В. В. РЕПЬЕВ

ОЧЕРКИ по методике преподавания АЛГЕБРЫ

ГОРЬКОВСКОЕ
КНИЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1958

В. В. РЕПЬЕВ

ОЧЕРКИ ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

ГОРЬКОВСКОЕ КНИЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1958

Автор положил в основу этой книги свой многолетний опыт педагогической деятельности и, в частности, опыт работы в средней школе. Иногда автор выходит за пределы личного опыта и использует уже имеющиеся достижения в преподавании математики в советской средней школе. В книге значительное внимание уделяется введению в буквенное исчисление, развитию понятия числа, учению о функциональной зависимости, учению об уравнениях и системах уравнений и их приложению к решению задач.

Издательство просит отзывы о книге направлять по адресу: г. Горький, Кремль, 2-й корпус, Горьковское книжное издательство.

Очерк первый

ИДЕЙНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ШКОЛЬНОГО КУРСА АЛГЕБРЫ И ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

1. Алгебра—одна из старейших ветвей математики. Она возникла в арифметике под влиянием запросов общественной практики, в поисках общих способов решения задач. Одно из отличий алгебры заключается в том, что для решения задачи вводится неизвестное; выполняя над ним и данными действия, определяемые задачей, получают уравнение, которое дает возможность найти неизвестное.

Зарождение алгебраических методов относится еще к древнему миру.

В дошедших до нас древнеегипетских папирусах имеются задачи, решение которых схоже с описанным. Искомому давалось название „куча", оно обозначалось иероглифом.

Древние вавилоняне уже за 2000 лет до н. э. умели решать задачи, сводящиеся к системе линейных уравнений со многими неизвестными, к квадратным уравнениям и даже к частному виду кубического уравнения. Они, по-видимому, разработали словесные правила для решения уравнений и пользовались ими в конкретных случаях. Поэтому иногда алгебраические знания вавилонян называют риторической алгеброй.

В древней Греции в 3 веке до н. э. геометрия достигла высокого развития. Доказательства стали главным средством установления геометрических фактов. Алгебраические предложения и задачи греки тоже обосновывали и решали геометрическими средствами.

С помощью геометрических построений они решали задачи, равносильные квадратным уравнениям. Поэтому иногда алгебраические знания древних греков называют геометрической алгеброй.

Диофант Александрийский (около 3 века н. э.) в трактате „Арифметика" решает уравнения 1-й и 2-й степени, рассматривает неопределенные уравнения. Он вводит краткие символические обозначения для неизвестных, простейших долей неизвестных и некоторых простейших степеней их.

В средние века математические знания древних унаследовали арабы и те народы, которые оказались в сфере их политического влияния.

В 9—15 веках народы Средней Азии—узбеки, таджики—дали много видных алгебраистов. Узбекский математик и астроном 9 века Мухаммед из Хорезма (Мухаммед Аль-Хорезми) написал книги по арифметике и по алгебре. Это позволяет утверждать, что алгебра стала самостоятельной ветвью математики. Вторая книга называется „Альджебр уаль мукабала". „Альджебр" — название переноса отрицательных членов уравнения в другую часть его, а „мукабала"—приведение подобных членов. От слова „альджебр" произошло и название „алгебра".

В 12 веке итальянцы перенимают алгебру у народов Востока. В 16 веке им удалось решить уравнения 3-й и 4-й степени.

В конце 16 века французский математик Виета (1540—1603) ввел буквы для обозначения известных величин. Таким образом стало возможным изучать не отдельные уравнения с числовыми коэффициентами, а целые классы уравнений или систем уравнений и находить способы их решения. Это имело большое значение для дальнейшего развития всей математики.

В 18 и 19 веках основными объектами исследования алгебры были рациональные функции, алгебраические уравнения, системы уравнений, в особенности линейных.

Введение буквенных обозначений облегчило изучение переменных величин и подготовило почву для создания аналитической геометрии. Один из творцов этой дисциплины—Декарт (1596—1650) совершенствует и упорядочивает символику, тем самым окончательно утверждая ее.

Введение в математику переменной величины является фактом первостепенной важности. Фридрих Энгельс говорит: „Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем".*

В свою очередь математический анализ обогащает алгебру новыми мощными средствами исследования. Таким образом, исторически две ветви математики — алгебра и анализ — находятся в тесной взаимной связи и обусловленности.

Развитие алгебры находилось в тесной связи с развитием понятия числа.

Древние греки не признавали отрицательных чисел: они не умели дать им конкретное истолкование. Только у Диофанта в зачаточной форме можно найти отрицательные числа.

Смелый шаг в отношении введения отрицательных величин был сделан в 10 веке индийскими учеными, которые рассматривали их как денежный долг, а положительные числа — как наличные деньги.

Однако отрицательные числа не получили признания народов Среднего Востока. До 16 века не мирились с ними и европейские ученые. Привлекли они к себе внимание лишь после того, как Декарт применил их в построении аналитической геометрии. Здесь они были наглядно истолкованы при помощи направленных отрезков.

На иррациональность натолкнулись еще древние греки при рассмотрении некоторых вопросов геометрии. Но они смогли избежать иррациональных чисел, разработав в геометрической форме теорию пропорций и несоизмеримых отрезков. Математики Индии и Среднего Востока установили взгляд на иррациональные числа, как на числа нового класса. Арифметиче-

---

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, ОГИЗ 1948, стр. 208.

ские теории иррациональных чисел относятся ко второй половине 19 века.

Мнимые числа встретились ученым при решении уравнений очень давно. На них натолкнулся уже Диофант, но он полагал, что уравнения, приводящие к таким числам, не допустимы.

В 16 веке мнимыми числами занимались итальянские алгебраисты, которые достигли некоторых успехов в оперировании ими. Однако конкретного истолкования этих чисел они не знали. И только в конце 18 и начале 19 века была найдена интерпретация комплексных чисел с помощью векторов.

Таким образом, развитие понятия числа находится в тесной связи с развитием алгебры.

2. Приведенные краткие сведения из истории развития алгебры позволяют отметить некоторые положения, представляющие педагогический интерес.

Буквенное исчисление, возникшее в алгебре, имеет огромное значение для многих математических дисциплин. Оно применяется в арифметике как средство выражения в общем и кратком виде законов и свойств арифметических действий и как необходимое условие введения доказательств,—тем самым оно переводит арифметику в класс дедуктивных дисциплин. Не обходится без него и геометрия, используя его для построения аналитической геометрии и в тех своих разделах, в которых речь идет о количественных отношениях пространственных форм. Буквенное исчисление является также важной предпосылкой возникновения и развития мощной ветви математики — математического анализа.

Значение буквенной символики выходит далеко за пределы математики: ею успешно пользуются многие науки о неживой природе, технические дисциплины; широкое применение она находит и в различных отраслях производства.

Поэтому становится понятным то внимание, которое уделяют алгебраическому буквенному исчислению в школе.

Исторически развитие алгебры, несмотря на временные колебания и отступления назад, неизбежно привело к расширению понятия числа.

Число является основным и мощным средством познания пространственных форм и количественных отношений материального мира. Оно находит широчайшее применение в теории и практике. Поэтому развитие понятия о числе является важнейшей составной частью школьного курса алгебры.

Исторически первой проблемой зарождавшейся алгебры было решение задач с помощью уравнений и систем уравнений, находящих весьма широкое использование во многих науках, в технических дисциплинах и различных областях практики. Естественно, что эта проблема всегда приковывала к себе внимание алгебраистов и что детальное изучение ее в школе необходимо.

Введение буквенной символики обеспечило изучение переменной и функции удобными средствами и подготовило развитие математического анализа.

Математический анализ располагает мощными средствами изучения функций. Он находит применение в основных науках о неживой природе, в технических дисциплинах и производстве. Поэтому учение о функции, исследование функций должно быть важнейшей составной частью школьного курса алгебры.

Итак, из перечисленного видно, что изучение школьного курса алгебры должно идти в следующих четырех направлениях: буквенное исчисление, развитие понятия о числе, учение об уравнениях и их системах, учение о функции и исследование свойств функций. Эти стержневые направления находятся в тесной взаимной связи и с исторической точки зрения, и по существу.

Некоторые методисты полагают, что содержание школьного курса алгебры представляет собой мозаику основ различных математических дисциплин. Однако изложенное свидетельствует, что это далеко не так. Курс алгебры проникнут глубокой исторически обусловленной связью основных своих идей.

3. В настоящее время перед советской общеобразовательной средней школой стоит задача максимально содействовать политехническому обучению подрастающего поколения. В связи с этим новые, более серьезные задачи стоят перед преподаванием математики и, в частности, алгебры.

Очень важно, чтобы учащиеся сознательно и глубоко изучили буквенное исчисление. Алгебраическая символика является разновидностью скорописи. Одна из основных целей обучения и заключается в том, чтобы помочь учащимся переводить математические предложения с родного языка на язык алгебраической скорописи и с языка символов — на родной язык.

В связи с этим выдвигается и другая задача: научить школьников тождественным преобразованиям, довести выполнение этих преобразований почти до полного автоматизма.

Преподавание алгебры в школе должно развить, расширить представление учащихся о числе, последовательно ввести отрицательные, иррациональные, мнимые числа и параллельно с этим сформировать в сознании учеников множества рациональных, действительных и комплексных чисел. Вместе с тем нужно изучить все действия над числами этих множеств, уметь выполнять их быстро, верно, рационально, почти автоматически.

Также важно ознакомить школьников с элементами учения о равносильности уравнений, обучить их решению простейших видов целых, дробных и иррациональных уравнений, некоторых видов систем уравнений, а также некоторых видов трансцендентных уравнений.

Решение задач путем составления уравнений и систем уравнений является одним из приводных ремней, связывающих учение об уравнениях с решением практических задач. Необходимо большое внимание уделить умению использовать аппарат уравнений в решении задач. С точки зрения политехнического обучения особый интерес представляют задачи по механике, физике, доступные по содержанию задачи технического и производственного характера.

В школьном курсе алгебры учащиеся должны познакомиться с важнейшим понятием современной математики — функцией, с некоторыми алгебраическими и некоторыми трансцендентными функциями, с применением понятия о функции в других областях научного знания и технике и подготовиться к дальнейшему изучению функций в курсе тригонометрии.

Одним из средств изучения функций являются графики в прямоугольных координатах. Графическим представлениям функций свойственна большая наглядность, хорошая обозримость, широкая применимость, выходящая далеко за пределы математики. Задача состоит в том, чтобы предоставить в распоряжение учащихся графические средства изучения функций. Основным средством изучения функции является понятие о производной. Цель обучения — дать школьникам это понятие, научить применять его в исследовании свойств функций в практике.*

Задачей обучения алгебре является освоение таблиц, связанных с содержанием курса. В первую очередь сюда относятся таблицы квадратов и кубов чисел, квадратных и кубических корней из чисел, а затем таблицы логарифмов и антилогарифмов. Изучение таблиц находит продолжение в курсе тригонометрии. Надо познакомить учащихся с устройством логарифмической линейки и дать навыки в пользовании ею. Это имеет большое значение для политехнического обучения.

Указанные основные цели обучения алгебре иногда называют материальными: обучение должно дать молодежи сумму знаний, умений и навыков, необходимых им для участия в общественном производстве.

Однако не следует упускать из вида и другие цели обучения, которые иногда называют формальными.

Если в первые годы первенствует конкретно-индуктивный подход к усвоению материала, то в дальнейшем видное место играет дедукция. Поэтому изучение алгебры содействует умственному развитию школьников, является основой развития логического мышления.

Важно, чтобы учащиеся овладели методами доказательств предложений и решения задач, в частности различными видами анализа, математической индукцией.

Разумное преподавание алгебры способствует развитию функционального мышления: величины мыслятся переменными, во взаимной зависимости. А это очень важно для формирования марксистско-ленинского мировоззрения.

---

* Если еще нет возможности излагать учение о производной на уроках, то это можно сделать на занятиях математического кружка.

Очерк второй

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ В БУКВЕННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. История развития алгебры свидетельствует о том, что введение буквенной символики—трудный, сложный и длительный процесс. Если первые шаги в этом деле сделаны, вероятно, в 3 веке н. э. (Диофант из Александрии), то существенные достижения относятся ко второй половине 16 столетия (Виета) и к первой половине 17 столетия (Декарт). Значит, потребовалось около четырнадцати столетий, чтобы проблема буквенного исчисления получила удовлетворительное решение. История алгебры показывает, что буквы прежде всего использовались для обозначения неизвестных чисел, которые необходимо найти при заданных условиях. Это сравнительно нетрудный шаг: требованию задачи удовлетворяет определенное число, его временно и обозначают буквой. Введение обозначения буквой любого числа из некоторого множества чисел значительно труднее: ступень абстракции должна быть более высокой—под буквой a надо мыслить любое число из некоторой совокупности. Это было достигнуто лишь со второй половины 16 столетия.

При обучении в школе также прежде всего появляется обозначение буквой неизвестного числа, которое требуется найти. Уже в начальной школе применяются упражнения такого вида: определить x, если $19+x=47$ или $12 \cdot x=156$. Буквенное обозначение неизвестного числа усваивается постепенно без особых затруднений. Позднее буквой обозначают любое число из какого-либо известного учащимся множества чисел. Это более трудный шаг, так как нужна более высокая ступень абстракции.

Неумелый подход к введению буквенных обозначений таит опасность формального усвоения символики: ученик начинает оперировать буквами и не осознает, что под ними разумеются числа той или другой совокупности. Вместе с тем появляется недоумение, зачем потребовалась странная буквенная арифметика и зачем ее изучать.

Чтобы избежать такого положения, учителю надлежит тщательно продумать первые шаги ознакомления учащихся с буквенным исчислением, наметить наиболее целесообразные с педагогической точки зрения подходы к этому вопросу, приложить все усилия к предотвращению формального усвоения материала.

В учебной литературе по алгебре широко практикуется такой подход к введению буквенной символики: решают две-три арифметических задачи одного и того же вида, при этом составляют числовые выражения, обращают внимание школьников на то, что строение числовых выражений и рассуждения, сопровождающие решение, совершенно одинаковы. Затем решают задачу такого же вида, но с буквенными данными. В результате получают первое буквенное выражение.*

Далее рассматривают задачи еще 2—3 видов и составляют буквенные выражения.

Такой шаг к введению алгебраической символики нельзя признать лучшим: он требует длительных связанных между собою рассуждений, сложен, поглощает много учебного времени. Получаемые при решении задач буквенные выражения, как правило, не являются простейшими.

В методической литературе указываются и иные подходы к введению буквенных обозначений. В качестве первого шага рекомендуется применить буквенную символику для краткой записи законов арифметических действий—переместительных и соче-

---

* Смотрите, например, книгу Д. К. Фадеева и С. С. Соминского, Алгебра, ч. I, Учпедгиз 1951.

тательных законов сложения и умножения, распределительного закона умножения относительно сложения.*

Этот путь надо признать более приемлемым: он не требует длительных рассуждений, использует хорошо известный детям материал, демонстрирует значение буквенных обозначений для общей и краткой записи важных законов. Однако и здесь есть ряд отрицательных сторон: первые буквенные выражения получаются довольно сложными и входят в состав равенств.

Иногда изучение буквенных обозначений начинается с решения уравнений и простейших задач на составление уравнений. Этот путь заслуживает особого внимания: он использует то, что уже известно школьникам. Поэтому именно с него целесообразно начинать, хотя он не подводит учащегося непосредственно к тому факту, что буквой можно обозначать любое число некоторой совокупности чисел. Это говорит о том, что дополнительно нужны иные способы введения алгебраических символов.

Однако нет надобности ограничиваться одним из указанных способов,—целесообразно использовать их совместно, продуманно сочетая.

В нашей практике первые шаги в буквенное исчисление совершаются по следующему плану: вспоминаются простейшие уравнения, решаемые арифметическими средствами, показывается применение их к решению простых задач. Затем учащиеся знакомятся с буквенной записью суммы двух и трех слагаемых, применяют ее к выражению переместительного и сочетательного законов сложения. Далее вводится запись разности двух чисел, произведения двух и трех чисел, общая запись переместительного, сочетательного и распределительного законов умножения; наконец, знакомятся с записью частного. Попутно буквенные обозначения используются при решении задач; учащиеся получают буквенные выражения. На первых уроках алгебры особенно часто следует отмечать, что под буквой разумеются числа определенной совокупности. Для закрепления этого

* И. И. Чистяков, Методика алгебры, ГУПИ 1934.

школьникам предлагается назвать несколько значений, какие может принимать буква.

2. Опишем первые уроки алгебры.

Каждому преподавателю хочется поскорее дать ученикам некоторое представление о том, чем занимается алгебра. Определить предмет алгебры нет возможности, потому что дети не подготовлены к этому. Однако в беседе с классом можно указать на некоторые характерные вопросы, которые рассматриваются в алгебре. Для этого ее сопоставляют с курсом арифметики.

Вот примерное содержание такой беседы.

Чем мы занимались при изучении арифметики? Мы изучали числа и действия над ними. При прохождении алгебры также будем изучать числа, познакомимся с новыми видами чисел, научимся выполнять действия над ними. В арифметике над числами выполняются четыре действия. В курсе алгебры будем иметь дело с теми же действиями, но познакомимся еще и с новыми.

Раньше мы решали такие упражнения: найти x, если $x - 27 = 53$, $x : 0,5 = 6,25$. Такие упражнения называются уравнениями.* В курсе алгебры тоже уделяется большое внимание уравнениям; только теперь мы будем иметь дело с уравнениями более сложными, чем раньше.

При изучении арифметики иногда числа обозначали буквами; например, в уравнениях. В курсе алгебры особенно широко применяется замена чисел буквами. Будем учиться делать это и мы.

В арифметике уделялось большое внимание задачам. В курсе алгебры также решаются задачи. Мы познакомимся с новыми способами решения, более совершенными, чем арифметические.

В конце беседы полезно сообщить, что на фабриках и заводах, при строительстве электростанций и других сооружений алгебраические знания находят самое широкое применение. Вот почему в наших школах уделяется серьезное внимание изучению алгебры.

Далее учитель переходит к изложению буквенного исчисления.

---

* Это понятие уместно ввести в 5-м классе как название особого вида арифметических упражнений. Давать определение при этом не следует.

Следуя принципам обучения—начинать с известного и идти к новому, начинать с конкретного и направляться к абстрактному, целесообразно приступить к решению простейших уравнений: с ними школьники уже имели дело раньше.

Вспоминается, как решались упражнения, в которых неизвестное число обозначается буквой. Решаются, например, такие упражнения: 1) $x+28=57$; 2) $1,5+x=3,25$.

При решении опираются на зависимость между компонентами и результатами действий. Рассуждение ведется примерно так: сумма двух слагаемых дана, одно из них известно, другое—нет; чтобы найти неизвестное слагаемое, следует из суммы вычесть данное слагаемое.

Учитель сообщит, что упражнения, похожие на решенные, в которых неизвестное число обозначено буквой, называют уравнениями, а ответы, которые получили,—корнями уравнений. 29—корень первого уравнения; 1,75—корень второго уравнения. Решить уравнение—значит найти его корни.

Найти корни следующих уравнений: 3) $x-39=77$, 4) $27,2-y=19,9$.

В алгебре буквы прежде всего применяются для обозначения неизвестных чисел или величин. Вместо неизвестного числа можно поставить не только букву x, но и любую другую. Чаще всего пользуются буквами латинского алфавита.

Решить следующие уравнения: 5) $y\cdot 9=153$; 6) $8\cdot z=128$; 7) $56:t=2,8$; 8) $a:3=\frac{5}{6}$.

В порядке домашней работы учащиеся повторяют по учебнику арифметики зависимость между компонентами и результатами четырех действий и тренируются в решении простейших уравнений на основании этих зависимостей.

Давать определение уравнения нет надобности, с ним можно познакомиться позднее.

В дальнейшем, продолжая упражняться в решении уравнений, можно перейти к решению простых задач способом составления уравнения. Первый подход к решению задач требует от учителя продуманной системы упражнений.

Первые задачи — это те же уравнения, только облеченные в словесную форму. Например: „К неизвестному числу x прибавили 37 и получили 121. Чему равно неизвестное число?“; „От числа 231 отняли неизвестное число y и получили 89. Найти неизвестное число“. Работа в классе ведется так, что учащиеся пишут уравнения в то время, когда преподаватель диктует задачу.

Затем даются задачи, близкие к только что указанным, но в них отсутствует обозначение неизвестного. Ученики вводят их сами. Например: „К числу 5,9 прибавили неизвестное число, получили 11. Найти неизвестное число“; „Число 17 умножили на неизвестное число, получили 204. Чему равно неизвестное число?“ И в этом случае составляются уравнения, одновременно с чтением задачи.

Постепенно вводятся задачи, в которых требуется узнать, какой компонент является неизвестным, ввести обозначение его буквой и составить уравнение: „Какое число следует прибавить к $1\frac{1}{2}$, чтобы получить $5\frac{3}{4}$?“; „На какое число надо разделить 15, чтобы получить 2,5?“ Ученики выслушивают задачу, уясняют, что̀ обозначить буквой, составляют уравнение и решают его, в зависимости от числового материала, устно или письменно.

Приведенные виды упражнений могут найти место и в 5-м классе при изучении арифметики.

Наконец, решаются простые задачи с конкретным содержанием. Например: „Цена кисточки 24 коп. Сколько купили кисточек, если за них заплатили 96 коп.?“ „Площадь прямоугольника 156 кв. см, одна сторона его равна 12 см. Найти длину другой стороны“. Такие задачи могут решаться и без применения уравнений. Однако нужно требовать, чтобы учащиеся составляли уравнения, при этом для обозначения неизвестного рекомендуется применять различные буквы. Решение задач новым методом продолжается и на последующих уроках*.

---

* Последовательность упражнений в составлении уравнений взята из брошюры А. Н. Барсукова „Первые уроки алгебры в VI классе“, Учпедгиз 1951.

3. Введение обозначений буквой любого известного числа или любого числа некоторой совокупности должно опираться на конкретный арифметический материал. Нет надобности исходить из задач, достаточно использовать примеры. Занятия ведутся так, чтобы любой ученик всегда ясно представлял, что под буквами разумеются числа.

Учитель предупреждает, что нужно будет записывать выражения для сумм чисел; вычислять суммы не требуется. Он предлагает написать выражения для следующих сумм:

1) 67 и 39; 2) $2\frac{3}{5}$ и $7\frac{5}{9}$; 3) 0 и 11,9.

Написать выражение для суммы двух чисел: 4) a и 9. Под a можно разуметь любое известное нам число, например: 18; 0; 0,75.

Написать выражение суммы чисел: 5) 7 и b.

Назвать несколько чисел, которые можно подставить в выражение вместо b.

Записать суммы чисел: 6) a и b; 7) x и y.

Какие числа можно подставить вместо x и y?

Раньше мы видели, что буквы применяются для обозначения неизвестных. Ими же можно обозначать любые числа из некоторой их совокупности.

Восстановив в памяти учащихся переместительный закон сложения и его формулировку, преподаватель показывает, как записать его кратко с помощью букв. Если обозначить первое слагаемое через a, второе — через b, то получим:

$$a+b=b+a. \qquad (1)$$

Предлагается проверить равенство (1), когда 1) $a=31,4$; $b=9,85$; 2) $a=4\frac{5}{12}$; $b=\frac{7}{8}$; 3) $a=0$, $b=7$.

Обозначение чисел буквами дает возможность очень кратко записывать законы арифметических действий.

Таким же способом знакомятся с записью суммы трех слагаемых. Вспоминается сочетательный закон сложения и его формулировка. Показывается, что этот закон можно записать так:

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad (2)$$

Равенство (2) проверяется при заданных значениях a, b и c.

Теперь уместно перейти к задачам, при решении которых получаются буквенные выражения. Условившись ответы записывать в виде числовых выражений, приступают к решению следующих задач:

1) В классе 19 мальчиков и 18 девочек. Сколько учащихся в классе?

2) В классе a мальчиков и 18 девочек. Сколько учащихся в классе? Какие значения может принимать a? (a не может быть дробным числом).

3) В школе a мальчиков и b девочек. Сколько учащихся в школе? Какие значения могут принимать a и b?

4) Первое слагаемое равно 47, второе — больше первого на 9. Написать выражение для суммы.

5) Первое слагаемое равно m, второе — больше первого на n. Найти сумму. Назовите несколько чисел, какие можно подставить вместо m и n.

4. Так как на множестве чисел, известных учащимся, действие вычитания не всегда выполнимо, то при записях разностей следует обратить особое внимание на допустимые значения уменьшаемого и вычитаемого.

Учитель предлагает записать следующие разности: 100 и 77; 0,95 и 0,5; 9 и 0; и затем переходит к упражнениям.

Запишите разность между числом a и числом 8. Приведите несколько чисел, которыми можно заменить a. Можно ли вместо a поставить 5? Какие числовые значения может принимать a, чтобы вычитание было выполнимо? ($a \geqslant 8$).

Запишите разность между числом 90 и числом b. Какие значения может принимать b, чтобы вычитание было выполнимо? ($b < 90$).

Запишите разность между числом c и числом d. Придумайте несколько пар чисел, которые можно подставить вместо c и d. Какие значения могут принимать c и d, чтобы вычитание было выполнимо? ($c \geqslant d$).

Мальчик имел a руб. На покупку учебников он истратил b руб. Сколько денег осталось у мальчика? Если a равно 15, то какие значения может принимать b?

В классе m пионеров. Сколько учащихся не состоит в пионерской организации, если всего в классе n человек? Назовите несколько пар чисел, которые можно подставить вместо m и n. Какие числовые значения могут принимать m и n?

Такими же путями вводится буквенная запись произведения двух и трех сомножителей. При выполнении упражнений обращается внимание на два факта. Сомножитель, записанный цифрами, принято ставить на первом месте. Это достигается применением переместительного закона умножения. Знак умножения между числовым и буквенным, а также между буквенными сомножителями принято опускать.

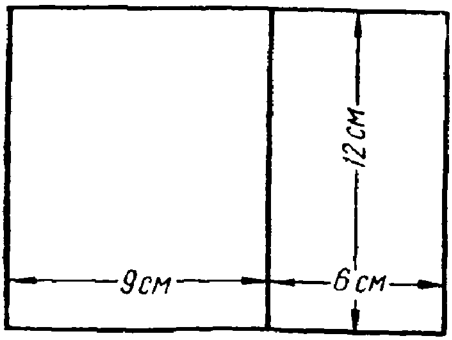
Буквенное выражение произведения используется для краткой записи переместительного и сочетательного законов умножения:

$$ab=ba \qquad (3)$$

$$a(bc)=(ab)c \qquad (4)$$

Равенства (3) и (4) проверяются для заданных чисел.

Особого внимания заслуживает распределительный закон умножения относительного сложения. Напомнить его можно путем двух различных решений одной и той же задачи. Пусть требуется решить задачу: „Основания двух прямоугольников равны 9 см и 6 см. Высота у них общая и равна 12 см. Найти выражение суммы площадей этих прямоугольников“ (черт. 1).



Черт. 1.

1-е решение

1) $9+6$ (см)

2) $(9+6)\cdot 12$ (кв. см)

2-е решение

1) $9\cdot 12$ (кв. см)

2) $6\cdot 12$ (кв. см)

3) $9\cdot 12+6\cdot 12$ (кв. см)

Итак, отвлекаясь от наименований, получаем:

$$(9+6)\cdot 12=9\cdot 12+6\cdot 12$$

Вспоминается формулировка распределительного закона, а затем решается двумя способами следующая задача: „Основания двух прямоугольников равны a и b. Общая их высота равна c. Найти сумму площадей этих прямоугольников".

Решение задачи двумя способами дает возможность записать распределительный закон так:

$$(a+b)c=ac+bc \tag{5}$$

Равенство проверяется для различных значений букв.

При буквенном изображении частного двух чисел обращается внимание на то, что частное можно записать двумя способами: $a:b$ и $\frac{a}{b}$ и что делитель не может принимать значение, равное 0.

5. Описанные подходы к введению обозначений буквой любого числа некоторого множества, определенного смыслом задачи, отличаются наибольшей доступностью и простотой. Их можно использовать и в 5-м классе, несмотря на то, что ни программа по арифметике этого класса*, ни объяснительная записка к ней не содержат указаний, что буквенные обозначения следует вводить в 5-м классе. Однако принятые в школе учебник и задачник по арифметике побуждают учителя к тому, чтобы сделать с учащимися первые шаги в буквенное исчисление. И это целесообразно. Буквенные символы используются в курсе арифметики для краткой записи некоторых правил и законов арифметических действий. Если введение буквенных символов распределить во времени на более длительный срок, то это дает возможность лучше усвоить сущность вопроса и приводит к лучшим итогам в обучении.

Если буквенные обозначения вводятся в 5-м классе, то нет надобности приучать детей опускать знак умножения между буквенными или числовым и буквенным сомножителями; можно допускать запись произведения, когда числовой множитель не поставлен на первое место.

---

* Программы средней школы на 1957-1958 учебный год. Математика, Учпедгиз 1957.

Ознакомление с заменой чисел буквами требует немного времени — около 2—3 уроков — и с этой точки зрения не может встретить возражений. Но целесообразнее это ознакомление распределить на несколько уроков, отводя ему на каждом 10—12 минут. Опыт свидетельствует, что этот материал вызывает большую заинтересованность школьников, позволяет делать самое содержание уроков арифметики более живым и насыщенным.

В какой же период изучения арифметики целесообразнее ввести буквенную символику? Лучше всего это сделать при повторении и систематизации пройденного за первые четыре класса. В этой теме буквенные символы найдут естественное применение для записи законов арифметических действий. К сожалению, первая тема программы 5-го класса перегружена, поэтому введение буквенной символики можно сделать позднее, но до изучения действий над обыкновенными дробями. Буквенная запись законов действий будет показана при изучении дробных чисел.

6. В курсе арифметики учащиеся знакомятся с понятием „арифметическое выражение“ или „числовое выражение“. На первых уроках алгебры это понятие расширяется: вводится понятие „алгебраическое выражение“. Алгебраическим выражением можно назвать всякую запись чисел и действий над ними. Например, $x+7$, $ab+c$ — алгебраические выражения. Арифметическое выражение — частный случай алгебраического. Нет надобности давать определение понятия „алгебраическое выражение“. Учащиеся знакомятся с этим понятием при решении задач, пользуются им в следующих своих занятиях, и таким путем термин включается в активный словарный фонд каждого шестиклассника.

Числовым значением алгебраического выражения называется то число, которое получится, если в выражение вместо букв подставить данные числа и выполнить действия над ними в установленном порядке. Термин „числовое значение“ или просто „значение“ выражения надо предпочесть распространенному в наши дни термину „числовая величина“, потому что при изучении функций принято пользоваться термином „значение“ функции, а каждое алгебраическое выражение есть частный случай функции.

С первых уроков алгебры уделяется большое внимание нахождению числовых значений алгебраических выражений. Это позволяет помнить, что в выражении под буквами разумеются числа того или иного множества. Значит, упражнения по определению числовых значений алгебраических выражений предохраняют от формального пользования буквами. Буквам рекомендуется давать несколько значений. Это способствует подготовке взгляда на алгебраическое выражение как на один из видов функциональной зависимости. Заданные значения букв и найденные числовые значения выражения рекомендуется фиксировать в форме таблиц. Вместе с тем широко практикуются устные вычисления значений. Это позволяет увеличить число решаемых упражнений и способствует развитию навыков в устном счете. Пусть, например, требуется найти числовые значения выражения $12x+19$ при $x=0$, $\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 9, 12, 18, 20. Вычисления дети выполняют устно, а результаты фиксируют в таблице:

x	0	$\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	9	12	18	20	
$12x+19$	19	25	52	127	163	235	259	

При определении числовых значений выражения $ab+3a$ считают устно и заполняют таблицу:

a	0	2	4	6	8	10
b	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
$ab+3a$						

Чтобы подчеркнуть мысль, что в алгебраическом выражении под буквами разумеются числа и что в зависимости от их значений меняется значение выражения, полезны упражнения следующего вида:

а) Всегда ли a меньше $a+5$?

б) Всегда ли $b+4$ больше 4?

в) Может ли $a+b$ быть равно b?

г) Всегда ли x меньше $3x$?

д) Всегда ли ab больше a?

Подобные упражнения распределяются на многие уроки, отводимые изучению алгебраических выражений, и постепенно, с развитием курса алгебры, усложняются. Они удачно подобраны и хорошо распределены в сборнике алгебраических задач*.

7. Понятие „коэффициент“ имеет несколько значений: это — числовой множитель, входящий в буквенное выражение, например в выражении $4ax^2$ коэффициент равен 4; это — известный множитель при какой-либо степени неизвестного, например в уравнении $4ax^2+bx=0$ относительно x коэффициентами являются $4a$ и b; это — постоянный множитель при переменном, например в выражениях $2\pi r$, πr^2 коэффициентами соответственно будут 2π и π. В уравнении $ax+b=0$ с неизвестным x коэффициентом первого члена служит a. Если же за неизвестное принять a, то коэффициентом первого члена будет x. Значит, коэффициент — понятие относительное.

Впервые в 6-м классе учащиеся знакомятся с коэффициентом как с рациональным числовым множителем буквенного выражения.

Прежде всего вспоминают, что́ понимается под умножением на целое число. Сумма одинаковых слагаемых приводит к умножению на целое число, например,

$$5+5+5+5=5\quad 4,\quad \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot 3.$$

Смысл умножения на целое число сохраняется, когда слагаемое обозначено буквой:

$$a+a+a+a=a\cdot 4=4\cdot a=4a,$$

где a — любое известное учащимся число.

---

* П. А. Ларичев, Сборник задач по алгебре, ч. I, Учпедгиз 1955.

Целый числовой сомножитель буквенного выражения называют коэффициентом; его принято ставить на первом месте. Это всегда можно сделать, пользуясь переместительным законом умножения. Далее следуют обычные упражнения, цель которых выработать ясное представление о целом коэффициенте.

В дальнейшем необходимо расширить понятие о целом коэффициенте, включив в него и 1. Число a можно записать так: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1a$. В этом случае единицу также называют коэффициентом. Значит, выражение a имеет коэффициент 1. Коэффициент 1 не пишется.

Чтобы сосредоточить внимание школьников на этом коэффициенте, можно предложить им упражнения:

а) Назвать коэффициенты в выражениях:

$$4x, \quad b, \quad 2xy, \quad c.$$

б) Упростить записи следующих выражений:

$$1 \cdot a + 2; \quad 1 \cdot ab + 1; \quad 5 + 1 \cdot x.$$

Далее вспоминается, что́ разумеется под умножением на дробь. Умножить на дробь—значит найти дробь числа.

Умножить a на $\frac{3}{4}$ —значит найти $\frac{3}{4}$ числа a:

$$a \cdot \frac{3}{4} = \frac{a \cdot 3}{4} = \frac{3a}{4}.$$

С другой стороны, $a \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot a = \frac{3}{4}a$. Значит: $\frac{3}{4}a = \frac{3a}{4}$. Сомножитель $\frac{3}{4}$ —коэффициент.

Дробный числовой сомножитель буквенного выражения также называют коэффициентом и ставят в произведении на первом месте. Далее следуют обычные упражнения, цель которых дать ясное понимание дробного коэффициента.

В 5-м классе дети познакомились с вычислением длины окружности, площади круга и объема цилиндра. Было установлено, что длина окружности приближенно в 3,14 раза больше своего диаметра. Отношение длины окружности к своему диаметру принято обозначать греческой буквой π. Если радиус обозначим через r, то длина окружности равна $2r \cdot \pi$ или $2\pi r$. В последнем выражении коэффициентом называют 2π. Значит, постоянный сомножитель также называют коэффициентом.

Уместно обратить внимание учеников и на то, что в этом случае мы имеем дело с буквенным обозначением, заменяющим определенное известное число.

В дальнейшем понятие о коэффициенте будет расширяться.

8. Впервые о понятии степени с натуральным показателем школьники узнают в 5-м классе в главе о делимости чисел. В дальнейшем курсе арифметики это понятие не находит применения, а потому в 6-м классе надо подойти к нему, как к мало известному. Понятие о степени играет значительную роль в курсе алгебры. Поэтому необходимо достигнуть того, чтобы ученики научились четко различать понятия: основание степени, показатель степени, степень. Поверхностное изучение понятия о степени, недостаточное внимание к указанным терминам приводит к путаному использованию их, затрудняет в дальнейшем запоминание некоторых правил, порождает ошибки.

Лучше всего ознакомление с понятием степени осуществить на том материале, который известен из курса арифметики. Разлагая на простые множители числа 121, 125, 81, получают: $121 = 11 \cdot 11 = 11^2$, $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$. Можно поставить и такой вопрос: при разложении каких чисел получились выражения: 7^2, 3^3, 2^4?

Опираясь на эти примеры, вводим понятия: основание степени, показатель степени, степень, и даем следующее определение: возвести число в степень — значит взять его сомножителем столько раз, сколько единиц в показателе степени. Это определение заслуживает предпочтения перед другими: оно содержит в себе и правило вычисления степени.

Иногда наблюдается ошибка: вместо „взять сомножителем", говорят — „умножить само на себя". Эта ошибка искажает понятие о степени.

Если сторона квадрата равна a, то площадь его равна a^2. Поэтому вторую степень числа a читают „a квадрат". Если ребро куба равно a, то объем куба равен a^3. В силу этого третью степень числа a читают „a куб".

Приведенное определение степени пригодно для любого натурального показателя $n \geqslant 2$. Оно не применимо, когда показатель степени равен 1. Понятие о первой степени числа вводится так: целесообразно под a^1 понимать само число a, т. е. $a^1 = a$.

Чтобы усвоить понятие о степени и о сопутствующих ей элементах, полезно проделать много устных и письменных упражнений. Среди письменных упражнений найдут место примеры с более сложным числовым материалом.

Упражнения на определение числовых значений алгебраических выражений становятся разнообразнее и богаче по содержанию. Они также решаются устно и письменно, при этом составляются таблицы значений выражений.

9. Заканчивая изучение понятия о степени, можно произвести краткий обзор всех известных учащимся действий, чтобы вспомнить, какие действия называются прямыми, какие обратными, как они распределяются по ступеням. Возведение в степень—действие третьей ступени. Итоги беседы могут найти отражение в таблице:

Действия	1-й ступени	2-й ступени	3-й ступени
Прямые	Сложение	Умножение	Возведение в степень
Обратные	Вычитание	Деление	

Классификация действий по ступеням является введением в вопрос о порядке действий. Вспоминаются и расширяются правила порядка действий.

1) В выражении (без скобок), где имеются действия только одной ступени, вычисления ведутся в порядке записи действий.

2) В выражении (без скобок), где имеются действия различных ступеней, сначала выполняется возведение в степень, затем действия второй и, наконец, первой ступени.

3) В выражении со скобками сначала находят результаты действий над числами, записанными в малых скобках, затем — в квадратных, и т. д.

4) В выражении, где имеется деление, обозначенное чертою, сначала вычисляется то, что стоит над чертою и под чертою, затем выполняется деление числителя на знаменатель.

Правила порядка действий, их использование в решении примеров должны быть прочно усвоены каждым учащимся. Это достигается путем решения примеров с многократным попутным истолкованием и повторением правил.

Первая глава курса алгебры заканчивается решением уравнений по зависимости между компонентами действий и их результатами и решением задач с помощью составления уравнений. Повторив решение простейших уравнений, о которых шла речь ранее, можно перейти к решению более сложных уравнений, для которых требуется выполнить два действия. Опыт свидетельствует, что такие уравнения посильны учащимся.

Требуется решить уравнение: $3x - 2 = 19$.

Ученик рассуждает примерно так: разность двух чисел и вычитаемое даны, уменьшаемое неизвестно; чтобы найти уменьшаемое, надо сложить разность и вычитаемое; получим: $3x = 21$; теперь известно произведение двух сомножителей и один из них; чтобы найти неизвестный сомножитель, надо произведение разделить на другой сомножитель; получим: $x = 7$. Полученный корень проверяется по уравнению.

Уравнения, решение которых требует трех действий, доступны хорошим учащимся. Такие уравнения можно использовать при индивидуальной работе с ними.

Школьники упражняются в решении усложненных задач:

а) Требуется спаять кольцо из медной полосы с внутренним диаметром 168 мм. Какой длины отрезать полосу, если на место спайки надо затратить 2 мм? ($\pi \approx 3\frac{1}{7}$).

б) Из медной полосы длиною 1324 мм и толщиною 3 мм предполагается спаять кольцо. На место спайки надо затратить 4 мм. Вычислить внутренний диаметр кольца ($\pi \approx 3\frac{1}{7}$).

в) Токарь по металлу при 8-часовом рабочем дне изготовлял по 112 деталей в день. Когда перешли на 7-часовой рабочий день, он, улучшив работу, начал изготовлять также по 112 деталей в день. На сколько процентов повысилась производительность его труда?

Очерк третий

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

1. В каждой науке применяется значительное количество терминов для обозначения специальных свойственных ей понятий и слов, выражающих отношения между ними. В некоторых науках широко применяются символические обозначения понятий и отношений между ними. А это приводит к тому, что язык, которым излагаются достижения той или иной науки, отличается своеобразием. Иногда особенности языка и символики настолько значительны, что неспециалисту в какой-либо научной области трудно читать книгу из этой отрасли знания, трудно усваивать лекции.

С таким же явлением встречаемся и в преподавании школьного курса математики. Этот курс, представляющий основы некоторых математических дисциплин, также отличается особенностями языка. Язык школьного курса алгебры содержит для учащихся много новых терминов, обозначающих понятия (например, коэффициент, степень, уравнение, производная), много новых глаголов для выражения операций (например, возвести, извлечь, логарифмировать, дифференцировать), новые слова для выражения отношений (например, тождественны, равносильны). В этом курсе вводится большое количество символов [например, a^2, $\sqrt{в}$, $\lg c$, $y=f(x)$], с которыми связаны понятия или отношения между ними, а значит, и термины. Все это накладывает значительный отпечаток на изложение содержания курса алгебры в школьных учебниках.

Очень трудно приходится иногда молодому преподавателю алгебры, особенно в 6-х и 7-х классах. Он замечает, что многие учащиеся далеко не совершенно усваивают материал, с трудом запоминают формулировки предложений, знания у них непрочны, при решении упражнений они часто допускают ошибки. Каковы же причины таких неудач? Что мешает глубокому и прочному усвоению курса?

Одной из существенных причин таких неудач является то, что ученики 6-го и 7-го классов не овладевают особенностями речи преподавателя математики и слога своих учебников и задачников по алгебре. Когда им диктуют: „сумма квадратов двух чисел", „утроенное произведение первого числа на второе", многие шестиклассники не вкладывают должного содержания в эти своеобразные и мало привычные для них выражения. Они недопонимают символических записей, подобных следующим. $a^3 + b^3$, $(a + b)^3$, $2a^3b^3$, и вкладывают в них искаженный смысл. Между содержанием речи преподавателя и пониманием ее учащимися получается разрыв: учитель пишет и говорит, полагая, что его понимают, а многие школьники не понимают написанного и сказанного, ибо не владеют в должной мере тем языковым материалом, который необходим для усвоения курса. Следствия этого — понижение внимания, отсутствие интереса и ослабление дисциплины не уроках.

Обычно учитель диктует алгебраические выражения так: „a куб плюс b куб", „x в четвертой степени минус три x в пятой степени". Когда ученику приходится прочитать выражение, то он, естественно, читает так, как диктует преподаватель. Однако формулировки значительного количества алгебраических предложений содержат и такие выражения: „сумма кубов двух чисел", „куб суммы двух чисел", „неполный квадрат разности двух чисел". Далеко не всякий учитель применяет такие выражения в первое полугодие преподавания алгебры. В силу этого они не усваиваются, не запоминаются, не входят в словарный фонд каждого шестиклассника, что является одной из существенных причин, мешающих плодотворному усвоению алгебры.

Поэтому многие учащиеся испытывают затруднения в тождественных преобразованиях многочленов; например: слабо усваивают формулы сокращенного умножения и деления и их словесные формулировки; часто допускают ошибки в применении правил к решению примеров; затрудняются в разложении на множители. В результате этого страдает изучение тождественных преобразований алгебраических дробей, решение дробных уравнений и уравнений с параметрами. Неприятные последствия дают себя знать позднее—при изучении квадратных уравнений и при решении уравнений, сводящихся к квадратным.

В свете учения академика И. П. Павлова о высшей нервной деятельности происходит следующее: в 6-м классе, особенно в первое полугодие, некоторые учителя математики почти или совсем не обращают внимания на обогащение и развитие второй сигнальной системы учащихся, не вырабатывают новых, необходимых для дальнейшего обучения алгебре, условных рефлексов. Это приводит к тому, что такие словесные сигналы, как, например, „разность квадратов двух чисел“, „квадрат разности двух чисел“, не вызывают правильной реакции коры больших полушарий головного мозга у многих учащихся. Ложные реакции нередко вызывают также символические сигналы, как, например, $(a-b)^3$, a^3-b^3; ученики не могут их правильно прочитать, искажают и путают смысл. Непонимание необходимости обогатить вторую сигнальную систему каждого школьника новыми сигналами или пренебрежение работой над этим обогащением создает для многих учащихся трудности при изучении алгебры.

2. Чтобы избежать описанных недостатков в обучении, преподаватель должен прежде всего строго выполнять одно общеметодическое правило: каждое новое понятие следует изучать особенно тщательно, добиваясь, чтобы оно глубоко было усвоено каждым учеником. Соблюдение этого правила особенно важно в 6—7-м классах, но и в последующих о нем нельзя забывать. Нужно добиться, чтобы понятие, связанное с термином, а иногда и с символом, сделалось прочным достоянием каждого ученика, чтобы каждый ученик правильно представлял себе содержание понятия, т. е. совокупность тех необходимых

существенных признаков, которые свойственны понятию, и объем понятия, т. е. точно знал, в каких случаях оно применимо, а в каких нет.*

Большую роль в нашей практике играют „алгебраические диктанты", с помощью которых начальные алгебраические термины, специальные выражения и символы становятся такими сигналами, на которые каждый ученик реагирует правильно и быстро. Основные цели алгебраических диктантов заключаются в том, чтобы обогатить вторую сигнальную систему учащихся настолько, насколько необходимо для основательного изучения школьного курса алгебры, развить у них новую серию условных рефлексов, полезных для этого изучения, обогатить их речь новыми для них алгебраическими терминами и специальными выражениями, ввести эти термины и выражения в их активный словарный запас.

Алгебраические диктанты целесообразно начинать уже при изучении первой главы курса алгебры, после того как будут введены понятия о коэффициенте и степени. Они проводятся примерно в течение трех месяцев на уроках алгебры по 6—8 минут, пока учащиеся не овладеют необходимыми навыками правильно записывать продиктованные выражения и безупречно читать их. Место диктанта в плане урока может быть различное: с него можно начать урок, им можно закончить его; диктант можно провести после проверки выполнения учащимися домашней работы, а если материал диктанта непосредственно связан с темой урока, то он найдет место и в середине урока.

Опишем несколько таких диктантов, располагая их по возрастающей трудности.

Учитель записывает на доске число a.

— Какие числовые значения может принимать a?

— a может принимать любые значения из множества известных нам чисел. Буду диктовать алгебраические выражения, а вы записывайте их в тетрадях. К доске будут выходить ученики этого ряда.

---

* В. В. Репьев, Очерки по общей методике математики, Горьковское книжное издательство 1955. Смотрите очерк „Методика изучения понятий".

