доказательства учащимися.

Что ожидает учителя, который видит свою главную цель в «ч. т. д.» и не придает должного значения способу ее достижения, законности и оправданию «ч. т. д.» перед учащимися?

Ему предстоит убедиться в плохих результатах работы и поставить перед своей совестью вопрос: чем это вызвано? Чтобы заглушить голос совести больше всего пригодятся ссылки на возрастные особенности учащихся, но если учитель займется не подысканием оправдания, а критической оценкой своего метода преподавания, то в числе действительно объективных причин он найдет и такую, как недооценка им значения самого процесса доказательства.

Нам всем известно, что в обучении важен не только результат, но и путь, приведший к результату. По отношению к доказательствам это общее положение следовало бы усилить: в школьном доказательстве важен не столько результат («ч. т. д.») сколько тот процесс, который привел к результату. Это и дало бы надлежащее представление о значении процесса доказательства. Как правило, в процессе школьного доказательства следует различать два момента: 1) отыскание доказательства, 2) изложение доказательства.

Поскольку же нельзя что-либо доказывать без ясного понимания доказываемого тезиса, то необходимо начинать сообщения формулировки теоремы.

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ.

В нашей школьной практике еще не изжит формальный подход учителя к теоремам: «очередная» теорема сообщается учащимся догматически и ее смысл не раскрывается. В таких случаях учащиеся заучивают формулировку теоремы, не имея ясного представления об ее содержании, а это и ведет к самым печальным последствиям: ученик бойко формулирует теорему, но становится затем втупик, когда приходится отделить ее условие от заключения, воспользоваться данными теоремы в процессе доказательства или применить ее в решении задачи. Здесь и выявляется формальный, чисто словесный характер приобретенного знания и полная его бесполезность.

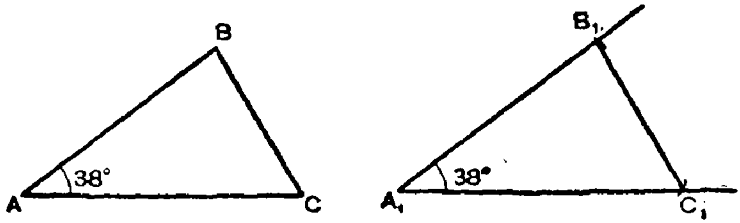
Прием догматического доказательства теоремы привлекает многих учителей своими удобными свойствами: доступностью, простотой и безотказностью в действии. Этим учителям следовало бы подумать и об учащихся, о качестве их знаний. Тогда бы они поняли, что от принципа такого доказательства теоремы нужно решительно и бесповоротно отказаться.

Общий подход к формулировке теоремы состоит в постановке конкретной и понятной для учащихся проблемы, для решения которой требуется новая теорема. В младших классах (VI и VII) желательно, чтобы учащиеся сами открыли эту теорему. В большинстве случаев открытию помогает чертеж, выполненный при помощи инструментов и в точном соответствии с условием теоремы.

Приведем пример.

Пусть это будет тема: «Признаки равенства треугольников».

Постановка проблемы. В равенстве треугольников можно убедиться путем наложения. Но этот способ не всегда возможен и удобен. Нельзя, например, один треугольный участок земли наложить на другой. В таком случае в равенстве треугольников можно было бы убедиться путем непосредственного измерения и сравнения всех их элементов (т. е. всех сторон и всех углов). Для этого нам пришлось бы произвести, в общей сложности, 12 измерений и установить наличие шести равенств. Возникает вопрос: действительно ли является необходимым сравнение всех элементов; нельзя ли, установив равенство только некоторых (не всех) элементов, быть уверенными и в равенстве остальных элементов, а отсюда и в равенстве треугольников?



Черт. 14.

Такое решение вопроса оказалось возможным. Оно дается в теоремах, называемых признаками равенства треугольников. Их изучением мы и займемся.

Открытие теоремы. Учитель на доске, а учащиеся в тетрадях строят произвольный треугольник ABC. Затем учитель предлагает измерить транспортиром угол A и построить (рядом с треугольником ABC) $\angle A_1 = \angle A$ (т. е. содержащий столько же градусов). То же самое учитель делает на доске (черт. 14). Затем ученикам предлагается (при помощи циркуля) отложить на сторонах угла A_1 (от его вершины) отрезки $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = AC$ и соединить потом точки B_1 и C_1. Получается треугольник $A_1B_1C_1$. (Все это делает и учитель на доске.)

Учитель: Как построен первый треугольник?

Ученик: Как угодно, т. е. произвольно.

Учитель: Построен ли и второй треугольник произвольно?

Ученик: Нет, он построен так, что:

$$\angle A_1 = \angle A;\ A_1B_1 = AB \text{ и } A_1C_1 = AC.$$

Учитель: Итак, выполняя построение, мы обеспечили равенство трех элементов одного треугольника трем элементам другого, а именно: построенные нами треугольники имеют по равному углу, заключенному между равными сторонами; заметим, что о равенстве остальных элементов мы совершенно не заботились. Сравните теперь угол B_1 с углом B, угол C_1 с углом C и сторону B_1C_1 со стороной BC.

Измерения и сравнения, производимые всеми учениками (при помощи транспортира и циркуля), показывают, что эти элементы оказались равными.

Учитель: Что в таком случае можно сказать о $\triangle A_1B_1C_1$?

Ученик: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Учитель: Рассмотрим еще раз построение треугольника $A_1B_1C_1$. Точка A_1 может быть взята произвольно. Луч A_1C_1—тоже произвольно (т. е. вправо или влево от точки A_1). Прямая A_1C_1 (если ее мысленно продолжить в обе стороны) делит плоскость на две части: верхнюю и нижнюю. Если мы условимся расположить $\triangle A_1B_1C_1$ в верхней полуплоскости, то все остальные построения можно выполнить только единственным образом: направление A_1B_1 определится условием равенства углов A_1 и A, и оно будет единственным, точка B_1 — единственная точка, определяемая условием $A_1B_1 = AB$, точка C_1 — единственная точка, определяемая условием $A_1C_1 = AC$.

Все эти построения зависят от заранее выбранных нами условий ($\angle A_1 = \angle A$; $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = AC$). Они выполнены в соответствии с поставленными условиями и удовлетворяют этим условиям. Никаких иных условий больше не ставилось, — мы только соединили уже построенные точки B_1 и C_1 и получили $\triangle A_1B_1C_1$. Другого треугольника мы не смогли бы построить. Это единственный треугольник, удовлетворяющий поставленным условиям, так как через точки B_1 и C_1 можно провести единственную прямую.

Этот единственный треугольник и оказался равным треугольнику ABC.

На каком основании мы сделали заключение о равенстве треугольников? Что подсказало нам такой вывод?

Ученик: Мы измерили и сравнили остальные элементы обоих треугольников и увидели, что эти элементы соответственно равны.

Учитель: Как вы уже знаете, нельзя выполнить ни абсолютно точных построений, ни произвести абсолютно точного измерения. Поэтому правильнее было бы сказать: построенные нами треугольники приблизительно равны. Но и такое утверждение относится только к построенным нами треугольникам. Мы ничего не можем сказать о треугольниках, могущих быть построенными этим способом, так как их элементы мы не измеряли и не сравнивали.

Чтобы убедиться в точном равенстве и притом любых треугольников, удовлетворяющих названным условиям, нам нужно еще провести соответствующие рассуждения, т. е. доказать справедливость утверждения, подсказанного нам опытом и рассмотрением частных случаев.

Доказательство необходимо и для того, чтобы понять, почему такие треугольники оказываются равными.

Прежде чем приступить к доказательству, нужно отчетливо знать, что именно мы будем доказывать. Попробуйте сформулировать то положение (теорему), которое нужно доказать.

Учащиеся дают примерно следующую формулировку: «Если мы построим один треугольник произвольно, а другой так, чтобы ... и т. д.».

Учитель: Существует более краткая формулировка: два треугольника равны, если...

Кто ее повторит? Запишем, что дано в теореме и что требуется доказать. Вспомните, как было выполнено построение. Требования, которые были нами учтены при построении, — это те требования, которые налагаются условием теоремы, это и есть условие теоремы, ее данные.

Что же дано в теореме? (Ответ очевиден.)

То, что затем обнаружено нами после измерений и сравнений, это и есть заключение теоремы, то, что нужно доказать.

Что же требуется доказать? (Ответ очевиден.)

После того как теорема доказана (или на следующем уроке во время опроса), нужно еще раз возвратиться к чертежу и показать (при помощи пунктирных линий), что треугольник не определяется двумя элементами и, следовательно, равенства двух элементов еще недостаточно для равенства треугольников. Четвертый же элемент для построения треугольника оказывается лишним.

На дом полезно дать задание — выполнить такое же построение и, вырезав полученные треугольники, попытаться совместить их путем наложения (если это не было сделано в классе).

Аналогично даются формулировки и остальных признаков равенства треугольников.

В заключительном обзоре по всей теме нужно подчеркнуть, что общим для всех признаков является требование равенства трех элементов. В то же время эти элементы не могут быть любыми; равенство, например, трех углов одного треугольника углам другого не обеспечивает равенства треугольников, следовательно, признаки различаются выбором, отбором этих равных элементов.

По поводу же самого доказательства методом наложения нужно отметить, что в процессе рассуждений мы осуществляли наложение мысленно,— это и дает нам право распространить теорему на треугольники, где фактическое наложение осуществить невозможно.

В приведенном примере затронуты и другие вопросы, связанные с выяснением содержания теоремы: постановка проблемы, отделение условия от заключения, необходимость доказательства и т. д.

Остановимся сейчас на самом приеме выполнения чертежа всеми учащимися. Его ценность в следующем:

1) Все учащиеся включаются в активную работу.

2) Открытие теоремы доступно каждому ученику. Он не только следит за тем, что делает учитель, но и имеет возможность повторить тот же опыт (измерение, сравнение) самостоятельно.

3) Достигается четкое разграничение между условием теоремы и ее заключением (как строили и что обнаружили?). Условие и заключение приобретают в сознании учащихся реальный, осязаемый характер, поэтому они легко отделяются и прочно запоминаются.

4) Конкретизация содержания теоремы позволяет учащимся провести собственные наблюдения, прийти к определенным выводам; она стимулирует активную работу мышления, и тогда возникает необходимость в оформлении и закреплении результатов работы мышления в точной и правильной речи. Тогда учитель и предлагает учащимся попытаться самостоятельно сформулировать теорему. Ценность таких попыток для развития речи и мышления и для усвоения смысла самой теоремы неоспорима.

6 Заказ 462

5) При решении задач ученику очень часто приходится сталкиваться с доказательствами мелких геометрических положений, не предусмотренных учебником, но прежде чем доказывать, их нужно сформулировать, а поэтому умение видеть чертеж, умение схватить закономерность имеют очень большое значение для успешного решения задач и эти умения нужно воспитывать и вырабатывать.