(Указывает.) Выходить к доске без вызова по порядку, начиная с первой парты.

— Пишите. Квадрат числа a.

— Удвоенное число a.

— Куб данного числа.

— Утроенное данное число.

— Удвоенный квадрат числа a.

— Частное от деления данного числа на 4.

— Удвоенный куб числа a.

На доске должно быть:

Число a.

1) a^2,	4) $3a$,	6) $\frac{a}{4}$,
2) $2a$,	5) $2a^2$,	
3) a^3,		7) $2a^3$.

Далее преподаватель показывает одно из зафиксированных выражений и предлагает учащимся прочитать его примерно так, как оно было продиктовано. После опроса одного-двух учеников, он показывает другое выражение. Если чтение какого-либо выражения затрудняет некоторых учеников, то к нему возвращаются вновь.

Диктант и последующее чтение записанных выражений проводится бойко, живо. На все это затрачивается около 8 минут.

В содержание диктанта следующего урока включаются те выражения, запись и чтение которых вызвали затруднения в прошлый раз; выражения несколько усложняются.

— На доске—число m. Пишите!

— Утроенный квадрат числа.

— Удвоенный куб числа.

— Сумма квадрата числа с удвоенным этим числом.

— Разность между кубом числа и утроенным данным числом.

— Четвертая степень числа.

— Найдите числовое значение последнего выражения, если $m = 2$, $m = 3$, $m = \frac{1}{2}$.

Затем проводится чтение зафиксированных выражений. Ученики читают примерно так, как диктовал преподаватель.

Постепенно содержание диктантов усложняется по линии увеличения числа букв, входящих в выражения, и, главным образом, по линии усложнения структуры выражений.

Преподаватель записывает на доске:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \text{1-е число} & \text{2-е число} \end{array}$$

и диктует:

— Квадрат суммы двух чисел.

— Сумма квадратов двух чисел.

— Произведение первого числа на второе.

— Произведение суммы двух чисел на первое число.

— Произведение разности между первым и вторым числом на второе число.

— Удвоенное произведение первого числа на второе.

— Квадрат разности двух чисел.

— Разность квадратов этих чисел.

— Найдите числовые значения двух последних выражений, если 1) $a=5$, $b=1$; 2) $a=12$, $b=4$; 3) $a=0{,}5$, $b=0{,}4$.

На одном из последующих уроков учитель записывает на доске:

$$\begin{array}{cc} c & d \\ \text{1-е число} & \text{2-е число} \end{array}$$

и диктует:

— Куб суммы двух чисел.

— Сумма кубов двух чисел.

— Найдите числовые значения этих двух выражений при 1) $c=2$, $d=1$; 2) $c=-3$, $d=1$; 3) $c=1$, $d=\frac{1}{2}$.

— Произведение квадрата первого числа на второе.

— Удвоенное произведение первого числа на квадрат второго.

— Куб разности между первым и вторым числом.

— Разность кубов двух чисел.

В последний период проведения алгебраических диктантов учитель диктует более сложные выражения почленно. Приводим примеры.

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \text{1-е число.} & \text{2-е число.} \end{array}$$

— Буду диктовать почленно. Пишите!

— Квадрат первого числа... плюс утроенное произведение первого числа на второе... минус куб второго числа.

— Куб первого числа... минус произведение первого числа на квадрат второго... плюс удвоенный квадрат второго числа.

— Утроенное произведение квадрата первого числа на второе... плюс утроенное произведение квадратов первого и второго чисел... минус куб суммы двух чисел.

— Куб разности первого и второго числа... плюс произведение суммы двух чисел на их разность... минус квадрат разности двух чисел.

При регулярном и правильном проведении диктантов шестиклассники, как показывает опыт, уже в феврале прекрасно записывают эти сложные выражения и безупречно читают их.

В диктантах уместно использовать и три числа:

a	b	c
1-е число.	2-е число.	3-е число.

— Сумма квадратов трех чисел.

— Квадрат суммы трех чисел.

— Произведение суммы кубов первых двух чисел на сумму квадратов второго и третьего числа.

— Частное от деления суммы кубов трех чисел на удвоенное произведение тех же чисел.

— Частное от деления куба суммы трех чисел на квадрат разности первого и второго числа.

3. Готовясь к изучению формул сокращенного умножения, полезно проводить алгебраические диктанты, когда вместо отдельных чисел, каждое из которых обозначено одной буквой, даются более сложные выражения. Цель таких упражнений заключается в том, чтобы ученики правильно записали под диктовку, и в том, чтобы они научились безошибочно выполнять преобразования и упрощения полученных выражений. В случае надобности можно использовать продиктованные выражения и для тренировки в чтении их; читать следует те выражения, которые записаны под диктовку, а не те, которые получены после упрощения. Поясним это одним примером:

$3a^2$	$4a^3$
1-е выражение.	2-е выражение.

— Пишите:

— Сумма квадратов двух выражений. Упростить записанное.

— Утроенное произведение квадрата первого выражения на второе. Упростить.

— Учетверенное произведение первого выражения на квадрат второго.

— Произведение суммы двух выражений на их разность.

— Разность кубов двух выражений.

Перед изучением формул сокращенного умножения некоторые учителя удачно практикуют такие упражнения: в таблице в первой ее строке записывают два числа, обозначенные буквами, и в символическом изображении те операции, какие надо выполнить над ними, а в двух левых столбцах под числами фиксируют те частные числовые и буквенные значения, которые принимают эти два числа. От учащихся требуется правильно заполнить остальные столбцы.

Вот два примера таких таблиц:

a	b	a^2	ab	$2ab$	b^2
$3x$	2				
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}y$				
m^2	m^3				
$4n^3$	$3n^2$				
$0{,}5n^4$	$0{,}1n^3$				

x	y	x^3	y^3	xy^2	x^2y	x^2y^2
$2a$	1					
3	b^2					
$4a$	a^3					
m^2	m^4					
$\frac{1}{2}n$	n^3					

Упражнения с заполнением таблиц заслуживают внимания. Главное их назначение заключается в том, чтобы научить школьников под a и b, x и y разуметь любые числа и выражения, правильно выполнять над ними те операции, которые входят как составные части в формулы сокращенного умножения. Однако заполнение таких таблиц не может заменить алгебраические диктанты, не помогает уничтожить разрыв между словесным чтением алгебраических выражений и их записью в символах, недостаточно обогащает вторую сигнальную систему каждого ученика.

Формулы: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

можно рассматривать и как формулы сокращенного умножения, и как формулы сокращенного деления. И в том и в другом случаях, приступая к их изучению, необходимо познакомить учащихся со смыслом таких выражений: „неполный квадрат разности двух чисел“, „неполный квадрат суммы двух чисел“. Чтобы учащиеся усвоили эти новые для них алгебраические сигналы, нужно провести соответствующие диктанты.

Разъяснив, какой смысл следует вкладывать в только что приведенные выражения, учитель диктует:

m	n
1-е число.	2-е число.

— Записать: квадрат суммы двух чисел.

— Квадрат суммы двух чисел в развернутой форме.

— Неполный квадрат суммы двух чисел.

— Квадрат разности двух чисел в развернутой форме.

— Неполный квадрат разности двух чисел.

Затем ученики читают записанные выражения.

На следующем уроке аналогичные упражнения повторяются, при этом берутся два других выражения, например: x^3 и $2x$.

4. Уяснив основные цели алгебраических диктантов и методику их организации, преподаватель, пользуясь приведенными примерами, легко может составить достаточное количество упражнений этого вида и включить их в уроки.

Диктанты, проводимые постепенно нарастающими темпами и втягивающие в работу всех учащихся класса, вызывают заинтересованность класса и выполняются охотно, с подъемом.

Умение записывать под диктовку достаточно сложные алгебраические выражения, а также безупречно читать их,—свидетельствует о значительных достижениях ученика, об успешном усвоении курса алгебры в 6-м и 7-м классах. Поэтому учитель может ставить отметки за такие упражнения.

Некоторые преподаватели не решаются применять диктанты в своей практической работе или используют их далеко не достаточно. Это мотивируется тем, что в 6-м классе мало уроков алгебры, а учителю не хочется тратить драгоценное время на диктанты. А ведь они примерно за три месяца займут в общей сложности около четырех уроков. Этот небольшой перерасход учебных часов, приходящийся преимущественно на февраль и март с избытком будет возмещен уже в апреле и мае в 6-м классе при изучении формул сокращенного умножения, а успехи каждого ученика станут значительно лучше.

Прямые и опосредствованные результаты диктантов заключаются в том, что учащиеся легче и прочнее усваивают многие формулировки алгебраических теорем,—в частности, быстро и прекрасно овладевают формулировками теорем о формулах сокращенного умножения и деления и решают примеры, допуская значительно меньшее количество ошибок, легче и глубже усваивают главу о разложении алгебраических выражений на множители, особенно ту ее часть, где разложение опирается на формулы сокращенного умножения и деления. Все это подготовляет лучшее усвоение тождественных преобразований алгебраических дробей, решение уравнений и систем уравнений. Положительное влияние диктантов сказывается и на изучении некоторых тем в старших классах; например, формулы квадрата многочлена, формул решения квадратных уравнений, решения некоторых видов задач путем составления уравнений и систем уравнений.

Чтобы показать, как велико значение алгебраических диктантов, приведем пример. В одной из школ г. Горького учитель давал урок на тему—первая формула сокращенного умножения: $(a+b)^2$. На уроке присутствовали гости—несколько преподавателей математики. Учащиеся легко установили формулу, повторили ее обоснование при других обозначениях чисел, самостоятельно и без ошибок дали словесную формулировку теоремы. Никто ни разу не затруднился и не ошибся. Довольно хорошо формулу применяли к решению примеров.

В процессе методического разбора урока выяснилось, что успешное проведение его обеспечено алгебраическими диктантами.

Этот факт еще раз подчеркивает, как велико влияние диктантов на повышение качества уроков, на повышение знаний, умений и навыков учащихся.

Более 25 лет тому назад автор этой книги начал разъяснение целей и задач алгебраических диктантов. В настоящее время многие учителя успешно применяют их в практической деятельности. Методические положения, развитые в этом очерке, оправданы практикой.

Очерк четвертый

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Мы видели, что пути введения отрицательных чисел в науку тернисты и длительны, что приняты они были только в 17 веке после того, как нашли плодотворное применение в аналитической геометрии. Однако есть сведения, что задолго до введения в математике знаков + и —, являющихся символами для обозначения действий, они употреблялись в торговой практике для обозначения прихода и расхода, прибыли и убытка, избытка и недостатка в весе. Практика породила положительные и отрицательные числа, которые применялись для выражения изменений (роста и уменьшения) конкретных величин. Не целесообразно ли и при введении отрицательных чисел в школе опираться на рассмотрение изменений реальных величин, на изучение их приращений в одном и другом направлениях?

Введение в школе отрицательных чисел—крупный и ответственный шаг к изучению количественных отношений материального мира. В курсе алгебры это первое обобщение понятия числа. Задача учителя состоит в том, чтобы как можно больше облегчить усвоение данного материала. Для этого используются реальные величины и их изменения, от них переходят к отвлеченным понятиям, при рассмотрении некоторых вопросов применяют неполную индукцию, дедуктивному методу отводят меньше места. В 6-м классе никаких строгих теорий рациональных чисел дать нельзя. Вместе с тем изложение должно быть свободным от ошибок научного характера.

Из курса арифметики известны натуральные, дробные числа и число нуль. Натуральные и дробные числа образуют класс положительных чисел. Введение отрицательных чисел дополняет ранее изученное множество чисел. В результате образуется множество рациональных чисел, которые нельзя противопоставлять „арифметическим“ числам, изученным ранее (числам без знака). Числа, знакомые из курса арифметики, составляют подмножество множества рациональных чисел.

Соотношения равенства и неравенства между рациональными числами не могут быть получены путем доказательств. Эти соотношения вводятся путем определений, которые строятся так, чтобы они содержали в себе ранее установленные понятия об этих соотношениях. Конечно при введении определений полезно показать их целесообразность на конкретных примерах и на геометрических образах.

Прямые действия первой и второй ступени над рациональными числами не могут быть логически обоснованы ранее известными предложениями. Сложение и умножение вводятся по определениям, формулируемым так, чтобы они включали в себя ранее известные понятия об этих действиях. Для пояснения целесообразности определений полезно использовать конкретные величины. Вычитание и деление определяются как действия обратные соответственно сложению и умножению.

Прекрасным наглядным пособием для изучения рациональных чисел является числовая ось. В педагогическом процессе она дает возможность истолковать рациональные числа как направленные отрезки, служит хорошим средством при изучении вопроса о неравенстве и равенстве рациональных чисел. На числовой оси демонстрируется целесообразность определений прямых действий.

Издавна в методической и учебной литературе для названия множества рациональных чисел утвердился термин „относительные числа“. Может быть, у него есть преимущества перед другими названиями рассматриваемого класса чисел? Нет. Понятие „относительные числа" имеет бóльший объем, чем понятие „рациональные числа", так как в него входят, кроме рациональных чисел, положительные и отрицательные иррациональные числа. В литературе отмечается, что термин „относительные числа" приводит к противопоставлению чисел этого множества тем числам, с которыми учащиеся имели дело в арифметике. Поэтому в наши дни наметился отход от этого термина. Этот отход нашел официальное признание в программах математики средней школы 1955-56 учебного года.

На смену термину „относительные числа" в литературе и в указанных программах пришел другой: „положительные и отрицательные числа". Но и он страдает некоторыми недостатками: объем нового понятия не совпадает с объемом понятия „рациональные числа". В объем первого из них входят положительные и отрицательные иррациональные числа, но не входит число нуль, которому уделяется внимание при изучении рациональных чисел. Вот почему термин „положительные и отрицательные числа" удачным признать нельзя.

В нашей практической деятельности используется термин „рациональные числа", нашедший признание в науке. Объем его точно соответствует тому множеству чисел, который изучается в 6-м классе. Следовательно, он удобнее, но и против него выдвигаются возражения. Например, С. С. Бронштейн говорит: „Понятие рационального числа возникает после введения иррациональных чисел; и исторически и логически сначала появляется термин иррациональные числа и только после этого, для отличия от вновь введенных чисел, прежде известным присваивается название рациональных".*

Не будем возражать, что исторически это было так. Согласимся с тем, что при обучении полезно учитывать историю развития математики: история дает полезные для методики преподавания указания. Однако самые ретивые сторонники генетического метода не требуют, чтобы обучение повторяло исто-

---

* С. С. Бронштейн, Алгебра и ее преподавание в семилетней школе. Учпедгиз 1946, стр. 43—44.

рический ход развития науки. Почему же необходимо в рассматриваемом случае поступить, как было в истории развития понятия о числе? Кивок на историю математики здесь явно несостоятельный.

Наши видные ученые П. С. Александров, А. Н. Колмогоров* А. Я. Хинчин** высказываются за применение термина „рациональные числа". В. М. Брадис занимает такую же позицию.***

Опыт показывает, что введение понятия „рациональные числа" не вызывает затруднений и недоразумений.****

2. Как более целесообразно ввести в школе понятие об отрицательном числе? В учебной и методической литературе указывается несколько различных путей. За последние 40 лет чаще всего исходят из рассмотрения величин, которые имеют два противоположных направления. Рациональное число появляется на уроках как мера такой величины. Такой способ имеет то преимущество, что естественно устанавливает связь между рациональными числами и точками числовой оси.

В нашей практике применялся другой способ введения отрицательных чисел. В основе его лежит следующее положение: увеличение величины можно выразить положительным числом, уменьшение—отрицательным числом; если величина не растет и не уменьшается, то такое „изменение" ее можно охарактеризовать числом нуль. Другими словами, рациональное число является мерой изменения величины. Такой путь введения отрицательного числа мы находим в „Алгебре" П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. Он имеет несколько важных с педагогической точки зрения особенностей.

Прежде всего, подход к рациональному числу как мере изменения величины представляет методо-

---

* П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Алгебра. Пособие для средних школ, ч. I, Учпедгиз 1940.

** А. Я. Хинчин, Основные понятия математики и математические определения в средней школе, Учпедгиз 1940.

*** В. М. Брадис, Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз 1954.

**** А. Н. Барсуков, Алгебра, ч. I, Учпедгиз 1956, В этом новом учебнике введен термин „рациональные числа".

логический интерес: он требует мыслить величины изменяющимися—или растущими, или убывающими.

Другие приемы введения отрицательных чисел накладывают двоякий смысл на знаки + и — : эти знаки продолжают оставаться знаками сложения и вычитания, вместе с тем они становятся знаками отличия положительных и отрицательных чисел. Двоякий смысл этих знаков вызывает затруднения и в практике обучения часто неумело преодолевается. Введение рационального числа как меры изменения величины снимает вопрос о двояком смысле знаков „плюс“ и „минус“. На самом деле каждое увеличение величины прибавляется к уже имеющемуся значению ее, а каждое ее уменьшение вычитается из уже имеющегося значения. Это важно, ибо упрощает изложение всей главы.

Переход от истолкования рационального числа как меры изменения величины к истолкованию его как меры величины, имеющей два противоположных направления, совершается без особых затруднений. В результате у школьников устанавливается более широкое представление о рациональном числе: каждое такое число можно рассматривать и как меру изменения величины.

Как уже отмечено, в практической деятельности людей положительные и отрицательные числа употребляются для характеристики изменений реальных величин: прирост выражали положительным числом, уменьшение—отрицательным числом. Значит, такой путь введения отрицательного числа оправдывается и с генетической точки зрения.

3. Прежде чем познакомить учащихся с новым видом чисел, следует произвести краткий обзор тех, которые изучались уже в курсе арифметики. Лучше всего применить для этого беседу с классом.

Для счета предметов используются натуральные числа и нуль, показывающий, что считаемых предметов нет. Натуральное число может получиться и в результате измерения величины. Среди натуральных чисел нет самого большого: целых чисел бесконечно много. При измерении величин появляются дробные числа. Последние получаются и при делении, когда оно невыполнимо в целых числах.

В курсе алгебры будем изучать те же числа, но познакомимся и с новыми их видами.

Далее, опираясь на конкретные примеры, нужно обратить внимание школьников на то, что величины могут изменяться. Покажем это на примере.

Вертолет поднялся с аэродрома и набирает все большую высоту. Затем он спускается. Учащиеся сами приводят примеры, показывающие изменяемость величин.

Теперь можно внимательно рассмотреть подъем и спуск стратостата. Стратостат в 6 часов находился на аэродроме, затем начал подниматься. Высота его над землею в разное время суток указана в таблице (смотрите 1-й и 2-й столбцы).*

Время суток в часах	Высота стратостата над землей в километрах	Промежуток времени в часах	Изменение высоты в километрах	Изменение высоты в километрах
6	0	С 6 до 9	Увеличилась на 12	12
9	12	С 9 до 12	Увеличилась на 8	8
12	20	С 12 до 13	Увеличилась на 2	2
13	22	С 13 до 14	Не изменилась	0
14	22	С 14 до 15	Уменьшилась на 2	—2
15	20	С 15 до 18	Уменьшилась на 20	—20
18	0			

Проследим, как в различные промежутки времени изменилась высота стратостата. Эти промежутки указаны в 3-м столбце, а соответствующие изменения высоты—в 4-м столбце. Изменения высоты не могут быть выражены только известными нам числами, приходится привлекать и слова, но из-за этого получаются неудобные записи. Постараемся переделать их в более краткие. Условимся увеличение высоты выражать числами, известными из арифметики; запишем в 5-м столбце: 12, 8, 2. Уменьшение высоты будем обозначать числами со знаком „минус“:—2, 20.

* Пример заимствован из указанной ранее книги П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, но числовой материал упрощен.

С 13 до 14 часов высота не изменилась: в этот промежуток не было ни увеличения, ни уменьшения высоты. Отсутствие изменения высоты обозначим числом 0.

Те числа, которые показывают увеличение, условимся называть положительными. Таким образом, положительные числа—это натуральные и дробные, известные еще из арифметики.

Те числа, которые показывают уменьшение величины, условимся называть отрицательными. Их читают так: „минус два“, „минус двадцать“.

Число нуль не принадлежит ни к положительным, ни к отрицательным.

Итак, положительные числа употребляются для выражения роста величины; отрицательные числа— для выражения уменьшения ее. Нуль ставится тогда, когда никаких изменений величины нет.

Дополнительно можно рассмотреть и другие примеры изменяющихся величин: например, приход и расход, увеличение и уменьшение температуры в течение суток. При этом подчеркиваются те же положения, какие отмечены в примере полета стратостата.

В обозначение отрицательного числа обязательно включается знак „минус“, который говорит о том, что величина уменьшается, убывает, а каждое ее уменьшение вычитается. Уменьшение величины обозначается тем же знаком, что и вычитание.

Так как положительное число выражает увеличение, то часто в обозначение его включается знак „плюс“. Пишут: $+2$, $+12$. Знак „плюс“ напоминает, что величина растет, а прирост ее прибавляется. Таким образом, $+12$ и 12 обозначают одно и то же положительное число.

Каждому положительному числу, выражающему увеличение, соответствует свое отрицательное число, выражающее уменьшение на столько же единиц. С 12 до 13 часов стратостат поднялся на 2 км, с 14 до 15 часов он опустился на 2 км: числу $+2$ соответствует число -2. Числа $+2$ и -2 выражают изменение величины на одно и то же количество единиц, но в противоположных направлениях. Поэтому они называются противоположными.

Отрицательное число, противоположное натуральному числу, называется целым отрицательным числом. Учащиеся приведут примеры целых отрицательных чисел. Отрицательное число, противоположное дробному, называется дробным отрицательным числом. Приводятся примеры.

Итак, нам известны числа: натуральные (целые положительные), дробные положительные (несократимые обыкновенные дроби), целое число нуль, целые отрицательные, дробные отрицательные (несократимые обыкновенные отрицательные дроби). Все эти числа называются рациональными. В дальнейшем узнаем, что есть еще числа, отличные от рациональных.

Теперь буквы a, x и другие обозначают любые рациональные числа, если только на область допустимых значений не наложены ограничения рассматриваемым вопросом.

Если дано любое число a, то противоположное ему число обозначается через $-a$; например, для числа $+5$ противоположное будет $-(+5)=-5$, числу -5 соответствует противоположное $-(-5)=+5$.

4. Итак, рациональное число вошло в сознание учащихся как мера изменения величины.

Предстоит установить несколько иной взгляд на рациональное число как на меру величины, имеющей два направления.

Рассмотрим пример. Число $+8°$ обозначает увеличение любой температуры на $8°$. Значит, оно обозначает увеличение температуры и от $0°$. А в этом случае $+8°$ есть мера температуры. Число $-8°$ обозначает уменьшение любой температуры на $8°$. Значит, число $-8°$ обозначает уменьшение температуры от $0°$. В этом случае $-8°$ — мера температуры. Для лучшего усвоения разобранного учитель ставит вопросы: как можно истолковать числа: $+30°$, $-25°$, $-40°$?

Другой пример. Число $+20$ рублей показывает увеличение на 20 рублей любой суммы денег, а значит, и их увеличение от 0, когда нет наличных денег. В последнем случае $+20$ рублей выражает все наличные деньги. Число -10 рублей показывает уменьшение любой суммы на 10 рублей, а значит, и их уменьшение от 0. А в последнем случае -10 рублей — это долг в 10 рублей.

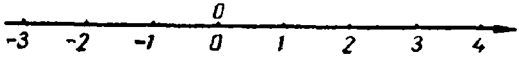
Учащиеся должны сами решить: как можно истолковать такие числа: $+100$ руб., -50 руб., 70 руб.?

В итоге отмечаем, что рациональное число можно понимать как меру величины, имеющей два противоположных направления.

При изучении арифметики школьники познакомились с числовым лучом*. Вспоминаем, как было установлено соответствие между числами и отрезками (точками) на этом луче (на числовом луче расположены положительные числа и нуль).

Нельзя ли соответствие между положительными числами и точками луча распространить на все рациональные числа?

Отметим на прямой точку O. Назовем ее начальной точкой (черт. 2). Положительное направление



Черт. 2.

условимся указывать стрелкой. Выберем отрезок, например длиною в 1 см, который примем за единицу (единичный отрезок). Отложим от начальной точки единичный отрезок 1, 2, 3 раза и т. д. и концы отметим соответствующими числами. Теперь отложим от начальной точки в противоположном направлении единичный отрезок 1, 2, 3 раза и т. д. и отметим концы их соответственно числами: -1, -2, -3 и т. д. Числа, записанные вдоль оси, указывают расположение соответствующих точек относительно начальной точки; например, 5 показывает, что соответствующая точка находится вправо от точки O на расстоянии 5 единиц; -3 показывает, что точка лежит на расстоянии трех единиц влево от точки O. Против точки O нужно поставить число нуль. Можно предложить вниманию учащихся примеры: где расположатся точки на прямой, соответствующие следующим числам: $-\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; $-3\frac{3}{4}$?

---

* С. А. Пономарев и Н. И. Сырнев, Сборник задач и упражнений по арифметике, Учпедгиз 1955, стр. 49.

Прямую, на которой указана начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют числовой осью.

Числовая ось играет важную роль в математике, имеет большое значение при обучении и, в частности, при изучении рациональных чисел. Поэтому во время первого знакомства необходимо уделить ей серьезное внимание и с этой целью выполнить достаточное количество упражнений. В первую очередь надо научить детей безошибочно отмечать на числовой оси точки, соответствующие указанным числам. Учитель должен помнить, что между множеством рациональных чисел и множеством точек числовой оси нет взаимнооднозначного соответствия, что не каждой точке оси соответствует рациональное число.

Среди упражнений находят место и такие: а) дается число, требуется назвать противоположное ему и отметить на оси точки, соответствующие этим числам; б) величина измеряется числом a, затем она изменилась на b единиц; с помощью числовой оси выяснить размеры величины ($a = 10$, $b = 3$; $a = 12$, $b = -3$; $a = -5$, $b = 2$). Упражнения последнего вида подготовляют переход к сложению рациональных чисел.

5. Как ввести понятие об абсолютном значении числа?

В цехе завода изготавливаются металлические стержни длиной в 1000 мм; при этом допустимо отклонение от заданной длины, не превышающее 2 мм, т. е. стержень считается пригодным, если его длина короче нормы не более 2 мм и длиннее нормы не более 2 мм. В этом случае не интересуются, будет ли отклонение от нормы положительное или отрицательное, а интересуются только численным значением допустимого отклонения, которое можем считать положительным, не превышающим 2 мм. В этом случае говорят: абсолютным значением числа -2 является противоположное ему число $+2$, это записывают так: $|-2| = +2$; абсолютным значением числа $+2$ является это же самое число; записывают так: $|+2| = +2$.

Когда рассматривают величины, имеющие два противоположных направления, и не обращают внимания на эти направления, то вводят понятие об абсолютном значении числа.

Абсолютным значением положительного числа называют это же число. Абсолютным значением отрицательного числа называют противоположное ему положительное число. Абсолютным значением числа 0 считают число 0.

Решаются упражнения. Среди них найдут место и такие: определить x, если $|x|=7$, $|x|=+9$, $|x|=0$.

Числовая ось и понятие „абсолютное значение" используются для введения понятий равенства и неравенства рациональных чисел.

Рассматривая положительную полуось при обычном расположении числовой оси, легко заметить, что если точка, соответствующая первому числу, лежит вправо от точки, соответствующей второму числу, то первое число больше второго; если точка одного числа лежит влево от точки другого числа, то первое число меньше второго.

Верно и обратное: если первое число больше второго, то точка первого числа лежит вправо от точки второго числа; если первое число меньше второго, то точка первого числа лежит влево от точки второго числа.

На положительной полуоси точка, соответствующая 0, лежит влево от точек, соответствующих положительным числам. Нуль меньше любого положительного числа и обратно: любое положительное число больше нуля.

Одной и той же точке положительной полуоси соответствуют равные числа.

Представления детей о соотношениях „больше", „меньше" и „равно", полученные из курса арифметики, находятся в полном согласии с только что изложенным.

Распространим подмеченную нами связь между расположением точек на положительной полуоси и величиной соответствующих чисел на всю числовую ось.

Точки, соответствующие отрицательным числам, лежат влево от точки, соответствующей нулю· любое отрицательное число меньше нуля, а нуль больше любого отрицательного числа.

Точка, соответствующая положительному числу, лежит вправо от точки, соответствующей отрицательному числу; любое положительное число больше любого отрицательного и обратно: любое отрицательное меньше любого положительного числа.

Рассмотрим расположение точек, соответствующих двум отрицательным числам; например, -7 и -3. Точка первого числа лежит влево от точки второго числа: $-7 < -3$ и $-3 > -7$. Но абсолютное значение -7 больше абсолютного значения -3: $|-7| > |-3|$. Из двух отрицательных чисел то меньше, абсолютное значение которого больше, и то больше, абсолютное значение которого меньше.

Если рациональному числу a соответствует точка C и рациональному числу b соответствует та же точка C, то $a = b$; оба числа выражают одно и то же расположение точки C по отношению начальной точки.

Таким образом, числовая ось является хорошим средством, позволяющим дать соотношениям равенства и неравенства наглядное истолкование.

Благодаря использованию числовой оси множество рациональных чисел предстало перед учащимися как упорядоченное множество.

6. Правило сложения рациональных чисел нельзя получить как логическое следствие ранее установленных предложений арифметики и алгебры. Оно *вводится по определению*. Конкретные примеры и их истолкование, которые применяются при рассмотрении действий сложения, предназначены только для того, чтобы показать с точки зрения практики целесообразность вводимых определений. Эти истолкования ни в коем случае не следует выдавать за доказательства.

В нашем опыте использовались два различных подхода к введению определения сложения.

В основе *первого* лежит представление о рациональном числе как мере изменения величины.

Рассмотрим задачу: „Вертолет парил над аэродромом на некоторой высоте. Затем высота вертолета изменилась на a м, а потом еще на b м. На сколько изменилась высота вертолета?"

Пусть $a = 500$ м и $b = 300$ м (черт. 3*а*).

Высота вертолета первый раз изменилась на 500 м; значит, она увеличилась на 500 м. Второй раз высота изменилась на 300 м, т. е. увеличилась еще на 300 м.

Общее изменение высоты вертолета выразится так: $500+300=800$ (м) или $(+500)+(+300)=+800$ (м).

В этом случае имеем сложение положительных чисел; оно выполняется по правилам арифметики.

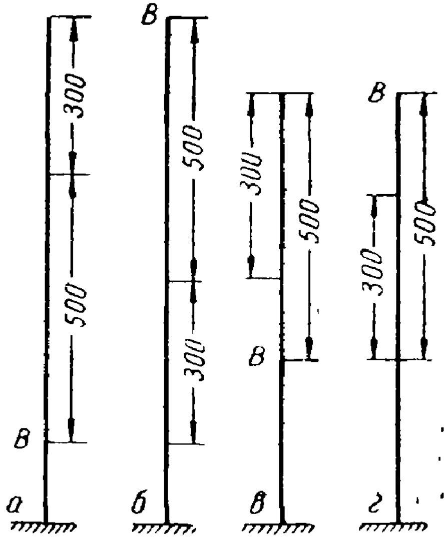
Условимся решать задачу сложением при любых значениях a и b.

Пусть $a=-500$ м и $b=-300$ м (черт. 3*б*).

Первоначально высота изменилась на -500 м, т. е. уменьшилась на 500 м. Затем изменилась на -300 м, т. е. еще уменьшилась на 300 м. В итоге высота уменьшилась на 800 м, т. е. изменилась на -800 м. Получаем: $(-500)+(-300)=-800$ (м).

Число 800 — сумма абсолютных значений слагаемых.

Чтобы найти сумму двух отрицательных чисел, следует сложить их абсолютные значения и перед полученным числом поставить знак минус.



Черт. 3.

Эти два случая сложения можно объединить в одном правиле: чтобы найти сумму двух чисел с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные значения и перед полученным результатом поставить общий знак слагаемых.

Пусть $a=+500$ м, $b=-300$ м (черт. 3*в*).

Высота изменилась на $+500$ м, т. е. увеличилась на 500 м, далее изменилась на -300 м, т. е. уменьшилась на 300 м. Общее изменение высоты равно $+200$ м. Имеем: $(+500)+(-300)=+200$ (м).

Аналогично рассматривается и следующий случай, когда $a=-500$ м, $b=+300$ м (черт. 3*г*).

Два последних случая сложения можно объединить в одно правило: чтобы найти сумму двух чисел с разными знаками, надо из большего абсолютного значения вычитать меньшее и перед результатом ставить знак того слагаемого, абсолютное значение которого больше.

Продолжая рассматривать ту же задачу, дают a и b следующие значения: 1) $a = -500$ м, $b = +500$ м; 2) $a = -500$ м, $b = 0$. Подмечают, что:

1) сумма двух противоположных чисел равна 0;

2) если одно слагаемое равно нулю, то сумма равна другому слагаемому.

Опишем *второй* подход к сложению рациональных чисел. В его основе лежит следующее: первое слагаемое рассматривается как мера величины, а второе — как мера изменения этой величины.

Задача. От станции отошел паровоз. Он прошел a км, затем еще b км. Где находится паровоз по отношению к станции?

Условимся расстояния вправо от станции считать положительными, влево — отрицательными.

Пусть $a = 3$ км и $b = 2$ км.

Это значит, что паровоз вначале отошел от станции вправо 3 км, а затем это расстояние изменилось еще на 2 км, т. е. паровоз прошел еще вправо 2 км. Он окажется вправо от станции на 5 км. Имеем: $(+3) + (+2) = +5$ (км).

Этот случай сложения положительных чисел известен из арифметики. Условимся при любых значениях a и b задачу решать путем сложения.

Пусть $a = -3$ км и $b = -2$ км.

Паровоз прошел -3 км. Он находится влево от станции на 3 км. Затем он прошел еще -2 км, т. е. влево прошел еще 2 км. Он окажется левее станции на 5 км, т. е. $(-3) + (-2) = -5$ (км).

Дается правило, охватывающее эти два случая.

Аналогично рассматриваются два других случая. В результате дается второе правило.

Затем последовательно рассматриваются случаи, когда слагаемые — противоположные числа, когда одно из слагаемых равно нулю.

При решении примеров и задач на сложение рациональных чисел применяются устный счет и письменные вычисления. Устное решение позволяет увеличивать количество решаемых упражнений, а значит, улучшить навыки. При устных занятиях для быстрой подачи числового материала рекомендуется использовать таблицу примерно следующего содержания:

+1	−7	+7	+14	−14	−70	70	−35	63
0	6	−9	−12	30	80	−24	42	−72
−2	−5	10	−15	18	−60	−25	−56	64
+3	4	−8	16	−20	40	27	−54	81
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$-1\frac{3}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$-2\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{6}$	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$3\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{8}$	$5\frac{5}{8}$	$1\frac{1}{6}$	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{10}$
+0,1	−0,3	0,5	−0,7	5,6	−0,02	0,36	−0,81	3,63
−0,1	0,2	−0,6	1,8	−6,4	0,04	−0,48	4,08	−4,64
1,1	−1,4	2,8	−3,2	8,1	−0,05	0,54	−5,25	9,72

Учитель показывает на число—35 и на число 63 и говорит: „Прибавить!“ Полученные ответы проверяются у 2—3 учащихся. Так решаются и следующие примеры, вспоминаются правила сложения рациональных чисел. Другой раз учитель предлагает складывать те три числа, которые он последовательно показывает, и проверяет каждый раз полученные ответы у 2—3 учащихся. Таблицу можно использовать и так: найти сумму первых четырех чисел первой строки (учитель показывает); найти сумму первых четырех чисел четвертого столбца и т. д.

Эта таблица используется при изучении всех действий над рациональными числами. Она находит применение на 10—12 уроках из числа отводимых на изучение этих чисел. Ее можно использовать и при повторении.

Решая ряд примеров, замечают, что сумма рациональных чисел подчиняется переместительному и сочетательному законам сложения. Нужно вспомнить формулировки и символические записи этих законов.

Среди упражнений на сложение должны найти место задачи с практическим содержанием. Подбор их имеется в задачнике.

7. Вычитание рациональных чисел определяется как действие, обратное сложению. Вычесть из одного числа другое—значит найти такое число, которое при сложении с вычитаемым дает уменьшаемое.

Восстановив в памяти школьников определение вычитания и условившись распространить его на вычитание рациональных чисел, учитель пишет на доске примеры на вычитание, в которых предусмотрены все возможные комбинации знаков:

$$(+7)-(+5)= \qquad ; \quad (-7)-(+5)= \qquad ;$$
$$(+7)-(-5)= \qquad ; \quad (-7)-(-5)= \qquad .$$

Применим определение вычитания к нахождению разности чисел. Вычесть из числа $+7$ число $+5$—значит найти такое число, которое при сложении с $+5$ дает число $+7$. Чему равна разность? Учащиеся безошибочно указывают, что разность равна $+2$. Проверка по определению выполняется устно. Так решаются и последующие примеры.

Далее следует обратить внимание школьников на то, что те же результаты можно получить иначе: знак вычитания заменить знаком сложения и при этом изменить знак вычитаемого на противоположный. Проверим:

$$(+7)+(-5)= \qquad ; \quad (-7)+(-5)= \qquad ;$$
$$(+7)+(+5)= \qquad ; \quad (-7)+(+5)= \qquad .$$

Следовательно, можно записать:

$$(+7)-(+5)=(+7)+(-5), \qquad (-7)-(+5)=(-7)+(-5),$$
$$(+7)-(-5)=(+7)+(+5), \qquad (-7)-(-5)=(-7)+(+5).$$

Эти примеры приводят нас к следующему правилу: чтобы вычесть какое-либо число, можно прибавить число, противоположное вычитаемому.

Подобные рассуждения можно повторить еще на другой серии примеров, похожих на предыдущие.

Разность может получиться и меньше и больше уменьшаемого. Об этом свидетельствуют примеры.

В арифметике сложение всегда выполнимо, а вычитание не всегда. После введения отрицательных чисел вычитание становится выполнимым при любых условиях: в результате получается рациональное число. Например, разность $3-7$ можно записать так: $(+3)+(-7)$. Так как сложение выполнимо всегда, то получаем:

$$3-7=(+3)+(-7)=-4.$$

На основании правила вычитания разность двух чисел всегда можно заменить суммой, например:

$$9-4=9+(-4).$$

Поэтому запись $9-4$ считают сокращенной записью суммы чисел 9 и -4.

Выражение $5-4-7$ можно записать так:

$$5-4-7=5+(-4)+(-7).$$

Поэтому его можно рассматривать как сумму чисел 5, -4, -7.

Точно так же выражение $a-b-c+d$ можно представить как сумму:

$$a-b-c+d=a+(-b)+(-c)+d.$$

Совокупность чисел и алгебраических выражений, соединенных знаками $+$ и $-$, называют суммой, а числа и выражения вместе с их знаками называют слагаемыми этой суммы.

Расширение понятия о сумме стирает границы между вычитанием и сложением, делает излишним рассматривать вычитание как особое действие.

В качестве итога изучения действий первой ступени следует научить детей находить суммы, т. е. решать примеры следующих видов:

$$17-32; \qquad 4{,}7-12{,}65;$$

$$2-19-18+4; \qquad -2\frac{1}{2}+1\frac{1}{8}-4\frac{3}{4}-\frac{5}{8};$$

$$(-7)-(-5)+(-6)-(+4).$$

При решении таких примеров, как последний, прежде всего раскрывают скобки, затем подсчитывают сумму положительных слагаемых, сумму отрицательных слагаемых и окончательный результат.

8. Правило умножения рациональных чисел, так же как и правило сложения, не является логическим следствием ранее установленных предложений арифметики и алгебры: его нельзя доказать. Правило умножения вводится по определению. Конкретные примеры, рассматриваемые на уроках, показывают целесообразность этого правила.

Предварительно введем следующие условия: а) расстояние вправо от станции считать положительным, а влево—отрицательным; б) будущее время считать положительным, а прошедшее—отрицательным; в) скорость, имеющую направление вправо, считать положительной, а влево—отрицательной.

А теперь разберем пример.

Паровоз начал двигаться от станции со средней скоростью 200 м в минуту. Где он будет находиться через 3 мин.?

Так как скорость положительная, то паровоз движется вправо. Время—положительное: спрашивается, где будет находиться паровоз через 3 мин. Очевидно, он будет находиться вправо от станции на 600 м. Имеем:

$$200 \cdot 3 = 600 \text{ (м) или } (+200) \cdot (+3) = +600 \text{ (м)}$$

Произведение двух положительных чисел находим по правилам арифметики.

Как изменить формулировку задачи, чтобы при решении получить выражение $(-200) \cdot (-3)$?

Паровоз двигался со скоростью -200 м в мин. Где он был 3 мин. тому назад, если в данный момент прибыл на станцию?

Скорость—отрицательная: паровоз двигался справа налево. Время тоже—отрицательное: спрашивается, где был паровоз. Очевидно, паровоз находился справа от станции на 600 м. Находим:

$$(-200) \cdot (-3) = +600 \text{ (м)}.$$

Эти два случая умножения рациональных чисел побуждают принять следующее правило: чтобы найти произведение двух чисел с одинаковыми знаками, надо перемножить их абсолютные величины и перед результатом поставить знак плюс.

Как изменить формулировку задачи, чтобы при решении прийти к выражению $(+200)\cdot(-3)$?

Паровоз двигался со скоростью $+200$ м в мин. Где он был 3 мин. тому назад, если в данный момент прибыл на станцию?

Скорость—положительная: паровоз двигался слева направо. 3 мин. тому назад паровоз находился влево от станции на 600 м. Получаем:

$$(+200)\cdot(-3)=-600 \text{ (м)}.$$

Так же разберем четвертый случай, приводящий к выражению:

$$(-200)\cdot(+3).$$

Приходим к следующему правилу: чтобы найти произведение двух чисел с разными знаками, надо перемножить их абсолютные значения и перед результатом поставить знак минус.

Далее рассматривается случай, когда один из сомножителей равен 0.

Упражнения на умножение рациональных чисел выполняются устно и письменно. При устном решении используется приведенная ранее таблица. Когда учащиеся запомнят правило умножения двух чисел, можно ввести правило знаков при умножении. Во избежание недоразумений его можно читать так: при умножении двух чисел с одинаковыми знаками получается положительное, а с разными—отрицательное произведение.

Решая примеры, убеждаются, что ранее известные законы умножения применимы и к рациональным числам. Эти законы используются для упрощения вычислений.

9. Деление рациональных чисел определяется как действие, обратное умножению. Разделить одно число на другое—значит найти такое число, которое при умножении на делитель в произведении дает делимое.

Вниманию класса предлагаются примеры:

$$(+12):(+3)= \quad ; \quad (+12):(-3)= \quad ;$$
$$(-12):(-3)= \quad ; \quad (-12):(+3)= \quad .$$

Опираясь на определение, учащиеся легко находят частное. Можно рассмотреть еще аналогичные серии примеров, после чего формулируется правило: чтобы разделить одно число на другое, надо разделить абсолютное значение делимого на абсолютное значение делителя и перед результатом поставить знак плюс, если данные числа имеют одинаковые знаки, и знак минус, если данные числа имеют разные знаки. Правило усваивается легко и применяется без ошибок.

Правило знаков формулируется так: при делении двух чисел с одинаковыми знаками получается положительное, а с разными — отрицательное частное.

Не останавливаемся на других вопросах изучения рациональных чисел: одни из них рассматриваются в последующих очерках, другие связаны с упражнениями и вполне удовлетворительно решаются с помощью задачника, третьи не представляют значительного методического интереса. Надлежит выработать основательные навыки в выполнении действий над рациональными числами: это необходимое условие дальнейшего успешного изучения курса алгебры.

Очерк пятый

ПРОПЕДЕВТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗВИТИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ

1. Мир—движущаяся материя. Движение—форма бытия материи. Виды движения разнообразны. Переменная величина—или, короче, переменная—есть отражение в нашем мозгу движения материи. Вместе с тем переменная является средством изучения многих видов движения материи.

Понятие о переменной величине порождено практикой. Вплотную подошли к этому понятию и к понятию бесконечно малой как частному случаю переменной уже древние греки, но они не сделали их средством изучения математических проблем. Только создание к концу 16 века удобной алгебраической символики дало возможность в следующем веке свободно изучать переменные.

В мировом движении материи царит объективная закономерность. Ленин учит: „Мир есть закономерное движение материи, и наше познание, будучи высшим продуктом природы, в состоянии только *отражать* эту закономерность".* Как отражение объективной закономерности в математике создается понятие функции: „...понятия порядок, закономерность и т. п. могут быть выражены при известных условиях математически определенным функциональным соотношением!"** Функция является сильным средством выра-

---

* В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, 1946, стр. 146.
** Там же, стр. 137.

жения и изучения многих законов материального мира.

Понятие о функции возникло под влиянием практики. Развитие этого понятия имеет длинную историю. Конечно, конкретными функциональными зависимостями люди пользовались с древнейших времен: вавилонские математики применяли таблицы при решении уравнений, греческие геометры составляли таблицы хорд, каждая из которых содержит значения аргумента или аргументов и соответствующие значения функции. Однако только в 17 столетии функция осознанно включается в математику в работах Ферма(1601—1665), Декарта, Ньютона(1642—1727) и Лейбница(1646—1716). В этот период понятие функции не имело четкого определения, было связано с графическими представлениями и носило наглядно геометрический характер.

В середине 18 века (1748) Эйлер дал четкое определение функции. По Эйлеру функция переменного— аналитическое выражение, составленное из этого переменного и постоянных. Для своего времени определение Эйлера было прогрессивным. Однако вскоре обнаружилась его узость. Под определение Эйлера не подходят такие функции, которые задаются таблицами, а таблицы очень широко применяются в практике. Под него не подходят функции, которые задаются несколькими аналитическими выражениями, графически, описаниями.

Более широкое определение функции было дано в 1834 году великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и несколько позднее—в 1837 году—выдающимся немецким математиком Л. Дирихле (1805 — 1859). Определение Лобачевского—Дирихле можно сформулировать так: y есть функция переменной x на отрезке $a \leqslant x \leqslant в$, если всякому значению переменной x этого отрезка соответствует вполне определенное значение переменной y, при этом совершенно неважно, каким способом установлено соответствие. Определение Лобачевского—Дирихле применяется в несколько уточненной форме и в современных курсах математического анализа.

Каково же идейное содержание понятия о функции в наши дни? Современное учение о функции основывается на понятии множества. По содержанию понятие о функции совпадает с понятием соответствия. Пусть даны два любые множества $M=\{x\}$ и $N=\{y\}$ какой угодно мощности, составленные из каких угодно элементов x и y. Если каждому элементу x множества M соответствует некоторый вполне определенный элемент y множества N, то говорим, что имеем функцию на множестве M и пишем

$$y=f(x).*$$

Элементы x множества M называют значениями аргумента. Все данное множество M называют множеством значений аргумента или областью определения функции. Таким образом, чтобы задать функцию, необходимо установить множество значений аргумента и закон соответствия, по которому всякому значению аргумента отнесено некоторое вполне определенное значение функции, принадлежащее другому множеству элементов.

Современное понятие функции отличается большой общностью. В объем этого понятия входят и функции, закон соответствия которых определен одним аналитическим выражением, и функции, заданные несколькими аналитическими выражениями, таблицами, графиками, описаниями, и функции, заданные геометрическими преобразованиями, например, осевой симметрией, подобным преобразованием.

При выражении и изучении законов природы, в технике и практической деятельности особое значение имеют числовые функции числового аргумента.

В школьном курсе математики, и в первую очередь в алгебре, учащиеся имеют дело с вещественными функциями от вещественного переменного.

2. В программах математики советской средней школы учению о функциональной зависимости уделяется внимание, но явно недостаточное. Есть основание ожидать, что в тех программах математики, которые будут введены в ближайшие годы, функциональная зависимость займет более солидное место и функция будет в школе изучаться значительно глубже.

Наблюдается, что в практике преподавания неко-

---

* Н. Н. Лузин, Теория функций действительного переменного, Учпедгиз 1948.

торых учителей до сих пор учение о функции находится в загоне. Об этом свидетельствуют приемные экзамены в высшие учебные заведения и техникумы: нередко вопросы, касающиеся функциональной зависимости, остаются без ответов или на них даются невразумительные ответы.

Понятие о функциональной зависимости отражает явления действительного мира, в нем отражаются многие конкретные формы движения материи, взаимная связь и обусловленность реальных величин.

Понятие о функциональной зависимости воплощает диалектические черты современного математического мышления; посредством него мы мыслим величины в их изменяемости, в их взаимной связи, посредством него исследуются эти связи и их взаимная обусловленность.

Функциональная зависимость — могучее средство выражения и изучения законов природы, она находит широчайшее применение во многих науках, в технических дисциплинах, в общественном производстве, в социалистическом строительстве.

Поэтому элементы учения о функции, которые даются в школе, представляют ценный материал для политехнического обучения.

Являясь одним из важнейших понятий современной математики, понятие о функциональной зависимости должно стать одним из центральных понятий школьного курса математики — и в первую очередь курса алгебры.

Широкое и глубокое изучение функциональных зависимостей повышает научный уровень школьного курса математики и, в частности, курса алгебры. Такое изучение до некоторой степени уменьшает тот зияющий разрыв, который образовался между современным состоянием математики и школьным курсом.

Учитель систематически, настойчиво, повседневно должен формировать навыки функционального мышления на протяжении всего обучения в школе.*

3. В школе изучение функциональных зависимостей делится на два продолжительных периода. Первый

* А. Я. Хинчин, Основные понятия математики и математические определения в средней школе, Учпедгиз 1940.

период начинается с 5-го класса и продолжается до того времени, когда приступают к систематическому изучению функций. Его иногда называют периодом функциональной пропедевтики. Второй период начинается с систематического изучения функциональной зависимости и тянется до конца курса. Его иногда называют периодом систематического изучения функций. В период функциональной пропедевтики нет надобности вводить определение функции и терминологию, связанную с этим определением, однако здесь учитель на конкретном материале всеми доступными средствами культивирует идею функциональной зависимости, применяет различные способы задания функций, графическое изображение конкретных функций, графические приемы решения уравнений. Цель этих мероприятий—подготовить учащихся к систематическому изучению функций, развивать функциональное мышление.

Период систематического изучения функций начинается, если не с самого общего, то все же современного определения понятия функции, с введения терминологии, присущей этому понятию, с систематического изучения линейной функции и функции второй степени. Этот период продолжается на материале курса алгебры и распространяется на курс тригонометрии.

Уже при изучении арифметики полезно уделять внимание рассмотрению конкретных зависимостей между величинами. В этом отношении школьный курс арифметики располагает интересным материалом.

Уже таблица умножения является хорошим примером функциональной зависимости: один сомножитель зафиксирован, другой изменяется через единицу от 1 до 10, при этом соответственно изменяются произведения. Каждому значению второго сомножителя соответствует единственное значение произведения.

Таблица умножения Пифагора, таблицы произведений целых чисел, таблицы для вычисления процентов представляют конкретные функциональные зависимости, заданные табличным способом.

В 5-м классе уделяется серьезное внимание изменению суммы, разности, произведения и частного в зависимости от изменения данных. Этими вопросами занимаются и при повторении целых чисел и при изучении дробей. Изменение произведения и частного в зависимости от изменения компонентов иногда кладут в основу получения правил умножения и деления десятичных дробей. Здесь также дети встречаются с конкретными функциональными зависимостями.

Арифметическая задача состоит из данного числового материала, требования, чтó определить, одной или нескольких функциональных зависимостей, которые обусловлены текстом задачи. Разумное решение арифметических задач способствует развитию функционального мышления. В этом отношении надо особо выделить упражнения, подготовляющие решение задач того или другого вида. Например, знакомя учащихся с задачами на прямолинейное равномерное движение, учитель принимает меры к тому, чтобы они овладели на конкретном материале той основной функциональной зависимостью, которая лежит в сюжетах задач этого вида. С этой целью в порядке подготовительных упражнений учитель ставит вопросы, для решения которых приходится применять нужную функциональную зависимость. Можно поставить, например, такие вопросы:

1) Связной едет на велосипеде со скоростью 200 м в минуту. Какой путь он пройдет за 7 мин.? за 20 мин.? за час?

2) Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями в 360 км за 24 часа. Какова средняя скорость теплохода в час? Какова была бы его скорость, если бы он прошел это расстояние за 18 час.? за 20 час.? за 30 час.?

3) Поезд, двигаясь со средней скоростью 25 км в час, прошел 450 км. Сколько времени он находился в пути? Сколько времени он находился бы в пути, если бы его скорость была равна 20 км в час? 30 км в час? 45 км в час?

На последующих уроках учитель постепенно усложняет подготовительные упражнения и таким путем добивается, что к началу решения задач на движение дети будут хорошо пользоваться той основной функциональной зависимостью, которая лежит в сюжетах этих задач.

Богатые возможности для развития функционального мышления содержит геометрический материал программы арифметики 5-го класса. Площади квадрата, прямоугольника, треугольника, длина окружности и площадь круга, объемы прямоугольного параллелепипеда и цилиндра представляют функции линейных элементов. При решении задач полезно составлять таблицы, устанавливающие соответствие между значениями линейного элемента и значениями площади или объема. Например, разбирают такую задачу:

Основание треугольника равно 12 см, а высота изменяется и принимает значения, равные 5; 5,2; 5,4; 5,6; 5,8; 6 см. Какие значения принимает площадь? Результаты записать в таблицу:

Высота в сантиметрах	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
Площадь в квадратных сантиметрах						

Функциональная зависимость легко вскрывается при изучении прямой и обратной пропорциональности величин. Уже при выяснении понятий о прямой и обратной пропорциональности используются таблицы значений величин. При изучении рациональных чисел дети познакомятся с построением графиков. Таким образом в распоряжении учащихся окажется еще одно средство устанавливать соответствие между значениями величин.

Итак, при изучении курса арифметики имеются значительные возможности для ознакомления с конкретными функциональными зависимостями. Основным средством установления соответствия является таблица. Школьная программа указывает на необходимость пользоваться таблицами при вычислениях. Можно рекомендовать и самим учащимся составлять таблицы. Во втором полугодии 6-го класса используется новое для учащихся средство выражения соответствия между значениями величин—графики в прямоугольных координатах.

4. При обучении алгебре возможности развивать функциональное мышление возрастают и обогащаются.

Как отмечено, определение функции прежде всего требует установления области допустимых значений аргумента. Поэтому необходимо учить школьников сознательно подходить к вопросу, каковы допустимые значения буквы или букв, входящих в алгебраическое выражение. Конечно, при этом приходится обращать внимание и на значения выражений. Такого рода упражнения начинаются с изучения первой главы курса алгебры. К ним возвращаются неоднократно почти на протяжении всего периода изучения этого курса.

Каждое алгебраическое выражение, рассматриваемое вне связи с каким-либо конкретным вопросом, имеет естественную область допустимых значений входящих в него букв: это—множество тех значений буквы или букв, для которых оно сохраняет смысл, т. е. имеет определенное конечное действительное значение. Например, для выражения x^2+1 естественная область допустимых значений x— множество действительных чисел, для выражения $\frac{1}{x^2-1}$ — множество действительных чисел, кроме ± 1.

Однако в школьном обучении естественная область допустимых значений зависит от двух факторов: во-первых, от структуры выражения, во-вторых, от того числового запаса, которым располагают школьники. Например, в 6-м классе в январе для выражения x^2+1 область допустимых значений x — множество неотрицательных рациональных чисел, с которым дети освоились в курсе арифметики; в том же классе после изучения отрицательных чисел — множество рациональных чисел, а в 8-м классе после изучения иррациональных чисел—множество действительных чисел.

Если алгебраическое выражение получено в результате рассмотрения какого-либо конкретного вопроса, то область допустимых значений определяется и сущностью вопроса и числовым запасом, которым располагают дети. Для шестиклассника, познакомившегося с отрицательными числами, области допустимых значений x и y для выражения $10x+y$ — множество рациональных чисел. Но если это выражение обозначает положительное двузначное число, то область допустимых значений для x—целые числа от 1 до 9, для y—целые числа 0 до 9.

При обучении необходимо систематически упражнять учащихся в выяснении области допустимых значений входящих в выражение букв. При этом используются выражения, имеющие естественную область допустимых значений буквы, и такие выражения, для которых область допустимых значений буквы ограничена условиями задачи или вопроса.

П. А. Ларичев в задачнике по алгебре вводит упражнения на выяснение области допустимых значений входящих в выражение букв, но они сосредоточены в нескольких параграфах.* Например, такие упражнения, связанные с изучением рациональных чисел, помещены в одном параграфе, отведенном повторению этих чисел. Значительно целесообразнее все эти упражнения распределить на ряд уроков, отводимых на изучение этой главы.

Уже после того как будет введено понятие об отрицательном числе и изучены действия первой ступени, полезно поставить такие вопросы:

а) Какие значения может принимать x?

б) При всех ли значениях a выражение $+a$ положительное?

в) При всех ли значениях b выражение $-b$ отрицательное?

г) Может ли выражение $x+y$ быть отрицательным? равным нулю?

д) Выяснить, при каких значениях c выражение $1+c$ больше, меньше выражения $1-c$, равно выражению $1-c$.

Отвечая на такие и аналогические им вопросы, учащиеся или описывают состав того множества, которое образует допустимые значения буквы, или приводят примеры, поясняющие ответы.

Заканчивая изучение действий второй ступени, уместно предложить вопросы:

а) При каких значениях a верна запись: $a<2a$?

б) Возможно ли такое неравенство: $b>3b$?

в) При всех ли значениях c выражение $3c$ больше выражения $2c$?

г) При каких значениях x будет: $9x>-9x$; $9x=-9x$; $9x<-9x$?

---

* П. А. Ларичев. Сборник задач по алгебре, ч. I и II. Учпедгиз 1955.

д) При каких значениях a выражение $\frac{1}{a}$ имеет положительное значение? отрицательное? не имеет смысла?

е) При каких значениях c выражение $\frac{1}{c-1}$ больше нуля? меньше нуля? не имеет смысла?

Те вопросы, которые у некоторых школьников вызывают затруднения, надо поставить вновь на одном из ближайших уроков, изменив при этом, если нужно, форму вопроса и некоторые данные. Опыт говорит, что последний из приведенных вопросов, вызывает затруднения. Поэтому на следующем уроке его полезно поставить вновь: при каких значениях c выражение $\frac{2}{c-3}$ имеет положительное значение? отрицательное значение? не имеет смысла?

После изучения возвышения в степень учитель ставит примерно такие вопросы:

а) Какие значения можем давать m в выражении m^2?

б) При всех ли значениях x выражение x^2 положительное?

в) При всех ли значениях x выражение $-x^4$ имеет отрицательное значение?

г) При каких значениях y выражение $1+y^2$ принимает наименьшее значение?

д) Выяснить, при всех ли значениях z выражение $\frac{1}{z^2}$ имеет положительные значения.

Естественно, что упражнения этого вида найдут место при повторении главы о рациональных числах.

Наряду с упражнениями, требующими выяснения естественной области значений аргумента, полезны упражнения, которые приводят к выражениям, имеющим ограниченную область значений аргумента условиями задачи. Вот примеры таких упражнений.

а) Написать выражение для любого четного числа. Какие значения может принимать буква, входящая в выражение?

б) Составить выражение для любого нечетного числа. Какие значения принимает буква?

в) Составить выражение для любого целого числа, делящегося без остатка на 5.

г) Составить выражение для любого целого числа, которое при делении на 5 дает остаток 1.

д) Составить выражение для любого целого числа, которое при делении на 7 дает остаток 3.

Такого рода упражнения легко продолжить.

Другой раз преподаватель предложит упражнения:

а) Написать два выражения, чтобы они обозначали два любых соседних (последовательных) натуральных числа.

б) Записать два выражения, чтобы они обозначали два любых последовательных четных числа.

в) Написать два выражения, чтобы они обозначали два любых последовательных нечетных числа.

г) Составить выражение любой дроби, числитель которой равен единице, а знаменатель—натуральное число.

И каждое из упражнений сопровождается выяснением области допустимых значений входящей в него буквы.

При обучении алгебре, особенно в первый год, решаются задачи арифметическими средствами, но с буквенными данными. Такие задачи также надо использовать для выяснения областей допустимых значений букв. Например, при решении задач: „На сколько изменится площадь квадрата со стороной 10 см, если сторону уменьшить на a см?“; „На сколько изменится объем куба с ребром a см, если ребро уменьшить на 3 см?“—целесообразно поставить вопросы, какие значения по смыслу задачи может принимать a.

5. В дальнейшем курсе алгебры имеются достаточные возможности для тренировки учащихся в выяснении областей допустимых значений букв, входящих в выражения, уравнения и задачи.

При изучении алгебраических дробей учитель ставит вопросы, при каких значениях букв выражения

$$\frac{7}{a-5}, \quad \frac{1}{a^2-2a+1}, \quad \frac{c}{4+4c+c^2}$$

не имеют смысла.

Выражения постепенно усложняются. Например, какие значения может принимать x в следующих выражениях:

$$\frac{2}{x^3-3x^2+3x-1}, \quad \frac{c}{8+12x+6x^2+x^3},$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-a)}, \quad \frac{3}{x^2-ax-bx+ab}$$

Решение линейных уравнений, в которых при неизвестном есть буквенные коэффициенты, также требует внимательного отношения к значениям параметров. Это относится даже к простейшим уравнениям. Вот два примера:

1) $ax = 1 + x$

$x(a-1) = 1$

Если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{1}{a-1}$.

Если $a = 1$, то уравнение не имеет решений.

2) $ax - a^2 - 2x + 4 = 0$

$x(a-2) = a^2 - 4$

Если $a \neq 2$, то $x = a + 2$.

Если $a = 2$, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Задачи с буквенными данными, решаемые путем составления уравнений, представляют интерес в отношении областей допустимых значений букв. П. А. Ларичев начинает с таких задач, которые содержат несколько параметров. Чтобы не столкнуться сразу с огромными трудностями, целесообразно начинать с задач, в которых только один параметр, а затем постепенно увеличивать число параметров.

Рассмотрим задачу: „Население деревни Н. к концу года стало равно a человек. Определить число жителей этой деревни в начале года, если прирост населения за год равен 10%“.

При решении получается выражение: $\frac{10a}{11}$. Возникает вопрос, какие значения принимает a. Из текста задачи следует, что a — число натуральное. Кроме того, ответ должен быть целым числом. Значит, a

должно быть кратным 11, т. е. $a = 11n$, где n — натуральное число.

Вопрос о допустимых значениях параметров имеет значение при решении систем линейных уравнений с двумя неизвестными, при решении задач путем составления систем, когда среди данных имеются буквы.

Особый интерес к допустимым значениям аргумента возникает при изучении иррациональных чисел и выражений, содержащих корни. Здесь прежде всего расширяется естественная область допустимых значений аргумента: в распоряжении учащихся теперь имеется множество действительных чисел. Затем пользование некоторыми видами корней требует внимательного рассмотрения области допустимых значений аргумента.

На этом этапе обучения в нашей практике постепенно вводится выражение: „область допустимых значений x". Теперь часто вопрос ставится так:

Найти область допустимых значений x для каждого выражения:

$$2x, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt{-x}, \quad \sqrt[4]{x-1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{5}{\sqrt{1-x}}, \quad \frac{a}{\sqrt[4]{x-4}}.$$

Конечно, при изучении и этой главы не следует сосредоточивать упражнения на 1 — 2 уроках; они распределяются на несколько часов, повторяются, постепенно усложняются.

6. Если в январе и феврале в 6-м классе основными средствами выражения функциональной зависимости служат таблицы и алгебраические выражения, то позднее—в марте—учащиеся знакомятся с графическим способом выражения функциональной зависимости. Глава о рациональных числах заканчивается построением графиков. Программа рекомендует строить графики температуры, равномерного движения.

При первом знакомстве с графиками еще нет надобности в общем представлении о системе прямоугольных координат, пока не нужна и соответствующая терминология, связанная с этой системой.

В каждом конкретном случае осям координат дается то наименование, которое свойственно задаче. Например, если в задаче идет речь об изменении пути при равномерном прямолинейном движении, то на осях делают надписи: „Время в часах", „Путь в километрах" или „Время в минутах", „Путь в метрах".

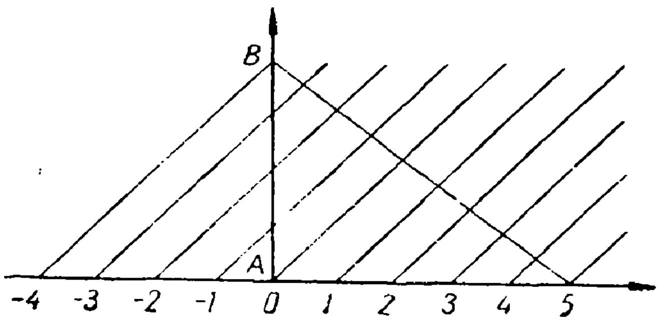
При графическом изображении функциональных зависимостей ставятся такие цели: а) познакомить школьников со структурой графиков; б) научить по данным таблицам значений двух величин строить графики; в) научить правильно читать графики и, в частности, составлять по ним таблицы значений двух величин.

Для чтения графиков используется и тот небольшой материал, который имеется в задачнике, и специальные стенные таблицы. Материал для составления таблиц учитель при желании легко найдет в газетах и журналах. Желательно использовать местный материал, характеризующий работу колхоза, района, города. Упражнения для построения графиков по данным таблицам значений двух величин и составление таблиц по данным графикам имеются в задачнике.

Хотя бы в порядке кружковых занятий полезно обратить внимание учащихся на то, что графики дают возможность решать некоторые виды задач, обычное решение которых затруднительно и часто приводит к ошибочным результатам. С этой целью можно использовать, например, такую задачу: „От пристани *А* вниз по реке ежедневно в полночь отходит теплоход и прибывает к пристани *В* ровно через 4 суток. В свою очередь от пристани *В* ежедневно в полночь отходит теплоход, который прибывает к пристани *А* ровно через 5 суток. Сколько произойдет встреч во время одного рейса теплохода, вышедшего из *В*, с теплоходами, вышедшими из *А*?"

Выслушав задачу, дети обычно начинают высказывать необоснованные догадки о числе встреч. Вы услышите такие „ответы": 5 встреч, 7 встреч. И не приходится слышать верных ответов. Графическое решение разоблачает ошибочные ответы, дает верный ответ и, главное, показывает практическое значение графического решения задач. Решение задачи дано на чертеже 4. Ответ: 10 встреч, считая встречи в пристанях отправления.

Можно использовать и занимательную задачу об улитке: „Улитка ползет по дереву: в течение дня она поднимается на 1,6 м, а в течение ночи опускается на 0,6 м. Сегодня утром она начала движение от земли. Через какое время после начала движения она достигнет вершины дерева, если высота его 6м“?



Черт. 4.

Часто дают ответы: через 6 суток. Графическое решение покажет, что он неверен. Улитка достигнет вершины дерева во второй половине дня шестых суток своего путешествия.

7. Определение числовых значений буквенных выражений представляет многосторонний интерес: такая работа всегда подчеркивает мысль, что буквенные компоненты выражения — это числа, принадлежащие той или иной совокупности; такая работа полезна для развития устных и письменных вычислительных навыков. С точки зрения функциональной пропедевтики определение числовых значений выражений, если оно сопровождается составлением таблиц, представляет особый интерес: оно учит буквы выражения мыслить переменными, оно культивирует мысль, что каждому значению буквы из области допустимых значений соответствует определенное значение выражения, т. е. приучает смотреть на буквенные выражения как на функции входящих в него букв.

Вот почему при введении в буквенное исчисление, при изучении рациональных чисел, многочленов, рациональных выражений, действительных чисел полезно, вычисляя числовые значения буквенных выражений, практиковать табличную запись. Такая запись подчеркивает функциональную природу алгебраических выражений.

После того как учащиеся познакомятся с методом координат, разумно ввести такие упражнения, которые требуют составить таблицу значений для данного алгебраического выражения (функции одной переменной), а затем построить соответствующий график. Конечно, для таких упражнений можно использовать простейшие функции — линейные, некоторые виды функций второй степени. При выполнении упражнений учащиеся постепенно приобретают навыки строить графики простейших алгебраических функций. Они имеют дело с тремя различными способами выражения функциональной зависимости: от функции, заданной простейшими аналитическими средствами, переходят к табличному выражению функциональной зависимости, а от него — к графическому.

С точки зрения развития функционального мышления полезно составлять с учащимися таблицы. Например, уместно составить таблицу квадратов натуральных чисел от 1 до 100. Эта работа начинается в классе. Квадраты чисел до 20 находятся легко. Далее обращается внимание учащихся на следующее: зная квадрат числа n, достаточно к нему прибавить $2n+1$, чтобы получить квадрат следующего натурального числа $n+1$. Например, $18^2=324$. Чтобы получить 19^2, надо найти сумму $324+2\cdot18+1$ Если таблица квадратов составляется до изучения формул сокращенного умножения, то такой прием получения квадрата следующего натурального числа устанавливается опытным путем. Если уже изучены формулы сокращенного умножения, этот прием может получить строгое обоснование. Работу по составлению таблицы учащиеся заканчивают дома; особенно легко ее выполнить, если пользоваться при сложении счетами.

Таблица может быть использована для возведения в квадрат и десятичных дробей с одной или двумя значащими цифрами. Чтобы найти квадраты чисел: 1,8; 0,18, достаточно выписать из таблицы квадрат числа 18, т. е. 324, и уменьшить это число в первом случае в 100, во втором — в 10 000 раз.

Таблица используется при нахождении числовых значений алгебраических выражений. Например, предложить заполнить таблицу:

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
a^2+1											

и вычертить график.

Можно составить таблицу кубов натуральных чисел от 1 до 20. Такая таблица дает возможность находить точно кубы некоторых десятичных дробей. Например, $0{,}9^3=9^3:1000$; $1{,}8^3=18^3:1000$.

Составление таблиц и применение их в вычислениях является хорошей подготовкой к ознакомлению учащихся с таблицами квадратов, квадратных корней, кубов, кубических корней.*

8. При изучении геометрического материала в 6—8-х классах, где возможно, следует обращать внимание учащихся на то, что геометрические образы подвергаются изменениям, что в процессе движения одни образы переходят в другие, что изменению одних образов соответствует изменение других. Значит, вдумчивое обучение геометрии также способствует развитию функционального мышления.

Угол рассматривается как мера поворота одного луча по отношению к другому; точка, двигаясь по геометрическому месту, сохраняет свойства, присущие точкам этого геометрического места; при решении задач методом параллельного перенесения отрезок движется, сохраняя параллельность первоначальному положению. В школьном курсе геометрии учащиеся часто встречаются с движением, с изменяемостью геометрических образов.

В этом курсе имеется немало примеров зависимости одних величин от других. Если один из смежных углов увеличивается, то другой уменьшается; при этом каждому значению первого угла будет соответствовать единственное значение другого угла.

---

* В. Брадис, Четырехзначные математические таблицы, Учпедгиз 1954.

С увеличением дуги, на которую опирается центральный угол, растет и этот угол—и наоборот. С уменьшением расстояния хорды от центра окружности длина хорды увеличивается.

Представления об изменяемости геометрических образов, о зависимости одних геометрических величин от других значительно выигрывают, если при обучении, по возможности, применяются подвижные модели.

В основе преобразований геометрических фигур осевой симметрии, центральной симметрии, гомотетии и других—лежит самое общее современное представление о функции: при всех преобразованиях каждой точке данной фигуры соответствует единственная определенная точка фигуры, полученной в результате преобразования. При этом все точки преобразуемой фигуры представляют область определения функции, а точки полученной фигуры являются соответствующими значениями функции.

Таким образом, значение изучения геометрических образов в развитии функционального мышления значительно. Важно, чтобы учитель помнил это и умело использовал на уроках.

Очерк шестой

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

1. Учение об уравнениях, системах уравнений и решении их занимает видное место в школьном курсе алгебры. Уравнения служат для решения многих проблем окружающего нас материального мира. Они—средство решения задач с доступным учащимся техническим, производственным содержанием. Учение об уравнении связано с учением о функции, с развитием понятия числа. Вот почему оценка, насколько хорошо ученик изучил курс алгебры, в значительной мере зависит от того, как он овладел учением об уравнении и приложением уравнений к решению задач.

Каково же научное содержание понятия уравнения?

В наше время уравнением называется равенство двух функций, заданных совместно на общей части их областей определения.*

Поясним примером. Функция $\frac{1}{x^2-4}$ определена на множестве действительных чисел за исключением ± 2. Функция $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ определена на множестве действительных чисел, кроме тех, которые принадлежат отрезку $[-1; +1]$. Равенство этих функций дает уравнение:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{1}$$

---

* С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, „Советская наука" 1951.

При этом функции рассматриваются на общей части областей их определения: x—любое действительное число, кроме ± 2 и чисел отрезка $[-1; +1]$.

Одна из частей уравнения может быть числом. В таком случае эта часть рассматривается как функция, принимающая одно и то же значение при всех допустимых значениях аргументов.

Современное определение понятия уравнения опирается на понятие функции. Оно связано с понятием допустимых значений аргументов функций, служащих частями уравнения: функции рассматриваются на общей части допустимых значений аргументов.

Это определение шире того традиционного для нашей средней школы определения уравнения, которое находится в учебнике алгебры А. П. Киселева и по которому уравнение—это равенство, справедливое только при некоторых значениях неизвестных. Оно шире потому, что включает в свой объем буквенные тождества и уравнения, не имеющие решений, а определение, данное в учебнике А. П. Киселева, исключает из объема понятия и то и другое.

В методической литературе высказываются различные взгляды на то, какое определение понятия „уравнение" целесообразно давать в школе. Некоторые авторы утверждают, что определение необходимо должно предшествовать решению уравнений. Нет особой надобности вводить определение этого понятия с первых шагов обучения решению уравнений. Да и сделать этого нельзя, так как уравнения решаются уже при изучении арифметики, до начала изучения алгебры.

Понятие об уравнении должно формироваться в сознании учащихся постепенно на протяжении всего обучения в школе. В результате этого старшеклассники должны хорошо овладеть современным функциональным определением уравнения.

В нашей практической работе ознакомление с понятием уравнения проводилось следующим путем. При изучении арифметики упражнения, в которых требуется найти x (например, $2x-1=9$; $0{,}1x+2=7$), получали название уравнений; при этом никакого определения этому понятию не давалось. Многократные встречи с конкретными уравнениями и связанное с этим употребление термина приводят к тому, что учащиеся правильно пользуются им. В курсе арифметики понятие уравнения применяется и к пропорциям, один из членов которых неизвестен и его требуется найти.

С началом изучения алгебры термин „уравнение" продолжает применяться без определения, как название соответствующих упражнений. Теперь неизвестное число обозначается различными буквами: x, y, t, a и др. Так продолжается до систематического изучения уравнения первой степени с одним неизвестным.

В 7-м классе дается определение понятия уравнения, которое доступно учащимся и которое в дальнейшем не явится помехой к современному определению.

После введения понятия о функции и об области ее определения можно дать современное функциональное понятие уравнения, а также символическую запись уравнений, по крайней мере с одним и двумя неизвестными:

$$f(x)=\varphi(x), \quad f(x,y)=\varphi(x,y).$$

В нашей практике это имело место в 10-м классе при обзорном повторении учения об уравнении.*

2. По новым программам алгебры решение уравнений первой степени с одним неизвестным начинается с первых уроков в 6-м классе.

Пока учащиеся не познакомятся с учением о равносильности уравнений, основным способом их решения является зависимость между компонентами и результатами действий. В очерке втором уже было показано, что так решаются уравнения, когда учащиеся делают первые шаги в ознакомлении с буквенным исчислением. Так решаются они в главе, посвященной изучению рациональных чисел, и в последующих главах, в которых рассматриваются действия над одночленами, многочленами и алгебраическими дробями.

Конечно, с целью развития инициативы и сообразительности можно показать и иные приемы решения уравнений.

---

* Очерк четырнадцатый.

3. К изучению специальной главы об уравнениях первой степени с одним неизвестным учащиеся приступают уже с достаточными навыками в решении уравнений и даже с некоторым опытом применения уравнений к решению задач. Несмотря на это, основным методом установления свойств уравнений является неполная индукция. Никакие теории, опирающиеся на дедуктивный метод, использовать нельзя: они мало доступны семиклассникам.

Прежде всего предстоит расширить понятие об уравнении, на конкретных примерах показать учащимся такие уравнения, с какими они ранее не встречались, и ввести определение понятия об уравнении.

Рассмотрим несколько примеров различных уравнений.

Пример 1. Пусть дано уравнение:

$$2x+5=5x-4 \qquad (1)$$

Левая и правая часть его—алгебраические выражения. И в том и в другом выражении можно давать x любые рациональные значения. Составим таблицу значений выражений при различных значениях x:

x	$2x+5$	$5x-4$	x	$2x+5$	$5x-4$
0	5	-4	2	9	6
$\frac{1}{2}$	6	$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	10	$8\frac{1}{2}$
1	7	1	3	11	11
$1\frac{1}{2}$	8	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	12	$13\frac{1}{2}$

Таблица показывает, что алгебраические выражения принимают, вообще говоря, различные значения. Однако, когда $x=3$, оба выражения принимают равные значения. Число 3 — корень уравнения (1).

Уравнение—равенство двух алгебраических выражений. Оно сопровождается вопросом, при каких допустимых значениях неизвестного значения этих выражений действительно равны.

Пример 2. Рассмотрим уравнение:

$$x^2+1=(x+1)^2-2x. \qquad (2)$$

Вновь имеем равенство двух алгебраических выражений, в которых x может принимать любые рациональные значения. При каких значениях x значения выражений действительно равны?

Если составить таблицу, похожую на таблицу первого примера, то убедимся, что при любых значениях x левая часть равна правой. К тому же заключению придем, если упростим правую часть и получим уравнение: $x^2+1=x^2+1$.

Значит, уравнение (2) имеет бесконечное множество решений: любое рациональное число является его корнем.

Пример 3. Рассмотрим такое уравнение:

$$2x = 2x + 1 \qquad (3)$$

Имеем равенство двух алгебраических выражений. Допустимые значения x для того и другого выражения—любое рациональное число. Составив таблицу значений этих выражений при различных значениях x, легко усмотреть, что нет таких значений x, при которых значения обеих частей равны: правая часть всегда больше левой на 1. Значит, уравнение не имеет решений. В этом случае уравнение называется противоречивым.

Пример 4. Рассмотрим задачу: „Турист идет со скоростью 4 км в час. Какой путь он пройдет, если находится в движении t часов?"

Если длину пути обозначить через s, то получим равенство: $s=4t$.

Отвлечемся от содержания задачи. Рассмотрим равенство:

$$s = 4t \qquad (4)$$

Вновь имеем равенство двух алгебраических выражений. Составим таблицу:

t	0	1	1,5	2	2,5	3	4
s	0	4	6	8	10	12	16

t принимает любые рациональные значения, каждому значению t соответствует определенное рациональное значение s. Равенство (4) — уравнение с двумя неизвестными, а пары чисел, стоящие в столбцах таблицы, — некоторые его решения. Уравнение (4) имеет бесконечное множество решений. Однако не всякая пара рациональных чисел является его решением.

Пример 5. Рассмотрим такое уравнение:

$$\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x-2} \qquad (5)$$

Выражение левой части теряет числовой смысл при $x=1$, а выражение правой части — при $x=2$. В таком случае допустимыми значениями x служат все рациональные числа, кроме 1 и 2. Составляя таблицу значений выражений, найдем, что $x=4$ есть корень уравнения (5).

Уравнение есть равенство двух алгебраических выражений, которое сопровождается вопросом, при каких допустимых значениях неизвестных букв значения обоих выражений действительно равны.*

Уточнив и расширив понятие об уравнении, учитель в дальнейшем введет и уточнит все сопутствующие понятия и сообщит о делении уравнений по числу неизвестных, по степени неизвестного. В результате выделяется уравнение первой степени с одним неизвестным.

4. Введение понятия равносильности уравнений конкретизируется рассмотрением примеров равносильных и неравносильных уравнений.

Даны два уравнения: $x+5=7$ и $5x=10$. Учащиеся устно решают эти уравнения и убеждаются в том, что они имеют одинаковые корни. *Такие уравнения называются равносильными.*

Рассматриваются еще два уравнения: $x-3=7$, $2x-1=5$. Устное решение покажет, что они имеют различные решения. Такие уравнения называются неравносильными. Преподаватель предлагает классу придумать по паре равносильных, затем по паре неравносильных уравнений. Из их числа рассматривают несколько пар уравнений.

---

* Иные определения понятия уравнения можно найти в книге А. Н. Барсукова „Уравнения первой степени в средней школе", Учпедгиз 1948.

Затем учащиеся дают определение понятия о равносильных уравнениях: уравнения, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Иногда определение читают так: два уравнения называются равносильными, если все решения первого из них являются решениями второго и все решения второго являются решениями первого. Первое определение короче и усваивается легче.

Для проверки усвоения понятия о равносильности уравнений предлагается выяснить, равносильны ли уравнения каждой из следующих пар:

а) $7x - 1 = 34$, б) $15 + 2x = 25$, в) $3x - 1 = -13$,
$x^2 - 25 = 0$, $3x - 17 = -2$, $4x - 2 = 14$.

При решении уравнения крайне желательно делать такие преобразования, которые не нарушали бы равносильности решаемого уравнения. Поэтому важно знать, какие преобразования уравнения не нарушают равносильности, какие могут привести к уравнениям неравносильным. С этой целью надо изучить свойства уравнений

Первое свойство. Пусть дано уравнение: $2x - 3 = 13$. Прибавим к обеим частям его любое число, например 7. Получим уравнение: $2x + 4 = 20$. Найдем устно решения каждого из этих уравнений. Уравнения равносильны.

К обеим частям уравнения $x - a^2 = 5a^2$ прибавим по $-2a^2$. Получаем: $x - 3a^2 = 3a^2$. Решим каждое из этих двух уравнений. Видим, что уравнения равносильны.

К обеим частям уравнения $3x = 15 - 2x$ прибавим целое относительно x выражение $2x$. Получим уравнение $5x = 15$. Оно имеет корень, равный 3. Исходное уравнение также имеет корень, равный 3. Других корней оно не имеет: при $x = 3$ обе части этого уравнения имеют равные значения; если x дать значение больше 3, то значение левой части увеличится, а правой уменьшится; если x дать значение меньше 3, то значение левой части уменьшится, а правой увеличится.

Итак, если к обеим частям уравнения прибавляется число, выражение, не содержащее неизвестного, или целое выражение относительно неизвестного, то получается уравнение, равносильное данному.

Однако если к обеим частям уравнения прибавить выражение, содержащее неизвестное и теряющее числовой смысл при некоторых допустимых значениях неизвестного, то может получиться уравнение, не равносильное данному. Пример: если к обеим частям уравнения $2x - 1 = 7$ прибавим выражение $\frac{1}{x-4}$, то получим уравнение:

$$2x - 1 + \frac{1}{x-4} = 7 + \frac{1}{x-4},$$

не равносильное данному: корень первого уравнения 4 не является корнем второго: при $x = 4$ левая и правая части полученного уравнения теряют числовой смысл.

Получаем первое свойство уравнения: если к обеим частям уравнения прибавить число или выражение, не теряющее числового смысла при всех допустимых значениях неизвестного, то получится уравнение, равносильное данному. Можно использовать и такую формулировку: если к обеим частям уравнения прибавить число или целое относительно неизвестного выражение, то получится уравнение, равносильное данному.

Так как вычитание сводится к прибавлению числа или выражения с противоположным знаком, то первое свойство имеет место и тогда, когда из обеих частей вычитается число или выражение, не теряющее числового смысла при допустимых значениях неизвестного.

Из этого свойства получаются следствия.

1) Дано уравнение: $5x - 4 = 4x + 5$. Неизвестные в обеих частях. Это затрудняет решение уравнения. Прибавим к обеим частям выражение $-4x + 4$. Получим: $5x - 4x = 5 + 4$. Это уравнение равносильно первоначальному по первому свойству. Сравнивая полученное уравнение с данным, видим, что члены $4x$ и -4 перенесены из одной части уравнения в другую с противоположными знаками. Рассматриваются еще один-два примера. В результате получается первое следствие: любой член уравнения можно перенести из

одной части уравнения в другую с противоположным знаком; при этом получается уравнение, равносильное данному.

Опираясь на это следствие, решить уравнения:

$$7x+11=6x-5, \quad 2(5x-2)=3(3x-1).$$

2) В обеих частях уравнения: $x^2+2x+1=x^2+x$ имеются одинаковые члены. Прибавим к обеим частям по $-x^2$. Получим уравнение, по первому свойству, равносильное данному: $2x+1=x$. Одинаковые члены уничтожены. Рассматриваются еще один-два примера, и получается второе следствие: одинаковые члены в обеих частях уравнения можно уничтожить (вычеркнуть); при этом получится уравнение, равносильное данному.

Опираясь на следствие, решить уравнения:

$$x^2-x=(x-1)^2, \quad 4x^2-x=(2x-1)^2.$$

5. Переходим к рассмотрению второго свойства уравнений.

Обе части уравнения $2+x=7$ умножим на одно и то же число, например на 3. Получим: $6+3x=21$. Решая устно, убеждаемся, что оба уравнения имеют одинаковые корни. Уравнения равносильны.

Дано уравнение: $2ax-a=ax+a$, $a\neq 0$. Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{a}$. Получим: $2x-1=x+1$. Убеждаемся, что данное и полученное уравнения равносильны.

Однако при умножении обеих частей уравнения на 0 равносильность нарушается. Уравнения: $2x+1=5$ и $(2x+1)\cdot 0=5\cdot 0$ — неравносильные: первое имеет корень 2, а второе — бесконечное множество решений.

При умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может получиться уравнение, не равносильное исходному. Например, уравнения: $x=4$ и $x^2=4x$ — неравносильные. Первое имеет решение 4, а второе имеет два решения: 4 и 0.

Получаем второе свойство: если обе части уравнения умножить на одно и то же число или выражение, не равное 0 и не содержащее неизвестного, то получится уравнение, равносильное данному. Так как деление всегда можно заменить умножением на обратное число или выражение, то равносильность сохраняется, если обе части уравнения разделить на число или выражение, не равное 0 и не содержащее неизвестного.

Из второго свойства получим следствия.

1) Все члены уравнения $5x+10=15x+20$ имеют общий множитель 5. Разделив обе части на 5, на основании второго свойства получим уравнение, равносильное данному: $x+2=3x+4$.

Полезно рассмотреть еще уравнения, например такие:

$$3a^2x-a^2=2a^2x+a^2,\ 4bx+b=3bx-b.$$

Получаем первое следствие: все члены уравнения можно разделить на одно и то же число или выражение, не равное 0 и не содержащее неизвестного; при этом получается уравнение, равносильное данному.

2) Дано уравнение с дробными коэффициентами:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{x}{4}.$$

Умножив обе части на наименьший общий знаменатель, получим уравнение с целыми коэффициентами: $2x-4=x$. По второму свойству это уравнение равносильно данному,

Рассматривают еще один-два примера. В результате имеем второе следствие: уравнение можно освободить от дробных коэффициентов; при этом получается уравнение, равносильное данному.

Решить уравнения:

$$\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}x-1,\ \frac{x}{3}-\frac{1}{5}=x-\frac{1}{3}.$$

3) Умножим обе части уравнения $-1-2x=-2+3x$ на -1, получим уравнение $1+2x=2-3x$, которое по второму свойству равносильно данному.

Получаем: перед всеми членами уравнения можно изменить знаки на противоположные; при этом получится уравнение, равносильное данному.

В дальнейшем решение уравнений первой степени с одним неизвестным опирается на тождественные преобразования частей уравнения и учение о равносильности. Чтобы теоретические положения не оказались оторванными от практики решения уравнений, учащимся предъявляется требование при решении делать ссылки на те свойства и следствия, которые применяются при преобразовании обеих частей уравнения; при этом они дают соответствующие формулировки. Это способствует прочному усвоению свойств уравнений и их следствий. Только тогда, когда преподаватель убедится, что учащиеся сознательно применяют теоретические положения и правильно читают их, допускается решать уравнения без ссылок на эти положения.

6. Приступая к решению целых уравнений, следует сообщить примерный план решения. Решая, например, уравнение

$$\frac{3x-5}{4}=\frac{4-x}{2}+\frac{9-2x}{6},$$

подчеркивают отдельные этапы решения: 1) освобождаем уравнение от дробных коэффициентов путем умножения на наименьший общий знаменатель, 2) раскрываем скобки, содержащие неизвестное, 3) переносим члены с неизвестным в левую, а то, что известно,—в правую часть, 4) приводим подобные члены, 5) делим обе части на коэффициент при неизвестном, если он не равен 0 или 1, 6) проверяем корень путем подстановки его в уравнение, на место неизвестного.

Поскольку план решения примерный, то можно удовлетвориться тем, что учащиеся передадут его содержание своими словами. При решении многих уравнений некоторые этапы плана могут выпадать. Приведенный план часто рационализирует решение, но возможны и отступления от него. Не следует возражать, если ученик дает свое решение:

$$\frac{3}{4}x-1\frac{1}{3}=\frac{1}{4}x+2\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{2}x=4,\ x=8.$$

Значение левой части: $\frac{3}{4}\cdot 8-1\frac{1}{3}=4\frac{2}{3}$.

Значение правой части: $\frac{1}{4}\cdot 8+2\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

Ответ: $x=8$.

Мало того, такие решения надо поощрять: они свидетельствуют об инициативе ученика.

При фронтальной тренировке в классе уместно включить и такие уравнения, которые не имеют решений. Предлагается решить, например, следующее уравнение:

$$(2x+1)^2-4x^2=6+4x.$$

Учащиеся обычно немало дивятся тому, что в процессе решения исчезли члены, содержащие неизвестное, и тому, что получилось странное равенство: $0=5$.

Учитель обращает их внимание на то, что полученное в процессе решения уравнение $4x+1=6+4x$ противоречиво: при любом значении x значение левой части уравнения меньше значения правой части на 5. „Странный" результат свидетельствует о том, что уравнение не имеет решений, такое уравнение называется противоречивым. Заключение о противоречивости уравнения делается после того, когда имеется уверенность в правильности решения.

На уроках рассматривается еще несколько противоречивых уравнений:

а) $9-\frac{x^2}{4}=1-x-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$; б) $\frac{5x-3}{6}+11=\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}$.

Итак, если при решении уравнения приходим к противоречивому равенству, то это свидетельствует о том, что данное уравнение не имеет решений. Уравнение называется противоречивым.

Полезно разобрать в классе задачи, которые не имеют решений, и, значит, приведут к противоречивым уравнениям. Для примера возьмем две задачи: 1) Найти сторону квадрата, если площадь его равна площади прямоугольника, основание которого на 1 больше, а высота на 1 меньше стороны квадрата; 2) Найти число, если квадрат этого числа меньше суммы искомого с числом 2 на учетверенное искомое число.

При фронтальной работе на уроке можно предложить уравнение, имеющее бесконечное множество решений. Пусть требуется решить следующее уравнение:

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{5}+\frac{x}{15}=\frac{2x-1}{5}.$$

При решении исчезают члены с неизвестными и получается очевидное равенство: $1=1$.

Убедившись, что выкладки верны, заключаем, что уравнение имеет бесконечное множество решений: любое рациональное число—корень уравнения. В таком случае говорят: уравнение удовлетворяется тождественно. Решаются еще уравнения этого вида:

а) $\frac{(3x-2)^2}{3}-3x^2=4\left(\frac{1}{3}-x\right)$, б) $x(x+1)-1=x+(x+1)(x-1)$.

Решаются задачи: 1) Найти дробь со знаменателем 8, если искомая дробь равна дроби, полученной из искомой путем прибавления к числителю половины числителя и к знаменателю половины знаменателя искомой дроби; 2) Найти сторону квадрата, если сумма площадей этого квадрата, квадрата со стороной, равной 1, и прямоугольника со сторонами, равными 2 и искомой стороне, равна площади квадрата со стороной, которая на 1 больше искомой.

7. Приступая к решению уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе, следует повторить свойства уравнений и их следствия. Кроме того, надо обратить особое внимание на то, что при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, возможно нарушение равносильности.

Пример 1. Дано уравнение: $x-5=0$. Умножив обе части его на $x-4$, получим уравнение: $(x-5)(x-4)=0$. Данное уравнение имеет единственный корень: $x=5$. Нетрудно убедиться, что полученное уравнение имеет два корня. Произведенне двух сомножителей равно нулю. Это возможно тогда, когда или первый, или второй сомножители равны нулю. Получаем: $x-5=0$, $x-4=0$; имеем два корня: $x=5$, $x=4$. Второй корень—посторонний по отношению к данному уравнению.

Пример 2. Дано уравнение: $(x-1)(x-2)=0$. Так же как в примере 1, можно показать, что оно имеет два корня: $x=1$, $x=2$. Если разделить обе части данного уравнения на $x-2$ $\left(\text{иначе: умножить на } \frac{1}{x-2}\right)$, получим уравнение $x-1=0$, не равносильное данному: оно имеет только один корень 1. Значит, в нашем примере при делении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, получилось уравнение, не равносильное данному.

Пример 3. Для решения уравнения

$$\frac{1}{x-1}+1=2$$

умножим обе части его на $x-1$. Получим: $1+x-1=2x-2$. Это уравнение имеет корень $x=2$. Убеждаемся, что 2—корень данного уравнения. Значит, нарушения равносильности не произошло.

Итак, при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может получиться уравнение и равносильное и не равносильное данному.

В школе дробные уравнения очень часто решают так: приводят все члены уравнения к наименьшему общему знаменателю, умножают обе части на этот знаменатель (отбрасывают знаменатель), решают полученное уравнение и затем проверяют, удовлетворяют ли его корни исходному уравнению. В результате устанавливают корни решаемого уравнения.

Такой способ решения гарантирует отсев посторонних решений. Однако в некоторых случаях он влечет потерю корней. Применим этот способ к решению уравнения:

$$\frac{x^2}{x-2}-2=\frac{2x}{x-2}. \tag{7}$$

Получаем: $x^2-2x+4=2x$, $(x-2)^2=0$, $x_{1,2}=2$.

Подставив в уравнение (7) вместо неизвестного число 2, убеждаемся, что обе части уравнения теряют числовой смысл. Заключаем, что уравнение (7) не имеет решений.

Однако у него есть корень: $x=2$. В этом убедимся несколькими строками ниже.

За последние годы предлагают другой способ решения уравнений. Он заключается в следующем: 1) переносим все члены в левую часть уравнения, 2) полученное в левой части выражение представим в виде дроби, 3) сократим эту дробь на общий делитель числителя и знаменателя, 4) приравняем числитель нулю и решим полученное уравнение. Корни последнего уравнения являются корнями данного.