Иногда думают, что открытие теоремы опытным путем может повредить доказательству, так как, убедившись на опыте в справедливости теоремы, учащиеся не будут ощущать необходимости в логическом доказательстве. Подобное опасение может возникнуть только при неправильном понимании целей доказательства. Если же учитель будет систематически разъяснять, что опыт, которым мы пользуемся для открытия теоремы, не может служить достаточным оправданием ее истинности, то никаких осложнений с оправданием доказательства не произойдет. Более того, имея повод говорить о недостатках опыта, мы поможем учащимся глубже осознать необходимость доказательства.

Прием использования чертежа вызывает еще одно возражение. Утверждают, что для такой работы не хватает времени.

Ответим коротко: не хватает потому, что она плохо организована.

Что значит хорошо организовать работу?

Это значит:

1) Каждый ученик должен иметь все необходимые чертежные инструменты и содержать их в надлежащем порядке.

2) Учитель должен продумать все детали в организации предстоящей работы. Она должна проводиться быстро, четко и всеми учащимися одновременно.

3) Не следует тревожить, развлекать и отвлекать учащихся пустячными, ненужными вопросами. Вопросы предлагаемые учащимся, должны быть сокращены до минимума. Нужно ставить только необходимые и полезные вопросы, такие, как:

1) Какой можно сделать вывод?

2) Как сформулируем теорему?

3) Как строили и что дано?

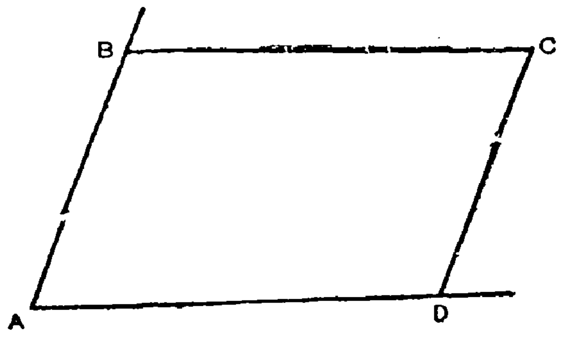
4) Что обнаружили и что нужно доказать?

В приведенном ранее примере (признак равенства треугольников) мы имели также в виду дать и организационные формы такой работы.

Приведем еще один пример.

Теорема. *Плоский четырехугольник, у которого противоположные стороны равны, — параллелограмм.*

Постановка проблемы. Для построения параллелограмма мы пользовались до сих пор его определением, т. е. проводили параллельные прямые и пересекали их другой парой параллельных прямых. Если пришлось бы проверять, является ли параллелограммом данный, уже построенный четырехугольник, то мы опять могли бы вос-



Черт. 15.

пользоваться определением: проверили бы, например, при помощи угольника и линейки параллельность его противоположных сторон. Но если бы нам предложили либо отмежевать на местности земельный участок, придав ему форму параллелограмма, либо проверить, является ли данный участок параллелограммом, то мы встретились бы с известными трудностями как при проведении в натуре (т. е. на поверхности земли) параллельных линий, так и при проверке параллельности уже проведенных линий.

Нельзя ли решить эти вопросы иным способом, т. е. способом, отличным от того, который дается определением?

Отысканием этого способа мы и займемся.

Открытие теоремы. Ученики и учитель строят произвольный угол A и откладывают на его сторонах произвольные, но неравные между собой отрезки AB и AD. Из точек B и D проводятся дуги (из точки B — раствором циркуля, равным AD, из точки D — равным AB), пересекающиеся в точке C (существование такой точки обеспечивается надлежащим выбором длин AB и AD). Соединив C с точками B и D, получим четырехугольник $ABCD$ (черт. 15).

Учитель: Каким свойством обладают стороны этого четырехугольника по построению?

Ученик: $BC = AD$ и $DC = AB$.

Учитель: Мы видим, что построенный таким образом четырехугольник $ABCD$ очень похож на параллелограмм, хотя об этом мы и не заботились. Проверьте, действительно ли его противоположные стороны параллельны.

Учащиеся проверяют (при помощи угольника и линейки) и убеждаются, что построенные ими четырехугольники оказываются параллелограммами.

Учитель: Найденный нами способ построения параллелограмма можно использовать и для решения вопроса, является ли данный четырехугольник параллелограммом. Как можно было бы сформулировать соответствующую теорему?

Ответы учащихся позволяют выяснить, насколько они понимают содержание теоремы, и, внося соответствующие коррективы, учитель (или учащиеся) дает окончательную формулировку.

Выделим условие и заключение.

1) Как был построен четырехугольник $ABCD$?

2) Что входит в условие теоремы?

3) Что мы обнаружили при рассмотрении чертежа?

4) В чем состоит заключение теоремы?

Как в этом, так и в предыдущем примерах мы начинаем с постановки проблемы, для решения которой необходима новая теорема. Такой подход не случаен; мы еще раз подчеркиваем, что он должен осуществляться систематически и постоянно, так как, ставя перед учащимися определенную задачу (проблему), мы придаем последующей работе по отысканию теоремы целеустремленный характер, пробуждаем заинтересованность учащихся в отыскании способа решения вопроса, создаем благоприятные условия для выяснения конкретного смысла теоремы.

Постановка проблемы для теорем с непосредственно политехническим содержанием, как, например, теорем об измерении длин, площадей, объемов, — не вызывает затруднений.

Значительно труднее поставить проблему для теорем, решающих вопросы позиционного, конструктивного характера. Многие из таких теорем можно связать с задачей построения. Например, мы дали определение параллельных прямых, которым нельзя воспользоваться для построения этих прямых, и мы не можем поэтому ответить на вопросы: существуют ли параллельные прямые и как их построить?

Те же вопросы могут быть поставлены после того как даны определения касательной, подобия треугольников, правильного многоугольника, прямой, параллельной плоскости, перпендикуляра к плоскости и т. д. Во всех таких случаях лучше начинать с ознакомления учащихся со способом построения, а затем переходить к формулировке теоремы.

Если, например, идет речь о построении и существовании параллельных прямых, то после постановки проблемы можно предложить задачу:

Через данную точку вне данной прямой провести прямую, параллельную данной.

1-е решение. Из данной точки опускаем перпендикуляр на данную прямую, а затем проводим прямую, перпендикулярную к нему и проходящую через ту же точку. Последняя прямая «на глаз» параллельна данной. Это нужно будет доказать. Как сформулируем теорему, подлежащую доказательству?

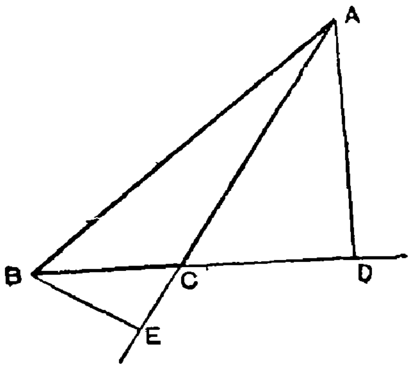
2-е решение. Через данную точку проводим произвольную прямую, пересекающую данную. Проведем через ту же точку новую прямую так, чтобы образовавшиеся при этом соответственные углы были равны (построение угла, равного данному). Тогда... и т. д.

Во всех приведенных ранее примерах мы пользовались чертежом. Это не значит, что другие приемы открытия теоремы должны быть исключены. В некоторых случаях удобнее пользоваться подвижными моделями.

Если, например, мы хотим подвести учащихся к формулировке теоремы: *Против большего угла треугольника лежит большая сторона* — то модель, где длина одной из сторон треугольника может изменяться и отчетливо при этом заметно изменение противолежащего угла, — лучше, ярче, нагляднее и быстрее выясняет эту зависимость, чем выполнение чертежа.

Если показать на подвижной модели, как изменяется хорда по мере удаления ее от центра, то это значительно лучше поможет учащимся уяснить связь между длиной хорды и ее расстоянием от центра, чем чертеж.

В VIII классе, где следует уже приучать учащихся к выполнению чертежа от руки, роль чертежа в открытии теоремы резко уменьшается. Здесь он полезен только в редких случаях, таких, например, как построение треугольников с соответственно равными углами (признак подобия треугольников); теорема о сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми; теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника.



Черт. 16.

Само открытие постепенно заменяется разъяснением терминов, анализом построений (выполненных на доске учителем), приведением примеров с численными данными, показом моделей.

Особое внимание следует обращать на случаи, когда условие или заключение теоремы может быть записано различным образом. Например:

1) В теореме: *Два треугольника подобны, если они имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами*,— условие может быть записано тремя способами (по числу углов треугольника).

В учебнике же приводится только один из них:

$$\angle B_1 = \angle B \text{ и } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

Для лучшего усвоения условия полезно предложить учащимся упражнение:

Запишите пропорцию, входящую в условие, если

$$\angle A_1 = \angle A \text{ или } \quad \angle C_1 = \angle C.$$

2) Формулировка теоремы о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого угла, позволяет записать теорему двумя способами (черт. 16):

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2\,BC \cdot CD;$$
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2\,AC \cdot CE.$$

Первая запись стала стандартной и единственной. Но вторая запись тоже отвечает формулировке и ознакомление с нею помогает усвоить теорему глубже, облегчает ее применение в решении задач.

3) Теорема о площади параллелограмма.

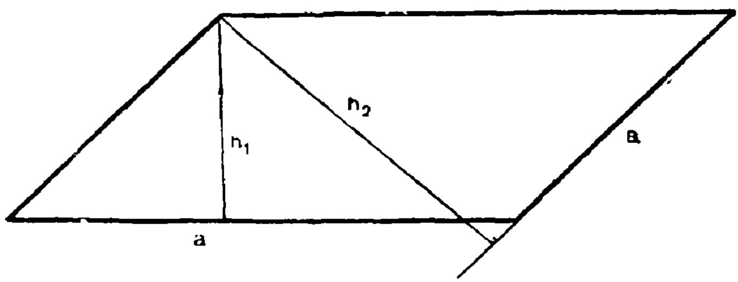
Обычная запись:

$$S = a \cdot h_1.$$

Но возможна и другая запись:

$$S = b \cdot h_2,$$

с которой учащиеся должны так же хорошо освоиться, как и с первой (черт. 17).



Черт. 17.

Мы не будем останавливаться на переходе от формулировки теоремы, данной в категорической форме к условной форме и на формулировке обратной теоремы при помощи прямой, так как эти приемы стали уже общепризнанными.

Этим мы заканчиваем специальное рассмотрение вопроса о формулировке теоремы, имея в виду, что в последующие примеры отыскания и изложения доказательств будет включен и вопрос о формулировке соответствующей теоремы.

§ 2. ОТЫСКАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Мы уже говорили о том, что если объяснение учителя исчерпывается дословным воспроизведением текста учебника, то для многих учащихся доказательство остается непонятным и тогда весь процесс его усвоения сводится к заучиванию без понимания смысла. Общепризнано, что заучивание непонятных доказательств бесполезно как для убеждения ученика в справедливости теоремы, так и для развития и укрепления навыков логического мышления. Следовало бы обращать большее внимание (чем это до сих пор делается) и на прямой вред такого «усвоения», действующего отупляющим образом на умственные способности учащихся и приучающего их к пустым разглагольствованиям, к рассуждениям о вещах, в которых они ничего не понимают. Ясно, что главной проблемой в проведении доказательств должна быть проблема их понимания учащимися.