Решим этим способом уравнение (7):

$$\frac{x^2}{x-2}-2-\frac{2x}{x-2}=0, \quad \frac{(x-2)^2}{x-2}=0, \qquad x-2=0, \ x=2.$$

При втором способе решения исключена возможность получения посторонних корней. Проверка полученного корня невозможна по данному уравнению. Ее можно выполнить только по уравнению, полученному путем приравнивания числителя 0.

Что лежит в основе этого способа решения?

Две алгебраические дроби называются тождественными, если произведение числителя первой на знаменатель второй равно произведению знаменателя первой на числитель второй. Например, согласно этому определению $\frac{2(x-1)}{x^2-1}$ и $\frac{2}{x+1}$ — тождественные дроби.

Первая из этих дробей теряет числовой смысл при $x=1$, вторая дробь—несократимая и числового смысла при $x=1$ не теряет. Условились значение первой дроби при $x=1$ считать равным значению тождественной несократимой дроби при том же значении x.

Это условие называют алгебраическим принципом продолжения.* Принцип продолжения дает возможность сокращать числитель и знаменатель на общие многочленные множители. В нашем примере можно записать:

$$\frac{2(x-1)}{x^2-1}=\frac{2}{x+1}$$

---

* С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, „Советская наука“ 1951.

На этом основании при втором решении уравнения (7) и произведено сокращение числителя и знаменателя левой части уравнения.

В начале обучения решению дробных уравнений вторым способом встречаются некоторые неудобства. Поясним это решением следующего уравнения:

$$\frac{2x^2}{2x-3}=12+\frac{3x}{2x-3}. \qquad (8)$$

Получаем: $$\frac{2x^2}{2x-3}-\frac{3x}{2x-3}-12=0,$$

$$\frac{2x^2-27x+36}{2x-3}=0.$$

Предстоит сократить дробь. Для этого надо разложить числитель на множители. А в период решения квадратных уравнений в 8-м классе учащиеся еще не умеют разлагать квадратные трехчлены на множители. Это затруднение можно преодолеть, если предварительно ознакомить весь класс с разложением некоторых видов трехчленов второй степени на множители.

В нашей практике в разное время применялся каждый из рассмотренных способов. Итог такой: в 7-м и 8-м классах до конца главы о квадратном уравнении целесообразно применять первый способ решения дробных уравнений. Однако при повторении главы о квадратных уравнениях можно познакомить учащихся со вторым способом решения дробных уравнений.

8. В исследование уравнений входят следующие вопросы: при каких значениях известных букв (параметров) уравнение имеет решение, при каких—не имеет; указать число различных решений в зависимости от значений параметров и соотношений между ними; установить некоторые свойства выражений, являющихся решениями уравнений: например, при каких условиях решение равно нулю, положительное, отрицательное.

Исследование уравнения первой степени с одним неизвестным тесно связано с решением уравнений с буквенными коэффициентами. Поэтому нет надобности рассматривать исследование отдельно: оно сливается с решением уравнений с параметрами. Включение в педагогический процесс элементов исследования осуществляется постепенно.

Прежде всего рекомендуется определять, при каких значениях букв, входящих в уравнение, и при каких соотношениях между ними уравнение не теряет числового смысла. Например, при решении уравнения

$$\frac{2x-3}{a-3}=1-\frac{x}{3-a}$$

отмечается, что a может принимать любые рациональные значения, кроме $a=3$.

Далее учащиеся определяют, при каких значениях известных букв, входящих в выражение неизвестного, и при каких соотношениях между ними значение неизвестного не теряет числового смысла, при каких теряет. Например, при решении уравнения

$$x-1=\frac{4x-5}{c+2}$$

отмечается, что $c \neq -2$. Решение приведет к уравнению $x(c-2)=c-3$.

Получим: 1) $x=\dfrac{c-3}{c-2}$, если $c \neq 2$ и $c \neq -2$;

2) нет решения, если $c=2$.

Затем учащиеся определяют, при каких значениях неизвестного части уравнения не теряют числового смысла и при каких теряют числовой смысл.

При решении относительно x уравнения

$$b+\frac{b+4}{x-1}=\frac{2x+b^2}{x-1}$$

отмечается, что $x \neq 1$. Придем к уравнению:

$$(b-2)x=b^2-4.$$

При $b \neq 2$ получаем $x=b+2$. Так как $x \neq 1$, то $b \neq -1$.

При $b=2$ уравнение имеет бесконечное множество решений: x — любое рациональное число, кроме $x=1$.

Первые уравнения, на которых учащиеся знакомятся с вопросами исследования, содержат один параметр: это упрощает исследование.

После повторения главы о решении уравнений первой степени с одним неизвестным, после изучения неравенств расширяются возможности для исследования. В случаях, когда числитель или знаменатель неизвестного выражает линейные функции параметра, а соответствующие знаменатель или числитель — числа, можно ставить вопросы, при каких значениях параметра уравнение имеет положительный, отрицательный корень или корень, равный 0. Например, решив уравнение:

$$\frac{x+1}{a-2}=1+\frac{2-x}{a-2}$$

и получив корень $x=\frac{a-1}{2}$, где $a\neq 2$, учащиеся отмечают, что при $a=1$ корень равен 0, при $a>1$, кроме $a=2$, корень—положительный, при $a<1$—корень отрицательный.

Вопросы исследования уравнений найдут место при решении задач на составление уравнений. При этом для многих задач естественная область значений параметров ограничивается содержанием задач.

Очерк седьмой

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ, ПОДГОТОВЛЯЮЩИХ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Каждый учитель математики знает, что решение задач путем составления уравнений является в методическом отношении довольно трудным материалом. Наблюдения показывают, что составление уравнений по тексту задач вызывает значительные затруднения у многих учащихся, что такие затруднения встречаются не только в 6-м и 7-м классах, но и в старших классах до 10-го включительно.

Как и при решении многих методических вопросов, здесь тоже полезно уяснить те трудности, которые мешают продуктивному решению задач и наметить пути и способы их преодоления. В чем же заключаются затруднения алгебраического метода решения задач?

Решению задач путем составления уравнений предшествует обучение решению арифметических задач. Методы решения задач в арифметике отличны от методов решения задач в алгебре. Однако между теми и другими много общего. Решение задач в курсе арифметики является хорошей подготовкой к решению их с помощью составления уравнений. И нередко трудности, которые испытывают ученики при решении задач путем составления уравнений, являются следствием того, что учащиеся имеют недостаточные навыки решения арифметических задач.

Значит, чтобы преодолеть некоторые затруднения в решении задач путем составления уравнений, следует поднять уровень умений и навыков в решении арифметических задач. Как улучшить эти умения и навыки? Детальное обсуждение этого вопроса выходит за пределы нашей темы. Поэтому ограничимся некоторыми указаниями. Основным средством, повышающим уровень решения задач, являются подготовительные упражнения. Целесообразно начинать их с первых уроков арифметики в 5-м классе и продолжать заниматься ими в течение длительного периода. Общая цель этих упражнений заключается в последовательном и постепенном преодолении затруднений в решении различных видов арифметических задач, в целесообразном обогащении второй сигнальной системы новыми необходимыми сигналами, в развитии серии новых полезных условных рефлексов.

Кроме того, в процессе выполнения подготовительных упражнений полезно развивать навыки в составлении числовых выражений. Такие навыки в будущем облегчат составление буквенных выражений и уравнений.

Иногда учащиеся 6—7-го классов не могут составить уравнение по тексту задачи или получают неверное уравнение потому, что не понимают задачи, вкладывают ложный смысл в ее текст. Каждому учителю приходится наблюдать, как некоторые учащиеся неправильно истолковывают выражения „больше в 2 раза", „больше на 2", „меньше в 3 раза", „меньше на 3 ", несмотря на то, что ранее они пользовались ими. Наблюдаются случаи, когда некоторые учащиеся неверно понимают слова: „одновременно", „позже", „раньше", „скорость" и другие.

Значит, непонимание текста задачи или части его является одним из препятствий, мешающих решению задач путем составления уравнений.

Как изжить этот недостаток в подготовке учащихся?

Основным средством является система целесообразно подобранных упражнений, в результате выполнения которых указанные выше и им подобные выражения делаются надежными сигналами второй сигнальной системы каждого ученика, помогает им быстрее усваивать тексты задач. Об этих упражнениях будет речь в дальнейшем.

2. В основе каждой математической задачи лежит одна, а чаще несколько функциональных зависимостей. Например, задача: „Поезд за три часа прошел 126 км. В какое время этот поезд пройдет 420 км, если будет идти с той же средней скоростью?“ основана на том, что путь, проходимый равномерно движущимся телом, пропорционален скорости и времени движения.

Знание функциональных зависимостей, лежащих в сюжетах алгебраических задач, дает ключ к решению, а отсутствие этих знаний является большим препятствием.

Учащиеся часто не знают функциональных зависимостей, которые лежат в основе задач на составление уравнений. И это является одной из основных причин, мешающих решению задач алгебраическими средствами.

Чтобы преодолеть затруднения, вызываемые незнанием функциональных зависимостей, необходимо изучить эти зависимости. Может показаться, что число этих зависимостей очень велико и что все их охватить невозможно. Действительно, зависимостей много, но их использование ограничивается видом уравнений или систем, которые на определенном этапе обучения можно применить.

Для успешного решения задач необходимо добиться, чтобы учащиеся хорошо знали те функциональные зависимости, которые лежат в основе задач, чтобы они могли использовать их в конкретных условиях. Значит, надо вести преподавание алгебры так, чтобы эти функциональные зависимости стали известны учащимся. Этого можно достичь также с помощью подготовительных упражнений.

Задача, решаемая путем составления уравнения или системы уравнений, представляет собой ряд суждений на определенную тему, выраженных на родном языке учащихся. В процессе работы эти суждения приходится переводить на язык алгебраических выражений и уравнений. Этот перевод, по признанию методистов и учителей, составляет одну из значительных трудностей. Если учитель желает добиться, чтобы школьники хорошо составляли уравнения или системы уравнений, он должен научить их переводить суждения с родного языка на язык алгебраических символов и обратно.

Конечно, только при условии частых упражнений в подобных переводах можно рассчитывать на то, что учащиеся смогут быстро записывать тексты задач с помощью алгебраической символики, правильно истолковывать алгебраические выражения и уравнения и читать их на родном языке. Такие переводы должны найти место в подготовительных упражнениях.

В учебно-методической литературе по алгебре встречаются мнения, что нельзя указать общих путей, общих приемов для решения задач путем составления уравнений или систем уравнений. Так, например, И. И. Чистяков утверждал, что „определенных правил для составления уравнения из условий задач нет", что „общего правила для составления уравнения, пригодного для всех случаев, дать невозможно."*

Конечно, такое положение, когда ни автор учебника, ни учитель не могут указать общих правил, общих приемов составления уравнений по текстам задач, и не только не могут, но и уверены, что таких приемов не существует,— не может способствовать успешному развитию педагогического процесса в интересующем нас вопросе.

Однако в методической литературе встречаются и иные высказывания. За последние 25 лет в ряде методических работ признается, что общий прием решения задач с помощью уравнений существует; например, за это решительно высказывается С. С. Бронштейн. Он пишет: „Неверно, что нет единого принципа составления уравнений. Общий принцип, которым руководствуются при составлении уравнений, можно сформулировать так: надо проанализировать, какие величины, находящиеся во взаимной зависимости, равны между собою. Соединив такие два выражения знаком равенства, составляют уравнение".**

---

* И. И. Чистяков, Методика алгебры, Учпедгиз 1934, стр. 95—97.

** С. С. Бронштейн, Методика алгебры, Учпедгиз 1935, стр. 110 и 111.

Имеется общий метод решения задач путем составления уравнений. Таким методом является особая форма алгебраического анализа. Это положение развивается в очерке восьмом.

3. Все указанные трудности могут быть ликвидированы путем введения предварительных систематически проводимых упражнений. Основные цели подготовительных упражнений таковы: а) они должны помочь детям понимать тексты задач и вкладывать в них верный смысл; б) при выполнении их дети должны научиться переводить тексты задач с родного языка на язык алгебраических символов, выражений и уравнений; в) в процессе их решения дети должны освоиться с наиболее распространенными функциональными зависимостями, научиться правильно их понимать и умело пользоваться ими; г) при выполнении упражнений дети должны овладеть теми элементарными операциями, которые являются составными элементами метода решения задач путем составления уравнений или систем уравнений.

Подготовительные упражнения, независимо от их прямых целей, имеют широкое значение при обучении основам алгебры: они интересны с точки зрения политехнического обучения, являются сильным средством для развития мышления и мощным средством в борьбе с формальным усвоением материала. Неизбежная затрата времени на их выполнение не является нецелесообразной расточительностью, а служит общему подъему математической культуры класса. Израсходованное на их выполнение время с избытком возвращается, как только учащиеся приступают к глубокому изучению линейных уравнений и их систем. Подготовительные упражнения проводятся в 6-м и 7-м классах, а в случае надобности—и в 8-м классе.

Тематика подготовительных упражнений определяется функциональными зависимостями, которые кладутся в основу задач, сюжетами наиболее распространенных видов задач. В 6-м и 7-м классах основные темы упражнений таковы: разностное и кратное отношение чисел, зависимость между компонентами и результатами действий, изменение результатов действий в зависимости от изменения компонентов, зависимость между ценой, количеством товара и стоимостью его, структура целого числа в десятичной системе счисления, структура обыкновенной дроби и изменение ее в зависимости от изменения числителя и знаменателя, зависимость между путем, скоростью и временем при равномерном движении, зависимости, связанные с работой, наполнением бассейнов, некоторые метрические зависимости геометрии. В подготовительные упражнения могут быть включены и другие темы, например, расчеты шкивов, рычагов.

В основном упражнения группируются по темам. Работа над упражнениями каждой темы ведется до выработки прочных навыков. К наиболее трудным темам можно возвращаться несколько раз. В последний период проведения упражнений уместно использовать различные сюжеты.

Подготовительным упражнениям уделяется по 7—8 минут на многих уроках алгебры в 6-м и 7-м классах, на которых не проводятся алгебраические диктанты. Эти упражнения могут быть непосредственно связаны с темою урока,—например, тогда, когда урок посвящается решению задач путем составления уравнений, они могут и не иметь связи с темой урока. Им можно отвести первые минуты урока, или после проверки домашней работы, или в конце урока.

При выполнении упражнений делаются краткие записи в форме таблиц на классной доске. Каждый ученик записывает в тетради. Записи делаются как бы под своеобразную диктовку, когда учитель читает упражнение. Каждый раз учитель дает форму таблицы, которая заполняется при выполнении упражнений.

При выполнении упражнений, как правило, не требуется упрощать полученные выражения и не всегда требуется решать составленные уравнения. Однако целесообразно задавать дополнительные вопросы, требующие вычисления числового значения алгебраического выражения, установления допустимых значений букв, входящих в выражение. Как правило, ответы на дополнительные вопросы не должны приводить к письменным вычислениям. Можно предложить классу решить полученное уравнение, если это решение выполняется устно.

Решение учеником достаточно сложных упражнений свидетельствует о его серьезных достижениях в изучении алгебры. Поэтому учитель имеет возможность оценить работу ученика. Таким образом, решение подготовительных упражнений дает возможность накапливать отметки.

4. В сюжетах задач на составление уравнений часто встречается разностное и кратное отношения чисел. В одних задачах они играют основную роль, в других являются некоторыми вспомогательными условиями. При правильном обучении арифметике уже в 5-м классе хорошо владеют этими отношениями, однако наблюдаются и такие случаи, что некоторые шестиклассники плохо пользуются ими. Подготовительные упражнения на разностные и кратные отношения чисел предназначены для ликвидации недочетов в подготовке учащихся. В них будет и новое: применяется буквенная символика.

Рекомендуется проводить занятия, подобные следующим:

1-е занятие. 1) Линейка стоит a коп., а треугольник в 2 раза дороже линейки. Сколько следует заплатить за линейку и треугольник вместе?

2) Цена линейки a коп., а транспортир на 2 коп. дороже линейки. Сколько стоят линейка и транспортир вместе?

3) Придумайте задачи, похожие на предыдущие, чтобы решение их приводило к выражениям: а) $b + 4b$, б) $b + (b + 4)$.

4) Второе число меньше первого в 5 раз. Найти сумму этих чисел, обозначив первое через x.

5) Второе число меньше первого на 5. Введя обозначение одного из них, написать произведение этих чисел.

6) Первое число меньше второго на c. Написать частное от деления первого числа на второе.

При выполнении упражнений заполняется таблица:

№№ п. п.	1-е число	2-е число	Результат
1	a	$2a$	$a+2a$
2	a	$a+2$	$a+(a+2)$
....	....	....	....

2-е занятие. 1) Одна вещь стоит a руб., другая—на 5 руб. дороже, а третья в 5 раз дороже первой. Сколько стоит вторая и сколько третья вещь?

2) Длина одного отрезка прямой равна m м, длина второго в 3 раза меньше, а третьего на 3 м меньше первого. Какова длина второго и третьего отрезков?

3) Величина одного угла $c°$, другой угол на $n°$ больше, а третий в n раз больше первого. Сколько градусов во втором и третьем углах?

4) Придумайте задачи, похожие на предыдущие.

5) Написать сумму трех чисел, из которых второе равно k, первое меньше второго на 9, третье больше второго в 9 раз.

6) Найти сумму трех чисел, из которых второе равно m, первое больше второго в n раз, а третье меньше второго в n раз.

3-е занятие. При выполнении упражнений учащиеся составляют уравнения.

1) Один из смежных углов больше другого на 20°. Найти меньший угол.

2) Один из смежных углов меньше другого в 5 раз. Определить меньший угол.

3) Одна книга дороже другой на 20 коп., а обе вместе стоят 1 руб. 20 коп. Узнать цену дешевой книги.

4) Придумайте задачи, решение которых приводит к уравнению: а) $3x+x=180$, б) $x+(x+10)=90$.

5) Один из смежных углов составляет $\frac{3}{4}$ другого. Чему равен больший угол?

6) Один из смежных углов составляет 50% другого. Найти меньший из них.

4-е занятие. Учащиеся составляют уравнения.

1) Один смежный угол относится к другому, как $1:5$. Определить меньший угол.

2) Один смежный угол относится к другому, как $2:7$. Определить один из углов.

3) Углы треугольника относятся, как $1:2:3$. Вычислить меньший угол. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

4) Второе число составляет $\frac{2}{3}$ первого, а третье

на 20 больше первого. Найти первое число, если сумма трех чисел равна 52.

5) Придумайте задачи, решение которых приводит к уравнению: а) $x+3x+5x=180$, б) $x+0{,}5x+(x+10)=50$.

Результаты заносятся в таблицу:

№№ п. п.	1-е число	2-е число	3-е число	Сумма	Уравнение

5-е занятие. 1) Цена линейки a коп. Цена треугольника на 50% выше цены линейки. Найти цену треугольника.

2) Цена первой книги k коп., а цена второй составляет 75% цены первой. Сколько стоят обе книги?

3) За смену рабочий изготовил некоторое число деталей, а другой рабочий сделал 90% того числа, которое принадлежит первому. Оба вместе они сделали 190 деталей. Составить уравнение для определения числа деталей, выполненных первым рабочим.

5. Встречаются задачи на составление уравнений, в которых играет роль зависимость между компонентами четырех арифметических действий. Уместны подготовительные упражнения к таким задачам.

1-е занятие. 1) Сумма двух чисел равна s, одно из слагаемых равно a. Найти другое слагаемое.

2) Уменьшаемое равно c, а разность равна r. Чему равно вычитаемое?

3) Вычитаемое равно d, а разность равна r. Найти уменьшаемое.

4) Сумма двух слагаемых равна $9s$, первое слагаемое равно $3s$. Что можно определить по этим данным и как это сделать?

5) Разность чисел равна $12r$, уменьшаемое равно $48r$. Что можно определить по этим данным?

При выполнении упражнений заполняется таблица:

№№ п. п.	1-е число	2-е число	Результат действия

2-е занятие. 1) Произведение двух сомножителей равно p, а один из них равен c. Найти другой сомножитель.

2) Площадь прямоугольника равна s, а основание его равно a. Найти высоту.

3) Площадь прямоугольника равна s, а высота его равна h. Найти основание.

4) Делимое равно a, частное равно q. Найти делитель.

5) Делитель равен b, частное равно q. Найти делимое.

3-е занятие. 1) Делимое равно 100, делитель 7, частное 14 и остаток 2. Написать равенство.

2) Делитель равен b, частное 9 и остаток 4. Найти выражение для делимого.

3) Делимое равно a, частное 7 и остаток 3. Найти, чему равен делитель.

4) Делимое равно c, делитель 11, частное 5 и остаток d. Найти выражение для остатка.

5) Составить уравнение для определения делителя, если делимое равно 200, частное q и остаток 7.

4-е занятие. 1) Сумма двух слагаемых больше первого из них в 5,5 раза. Обозначив первое слагаемое через x, найти выражение для второго слагаемого.

2) Разность составляет 0,4 вычитаемого. Ввести обозначение для вычитаемого и найти выражение для уменьшаемого.

3) Произведение двух сомножителей на 20 больше второго из них. Ввести целесообразное обозначение и найти выражение для второго сомножителя.

4) Частное на a меньше делителя. Ввести обозначение и найти выражение для делимого.

5) Выполнено деление целых чисел с остатком, при этом оказалось, что частное на 5 больше делителя и на 3 больше остатка. Найти выражение для делимого.

5-е занятие. В следующих упражнениях, пользуясь зависимостью между компонентами и результатами действий, составить уравнения:

1) Одно из двух слагаемых равно 42, а другое — в 7 раз меньше суммы. Найти другое слагаемое.

2) Уменьшаемое равно 24, а разность в 5 раз меньше вычитаемого. Найти разность.

3) Разность равна $\frac{2}{3}$ вычитаемого, а уменьшаемое равно 55. Найти вычитаемое.

4) Произведение двух сомножителей на 24 больше множимого, а множитель равен 4. Найти множимое.

5) Делимое больше делителя на 16, а частное равно 5. Найти делитель.

6. Переходим к подготовительным упражнениям, помогающим прочному усвоению изменения результатов четырех арифметических действий в зависимости от изменения компонентов. В этих упражнениях числа, обозначенные буквами и указывающие изменения компонентов, а также компоненты умножения и деления условимся считать положительными.

1-е занятие. 1) Как изменится сумма, если одно из слагаемых увеличить на 9? на k?

2) Как изменится сумма, если одно из слагаемых уменьшить на 10,5? на k?

3) Как прочитать правила, записанные каждой из двух совокупностей равенств:

а) $a+b=s$,
$(a+k)+b=s+k$,
$a+(b+k)=s+k$?

б) $a+b=s$,
$(a-k)+b=s-k$,
$a+(b-k)=s-k$?

4) Как изменится сумма, если одно слагаемое увеличить на 8, а другое на k?

5) Одно слагаемое уменьшено на k, другое на l. Как изменится сумма?

6) Одно слагаемое увеличено на $10c$, другое уменьшено на $16c$. Как изменится сумма?

2-е занятие. 1) Как изменится разность, если уменьшаемое: а) увеличить на 10? на k? б) уменьшить на 7? на l?

2) Как изменится разность, если вычитаемое: а) увеличить на 4,5? на k? б) уменьшить на 9? на l?

3) Прочитать правила, записанные совокупностями равенств:

а) $a-b=r$,
$(a+k)-b=r+k$;

б) $a-b=r$,
$(a-k)-b=r-k$;

в) $a-b=r$,
$a-(b+k)=r-k$;

г) $a-b=r$,
$a-(b-k)=r+k$.

4) Как изменится разность, если вычитаемое увеличить на $7p$, а уменьшаемое уменьшить на $4p$?

5) Уменьшаемое увеличено на $11z$, вычитаемое уменьшено на $4{,}2z$. Как изменится разность?

6) Уменьшаемое уменьшено на $13{,}4d$, вычитаемое уменьшено на $13{,}4d$. Что произойдет с разностью?

3-е занятие. 1) Как изменится площадь прямоугольника, если его основание: а) увеличить в 5 раз? в k раз? б) уменьшить в 6 раз? в k раз?

2) Как изменится площадь прямоугольника, если его высоту: а) увеличить в k раз? б) уменьшить в l раз?

3) Прочитать правила, записанные совокупностями равенств:

а) $a \cdot b = c,$
$(a \cdot k) \cdot b = c \cdot k;$
$a \cdot (b \cdot k) = c \cdot k;$

б) $a \cdot b = c,$
$(a : k) \cdot b = c : k,$
$a \cdot (b : k) = c : k.$

4) Сомножители увеличены: один в m раз, другой в n раз. Как изменится произведение? ($m > 1$, $n > 1$).

5) Сомножители уменьшены: один в k раз, другой в l раз? Как изменится произведение? ($k > 1$, $l > 1$).

6) Как изменится произведение, если один сомножитель увеличить в $10m$ раз, другой уменьшить в $2m$ раз? ($m > 1$).

4-е занятие. 1) Как изменится частное, если делимое: а) увеличить в 7 раз? в k раз? б) уменьшить в 10 раз? в k раз? ($k > 1$).

2) Как изменится частное, если делитель: а) увеличить в 4 раза? в k раз? б) уменьшить в 11 раз? в k раз? ($k > 1$).

3) Прочитать правила, выраженные совокупностями равенств:

а) $a : b = q,$
$(a \cdot k) : b = q \cdot k;$

б) $a : b = q,$
$(a : k) : b = q : k;$

в) $a : b = q,$
$a : (b \cdot k) = q : k;$

г) $a : b = q,$
$a : (b : k) = q \cdot k,$

где $k > 1$.

4) Как изменится частное, если делимое увеличить в k раз, а делитель уменьшить в l раз? ($k > 1$, $l > 1$).

5) Как изменится частное, если делимое уменьшить в $2k$ раз, а делитель увеличить в $3k$ раз? ($k > 1$).

6) Прочитать правила, выраженные совокупностями равенств:

а) $a:b=q$.
$(ak):(bk)=q$;

б) $a:b=q$,
$(a:k):(b:k)=q$,

где $k>1$.

5-е занятие. 1) Сумма двух слагаемых увеличилась на $10n$, при этом первое слагаемое было увеличено на $2n$. Что можно определить по этим данным?

2) Разность двух чисел увеличилась на $15n$, при этом уменьшаемое было увеличено на $10n$. Что можно узнать по этим данным?

3) Площадь треугольника увеличилась в c раз, при этом высота была увеличена в p раз? Как было изменено основание треугольника? $(c>p>1)$.

4) Площадь треугольника уменьшилась в d раз, при этом основание было уменьшено в p раз. Как была изменена высота треугольника? $(d>p>1)$.

5) Частное увеличилось в 20 раз, делимое при этом было увеличено в n раз. Что можно определить по этим данным? $(20>n>1)$.

7. Школьники в быту встречаются с практическими расчетами, которые сопровождают покупку или продажу какого-либо товара. Они знакомы с теми функциональными зависимостями, с которыми при этом приходится иметь дело. Однако и на эту тему полезны подготовительные упражнения.

1-е занятие. 1) Цена ручки c коп. Сколько стоит 7 ручек? k ручек? Найти стоимость k ручек в рублях.

2) За тетради заплатили s руб. Узнать цену тетради, если куплено 27 тетрадей. Выразить цену в копейках. Узнать стоимость k тетрадей.

3) За купленные для учащихся задачники заплатили s руб. Цена задачника c руб. Сколько куплено задачников?

4) Прочитать правила, выраженные каждым из следующих равенств:

а) $ck=s$, б) $c=\frac{s}{k}$, в) $k=\frac{s}{c}$,

где c—цена, k—количество товара, s—стоимость.

2-е занятие. 1) Куплено 20 карандашей по 20 коп. и b ручек по 12 коп. за штуку. Сколько заплачено за все карандаши и ручки? Какова стоимость всей покупки в рублях?

2) Куплено m тетрадей по a коп. и n блокнотов по b коп. за штуку. Найти стоимость купленных тетрадей и блокнотов. Определить стоимость в рублях.

3) За 20 карандашей заплачено a руб., за 10 ручек b руб. На сколько карандаш дороже ручки? Выразить ответ в копейках.

4) За m учебников заплачено 12 руб., а за n задачников 30 руб. На сколько учебник дороже задачника?

5) За купленный картофель заплачено p руб., а за морковь q руб. Цена килограмма картофеля c коп., а килограмма моркови d руб. Сколько куплено картофеля и моркови вместе?

При выполнении упражнений заполняется таблица:

№№ п. п.	Количество 1-го товара	Цена	Стоимость	Количество 2-го товара	Цена	Стоимость	Ответ

3-е занятие. 1) За 5 куб. м березовых и 8 куб. м сосновых дров заплачено p руб. Цена 1 куб. м березовых дров m руб., а сосновых n руб. Написать равенство, выражающее зависимость между данными числами.

2) Первый раз куплено m кг конфет по a руб. за килограмм, второй раз куплено n кг конфет по b руб. за килограмм. Первый раз заплачено на c руб. больше. Составить равенство, связывающее все данные числа.

3) За 3 кг конфет заплачено k руб., а за 4 кг пряников l руб. Килограмм конфет дороже килограмма пряников на 10 руб. Составить равенство, устанавливающее связь между данными числами.

4) Цена 1 куб. м дубовых дров a руб., а сосновых b руб. За купленные дубовые дрова заплачено m руб., за сосновые—n руб. Всего куплено q куб. м дров. Составить равенство, связывающее данные числа.

4-е занятие. При выполнении упражнений составляются уравнения.

1) Купили 10 тетрадей по 26 коп. за штуку. Затем по той же цене купили еще несколько тетрадей. Всего за тетради заплатили 5 руб. 20 коп. Сколько тетрадей купили второй раз?

2) Купили 5 книг ценою по 70 коп. Затем по другой цене купили еще 6 книг. За все книги заплатили 6 руб. 50 коп. Узнать цену книги.

3) Первый раз купили несколько транспортиров ценою по a коп.; второй раз по той же цене купили на 3 транспортира больше, чем в первый раз. Всего за транспортир заплатили r руб. Сколько купили транспортиров в первый раз?

8. В некоторых задачах на составление уравнений используется структура обыкновенной дроби, идет речь о взаимно обратных числах и различных операциях над ними. Полезны подготовительные упражнения.

1-е занятие. 1) Числитель дроби равен p, а знаменатель на 2 единицы больше числителя. Написать дробь. Какие значения может принимать p?

2) Знаменатель дроби равен q, а числитель на 5 меньше знаменателя. Написать дробь. Какие значения может принимать q?

3) Записать дробь, если числитель ее на 1 меньше числа a, а знаменатель на 1 больше того же числа.

4) Найти выражение для дроби, если числитель ее на 2 больше числа b, а знаменатель в 2 раза больше того же числа.

5) Числитель дроби на 5 меньше квадрата числа a, знаменатель на 4 больше куба того же числа. Записать дробь.

2-е занятие. Восстанавливается в памяти учащихся, какие числа называются взаимно обратными.

1) Дано выражение: $\frac{8}{8-c}$. При каких значениях c выражение имеет смысл? Написать дробь, обратную данной.

2) Числитель дроби равен 5, знаменатель на k больше числителя. Написать: а) эту дробь, б) обратную дробь.

3) Знаменатель дроби равен 20, числитель на m меньше знаменателя. Выразить сумму этой дроби и обратной ей.

4) Числитель дроби на a больше 10, а знаменатель на a меньше 10. Найти разность между этой и обратной дробью.

5) Числитель дроби на a больше квадрата числа b, а знаменатель на a меньше удвоенного числа b. Написать произведение этой дроби и обратной ей.

В процессе выполнения упражнений результаты записываются в таблице:

№№ п. п.	Числитель	Знаменатель	Дробь	Обратная дробь	Результат действия

3-е занятие. 1) Дана дробь $\frac{x}{y}$. Из нее получена другая дробь путем увеличения числителя на 2. Которая из дробей больше? На сколько больше?

2) Из дроби $\frac{x}{y}$ получена другая дробь путем увеличения знаменателя на 1. Какая из дробей меньше? На сколько меньше?

3) Дана дробь $\frac{m}{n}$. Другая дробь получена из данной путем увеличения числителя дроби на 3 и уменьшения знаменателя на 4. Какая из дробей больше? На сколько больше?

4) Числитель дроби на 4 меньше знаменателя. Написать: а) дробь, б) обратную дробь.

5) Числитель дроби на a больше знаменателя. Написать сумму этой и обратной дроби.

6) Знаменатель дроби на b меньше числителя. Записать разность между этой и обратной дробью.

4-е занятие 1) Числитель дроби на 2 меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить на 1, то получится дробь, равная $\frac{3}{4}$. Составить уравнение.

2) Числитель дроби на 1 больше знаменателя. Сумма этой и обратной дроби равна $2\frac{1}{12}$. Написать уравнение.

3) Знаменатель дроби на 3 меньше числителя. Разность между этой и обратной дробью равна 2,1. Составить уравнение.

4) Знаменатель дроби на 2 больше числителя. Если каждый из членов дроби увеличить на 5, то получится дробь $\frac{4}{5}$. Составить уравнение.

9. Встречаются задачи на составление уравнений, в сюжетах которых идет речь о двузначных и трехзначных числах в десятичной системе и различных операциях над ними. Уместны следующие подготовительные упражнения.

1-е занятие. 1) Напишите число, содержащее 7 десятков и a единиц.

При весьма вероятном затруднении целесообразно поставить такие вопросы: а) Сколько единиц содержит десяток? б) Сколько единиц в семи десятках? в) Сколько всего единиц в числе? Аналогичные вопросы уместны и в дальнейшем, когда учащиеся при записи чисел встретят затруднения.

2) Напишите число, состоящее из a десятков и 5 единиц.

3) Число содержит a десятков и b единиц. Как написать это число?

4) Напишите число, имеющее z десятков. Какие числовые значения может принимать z?

5) Записать число, содержащее x десятков и y единиц. Какие значения может принимать y? x?

Результаты выполнения упражнений фиксируются в таблицу:

№№ п. п.	Число десятков	Число единиц	Число

2-е занятие. 1) Напишите число, содержащее a сотен. Какие значения может принимать a?

2) Запишите число, имеющее a сотен и c единиц.

3) Число содержит x сотен и y десятков. Как записать число?

4) В числе x сотен, y десятков и z единиц. Написать число.

5) Число содержит m десятков и n единиц. Написать это число и сумму чисел, выраженных цифрами этого числа.

6) В числе m сотен, n десятков и p единиц. Записать это число и сумму чисел, выраженных его цифрами.

Результаты фиксируются в таблицу:

№№ п. п.	Число сотен	Число десятков	Число единиц	Число	Сумма цифр

3-е занятие. Возьмем какое-либо двузначное число, например, 75. Переставим цифры этого числа. Получим 57. Это число имеет обратный порядок цифр по сравнению с числом 75.

1) Дано целое число $10a+b$. Сколько в нем десятков? Сколько единиц? Запишите число с обратным порядком цифр.

2) В числе c десятков, d единиц. Напишите это число. Напишите число с обратным порядком цифр.

3) Дано целое число $100m+10n+q$. Напишите число с обратным порядком цифр.

4) Число имеет x сотен и z единиц. Запишите: а) это число, б) число с обратным порядком цифр, в) сумму цифр этого числа.

5) Число содержит p сотен, q десятков, s единиц. Запишите: а) это число, б) число с обратным порядком цифр, в) сумму цифр числа.

4-е занятие. 1) Число имеет m десятков и n единиц. Записать: а) число с обратным порядком цифр; б) произведение данного числа на число с обратным порядком цифр; в) частное от деления данного числа на сумму его цифр.

2) Двузначное число имеет a десятков, а число единиц на 2 больше числа десятков. Написать это число. Записать частное этого числа на число с обратным порядком цифр.

3) В двузначном числе единиц на 2 меньше числа десятков. Написать это число, обозначив количество десятков через x. Записать сумму этого числа с числом, имеющим обратный порядок цифр.

4) В двузначном числе десятков на 3 меньше числа единиц. Написать: а) это число; б) разность между этим числом и числом с обратным порядком цифр.

5-е занятие. 1) В двузначном числе количество десятков на 1 больше количества единиц. Частное от деления этого числа на сумму его цифр равно 6. Написать уравнение.

2) В двузначном числе число единиц на 4 больше числа десятков. Произведение этого числа на число с обратным порядком цифр равно 765. Составить уравнение.

3) В двузначном числе число десятков на 2 больше числа единиц. Сумма этого числа с числом, имеющим обратный порядок цифр, равна 44. Написать уравнение.

4) Разность между двузначным числом, у которого единиц на 1 меньше числа десятков, и числом с обратным порядком цифр равно 9. Написать уравнение.

Фиксируем результаты в таблице:

№№ п. п.	Десятки	Единицы	Число	Число с обратным порядком цифр	Уравнение

10. Особое значение имеют упражнения, в которых идет речь о равномерном движении. Учитель на конкретных примерах разъясняет, что понимается под равномерным движением, и указывает, что в задачах „на движение“ разумеется только равномерное движение.

1-е занятие. 1) Пионерский отряд идет со средней скоростью 4 км в час. Какой путь пройдет отряд в 3,5 часа? в t часов?

2) Связной на велосипеде проехал 25 км. С какой средней скоростью ехал связной, если он находился в пути 2,5 часа? t часов?

3) Связной на мотоцикле проехал 45 км. Сколько времени он находился в пути, если средняя скорость связного 60 км в час? v км в час?

4) Прочитать правила, выражаемые каждым из следующих равенств:

а) $s=vt$, б) $v=\frac{s}{t}$, в) $t=\frac{s}{v}$, если s—путь, пройденный телом, t—время движения, v—скорость.

2-е занятие. 1) Брат и сестра вышли одновременно из дома в противоположные направления. Брат идет со скоростью 68 м в мин., сестра со скоростью 60 м в мин. Какое расстояние будет между ними через 3 мин.? через t мин.?

2) Брат и сестра вышли одновременно из дома в одном направлении. Брат идет со скоростью 70 м в мин., а сестра—со скоростью 60 м в мин. Какое расстояние будет между ними через 4 мин.? через t мин.?

3) Брат и сестра вышли одновременно из дома. Через 5 мин. брат находился от дома на расстоянии 345 м, а сестра—на расстоянии 290 м. На сколько скорость ходьбы брата превышает скорость ходьбы сестры?

4) Одна моторная лодка, двигаясь со скоростью 12 км в час, прошла s км. Другая, двигаясь со скоростью 10 км в час., прошла на 2 км больше, чем первая. Какая лодка находилась в пути дольше? на сколько дольше?

3-е занятие. 1) Расстояние между двумя городами равно a км. Из этих городов в одно и то же время навстречу друг другу выехали два автомобиля, один со скоростью 40 км в час., другой 50 км в час Через сколько часов автомобили встретятся?

2) Из двух сёл одновременно навстречу друг другу вышли две группы лыжников. Первая двигалась со скоростью v км в час, скорость другой была больше на 2 км. Лыжники встретились через 1,5 часа. Найти расстояние между населенными пунктами.

3) Расстояние между двумя селениями равно 24 км. Из этих селений одновременно навстречу друг другу выехали велосипедисты с одинаковой скоростью.

Составить уравнение для определения скорости велосипедистов, если они встретились через 1,2 часа.

4) Из двух штабов одновременно навстречу друг другу выехали связные, один на велосипеде, другой на мотоцикле. Они встретились через 20 мин. Составить уравнение для определения скорости связного на велосипеде, если скорость мотоциклиста в 5 раз больше скорости велосипедиста, а расстояние между штабами 30 км.

Результаты записываются в таблицу:

№№ п. п.	Расстояние	Скорость 1-го	Скорость 2-го	Время	Уравнение

4-е занятие. 1) Турист прошел расстояние между двумя селениями за t час. Какую часть расстояния он прошел за 1 час? за k часов? $(k<t)$.

2) Один турист может пройти расстояние между двумя городами за a час., другой за b час. Туристы одновременно вышли из этих городов навстречу друг другу. На какую часть расстояния они сближаются за 1 час? за t часов? Через сколько часов они встретятся?

3) Два самолета вылетели одновременно с двух аэродромов навстречу друг другу и встретились через 30 мин. Первый из них может пролететь расстояние между аэродромами за 50 мин. Составить уравнение для определения, в какое время может пролететь то же расстояние второй самолет.

4) Два тела начали движение в одно и то же время из двух пунктов навстречу друг другу и встретились через 12 сек. Первое тело может пройти путь между этими пунктами за 30 сек. Составить уравнение для определения, в какое время второе тело может пройти тот же путь.

5-е занятие. При выполнении упражнений составляются уравнения.

1) По Волге мимо пристани проплыл плот. Через 6 час. после этого от той же пристани отошел пароход вниз по Волге. Идя со средней скоростью 16 км в час, пароход догнал плот через 2 часа после отхода от пристани. С какой скоростью плывет плот?

2) По реке мимо пристани проплыл плот со скоростью 3 км в час. Через 6 час. после этого от пристани вниз по реке вышла моторная лодка. Она догнала плот через 2 часа. С какой скоростью шла лодка?

3) Из населенного пункта выехал грузовик. Он идет со скоростью 30 км в час. Спустя час из того же пункта и в том же направлении выехала „Победа" со скоростью 40 км в час. На каком расстоянии от населенного пункта „Победа" догонит грузовик?

4) Придумайте задачи, похожие на рассмотренные.

6-е занятие. 1) Теплоход в стоячей воде имеет скорость v км в час (собственную скорость). Скорость течения реки 4 км в час. Какая будет скорость теплохода по течению реки? против течения реки? На сколько первая больше второй?

2) Теплоход по течению реки идет со скоростью c км в час. Скорость течения реки 3 км в час. Какова собственная скорость теплохода? Какова скорость против течения?

3) Спортсмен в стоячей воде плывет со скоростью v м в мин. Скорость течения реки q м в мин. Какое расстояние проплывет спортсмен по течению реки за 45 мин.? против течения реки за 20 мин.?

4) Пассажирский самолет в тихую погоду проходит за 4 часа расстояние между двумя аэродромами, равное a км. Какое время потребуется самолету, чтобы пройти тот же путь, если дует встречный ветер со скоростью c км в час?

Результаты записываются в таблицу:

№№ п. п.	Собственная скорость	Скорость течения	Скорость по течению	Скорость против течения	Другие величины

7-е занятие. При выполнении упражнений составляются уравнения.

1) Теплоход, двигаясь против течения реки за 6 час. проходит расстояние в 90 км. Определить собственную скорость теплохода, если скорость течения в 6 раз менее собственной скорости теплохода.

2) Теплоход по течению реки проходит 72 км за 4 часа. Определить скорость течения реки, если собственная скорость теплохода в 5 раз больше скорости течения.

3) Моторная лодка по течению реки проходит расстояние между пристанями за 5 час., а двигаясь против течения, проходит то же расстояние за 6 час. Найти скорость течения, если собственная скорость лодки равна 22 км в час.

4) Моторная лодка, двигаясь против течения реки, проходит расстояние между пристанями за 4 часа, а по течению реки за 3 часа. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км в час.

11. Среди задач на составление уравнений встречаются такие, в которых идет речь о выполнении некоторой работы, о времени, потребном для этого, и о рабочей силе. К ним примыкают так называемые задачи о бассейнах. Уместны упражнения, подготовляющие решение этих задач.

1-е занятие. 1) Рабочий может выполнить некоторое количество деталей за t час. Какую часть работы он выполнит за 1 час? за 3 часа?

2) Бассейн для плавания наполняется в 12 час. Какая часть бассейна наполнится за q час.? ($q<12$).

3) Наполненный бассейн может опорожниться за t час. Какая часть бассейна опорожнится за 2 часа? за 30 мин.? за q час.? ($q<t$).

4) На тракторе можно вспахать поле за c дней. Какая часть поля будет вспахана за t дней? ($t<c$).

2-е занятие. 1) Одна машинистка может перепечатать рукопись за 10 дней, другая за 12 дней. Какую часть рукописи они перепечатают, работая вместе, за день? за t дней?

2) Одна машинистка может перепечатать рукопись за a час., другая за b час. Какую часть рукописи они перепечатают, работая одновременно 2 часа? t часов?

3) С помощью одного крана можно выгрузить баржу за 7 дней, а с помощью другого за a дней. В какое время будет выгружена баржа при одновременной работе обоих кранов?

4) Аквариум можно наполнить водой через один кран за a мин., через другой за b мин. В какое время наполнится аквариум при одновременном действии обоих кранов?

3-е занятие. 1) Через один кран чан наполняется за 20 мин., через другой опоражнивается за 30 мин. Сколько воды прибудет в чане, если одновременно открыть оба крана на 5 мин.? на t мин.?

2) Через один кран чан наполняется в t мин., через другой кран наполненный чан опоражнивается на 5 мин. дольше, чем через первый кран наполняется. В какое время пустой чан наполнится, если одновременно открыть оба крана?

3) Наполненный бассейн через одну трубу может опорожниться в t час., через другую трубу пустой бассейн может наполниться в $\frac{1}{2}t$ час. В какое время

наполненный бассейн опорожнится при одновременном действии обеих труб?

4) Придумайте задачу, решение которой приводит к следующему выражению:

$$\frac{1}{\frac{1}{e}-\frac{1}{f}}.$$

4-е занятие. Требуется составить уравнения для следующих задач:

1) Один рабочий может выполнить некоторую работу в 10 дней. Два рабочих могут выполнить ту же работу в 6 дней. В какое время второй рабочий может выполнить ту же работу?

2) Машинистка может перепечатать рукопись за 12 час. Две машинистки могут выполнить ту же работу за 6 час. 40 мин. В какое время вторая машинистка может перепечатать всю рукопись?

3) Первый кран наполняет аквариум за 9 мин., через второй кран аквариум опоражнивается. При одновременном действии обоих кранов пустой аквариум наполняется за 36 мин. В какое время второй кран может опорожнить наполненный бассейн?

4) Придумайте задачи, решение которых приводит к уравнению:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\right)\cdot 2{,}4=1.$$

12. Многочисленные приведенные образцы подготовительных упражнений к решению задач составлением уравнений позволят учителю в случае надобности пополнить эти упражнения.

В заключение заметим, что в нашей практической работе подготовительные упражнения применялись многие годы и это неизменно приводило к прекрасным результатам. В 7-м классе в период систематического изучения уравнений первой степени с одним неизвестным учащиеся быстро овладевали решением задач. В порядке проверки значения подготовительных упражнений в письменную контрольную работу включались в каждый билет две задачи; третья задача как дополнительная давалась в двух вариантах. При решении третьей задачи приходилось довольствоваться составлением уравнений: не было времени закончить решения. Находились учащиеся, которые в течение урока справлялись с решением трех задач и заслуженно получали отличные отметки. Многие учащиеся решали по две задачи и получали хорошие отметки. За решение одной задачи ставилась удовлетворительная оценка. Неудовлетворительных отметок, как правило, не было.

Подготовительные упражнения влияют благотворно на решение задач путем составления систем линейных уравнений и при решении задач на составление уравнений или систем уравнений в последующих классах. *

---

* В. В. Репьев. Решение задач с помощью уравнений, изд. Горьковского гос. педагогического института им. М. Горького, 1941.

Очерк восьмой

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

1. В методической литературе за последнюю четверть века в той или другой форме признаётся, что существует общий метод решения задач путем составления уравнений или систем уравнений. Однако наблюдаются различия в истолковании этого метода: одни считают, что его сущность заключается в расчленении задачи на ряд простых задач, другие полагают его сущность в приравнивании двух различным способов выраженных величин, третьи—в обозначении неизвестного и в оперировании этим символом как известным для получения уравнения. Такие точки зрения правильно отмечают какую-либо одну сторону общего метода, но не вскрывают его полностью и в целом.