От чего же зависит возможность понимания доказательства?

Прежде всего должно быть обеспечено ясное и отчетливое понимание доказываемого тезиса (формулировки теоремы) и владение аргументами (т. е. понятиями и предшествующими теоремами). Но этого еще недостаточно. Это только необходимые предпосылки доказательства.

В самом же процессе доказательства возникают еще две проблемы:

а) понимание строения и правильности каждого умозаключения в отдельности;

б) понимание последовательности, связи умозаключений.

Этими проблемами мы и займемся.

Остановимся пока на первой из них — на понимании учащимися отдельных умозаключений.

Приведем характерный пример из статьи Ф. Н. Гоноболина.

Здесь, на странице 183, описан эксперимент по самостоятельному усвоению учащимися доказательства теоремы об углах с параллельными сторонами. Непонятным оказалось следующее место в учебнике: «Мы получили угол 3, равный углу 1 и углу 2 (как соответственные при параллельных прямых); следовательно, $\angle 1 = \angle 2$».

Приводим запись экспериментатора:

Ученица: Я не понимаю, где тут соответственные углы. Разве 1 и 2 углы соответственные?

Достаточно оказалось сказать ученице, что сначала доказываем равенство $\angle 2$ и $\angle 3$, а затем $\angle 3$ и $\angle 1$, чтобы она поняла. Здесь же приводится высказывание ученика вечерней школы, который, после такого разъяснения, заявил:

«Теперь все, а в книжке темно сказано».

Как видим, умозаключение оказалось неясным только потому, что в нем были пропущены отдельные звенья, оно было дано в сокращенной форме (энтимема). Представим его в развернутой форме:

1) Две величины, порознь равные третьей, равны между собой.

2) $\angle 2 = \angle 3$ — как соответственные при параллельных прямых;

$\angle 1 = \angle 3$ — как соответственные при параллельных прямых.

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Восстановление полной формы силлогизма и есть наиболее действенное средство устранения неясностей и трудностей в понимании отдельных умозаключений.

Чтобы уверенно пользоваться этим средством, учитель должен заранее отчетливо представить себе расчленение доказательства на отдельные звенья (умозаключения) и строение каждого звена. Иначе говоря, он должен (хотя бы мысленно) произвести логический анализ доказательства. Примеры такого анализа были приведены в I и II главах.

Логический анализ доказательства *необходим только* при подготовке к уроку; в процессе же объяснения учитель может пользоваться и энтимемами или только энтимемами (смотря по обстоятельствам). Обязательным является только требование, чтобы при появлении у учащихся затруднений в понимании следования того или иного вывода была восстановлена полная форма силлогизма; желательно, чтобы это делалось при активном участии учащихся.

При закреплении и опросе вопрос «почему» должен ставиться относительно выводного суждения каждого силлогизма, и цели опроса и закрепления не могут считаться достигнутыми, если на такой вопрос в каждом случае не будет дано ясного и исчерпывающего ответа, т. е. не будут приведены учеником обе посылки силлогизма. Только при таком условии можно считать умозаключение усвоенным.

Итак, чтобы обеспечить понимание умозаключений (звеньев), необходимо выделять каждое звено и делать его объектом специального рассмотрения. Если данное умозаключение окажется неясным, то нужно обратиться к полной форме силлогизма.

Но понимание каждого отдельного умозаключения не гарантирует понимания доказательства в целом. Логический анализ оставляет невыясненными и нерешенными следующие весьма важные моменты:

1. Необходимость и целесообразность дополнительных построений.

2. Выбор исходного положения.

3. Выбор нужного следствия.

Если, например, исходным положением было установление равенства треугольников, то из него вытекает и равенство площадей, и равенство тех или иных углов или сторон; в доказательстве же используются, обычно, не все эти следствия, а чаще только одно из них.

4. Выбор нужных аргументов (аксиом, теорем, определений) из множества ранее известных положений.

На эти вопросы доказательство не отвечает.

Если ученик понимает каждое умозаключение, то он действительно убеждается, что цель достигнута — доказательство получилось.

Почему же доказательство получилось?

Как додумались образовать нужные силлогизмы и соединить их так, чтобы они составили стройное целое, образовали бы последовательность, приводящую к цели?

Доказательство не обязано отвечать на эти вопросы: доказательство доказывает, но не объясняет. В изложении доказательства нам предлагается проверить ход мыслей и убедиться, что он правилен. Все остальное есть тайна и секрет изобретателя, остается только покорно за ним следовать.

«Дух авторитарности, дух повелевающего самовластья проникает все здание (синтетического доказательства)... но этот дух антипедагогичен и бесчеловечен, он обращает ученика в ломовую лошадь, понимающую лишь связь между данным подергиванием вожжей и данным поворотом, но не осознающей всей необходимой связи всех подергиваний, всех поворотов с конечной целью пути. Это есть путь приведения в покорность ученика, создание специально прирученного субъекта для усвоения курса» [1].

---

[1] Л. И. Креер, О доказательствах, «Известия Горского педагогического института», т. V, Владикавказ, 1929, стр. 106.

Изложение доказательства, проникнутое «духом авторитарности», лишает ученика возможности видеть и осознавать в процессе доказательства необходимую связь «всех поворотов с конечной целью пути». Если ученик только запоминает, только заучивает все эти связи и повороты, не видя их необходимости и целесообразности, то не исключено, что это даст ему возможность безошибочно воспроизвести доказательство, но это вовсе не означает, что ученик уже понимает доказательство.

Мы подошли к главному вопросу: что означает и чем определяется понимание доказательства?

Термин «понимание» разъясняется И. П. Павловым следующим образом:

«Когда образуется связь, т. е. то, что называют «ассоциацией», это и есть, несомненно, знание дела, знание определенных отношений внешнего мира, а когда вы в следующий раз пользуетесь ими, то это называется «пониманием», т. е. пользование знаниями, приобретенными, связями — есть «понимание»[1].

В свете павловского учения понимание есть «пользование знаниями, приобретенными связями». Но разве может ученик, только запомнивший связь и последовательность силлогизмов в данном доказательстве, воспользоваться приобретенным знанием в подходящих случаях или для повторения того же самого доказательства в измененной ситуации (изменение обозначений, другой вариант чертежа)?

Ясно, что в этом случае такая возможность исключается: приобретенное знание пригодно только для воспроизведения данного доказательства, в данных, определенных условиях (чертеж, обозначения). На этой ступени знания ученик находится в полной зависимости от текста учебника. Ученик лишен возможности отличить главное от второстепенного, существенное от несущественного. Решительно все представляется ему важным, существенным и подлежащим поэтому обязательному запоминанию; и когда ученик все это запомнит, то и создается впечатление, что он знает. Но такое знание пригодно лишь для того, чтобы ответить данное доказательство на следующем уроке или на экзамене. В остальном же — это бесполезный и мертвый груз па-

[1] «Павловские среды», т. 2, 1949, стр. 579—580.

мяти. Приобретенные связи, оставшиеся неосмысленными и необобщенными, находящиеся в неразрывной связи с несущественными и второстепенными деталями данного доказательства, не могут быть использованы в иной обстановке, — такое знание еще нельзя считать пониманием.

Заметим, кстати, что чем больше усилий приложит ученик для запоминания всех второстепенных деталей доказательства, тем дальше отодвигается от него возможность подлинного понимания. Запоминание ненужного — не только мертвый, но и вредный груз памяти, затрудняющий возможность понимания.

Чтобы изучение данного доказательства действительно пригодилось в дальнейшем (в смысле использования самого метода, самого приема рассуждений), недостаточно только понимания отдельных умозаключений и убеждения в их правильности, необходимо еще, чтобы ученик осознал целесообразность построения всей системы силлогизмов, видел их необходимую связь. А для этого нужно, чтобы ученик ясно представлял себе основную идею доказательства, его строение в целом, его логическую структуру.

Обладая таким знанием, ученик становится в более свободное отношение к тексту учебника. Теперь ученик будет различать главное и второстепенное и не станет тратить усилия на буквальное запоминание всего текста, он может позволить себе некоторые вариации, некоторые отступления от текста: изменение обозначений, чертежа, а иногда и порядка следования силлогизмов. О таком ученике мы скажем, что он не только знает доказательство, но и владеет им. Овладение данным доказательством предполагает знание его основной идеи, метода, логической структуры — всего того, что составляет сущность данного доказательства.

Но такое знание уже не будет непременно и необходимо связано с данным доказательством; это знание имеет и самодовлеющую ценность: оно может быть использовано в иной ситуации и в других доказательствах. Такое знание доказательства и есть понимание. «Пользование знаниями, приобретенными связями, — есть понимание».

Итак, для понимания доказательства необходимо:

1) Знание каждого силлогизма и понимание его правильности.

2) Знание основной идеи, метода, логической структуры доказательства. Это знание позволяет выяснить закономерность и целесообразность построения системы силлогизмов, порядка их следования. Оно и дает ответ на вопрос, почему так, а не иначе строится доказательство.

Об обеспечении первого условия мы уже говорили. Займемся теперь вторым.

Когда учащимся предлагается готовое доказательство, то осознание его строения может наступить только после того, как изложение закончено. Теперь, когда все этапы доказательства стали уже известными, возникает возможность проследить и уяснить их закономерность — понять строение доказательства. Не исключено, что часть учащихся справится с этой задачей самостоятельно; для подавляющего же большинства учащихся младших классов она непосильна—строение доказательства останется для них непонятным, если учитель и теперь (после изложения) не позаботится об его разъяснении. Предположим, что учитель, проявит такую заботу и строение доказательства станет наконец, для ученика ясным.

Понимание строения доказательства, наступившее после ознакомления с его содержанием, есть единственно возможный путь сознательного усвоения при самостоятельном изучении доказательства по учебнику. Но в обучении возможен и иной путь — предварительное разъяснение строения доказательства. Он несколько длиннее первого, зато имеет то несравненное преимущество, что здесь возникает возможность привлечь учащихся к активному участию в учебном процессе; в первом же подходе такая возможность исключается.

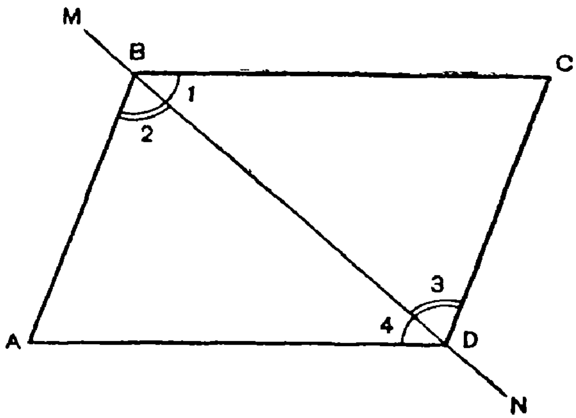
Как видим, в выборе приемов разъяснения строения доказательства не может быть никаких колебаний: предварительное разъяснение должно быть решительно предпочтено последующему. Отсюда и вытекает, что первоначальное ознакомление учащихся с содержанием доказательства должно начинаться не с усвоения (вернее, запоминания) той законченной формы доказательства, которая придана ему в изложении, а с попыток уяснить себе, как было (или могло быть) найдено доказательство с отыскания доказательства. Здесь, в процессе отыскания доказательства, и выясняется его строение, дается ответ на вопрос: почему оно так построено?

Упражнения в открытии доказательств необходимы и для того, чтобы учащиеся могли приобрести и усвоить те навыки и приемы, которые пригодились бы им при самостоятельном отыскании других доказательств. В процессе таких упражнений учитель ознакомит учащихся с общими методами и приемами отыскания доказательства, разъяснит на конкретных примерах те советы и указания, которыми следует руководствоваться, чтобы научиться доказывать, покажет, как нужно рассуждать, чтобы иметь надежду на успех.

Если мы зададимся вопросом, почему многие учащиеся затрудняются в решении даже самых простых задач на доказательство, то единственно правильным ответом будет такой: потому, что они к этому не подготовлены. Не может быть никаких сомнений и в том, что лучшей формой подготовки здесь были бы упражнения в открытии доказательств обязательных теорем (т. е. теорем, предусмотренных в программе).

Рассмотрим теперь прием отыскания доказательства по существу.

Начнем с примера. Пусть это будет уже знакомая нам теорема о плоском четырехугольнике с равными противолежащими сторонами.



Черт. 18.

Отыскание доказательства.

Дано: $AD = BC$; $AB = DC$.

Требуется доказать: $ABCD$ — параллелограмм (черт. 18).

Учитель: Нам нужно доказать, что $ABCD$ — параллелограмм. Что для этого достаточно и почему? (Ответ очевиден.) Итак, достаточно доказать:

1) $AD \parallel BC$ — ? и 2) $AB \parallel DC$ — ?

Для доказательства параллельности прямых мы пользуемся обычно признаками параллельности. Вспомните эти признаки.

Ученик: Если при пересечении двух прямых третьей... и т. д.

Учитель: Придется, следовательно, пересечь каждую пару прямых третьей прямой и рассмотреть получившиеся углы.

Ученик: Проведем секущую через точки B и D или через A и C.

Учитель: Любая из двух таких секущих, проходящих через противоположные вершины, пересекает обе пары сторон. Мы проведем одну из них, например MN, через вершины B и D. Желательно провести именно MN, а не BD (секущая не отрезок).

Контрольный вопрос: Для чего провели MN?

Ученик: Чтобы воспользоваться признаками параллельности.

Учитель: Удобнее рассматривать углы внутри контура. Отметим их цифрами 1, 2, 3, 4, В каком случае мы могли бы утверждать, что $AD \parallel BC$ и что $AB \parallel CD$? (Ответы очевидны.)

Запишем это:

$AD \parallel BC$ — ?	$AB \parallel CD$ — ?
$\angle 1 = \angle 4$ — ?	$\angle 2 = \angle 3$ — ?

Итак, остается доказать равенство углов. Подумайте, как это сделать? Углами каких фигур они являются?

Ученик: Это углы треугольников ABD и BDC.

Учитель: Чтобы доказать равенство углов, нам и придется доказать равенство треугольников ABD и BCD. Кто докажет? (Ответ очевиден.) Но будут ли в равных треугольниках равны любые углы?

Ученик: Нет. Равны только те, которые лежат против равных сторон. Но углы 1 и 4, а также углы 2 и 3 лежат против равных сторон ($AD = BC$ и $AB = CD$), значит,

$$\angle 1 = \angle 4 \quad \text{и} \quad \angle 2 = \angle 3.$$

Доказательство найдено.

В процессе отыскания доказательства не следует задавать учащимся много вопросов, тем более по пройденному материалу. Это отвлекает учащихся и мешает им сосредоточиться на главном. В предложенном варианте отыскания учитель ставит 8 вопросов. Здесь имелись в виду наиболее неблагоприятные условия: 1) слабо подготовленный класс и 2) процесс отыскания проводится впервые.

Если класс достаточно подготовлен и отыскание доказательства уже вошло в систему, то число вопросов, задаваемых классу, может быть уменьшено, — нужно оставить только те вопросы, которые непосредственно связаны с открытием нового; такие, где учащимся нужно подумать, сообразить, а не просто вспомнить.

Контрольный вопрос опускать не следует: учитель должен быть уверен в том, что учащиеся внимательно следят за ходом мыслей в процессе исканий и понимают, о чем идет речь. Контрольные вопросы необходимы и для того, чтобы проверить достаточность выявленных условий, приобрести уверенность в правильности предшествующих рассуждений, сосредоточить все внимание на отыскании доказательства очередного положения. В сложных и трудных случаях могут быть предложены 2—3 контрольных вопроса.

Отыскание доказательств ценно еще и потому, что теперь возникает возможность привлечь учащихся к активному участию в изложении найденного доказательства. Чтобы потом не возвращаться к нашему примеру, посмотрим, как это могло бы протекать в данном случае.

Изложение доказательства.

Учитель: Теперь нужно изложить найденное доказательство так, чтобы оно опиралось только на то, что дано или ранее известно, чтобы оно было кратким, но в то же время и ясным, т. е. отдельные звенья должны быть расположены в определенном порядке и ни одно из них не может быть пропущено.

Начнем с построения. Углы вне контура четырехугольника нам не понадобились. Следовательно, можно ограничиться проведением диагонали BD (стирает на чертеже лишнее).

Достаньте тетради, сделайте чертеж и запишите, что дано и что требуется доказать. (Если формулировка теоремы открывалась самими учащимися, то остается только провести BD и отметить углы.)

Изложим и запишем само доказательство. Излагая доказательство, нужно исходить только из того, что мы уже знаем раньше и из того, что дано нам в условии. С чего, в таком случае, мы должны начать?

Ученик: Начнем с доказательства равенства треугольников. Запишем это.

Далее следуют следующие вопросы учителя:

1) Какие следствия выводим из равенства треугольников?

2) Что вытекает из равенства углов 1 и 4, 2 и 3?

3) Что следует из параллельности противоположных сторон?

Ответы на них сразу же записываются. В результате на доске и в тетрадях учащихся записано:

Доказательство.

1) $\triangle ABD = \triangle BDC$ (по трем сторонам), следовательно,

2) $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 3 = \angle 2$, значит,

3) $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$, а поэтому,

4) четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Какие-либо дополнительные разъяснения излишни. Ценность такой записи — в ее краткости, в удобной обозримости. Здесь выделяется схема, скелет доказательства, расчленение доказательства на отдельные звенья — все это и облегчает чтение и понимание текста учебника.

Можно предложить и еще более краткую запись

1) $\triangle ABD = \triangle BDC$,

2) $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$,

3) $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$,

4) $ABCD$ — параллелограмм.

Возвратимся к вопросу об отыскании доказательства.

Путь мышления в поисках доказательства, как мышления, направленного на познание истины, неизбежно аналитико-синтетический. Начиная, как правило, с заключения теоремы, редко выдерживают до конца форму регрессивных (аналитических) рассуждений, но и здесь постоянно приходится помнить об условии, о данных теоремы, сравнивая с ними (хотя бы мысленно) достигнутое анализом. В большинстве же случаев мы оказываемся вынужденными остановиться на каком-то этапе наших регрессивных рассуждений и начать движение с другого конца, т. е. от данных, от условия теоремы.

При отыскании доказательства из «известного положения, представляющегося нам подходящим, мы выводим следствия, обещающие привести нас к цели, неизвестное или недоказанное приводим к другим, тоже недоказанным и так продолжаем, пока оба наших движения не столкнутся на одном общем положении и не обратятся в непрерывное течение»[1].

В этом аналитико-синтетическом процессе мышления, направленном на отыскание доказательства, основной ведущей формой мышления является анализ. При этом мы имеем в виду не строго аналитическое доказательство, а анализ в его общелогическом смысле — как расчленение и разложение, как путь мышления от искомого к данным; т. е. в данном случае (в процессе отыскания) в понятие «анализ» входят: анализ условия и заключения теоремы, анализ терминов и умозаключений, путь мышления от заключения теоремы к ее условию. При отыскании доказательства нам преимущественно приходится пользоваться именно этими формами мышления, а поэтому можно сказать, в этом смысле, что отыскание доказательства есть анализ, или, точнее, преимущественно анализ.

Итак, основная логическая форма мышления в процессе поисков есть анализ. Это уже дает известное направление для работы мышления, но требуются, конечно, дополнительные и более конкретные указания, связанные с самим содержанием доказательства.

Ж. Адамар дает следующие советы:

1. Необходимо, прежде всего, точно знать, в чем состоит условие и в чем — заключение теоремы.

2. В рассуждениях необходимо использовать условие теоремы . . . полностью.

3. Необходимо использовать определение каждого из тех понятий, которые нам встречаются.

(Правило Паскаля: необходимо заменять определяемые понятия их определениями.)

Если же определение какого-нибудь термина может иметь различные формы, то следует выбрать ту из них, которая наиболее подходит к имеющейся в виду цели.

---

[1] Д. Мордухай-Болтовской, Психология математического мышления, журн. «Вопросы философии и психологии», 1908, кн IV, стр. 500.

4. Преобразование условия.

5. Преобразование заключения[1].

О значении первого совета мы уже говорили. Приведем краткие пояснения к остальным советам.

1. Чтобы доказать, что данный четырехугольник есть параллелограмм, можно воспользоваться определением; значит, термин «параллелограмм» нужно заменить его определением. В другом случае может оказаться, что воспользоваться определением неудобно, тогда нужно подумать, не существует ли предложения, равносильного определению? Если же нам дано, что четырехугольник — параллелограмм, то в процессе доказательства мы опять должны иметь в виду использование его определения или свойств.

2. Отправляясь в рассуждениях от заключения, нужно постоянно помнить об условии: может оказаться, что для доказательства предложения, на котором мы остановились, могут быть использованы некоторые из данных и благодаря им это предложение можно упростить.

3. Если дальнейшее преобразование заключения становится затруднительным или перед нами открывается много возможностей и мы не знаем, на какой из них следует остановиться, то нужно обратиться к условию и попробовать выводить из него следствия. Это очень часто помогает нащупать верный путь.

4. Во всех подходящих случаях учитель задает вопрос: все ли данные уже использованы, не пригодятся ли нам неиспользованные еще данные?

Ценные советы Ж. Адамара вовсе не подлежат очередному заучиванию; их усвоение учащимися должно опираться на постоянные напоминания учителя и на упражнения в самостоятельном применении. Тем более, что в такой же мере эти советы относятся и к решению задач.