Как идет мыслительный процесс при решении задачи путем составления уравнения или системы уравнений?

Задачу преобразуют в уравнение или систему уравнений, при этом вводятся обозначения неизвестного или неизвестных, находятся выражения для вспомогательных величин, приравниваются двояко выраженные величины и получается уравнение или система уравнений. Это — первая вспомогательная задача, к которой сведена задача текстовая. Затем уравнение или система последовательно преобразуются. Каждый шаг в таком преобразовании является переходом от одной вспомогательной задачи к другой, решение которой проще. Так поступают до тех пор, пока не подходят к непосредственному решению задачи.

Особенности мыслительного процесса позволяют утверждать, что при решении задач путем составления уравнений или систем уравнений мы пользуемся анализом.*

Этот анализ имеет некоторые особенности: используются обозначения для неизвестных, вводятся алгебраические символы, применяются уравнения или системы уравнений. Применение алгебраических символов, уравнений, систем уравнений делает анализ особо плодотворным и мощным. Дело в том, что как только основная задача заменена уравнением или системой уравнений переходы к последующим вспомогательным задачам выполняются на основании приемов решения уравнений или систем уравнений, а это делается полуавтоматически. В силу этого можно утверждать, что при решении задач путем составления уравнений применяется одна из форм алгебраического анализа.

Эта форма алгебраического анализа объединяет в себе те существенные черты этого метода, которые различными авторами принимаются за общий метод решения задач. Действительно, решение задачи начинается с рассмотрения неизвестных, с введения обозначений для них, но это только начало анализа. Затем составляются алгебраические выражения для вспомогательных величин, при этом сложная текстовая задача расчленяется на более простые задачи. Но это расчленение является только одним из этапов анализа. Далее составляется уравнение или система их; при этом приравниваются величины, выраженные по-разному. Но такое приравнивание величин только завершает подмену текстовой задачи первой вспомогательной задачей.

Приступая с учащимися к систематическому решению задач способом составления уравнений, уместно

---

* В. В. Репьев. Очерки по общей методике математики, Горьковское книжное издательство, 1955.

В. В. Репьев, Решение задач с помощью уравнений, изд. Горьковского гос. педагогического института им. М. Горького, 1941.

сообщить, что этот способ решения носит название алгебраического анализа. Пользуясь конкретными задачами, надо разъяснить характерные особенности алгебраического анализа. При обучении следует вскрывать в конкретной форме и достаточно популярно общие методы математики. Так поступаем и в этом случае.

2. Установки, которые даются новыми программами алгебры, требуют, чтобы задачи на составление уравнений решались при изучении всех глав курса 6-го класса и первой главы курса 7-го класса. Это целесообразно, ибо дает возможность с помощью алгебраического исчисления и уравнений решать практические вопросы, т. е. устанавливает связь теории с практикой. Затем к решению задач возвращаются вновь после систематического изучения линейного уравнения с одним неизвестным.

Уже во втором полугодии 6-го класса следует постепенно познакомить учащихся с общим планом решения задач путем составления уравнений.

Задача 1. Куплено 10 карандашей и 15 ручек. Цена карандаша на 7 коп. выше цены ручки. Вычислить цену карандаша и ручки, если за все заплатили 3 руб. 95 коп.

1) Задача решается путем составления уравнения. Какие же величины целесообразно приравнивать? Наиболее естественно приравнять стоимость купленных вещей, выраженную двояким способом. Итак, для правой части уравнения сохраним число 3 руб. 95 коп. Это придает целенаправленность ближайшим рассуждениям; левая часть также должна выражать стоимость купленного.

Введем обозначение для неизвестного. Обозначим цену карандаша в копейках через x. Запишем:

Цена карандаша в копейках: x.
Цена ручки в копейках: $x-7$.
Стоимость 10 карандашей в копейках: $10x$.
Стоимость 15 ручек в копейках: $(x-7)\cdot 15$.
За все заплачено в копейках: $10x+(x-7)15$.

2) Уравнение:

$$10x+(x-7)\,15=395.$$

3) Решение уравнения:

$$2x+(x-7)3=79,$$
$$2x+3x=79+21,$$
$$5x=100,\ x=20.$$

Проверка корня по уравнению.

Значение левой части: $10\cdot20+(20-7)\cdot15=395$.

Значение правой части: 395.

4) Проверка по тексту задачи:

$$20-7=13 \text{ (коп.)},\quad 13\cdot15=195 \text{ (коп.)},$$
$$20\cdot10=200 \text{ (коп.)},\ 200+195=395 \text{ (коп.)}.$$

5) Ответ: цена карандаша 20 коп., а ручки 13 коп.

Итак, общий план решения задач с помощью уравнений имеет следующие основные пункты:

1) установить, какие величины целесообразно приравнять для составления уравнения; обозначить неизвестное или вспомогательные величины и выразить через него и данные другие величины, необходимые для составления уравнения;

2) составить уравнение;

3) решить уравнение и, если полезно, проверить корень по уравнению;

4) проверить пригодность корня по задаче;

5) написать ответ.

При решении задач этот план фиксируется на доске и в тетрадях кратко: 1) „Что приравнять? Обозначения", 2) „Уравнение", 3) „Решение", 4) „Проверка решения по задаче", 5) „Ответ".

При составлении уравнения часто удобно для правой части уравнения оставлять одно из данных чисел. В рассмотренной задаче для правой части оставлено число 3 руб. 95 коп. Это дало наиболее простой путь рассуждения и простое решение. Однако в той же задаче для правой части можно оставить любое другое число из данных.

Например, если для правой части сохранить число 7 коп., то получим следующее:

Цена карандаша x коп.

Стоимость 10 карандашей: $10x$ коп.

Стоимость 15 ручек: $395-10x$ коп.

Цена ручки: $\frac{395-10x}{15}$ коп.

Карандаш дороже ручки на $x-\frac{395-10x}{15}$ коп.

Уравнение: $x-\frac{395-10x}{15}=7$.

Если для правой части уравнения оставить число 15 ручек, то получим:

Цена карандаша x коп.

Цена ручки: $x-7$ коп.

Стоимость 10 карандашей: $10x$ коп.

Стоимость всех ручек: $395-10x$ коп.

Число купленных ручек: $\frac{395-10x}{x-7}$.

Уравнение: $\frac{395-10x}{x-7}=15$.

Можно составить и четвертое уравнение, если для правой части его оставить число купленных карандашей.

Как же объяснить возможность получения различных уравнений при решении одной и той же задачи?

В каждой задаче на составление уравнений речь идет о числах данных и неизвестных. Если одно из неизвестных чисел считать известным и одно из данных принять за неизвестное, то получится задача, которая по отношению к первоначальной называется обратной. Из всякой задачи, достаточно сложной можно получить несколько обратных. Составление уравнения представляет собой решение обратной задачи по отношению к данной. Так как обратных задач может быть несколько, то и уравнение для решения задачи можно составить разными способами. Сохранение для правой части уравнения различных данных чисел равносильно составлению различных обратных задач. Так как трудность решения различных обратных задач не одинакова, то и трудность составления уравнения различна и зависит от того, какое из данных сохранено для правой части уравнения. Из многих обратных задач целесообразно выбирать такую, решение которой известно лучше, ближе к расчетам, встречающимся в практике.

3. Первые задачи на составление уравнений следует решать в классе фронтально. Беседа эвристического характера служит наиболее целесообразным

методом работы с классом. Такие беседы уместны и в дальнейшем при первом решении задач какого-либо нового вида. При решении задач, не требующих сложных выкладок, полезно широко практиковать устное решение. Например, задачи: „Один острый угол прямоугольного треугольника больше другого на 20°, вычислить каждый из острых углов“; „Углы треугольника относятся, как 1:2:3, вычислить каждый из углов“—могут быть решены устно уже в 6-м классе в IV четверти. При устном решении дети сообщают, как составлялось уравнение, какое уравнение получилось и ответы.

После выработки некоторого навыка в решении задач какого-либо вида можно использовать такой прием: учитель предлагает решить задачу, указывает ее номер; ребята самостоятельно начинают решение, а через 2—3 минуты одного из учеников вызывают для решения задачи к доске. Такой прием предоставляет детям больше самостоятельности, дает возможность проявить инициативу, вместе с тем учащиеся, которых задача затрудняет, тут же выясняют для себя все непонятное.

Когда учитель убедится, что в решении задач того или другого вида создан достаточный навык, на уроке организуется самостоятельное индивидуальное решение задач.

В первом пункте плана стоит вопрос: „Что приравнять?“ Ответить на него в самом начале решения задачи очень важно. Ответ придает всему процессу рассуждения, связанному с введением обозначений, с получением промежуточных выражений, целенаправленность и избавляет от введения лишних выражений, которые часто появляются при отсутствии целенаправленности, особенно в задачах достаточно сложных.

При решении арифметических задач дети привыкают ставить вопросы. Вопросы можно использовать при устном объяснении решения алгебраических задач. Следует, однако, фиксировать краткие ответы на вопросы. Записи должны быть краткими и точными. При письменном решении в 7—8-х классах запись, подобная той, какая дана при решении задачи, применяется часто.

Если решается задача с именованными числами, то учащиеся записывают наименования неизвестных и промежуточных выражений.

Указание наименований в некоторой мере предохраняет от распространенной ошибки, когда учащиеся приравнивают величины, выраженные в разных мерах, и получают неверные уравнения. Полезно приучать школьников, чтобы величины одного и того же рода они выражали в одних и тех же единицах.

Кроме того, отсутствие наименований иногда, при решении достаточно сложных задач, вызывает затруднения при написании ответа: пока ученик решает уравнение, он забывает, что́ обозначает x, и, найдя его, не знает, что́ он определил. Приходится вновь читать задачу и вспоминать, что́ обозначено через x и в каких мерах введено это обозначение. Этого не произойдет, если учащиеся приучатся ставить наименования.

При решении некоторых задач значительную помощь может оказать чертеж. Он вносит наглядность в соотношении между величинами и помогает составить уравнение. Чертежом можно пользоваться при решении задач на движение, с геометрическим содержанием, на разностное и кратное отношение. Полезно поэтому развивать навыки иллюстрирования задач, где возможно, чертежами.

Излюбленным обозначением неизвестного являются x и y. Для обозначения неизвестного полезно использовать и другие буквы; например, неизвестную скорость уместно обозначить через v, неизвестное время—через t, неизвестный путь—через s.

4. При решении задач путем составления уравнений или систем уравнений прежде всего производится преобразование данной задачи в первую вспомогательную, выраженную уравнением или системой. Уже это преобразование может привести к задаче, не равносильной данной. При решении уравнения или системы происходит преобразование первой вспомогательной задачи в последовательную серию вспомогательных задач. При этом также возможно получение вспомогательных задач, не равносильных предшествующим, а значит, и данной задаче. Последняя вспомогательная задача может содержать решения,

посторонние по отношению к данной задаче. Если при решении уравнения или системы производились такие преобразования, которые могли привести к нарушению равносильности, то полезна проверка полученных решений по уравнению или системы уравнений. Замена задачи уравнением или системой уравнений также может привести к нарушению равносильности. Значит, необходима проверка по задаче. Кроме того, при составлении уравнения или системы уравнений и при решении их возможны ошибки. Это также приводит к необходимости проверки по задаче.

Задача 2. В двузначном числе число единиц на 7 меньше числа десятков. При делении этого числа на число с обратным порядком цифр получается частное 3 и остаток 3.

Для составления уравнения послужит зависимость между делимым, делителем, частным и остатком.

Обозначим число десятков неизвестного двузначного числа через x.

Тогда число единиц этого числа равно $x-7$.

Искомое двузначное число запишем так: $10x+(x-7)$.

Число с обратным порядком цифр изобразим так: $10(x-7)+x$.

Составляем уравнение:

$$10x+(x-7)=[10(x-7)+x]\cdot 3+3. \qquad (1)$$

Решение уравнения:

$$11x-7=(11x-70)\cdot 3+3,$$
$$11x-7=33x-210+3,$$
$$-22x=-200,$$
$$x=9\frac{1}{11}.$$

Подстановка в уравнение (1) вместо x числа $9\frac{1}{11}$ показывает, что уравнение решено верно: найденное число—решение уравнения. Однако это число не является решением задачи. Следовательно, замена основной задачи первой вспомогательной—уравнением—привела к нарушению равносильности. Задача не имеет решений. Такое заключение делается только после проверки правильности составления и решения уравнения.

5. Длительный период учащиеся имеют дело с такими задачами, для решения которых вводится обозначение одного из искомых чисел. Это приводит к тому, что введение обозначений для одного из неизвестных задачи становится прочным навыком. Однако имеется значительное количество задач, для решения которых в одних случаях полезно, в других необходимо вводить обозначение не для искомого числа, а для некоторого вспомогательного неизвестного, вычисление которого обеспечивает решение задачи. Учитель разъясняет это учащимся, пользуясь конкретными задачами.

Задача 3. Вычислить углы четырехугольника $ABCD$, если $\angle A : \angle B : \angle C$, как $3:4:7$, а $\angle D$ на $60°$ меньше $\angle C$.

Для правой части уравнения целесообразно сохранить сумму углов четырехугольника, т. е. $360°$.

Обозначим градусную величину $\angle A$ через x. Тогда

$$\angle B=\frac{4x}{3}, \angle C=\frac{7x}{3} \text{ и } \angle D=\frac{7x}{3}-60.$$

Получаем уравнение:

$$x+\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}x+\frac{7}{3}x-60=360.$$

Однако при решении задачи 3 полезно обозначить буквой величину не первого или какого-либо другого угла четырехугольника, а третью долю $\angle A$. Тогда в градусной мере $\angle A=3x$, $\angle B=4x$, $\angle C=7x$ и $\angle D=7x-60$.

Получаем уравнение:

$$3x+4x+7x+7x-60=360.$$

При решении этой задачи введение обозначения буквой вспомогательной величины—третьей доли $\angle A$— не является необходимым, но оно полезно: упрощаются рассуждения, промежуточные выражения и уравнение.

К числу задач, при решении которых введение обозначений для некоторого вспомогательного неизвестного необходимо, относятся те, которые связаны со структурой обыкновенной дроби, со структурой целого числа в десятичной системе.

Задача 4. Найти дробь, знаменатель которой на 1 больше числителя. Если от числителя этой дроби отнять 1, а к знаменателю прибавить 2, то получится дробь, равная $\frac{1}{3}$.

Некоторые учащиеся пробуют ввести обозначение для всей дроби. Однако это не дает возможности составить уравнение. Необходимо ввести обозначение, например, числителя дроби. Найдя это вспомогательное неизвестное, легко определить искомую дробь. При решении задач этого вида большую помощь оказывают подготовительные упражнения, о которых шла речь в предыдущем очерке.

Правой частью уравнения уместно сделать $\frac{1}{3}$. Обозначим числитель искомой дроби через x. Знаменатель ее будет равен $x+1$.

Для дроби получим выражение: $\frac{x}{x+1}$.

Произведя с числителем и знаменателем дроби действия, указанные в задаче, получим дробь: $\frac{x-1}{x+3}$.

Составляем уравнение:

$$\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{3}.$$

Решаем уравнение:

$$3x-3=x+3,$$
$$2x=6,\ x=3.$$

Так как решалось дробное уравнение, то возможно получение постороннего решения. Устная проверка по уравнению показывает, что $x=3$ есть решение уравнения.

Возможный ответ: $\frac{3}{4}$. Устная проверка по задаче показывает, что дробь $\frac{3}{4}$ удовлетворяет требованиям задачи. Итак, искомая дробь равна $\frac{3}{4}$.

Когда сюжет задачи построен на структуре числа в десятичной системе счисления, то в качестве вспомогательного неизвестного выбирают или число единиц, или число десятков, сотен неизвестного числа. Примером может служить задача 2. Для успешного решения этих задач особо большое значение имеют подготовительные упражнения.

6. Длительный период учащиеся имеют дело с задачами, решение которых приводит к уравнению, где правая часть—одно из данных чисел. Дети приобретают привычку составлять уравнения, оставляя для правой части одно из данных чисел. Предстоит показать учащимся, что многие задачи приводят к уравнениям, левая и правая части которых—выражения, содержащие неизвестное. При решении таких задач равенство двух выражений устанавливается *на основании* одного из условий задачи. Это условие может быть дано разнообразными способами: или определяется числом, характеризующим отношение двух величин, или словесно, или функциональной зависимостью, выраженной неявно.

Задача 5. По окружности навстречу друг другу движутся две материальные точки. Первая точка проходит в секунду 10 см, а вторая 8 см. Через какие промежутки пути происходят их встречи, если длина окружности равна 378 см?

Какие величины приравнять для составления уравнения? Возможно приравнять время движения первой и второй точек между двумя последовательными встречами.

Пусть длина меньшей дуги окружности между точками, соответствующими двум последовательным встречам, равна s см. Этот путь пройдет вторая точка. Первая точка пройдет путь, равный $378-s$ см. Время движения этой точки между двумя последовательными встречами равно $\frac{378-s}{10}$ сек., а время движения второй точки равно $\frac{s}{8}$.

$$\text{Уравнение: } \frac{378-s}{10}=\frac{s}{8}.$$

$$\text{Решение: } 378\cdot4-4s=5s,$$

$$9s=378\cdot4,$$

$$s=168.$$

Устная проверка по задаче показывает, что полученное число удовлетворяет требованию задачи.

Ответ: Точки встречаются через 168 см, считая по пути движения второй точки.

При решении этой задачи вопрос, какие величины приравнять при составлении уравнения, решается по смыслу задачи. Обе части полученного уравнения — выражения, содержащие неизвестное.

Решение задач с буквенными данными требует от учащихся большого напряжения мышления, а значит, и является хорошим материалом для развития мышления. Задачи с буквенными данными не требуют каких-либо новых алгебраических знаний, но они отличаются тем, что требуют более абстрактного мышления. Оно будет доступно учащимся тогда, когда будет опираться на конкретное. Этим конкретным материалом служат задачи с числовыми данными. Задачи с буквенными данными надо вводить постепенно. Как только учитель заметит, что в решении того или другого вида задач учащиеся делают значительные успехи, уместно ввести задачи того же вида, но с буквенными данными. При этом прежде всего вводятся задачи с одним параметром, затем с двумя и т. д. Вместе с тем при решении задач с параметрами учащиеся обучаются выполнять доступные для них исследования.

З а д а ч а 6. По круговой дорожке равномерно движутся друг за другом два велосипедиста. Первый проезжает путь, равный длине дорожки в t мин., второй в 4 мин. Сколько минут проходит от одной встречи велосипедистов до другой? ($t > 4$).

Чтобы произошли 2 последовательные встречи велосипедистов, необходимо, чтобы второй из них, движущийся быстрее первого, проехал после первой встречи путь больше первого на длину дорожки.

Примем длину дорожки за 1 и сделаем эту длину правой частью уравнения.

Пусть время между двумя последовательными встречами равно x мин. Первый велосипедист за минуту проходит $\frac{1}{t}$, а второй $\frac{1}{4}$ часть дорожки. За x мин. первый пройдет путь, равный $\frac{x}{t}$, второй $\frac{x}{4}$

длины дорожки. Разность этих путей равна $\frac{x}{4} - \frac{x}{t}$. Эта разность должна равняться длине дорожки, т. е. 1.

Получаем уравнение $\frac{x}{4} - \frac{x}{t} = 1$.

Решаем его при условии $t > 4$.

$$tx - 4x = 4t.$$

$$(t-4)x = 4t,$$

$$x = \frac{4t}{t-4}.$$

Проверяем по задаче.

1) $\frac{1}{t} \cdot \frac{4t}{t-4} = \frac{4}{t-4}$, 2) $\frac{1}{4} \cdot \frac{4t}{t-4} = \frac{t}{t-4}$, 3) $\frac{t}{t-4} - \frac{4}{t-4} = 1$.

Ответ: между двумя последовательными встречами велосипедистов проходит $\frac{4t}{t-4}$ мин. ($t > 4$).

7. Для более глубокого понимания типичной задачи на составление уравнений полезно поручать учащимся составить задачу и затем проверить ее путем решения. Конечно, на уроке надо показать на одном-двух примерах, как это делать. Приведем пример.

„Первый рабочий может выполнить некоторую работу в 8 час., а второй может выполнить ту же работу в 12 час. Если они будут выполнять эту же работу вместе, то им потребуется $1 : \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right)$ часа, т. е. $4\frac{4}{5}$ часа". В этом расчете все известно; значит, нет задачи. Сделаем неизвестным время, в течение которого второй рабочий может выполнить всю работу. Получим задачу: „Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 4,8 часа. Один первый может выполнить эту работу за 8 час. В какое время может выполнить ту же работу один второй рабочий?"

Если сделать неизвестным время, в течение которого один первый рабочий может выполнить всю работу, получим задачу, аналогичную только что сформулированной. Можно получить более сложную задачу: „Двое рабочих могут выполнить вместе некоторую работу за 4 час. 48 мин., а один первый может выполнить ту же работу на 4 часа быстрее, чем один второй. В какое время может выполнить ту же работу каждый рабочий отдельно?“ Эта задача требует использования квадратного уравнения.

Опыт показывает, что учащиеся охотно составляют задачи, любят зачитывать их на уроке, интересуются решением своих задач. Конечно, нет возможности решить на уроке все задачи, составленные учащимися. Можно поступить так: учитель читает эти задачи дома, выбирает из них наиболее интересные и оригинальные и использует в работе на уроке. Вместе с тем он кратко разбирает задачи неудачные, вскрывает их недостатки и указывает пути исправления.

Можно показать учащимся получение задач путем перефразировки, путем вложения в одни и те же соотношения между числами различного конкретного содержания.

Дана задача: „Число 74 разделить на три части, чтобы вторая была в 3 раза более первой, а третья на 4 единицы более второй“. Задачу легко перефразировать:

„Магазин имеет сукно в трех кусках, всего 74 метра. Во втором куске — в 3 раза более, чем в первом, а в третьем на 4 метра более, чем во втором. Сколько метров в каждом куске?“

„Трое рабочих за выполнение некоторой работы получили 74 руб. Сколько получил каждый рабочий, если второй работал втрое дольше, чем первый, а третий на 4 часа дольше второго“.

Особенно интересно показать, что задачи о бассейнах, движении, работе сводятся к задачам о работе.

„Некоторая работа может быть закончена двумя рабочими в 18 дней. После трехдневной совместной работы первый рабочий уволился и второй окончил оставшуюся часть за 25 дней. Во сколько дней каждый из них отдельно мог бы выполнить работу?“

„Бассейн при одновременном действии двух труб может быть наполнен за 18 час. По истечении трехчасового действия двух труб первая труба была закрыта и вторая наполнила оставшуюся часть бассейна за 25 час. За сколько часов каждая труба отдельно могла бы наполнить бассейн?"

„Два поезда, вышедшие одновременно из двух станций A и B и идущие навстречу один другому, должны встретиться через 18 час. после отправления. Через 3 часа после выхода со станции первый поезд был задержан и второй встретился с первым только через 28 час. после выхода со станции. За сколько часов каждый поезд прошел бы расстояние между станциями A и B?"

Приведем несколько задач, которые можно решить с помощью уравнения первой степени с одним неизвестным.

1) Ведущий шкив трансмиссии имеет диаметр 36 см и делает 120 оборотов в минуту. На сколько меньше должен быть диаметр ведомого шкива, чтобы он делал на 80 оборотов в минуту больше ведущего шкива?

Примечание. При вращательном движении отношение числа оборотов ведущего вала к числу оборотов ведомого вала называют передаточным числом. В приведенной задаче передаточное число равно $120:200 = \frac{3}{5}$. Для цилиндрической зубчатой передачи передаточным числом служит отношение числа зубьев ведомой шестерни к числу звеньев ведущей шестерни.

2) Ведомый шкив трансмиссии имеет диаметр в 32 см и делает на 200 оборотов в минуту меньше ведущего шкива. На сколько диаметр ведущего шкива должен быть больше диаметра ведомого, если передаточное число равно 1,25?

3) Вычислить число зубьев ведущей шестерни, если ведомая имеет на 30 зубьев меньше ведущей, а отношение числа оборотов в минуту ведущей к числу оборотов в минуту ведомой шестерни (передаточное число) равно 0,6.

4) Общая длина четырех поточных линий (конвейеров), установленных в цехе сборки радиоприемников, равна 265 м. Меньшая поточная линия на 30 м короче самой большой, длина второй по величине составляет $\frac{7}{8}$ длины большей и на 5 м больше длины третьей линии. Найти длину каждой поточной линии.

8. Решение задач с помощью составления уравнений первой степени с одним неизвестным является первым шагом алгебраического способа решения задач, первым шагом применения одной из форм алгебраического анализа. В дальнейшем изучении курса алгебры учащиеся неоднократно возвращаются к этому способу решения задач. Границы использования этой формы алгебраического анализа раздвигаются. Для решения задач применяются системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными, квадратные уравнения, системы двух или трех уравнений, сводящиеся к квадратным или биквадратным уравнениям.

Однако первый шаг, который делается в 7-м классе в решении задач с помощью линейного уравнения с одним неизвестным, является самым ответственным и решающим. Успешная работа класса в этот период в значительной мере обеспечивает успешную работу по решению задач в последующие периоды. Дело в том, что в дальнейшем применяются те же подходы, приемы и способы, тот же общий план, что и при решении задач с помощью уравнения первой степени. Поэтому нет надобности останавливаться подробно на последующих этапах алгебраического способа решения задач. Ограничимся несколькими краткими замечаниями.

Успех первого шага в решении задач обеспечивается подготовительными упражнениями к составлению уравнений. Это полезно учитывать и в дальнейшем. Если подготовительные упражнения перед решением задач с помощью уравнения первой степени с одним неизвестным не применялись, то учитель может ввести их и во второй половине 7-го года обучения перед решением задач путем применения системы линейных уравнений и в 8-м классе—перед решением задач с помощью квадратных уравнений и систем уравнений, сводящихся к квадратным. Методика проведения подготовительных упражнений сохраняется, а содержание упражнений усложняется и обогащается некоторыми новыми функциональными зависимостями. И на этих этапах работы подобные упражнения являются надежным фактором успешного решения задач алгебраическим способом.

При решении задач путем применения системы двух линейных уравнений несколько видоизменяется план решения. Ученик должен установить, какие величины он намерен приравнивать, а таких приравниваний должно быть уже два. В плане появится система и ее решение. Кратко план можно зафиксировать так: 1) „Что приравнять? Обозначения“, 2) „Система уравнений“, 3) „Решение системы“, 4) „Проверка решения“, 5) „Ответы“.

Когда учащиеся приобретут умения и навыки в составлении систем уравнений с двумя неизвестными, не следует стеснять их в выборе способа решения задач, которые допускают возможность использования и одного уравнения и системы двух уравнений. Тот и другой путь одинаково возможен. Целесообразно поощрять решение задач с помощью систем: такое решение обычно проще в отношении составления систем, а трудности при решении систем учащиеся уже умеют преодолевать. Точно так же не следует стеснять учащихся в выборе способа решения задач, допускающих решение и путем системы двух линейных уравнений и путем системы трех линейных уравнений.

Решение задач применением квадратного уравнения не требует ничего нового. Несколько усложняется проверка решения в отношении задачи: приходится проверять два корня. Несколько усложняется исследование решения задач, содержащих параметры. То же самое можно отметить и о решении задач с помощью систем уравнений, сводящихся к квадратному или биквадратному уравнениям.

Рассмотренная форма алгебраического анализа находит широкое применение при решении геометрических задач. В работе некоторых учителей наблюдается недооценка применения этого метода в геометрии: задача решается сложными арифметическими путями, вместо того чтобы решить ее изящным алгебраическим способом. Надо шире применять алгебраический анализ.

Полезно применить эти формы анализа при решении физических и технических задач, содержание которых доступно пониманию учащихся.

Очерк девятый

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Традиционный план изучения систем линейных уравнений с двумя неизвестными таков: дается понятие о линейном уравнении с двумя неизвестными; на 2—3 примерах показывается, что такие уравнения имеют бесконечное множество решений; затем вводится понятие о системе двух уравнений первой степени с двумя неизвестными и изучается их решение способом алгебраического сложения; далее к решению таких систем применяется способ подстановки, решают задачи путем составления систем уравнений и, наконец, дается графическое истолкование решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными.

Встречаются отклонения от этого плана: меняют местами решение способами сложения и подстановки, часто опускают геометрическое истолкование решения систем, мотивируя это недостатком времени.

Такой традиционный план изучения систем линейных уравнений имеет много недостатков. Укажем некоторые из них. Нередко учащиеся смутно представляют, что линейное уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений: этому вопросу уделяется мало времени, поэтому он не оставляет прочного следа в сознании учащихся. Овладев простейшим путем решения систем—способом сложения,—учащиеся недоумевают, почему требуется вводить решение способом подстановки, который им кажется более сложным, и неохотно включаются в изучение этого способа. Графическое истолкование решения систем уравнений учащимся кажется еще более сложным вопросом; им непонятно, зачем оно нужно, когда уже научились решать системы двумя способами. Не поэтому ли учитель часто, нарушая программу, выбрасывает этот вопрос из плана занятий?

Основной недостаток рассматриваемого плана заключается в том, что функциональная природа уравнений почти—а иногда совершенно—выпадает из обучения; кроме того, школьников не приучают к графическому истолкованию решения систем.

В нашем опыте рассматриваемый материал излагается в иной последовательности, в другом плане. Прежде всего учащиеся знакомятся с уравнениями первой степени с двумя неизвестными ($y = ax$, $y = ax + b$, $ax + by = c$) с числовыми коэффициентами. Устанавливается опытным путем, что графики таких уравнений—прямые линии. Вместе с этим учащиеся на многих примерах осмысливают, что уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений. Затем учащиеся знакомятся с системой двух линейных уравнений и ее графическим решением, при этом они тренируются в выражении одного неизвестного через другое. Далее изучается решение систем линейных уравнений способом подстановки: переход к нему подготовлен предшествующей работой. Наконец, изучается решение систем способом сложения и решаются задачи путем составления систем двух линейных уравнений.

Такое расположение материала имеет существенные преимущества. Основное из них — в том, что уравнение рассматривается в функциональном аспекте, а это ценно с точки зрения выполнения основных задач курса алгебры. Это представляет интерес в отношении политехнического обучения. Изучая уравнение с друмя неизвестными, занимаясь построением графиков, учащиеся на многих примерах познают, что каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений; это прочно запечатлевается в сознании учащихся. Построение графиков уравнений делается основательным навыком. Переход к графическому решению систем совершается естественно; учащиеся лишаются оснований браковать такое решение. При графическом решении систем получают наглядное истолкование вопросы о числе решений: перед учащимися пройдут системы с одним решением, с бесконечным множеством решений и не имеющие решений. В процессе изучения линейной функции и графического решения систем уравнений учащиеся приобретают навыки выражать одно неизвестное через другое, а это подготовляет изучение решения систем способом подстановки, и усвоение этого способа не вызывает затруднений.

Наш опыт нашел применение в практике работы некоторых учителей г. Горького и получил положительную оценку.

2. Таким образом в нашей практике раздел программы „Система уравнений первой степени“ начинается с изучения линейных уравнений:

$$y = ax,\ y = ax + b,\ ax + by = c$$

с числовыми коэффициентами и построения их графиков. Наметим основные установки, которые целесообразно соблюдать при изложении этого материала на уроках.

Указанные разновидности линейных уравнений изучаются последовательно; каждое уравнение рассматривается как функция. Допустимые значения аргумента—известное учащимся множество рациональных чисел. Общий путь, по которому ведется изучение каждого вида линейного уравнения, значение параметров и особенностей графиков,—неполная индукция: на целесообразно подобранных примерах уравнений учащиеся наблюдают и накапливают факты, а затем переходят к обобщениям.

При рассмотрении примеров каждого вида уравнений обращается внимание учащихся на то, что все они являются уравнениями первой степени с двумя неизвестными. В каждом случае x может принимать любые значения из множества рациональных чисел. Каждому значению x соответствует определенное значение y. Это приводит к заключению, что каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений. Заключение находит подтверждение при рассмотрении последующих примеров.

Опытным путем устанавливается, что каждому уравнению соответствует график—прямая линия. Так как положение прямой определяется двумя точками, то для построения графика уравнения первой степени с двумя неизвестными достаточно найти координаты только двух точек. Однако в каждом случае условимся находить координаты трех точек: третья точка в некоторой мере контролирует правильность вычисления координат и построения точек. Опираясь на это, учащиеся быстро приобретают навыки строить графики линейных уравнений.

При изучении уравнений и их графиков учащиеся систематически упражняются в чтении графиков. Используются и те графики, которые строят учащиеся, и „немые" графики, т. е. такие, на которых не указано соответствующее уравнение, но отмечен масштаб. Широко используются упражнения следующих видов: „Дана абсцисса точки графика. Найти соответствующую ординату"; „Дана ордината точки графика. Найти соответствующую абсциссу"; „На графике указана точка. Каковы ее координаты?" „Абсциссы точек растут (убывают) в указанном промежутке. Как при этом изменяются ординаты точек графика?"

Особое внимание обращается на то, что координаты любой точки, взятые с чертежа графика, являются решением соответствующего уравнения. Это положение лежит в основе графического решения систем уравнений. Каждый ученик должен усвоить его. Как правило, координаты, прочитанные по чертежу, дают приближенные значения неизвестных. Это необходимо учитывать при проверке решения по уравнениям: правая и левая часть могут оказаться при проверке приближенно равными.

Таковы основные установки, которые реализуются при изучении линейных уравнений и их графиков.

Во избежание недоразумений необходимо иметь в виду, что множество решений линейного уравнения в области рациональных чисел и множества точек соответствующей прямой имеют различную мощность—первое имеет меньшую мощность, чем второе:

в первом множестве нет иррациональных решений, а второе содержит точки, координаты которых — одна или обе — могут быть иррациональными числами. Практически координаты точки по графику берутся приближенно и всегда выражаются рациональными числами.

Чтобы демонстрировать графики линейных функций, полезно иметь координатную доску. Кусок гладкой фанеры в форме квадрата со стороной в 1 м пришивается к рамке. На фанеру прикрепляется миллиметровая бумага, на которой изображаются координатные оси с соответствующими числовыми отметками. За единицу масштаба принимается дециметр. По краю бумаги в рамку вбиваются шпильки (гвозди без головок). Часть шпильки—около 2 мм—остается над поверхностью фанеры. Шпилька вбивается в начало координат. Для изображения прямых используется тонкая резиновая нить с петлями на концах. Координатная доска дает возможность демонстрировать немые графики линейных функций. Если доска сделана хорошо, нить достаточно тонка, то можно отсчитывать координаты точек с точностью до 0,02 дм.

3. Переходим к изучению уравнения $y = ax$. Оно уже встречалось учащимся в связи с рассмотрением прямой пропорциональности.

С целью установления связи с ранее изученным рассмотрим такую задачу: „Основание прямоугольника содержит 2 единицы длины, высота его имеет x таких же единиц. Найти его площадь". Если площадь прямоугольника обозначим через y кв. ед., то получим уравнение: $y = 2x$. Что выражает это уравнение? Какие величины называются прямо пропорциональными? Как убедиться, что уравнение выражает прямую пропорциональность? Могут ли по смыслу задачи x и y принимать отрицательные значения? Как построить график этого уравнения?

Рассмотрим уравнение:

$$y = 2x, \tag{1}$$

при этом отвлечемся от геометрического смысла x и y. Будем x давать значения из множества рациональных чисел. Сколько неизвестных в этом уравнении?

В какой степени каждое неизвестное? Значит, уравнение можно назвать уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Дадим x несколько значений и вычислим соответствующие значения y. Запишем это в таблицу:

x	y
2	4
1	2
$\frac{1}{2}$	1
0	0
-1	-2
$-2\frac{1}{2}$	-5

Таблицу можно продолжить, давая x еще иные значения.

Каждая пара чисел в любой строке таблицы является решением уравнения (1). Это следует из того, как получалось значение y, и легко проверяется путем подстановки вместо x и y соответственно чисел любой строки таблицы. Значит, уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Предлагается найти еще решения уравнения (1), отличные от записанных в таблице.

Каждую пару чисел, стоящих в одной строке таблицы, можно рассматривать как координаты точки. Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Масштаб — в двух клетках единица. Давая x еще значения и вычисляя соответствующие значения y, можно построить сколько угодно точек. Как располагаются эти точки? Если приложить к ним ребро линейки, то легко убедиться, что все точки лежат на прямой, проходящей через начало координат. *Таким образом, график уравнения* (1) — *прямая, проходящая через начало координат.*

В таком же плане класс под руководством учителя рассматривает уравнения:

$$y = 0{,}5x, \quad y = -3x.$$

Накопленные учащимися наблюдения дают возможность сделать заключения, что уравнение первой степени с двумя неизвестными, рассматриваемого вида, имеют бесконечное множество решений, что график каждого такого уравнения есть прямая, проходящая через начало координат. Положение прямой определяется двумя точками; поэтому для построения графика достаточно вычислить координаты только двух точек, одной из которых может быть начало координат. В целях контроля над вычислениями и построением будем каждый раз находить координаты трех точек. Применим эти соображения к построению графиков следующих уравнений:

$$y = 2{,}5x, \quad y = -x, \quad y = -0{,}5x.$$

Затем к доске прикрепляется лист миллиметровой бумаги, на котором изображены оси координат и прямая, проходящая через начало. Уравнение прямой не указано (немой график); масштаб указан. Учащиеся отвечают на следующие вопросы:

а) Абсцисса точки, лежащей на прямой, равна 3. Найти по чертежу ординату этой точки.

б) Ордината точки прямой равна 2. Найти абсциссу этой точки.

в) Отметим на прямой точку K. Найти ее координаты.

г) Принадлежит ли точка M (2; 3) прямой, изображенной на чертеже? (Устанавливается построением точки.)

Такого рода упражнения повторяются на следующем уроке, при этом вниманию учащихся предлагается чертеж с иным расположением прямой, с иным масштабом.

4. С уравнением $y = ax + b$, в котором a и b — числа, учащиеся встречаются впервые. Поэтому первую встречу с таким уравнением уместно осуществить при рассмотрении конкретной задачи. Можно использовать примерно такую задачу: „Пружина имеет длину 10 см. При нагрузке в 1 кг длина пружины увеличивается на 0,5 см. Какова длина пружины при нагрузке в x кг?“ Если искомую длину пружины обозначить через y, то получим уравнение: $y = 0{,}5x + 10$. По смыслу задачи x принимает не отрицательные значения. Кроме того, удлинение пружины пропорционально нагрузке только для небольших нагрузок, не превышающих примерно 10 кг.

Если учитель не считает нужным углубляться в рассмотрение допустимых значений x, можно предложить такую задачу: „Тело находилось в пункте T на расстоянии 5 м от пункта A и начало двигаться по прямой AT равномерно. На каком расстоянии от пункта A будет находиться тело через x секунд, если его скорость равна 2 м в секунду?“

Получим уравнение: $y = 2x + 10$.

Рассматривая примеры таких уравнений, подмечаем, что каждое из них также содержит два неизвестных первой степени. Уравнения отличаются от тех, которые изучены ранее, наличием свободного члена. Значит, мы вновь имеем дело с уравнениями первой степени с двумя неизвестными.

Взяв, например, уравнение $y = x + 2$, даем x различные значения и вычисляем соответствующие значения y, результаты заносим в таблицу. Уравнение имеет бесконечное множество решений. Этот факт отмечаем еще при рассмотрении двух или трех примеров. Таким образом, уравнения первой степени с двумя неизвестными такого вида имеют бесконечное множество решений.

Строим точки по координатам, записанным в таблице. Количество точек легко увеличить. Прикладывая ребро линейки к этим точкам, учащиеся убеждаются, что все точки лежат на прямой; прямая уже не проходит через начало координат. Значит, уравнению соответствует прямая линия. Этот факт подтверждается еще двумя-тремя примерами. Попутно подмечают, что свободный член уравнения—ордината точки, когда абсцисса равна нулю. Она соответствует точке пересечения прямой с осью ординат. Поэтому в уравнениях *подобного вида* свободный член называют начальной ординатой.

Так как графики рассматриваемого вида уравнений—прямые, то в дальнейшем при построении графика уместно ограничиться определением координат трех точек, одна из которых будет контрольная.

Полезно учить читать график по немому чертежу. При этом наряду с вопросами, аналогичными указанным выше, уместно ставить такие:

а) Абсцисса x изменяется от 0 до 4. Как при этом изменяется y?

б) Ордината y изменяется от -1 до 3. Как изменяется x?

в) Каково значение начальной ординаты?

Далее переходим к изучению уравнений вида $ax + by + c = 0$ с числовыми коэффициентами.

Рассматривая, например, уравнения:

$$4x - 2y = 1 \quad (1), \qquad 6x + 3y = 2, \quad (2)$$

подмечаем, что имеем дело также с уравнениями первой степени с двумя неизвестными. Выразим неизвестное y через x. Получим соответственно:

$$y=2x-\frac{1}{2} \quad (1_1), \quad y=-2x+\frac{2}{3}. \qquad (2_1)$$

Это знакомые нам уравнения. Каждое из них имеет бесконечное множество решений. Значит, и уравнения (1) и (2) имеют бесконечное множество решений. Некоторую часть решений каждого из них можно вычислить и расположить в таблицу.

Графики уравнений (1_1) и (2_1) — прямые. Следовательно, и графики уравнений (1) и (2)—также прямые. Выполняется построение графиков.

В процессе выполнения упражнений в построении графиков целесообразно подчеркивать, что координаты любой точки графика являются решением соответствующего уравнения. По хорошо выполненному чертежу целые координаты точки прямой читаются, как правило, точно. Поэтому можно указывать на графике точки, координаты которых—целые числа. Учащиеся, определив их, подставляют в уравнение и убеждаются, что они являются решением.

В нашей практике учащиеся поставили вопрос, можно ли выражать x через y. Им было разрешено делать это, где удобно.

5. Пусть даны два уравнения первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x-y=5, & (1) \\ x+2y=10. & (2) \end{cases}$$

Требуется найти такие значения x и y, которые одновременно были бы решениями (1) и (2) уравнений. Два уравнения, рассматриваемые совместно, называются системой уравнений. Решить систему— значит найти такие значения неизвестных, которые были бы решениями каждого уравнения системы. Значит, нашу задачу можно сформулировать так: решить систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

На одном чертеже в одном и том же масштабе построим графики каждого уравнения системы.

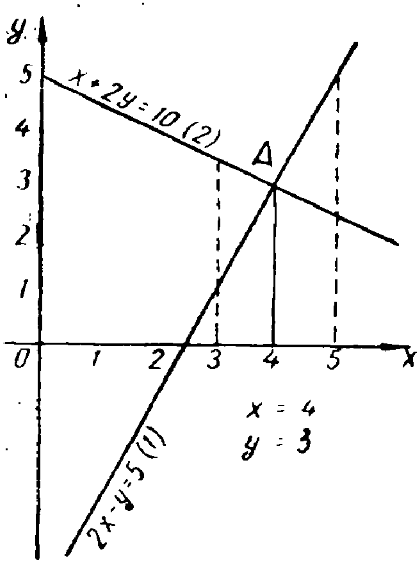
$$2x - y = 5, \qquad x + 2y = 10,$$

$$y = 2x - 5. \qquad y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

x	y
0	—5
2	—1
5	5

x	y
0	5
3	$3\frac{1}{2}$
5	$2\frac{1}{2}$

Координаты любой точки графика уравнения (1) являются решением этого уравнения (черт. 5). Точно так же координаты любой точки графика уравнения (2) служат решением второго уравнения. Следовательно, координаты общей точки графиков двух уравнений дадут решение системы. Обозначим общую точку — точку пересечения прямых — буквой A. Ее координаты: $x = 4$, $y = 3$.



Черт. 5.

Подставляя их в каждое уравнение системы, убеждаемся, что они действительно являются решением системы заданных уравнений. Итак, $x = 4$, $y = 3$.

Других решений система не имеет.

Графическим способом решается еще несколько систем уравнений с целыми решениями:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 14 = 0, \\ 2x + 3y - 8 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 3y = -18, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$$

$$(-2;\ 4) \qquad (-3;\ -2)$$

$$\begin{cases} x-3y-11=0, \\ 2x+y-\ \ 8=0, \end{cases}$$
$$(5;\ -2).$$

Графическое решение систем дает приближенные значения неизвестных. Точность определения неизвестных зависит от масштаба, в котором чертят графики, от бумаги и чертежных приборов. При прочих равных условиях более крупный масштаб в некоторых границах дает возможность получить более высокую точность. Выполнение графиков на миллиметровой бумаге повышает точность. Хорошие чертежные приборы, тщательно очиненный карандаш дают возможность повысить точность определения неизвестных. Например, при выполнении графиков на миллиметровой бумаге в масштабе единица в одном дециметре хорошими чертежными приборами можно найти неизвестные с точностью до $\pm 0,02$, а при решении системы на той же бумаге в масштабе единица в одном сантиметре неизвестные можно найти с точностью, не превышающей 0,2. Точность решения зависит от решающего, от его искусства в черчении и прилежания: аккуратное выполнение чертежа улучшает точность, небрежность и торопливость понижают ее. Это следует разъяснить ученикам.

Промежутки между значениями x, которые используются при построении графиков, не должны быть слишком малыми; целесообразно выбирать их так, чтобы точки, по которым вычерчивается прямая, находились одна от другой не ближе 5 см.

Точность решения зависит и от особенностей уравнений, от взаимного расположения графиков, от расположения точки пересечения прямых по отношению к началу координат. Лучшие результаты получаются, если прямые пересекаются под углом близким к 90°. Менее точные результаты будут, если прямые пересекаются под углом меньше 30°. Если точка пересечения прямых находится недалеко от начала координат, точность определения неизвестных будет выше; если же она удалена от начала на значительное расстояние, точность будет ниже.

Приведенные соображения помогают правильно подбирать упражнения.

Приближенные значения неизвестных при подстановке их в уравнение могут не привести к числовому тождеству: проверка, как правило, будет давать приближенные равенства. Это затрудняет проверку. Вот почему первые системы, которые предлагаются учащимся, целесообразно выбирать с целыми решениями: в таких случаях обычно удается избежать приближенных значений неизвестных.

6. Накапливаемый учащимися опыт графического решения приводит к выводу, что системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеют по одному решению. Однако так бывает не всегда. Программа требует познакомить учащихся с различными возможностями в отношении числа решений. Это делается при решении примеров.

Пусть требуется решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + 2y = -3. \end{cases}$$

Выполняя уже привычный план графического решения, учащиеся наталкиваются на интересный случай: прямые—графики данных уравнений—оказываются параллельными. Значит, не существует точки пересечения прямых, нельзя найти решение системы. Говорят: система не имеет решений.

Сопоставляя уравнения системы, легко усмотреть, что они противоречивы. Разделив обе части второго уравнения на 2, получим систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x + y = -1{,}5. \end{cases}$$

Поэтому предложенную для решения систему называют несовместной.

Каковы особенности уравнений несовместной системы?