Реализация рекомендаций Ж. Адамара значительно упрощается, когда заранее известна основная идея доказательства. Это соображение и должно учитываться в нашем случае, когда открытием доказательства руководит учитель. Здесь имеется возможность заранее ознакомить учащихся с основной идеей («ключом») доказательства.

Например, приступая к отысканию доказательства признаков подобия двух треугольников, учитель скажет,

---

[1] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, стр. 233—239

что здесь достаточно построить третий вспомогательный треугольник, такой, чтобы он оказался подобным одному из данных и равным другому.

Понимание учащимися основной идеи имеет очень большое значение: оно направляет внимание учащихся по определенному пути, сокращает время, затрачиваемое на поиски, придает им более целесообразный и направленный характер, а главное, позволяет всем или почти всем учащимся принять активное участие в работе.

Заметим, что возможны два подхода: либо основная идея сразу сообщается учителем, либо она выясняется в процессе анализа.

Нам кажется, что приведенных советов уже достаточно, чтобы процесс отыскания доказательств протекал плодотворно и успешно. Обилие мелких и частных советов имеет и обратную сторону: оно рассеивает внимание учащихся, отвлекает их от основной задачи.

Самому приему отыскания доказательства можно (и нужно) придавать различные формы в зависимости от трудности доказательства, возраста и подготовки учащихся. Поэтому приведенный пример нужно рассматривать только как одну из возможных форм применения данного приема. Ее можно рекомендовать для младших классов в большинстве случаев, а в старших—для особо трудных доказательств. Возможность сокращения этой формы должна подсказываться учителю его педагогическим чутьем и тактом.

Вовсе не исключено, что можно ограничиться разъяснением основной идеи и целесообразности дополнительных построений, приведением соображений, относящихся к развитию и применению основной идеи в данном доказательстве.

К отысканию доказательства во всех случаях должны привлекаться учащиеся. Но при этом необходимо соблюдать чувство меры и не предлагать лишних вопросов.

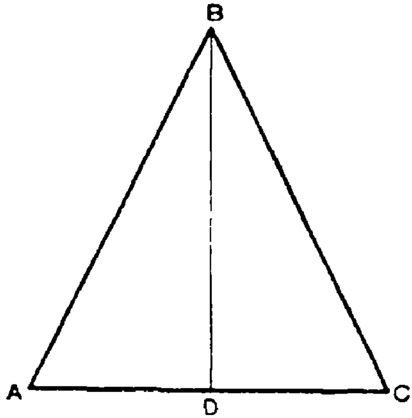
Активность учащихся должна проявляться в открытии нового: в умении сделать выводы, в попытках продолжить ход рассуждений. Вопросы же такого характера: кто вспомнит нужную теорему, определение, кто повторит и т. д.— отвлекают учащихся, мешают им сосредоточиться на главном, задерживают и осложняют процесс отыскания, делают его неинтересным и скучным. Если есть действительная нужда в таких вопросах (когда учитель не уверен в знаниях учащихся), то их следует предложить раньше (до отыскания). Самый же процесс отыскания нужно проводить в живой, быстрой и интересной форме.

Рассуждения, рассказ и вопросы учителя должны возбудить активное мышление учащихся, подготовить их к самостоятельному выводу, возбудить потребность высказать этот вывод или привести свои предположения о том, как следовало бы поступить дальше. Вопросы: что отсюда следует?, как доказать то-то и то-то?, как поступим дальше? — представляют наибольшую ценность, они и должны быть предложены учащимся. Важно при этом, чтобы на них могли ответить не отдельные, наиболее успевающие ученики, а весь или почти весь класс.

В свете высказанных соображений построены приводимые ниже примеры отыскания доказательств.

Теорема о биссектрисе угла треугольника.

Постановка проблемы. Из курса VI класса нам известно, что биссектриса угла треугольника, образованного равными сторонами, является одновременно и медианой, т. е. делит противоположную сторону пополам (черт. 19). Остался открытым вопрос: на какие части делит противоположную сторону биссектриса угла, образованного неравными сторонами? Этот вопрос мы и должны теперь разрешить.



Черт. 19.

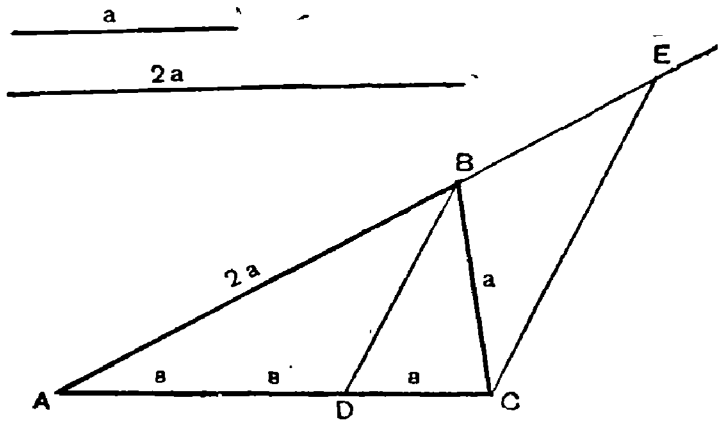
Формулировка теоремы. Возьмем произвольный отрезок a и построим треугольник, такой, чтобы одна из его сторон была a и другая $2a$. (Построение выполняется учителем на доске. Учащиеся только следят за его выполнением.)

Пусть это будет треугольник ABC, в котором $AB = 2a$ и $BC = a$ (черт. 20).

Проведем биссектрису угла B, причем не «на глаз», а вполне точно. Сразу заметно, что конец биссектрисы (точка D) делит AC на неравные части и притом меньшая из них прилежит к меньшей из сторон угла Сравним между собой отрезки DC и AD, т. е. отложим (при помощи циркуля) DC на AD (от точки D) столько раз, сколько это окажется возможным.

Оказывается, что $AD = 2DC$, или если $DC = b$, то $AD = 2b$. Следовательно,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{2b}{b} = 2.$$



Черт. 20.

Что мы замечаем? Не находится ли отношение отрезков AD и DC в зависимости от нашего построения? (Ответы очевидны.)

Итак, $$\frac{AB}{BC} = \frac{2a}{a} = 2$$

и поэтому в нашем треугольнике:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Такое равенство оказывается не случайным; это общая закономерность, усмотренная нами на частном случае. Справедливость ее мы и должны будем доказать.

Попробуем ее сформулировать, заметив, что отрезки, образующие равные отношения, мы называем п р о п о р ц и о н а л ь н ы м и.

После ряда уточнений учащиеся дают примерно следующую формулировку: *Биссектриса угла треугольника,* *образованного неразными сторонами, делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

Учитель: Посмотрим, является ли неравенство сторон необходимым условием справедливости заключения? Нельзя ли это условие исключить? Обратимся к чертежу равнобедренного треугольника.

Здесь имеем: $\frac{AB}{BC}=1$, но и $\frac{AD}{DC}=1$, следовательно, и в этом случае: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Это значит, что условие неравенства сторон можно из формулировки исключить, что открытая нами закономерность распространяется на любые углы в любом треугольнике. Теперь дается окончательная формулировка теоремы и подчеркивается, что ранее известное нам свойство биссектрисы в равнобедренном треугольнике является частным случаем этой новой теоремы.

Связь с ранее изученным и моменты обобщения имеют очень важное значение и для усвоения нового, и для переосмысливания старого, а поэтому и не следует пренебрегать ни одной возможностью осуществить (как в данном случае) и то, и другое.

Для лучшего понимания смысла теоремы и ее последующего применения полезно провести биссектрисы углов A и C и предложить учащимся записать соответствующие пропорции.

Отыскание доказательства.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$.

Требуется доказать: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Основная идея. Чтобы доказать справедливость пропорции, мы можем воспользоваться, либо подобием треугольников, либо теоремой о сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми. Какой путь мы изберем?

Посмотрим внимательно на чертеж. Мы видим, что два из интересующих нас отрезков принадлежат одной из сторон угла A (AD и DC), а третий (AB) — другой его стороне, что и определяет наш выбор. Итак, здесь удобно воспользоваться теоремой о сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми, а для этого достаточно выполнить построение четвертого пропорционального отрезка к трем данным. Как это сделать? (Ответ очевиден.)

Мы не приводим здесь дальнейших рассуждений, так как эта теорема стала до некоторой степени уже классическим примером использования анализа в отыскании доказательства, повторяемым многими авторами. И все же был смысл на ней остановиться, чтобы подчеркнуть и напомнить, что успех в отыскании доказательства зависит не только от применения анализа, но и от понимания учащимися формулировки теоремы и основной идеи доказательства.

Возвратимся к основной идее.

После того как теорема доказана, можно расширить понимание основной идеи. Действительно, имея в виду построение четвертого пропорционального, мы провели $CE \parallel BD$. Возможно ли иное построение? Ясно, что с таким же успехом мы могли бы провести прямую, параллельную биссектрисе BD, и через вершину A, до пересечения ее с продолжением стороны BC; тогда и выясняется возможность повторения и закрепления доказательства на измененном варианте чертежа.

Соотношение между плоскими углами трехгранного угла.

Постановка проблемы. Гранями трехгранного угла являются три плоских угла, имеющих общую вершину (демонстрируется модель трехгранного угла). У нас имеется набор плоских углов, вырезанных из картона. Могут ли любые три угла, из имеющегося у нас набора, образовать трехгранный угол?

Вспомним аналогичный вопрос при построении треугольника: могут ли любые три отрезка быть сторонами треугольника? Как известно, этот последний вопрос был решен отрицательно.

Существует ли условие, ограничивающее возможность образования трехгранного угла данными плоскими углами, и если да, то какое именно? Эти вопросы мы и должны сегодня разрешить.

Формулировка теоремы. Беря из имеющегося набора углы различной величины, учитель показывает, что пытаясь образовать трехгранный угол, мы можем встретиться с тремя случаями:

1) либо два меньших угла не покрывают третий наибольший угол (при наложении),

2) либо они его в точности покрывают,

3) либо перекрывают.

Ясно, что трехгранный угол может образоваться только в третьем случае. Отсюда и вытекает формулировка соответствующей теоремы. Указывается затем на аналогию с теоремой о сторонах треугольника.

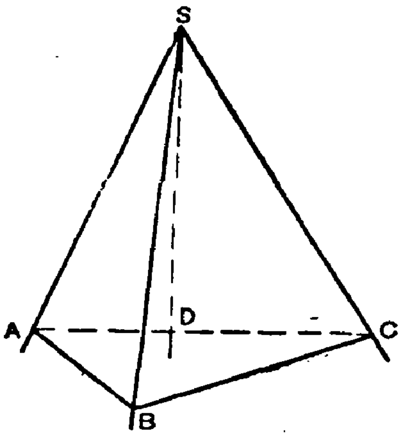
Для лучшего усвоения формулировки теоремы полезно решить следующие вопросы:

1) Пусть плоские углы будут: α и β. При каких соотношениях между α и β эти плоские углы могут быть гранями трехгранного угла? (Либо $\alpha > \beta$; либо $\alpha < \beta$, но $2\alpha > \beta$.)