В нашей системе коэффициенты при неизвестных в двух уравнениях пропорциональны и не пропорциональны свободным членам:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{-3}$$

Это является признаком несовместной системы, признаком того, что система не имеет решений. Предлагается придумать системы, не имеющие решений, и проследить выводы еще на следующей системе:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x - 1{,}5y = 1. \end{cases}$$

Требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3, \\ 3x + 3y - 4{,}5. \end{cases}$$

При выполнении графического решения учащиеся вновь наталкиваются на интересный случай: прямые, соответствующие уравнениям системы, сливаются в одну прямую. Какое же заключение можно сделать о решении системы? Система имеет бесконечное множество решений: координаты любой точки двух слившихся прямых являются решением системы, ибо они — решение каждого из данных уравнений. Систему называют неопределенной.

Если обе части первого уравнения умножить на 3, а второго на 2, то получим одинаковые уравнения. Значит, по форме нам дана система двух уравнений, а по существу—одно уравнение первой степени с двумя неизвестными. А такое уравнение имеет бесконечное множество решений.

Рассматривая коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений системы, легко заметить, что они пропорциональны:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4{,}5}.$$

Пропорциональность соответствующих коэффициентов и свободных членов уравнений является признаком того, что система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений. Придумайте системы, которые имеют бесконечное множество решений.

Проверим еще наши наблюдения на следующей системе:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0, \\ 0{,}3x - 0{,}1y - 0{,}2 = 0. \end{cases}$$

Далее на уроках и в порядке домашней работы учащиеся тренируются в графическом решении систем линейных уравнений; при этом даются системы с одним решением, не имеющие решений, с бесконечно большим количеством их. В нашей практике графическое решение систем завершалось письменной контрольной работой в течение урока. Как всегда задания для контрольной работы предлагались на билетах в 6—8 вариантах. В каждый вариант включалось две системы, из которых одна—в канонической форме, а другая требовала некоторых предварительных упрощений одного или обоих уравнений. Контрольные работы дали вполне удовлетворительные результаты.

7. При построении графиков линейных уравнений, при графическом решении систем учащиеся неоднократно выражают одно неизвестное уравнения через другое. Они приобретают навыки в таких операциях. Это создает благоприятные условия для перехода к решению систем уравнений способом подстановки. А поэтому после графического решения уместно перейти к этому способу.

Иногда наблюдается, что преподаватель по разным мотивам не вводит способ подстановки. Это— ошибка: способ подстановки является более общим по сравнению со способом сложения, ибо применяется к более широкому классу систем уравнений. Его отбрасывать не следует. Кроме того, некоторые системы уравнений решаются способом подстановки проще. Например, для решения систем:

$$\begin{cases} (a^2+b^2)x - aby = a^2 - b^2, \\ y = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{b^2x}{a^2-b^2} + \dfrac{y}{ab+b^2} = \dfrac{b+1}{ab^2} \\ \dfrac{x}{a-b} = \dfrac{y}{b^2} \end{cases}$$

удобно применить способ подстановки.

Дедуктивная теория равносильности систем не доступна учащимся 7-го класса. Однако показать на примерах, что способ подстановки приводит к системе, равносильной исходной, возможно.

Прежде всего выясняется на примерах, какие системы равносильны, приводятся примеры и равносильных и неравносильных систем. Две системы уравнений называются равносильными, если они имеют одни и те же решения, или иначе: две системы уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй и каждое решение второй—решением первой.

Требуется решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9, \\ 3x + 2y = 8. \end{cases} \qquad (1)$$

Выразим из первого уравнения x через y и подставим полученное для x выражение во второе уравнение. Получим систему:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ (9 - 5y), \\ \frac{3}{2}\ (9 - 5y) + 2y = 8. \end{cases} \qquad (2)$$

В системе (2) второе уравнение содержит одно неизвестное. Находим его: $y = 1$. Подставляя полученное значение y в первое уравнение системы (2), определим $x : x = 2$. Очевидно, что $x = 2$, $y = 1$ — решение системы (2).

Путем подстановки в систему (1), убеждаемся, что $x = 2$, $y = 1$ есть решение системы (1). Других решений эта система не имеет. Значит, система (1) и (2) — равносильны. Способ подстановки приводит к системе, равносильной данной, если последняя не имеет дробных уравнений. Это положение можно подтвердить еще на одной-двух системах.

Полезно приучить школьников предварительно выяснять, какое уравнение выбрать для выражения одного неизвестного через другое, какое неизвестное выражать через другое.

Перейдя к способу сложения, также обращают внимание на то, что система, получаемая после сложения, равносильна данной, если последняя не имеет дробных уравнений.

Пусть дана система:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -\ 5, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases} \qquad (3)$$

Умножив обе части первого уравнения на 2, второго на 3, получим:

$$\begin{cases} 4x - 6y = -10, \\ 9x + 6y = 36. \end{cases} \tag{4}$$

Сложим по частям уравнения системы (4) и образуем систему из полученного уравнения и одного уравнения системы (3):

$$\begin{cases} 13x = 26, \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) решается легко: $x = 2$, $y = 3$.

Подставляя вместо x и y соответственно 2 и 3 в уравнения системы (3), убедимся, что $x = 2$ и $y = 3$ — решение этой системы. Других решений система не имеет. Значит, системы (3) и (5) — равносильны. Равносильность проверяется еще на одном-двух примерах систем.

При тренировке в решении систем предлагают учащимся и такие системы, которые или не имеют решений, или имеют бесконечное множество решений. Решая, например, систему:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 2, \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = 0, \end{cases}$$

учащиеся приходят к равенству: $0 = 2$. Это говорит о том, что система не имеет решений: она несовместна. Вспоминается признак несовместной системы. При решении системы:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ 1\dfrac{2}{3}x - y = \dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

учащиеся приходят к равенству $0 = 0$. Это свидетельствует о том, что система имеет бесконечное множество решений: она неопределенная. Вспоминается признак таких систем. Признаки неопределенности и несовместности систем можно записать в символической форме.

Приведем несколько задач, которые можно решить с помощью систем двух линейных уравнений.

а) Два сообщающихся цилиндрических сосуда расположены так, что их высоты вертикальны. Сосуды наполнены водой и закрыты поршнями. Поперечное сечение одного сосуда равно 625 кв. см, а другого 100 кв. см. На поршни положены два груза, общий вес которых 72,5 кг. Вычислить нагрузку на каждый поршень, если поршни находятся на одном уровне.

б) Два сообщающихся цилиндрических сосуда с вертикальными высотами наполнены водой и закрыты поршнями. Если на поршни положить грузы в 36 кг и в 4 кг, то поршни будут находиться на одной высоте. Если на поршень с большим поперечным сечением положить груз в 18 кг, а на меньшем сохранить 4 кг, то больший поршень будет выше меньшего на 20 см. Найти площади поперечных сечений цилиндров.

в) В гидравлическом прессе давление на поршень насоса в 10 кг вызывает давление поршня рабочего цилиндра равное 210 кг. Определить площади поршней гидравлического пресса, если площадь поршня рабочего цилиндра на 1000 кв. мм больше площади поршня насоса.

г) Гидравлический пресс имеет диаметр поршня рабочего цилиндра равный 340 мм, диаметр же поршня насоса 15 мм. Поршень насоса приводится в движение рычагом второго рода. Определить плечи рычага, если усилие одного рабочего, приложенное к свободному концу рычага и равное 20 кг, вызывает давление рабочего поршня, равное 205 т.

При решении задач трение поршней не учитывать.

Очерк десятый

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Отмечается, что некоторые из оканчивающих среднюю школу слабо владеют понятием иррационального числа: в их сознании это понятие оказывается нечетким, иногда искаженным и даже ложным. От некоторых, оканчивающих школу, можно услышать, что иррациональное число—это корень из числа, из которого нельзя извлечь корень точно, например, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, что числа π, $\lg 2$, бесконечная непериодическая десятичная дробь не являются иррациональными числами, так как в их записи нет радикалов. Иногда доходят до утверждений, что $\sqrt{-1}$— иррациональное число.* В связи с этим некоторые выпускники школы неверно представляют объем понятия—множество действительных чисел. Очевидно есть учителя, которые повинны в нечетком изложении главы об иррациональных числах и неверном формировании множества действительных чисел.

Учитель виновен, однако имеются обстоятельства, смягчающие его вину. Изложение в 8-м классе главы об иррациональных числах встречается с существенными принципиальными трудностями: то приходится опираться на некоторые бесконечные последователь-

---

* Смотрите, например, ряд статей в журнале „Математика в школе“ № 2 за 1956 г.

ности, то пользоваться суммами членов таких бесконечных последовательностей, в иных случаях приходится иметь дело с предельными переходами, в других—вести речь о несоизмеримых величинах. А все это неизвестно учащимся, в лучшем случае они имеют некоторые представления о несоизмеримых отрезках. Такая обстановка и создает чрезвычайные трудности в процессе изучения этой темы.

Следует отметить и тот факт, что арифметические теории иррациональных чисел, которые используются в наше время, созданы очень поздно, только во второй половине 19 века. Наиболее распространенные из них принадлежат Дедекинду, Кантору и Вейерштрассу. Это свидетельствует о том, что проблема иррационального числа сложна по своей сущности.

Учитель не имеет достаточно обстоятельного пособия с разработкой этой темы, а создать такую разработку, особенно в отрыве от библиотек, не каждый сможет. В методической литературе уделяется внимание проблеме преподавания главы об иррациональных числах, однако эта проблема не получила приемлемого и известного учителю решения, которое помогло бы в практической работе.

Греческой математике было чуждо понятие иррационального числа. Однако развивающаяся и совершенствующаяся на греческой почве геометрия не могла обходиться без иррациональности. Поэтому греки создали стройную теорию пропорций и учение о несоизмеримых отрезках, которое равносильно теориям иррациональных чисел нашего времени. Таким образом, иррациональность входит в математику как теория несоизмеримых отрезков. Можно говорить о геометрической теории иррациональных чисел.

В методической и учебной литературе, в практике преподавания отдельных учителей имеются многочисленные попытки применить научные теории иррациональных чисел в школьном обучении. С. С. Бронштейн высказывается за использование при обучении теории фундаментальных рядов Кантора.* А. Я. Хин-

* С. С. Бронштейн, Методика алгебры, Учпедгиз 1935.

чин рекомендует опереться на бесконечные непериодические десятичные дроби.*

Перечень таких попыток и рекомендаций легко увеличить. Они заслуживают внимательного изучения.

2. В нашей практике преподавания иррациональных чисел соблюдаются следующие положения: а) изложение должно учитывать развитие учащихся: современные дедуктивные теории иррациональных чисел недоступны для учащихся; б) изложение должно опираться на умело подобранные примеры, направляться от частного к общему, однако учащиеся должны получить научно-выдержанное понятие иррационального числа; в) впервые с иррациональными числами встречаются при рассмотрении несоизмеримых отрезков, а определяются они как бесконечные непериодические десятичные дроби; г) учащиеся должны получить правильное понятие о множестве действительных чисел.

Необходимо найти учебное время, которое требуется для правильного и умелого введения понятия иррационального числа. Это время найдется, если сократить неоправданное с точки зрения науки и практики количество примеров, требующих сложных тождественных преобразований иррациональных выражений. Такие преобразования надо свести к минимуму, который обеспечил бы расширение понятия о степени. Приобретение основательных навыков в тождественных преобразованиях разумно отнести на период изучения степеней с дробными и отрицательными показателями.

В связи с этим необходимо пересмотреть экзаменационные требования: в отношении тождественных преобразований выражений, содержащих радикалы, значительно уменьшить их, вместе с тем повысить требования в отношении тождественных преобразований выражений, содержащих степени с отрицательными и дробными показателями.

Некоторые учителя не решаются знакомить учащихся с понятием множества. Это понятие — основное

---

* А. Я. Хинчин, Введение иррациональных чисел (статья в ж. „Математика в школе“ № 3 за 1939 г. В том же номере журнала помещены другие полезные для учителя статьи об иррациональных числах).

(первичное). Оно вводится путем „определения через абстракцию", путем пояснения примерами. Все учащиеся 8-го класса нашей школы образуют множество; каждый учащийся—элемент этого множества. Характерным признаком, позволяющим объединить учащихся в единое множество, служит то, что все учащиеся обучаются в 8-м классе нашей школы. Все натуральные числа образуют множество. Характерным признаком каждого элемента является то, что число целое и положительное. Между двумя приведенными примерами множеств имеется и различие: первое из них—конечное, второе—бесконечное. Теперь учащиеся легко приведут много примеров конечных и бесконечных множеств. Понятие множества можно пояснить словами: совокупность, класс. В нашем опыте понятие о множестве использовалось в 8-м классе, а иногда и раньше. Учащиеся хорошо осваиваются с ним и разумно его применяют.

Со множеством рациональных чисел дети познакомились в 6-м классе. С тех пор прошло уже два года. За этот период изменился и состав учащихся, изменились и сами учащиеся. Поэтому на подступах к введению понятия иррационального числа уместно сделать краткий обзор тех видов чисел, которые уже известны. Учащиеся вспоминают состав множества рациональных чисел. В него входят натуральные числа, нуль, положительные дробные числа, целые отрицательные и дробные отрицательные числа. Так как одна и та же дробь может быть представлена различно, например, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\ldots$, то во множество включаются только несократимые обыкновенные дроби.

Учащиеся вспоминают, что натуральные числа могут получаться в результате счета предметов, что любое рациональное число можно получить в результате измерения величин, в частности отрезков, что положительные и отрицательные числа получаются при измерении величин, имеющих два противоположных направления, что положительные числа можно использовать для выражения роста, а отрицательные — для выражения уменьшения величины.

Вспоминаются законы действий над рациональными числами и расположение чисел на оси.

3. В интересах дальнейшего учащиеся вспоминают и углубляют вопрос об обращении обыкновенных дробей в десятичные. Какие дробные числа можно представить в виде конечной десятичной дроби? Учтя структуру знаменателей десятичных дробей и рассматривая, например, числа $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{25}$, $-1\frac{1}{2}$, $-2\frac{3}{8}$, устанавливается следующее: если знаменатель обыкновенной несократимой дроби не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5, то только такая дробь может быть выражена точно конечной десятичной дробью.

Затем рассматриваются дробные числа, знаменатели которых не содержат простых множителей 2 и 5. При обращении таких чисел в десятичные, получаются бесконечные чистые периодические дроби, например, $\frac{2}{3}=0{,}666...=0{,}(6)$, $-2\frac{2}{11}=-2{,}181818...=$ $=-2{,}(18)$. Устанавливается: если знаменатель обыкновенной несократимой дроби не содержит простых множителей 2 и 5, то только такая дробь при обращении в десятичную дает чистую периодическую дробь, период которой отличен от 0.

Далее рассматривается обращение в десятичные таких дробных чисел, знаменатели которых содержат в числе других простых множителей 2 или 5, или и 2 и 5, и показывается, что в этом случае получаются бесконечные смешанные периодические дроби, например, $\frac{1}{6}=0{,}1666...=0{,}1(6)$; $-3\frac{21}{55}=$ $=-3{,}3818181...=-3{,}3(81)$. Устанавливается: если в знаменателе обыкновенной несократимой дроби в числе других простых множителей есть множители 2 или 5, или и 2 и 5, то только такая дробь обращается в смешанную периодическую, период которой отличен от 0.

Выясняется, что, если при обращении обыкновенной дроби получается бесконечная, то эта бесконечная дробь может быть только периодической. Например, для обращения несократимой дроби $\frac{2}{7}$ в десятичную числитель делят на знаменатель. При этом могут получаться только следующие остатки: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Значит. один из остатков обязательно повторится; следовательно, повторится и цифра частного. После этого остатки и цифры частного будут повторяться в прежнем порядке.

Встает вопрос: если число записано в форме конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, то всегда ли возможно записать его в форме обыкновенной дроби? Учащиеся знают, как обращаются конечные десятичные дроби в обыкновенные. А как обратить в обыкновенную чистую периодическую дробь?

В 8-м классе дать обоснование правила обращения чистой периодической дроби в обыкновенную нет возможности: оно опирается на понятие предела последовательности и на теорему о сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, приходится опереться на неполную индукцию. Пусть дана чистая периодическая дробь 0,(2). Она равна обыкновенной, числитель которой равен периоду, а знаменатель — число 9, т. е. $0,(2)=\frac{2}{9}$. Правильность проверяется путем обращения полученной дроби в десятичную. Таким же путем рассматриваются еще примеры:

$$0,(36)=\frac{36}{99}=\frac{4}{11};\quad 1,(234)=1\frac{234}{999}=1\frac{26}{111}.$$

В результате устанавливается правило: чистая периодическая дробь равна обыкновенной, у которой числитель есть период, а знаменатель — число, изображенное цифрой 9, повторенной столько раз, сколько цифр в периоде. С целью прочного усвоения правила решаются примерно такие упражнения:

$$1,(6)\cdot 0,3+0,(18)\cdot 7\frac{1}{3};\quad 2,(3):\frac{7}{9}-0,(126)-15\frac{6}{7}.$$

Также изучается обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную. Дробь 0,1(6) получилась из обыкновенной, у которой числитель — число, стоящее между запятой и вторым периодом без числа между запятой и первым периодом, т. е. 16—1, а знаменатель—число, изображенное цифрой 9, повторенное столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом, т. е. 90. Имеем:

$$0,1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{1}{6}$$

Правильность проверяется обращением $\frac{1}{6}$ в десятичную дробь. Таким же путем рассматриваются еще несколько примеров:

$$0,11(6)=\frac{116-11}{900}=\frac{7}{60};\ 4,3(12)=4\frac{312-3}{990}=4\frac{103}{330}.$$

В результате устанавливается правило: смешанная периодическая дробь равна такой обыкновенной дроби, числитель которой есть число, стоящее между запятой и вторым периодом, без числа, стоящего между запятой и первым периодом, а знаменатель—число, изображенное цифрой 9, повторенной столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом. Для запоминания правила решаются примеры:

$$0,8(3)\cdot 1,5-1,(6)\cdot 3;\quad 0,3(25)\cdot 7\frac{8}{13}+0,24(3)\cdot 1\frac{27}{73}.$$

Итак, любая конечная и бесконечная периодическая дробь обращается в обыкновенную дробь. Обращение получит обоснование в дальнейшем.

4. Опираясь на примеры множеств, дается понятие о взаимно-однозначном соответствии между элементами двух множеств. Учащиеся 8-го класса составляют множество. Фамилия каждого из них записана на странице классного журнала под определенным номером. Эти номера также образуют множество. Каждому учащемуся 8-го класса соответствует только один номер. Каждому номеру соответствует только один учащийся 8-го класса. Говорят: между элементами этих двух множеств имеется взаимно-однозначное соответствие.

Обозначим углы четырехугольника буквами: A, B, C, D. Эти буквы составляют одно множество, а углы—другое множество. Между элементами этих двух множеств существует взаимно-однозначное соответствие. Между элементами множества натуральных чисел и элементами множества целых отрицательных чисел также имеется взаимно-однозначное соответствие.

Образуем два множества. В первое из них включим все целые числа, а также дробные числа, записанные в форме обыкновенных несократимых дробей. Во второе множество включим все целые числа, все конечные десятичные дроби и бесконечные периодические десятичные дроби, кроме дробей с периодом 9. Последние рассматривать не будем: каждая из них равна или целому числу или конечной десятичной дроби: $2,(9)=3$; $0,3(9)=0,4$.

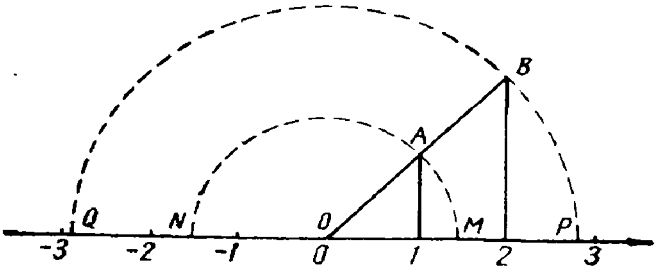
Каждому элементу первого множества соответствует только один элемент второго множества; например, числам 5, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-2\frac{5}{6}$ соответствуют числа 5; $0,5$; $-0,(3)$; $-2,8(3)$. Каждому элементу второго множества соответствует только один элемент первого множества; например, числам $0,75$; $-1,(2)$; $-2,4(8)$ соответствуют числа $\frac{3}{4}$, $-1\frac{2}{9}$, $-2\frac{22}{45}$. Значит, между элементами этих двух множеств имеется взаимно-однозначное соответствие. Каждое из этих множеств является множеством рациональных чисел.

Каждое рациональное число можно рассматривать как результат измерения направленного отрезка прямой. Отрезок, которому в результате измерения выбранной единицей длины соответствует рациональное число, называется соизмеримым с единицей длины.

Из геометрии известно, что существуют такие отрезки, которые несоизмеримы с единицей длины. Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной: если за единицу длины принять сторону квадрата, то длину его диагонали нельзя выразить рациональным числом. Значит, множество рациональных чисел недостаточно, чтобы обеспечить измерение любых отрезков при установленной единице длины.

Из несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной следует, что на числовой оси имеются точки, которым не соответствуют рациональные числа.

В этом легко убедиться. К числовой оси в точке с абциссой 1 проведем перпендикуляр и на нем от оси отложим отрезок, равный 1 (черт. 6). Отрезок OA несоизмерим с единичным отрезком. Окружность, описанная радиусом OA с центром в точке O, пересечет ось в точках M и N. Отрезкам OM и ON не соответствуют рациональные числа; иначе точкам M



Черт. 6.

и N не соответствуют рациональные числа. Если к оси провести перпендикуляр в точке с абциссой 2, отложить на нем от оси отрезок, равный 2, то отрезок OB также будет несоизмерим с единичным отрезком. Значит, и точкам P и Q не соответствуют рациональные числа. Таким приемом можно построить бесконечное множество точек на оси, которым нельзя приписать рациональные числа. Числовая прямая богаче точками, чем множество рациональных чисел—числами.

5. Чтобы иметь возможность каждому направленному отрезку оси поставить в соответствие число — результат измерения этого отрезка единицей длины, чтобы иметь возможность каждой точке числовой оси приписать число, необходимо, очевидно, ввести новые числа. Отношение отрезка, несоизмеримого с единицей длины, к единичному отрезку также называют числом. Покажем, например, что отрезку OM соответствует число.

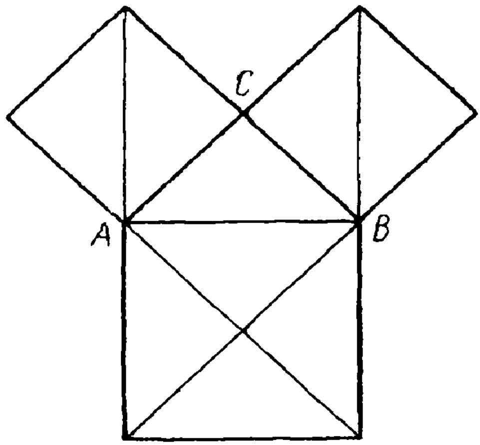
Пусть дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетом, равным 1 (черт.7). Построим на его сторонах квадраты. Площадь каждого квадрата, построенного на катетах, равна 1. Легко усмотреть, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 2. Обозначив длину AB через x, получим:

$$x^2 = BC^2 + AC^2 = 2, \quad x = \sqrt{2}.$$

Следовательно, $OM = \sqrt{2}$, $ON = -\sqrt{2}$.

Таким же путем можно показать, что $OP = \sqrt{8}$, $OQ = -\sqrt{8}$.

Рассмотрим число $\sqrt{2}$. Прежде всего убедимся, что это число не является рациональным. Покажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Среди целых чисел такого числа нет. Это следует из рассмотрения последовательности квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9,... Среди членов этой последовательности нет числа 2. Не существует такого числа и среди дробных чисел. Это доказывается способом от противного. Допустим, что



Черт. 7.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где p и q—целые числа, $q \neq 1$, дробь $\frac{p}{q}$— несократимая. Тогда по определению корня имеем:

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \text{ или } 2q^2 = p^2.$$

Из последнего равенства видно, что p^2—число четное, так как $2q^2$—четное число. Значит, и p—есть число четное, т. е. правая часть равенства делится на 4. А это возможно тогда, когда q—четное. Значит, p и q—четные числа и дробь $\frac{p}{q}$— сократимая. Это противоречит условию, наложенному на эту дробь.

Итак, нет рационального числа, квадрат которого равен 2. Иными словами: $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. В отличие от рациональных чисел назовем такие числа, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ иррациональными. Значит, на числовой оси отрезкам OM, ON, OP, OQ соответствуют иррациональные числа.

$\sqrt{2}$ можно выразить с помощью десятичной дроби приближенно. Разобьем промежуток между числами 1 и 2 на 10 равных промежутков:

$$1;\ 1,1;\ 1,2;\ \ldots;\ 1,9;\ 2.$$

Путем испытаний убеждаемся, что

$$1,4^2 < 2 < 1,5^2.$$

Значит, $\sqrt{2} \approx 1,4$ с точностью до 0,1 по недостатку.

Разобьем промежуток между числами 1,4 и 1,5 на 10 равных промежутков:

$$1,4;\ 1,41;\ 1,42;\ \ldots;\ 1,49;\ 1,5.$$

Проверкой убеждаемся что

$$1,41^2 < 2 < 1,42^2.$$

Значит, $\sqrt{2} \approx 1,41$ с точностью до 0,01 по недостатку.

Поступая таким же путем и дальше, найдем, что $\sqrt{2} \approx 1,414$ с точностью до 0,001 по недостатку и т. д.

Этот процесс можно продолжать неограниченно далеко. Получается бесконечная дробь: $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$ Конечная дробь получиться не может. В этом убедимся способом от противного. Допустим, что процесс извлечения корня закончился: получилась конечная десятичная дробь. Такая дробь—число рациональное, а было показано, что $\sqrt{2}$ нельзя выразить рациональным числом.

Полученная дробь—непериодическая. В этом также убеждаемся способом от противного: если бы полученная бесконечная дробь оказалась периодической, то имели бы, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, а $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Если применить к $\sqrt{2}$ алгорифм извлечения квадратного корня из чисел, то получится тот же результат, который дал способ промежутков. Поэтому в дальнейшем для замены иррационального числа соответствующей десятичной дробью будем пользоваться алгорифмом извлечения квадратного корня.

Можно написать сколько угодно бесконечных непериодических десятичных дробей, например, 0,1010010001...; 5,2121121112..; —0,7037033703337... Из изложенного ранее следует, что ни одна из таких дробей не может быть равна рациональному числу, Бесконечные непериодические десятичные дроби — особый новый вид чисел, отличный от рациональных. Их называют иррациональными числами. $\sqrt{2}, -\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{5}$ — представители одного из видов иррациональных чисел.

Иррациональные числа, точки которых расположены вправо от начальной, положительны, а влево от начальной — отрицательны. Каждому иррациональному числу соответствует противоположное ему иррациональное число.

Итак, всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь есть иррациональное число.

6 Сформируем множество чисел так: включим в него все рациональные числа — целые, конечные десятичные, бесконечные периодические дроби — и все иррациональные числа—бесконечные непериодические десятичные дроби. Получим множество, которое называют множеством действительных или вещественных чисел. Таким образом, действительным числом называется всякое целое число, всякая конечная или бесконечная (периодическая или непериодическая) десятичная дробь.

Если на числовой оси указаны начальная и единичная точки, то каждой точке оси соответствует только одно действительное число, выражающее ее расстояние от начала; каждому действительному числу соответствует только одна точка, отстоящая от начала на расстоянии, выражаемом этим числом. Это положение можно рассматривать как аксиому. Значит, между множеством точек числовой прямой и множеством действительных чисел имеется взаимно-однозначное соответствие.

Сформировав множество действительных чисел, следует установить смысл соотношений равенства и неравенства для любых двух чисел этого множества.

В случае двух положительных действительных чисел a и b установим такие положения:

1) Два положительных действительных числа равны тогда и только тогда, когда все их цифры, занимающие одинаковые места относительно знака дробности, равны.

2) Одно положительное действительное число больше другого, если целая часть первого больше целой части второго. Если целые части двух положительных действительных чисел равны, то больше то, у которого десятых долей больше, каковы бы ни были последующие цифры. Если и десятых долей поровну, то больше то, у которого сотых больше, каковы бы ни были последующие цифры, и т. д

Приведенные определения согласуются с теми определениями соотношений „равно", „больше", „меньше", с которыми учащиеся знакомы уже с 5-го класса.

Для двух любых действительных чисел смысл указанных соотношений определяется так же, как для рациональных чисел.*

Сумма двух иррациональных чисел или рационального и иррационального чисел определяется путем рассмотрения сумм последовательных десятичных приближений по недостатку и по избытку. Произведение определяется аналогично этому. Разность и частное определяется так же, как для рациональных чисел. Из определений суммы и произведения действительных чисел следует, что законы арифметических действий, установленные для рациональных чисел, распространяются на действительные числа.**

Описанный путь введения понятия об иррациональном числе и формирование множества действительных чисел выдержан в научном отношении, дает общее понятие об иррациональном числе, правильно вскрывает объем множества действительных чисел. Вместе с тем он доступен учащимся 8-го класса, так как в основном опирается на рассмотрение частных случаев с последующими обобщениями. Изложение рассмотренного материала потребует около 6 уроков.

---

* Очерк четвертый.

** П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Иррациональные числа (статья в ж. „Математика в школе" № 3 за 1941 г.)

А. К. Фадеев и И. С. Соминский, Алгебра, ч. II, Учпедгиз 1951.

Очерк одиннадцатый

К ИЗУЧЕНИЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. В методической и учебной литературе по алгебре для получения формул корней квадратных уравнений указываются два способа. В основе первого из них лежит разложение левой части уравнения, если оно имеет действительные решения, на множители.* Разложение рассматривается как основной способ получения решений. В основе второго способа лежит преобразование уравнений таким образом, чтобы левая часть представляла квадрат линейного выражения от неизвестного, а остальные свободные члены находились в правой части; затем, если уравнение имеет действительные решения, из обеих частей извлекается квадратный корень. При этом способе для некоторых видов неполных уравнений применяется и разложение левой части на множители.

В методической литературе явно отдается предпочтение первому способу. Однако он не находит широкого применения в школе: под влиянием стабильного учебника алгебры А. П. Киселева многие учителя применяют второй способ.

Рекомендации методической литературы по этому вопросу заслуживают внимания учителя. Решение неполных квадратных уравнений и получение формул корней полных квадратных уравнений путем разложения на множители левой части уравнения имеет ряд

---

* В общих суждениях о квадратном уравнении принимается, что оно приведено к нормальному виду.

преимуществ. Во-первых, оно является общим способом решения, пригодным для любого вида квадратного уравнения, если только уравнение имеет действительные корни. Во-вторых, оно подготовляет вопрос о разложении трехчлена второй степени на множители. В-третьих, выкладки, свойственные этому способу, находят применение при изучении квадратичной функции, при определении максимума и минимума ее, при решении неравенств второй степени с одним неизвестным. Кроме того, решение разложением на множители освобождает от необходимости рассматривать четыре возможных комбинации знаков, с которыми приходится иметь дело, если решение опирается на извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения. Эти соображения и заставляют рекомендовать решение квадратных уравнений способом разложения левой части на множители.

Уже первые шаги в изучении квадратных уравнений сопровождаются преобразованиями, требующими учитывать равносильность уравнений. В дальнейшем решаются дробные уравнения, при этом возможно нарушение равносильности и, значит, получение посторонних решений. Это побуждает учителя начать главу с повторения понятия о равносильности уравнений, двух свойств уравнений и следствий из них. Такое повторение позволяет повысить теоретическую основу изучения решений квадратного уравнения.

Решение линейных уравнений и их систем рассматривалось над множеством рациональных чисел. И коэффициенты уравнений и их решения принадлежали только этому множеству.

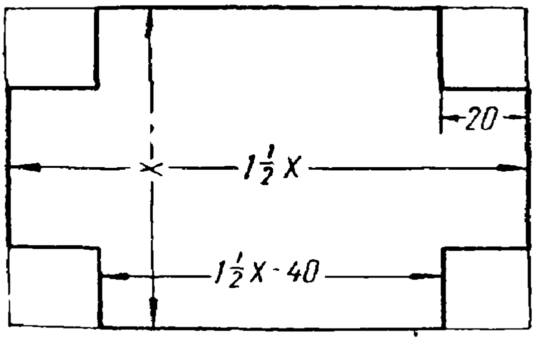
При решении квадратных уравнений положение меняется. Квадратные уравнения рассматриваются над множеством действительных чисел. Значит, и коэффициенты уравнений и неизвестные могут принимать значения действительных чисел, в частности быть иррациональными. Это разъясняется учащимся на первых шагах знакомства с квадратными уравнениями. В этом очерке без особых оговорок уравнения рассматриваются над множеством действительных чисел.

Часто для первой встречи учащихся с квадратным уравнением используется задача. Составляя уравнение для ее решения, учащиеся получают первое квадратное уравнение. Такой прием показывает, что изучение квадратных уравнений полезно для решения задач, что оно обусловлено практикой. Этот прием приводит к уравнению, которое служит исходным конкретным материалом для последующих обобщений и определений. Конечно, при первой встрече с квадратным уравнением используется и тот частный вид этих уравнений, который уже встречался учащимся ранее ($ax^2 + b = 0$).

2. Рассмотрим задачу: „Из листа жести, имевшего форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины, сделана открытая сверху коробка. Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной 20 см и получившиеся боковые грани загнуты. Найти размеры листа, если объем коробки оказался равным 6400 см^3."

Правой частью уравнения сделаем число 6400 см^3.

Пусть длина меньшей стороны листа железа равна x см (черт. 8). Длина большей стороны этого листа равна $1\frac{1}{2}x$ см. Длины сторон основания коробки



Черт. 8.

соответственно равны: $x - 40$ см и $1\frac{1}{2}x - 40$ см. Для объема коробки получаем выражение:

$$20(x - 40)(1\frac{1}{2}x - 40).$$

Составляем уравнение:

$$20(x - 40)\ (1\frac{1}{2}x - 40) = 6400.$$

Последовательно упрощая уравнение и преобразуя его так, чтобы все члены были в левой части и расположены по убывающим степеням x, получим уравнение, равносильное составленному:

$$3x^2 - 200x + 2560 = 0.$$

Уравнение такого вида как полученное называется уравнением второй степени: высшая степень неизвестного вторая. Иначе такое уравнение называется квадратным. Пока мы не умеем решать квадратные уравнения. Главная задача главы, которую начинаем, заключается в том, чтобы научиться решать квадратные уравнения.

Вот еще примеры квадратных уравнений:

$x^2 - 7x + \sqrt{2} = 0; 3x^2 - 5x = 0;$ $\sqrt{3}x^2 - 2 = 0;$ $5x^2 = 0.$

Каждое квадратное уравнение содержит одно неизвестное. Чтобы уравнение было квадратным, необходимо наличие члена с неизвестным во второй степени. Коэффициент при неизвестном во второй степени может быть любым действительным числом, кроме 0. Коэффициент при неизвестном в первой степени может быть любым действительным числом, в частности, он может быть равным и 0, как в 3-м и 4-м примерах. Член, не содержащий неизвестного, также может быть любым действительным числом, в частности и 0, как во 2-м примере.

Если коэффициент при x^2 отрицательный, то, умножая обе части уравнения на -1, получим уравнение, равносильное данному и с положительным коэффициентом при неизвестном во второй степени. Например, умножая обе части уравнения $-2x^2 + x - 4 = 0$ на -1, получим $2x^2 - x + 4 = 0$. Поэтому в квадратном уравнении коэффициент при неизвестном во второй степени будем считать всегда больше 0.

Квадратное уравнение в общем виде записывается так:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

где $a > 0$, а b и c — любые действительные числа. Член с неизвестным во второй степени называется старшим членом, с неизвестным в первой степени — средним членом, не содержащий неизвестного — свободным членом. Называют: a — коэффициент старшего члена, b — коэффициент среднего члена.

Уравнение (1) называют общим квадратным уравнением, если в нем представлены все члены, т. е. $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Если коэффициент $a = 1$, то уравнение называют приведенным квадратным уравнением. Его записывают так:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (1) всегда можно заменить равносильным ему приведенным уравнением. Это достигается делением обеих частей уравнения на коэффициент старшего члена ($a \neq 0$): $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Положив $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, получим:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если $c = 0$, или $b = 0$, или $b = c = 0$, то уравнение называется неполным квадратным уравнением. Возможны следующие виды неполных квадратных уравнений:

$$ax^2 + bx = 0, \qquad (3)$$

$$ax^2 + c = 0, \qquad (4)$$

$$ax^2 = 0. \qquad (5)$$

3. Прежде всего научимся решать неполные квадратные уравнения. Начнем с примеров уравнения вида (3).

Требуется решить уравнение $x^2 - 5x = 0$.

Так как каждый член левой части имеет множитель x, то уравнение можно записать так: $x(x - 5) = 0$. Чтобы произведение двух сомножителей равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из них равнялся 0. Получаем два уравнения: $x = 0$, $x - 5 = 0$. Имеем решения: $x_1 = 0$; $x_2 = 5$. Устная проверка показывает, что $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$ — решения данного уравнения.

Таким же путем решаются следующие уравнения: $2x^2 - 7x = 0$, $4y^2 + y = 0$, $z^2 - \sqrt{3}z = 0$. Затем решается уравнение $ax^2 + bx = 0$.

Подмечаем, что квадратное уравнение вида (3) всегда имеет два решения, одно из которых равно 0.

Равенство 0 одного из решений уравнения (3) является его характеристическим свойством. Можно доказать следующую теорему: чтобы один из корней квадратного уравнения был равен 0, необходимо и достаточно, чтобы свободный член равнялся 0.

Пусть $x=0$ корень квадратного уравнения (1). Подставляя в уравнение (1) вместо x число 0, получим $c=0$.

Пусть $c=0$. В таком случае, как уже показано, уравнение имеет решение, равное 0.

Переходим к решению уравнения (4).

Требуется решить уравнение $x^2-16=0$. Разложив на множители левую часть, получим $(x-4)(x+4)=0$. Применяя то же рассуждение, какое использовалось при решении уравнения (3), найдем: $x-4=0$, $x+4=0$. Откуда получим: $x_1=4$, $x_2=-4$. Устная проверка показывает, что 4 и -4 — решения данного уравнения.

При решении уравнения $x^2-7=0$ предварительно записываем $x^2-(\sqrt{7})^2=0$. Уравнение $2x^2-5=0$ предварительно преобразуется в следующее:

$$(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2=0.$$

Решаются примерно такие уравнения: $4y^2-9=0$, $3z^2-1=0$, $5t^2-2=0$, $-5t^2+9=0$.

Требуется решить уравнение $x^2+4=0$. Левая часть—сумма квадратов. Она не разлагается на множители первой степени относительно неизвестного. Уравнение не имеет решений. Это видно и из структуры уравнения: левая часть при любых значениях x больше 0, а правая равна 0. Значит, уравнение противоречиво.

Путем неполной индукции подмечаем, что уравнение (4) или имеет два взаимно противоположных решения или не имеет решений.

Далее рассматриваем решение уравнения $ax^2+b=0$. Коэффициент старшего члена больше 0. Пусть $b<0$.

Тогда можно записать: $(\sqrt{ax})^2-(\sqrt{-b})^2=0$, $(\sqrt{xa}-\sqrt{-b})(\sqrt{ax}+\sqrt{-b})=0$.

Получаем два решения: $x_1=\sqrt{-\frac{b}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{b}{a}}$.

Если $b > 0$, то уравнение (4) не имеет решений: левая часть всегда больше 0.

Конечно, в дальнейшем учитель не будет возражать, если кто-либо из учащихся решит уравнение (4) путем переноса свободного члена в правую часть и извлечения из обеих частей квадратного корня.

Рассмотрим последнее неполное квадратное уравнение $ax^2 = 0$ (5). Так как $a \neq 0$, то оно сводится к равносильному уравнению $x^2 = 0$ или $x \cdot x = 0$. Отсюда $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Уравнение имеет два корня, каждый из которых равен 0.

В стабильном задачнике дается достаточное количество упражнений на решение неполных квадратных уравнений. Среди них имеются и дробные уравнения. Параллельно с решением неполных квадратных уравнений целесообразно решать и задачи, которые приводят к этим уравнениям.

4. Выделение из трехчлена второй степени полного квадрата линейного относительно неизвестного двучлена и преобразование трехчлена в алгебраическую сумму двух выражений, одно из которых — полный квадрат этого двучлена, является полезным навыком, неоднократно применяющимся в школьном курсе алгебры. Важно, чтобы учащиеся овладели этим навыком. Поэтому решение приведенного квадратного уравнения следует начинать с решения серии целесообразно подобранных постепенно усложняющихся примеров уравнений. В результате этого учащиеся приходят к выводу формулы решения приведенного квадратного уравнения, прочно усваивают этот вывод и вместе с тем овладевают навыком представлять трехчлен второй степени в виде алгебраической суммы двух слагаемых, одно из которых — полный квадрат линейного двучлена.

Требуется решить уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$.

До сих пор для решения квадратных уравнений применялось разложение левой части на множители. Применим этот способ и для решения приведенных квадратных уравнений. Получим $(x-2)^2 = 0$. Откуда уже привычным рассуждением найдем: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. Проверка подтверждает, что 2 — корень уравнения. Итак, уравнение имеет два равных корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Решим уравнение $(x-1)^2-25=0$. Разлагая левую часть на множители, получим $(x-6)(x+4)=0$. Найдем решения: $x_1=6$, $x_2=-4$.

Пусть требуется решить уравнение $x^2-2x-3=0$. Преобразуем его, чтобы получилось уравнение, похожее на предыдущее. Для этого выделим в левой части полный квадрат. Будем рассматривать старший член как квадрат первого слагаемого, равного x, средний член как удвоенное произведение первого слагаемого на второе. За второе слагаемое надо принять 1. Прибавим квадрат второго слагаемого, т. е. 1^2. Чтобы не изменить левую часть уравнения, вычтем 1^2. Получим:

$$x^2-2x\cdot 1+1^2-1^2-3=0,$$

или

$$(x-1)^2-4=0,$$

$$(x-1-2)(x-1+2)=0,$$

$$(x-3)(x+1)=0.$$

Находим два решения: $x_1=3$, $x_2=-1$.

Таким же путем решаются следующие уравнения: $x^2-4x+3=0$, $x^2+5x+6=0$.

При решении уравнения $x^2-2x-1=0$ получаются иррациональные корни:

$$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-1=0,$$

$$(x-1)^2-2=0,$$

$$(x-1)^2-(\sqrt{2})^2=0,$$

$$[(x-1)-\sqrt{2}]\quad[(x-1)+\sqrt{2}]=0.$$

В результате получим:

$$x_1=1+\sqrt{2},\quad x_2=1-\sqrt{2}.$$

Проверка покажет правильность решения.

Решают уравнения $x^2-4x+1=0$, $x^2+6x-4=0$, которые также имеют иррациональные корни.

Решая уравнение $x^2-2x+5=0$, учащиеся приходят к заключению, что левая часть не разлагается на множители. При любых допустимых значениях x левая часть больше 0, а правая равна 0. Уравнение противоречиво. Оно не имеет решений.

К такому же выводу придут учащиеся при решении уравнений: $x^2+6x+10=0$, $x^2-8x+19=0$.

Далее решаются уравнения с буквенными коэффициентами: $x^2 - 3mx + 2n^2 = 0$, $x^2 + 7nx + 10n^2 = 0$.

Уже решенные уравнения дают возможность с помощью неполной индукции отметить, что приведенное квадратное уравнение или имеет два решения, или не имеет решений.

5. Теперь проложен путь для получения формулы решения приведенного квадратного уравнения.

Требуется решить уравнение $x^2 + px + q = 0$.

Будем стремиться разложить левую часть на множители, если такое разложение возможно. А для этого прежде всего выделим полный квадрат линейного относительно неизвестного двучлена:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0.$$

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$, то можно записать:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = 0,$$

$$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0, \quad x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0.$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Получена формула корней приведенного квадратного уравнения.

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то уравнение не имеет решений; левая часть при любых допустимых значениях неизвестного больше 0, а правая равна 0.

На двух-трех ближайших уроках обоснование формулы корней приведенного квадратного уравнения повторяется. Учащимся предъявляется требование, чтобы запомнили и формулу и правило. Наиболее удобная формулировка такова: неизвестное приведенного квадратного уравнения равно половине коэффициента среднего члена с противоположным знаком плюс или минус корень квадратный из квадрата этой половины без свободного члена. Первые упражнения и служат для запоминания формулы и правила.

После решения одного из приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами учитель обращает внимание учащихся на связь между корнями уравнения и его коэффициентами. Эту связь они наблюдают и при решении последующих примеров. Пользуясь неполной индукцией, можно сформулировать прямую теорему Виета: в приведенном квадратном уравнении сумма корней равна коэффициенту среднего члена с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Дается доказательство теоремы. Она используется для решения уравнений с небольшими по абсолютному значению целыми коэффициентами.

Целесообразно познакомить учащихся и с обратной теоремой. Ее можно сформулировать так: если два числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Из равенств $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$ исключим x_2:

$$x_2=-x_1-p,\ x_1(-x_1-p)=q.$$

Преобразуя последнее равенство, получим:

$$x_1^2+px_1+q=0.$$

Это равенство свидетельствует, что x_1 — корень уравнения $x^2+px+q=0$.

Теперь из равенств, предусмотренных условием теоремы, исключим x_1:

$$x_1=-x_2-p,\ x_2(-x_2-p)=q.$$

Из последнего равенства имеем $x_2^2+px_2+q=0$. Значит, x_2 — корень того же уравнения.

В школе часто наблюдается логическая ошибка. Решая, например, систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=-9, \\ xy=20, \end{cases}$$

рассуждают так: сумма двух неизвестных равна -9 а произведение их равно 20; значит, по теореме Виета эти неизвестные являются корнями квадратного уравнения: $z^2+9z+20=0$.

На самом деле последнее уравнение составлено на основании обратной теоремы. Основание для составления уравнения указывается неверно. Вот почему полезно обратить внимание учащихся на теорему, обратную теореме Виета.

6. Среди упражнений на решение приведенных квадратных уравнений найдут место уравнения с буквенными коэффициентами, а также дробные уравнения. При решении последних особое внимание обращается на возможность нарушения равносильности, на возможность получения решений, посторонних по отношению к данному уравнению, а значит, на необходимость проверки решений. Пусть, например, требуется решить дробное уравнение.

$$x-\frac{4x}{x-1}=\frac{5-x}{1-x}.$$

Последовательно получаем:

$$x(x-1)-4x=x-5,$$
$$x^2-6x+5=0.$$

По теореме Виета находим решения последнего уравнения: $x_1=5$, $x_2=1$.

Проверка полученных чисел по отношению данного уравнения показывает, что уравнение имеет только один корень: $x=5$.

Вот еще примеры уравнений, при решении которых появляются посторонние корни:

$$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{x^2-3}{9-x^2};\quad \frac{x+2}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2(2x+3)}{(x-1)(2-x)}.$$

Способ вывода формулы решения приведенного квадратного уравнения вплотную подводит к вопросу об исследовании уравнения по дискриминанту.

В формуле корней приведенного квадратного уравнения выражение, стоящее под знаком радикала, называется дискриминантом (различителем). По нему, не решая уравнение, различают, имеет ли уравнение решения или не имеет; если имеет, то каковы они — различные или равные.

Полезны упражнения такого вида. Не решая уравнения, определить, при каких значениях m уравнение а) $x^2+2mx+12m=0$ имеет равные корни, б) $x^2-2mx+5m^2=0$ не имеет корней, в) $x^2-3x+m=0$ имеет различные корни, равные корни, не имеет корней.

Вопрос об исследовании корней по дискриминанту, непосредственно связанный с обоснованием формулы решения приведенного уравнения, нет оснований откладывать на более поздний период. Его надо рассмотреть тогда, когда изучается приведенное квадратное уравнение.

7. Формулу корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ (1) можно получить различными способами. Наиболее простой из них основывается на применении формулы решения приведенного квадратного уравнения.

Разделив обе части уравнения (1) на a $(a>0)$, получим:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Составим дискриминант этого уравнения:

$$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Если этот дискриминант, иначе $b^2-4ac \geqslant 0$, то уравнение имеет решение:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{4a}. \qquad (6)$$

Если $b^2-4ac<0$, то уравнение (1) не имеет решений.

Формула (6) может быть получена независимо от формулы решения приведенного квадратного уравнения. Используем общий способ — разложения левой части уравнения на множители.

Умножим обе части уравнения (1) на a:

$$a^2x^2+abx+ac=0.$$

Выделим полный квадрат:

$$(ax)^2+2\cdot ax\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+ac=0,$$

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4}=0.$$

Если $b^2-4ac\geqslant 0$, то можно записать так:

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}\right)^2=0.$$

Далее:

$$\left[ax+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}\right]\cdot\left[ax+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}\right]=0,$$

$$ax+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}=0,\qquad ax+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}=0,$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если $b^2-4ac<0$, то левая часть уравнения при любых допустимых значениях x положительна, а значит, не может равняться 0. Уравнение не имеет решений.

Этот способ получения формулы решений сложнее предыдущего. Однако он имеет некоторые преимущества: он общий и не зависит от решения приведенного уравнения. Если учитель использует этот способ, то общее решение уместно предварить решением тем же приемом хотя бы двух примеров, один из которых имеет решения, другой не имеет:

1) $2x^2-5x+2=0$, 2) $4x^2-4x+5=0$.

Второй способ интересен и в том отношении, что из полного трехчлена второй степени выделяется полный квадрат линейного относительно неизвестного двучлена, что трехчлен представляется в форме алгебраической суммы двух выражений, одно из которых — этот полный квадрат.

После решения одного из уравнений с числовыми коэффициентами учитель обращает внимание на связь между корнями полного квадратного уравнения и его коэффициентами. При решении нескольких следующих уравнений учащиеся наблюдают ту же связь. Это дает возможность сформулировать теорему Виета: если дано общее квадратное уравнение, то сумма его корней равна коэффициенту среднего члена с противоположным знаком, деленному на коэффициент старшего члена, а произведение корней равно свободному члену, деленному на тот же коэффициент старшего члена. Теорема сформулирована на основе неполной индукции. Затем дается обычное доказательство ее.

По мотивам, изложенным ранее, полезно дать обратную теорему: если два числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то эти числа — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство этой теоремы такое же, как для приведенного уравнения.

Обоснование формулы решения общего квадратного уравнения естественно приводит к исследованию его решений по дискриминанту.

8. Решение квадратных уравнений используется для разложения трехчлена второй степени на линейные множители относительно переменного.

Требуется особо четко провести знакомство с понятием трехчлена второй степени, чтобы учащиеся не путали трехчлен с квадратным уравнением. Уместно начать с рассмотрения примеров трехчленов, с выявления функциональной природы их.

Пусть дан многочлен $2x^2 - 11x + 5$. В этом многочлене старшая степень x — вторая. Многочлен такого вида называют трехчленом второй степени или квадратным трехчленом, x может меняться и принимать различные числовые значения. Условимся областью допустимых значений x считать множество действительных чисел. В зависимости от значения x многочлен принимает различные числовые значения. Чтобы проследить это, составим таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	$\sqrt{2}$	0,5
$2x^2 - 11x + 5$	5	-4	-9	-10	-11	0	$9 - 11\sqrt{2}$	0

При $x = 5$ и $x = 0{,}5$ значения трехчлена равны 0. 5 и 0,5 называют корнями трехчлена второй степени.

Аналогично рассматриваются еще примеры трехчленов: а) $x^2+7x+10$, б) $-x^2+7x-12$, в) $-2x^2+5x-20$.

Некоторые учащиеся, по аналогии с преобразованием квадратного уравнения, пытаются изменить знак коэффициента старшего члена трехчлена второй степени на противоположный в случае, когда он отрицательный. Эту распространенную ошибку надо предупредить.

Рассматривая примеры трехчленов, показываем учащимся, как найти их корни, а вместе с тем отмечаем, что не всякий трехчлен имеет корни; например, трехчлен в) корней не имеет.

После рассмотрения примеров дается понятие о квадратном трехчлене. Многочлен вида ax^2+bx+c при $a \neq 0$ называется трехчленом второй степени или квадратным трехчленом. Коэффициент старшего члена может быть и положительным, и отрицательным действительным числом. Если этот коэффициент равен 1, то квадратный трехчлен называется приведенным. Коэффициент среднего члена и свободный член могут быть любыми действительными числами. Естественная область допустимых значений x — множество действительных чисел.

Корнями квадратного трехчлена называются те значения x, при которых значения трехчлена равны 0. Чтобы найти корни трехчлена, если они имеются, следует трехчлен приравнять 0 и решить полученное квадратное уравнение.

С целью подчеркнуть функциональную сущность квадратного трехчлена интересны задачи на определение, при каких значениях x трехчлен достигает максимума или минимума и чему они равны. Эти задачи полезны и с точки зрения политехнического обучения: определение максимума и минимума функции широко применяется в технике и на производстве.

Дан трехчлен второй степени $y=x^2-8x+15$. При каких значениях x трехчлен имеет наименьшее значение?

Выделим в трехчлене полный квадрат двучлена с переменным x:

$$y=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+15=(x-4)^2-1.$$

Первое слагаемое полученного выражения принимает положительные значения при любых значениях x, кроме $x=4$. При $x=4$ это слагаемое равно 0, т. е. оно имеет наименьшее значение. Второе слагаемое не изменяется. Следовательно, квадратный трехчлен принимает наименьшее значение при $x=4$.

Дан трехчлен $y=-x^2+10x-24$. Определить, каково наибольшее значение трехчлена.

Вновь выделим полный квадрат с переменным x:

$$y=-(x^2-10x+24)=-(x^2-2\cdot x\cdot 5+25-25+24)=$$
$$=-(x-5)^2+1.$$

Очевидно, при $x=5$ трехчлен достигает максимума. Найдем, чему он равен:

$$y_{x=5}=-5^2+10\cdot 5-24=1.$$

Итак, максимальное значение трехчлена равно 1.

Весьма полезно решить такие задачи:

1) Требуется обнести изгородью земельный участок в форме прямоугольника. Длина изгороди 80 м. Каковы должны быть стороны земельного участка, чтобы он имел наибольшую площадь?

2) Из множества прямоугольников данного периметра $2p$ определить тот, который имеет наибольшую площадь.

3) Из листа жести, имеющего форму квадрата со стороной 80 см, требуется сделать коробку в форме прямоугольного параллелепипеда без крышки Какова должна быть сторона основания этой коробки, чтобы поверхность пяти граней была наибольшей?

4) Из листа, имеющего форму квадрата со стороной a см, надо сделать коробку в форме прямоугольного параллелепипеда без крышки. Поверхность пяти граней должна быть наибольшая. Каковы линейные размеры этой коробки?

5) Прямоугольный участок земли в 400 м² нужно окопать вдоль всей границы рвом. Как выбрать размеры этого участка, чтобы длина рва была наименьшая?

6) Из листа картона в форме прямоугольника размером 100×60 см вырезать по углам квадраты, чтобы

из оставшейся части после сгибания получить коробку с наибольшей боковой поверхностью. Определить сторону вырезанных квадратов.

После решения таких упражнений учащиеся освоятся с квадратным трехчленом, а вместе с тем пресекаются всякие попытки неверных операций над ним.

Вопрос о разложении квадратного трехчлена на линейные относительно переменного множителя подготовлен всей системой изучения квадратных уравнений.

Очерк двенадцатый

ФУНКЦИИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ 8-го КЛАССА

1. Если период функциональной пропедевтики использован разумно, то учащиеся ко второму полугодию обучения в 8-м классе накопят значительный запас представлений о конкретных функциональных зависимостях, о допустимых значениях аргумента, о графическом изображении линейной и, может быть, некоторых других функций, научатся применять графики линейных функций для решения систем уравнений первой степени с двумя неизвестными.*

Все это подготовляет и облегчает переход к систематическому изучению функциональных зависимостей. Этот переход совершается в 8-м классе и является ответственным шагом в обучении: учащиеся знакомятся с одним из важнейших понятий современной математики—функцией, с таким понятием, которое широко применяется в разнообразных областях науки и техники, которое поэтому является стержневым для политехнического обучения.

Этот переход имеет существенное методологическое значение: величины мыслятся не неизменными, а находящимися в постоянных разнообразных изменениях, в движении; они мыслятся не изолированными друг от друга, а взаимосвязанными, зависящими друг от друга, обусловливающими друг друга. Методологическое значение этого перехода возрастает, если привлекается достаточно богатый факти-

---

* Очерки пятый и девятый.

ческий материал, показывающий взаимную связь и обусловленность величин, их взаимную изменяемость.

В нашей практике первая глава систематического изучения функциональных зависимостей включала следующий материал. Уточнялись понятия о переменной и постоянной, отмечалось особое значение переменной. Затем вводилось понятие о функции одной переменной, выяснялась важная роль этого понятия в современной математике, рассматривались основные способы выражения функциональной зависимости. Далее изучались линейная функция, функция второй степени; попутно с рассмотрением последней учащиеся знакомились с графическим решением квадратного уравнения (двумя способами) и графическим решением систем уравнений второй степени с двума неизвестными.

2. Понятия о переменной и постоянной вводятся путем абстракции от реальных движений материи, ее изменяемости. Из курсов естествознания учащиеся уже знают, что мир материален, что материя находится в движении, что формы движения разнообразны. Учитель приводит яркие примеры движения материи.

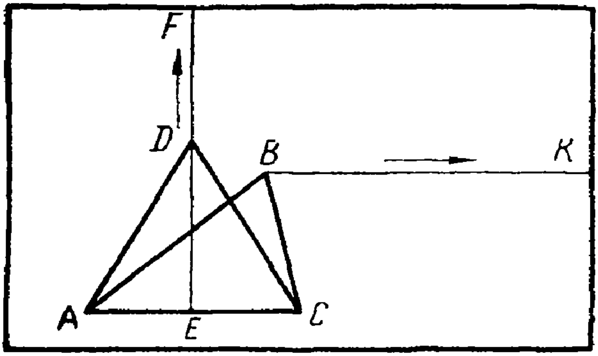
Наша планета—Земля—вращается вокруг своей оси. Спутник Земли—Луна—вращается вокруг своей оси и вокруг Земли. Другие планеты вращаются вокруг своих осей. Земля и другие планеты вращаются вокруг Солнца. Вся солнечная система в целом также совершает движение.

Мельчайшая частица химического элемента—атом—целая материальная система, состоящая из ядра, имеющего сложное строение, и электронной оболочки. Атом—носитель многообразных движений. Он способен изменяться, превращаться в атом другого вещества, имеющего иную структуру и иные виды движений. Атом—носитель колоссальной скрытой энергии, которая уже используется в производстве, транспорте, медицине и других областях практической и научной деятельности.

Различные науки—астрономия, механика, физика, химия и другие— изучают различные формы движения материи. Люди открывают законы материального мира и используют их в своей практической деятельности.

В математике уделяется большое внимание методам и приемам изучения движений.

Учитель демонстрирует модель: треугольник ABC образован натянутым резиновым шнуром. Прямая BK параллельна AC. Вершина B движется по прямой BK в направлении, указанном стрелкой (черт. 9).



Черт. 9.

Какие величины в процессе этого движения не изменяются? Какие величины изменяются? Как изменяются?

В этом опыте длины основания и высоты, сумма внутренних углов, площадь треугольника—величины постоянные. Длина стороны AB изменяется—растет, длина стороны BC вначале уменьшается, затем увеличивается, угол A уменьшается, угол C увеличивается и т. д. Стороны AB и BC, углы A и C в этой демонстрации—переменные величины.

На той же модели демонстрируется образованный резиновым шнуром равнобедренный треугольник ACD. DE—высота этого треугольника, DF—продолжение высоты. Вершина D движется по DF в направлени, указанном стрелкой.

Какие величины при этом движении изменяются? Как изменяются? Какие величины постоянны?

В природе, в производстве, на транспорте люди имеют дело с очень многими переменными величинами. Учащиеся приводят примеры таких величин: продолжительность дня и ночи—величины переменные, скорость движения поезда—тоже переменная. Встречаются величины постоянные: продолжительность суток, продолжительность года.

Итак, величина называется переменной, если она в условиях рассматриваемого вопроса может получать различные численные значения; величина называется постоянной, если она в условиях рассматриваемого вопроса не меняет численного значения. Вместо терминов „постоянная величина", „переменная величина" употребляются соответственно термины „постоянная", „переменная".

Рассматриваемый вопрос определяет, какие величины являются переменными, какие—постоянными. Например, в первой из рассмотренных демонстраций высота и площадь треугольника—постоянные, а во второй—они переменные. В обеих демонстрациях основание треугольника—постоянная величина. Однако известно, что в других вопросах основание может изменяться. Другими словами, понятия постоянной и переменной—относительны. Длина деревянного метра в торговом деле считается постоянной, хотя она изменяется от температуры. При геодезических работах, проводимых с высокою степенью точности, учитывают, что длина метра, которым производится измерение, изменяется от температуры и в результаты измерения длины отрезка вводят поправку на температуру.

Переменные величины изменяются весьма разнообразно.

Скорость свободно падающего тела все время возрастает, увеличивается: всякое последующее ее значение больше предыдущего. Это—пример возрастающей переменной. Возраст человека—возрастающая переменная.

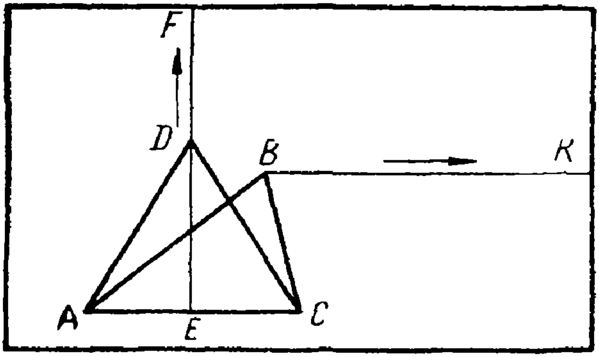
Переменная называется возрастающей, если всякое последующее ее значение больше предыдущего.

Пусть переменная x последовательно принимает значения: 1; 1,5; 2; 2,5; 3;... Как изобразятся значения этой переменной на числовой оси? Переменная x—возрастающая. Геометрически возрастающая переменная обозначается на оси точкой, при этом мыслится, что эта точка движется вправо.

Переменная называется убывающей, если всякое мира и используют их в своей практической деятельности.

В математике уделяется большое внимание методам и приемам изучения движений.

Учитель демонстрирует модель: треугольник ABC образован натянутым резиновым шнуром. Прямая BK параллельна AC. Вершина B движется по прямой BK в направлении, указанном стрелкой (черт. 9).



Черт. 9.

Какие величины в процессе этого движения не изменяются? Какие величины изменяются? Как изменяются?

В этом опыте длины основания и высоты, сумма внутренних углов, площадь треугольника—величины постоянные. Длина стороны AB изменяется—растет, длина стороны BC вначале уменьшается, затем увеличивается, угол A уменьшается, угол C увеличивается и т. д. Стороны AB и BC, углы A и C в этой демонстрации—переменные величины.

На той же модели демонстрируется образованный резиновым шнуром равнобедренный треугольник ACD. DE—высота этого треугольника, DF—продолжение высоты. Вершина D движется по DF в направлении, указанном стрелкой.

Какие величины при этом движении изменяются? Как изменяются? Какие величины постоянны?

В природе, в производстве, на транспорте люди имеют дело с очень многими переменными величинами. Учащиеся приводят примеры таких величин: продолжительность дня и ночи—величины переменные, скорость движения поезда—тоже переменная. Встречаются величины постоянные: продолжительность суток, продолжительность года.

Итак, величина называется переменной, если она в условиях рассматриваемого вопроса может получать различные численные значения; величина называется постоянной, если она в условиях рассматриваемого вопроса не меняет численного значения. Вместо терминов „постоянная величина", „переменная величина" употребляются соответственно термины „постоянная", „переменная".

Рассматриваемый вопрос определяет, какие величины являются переменными, какие—постоянными. Например, в первой из рассмотренных демонстраций высота и площадь треугольника—постоянные, а во второй—они переменные. В обеих демонстрациях основание треугольника—постоянная величина. Однако известно, что в других вопросах основание может изменяться. Другими словами, понятия постоянной и переменной—относительны. Длина деревянного метра в торговом деле считается постоянной, хотя она изменяется от температуры. При геодезических работах, проводимых с высокою степенью точности, учитывают, что длина метра, которым производится измерение, изменяется от температуры и в результаты измерения длины отрезка вводят поправку на температуру.

Переменные величины изменяются весьма разнообразно.

Скорость свободно падающего тела все время возрастает, увеличивается: всякое последующее ее значение больше предыдущего. Это—пример возрастающей переменной. Возраст человека—возрастающая переменная.

Переменная называется возрастающей, если всякое последующее ее значение больше предыдущего.

Пусть переменная x последовательно принимает значения: 1; 1,5; 2; 2,5; 3;... Как изобразятся значения этой переменной на числовой оси? Переменная x—возрастающая. Геометрически возрастающая переменная обозначается на оси точкой, при этом мыслится, что эта точка движется вправо.

Переменная называется убывающей, если всякое последующее значение меньше предыдущего. Например, скорость тела, брошенного вертикально вверх, пока высота его над поверхностью земли растет, уменьшается, убывает. Пусть переменная x последовательно принимает значения: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Эта переменная убывает. Как изобразятся значения этой переменной на числовой оси?

Геометрически убывающая переменная обозначается на оси точкой, при этом мыслится, что точка движется влево.

В северном полушарии продолжительность дня, начиная с 23 декабря, возрастает, достигает наибольшего значения 20 июня, затем начинает убывать и достигает наименьшего значения 22 декабря. Такие величины называются колеблющимися.

Если переменная x, начиная, например, со значения, равного 5, возрастает и может принимать как угодно большие численные значения, то говорят: „x изменяется от 5 до плюс бесконечности" и записывают: „x изменяется от 5 до $+\infty$". Если переменная x принимает как угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения и возрастает, например, до 0, то говорят: „x изменяется от минус бесконечности до нуля" и записывают: „x изменяется от $-\infty$ до 0".

3. В природе, производстве изменение величины зависит от изменения других величин. Например, при атмосферном давлении в 760 мм температура кипения воды 100° С; если давление уменьшается, температура кипения понижается; если давление увеличивается, температура кипения повышается. Каждому давлению соответствует вполне определенная температура кипения воды. Другой пример: длина пути свободно падающего тела определяется по формуле $s = 0{,}5gt^2$, где s—длина пути, g—ускорение силы тяжести, t—время. Каждому значению t соответствует определенное значение s. Учащиеся приводят примеры величин, зависимых от других величин, из физики, геометрии, из обыденной жизни.

Рассмотрим подробно два примера.

а) Теплоход идет со скоростью 20 км в час. Какой путь он пройдет в t часов?

Обозначив длину пути в километрах через s, получим: $s = 20t$. Время движения теплохода и длина пройденного им пути—переменные величины. Скорость 20 км в час в нашей задаче — постоянная величина. По смыслу задачи t принимает неотрицательные значения. Каждому допустимому значению t соответствует определенное значение s. Говорят, что между t и s имеется функциональная зависимость, при этом t называют независимой переменной или аргументом, а s зависимой переменной или функцией.

б) Найти площадь квадрата, если сторона квадрата равна x см.

Обозначив площадь квадрата через y, получим $y = x^2$. Допустимые значения x—множество действительных положительных чисел. Каждому допустимому значению x соответствует определенное единственное значение y. Независимой переменной или аргументом служит x, а зависимой переменной или функцией является y.

Опираясь на приведенные и аналогичные им примеры функциональных зависимостей, дается определение функции одного переменного: если каждому допустимому значению одной переменной соответствует определенное значение другой переменной, то первая из них называется аргументом (независимой переменной), а вторая—функцией (зависимой переменной) от этого аргумента.

Учитель сообщает учащимся, что функция является одним из важнейших понятий современной математики. С помощью этого понятия очень часто выражаются законы природы. Функция—мощное средство не только выражения законов природы, но и изучения этих законов. Функциональные зависимости широко используются во многих науках, а также в производстве и строительстве. Функция — одно из средств подчинения природы человеческому обществу.

Впервые определение функции, близкое по идейному содержанию современным определениям, было дано в 1834 году великим русским математиком Н. И. Лобачевским. Несколько позднее (в 1837 г.) аналогичное определение было сформулировано талантливым немецким математиком Дирихле.

Чтобы учащиеся освоились с понятием функции, рассматриваются еще примеры: $y=x$, $y=\frac{1}{x-1}$, $y=\sqrt{x}$. Обращается внимание учащихся на то, что если функция не связана с каким-либо конкретным вопросом, то естественная область допустимых значений аргумента определяется структурой того выражения, каким задана функция. Если функция связана с рассмотрением конкретной задачи, то область допустимых значений аргумента определяется сущностью этой задачи. Например, формула $N=5n+3$, выражающая все целые положительные числа, которые при делении на 5 дают остаток 3, есть функция натурального аргумента n.

Современное содержание понятия о функции совпадает с понятием соответствия между элементами одного и элементами другого множеств: каждому элементу первого из них (значению аргумента) соответствует один определенный элемент второго множества (значение функции).

4. Какими способами устанавливается соответствие между значениями аргумента и значениями функции?

Эти способы разнообразны.

1) Очень часто соответствие между значениями аргумента и значениями функции задается алгебраическим или иным математическим выражением. Примеры этого способа уже встречались ранее: $y=2x+1$, $y=2x^3$, $y=\sin x$. В каждом из примеров указывается, какие операции в определенном порядке надо выполнить над значением x, чтобы получить соответствующее значение y. Такой способ задания функциональной зависимости называют аналитическим.

В преподавании математики в школе аналитический способ задания функции имеет основное значение.

Функция может быть задана не только одним аналитическим выражением, а и несколькими выражениями; например, если значение аргумента $x \geqslant 0$, то значения функции вычисляются по выражению $x+2$; если значения аргумента $x<0$, то значения функции вычисляются по выражению $0{,}5x$. Записывают это так:

$$y=\begin{cases} x+2 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0{,}5x & \text{при } x<0. \end{cases}$$

В этом примере функция задана двумя алгебраическими выражениями.

2) Соответствие между значениями аргумента и значениями функции часто задается таблицей. Учащиеся уже знают много таблиц, употребляемых для упрощения вычислений. Теперь эти таблицы рассматриваются с функциональной точки зрения.

Задание функции таблицей отличается некоторыми особенностями: каждая таблица содержит значения аргументов в некоторых границах, в таблице даются только некоторые значения аргументов. Значит, задание функции таблицей отличается неполнотой.

Табличная запись функциональной зависимости применяется и тогда, когда аналитическое выражение этой зависимости неизвестно, когда соответствие между значениями аргумента и функции получается из наблюдений, опытов, когда имеют дело с эмпирическими функциональными зависимостями. Например, таким образом часто фиксируется соответствие между временем и температурой, выпуском продукции фабрикой или заводом поденно и в течение месяца.

3) В практике очень часто функциональные зависимости задаются графическим способом. Так поступают для фиксации эмпирических функций; например, в больнице вычерчивается график изменения температуры больного с изменением времени. На метеорологических станциях применяются самопишущие приборы, фиксирующие графическим путем изменение атмосферного давления.

Часто графики применяются для того, чтобы избежать однотипных вычислений. Представим себе, что при решении каких-либо вопросов приходится многократно переводить английские дюймы в сантиметры, причем не требуется получать высокую точность результатов. Английский дюйм приближенно равен 2,54 см. Функциональную зависимость можно выразить аналитическим путем так: $y = 2{,}54x$, где x принимает значения длин отрезков в дюймах, а y — длин отрезков в сантиметрах. На миллиметровой бумаге строят график полученного уравнения. График дает возможность, не производя вычислений, по заданному числу дюймов найти приближенно соответствующее число сантиметров, а также решать и обратную задачу.

Графическое изображение функциональной зависимости используется и для того, чтобы наглядно показать изменение функции в зависимости от изменения аргумента.

Графиком уравнения называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению.

4) Закон соответствия между аргументом и функцией можно объяснить словами. Представим, что радиус окружности неизвестен. Допустимые значения хорды—любой отрезок, который не больше диаметра. Всякому допустимому значению хорды соответствует одно определенное расстояние этой хорды от центра. Имеем функциональную зависимость между длинами хорд и их расстояниями от центра.

В дальнейшем будем иметь дело с аналитическим, табличным и графическим выражением функциональной зависимости.

5. В 7-м классе учащиеся уже познакомились с графиками уравнений: $y=kx+l$ и $ax+by=c$. В силу этого изучение в 8-м классе линейной функции является обзорным повторением, систематизирующим и углубляющим знания учащихся. Что нового вносится в это изучение? Расширяется область допустимых значений аргумента: этой областью становится множество действительных чисел. Усиливается применение дедукции и несколько ослабляется роль неполной индукции. Используется общее уравнение функции первой степени с одной переменной.

Чтобы опереться на известное, целесообразно рассмотреть примеры: $y=2x+7$, $y=3x$. Естественная область допустимых значений x — множество действительных чисел. Каждому значению x соответствует одно определенное значение y. Значит, в обоих случаях имеем функции аргумента x. Они являются частными случаями функции первой степени с одним переменным.

Общий вид этой функции записывается так:

$$y=kx+l, \qquad (1)$$

где k — может быть любым числом из множества действительных чисел, кроме 0, а l — любое число того же множества. Если $l=0$, то $y=kx$. (2)

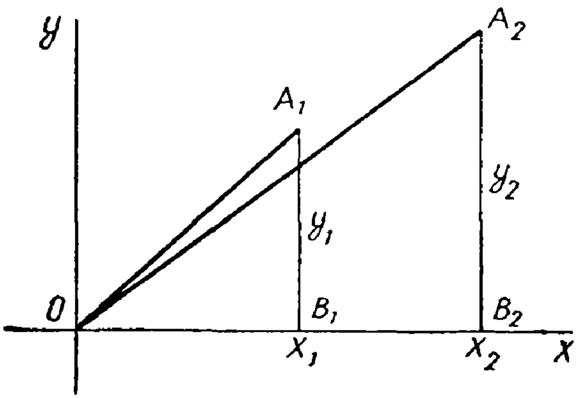
Докажем: уравнению $y=kx$ (2) соответствует прямая, проходящая через начало координат.

Если $x=0$, то $y=0$. График уравнения (2) проходит через начало координат.

Пусть аргумент x принимает значения x_1, x_2. Для определенности допустим, что $x_1<x_2$. Соответствующие значения функции будут:

$$y_1=kx_1 \quad (3), \quad y_2=kx_2 \quad (4).$$

Построим точки A_1 $(x_1; y_1)$ и A_2 (x_2, y_2) (черт. 10). Точку 0 соединим прямыми с точками A_1 и A_2.



Черт. 10.

Рассмотрим $\triangle OA_1B_1$ и $\triangle OA_2B_2$. Эти треугольники—прямоугольные. Из равенств (3) и (4) соответственно имеем:

$$\frac{y_1}{x_1}=k, \quad \frac{y_2}{x_2}=k.$$

Из этих равенств получаем:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2},$$

т. е. катеты треугольников пропорциональны. Значит, $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$.

Из подобия треугольников следует, что $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$, т. е. отрезки OA_1 и OA_2 принадлежат одной прямой. Другими словами, три точки O, A_1, A_2, координаты которых удовлетворяют уравнению (2), принадлежат одной прямой. Так как x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, то A_1 и A_2 — любые точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, график этого уравнения—прямая, проходящая через начало координат.

Покажем, что график функции $y = kx + l$ — также прямая линия.

Рассмотрим уравнения $y = kx + l$ (1) и $y = kx$ (2). Пусть $l > 0$. Дадим аргументу той и другой функции значение x_1. Тогда значение функции (1) окажется на l больше значения функции (2). Такое соотношение между значениями функций имеет место для любого значения x. Геометрически это означает, что ординаты точек уравнения (1) больше соответствующих ординат точек уравнения (2) на один и тот же отрезок l, т. е. график уравнения (1) получается путем перемещения параллельно оси y-ов кверху графика уравнения (2) на l единиц. Значит, график уравнения (1) — прямая.

Если $l < 0$, то аналогичным рассуждением покажем, что график уравнения (1) получается из графика уравнения (2) путем переноса последнего параллельно оси y-ов на длину отрезка l книзу. Значит, и в этом случае график уравнения (1) — прямая.

Попутно выясняется геометрический смысл коэффициента l, и он получает название „начальная ордината".

Возможно дать иное доказательство прямолинейности графика уравнения (1). Составим таблицу значений аргумента и функции:

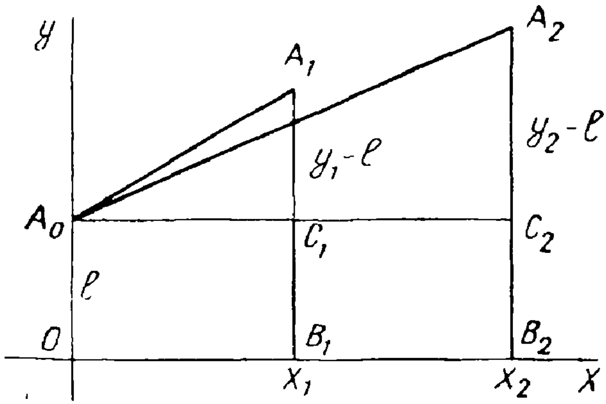
x	0	x_1	x_2
$y = kx + l$	$y_0 = l$	$y_1 = kx_1 + l$	$y_2 = kx_2 + l$

Построим точки A_0 $(O; l)$, A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2) (черт. 11). Соединим отрезками прямых точку A_0 с точками A_1 и A_2. Докажем, что эти точки принадлежат одной прямой.

Проведем прямую A_0C_2, параллельную Ox. Точку пересечения этой прямой с отрезком A_1B_1 обозначим C_1. Рассмотрим $\triangle A_0A_1C_1$ и $\triangle A_0A_2C_2$. Они — прямоугольные. Катеты их пропорциональны:

$$kx_1 = y_1 - l; \quad kx_2 = y_2 - l;$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1 - l}{y_2 - l}.$$



Черт. 11.

Из подобия треугольников следует, что $\angle A_1A_0C_1 = \angle A_2A_0C_2$, т. е. точки A_0, A_1, A_2 принадлежат одной прямой. Итак, график уравнения (1) — прямая.

Путем построения графиков уравнений $y=0{,}5x+2$, $y=x+2$, $y=2x+2$, $y=-2x+2$ выясняется геометрический смысл коэффициента k и сообщается его название — „угловой коэффициент".

Уравнение $ax+by=c$, если $a\neq0$ и $b\neq0$, сводится к уравнению $y=kx+l$. Значит, график его — прямая.

Если $a\neq0$, $c\neq0$, $b=0$, то получим $x=\frac{c}{a}$. Выясняется, что это — уравнение прямой, параллельной оси ординат и отстоящей от нее на расстоянии, равном $\frac{c}{a}$.

Если $a\neq0, b=c=0$, то $x=0$. Это — уравнение оси ординат.

Если $a=0$, $b\neq0$, $c\neq0$, то $y=\frac{c}{b}$. Это — уравнение прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстоянии, равном $\frac{c}{b}$.

Если $a = c = 0$, $b \neq 0$, то $y = 0$. Имеем уравнение оси абсцисс.

Полезно предложить учащимся графически решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Перед учащимися вновь пройдут системы определенные, несовместные и неопределенные. Уместно рассмотреть графическое истолкование решения таких систем:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 2x = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 2{,}5, \\ 2y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5 = 0, \\ 2y - 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -2, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Чтобы подчеркнуть возможность задания функции несколькими аналитическими выражениями, уместно предложить построить графики примерно таких функций:

$$y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -3x + 2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x - 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Можно предложить построить графики функций:

а) $y = 3x$ и $y = |3x|$,
б) $y = -x$ и $y = |-x|$,
в) $y = x - 1$ и $y = |x - 1|$,
г) $y = 2 - x$ и $y = |2 - x|$,
д) $y = x$ и $y = -|x|$,
е) $y = 3 + x$ и $y = 3 + |x|$.

Решить с помощью систем уравнений задачи.

а) Горизонтальная балка длиною в 5 м свободно лежит своими концами на двух опорах. Определить давление на каждую из опор, если груз в 0,4 т помещен на расстоянии 1 м от одной из опор. Вес балки в расчет не включать.

б) Горизонтальная балка длиною a м свободно лежит своими концами на двух опорах. Опоры испытывают давление: одна в 0,25 т, другая в 0,35 т.

Определить, на каком расстоянии от концов балки помещен груз. Вес балки не учитывается.

в) Вал компрессора, вырабатывающего сжатый воздух для цеха завода, имеет длину в 84 см. Вал несет шкив весом в 0,4 т. Определить, на каком расстоянии от каждого подшипника расположен шкив, если давление на один из них на 0,2 т больше, чем давление на другой. Вес вала в расчет не принимать.

г) Вал компрессора имеет длину, равную 150 см. Он несет два шкива весом 0,3 т и 0,5 т. Меньший шкив расположен от одного из подшипников на расстоянии 40 см. Определить, на каком расстоянии от подшипников расположить второй шкив, чтобы давление на оба подшипника было равно. Вес вала в расчет не включать.

6. Уже ранее учащиеся познакомились с трехчленом второй степени, познали его функциональную сущность и научились разлагать на линейные множители, когда это возможно. Этот трехчлен и называют функцией второй степени одного переменного и записывают: $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Ближайшая задача состоит в том, чтобы изучить эту функцию более обстоятельно, познакомиться с ее графиком и практическим значением.

Приступая к изучению функции второй степени, уместно показать, что потребности практики вызывали и вызывают интерес к этой функции.

а) Летящий самолет испытывает сопротивление воздуха своему движению. Если при той же высоте полета скорость самолета увеличивается в 2 раза, то сопротивление воздуха увеличивается в 4 раза; если скорость увеличивается в 3 раза, то сопротивление возрастает в 9 раз и т. д. Говорят, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости самолета.

Погруженная в воду движущаяся подводная лодка испытывает сопротивление воды своему движению. И в этом случае при постоянной глубине сопротивление пропорционально квадрату скорости подводной лодки.

Вообще сопротивление, оказываемое средой движению тела, пропорционально квадрату скорости этого тела. На языке алгебраических символов эту мысль выражают так: $f = av^2$, где f — сопротивление среды движению, v — скорость, a — некоторый коэффициент пропорциональности. Сопротивление f есть функция скорости движения тела.

б) Длина пути, проходимого телом при равномерно ускоренном или равномерно замедленном движении, выражается формулой: $s = 0{,}5ct^2$, где s — длина пути, t — время, c — ускорение. Длина пути — функция времени t.

Функции такого вида, как в рассмотренных случаях, встречаются в различных областях науки и техники. Отвлекаясь от конкретного содержания этих двух функций, можно записать: $y = ax^2$. Это один из простейших частных случаев функции второй степени. Область допустимых значений переменной — множество действительных чисел. Коэффициент a — любое действительное число, кроме 0. Если $a = 1$, то $y = x^2$.

Последнюю функцию надо изучить с особой тщательностью: она служит основою для изучения более сложных функций второй степени. По точкам строится график уравнения $y = x^2$. Кривая получает название параболы. Парабола симметрична относительно оси ординат. Ось симметрии параболы называется осью параболы.

Симметрия параболы относительно оси ординат является геометрическим выражением того, что функция $y = x^2$ — четная. Если функция не изменяется при замене x на $-x$, то она называется четной; если при замене x на $-x$ абсолютное значение функции не изменяется, а знак изменяется на противоположный, то она называется нечетной.

Примеры: а) $y = x^2 = (-x)^2$ — четная функция, б) $y = x^3$ — нечетная функция, так как $y = (-x)^3 = -x^3$ и $|x^3| = |-x^3|$.

Точка пересечения параболы с ее осью называется вершиной параболы. Точка $O\,(0;\ 0)$ — вершина параболы. Парабола касается оси абсцисс своей вершиной.

Используя график функции $y = x^2$, надо описать характер изменения ее. В промежутке от $-\infty$ до 0 с увеличением значений x значения функции убывают, а в промежутке от 0 до $+\infty$ с увеличением значений x значения функции возрастают. При $x=0$ функция принимает наименьшее значение, равное 0.

График функции $y=x^2$ в дальнейшем играет значительную роль при изучении функции второй степени. Поэтому для демонстраций полезно иметь следующее пособие: на листе тонкого органического стекла, размером примерно 50×70 см, вычерчивается тушью график уравнения $y=x^2$; к листу фанеры, размером 60×90 см, прикрепляется миллиметровая бумага с нанесенными осями координат. С помощью этого наглядного пособия хорошо демонстрируются переносы параболы параллельно осям координат. Позднее пособие используется для демонстрации приближенного решения квадратного уравнения и некоторых систем уравнений с двумя неизвестными.

При отсутствии органического стекла его можно заменить калькой. Эту бумагу краями приклеивают к рамке из картона.

Каждому ученику полезно иметь график того же уравнения на листке кальки и кусок миллиметровой бумаги с вычерченными осями координат. За единичный отрезок принимается 1 см.

Уместно обратить внимание учащихся, что график функции $y=x^2$ можно использовать для приближенного извлечения квадратного корня из числа. Пусть требуется найти $\sqrt{2,5}$. На оси ординат от начала откладывают отрезок, равный 2,5. Через его конец проводят прямую, параллельную оси абсцисс до пересечения с параболой. Абсциссы точек пересечения дают приближенные значения $\sqrt{2,5}$. На хорошо выполненном чертеже, где за единицу принят 1 см, можно получить приближенные значения корня с точностью до $\pm0,2$. Получаем два противоположных значения корня.

7. В порядке домашней работы учащиеся по точкам вычертят графики уравнений: $y=0,5x^2$, $y=2x^2$, $y=-x^2$. Сравнивая эти графики с изученной параболой, учащиеся установят влияние коэффициента при x^2 на вид графика.

Роль этого коэффициента должна быть рассмотрена и на уроке.

Сопоставим две функции: $y=x^2$ и $y=2x^2$. В той и другой из них дадим x одно и то же значение. Значение второй функции в 2 раза больше значения первой. Это имеет место для каждого значения аргумента. Значит, ординаты точек графика второй функции в 2 раза больше соответствующих ординат графика первой функции. Можно сказать, что график второй функции получается растяжением в 2 раза ординат графика первой функции. Подметив это, легко по графику функции $y=x^2$ построить график функции $y=2x^2$.

Рассматривая функции $y=x^2$ и $y=0{,}5x^2$, аналогично выясняем, что график второй функции получается из графика первой путем сжатия ординат в 2 раза.

Если сопоставить функции $y=x^2$ и $y=-x^2$, то легко установить, что при одном и том же значении аргумента, кроме 0, значение второй функции противоположно значению первой. И в этом случае легко из графика первой функции получить график второй. Очевидно, графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс. Получение графика функции $y=-x^2$ демонстрируется на описанном пособии.

Чтобы построить график функции $y=-3x^2$, следует выполнить растяжение ординат графика функций $y=x^2$ в 3 раза, а затем построить график, симметричный относительно оси x-ов полученной параболе.

Уже отмечено, что с параболой можно встретиться во многих областях знания. Приведем еще примеры. Если бросить камень под углом к поверхности земли, то камень опишет кривую, близкую к параболе. При отсутствии сопротивления воздуха движению камня последний описал бы точно параболу; сопротивление воздуха несколько деформирует ее.

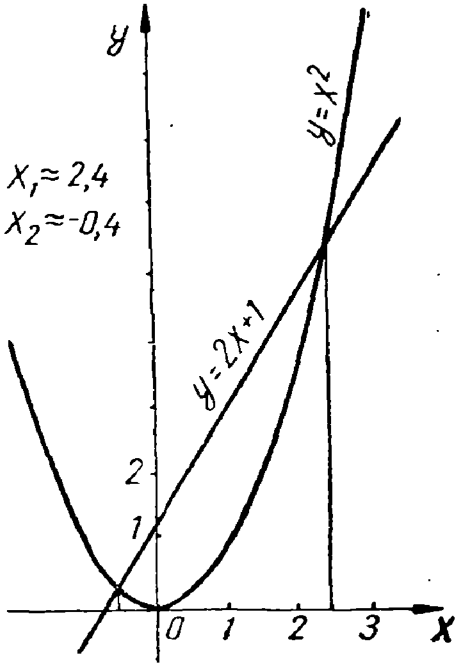
Если выпустить из орудия снаряд под углом к поверхности земли, то снаряд опишет траекторию, близкую к параболе.

Парабола применяется в строительном деле; например, иногда фермам мостов придают параболическую форму.

Параболу используют в астрономии при изучении движения комет.

График уравнения $y=x^2$ дает возможность находить приближенно корни квадратного уравнения.

Требуется решить уравнение $x^2-2x-1=0$ (а). Перепишем его так: $x^2=2x+1$ (б). В левой и правой частях уравнения (б) имеем функции: $y=x^2$, $y=2x+1$. Корнями уравнения (б), а значит и уравнения (а) будут те значения x, при которых значения функций будут равны. Функции будут принимать равные значения при тех значениях x, которые являются абсциссами точек пересечения графиков этих функций. Итак, надо построить графики функций $y=x^2$ и $y=2x+1$, найти точки их пересечения и прочитать по чертежу абсциссы этих точек. Эти абсциссы и будут приближенными корнями уравнения (а) (черт. 12).



Черт. 12.

Если для описанного графического решения квадратных уравнений использовать заблаговременно заготовленный на миллиметровой бумаге график функции $y=x^2$, то такое решение выполняется достаточно быстро. Оно не требует вычислений. Корни отсчитываются с точностью до $\pm 0{,}2$. Графическое решение выполняется быстрее аналитического решения таких уравнений, коэффициенты которых получены эмпирически и являются дробными числами; например, $x^2-3{,}9x-9{,}8=0$.

Графическое решение уравнения $4x^2-12x+1=0$ сводится к применению той же параболы:

$$4x^2=12x-1; \quad x^2=3x-\frac{1}{4}$$

Описанный графический прием решения уравнения применим к значительному классу уравнений. Его значение заключается в том, что он может быть использован, когда элементарные аналитические способы решения не применимы. Этим приемом можно найти приближенно корни многих трансцендентных уравнений; например, $2^x=2x$, $\log_2 x=\sin x$, $\log_2 x+ +2x^2=0$.

8. При изучении функции $y=ax^2+c$ учащиеся уже по уравнению указывают некоторые свойства ее.

Рассмотрим, например, функцию $y=x^2+3$. Она — частный случай функции второй степени. Если значения x изменяются от $-\infty$ до 0, значения функции убывают; если значения x изменяются от 0 до $+\infty$, то значения функции возрастают. При $x=0$ она принимает наименьшее значение, равное 3. Каков график этой функции?

Сопоставим уравнения $y=x^2+3$ и $y=x^2$. Для любого значения x значение первой функции на 3 единицы больше соответствующего значения второй функции. Это означает, что график первой функции есть также парабола, получаемая переносом графика 2-й функции кверху паралелльно оси ординат на отрезок, равный трем единицам длины. Демонстрируется на пособии, как выполняется этот перенос.

График изучаемой функции — парабола — имеет вершину в точке (0; 3). Ее ось совпадает с осью ординат. Она симметрична относительно этой оси. Значит, функция $y=x^2+3$ — четная, что легко проверить и по определению.

Аналогично изучается функция $y=x^2-2$.

График функции $y=3x^2+5$ получается из графика функции $y=x^2$ путем растяжения в 3 раза по направлению оси ординат и переноса кверху параллельно этой оси на отрезок, равный 5 единицам.

Рассматривается, как получить графики уравнений $y=-x^2+4$, $y=-0{,}5x^2-1$. Учащиеся упражняются в уяснении свойств функций по уравнениям и графикам.

Рассмотрим следующий частный случай функции второй степени: $y=(x+m)^2$.

Примеры: $y=x^2+6x+9=(x+3)^2$ (в)

$y=x^2-4x+4=(x-2)^2$ (г)

Построив по точкам графики этих функций, сравнивая их с графиком уравнения $y=x^2$, устанавливаем, что графики функций (в) и (г) — параболы, полученные переносом параллельно оси абсцисс, в случае (в) влево на 3 единицы, в случае (г) вправо на 2 единицы графика функций $y=x^2$. Оси той и другой параболы параллельны оси ординат и отстоят от нее соответственно на -3 и 2 единицы длины. Вершины лежат на оси абсцисс. Функции не являются четными. Значит ли это, что они нечетные?

Таким образом, график функции $y=(x+m)^2$ можно получить из графика функции $y=x^2$, перемещая последний параллельно оси абсцисс на m единиц длины, причем при $m>0$ перенос выполняется влево, при $m<0$ — вправо от начала координат. Упражнения закрепят вывод. Среди упражнений найдут место и такие: $y=-(x+2)^2$, $y=-(x-5)^2$, $y=2(x-1)^2$.

Далее рассматривается функция $y=x^2+px+q$; например, $y=x^2+4x+7$. Выделим полный квадрат линейного относительно x двучлена: $y=(x+2)^2+3$. Сравним эту функцию с функцией $y=(x+2)^2$.

При любых значениях аргумента значения первой функции на 3 единицы больше соответствующих значений второй: график первой получается из графика второй функции путем переноса на 3 единицы длины кверху параллельно оси y-ов. Итак, имеем параболу с вершиною в точке $(-2; 3)$; ось симметрии параболы параллельна оси y-ов и отстоит от нее на 2 единицы длины. Как изменяется функция? При каком значении x она достигает наименьшего значения?

Теперь проложен путь к изучению функции

$$y=ax^2+bx+c.$$

Дано уравнение $y=2x^2-7x+5$. Выделяя квадрат линейного двучлена относительно аргумента, получим $y=2\left[\left(x-1\frac{3}{4}\right)^2-9\frac{3}{4}\right]$.

Построение графика затруднений уже не вызовет. Упражнения помогут научиться быстро по уравнению читать свойства функции второй степени и строить ее графики.

9. Графическое изображение функции второй степени используется для определения корней квадратных трехчленов, для решения квадратных уравнений.

Идея, лежащая в основе решения, проста. Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ — это значит найти значения x, обращающие трехчлен левой части уравнения в 0. Геометрически это означает: найти абсциссы точек пересечения графика функции $y=ax^2+bx+c$ с осью x-ов: ординаты этих точек, т. е. соответствующие значения трехчлена, равны 0.

Для демонстраций графического решения учитель использует параболу, изображенную на куске органического стекла, и оси координат, нанесенные на миллиметровую бумагу. Учащиеся пользуются параболами, начерченными на кальке и координатными осями—на миллиметровой бумаге.

При решении систем уравнений с двумя неизвестными учитель знакомит учащихся с графическим приемом решения систем. Графическое решение системы уравнений основано на тех же положениях, что и графическое решение двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Координаты любой точки графика одного уравнения системы удовлетворяют этому уравнению. Координаты любой точки графика другого уравнения удовлетворяют этому уравнению. Значит, координаты точек пересечения графиков будут удовлетворять обоим уравнениям, т. е. явятся решением системы.