2) Могут ли три равных плоских угла образовать трехгранный угол?

Отыскание доказательства. Построим трехгранный угол $SABC$, и пусть ASC — наибольший из плоских углов (черт. 21).

Основная идея. Повернем плоскость ASB вокруг ребра AS так, чтобы она совпадала с плоскостью ASC, т. е. наложим угол ASB на угол ASC. Тогда ребро SB *пойдет внутри угла* ASC и пусть оно займет положение SD.



Черт. 21.

Теорема будет доказана, если удастся обнаружить, что оставшаяся свободной (после наложения) часть угла ASC (т. е. угол DSC) будет меньше угла BSC. В этом и состоит основная мысль, основная идея доказательства.

Отсюда намечается и план доказательства — отложить на угле ASC угол ASD, равный углу ASB, и доказать затем, что $\angle DSC < \angle BSC$, или $\angle BSC > \angle DSC$.

Реализуем этот план.

Пересечем грани трехгранного угла плоскостью ABC, причем (не нарушая общности рассуждений) можно выбрать точку B так, чтобы $SB = SD$ (это в дальнейшем нам пригодится).

Итак, нужно доказать, что

$$\angle BSC > \angle DSC \text{ — ?} \qquad (1)$$

Эти углы входят в треугольники BSC и DSC, у которых SC — общая сторона и $SB = SD$ (т. е. две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого), и нужно доказать, что углы, образованные этими равными сторонами, не равны. На какую теорему мы могли бы здесь опереться? (Ответ очевиден.)

Итак, чтобы доказать предыдущее неравенство, достаточно установить, что:

$$BC > DC - ? \quad (2)$$

Для доказательства неравенства нужно воспользоваться каким-то уже ранее доказанным неравенством. Какое неравенство нам пригодилось бы, если мы учтем, что BC есть сторона, а DC — часть стороны треугольника ABC? Какой теоремой можно было бы воспользоваться? (Ответ очевиден.)

Запишем бесспорное неравенство:

$$BC + AB > AD + DC. \quad (3)$$

Сличим его с предыдущим, т. е. с тем, которое нужно доказать. Легко заметить, что нам «мешают» AB и AD. При каком условии можно было бы их зачеркнуть, отбросить? Это можно было бы сделать только в том случае, если бы удалось доказать, что $AB = AD$.

Как это сделать? Обратите внимание, что AB и AD — стороны треугольника ASB и ASD.

Остальные рассуждения могут быть проведены самими учащимися.

Теорема об объеме треугольной призмы.

Нам неоднократно приходилось наблюдать, как учащиеся, «знающие» доказательство этой теоремы, (т. е. воспроизводящие безошибочно текст учебника), не могли дать вразумительных ответов на вопросы:

1) Для чего проводится перпендикулярное сечение и рассматриваются прямые призмы?

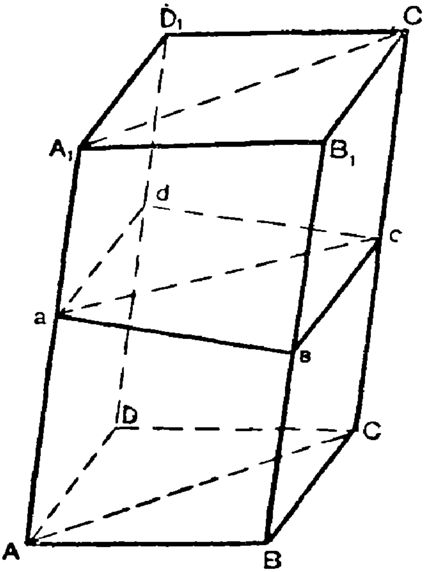
2) Нельзя ли доказать теорему проще: не будут ли равны и наклонные призмы?

Стереотипные ответы: «мы так доказывали» или «у Киселева так сказано» — свидетельствуют о том, что ученики не понимают, почему потребовалось такое сложное доказательство. А это значит, что смысл рассуждений остался для них неясным.

Приведем анализ доказательства этой теоремы.

Теорема. *Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.*

Докажем сначала эту теорему для треугольной призмы. Пусть это будет призма $ABCA_1B_1C_1$ (черт. 22).



Черт. 22.

О с н о в н а я и д е я. Воспользуемся тем, что мы уже умеем находить объем параллелепипеда и достроим призму до параллелепипеда (достраиваем). Площадь основания призмы равна половине площади основания параллелепипеда. Параллелепипед и призма имеют одну и ту же высоту. Если мы докажем, что объем призмы равен половине объема параллелепипеда, то теорема будет доказана.

О т ы с к а н и е д о к а з а т е л ь с т в а. Казалось бы, что проще всего начать с доказательства равенства призм, составляющих параллелепипед. Но это оказывается невозможным: призмы не равны.

Вот модель наклонного параллелепипеда, составленного из таких призм (показывается модель). Разнимем их. Можно ли одну из призм вложить (мысленно) в другую? Их основания — равные треугольники. Значит, эти треугольники можно совместить. Попробуем поставить призму $ACDA_1C_1D_1$ на призму $ABCA_1B_1C_1$ так, чтобы их основания совпали, т. е. чтобы $\triangle ADC$ совместился с $\triangle A_1B_1C_1$.

Сдвинув с этой целью первую призму вверх, а затем вправо, можно совместить вершину D с вершиной B_1; в таком положении ребро DD_1 составляет продолжение ребра BB_1, но тогда остальные вершины $\triangle ADC$ повисают в воздухе: никаким сдвигом по прямой нельзя совместить остальные вершины треугольников.

Если мы все же хотим это сделать, то, совместив вершины D и B_1, мы должны повернуть $\triangle ADC$ вокруг совпавших вершин на 180° по движению часовой стрелки. Тогда вершина A совпадет с вершиной C_1 и вершина C с вершиной A_1. Основания призм совместились. Что же произошло с ребром DD_1? Осуществив поворот, мы вывели его из того положения, когда оно служило продолжением BB_1, и теперь ребра DD_1 и BB_1 составляют ломаную линию. Хотя основания призм и совместились, но вложить одну из них в другую нельзя: у них не совпадают направления боковых ребер.

Итак, равенство этих треугольных призм доказать нельзя. Это еще не значит, что нельзя доказать нашу теорему. Дело в том, что условие равенства призм вовсе не обязательно. Нам достаточно доказать их равновеликость.

Но иной теоремы о равновеликости двух многогранников, кроме теоремы о равновеликости прямой и наклонной призм, у нас нет. Попробуем на нее опереться. Прежде всего осуществим построение прямых призм, равновеликих наклонным.

Проведем с этой целью перпендикулярное сечение $abcd$. Это будет параллелограмм, который делится диагональю ac на два равных треугольника, каждый из которых будет основанием соответствующей прямой призмы.

Итак, наши наклонные призмы будут соответственно равновелики прямым призмам, удовлетворяющим требованиям леммы о равновеликости призм. Что это нам дает?

Наши вспомогательные прямые призмы имеют равные основания ($\triangle abc = \triangle adc$), и по требованию леммы высота каждой из них равна боковому ребру параллелепипеда. Значит, высоты этих прямых призм тоже равны. Возьмем две прямые треугольные призмы с равными основаниями и равными высотами (показывает). Будут ли такие призмы равны? Можно ли одну из них вложить в другую?

Чтобы ответить на эти вопросы, повторим те же операции, при помощи которых мы хотели осуществить вложение наклонной призмы.

Поворот на 180° здесь тоже необходим и мы его делаем (наши прямые призмы составляют прямоугольный параллелепипед), но все дело в том, что такой поворот не изменяет направления бокового ребра: ребра обеих призм по-прежнему составляют прямую линию, это и значит, что наши прямые призмы равны, любую из них можно вложить в другую. В этом — главное, поэтому мы и вынуждены были ввести в рассуждения вспомогательные прямые призмы.

Доказана ли теперь равновеликость наклонных призм и почему? (Ответы очевидны.)

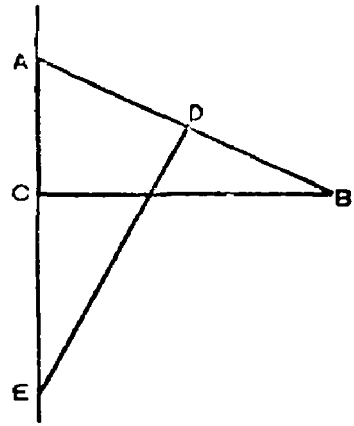
На этом анализ заканчивается.

Главная цель достигнута — ученик видит необходимость именно такого доказательства; он понимает почему так, а не иначе оно построено.

Лемма о боковой поверхности трех тел.

П о с т а н о в к а п р о б л е м ы. На предыдущих уроках мы ознакомились с формулами боковых поверхностей цилиндра, конуса и усеченного конуса. Каждую из этих поверхностей можно рассматривать как частные случаи поверхностей, образуемых вращением отрезка вокруг оси. Общность способа образования наводит на мысль о существовании и общего приема вычисления таких поверхностей. Такой общий прием (теорема) действительно существует, и мы с ним сейчас ознакомимся.

Учитель дает формулировку теоремы, поясняя ее на соответствующих чертежах.



Черт. 23.

З а м е ч а н и е. Поскольку эта формула является о б щ е й, она менее удобна в практических приложениях, чем формулы для каждой поверхности в отдельности. Тем не менее такая общая формула нужна. Она нам потребуется для определения поверхности шара и ее частей.

Докажем теорему для первого случая — для конуса (черт. 23).

Дано: $\angle C = 90°$; $AD = DB$; $DE \perp AB$.

Доказать: S *бок.* $= 2\pi \cdot ED \cdot AC$.

О т ы с к а н и е д о к а з а т е л ь с т в а. Сравнив формулу, подлежащую доказательству, с ранее известной нам формулой боковой поверхности конуса:

$$S \text{ бок.} = 2\pi \cdot BC \cdot AD,$$

легко заметить, что справедливость новой формулы будет доказана, если удастся доказать, что

$$DE \cdot AC = BC \cdot AD \text{ — ?}$$

Это и есть основная идея доказательства.

Равенства такого вида получаются обычно из пропорций. Это и наводит нас на мысль воспользоваться подобием треугольников.

Такие треугольники у нас есть, — это треугольники ABC и ADE.

Теперь остается составить пропорцию. При ее составлении следует избегать ненужных нам отрезков AE и AB и следить за тем, чтобы она была составлена правильно.

Даже в X классе многие учащиеся стремятся запомнить именно ту пропорцию, которая дана в учебнике, считая ее единственно возможной. Нужно поэтому предложить им составить несколько вариантов пропорций, и тем самым избавить учащихся от запоминания ненужного.

Так, например, помимо пропорции, приводимой в учебнике ($BC : ED = AC : AD$), могут быть составлены пропорции:

$$BC : AC = ED : AD; \; AC : BC = AD : ED \text{ и т. д.}$$

§ 3. ИЗЛОЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Предварительное отыскание доказательства создает благоприятные условия для привлечения учащихся к активному участию в окончательном оформлении (изложении) найденного доказательства.

Упражнения в оформлении доказательств помогают лучшему усвоению и более прочному запоминанию самих доказательств, вводят учащихся в круг требований, предъявляемых к доказательству, и вырабатывают умение изложить его самостоятельно; они способствуют развитию речи и мышления, «дисциплинируют мысли», воспитывают умение придать им точную и законченную форму, помогают направить их «в русло полезной работы» (М. И. Калинин).

Все эти возможности исключаются при пассивном усвоении готового доказательства. В этом случае у ученика нет собственных мыслей по поводу доказательства, нуждающихся в упорядочении и дисциплинировании; усваивая же чужие мысли, где должный порядок и строжайшая дисциплина уже наведены, ученик не видит, как и при помощи чего это достигается.

Ценность приема оформления доказательства при активном участии учащихся представляется нам несомненной, а сам прием — достойным самого широкого применения и использования.

Мы не будем приводить здесь конкретных примеров оформления доказательства, так как в предыдущем параграфе такой пример был уже приведен, и мы полагаем, что он дает достаточно ясное представление о сущности приема и формах практического его использования. Заметим только, что вовсе нет необходимости в обязательной записи в тетрадях схемы каждого доказательства. В младших (VI и VII) классах такая запись полезна и желательна в большинстве случаев, но в старших классах к ней нужно обращаться все реже и реже и только по мере необходимости (для сложных и трудных доказательств).

Большое влияние на качество знаний учащихся оказывает и изложение доказательств в учебнике. Мы глубоко убеждены в том, что значительная часть трудностей в понимании доказательств учащимися вызвана не столько самой структурой доказательств, сколько формой их изложения в действовавших до сих пор учебниках. Чтобы сделать эту форму более доступной и легче усвояемой, необходимо, по нашему мнению, следующее:

1. Ввести в изложение краткие разъяснения метода, основной идеи, плана доказательства и целесообразности дополнительных построений.

2. Выделять в нем узловые моменты и избегать злоупотреблений энтимемами.

Покажем это на приводимых в дальнейшем примерах.

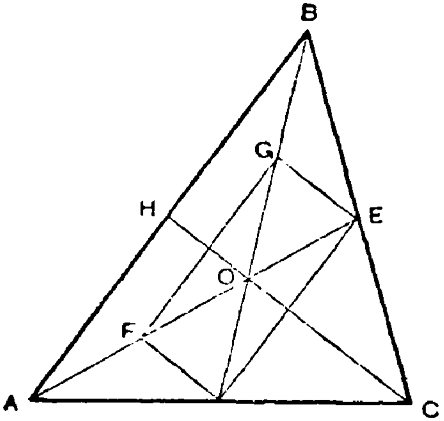
Теорема о медианах треугольника.

П о с т а н о в к а п р о б л е м ы.

Сегодня мы ознакомимся еще с одной из замечательных точек треугольника — с точкой пересечений его медиан.

Ф о р м у л и р о в к а т е о р е м ы.

Построим произвольный треугольник (разносторонний) и проведем в нем все медианы. Чтобы не осложнять чертежа, найдем середины сторон, пользуясь делениями линейки, но сделаем это как можно точнее. (Учитель выполняет чертеж на доске, учащиеся в тетрадях; черт. 24.)



Черт. 24.

Итак, мы построили треугольник ABC и провели в нем медианы AE, BD и CH. Мы замечаем, что все медианы имеют общую точку O; иначе говоря, они пересекаются в одной точке. Она и есть одна из замечательных точек треугольника.

Если положить картонный треугольник на тупой конец карандаша (который нужно держать в вертикальном положении) так, чтобы на нем лежала точка O, то треугольник не упадет: он будет находиться в равновесии. Точка пересечения медиан треугольника есть центр его тяжести.

Обратим теперь внимание и на другое свойство точки O. *Мы замечаем, что она делит каждую медиану на* неравные части и та из них меньше, которая отходит к стороне (считая от точки O). Сравним эти части. Будем откладывать отрезок OD на отрезке OB. Мы увидим, что $OB=2OD$, или $OD=\frac{1}{2}OB$. Такое же соотношение будет иметь место и в остальных случаях. Проверяем.

Итак, точка O делит каждую медиану в отношении 1:2, считая от соответствующей стороны; иначе можно сказать, что точка O отсекает от каждой медианы третью ее часть, считая от соответствующей стороны.

Мы нашли эти свойства опытным путем. У нас еще нет полной уверенности в том, что они распространяются на медианы всех треугольников, а также и в том, что медианы точно пересекаются в одной точке и больший из отрезков каждой медианы абсолютно точно больше другого ее отрезка в два раза. Чтобы приобрести такую уверенность, мы должны найденные свойства доказать.

Кто сформулирует теорему, подлежащую доказательству?

(После исправления и уточнения ответов учащихся, учитель дает окончательную формулировку.)

Запишем, что́ дано и что́ требуется доказать.

Мы построили произвольный треугольник и провели в нем медианы. Это условие теоремы. Из рассмотрения чертежа мы установили два свойства, что и является заключением теоремы, т. е. тем, что требуется доказать.

Дано: $AD=DC$; $BE=CE$; $AH=BH$.

Требуется доказать:

1) медианы имеют общую точку O;

2) $OD=\frac{1}{3}BD$, $OE=\frac{1}{3}AE$, $OH=\frac{1}{3}CH$.

Отыскание доказательства.

Удобнее начать с доказательства второго свойства и взять сначала только две медианы: AE и BD. Нам придется провести дополнительное построение, но какое?

Основная идея. Достаточно доказать, что $OD=\frac{1}{2}BO$ и $OE=\frac{1}{2}AO$.

Имея в виду эту идею, мы разделим OA и OB пополам и пусть точки F и G будут серединами отрезков OA и OB. Достаточно доказать, что $DO=OG$ и $OF=OE$. Тогда придется включить эти отрезки в какую-то фигуру. Естественно, что мы попробуем соединить их концы. Получается четырехугольник $DFGE$, диагоналями которого являются GD и FE, и нужно, оказывается, доказать, что точкой пересечения (точкой O) эти диагонали делятся пополам.

Как это доказать?

Наводящий вопрос: Относительно какого четырехугольника можно утверждать, что его диагонали обладают таким свойством? (Ответ очевиден.)

Итак, нужно доказать, что $DFGE$ — параллелограмм.

Контрольный вопрос: Достаточно ли этого? — Да, если мы это докажем, то по свойству диагоналей параллелограмма будем иметь, что $OD=OG$ и $OF=OE$, а отсюда согласно нашему построению будет следовать, что $OD=\frac{1}{2}OB$ и $OE=\frac{1}{2}OA$. Следовательно, нам остается доказать, что $DFGE$ — параллелограмм.

Подумаем, как это сделать. Нам придется воспользоваться либо определением, либо одним из признаков параллелограмма. В данном случае подходит признак: «Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник — параллелограмм». Попробуем его применить. Остановим свой выбор на сторонах FG и DE.

Попробуйте доказать их параллельность и равенство.

Наводящие вопросы. Обратите внимание на треугольник AOB и учтите, что нам известно о точках F и G. Что можно тогда утверждать об отрезке FG и его свойствах? То же самое в отношении треугольника ABC и отрезка DE.

Ответы и вывод из них очевидны.

На этом процесс отыскания доказательства можно считать законченным, имея в виду, что доказательство первого свойства будет дано в процессе изложения.

Изложение доказательства

1. Возьмем в $\triangle ABC$ какие-нибудь две медианы, например AE и BD, пересекающиеся в точке O, и докажем, что $OD = \frac{1}{3} BD$ и $OE = \frac{1}{3} AE$.

2. Для этого разделим OA и OB пополам точками F и G и убедимся в равенстве отрезков OG и OD, OF и OE. Соединим концы этих отрезков и докажем предварительно, что получившийся четырехугольник $DEGF$ есть параллелограмм.

3. В самом деле:

1) Отрезок FG есть средняя линия $\triangle AOB$, значит, $GF \parallel AB$ и $GF = \frac{1}{2} AB$.

2) Отрезок DE есть средняя линия $\triangle ABC$, значит, $ДE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2} AB$.

Отсюда следует, что $DE \parallel FG$ и $DE = FG$.

Итак, мы доказали, что четырехугольник $DEGF$ есть параллелограмм. А в параллелограмме диагонали, пересекаясь, делятся пополам. Значит, $OF = OE$ и $OG = OD$.

4. А так как (по построению)

$$OF = \frac{1}{2} AO \text{ и } OG = \frac{1}{2} OB, \text{ то } OE = \frac{1}{3} AE \text{ и } OD = \frac{1}{3} BD.$$

5. Если теперь возьмем третью медиану CH с медианой BD (или с AE), то так же убедимся, что точка их пересечения отсекает от каждой из них $\frac{1}{3}$ часть, считая от основания; а так как (по доказанному) такой третьей частью медианы BD является отрезок DO, то медианы CH и BD дол-

жны пересечься в той же точке O. Следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке.

Теорема. *Если на одной стороне угла отложить ряд равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, то они отсекут на второй стороне угла также равные между собой отрезки.*

Постановка проблемы.

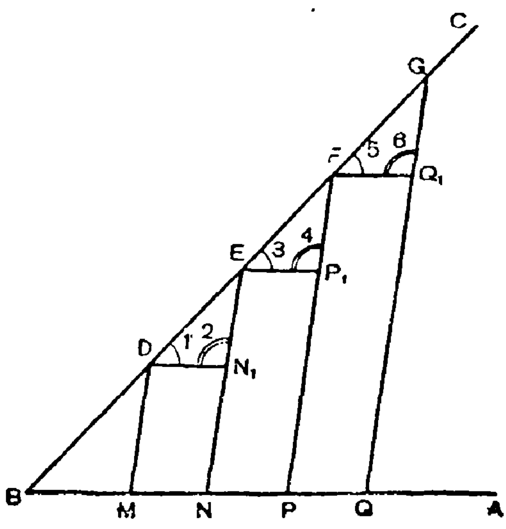
Нам известен способ деления данного отрезка пополам. Пользуясь этим способом, можно разделить отрезок на 4,8, ..,2^n равных частей. Но он не пригоден, если нам нужно разделить отрезок на 3,5,.. равных частей. Сегодня мы ознакомимся с теоремой, на основании которой решается задача деления данного отрезка на **любое** число равных частей.

Формулировка теоремы.

Возьмем произвольный угол ABC и отметим на одной из его сторон произвольную точку M. Отложим от нее на стороне угла (в направлении от его вершины) произвольные, но равные между собой отрезки. Пусть, например, их будет три: $MN = NP = PQ$ (черт. 25). Это и последующие построения выполняются учащимися в тетрадях.

Проведем теперь через точку M прямую, пересекающую другую сторону угла в некоторой точке D, а затем через точки N, P и Q проведем прямые, параллельные DM (выполняется построение при помощи угольника и линейки).

Запишем: $DM \parallel EN \parallel PF \parallel QG$.



Черт. 25.

Итак, на одной стороне угла, на стороне BA, мы отложили от точки M равные между собой отрезки и через их концы провели параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла (сторону BC), и тогда на стороне BC получились отрезки, заключенные между параллельными прямыми. Это отрезки: DE, EF и FG. Сравним их.

Производится сравнѐние (при помощи циркуля). Во всех случаях (на доске и в тетрадях учащихся) отрезки DE, EF и FG, полученные в результате нашего построения, оказываются равными между собой.

Запишем: $DE=EF=FG$.

Мы ознакомились с новым способом построения равных отрезков.

В чем он состоит?

Исправляя и уточняя ответы учащихся, учитель добивается, чтобы учащиеся смогли своими словами передать содержание теоремы.

Теперь мы должны убедиться в том, что данный способ всегда приводит к цели и что получаемые отрезки в точности равны между собой, т. е. нужно доказать следующую теорему. «Если на одной стороне угла... и т. д.:».

Что дано в теореме?

Наводящий вопрос: Как выполнялось построение?

Условия, использованные при построении, и есть условие теоремы. Это дано. Что требуется доказать?

Нужно доказать справедливость того, что мы обнаружили при построении получившегося чертежа. Это и будет заключение теоремы.

Итак, дано:

$$MN=NP=PQ \text{ и } DM \parallel EN \parallel FP \parallel GQ.$$

Требуется доказать: $DE=EF=FG$.

Отыскание доказательства.

Основная идея. Включим интересующие нас отрезки в треугольники. Доказав равенство треугольников, мы сможем затем доказать и равенство отрезков.

Анализ.

Чтобы включить нужные нам отрезки в такие треугольники, равенство которых мы смогли бы потом доказать, проведем из концов отрезков прямые, параллельные другой стороне угла (стороне BA), т. е. $DN_1 \parallel EP_1 \parallel FQ_1 \parallel BA$; у нас получаются треугольники EDN_1, EFP_1 и FGQ_1, и нужно доказать их равенство. Как это сделать? Ясно, что нам нужно иметь в виду один из признаков равенства треугольников. Но какой?

Будем вначале искать равные стороны. Стороны DE, EF и GF мы исключаем сразу, так как их равенство и предстоит доказать. Стороны EN_1, FP_1, GQ_1—неудобны, так как они входят только в треугольники и не связаны с данными. Более подходящими в этом отношении являются стороны DN_1, EP_1 и FQ_1. Их равенство мы и попробуем доказать.

Кто докажет?

Наводящие вопросы:

1) Что можно сказать об отрезках DN_1 и MN и почему? То же относительно отрезков EP_1 и NP; FQ_1 и PQ.

2) Что известно об отрезках MN, NP и PQ?

3) Какой вывод отсюда следует, т. е. что теперь можно утверждать об отрезках DN_1, EP_1 и FQ_1 и почему?

Итак, мы доказали, что $DN_1 = EP_1 = FQ_1$.

Мы уже убедились, что равенство других сторон наших треугольников обнаружить не удается. Следовательно, нам необходимо доказать равенство углов, прилежащих к равным сторонам, т. е. к сторонам DN_1, EP_1 и FQ_1. В треугольнике EDN_1 это будут $\angle 1$ и $\angle 2$ (отмечаем эти углы дугами и обозначаем их цифрами 1, 2).

Найдите углы, равные $\angle 1$, в других треугольниках? Почему?

Найдите углы, равные $\angle 2$. Почему? (Обозначаем цифрами все эти углы.)

Запишем: $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5$ и

$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6$.

Доказано ли равенство треугольников? На основании какого признака?

Что следует из равенства треугольников? Почему? (Ответы очевидны.)

Доказательство найдено. Теперь нужно его изложить.

Синтез (изложение).

1. Включим отрезки DE, EF и FG в треугольники и с этой целью проведем прямые DN_1, EP_1 и FQ_1, параллельные AB.

2. Докажем равенство треугольников DEN_1, EFP_1 и FGQ_1. а) Убедимся вначале в равенстве сторон DN_1, EP_1, FQ_1.

Действительно: $DN_1 = MN$; $EP_1 = NP$; $FQ_1 = PQ$, как отрезки параллельных между параллельными. Но, по условию, $MN = NP = PQ$ и, следовательно, $DN_1 = EP_1 = FQ_1$. б) Теперь докажем равенство прилежащих к ним углов.

$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5$, как соответственные,

$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6$, как углы с параллельными сторонами.

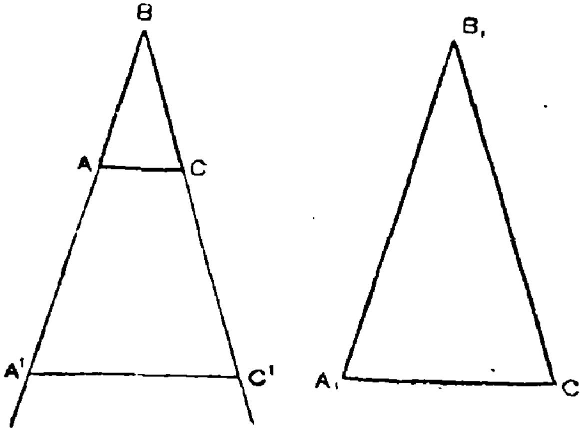
Итак, мы доказали, что $\triangle DEN_1 = \triangle EFP_1 = \triangle FGQ_1$. Так как в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, то $DE = EF = FG$, ч. т. д.

Признаки подобия треугольников
(по учебнику Глаголева).

Формулировка теоремы.

Построим произвольный $\triangle ABC$. Рядом с ним построим $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle B_1 = \angle B$ (черт. 26). Построение выполняется при помощи циркуля и линейки. Желательно, чтобы его сделали и учащиеся в тетрадях.

Мы взяли $A_1B_1 \neq AB$, а поэтому треугольники не равны. Заметно, однако, что они похожи друг на друга и форма у них одинаковая. Рассмотрение чертежа позволяет высказать предположение о подобии таких треугольников. Мы полностью в этом убедимся, доказав теорему: «Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны»[1].



Черт. 26.

Отыскание доказательства.

Дано: $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC \backsim A_1B_1C_1$.

Основная идея.

Достаточно построить новый треугольник, удовлетворяющий двум требованиям:

[1] Н. Л. Глаголев. Геометрия, стр. 153, 1954.

1) чтобы он был перспективно подобен одному из данных треугольников,

2) равен другому.

Остановимся пока на первом требовании. Соответствующее построение уже известно. Взяв, например, за центр подобия вершину B треугольника ABC и задаваясь любым k, мы можем построить бесчисленное множество треугольников, перспективно подобных треугольнику ABC.

Как удовлетворить одновременно и второму требованию?

Для этого и воспользуемся произвольностью k. Выберем k таким, чтобы $k=\frac{A_1B_1}{AB}$, и отложим теперь от вершины B (по направлению BA) уже вполне определенный отрезок $k\cdot AB=BA'$. Заметим при этом, что так как $k=\frac{A_1B_1}{AB}$, то $k\cdot AB=A_1B_1$ и, следовательно, $BA'=A_1B_1$.

Продолжим построение. Нужно помнить, что k уже выбрано и его нельзя изменять. Отложим от вершины B по направлению BC отрезок $k\cdot BC=BC'$. Заметим, что отсюда вовсе не следует (как в предыдущем случае), что $BC'=$ $=B_1C_1$: нам ничего не известно об отношении $\frac{B_1C_1}{BC}$.

Соединим теперь A' с C'. Получился треугольник $A'BC'$, перспективно подобный треугольнику ABC и, кроме того, такой, что $A^1B=A_1B_1$.

Контрольный вопрос: Что еще нужно доказать?

Ученик: Нужно доказать, что $\triangle A^1BC^1=\triangle A_1B_1C_1$.

Подумаем над этим. В таких случаях полезно обратиться к условию. Не поможет ли оно нам? Итак, в наших треугольниках $\angle B=\angle B_1$ и $A'B=A_1B_1$. Но этого еще недостаточно. Нужно, чтобы $BC'=B_1C_1$ или чтобы $\angle A'=\angle A_1$.

Какой путь изберем? Вспомним опять об условии, так как в случае затруднений нужно прежде всего проверить, все ли данные теоремы нами использованы. Это очень часто помогает в выборе правильного пути.

Ученик: Нами еще не использовано условие $\angle A=\angle A_1$.

Ясно, что этим условием можно воспользоваться только для доказательства равенства углов. Какой тогда путь является единственно возможным?

Ученик: Доказать, что $\angle A'=\angle A_1$.

Учитель: Вот над этим и подумайте.

Кто докажет? (Ответ очевиден.)

Анализ закончен.

Изложение доказательства.

1. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Требуется доказать, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

2. Чтобы доказать теорему, достаточно построить третий треугольник, удовлетворяющий двум требованиям:

а) чтобы он был перспективно подобен одному из данных треугольников и б) равен другому.

С этой целью, взяв коэффициент подобия $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ и приняв за центр подобия вершину B, откладываем на продолжении сторон BA и BC от точки B отрезки $BA' = k \cdot AB$ и $BC' = k \cdot BC$.

Соединив точки A' и C', получаем $\triangle A'BC'$, перспективно подобный треугольнику ABC. Остается доказать, что треугольники $A'BC'$ и $A_1B_1C_1$ равны.

3. Действительно:

а) $A'B = A_1B_1$, так как (по построению) $BA' = k \cdot AB$ и $A_1B_1 = k \cdot AB$ (так как $k = \frac{A_1B_1}{AB}$);

б) $\angle B = \angle B_1$ — по условию;

в) $\angle A' = A_1$, так как $\angle A_1 = \angle A$—по условию и $\angle A' = \angle A$, как соответственные при параллельных прямых $A'C'$ и AC. Значит, $\triangle A'BC' = \triangle A_1B_1C_1$, следовательно,

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1, \text{ ч. т. д.}$$

Мы ограничиваемся приведением этих примеров, считая, что их уже достаточно, чтобы иметь представление о процессе доказательства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Успех в изложении доказательств определяется не применением какого-нибудь метода или приема (в частности, анализа), а системой преподавания в целом. Автор видел свою задачу в выяснении всего комплекса необходимых условий понимания и усвоения доказательств учащимися. Такими условиями являются:

1. Учитель должен иметь ясное представление о сущности доказательства, его строении, его видах и требованиях, к нему предъявляемых. В круг этих представлений должны постепенно вводиться и учащиеся (глава I).

2. Необходимо вести планомерную и систематическую работу по воспитанию у учащихся потребности в доказательстве (глава II).

3. Существенно важно, чтобы учитель и учащиеся понимали цели изучения доказательств (главы II и III).

4. Центральной проблемой является понимание доказательств учащимися (глава IV).

Для ее решения учитель должен:

а) Неустанно заботиться о развитии логического мышления и речи учащихся;

б) добиваться предельно ясного понимания формулировки теоремы;

в) уделять самое серьезное внимание процессу доказательства.

ОГЛАВЛЕНИЕ