В интересах решения систем уравнений возможно познакомить учащихся с графиками некоторых новых видов уравнений. Например, в нашем опыте учащиеся без затруднений пользовались уравнением $x^2+y^2=r^2$ и его графиком.

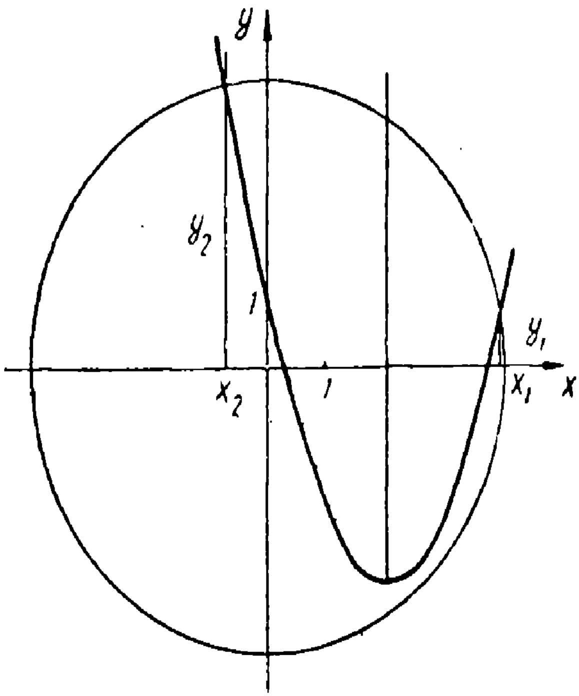
Требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=x^2-4x+1. \end{cases}$$

Если применить способ подстановки, то получится уравнение четвертой степени, приемы решения которого учащимся неизвестны: учащиеся не располагают аналитическим аппаратом для решения такой системы.

Выручает графический способ. График 1-го уравнения—окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4 единичным отрезкам. График

2-го уравнения—хорошо известная парабола с вершиной в точке (2; —3). Начертив на миллиметровой бумаге окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4, накладывают надлежащим об-



Черт. 13.

разом на этот чертеж кальку с изображением параболы. Координаты точек пересечения кривых дают решения системы (черт. 13).

Графическим способом можно решить следующие системы:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy + 1 = 0, \\ y = x^2 - 7x + 12. \end{cases}$$

Очерк тринадцатый

ПРЕДЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ В 9-м КЛАССЕ

1. Предел—одно из важнейших понятий современной математики. Предельный переход применяется при установлении фундаментальных понятий и многих предложений математического анализа, применяется в других математических дисциплинах и их приложениях в точном естествознании. Известно несколько разновидностей понятия предела, отличающихся содержанием и объемом. Для школьного преподавания представляют интерес три из них: предел последовательности, предел переменной величины и предел функции.

За последнюю четверть века программы по математике в отношении понятия предела пережили два периода. В первый из них требовалось изучение предела переменной величины. Опыт показывает, что это удавалось делать достаточно основательно. Во второй период — за последние годы — программы требовали изучения предела последовательности чисел. Такое изменение программ мотивировалось в основном тем, что в школьных курсах предельный переход находит применение преимущественно в геометрии при изучении длины окружности и площади круга, при рассмотрении поверхностей и объемов круглых тел и некоторых других вопросов, а для этого достаточно уметь находить предел последовательности чисел.

В связи с предстоящим изменением программ алгебры, в связи с введением в этот курс особой главы о функциях, производной, исследовании функций, подлежит пересмотру вопрос о том, какое понятие о пределе целесообразно вводить в школе. Имеются основания ожидать, что в 9-м классе будет введено понятие предела переменной, а в 10-м — предела функции. В этом очерке идет речь о методике изучения предела переменной, среди других примеров используются и пределы последовательностей чисел.

Пределы — первая глава курса алгебры 9-го класса. Изучение ее обеспечивается малым числом учебных часов. Поэтому нет возможности изложить достаточно полную теорию пределов. Необходимо выделить основное идейное содержание. Расширять и углублять материал нет возможностей. Однако необходимо, чтобы введенные понятия были правильно осознаны и усвоены, чтобы свойства предельного перехода были хорошо поняты. Необходимо добиться такого усвоения элементов теории пределов, чтобы в дальнейшем во всех случаях, где применяется предельный переход, учащиеся сознательно опирались на него и правильно применяли теоремы о пределах.

Изложение начатков теории пределов должно опираться на наглядность, в частности на геометрические образы, должно носить конкретный характер, что достигается рассмотрением примеров. Некоторые предложения являются обобщением того, что́ учащиеся наблюдают на примерах. Значит, свойства предельного перехода устанавливаются с помощью неполной индукции. Применение дедуктивного метода ограничивается и потому, что некоторые доказательства недоступны для девятиклассников, и потому, что недостаток времени требует краткого изложения. В основном глава о пределе излагается конкретно-индуктивным путем.

В учебно-методической литературе наметилось два плана построения главы о пределах. По первому из них прежде всего вводятся понятия переменной и предела, затем устанавливается понятие бесконечно малой, как частного случая предела, изучаются ее свойства, связь с переменной, имеющей предел, и далее доказываются предложения о пределах. По второму плану прежде всего вводится понятие переменной и бесконечно малой, изучаются свойства бесконечно малых, а затем вводится понятие предела переменной и обосновываются предложения о пределах. И с научной и с методической точек зрения оба пути приемлемы и не вызывают возражений.

В нашем изложении применяется первый план: он ближе программным установкам. Кроме того, он допускает сокращение материала и упрощение его изложения в школе, а надобность в таких операциях может появиться.

2. С переменной учащиеся познакомились в IV четверти 8-го класса. Приступая к изучению предельного перехода, полезно вспомнить понятие переменной, различный характер изменений переменной — возрастание, убывание, колебание. Полезно обогатить представления учащихся о переменной новыми примерами и познакомить с некоторыми новыми понятиями, необходимыми для изучения предельных переходов.

Переменные возрастающие или убывающие называются монотонными переменными. Понятие о монотонной переменной объединяет в один класс два вида переменных. Учащиеся приводят примеры монотонных величин.

Переменные изменяются весьма разнообразно. Одна последовательно принимает все возможные значения действительных чисел, заключенных между какими-либо двумя числами. Другая последовательно принимает все возможные значения из множества действительных чисел. Третья принимает только некоторые значения из этого множества.

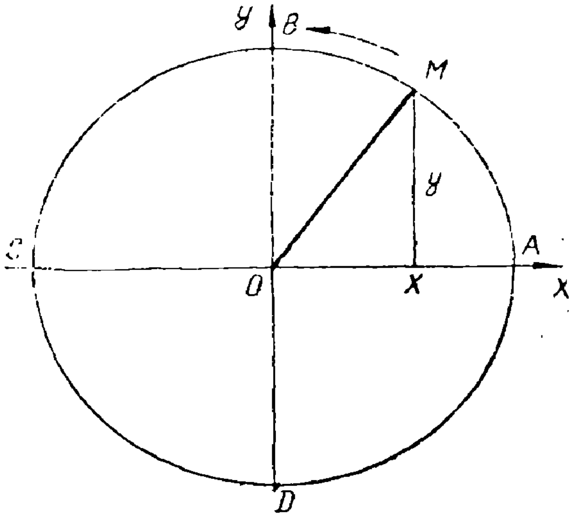
Пусть переменная величина последовательно пробегает значения четных натуральных чисел: 2, 4, 6,..., $2n$,... В этом примере значения переменной можно пронумеровать. В таких случаях говорят, что значения переменной образуют последовательность чисел.

Если переменная пробегает значения

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

то их тоже можно пронумеровать. Об этом свидетельствуют числители значений переменной. Значит, имеем последовательность чисел.

Переменная может быть ограничена в своем изменении. Дана окружность с центром в начале координат; радиусом, равным 1. Радиус OM вращается против движения часовой стрелки (черт. 14). Абсцисса x и ордината y—переменные величины. Предлагается проследить за изменением абсциссы по четвертям.



Черт. 14.

Абсцисса x является примером ограниченной переменной: можно выбрать такое число, например, 1,1, что по абсолютному значению все значения абциссы x будут меньше 1,1: $|x| < 1{,}1.$

Переменная y—также ограниченная величина:

$$|y| < 1{,}1.$$

Переменная x называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для всех значений переменной $|x| < M$. В школе можно довольствоваться приведенным определением. Обычно в курсах математического анализа дают такое определение: переменная x называется ограниченной, если, начиная с некоторого ее значения, выполняется неравенство $|x| < M$, где M—некоторое положительное число.

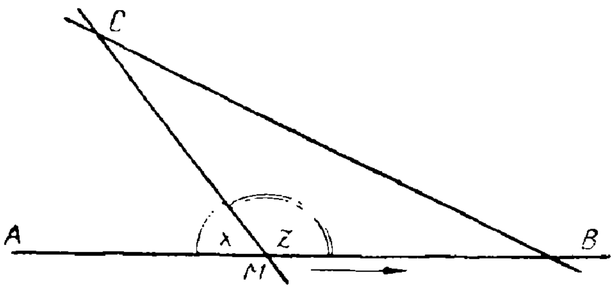
Полезно обратить внимание учащихся, что абсцисса x и ордината y в рассмотренном примере являются колеблющимися переменными.

Иногда полезно постоянную величину рассматривать как частный случай переменной. Для этого полагают, что постоянная принимает равные друг другу значения и считают ее переменной. Около окружности описан равносторонний треугольник. Удвоим число его сторон, чтобы получился правильный описанный шестиугольник. Удвоим число сторон этого шестиугольника, чтобы получился правильный описанный двенадцатиугольник и т. д. Обозначим длины апофем этих многоугольников соответственно через a_1, a_2, a_3,... Пусть переменная a пробегает значения, равные этим длинам. Однако все апофемы равны: переменная a принимает одно и то же значение, т. е. является постоянной.

Любую постоянную можно рассматривать как ограниченную величину.

3. Введение понятия предела уместно начать с рассмотрения примеров величин, которые дали бы представление о стремлении переменной к пределу.

а) Дана прямая AB и точка C, не лежащая на ней. Через точку C проведена прямая CM, пересекающая AB в точке M (черт. 15). Прямые образуют



Черт. 15.

угол AMC. Обозначим его величину через x. Пусть точка пересечения прямых движется по AB в направлении от A к B. Тогда x будет убывающей переменной величиной. Значения угла x становятся все меньше и меньше, приближаясь к 0. Зададим малый положительный угол, например, в 1°. При достаточном удалении точки M по прямой AB угол x сделается и будет оставаться меньше 1°. Зададим угол $1'$. Угол x сделается и в дальнейшем будет оставаться меньше 1°. Пусть ε — любой как угодно малый положительный угол. При достаточном удалении точки M угол x сделается и в дальнейшем будет оставаться меньше угла ε.

Говорят, что переменная x безгранично приближается к 0, что переменная x стремится к 0. Постоянное число, к которому стремится переменная, называют пределом этой переменной. Переменная x имеет предел 0. Это записывают так:

$$\text{предел } x = 0, \text{ или } \lim x = 0, \text{ или } x \to 0.$$

Предел обозначается символом lim. Этот символ ведет свое начало от латинского слова limes или французского limite, что в переводе означает „предел".

В учебно-методической литературе делались и делаются попытки изгнать символ lim, заменить его словом „предел" или „пред." Символ lim широко распространен в математической и технической литературе. Этот символ—интернациональный. Нет солидных доводов за то, чтобы избегать его в школьном преподавании.

б) Если в только что разобранном примере рассмотреть угол CMB, то при том же неограниченном движении точки M по прямой AB в направлении, указанном стрелкой, этот угол будет переменной, стремящейся к пределу, равному 180°. Если величину угла CMB обозначить через z, то по абсолютному значению разность $z-180^\circ$ при достаточном удалении точки M делается и остается менее любого как угодно малого положительного угла ε, т. е., начиная с некоторого значения z, для всех последующих значений будет осуществляться неравенство

$$|z - 180^\circ| < \varepsilon.$$

Значит, $\lim z = 180^\circ$, иначе $z \to 180^\circ$.

в) Пусть переменная x последовательно принимает значения:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Эта последовательность получается из выражения $\frac{n}{n+1}$, если n давать значения натуральных чисел, начиная с 1. Можно записать: $x = \frac{n}{n+1}$. Переменная x — возрастающая. Значения ее приближаются к 1. Возникает догадка, что $\lim x = 1$. Убедимся в верности догадки.

Возьмем как угодно малое положительное число, например 0,01. Покажем, что по абсолютному значению разность $x - 1$, начиная с некоторого значения x, делается и остается в дальнейшем меньше 0,01:

$$|x - 1| < 0{,}01 \text{ или } \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}01.$$

Далее получаем:

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < 0{,}01 \text{ или } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100},$$

$$n + 1 > 100, \; n > 99.$$

Итак, начиная с $n = 100$ и при всех последующих значениях n, неравенство $|x - 1| < 0{,}01$ удовлетворяется.

Пусть ε — любое как угодно малое положительное число. Можно указать такое значение n, начиная с которого, при всех последующих значениях, имеет место неравенство

$$|x - 1| < \varepsilon.$$

Выполняем вычисления:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

При всех значениях n, удовлетворяющих последнему неравенству, будет осуществляться неравенство $|x - 1| < \varepsilon$.

Итак, $x \to 1$ или $\lim x = 1$.

4. Переменная x стремится к пределу a, если абсолютное значение разности $x-a$, начиная с некоторого значения x, делается и при всех последующих значениях остается меньше любого малого положительного числа ε.

Иначе: $\lim x = a$, если, начиная с некоторого значения x и при всех последующих значениях $|x-a| < \varepsilon$, где ε — любое малое положительное число.

Дается геометрическое истолкование предела переменной. Переменная x изображается на числовой оси движущейся точкой M, постоянная a — неподвижной точкой A. Выберем произвольное как угодно малое положительное число ε, отложим вправо и влево от точки A отрезок длины ε. Получим на оси отрезок длины 2ε с серединой в точке A. Допустим, что точка M, двигаясь по оси, начиная с некоторого значения x, попадает на этот неподвижный отрезок и при всех последующих значениях x будет оставаться на нем. В таком случае по абсолютному значению разность $x-a$ делается и остается меньше ε. По определению предела $\lim x = a$.

Из геометрического истолкования предела следует: переменная может иметь не более одного предела. Если бы переменная имела два разных предела, то на числовой оси пришлось бы отметить две неподвижные точки A и B, соответствующие этим пределам. Движущаяся точка M оказалась бы одновременно вблизи двух различных точек: она находилась бы внутри отрезка 2ε с серединой в точке A и внутри такого же отрезка 2ε с серединой в точке B. Положительное число ε можно всегда выбрать столь малым, что эти отрезки не будут иметь общих точек. Невозможно, чтобы точка принадлежала одновременно этим двум отрезкам; невозможно существование двух пределов одной и той же переменной.

Не всякая переменная величина имеет предел. Например, если переменная n принимает значения только нечетных чисел, то она не стремится ни к какому пределу.

Итак, переменная или имеет один предел или не имеет предела.

Постоянную величину a можно рассматривать как переменную, принимающую одно и то же значение, равное a. Из определения предела следует, что постоянная a имеет предел a: $\lim a = a$.

Для основательного усвоения понятия предела решаются упражнения, причем учащиеся пользуются определением предела.

а) В окружность последовательно вписываются правильные шестиугольник, семиугольник, восьмиугольник и т. д.; число сторон многоугольников неограниченно растет. Обозначим величину центрального угла, опирающегося на концы стороны через x. Имеет ли x предел? Если имеет, то найти его.

б) Из геометрии известно, что сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $180° (n-2)$. Отсюда найдем внутренний угол правильного многоугольника. Обозначив его величину через x, получим:

$$x = 180° - \frac{360°}{n},$$

где n принимает значения натуральных чисел, начиная с трех, и может быть сделано как угодно большим. Выяснить, имеет ли x предел. Если имеет, то чему он равен.

в) Найти предел переменной, принимающей следующие значения:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

г) Найти предел последовательности чисел

$$6\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3}, 6\frac{3}{4}, \ldots, 6+\frac{n}{n+1}, \ldots$$

Предложения о достаточных признаках существования пределов возрастающей, ограниченной справа, и убывающей, ограниченной слева, переменной прежде всего необходимы для курса геометрии. Сущность этих предложений выясняется на примерах.

Рассмотрим возрастающую переменную x, которая последовательно принимает значения:

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, \ldots$$

Общий член этой последовательности чисел можно записать так:

$$1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Значит,

$$x = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Легко усмотреть, что переменная x ограничена: каждый член последовательности меньше 2.

Значения x растут, приближаются к 2. Появляется догадка, что переменная стремится к пределу, равному 2.

Учащиеся убеждаются, что, начиная с некоторого значения n, по абсолютному значению разность

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2$$

делается и остается меньше любого как угодно малого положительного числа ε. Делается заключение, что $\lim x = 2$.

Дается геометрическое истолкование этого примера.

Аналогично рассматривают еще один-два примера и формулируют достаточное условие существования предела: если переменная возрастает и в то же время остается меньше некоторого постоянного числа, то она имеет предел.

Аналогично учащиеся знакомятся со вторым достаточным признаком существования предела. Рассматривая, например, переменную x, которая последовательно принимает значения:

$$4,\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{3},\ 3\frac{1}{4},\ \ldots$$

устанавливают, что она убывает, ограничена и имеет предел. Дается геометрическое истолкование. Рассматривают еще один-два примера и устанавливают: если переменная убывает и в то же время остается больше некоторого постоянного числа, то она имеет предел.

5. Если учитель предполагает дать хотя бы некоторые доказательства теорем о пределах, то надо познакомить учащихся с бесконечно малой, некоторыми свойствами бесконечно малых, а затем перейти к предложениям о пределах. Если учитель не намерен вводить доказательства теорем о пределах, то нет особой надобности в понятии бесконечно малой. В дальнейшем рассматривается первый путь развития темы. Этот путь богаче материалом. Учитель выберет необходимое, если он в дальнейшем встанет на второй путь. Материал, не включенный в уроки, можно использовать в кружковых занятиях с учащимися.

Бесконечно малые имеют существенное значение в изложении начал математического анализа. Недаром эту дисциплину иногда называют анализом бесконечно малых. Они представляют интерес в свете задач политехнического обучения, так как находят применение в классическом математическом естествознании.

Учащиеся уже познакомились с такими переменными, пределы которых равны 0. Напомнив эти случаи поведения переменной, учитель вводит определение: переменная называется бесконечной малой, если она имеет предел, равный 0. Значит, если $x \to 0$ или $\lim x = 0$, то x — бесконечно малая.

Учитывая определение предела, можно дать иное определение бесконечно малой: переменная x называется бесконечно малой, если абсолютное значение x, начиная с некоторого значения переменной, делается и остается меньше любого малого положительного числа ε. Если, начиная с некоторого значения x и при всех последующих значениях $|x| < \varepsilon$, то x — бесконечно малая.

Важно, чтобы учащиеся уяснили, что бесконечно малая — это переменная величина. Постоянная величина, как бы она ни была мала сравнительно с другой величиной, не может быть бесконечно малой. Нельзя смешивать бесконечно малую с относительно малой постоянной величиной. Расстояние Земли от Солнца приближенно равно 150 000 000 км. Сравнительно с этим длина метра—ничтожно малая величина. Однако длину 1 м нельзя назвать бесконечно малой: эта длина—постоянна, она не может стать и оставаться меньше как угодно малой наперед заданной длины ε.

Число 0 представляет исключение. 0 всегда меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Поэтому число 0 рассматривают, когда это нужно, как бесконечно малую.

Полезно дать геометрическое истолкование бесконечно малой на числовой оси.

Из свойств бесконечно малых достаточно остановиться на двух: сумме бесконечно малых и произведении ограниченной переменной на бесконечно малую.

а) Для выяснения первого из них полезно привести пример.

$$\alpha = 3;\ 0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ \ldots;\quad \alpha \to 0$$
$$\beta = 2;\ 0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ \ldots;\quad \beta \to 0$$
$$\alpha + \beta = 5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005;\ \ldots;\quad \alpha + \beta \to 0$$
$$\alpha - \beta = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots;\quad \alpha - \beta \to 0$$

Алгебраическая сумма определенного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Докажем теорему для двух бесконечно малых.

Условия: $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. Доказать: $\alpha + \beta \to 0$.

По определению имеем

$$|\alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |\beta| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Складывая по частям, получаем:

$$|\alpha| + |\beta| < \varepsilon.$$

Так как $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, то

$$|\alpha + \beta| < \varepsilon.$$

Итак, $\alpha + \beta \to 0$.

Аналогично теорема доказывается для алгебраической суммы любого определенного числа слагаемых. Перед доказательством теоремы на примерах надо выяснить, что абсолютное значение алгебраической суммы меньше или равно сумме абсолютных значений слагаемых.

б) Произведение ограниченной переменной на бесконечно малую есть бесконечно малая.

Условие: x — ограниченная переменная, α — бесконечно малая.

Доказать: $x\alpha \to 0$.

По условию $|x| < M$, $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Получаем

$$|x\alpha| = |x| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$
$$\alpha x \to 0.$$

Так как постоянную можно рассматривать как ограниченную величину, то получаем следствие: произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.

Второе следствие: произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая. Это вытекает из того, что один сомножитель можно считать ограниченной переменной, а другой — бесконечно малой.

6. Между переменной величиной, стремящейся к пределу, и бесконечно малой имеется связь. Бесконечно малой называют переменную α, которая изменяется так, что, начиная с некоторого значения и в дальнейшем, $|\alpha| < \varepsilon$, где ε — любое как угодно малое положительное число. Предел переменной x определяют так: если, начиная с некоторого значения x и при всех последующих значениях, $|x - a| < \varepsilon$, где ε — любое как угодно малое положительное число, то $x \to a$. Значит, разность $x - a$ есть бесконечно малая. Обозначив ее через α, получим $x - a = \alpha$ или $x = a + \alpha$.

Таким образом, переменная, имеющая предел, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых, первое из которых есть предел этой переменной, а второе — бесконечно малая.

Верно и обратное положение: если переменная величина записана в виде суммы двух слагаемых:

$$x = a + \alpha,$$

из которых a — постоянное число, α — бесконечно малая, то такая переменная x имеет предел, равный a.

Таким образом, переменную, имеющую предел, всегда можно записать так: $x = a + \alpha$. Такой записью и пользуются при установлении теорем о пределах.

а) Сущность теоремы о пределе суммы переменных можно выяснить на примерах.

$$x = 5{,}2;\ 5{,}02;\ 5{,}002;\ \ldots;\quad x \to 5$$
$$y = 2{,}1;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ \ldots;\quad y \to 2$$
$$x + y = 7{,}3;\ 7{,}03;\ 7{,}003;\ \ldots;\quad x + y \to 7$$
$$x - y = 3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001\ \ldots;\quad x - y \to 3$$

Если каждое из определенного числа переменных слагаемых имеет предел, то предел алгебраической суммы переменных равен такой же алгебраической сумме пределов этих переменных.

Приведем доказательство для суммы двух слагаемых.

Условие: $x \to a$, $y \to b$. Требуется доказать:

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y.$$

Из условия можно записать: $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, где α и β — бесконечно малые. Складывая по частям, получим

$$x+y=(a+b)+(\alpha+\beta).$$

На основании 1-го свойства бесконечно малых $\alpha+\beta$ — бесконечно малая. Поэтому

$$\lim(x+y)=a+b$$

или

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y.$$

Аналогично теорема доказывается для алгебраической суммы любого определенного числа слагаемых.

б) Теорему о пределе произведения переменных также полезно пояснить примером:

$$x=3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{5},\ \ldots;\ x\to 2$$

$$y=\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{9},\ \frac{6}{11},\ \ldots;\ y\to\frac{1}{2}$$

$$xy=2,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{5},\ \ldots;\ xy\to 2\cdot\frac{1}{2}=1$$

Уместно рассмотреть еще один-два примера.

Если каждый из определенного числа переменных сомножителей имеет предел, то предел произведения переменных равен произведению пределов этих переменных.

Приведем доказательство для произведения двух переменных.

Условие: $\lim x=a$, $\lim y=b$. Требуется доказать, что $\lim(xy)=\lim x\cdot\lim y$.

Запишем: $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, где α и β—бесконечно малые. Находим: $xy=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)$. Легко усмотреть, что выражение, стоящее в скобках, — бесконечно малое. Заключаем: $\lim(xy)=ab$ или $\lim(xy)=$ $=\lim x\cdot\lim y$.

Для трех сомножителей теорема доказывается так: $\lim(xyz) = \lim[(xy)\cdot z] = \lim(xy)\cdot\lim z = \lim x\cdot\lim y\cdot\lim z$.

Аналогично теорема доказывается для четырех и большего числа сомножителей.

Следствие: если переменная имеет предел, то предел произведения постоянной и переменной равен произведению этой постоянной на предел переменной:

$$\lim(cx) = c\lim x.$$

в) Теорема о пределе частного переменных поясняется примером:

$$x = 2,\ \ 1\frac{1}{2},\ \ 1\frac{1}{3},\ \ 1\frac{1}{4},\ \ 1\frac{1}{5},\ \ldots;\ x \to 1;$$

$$y = 2,\ \ 1,\ \ \frac{4}{5},\ \ \frac{5}{7},\ \ \frac{6}{9},\ \ldots;\ y \to \frac{1}{2};$$

$$\frac{x}{y} = 1,\ \ 1\frac{1}{2},\ \ 1\frac{2}{3},\ \ 1\frac{3}{4},\ \ 1\frac{4}{5},\ \ldots;\ \frac{x}{y} \to 1:\frac{1}{2} = 2.$$

Важно, чтобы предел переменной y, являющейся делителем, не равнялся 0: делить на 0 нельзя.

Если переменные делимое и делитель имеют пределы и предел делителя не равен 0, то предел частного равен частному пределов этих переменных.

$$\lim\frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y},\ \text{если}\ \lim x = a,\ \lim y = b \neq 0.$$

Доказательство этой теоремы сложнее предыдущих, но все же доступно для учащихся.

Условие: $\lim x = a$, $\lim y = b \neq 0$. Требуется доказать, что $\lim\frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$.

Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\frac{x}{y} - \frac{b}{a}$ есть бесконечно малая. По условию получаем:

$$x = a + \alpha,\ \ y = b + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые.

Имеем:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta)}\cdot(b\alpha - a\beta).$$

Второй сомножитель в полученном выражении — величина бесконечно малая. Покажем, что первый сомножитель — величина ограниченная. Знаменатель этого сомножителя стремится к b^2. Значит, начиная с некоторого момента, он станет и будет оставаться больше $\frac{1}{2}b^2$. Вся дробь будет заключаться между 0 и $\frac{2}{b^2}$, т. е. она — ограниченная величина. По второму свойству бесконечно малых получаем, что разность $\frac{x}{y} - \frac{a}{b}$ есть бесконечно малая и

$$\lim\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ или } \lim\frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

7. Для школьного курса математики понадобятся еще два предложения.

а) Если две переменные величины остаются равными между собою и если одна из них стремится к пределу, то и другая стремится к тому же пределу.

Это предложение очевидно: если две переменные равны между собою, то имеем дело с одной переменной, лишь различно обозначенной. Величина же предела не зависит от обозначения переменной.

б) Если переменная остается заключенной между двумя переменными, стремящимися к одному и тому же пределу, то она стремится к тому же пределу.

Это предложение можно пояснить геометрически с помощью числовой оси и расположения на ней подвижных точек.

Для запоминания теорем о пределах и получения навыков в их применении решаются примеры.

а) Найти $\lim(2x+4)$, когда $x \to 3$ Это записывают так: $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4) = \lim\limits_{x\to 3}(2x) + \lim\limits_{x\to 3} 4 = 2\lim\limits_{x\to 3} x +$
$+ 4 = 2\cdot 3 + 4 = 10.$

б) Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{4x+1}$.

Прежде чем применить теорему о пределе частного, необходимо убедиться, что предел делителя не равен 0:

$$\lim_{x\to 1}(4x+1) = 4\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 = 4\cdot 1 + 1 = 5.$$

Предел делителя не равен 0. Применяем теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{4x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 3}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Подбор таких упражнений не вызывает затруднений.

Учение о пределах находит применение в определении понятия суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в получении формулы этой суммы и обращении бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную.

До сих пор понятие суммы относилось к определенному числу слагаемых.

Соединив знаками плюс члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим бесконечно много слагаемых. Найти такую „сумму" непосредственно сложением невозможно. Поэтому понятие суммы членов такой прогрессии нуждается в определении. При подходе к этому определению уместно рассмотреть пример.

Дана бесконечная геометрическая прогрессия:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \ldots$$

Найдем последовательно суммы 1, 2, 3, ..., n слагаемых. Обозначая их через S_1, S_2, S_3, ..., S_n, получим:

$$S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3},$$

. . . .

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

По мере возрастания числа слагаемых, суммы растут и приближаются к 1. При достаточно большом n по абсолютному значению разность $S_n - 1$ делается и остается меньше любого малого положительного числа ε. Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}001$. Покажем, что можно найти такое значение n, начиная с которого

$$|S_n - 1| < 0{,}001.$$

Заменяя S_n его выражением, получим:

$$\left| -\frac{1}{2^n} \right| < 0{,}001 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2^n} < 0{,}001.$$

Переходим к обратным числам:

$$2^n > 1000.$$

При всех $n > 10$ неравенство $|S_n - 1| < 0{,}001$ удовлетворяется. А это означает, что при n, неограниченно растущем, $\lim S_n = 1$. Записывают так:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

Этот предел и называют суммой членов той бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая рассматривается.

Вообще, суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется предел суммы первых n членов ее, когда n неограниченно растет.

Итак, сумма определена. Открыт путь к получению формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и применению ее к обращению бесконечных десятичных периодических дробей в обыкновенные.

Очерк четырнадцатый

УЧЕНИЕ О РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА В 10-м КЛАССЕ

1. В связи с подготовкой к окончанию школы учащиеся 10-го класса повторяют некоторые разделы математики. К числу таких разделов относится и учение о равносильности уравнений. Повторение не должно быть простым пережевыванием изученного ранее, топтанием на месте. Повторение учения о равносильности уравнений должно помочь учащимся подняться в этом вопросе на более высокие в идейном отношении позиции; оно должно показать повторяемое в новых опосредствованиях, систематизировать и углубить материал и представить его в дедуктивной обработке.

При повторении нет надобности ограничиваться только теми видами уравнений, какие встречались учащимся в курсе алгебры, а целесообразно использовать и тригонометрические уравнения.

Вместе с тем разумно проведенное повторение учения о равносильности уравнений послужит хорошей подготовкой к изучению равносильности неравенств и позволит более глубоко усвоить решение неравенств.

Прежде всего учащиеся вспоминают определение функции действительного переменного. Рассмотрим, например, функцию $y=\sqrt{1-x^2}$. Допустимые значения аргумента принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$: функция определена на отрезке $[-1;\ 1]$. Функция $y=\lg(x-2)$ определена для $x>2$. Функция $y=\lg x$

определена для всех действительных чисел, кроме $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, где n — целое число.

Приведенные функциональные зависимости являются примерами вполне конкретных функций. Однако часто приходится вести речь не о конкретной функции, а о функции вообще одного независимого переменного. В таком случае функцию записывают так: $y=f(x)$ и читают: „y есть функция f от x" или „y равняется f от x".

В самом общем случае буква f свидетельствует о том, что каждому значению x соответствует определенное значение функции: буква f выражает идею соответствия. Если функция задана, как в трех приведенных примерах, аналитическими выражениями, то символ f обозначает совокупность тех операций, которые надо последовательно выполнить над x, чтобы получить y.

Чтобы отличить одну функцию от другой с одинаковыми аргументами, употребляют обозначения:

$$y=f(x),\ y=F(x),\ y=\varphi(x)$$

или

$$y=F_1(x),\ y=F_2(x),\ y=F_3(x)$$

и т. д. Например, так можно обозначить те три функции, которые приведены выше.

Функция может находиться в зависимости от двух независимых переменных; например, $v=a^2h$ — объем правильной четырехугольной призмы — есть функция стороны основания a и высоты h, $s=\frac{1}{2}pk$ — боковая поверхность правильной пирамиды — функция периметра основания p и апофемы пирамиды k. Допустимые значения аргументов для первой из этих функций — любые действительные положительные числа: $a>0$, $h>0$, для второй функции: $p>0$, $k>\frac{p}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, где n — число сторон основания.

Когда идет речь вообще о функции двух переменных, то пишут: $z=f(xy)$ и читают: „z есть функция f от x и y „или z равняется f от x и y".

Подобно этому можно познакомить учащихся с функцией трех переменных и общей символической записью ее.

2. Далее учащиеся знакомятся с определением уравнения с одним неизвестным, с его символической записью, с символическим обозначением уравнения с двумя неизвестными. Пусть дано уравнение:

$$\sqrt{4-x^2} = \lg x.$$

Левая часть его есть функция от x, определенная для всех действительных чисел отрезка: $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Правая часть — функция от x, определенная для $x>0$. Общая часть областей определения этих двух функций будет: $0 < x \leqslant 2$.

Пусть дано уравнение:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{y} = \frac{2}{y+1} - \frac{1}{x}.$$

Левая часть уравнения — функция от x и y, определенная для всех действительных чисел, кроме $x=1$ и $y=0$. Правая часть — функция от x и y, определенная для всех действительных чисел, кроме $x=0$ и $y=-1$. Общая часть областей определения — все действительные числа, кроме $x=0$, $x=1$; $y=0$, $y=-1$.

Уравнение есть равенство двух функций, рассматриваемых в общей части их областей определения.

Когда идет речь вообще об уравнении с одним неизвестным, записывают:

$$f(x) = \varphi(x).$$

Когда идет речь вообще об уравнении с двумя неизвестными, записывают:

$$f(x,y) = \varphi(x,y).$$

Подобно этому можно ввести общую символическую запись уравнения с тремя неизвестными.

Одна из частей уравнения может быть числом. В таком случае она рассматривается как функция, принимающая при всех значениях аргумента одно и то же значение. В дальнейшем преимущественное внимание уделяется уравнению с одним неизвестным.

Решением уравнения $f(x) = \varphi(x)$ называется число или выражение, при подстановке которого вместо неизвестного в уравнение функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимают равные значения. Решение уравнения принадлежит общей части допустимых значений аргумента функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

При решении уравнения устанавливается, из какого множества допустимо черпать решения. В зависимости от этого может меняться число решений. Если ищут решения уравнения во множестве целых чисел, то уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$ имеет только одно решение; если решения отыскивают во множестве рациональных чисел, то это же уравнение имеет два решения. Уравнение $x^2 + 2 = 0$ во множестве действительных чисел не имеет решений, а во множестве комплексных чисел имеет два решения.

Далее напоминается понятие о равносильности уравнений и его определение, приводятся примеры равносильных и неравносильных уравнений. Уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$ и $\lg(x^2 - 7x - 13) = 0$ равносильны, в чем легко убедиться. Уравнения: $\sin x \mp \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$ и $\cos x \mp \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$ также равносильны. Все решения каждого из них выражаются формулой $x = \frac{1}{4}\pi(2n + 1)$.

Дать классификацию элементарных уравнений нет возможности. Однако полезно выделить некоторые виды уравнений, с представителями которых учащиеся встречались уже ранее. Уравнение называется алгебраическим, если обе его части — многочлены: $2x^2 - 10 = 5x$; $2x - y + 5 = x + y$. Уравнение называется дробным, если его части рациональные функции и, по крайней мере, одна из них содержит неизвестное в знаменателе, например, $2x\frac{x+2}{x-1}$. Уравнение называется иррациональным, если обе части—алгебраические выражения и, по крайней мере, одна из них содержит неизвестное под знаком радикала, например, $\sqrt{x+1} = 2x$. Уравнение называется трансцендентным, если в его частях, кроме алгебраических операций, содержатся трансцендентные операции, над неизвестными, например, $\sin(x + 1) = 0$, $\lg(x + 3) - \lg(x - 3) = 0$, $2^{x-1} + 2^{x+1} = 5$. К числу трансцендентных относятся показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения.

3. Теорема 1. Если к обеим частям уравнения

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

прибавить функцию $F(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях неизвестного, то получится

$$f(x) + F(x) = \varphi(x) + F(x), \qquad (2)$$

уравнение равносильное данному.

Требуется доказать, что уравнения (1) и (2) равносильны. Значит, надо доказать, во-первых, что всякое решение уравнения (1) есть решение уравнения (2) и, во-вторых, что всякое решение уравнения (2) есть решение уравнения (1). Доказательство распадается на две части.

1) Пусть $x = a$ есть решение уравнения (1). Подставляя в это уравнение вместо x число a, получим равные значения левой и правой частей уравнения, т. е.

$$f(a) = \varphi(a). \qquad (3)$$

Число a, являясь решением уравнения (1), принадлежит множеству допустимых значений неизвестного.

По условию $F(a)$ имеет числовой смысл. Прибавив к обеим частям равенства (3) по $F(a)$, получим

$$f(a) + F(a) = \varphi(a) + F(a). \qquad (4)$$

Равенство (4) можно получить из уравнения (2) путем подстановки вместо x числа a. Это означает, что $x = a$ есть решение уравнения (2). Следовательно, всякое решение уравнения (1) есть решение уравнения (2).

2) Пусть $x = c$ есть решение уравнения (2). Подставляя в это уравнение вместо x число c, получим равные значения левой и правой частей уравнения, т. е.

$$f(c) + F(c) = \varphi(c) + F(c) \qquad (5)$$

Отняв от обеих частей равенства (5) по $F(c)$, будем иметь:

$$f(c) = \varphi(c). \qquad (6)$$

Равенство (6) получается из уравнения (1) путем подстановки вместо x числа c. Значит, $x = c$ есть решение уравнения (1). Следовательно, всякое решение уравнения (2) есть решение уравнения (1).

Итак, уравнение (1) и (2) равносильны.

Приводятся примеры, иллюстрирующие теорему.

а) Уравнение $x^2 + 12 = 7x$ рассматриваем на множестве действительных чисел. Функция x^3 имеет смысл при любых действительных значениях x. По теореме уравнение $x^3 + x^2 + 12 = x^3 + 7x$ равносильно данному.

б) Для уравнения $3x-2=2x$ допустимые значения — любое действительное число. Решение этого уравнения есть $x=2$. Прибавив к обеим частям его функцию $\frac{1}{x-2}$, получим:

$$3x-2+\frac{1}{x-2}=2x+\frac{1}{x-2};$$

$x=2$ не является решением этого уравнения: при $x=2$ обе части его теряют числовой смысл. Нарушение равносильности произошло в силу того, что прибавленная к частям уравнения функция при $x=2$ теряет числовой смысл.

в) Для уравнения $5x+1=4x$ допустимые значения — множество действительных чисел. Решение уравнения: $x=-1$. Прибавим к обеим частям этого уравнения по $\lg x$. Получим уравнение:

$$5x+1+\lg x=4x+\lg x.$$

Это уравнение неравносильно исходному: при $x=-1$ левая и правая часть уравнения теряет числовой смысл.

Полезно, чтобы учащиеся хорошо усвоили и сущность и план доказательства теоремы 1: аналогичные доказательства будут встречаться в дальнейшем. При повторении на следующем уроке теорема расширяется: она доказывается учеником для уравнения с двумя неизвестными. Учитель сообщает, что теорема верна для уравнения со многими неизвестными и что сущность доказательства сохраняется.

Вспоминаются следствия теоремы, известные учащимся из курса алгебры 7-го класса.*

4. Теорема 2. Если обе части уравнения

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (7)$$

умножить на функцию $F(x)$, имеющую смысл и отличную от нуля при всех допустимых значениях неизвестного, то получится уравнение

$$f(x)\cdot F(x)=\varphi(x)\cdot F(x) \qquad (8)$$

равносильное данному.

1) Пусть $x=a$ есть решение уравнения (7).

---

* Очерк шестой.

При подстановке в это уравнение вместо x числа a получится равенство

$$f(a) = \varphi(a) \qquad (9)$$

По условию теоремы $F(a)$ имеет числовой смысл и отлично от 0. Умножив обе части равенства (9) на $F(a)$, получим

$$f(a) \cdot F(a) = \varphi(a) \cdot F(a). \qquad (10)$$

Если в уравнение (8) вместо x подставить число a, то получим равенство (10). Значит, $x = a$ есть решение уравнения (8). Итак, всякое решение уравнения (7) есть решение уравнения (8).

2) Пусть $x = c$ есть решение уравнения (8).

Значит, $f(c) \cdot F(c) = \varphi(c) \cdot F(c)$ (11). По условию $F(c)$ имеет числовой смысл и не равняется 0. Обе части равенства (11) разделим на $F(c)$. Получим $f(c) = \varphi(c)$ (12). Последнее равенство получается из уравнения (7) путем подстановки вместо x числа c. Итак, $x = c$ есть решение уравнения (7).

Следовательно, уравнения (7) и (8) — равносильны.

Поясняется примерами:

1) Уравнения $2x - 1 = x$ и $(2x - 1)(x^2 + 1) = x(x^2 + 1)$, рассматриваемые над множеством действительных чисел, равносильны: функция $x^2 + 1$ имеет числовой смысл и ни при каких допустимых значениях неизвестного не равна 0.

Те же два уравнения, рассматриваемые над множеством комплексных чисел, уже неравносильны; функция $x^2 + 1$ при $x = \pm i$ принимает значение, равное 0.

2) Уравнения

$$2x + \frac{x^2}{x^2 + 4} = \frac{2x^3 + 8x + 4}{x^2 + 4} \quad \text{и} \quad 2x(x^2 + 4) + x^2 = 2x^3 + 8x + 4,$$

рассматриваемые над множеством действительных чисел, равносильны: функция $x^2 + 4$ имеет числовой смысл и ни при каких допустимых значениях неизвестного не равна 0.

3) Уравнения $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$ и $x^2 - 9 = 0$, рассматриваемые над множеством действительных (или целых, или рациональных) чисел неравносильны: функция $x + 3$ при $x = -3$ принимает значение, равное 0.

Вспоминаются следствия этой теоремы. При повторении теорема доказывается для уравнения с двумя неизвестными и отмечается, что она может быть доказана тем же приемом для уравнения со многими неизвестными. В порядке упражнений решаются дробные уравнения.

5. Полезно обратить внимание учащихся на следующий факт. Если над уравнением выполняется такое преобразование, которое приводит к уравнению, имеющему иную область допустимых значений неизвестного, чем исходное, то полученное уравнение может оказаться неравносильным данному. Это положение выясняется на ряде примеров, которые часто встречаются учащимся.

1) Рассмотрим уравнения:

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{x-1} \text{ и } 1-x=x-1$$

над множеством действительных чисел. Первое из них имеет единственное допустимое значение — единицу и одно решение: $x=1$. Для второго уравнения допустимые значения—любое действительное число, а решение его $x=1$. В этом примере области допустимых значений неизвестных различны, однако равносильность сохранилась.

2) Уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ и } \sqrt{1-x} = \sqrt{x-1},$$

рассматриваемые над множеством действительных чисел, неравносильны. Первое из них не имеет допустимых значений, а значит, не имеет решений. Второе имеет единственное допустимое значение и решение $x=1$. В этом случае преобразование первого уравнения во второе вызвало изменение области допустимых значений неизвестного, а в результате нарушилась равносильность.

3) Уравнение $\lg(2x^2-x^2)=1$ и $2x-x^2=10$, рассматриваемые над множеством действительных чисел, неравносильны. Первое из них имеет область допустимых значений для неизвестного $0<x<2$, а второе—множество действительных чисел. Первое уравнение не имеет решений, а второе имеет два решения.

Представляют интерес уравнения, левая часть которых есть произведение нескольких функций, а правая равна нулю. Для выяснения способа решения таких уравнений рассмотрим примеры.

1) Для уравнения $(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$ допустимые значения неизвестного—множество комплексных чисел. Чтобы произведение было равно 0, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из сомножителей равнялся 0. Имеем: $x-1=0$, $x+1=0$, $x^2+1=0$. Решая каждое из этих уравнений, получим: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$. Все эти решения принадлежат общей части допустимых значений неизвестного совокупности уравнений, поэтому они являются и решениями данного уравнения.

2) Уравнение $(x-2)(x+1)\lg x=0$ имеет область допустимых значений неизвестного: $x>0$. Уравнения $x-2=0$, $x+1=0$, $\lg x=0$ дают следующие решения: $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Второе из них необходимо отбросить: при $x=-1$ $\lg x$ не имеет смысла. Итак, данное уравнение имеет два решения: 2 и 1.

3) Уравнение $\lg(x-5)\cdot\lg(x+3)=0$ имеет допустимые значения—любые действительные числа, которые больше 5. Решая уравнения $\lg(x-5)=0$ и $\lg(x+3)=0$, находим $x_1=6$, $x_2=-2$. Второе решение не принадлежит к числу допустимых значений. Данное уравнение имеет одно решение: $x=6$.

Итак, чтобы найти решения уравнения, левая часть которых произведение нескольких функций, а правая равна 0, следует каждую функцию приравнять 0 и решить полученные уравнения; из этих решений — отобрать те, которые принадлежат общей части допустимых значений неизвестного этих уравнений. Отобранные решения и есть решения данного уравнения. В качестве упражнений полезно решать алгебраические уравнения путем разложения левой части на множители, например, такие:

$$x^3+x^2+x+1=0,\quad x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$$

6. В средней школе изучается решение неравенств только с одним неизвестным. Задача решения неравенства и с теоретической и с практической стороны родственна задаче решения уравнения.

Пусть, например, имеем две функции

$$\frac{x+1}{x-1} \text{ и } \frac{x+2}{x-2},$$

которые рассматриваются над множеством действительных чисел. Общая часть допустимых значений аргумента — все действительные числа, кроме 1 и 2. Пусть требуется выяснить, при каких допустимых значениях неизвестного будет верно неравенство:

$$\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+2}{x-2}.$$

Приходим к задаче о решении неравенств.

Задача о решении неравенств рассматривается только над упорядоченными множествами чисел, т. е. над такими, в которых определены отношения „больше" и „меньше". К таким множествам относятся множества целых, рациональных, действительных чисел. Нельзя рассматривать неравенства над множеством комплексных чисел: ему не свойственны отношения „больше" и „меньше".

Две функции, рассматриваемые в общей части допустимых значений соединенные одним из знаков $>$, $<$, *образуют неравенство*:

$$f(x) > \varphi(x), \quad f(x) < \varphi(x).$$

Решением неравенства $f(x) > \varphi(x)$ *называется число или выражение, при подстановке которого в неравенство вместо неизвестного значение функции* $f(x)$ *будет больше значения* $\varphi(x)$. Например, решением неравенства $x+1>5$ является любое действительное число большее 4; решением неравенства $2x<x+5$ является любое действительное число, меньшее 5. В дальнейшем без особых оговорок неравенства рассматриваются над множеством действительных чисел.

Рассмотрим два неравенства: $x-1>1$; $2x>4$. Каждое решение первого из них является решением второго и каждое решение второго—решением первого. Такие неравенства называются равносильными.

Два неравенства называются равносильными, если всякое решение первого является решением второго и всякое решение второго — решением первого. При решении неравенств важно уметь выполнять такие преобразования над обеими частями неравенств, которые приводят к неравенству, равносильному исходному. Такие преобразования устанавливаются теоремами о равносильности неравенств.

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства

$$f(x) > \varphi(x) \tag{1}$$

прибавить одну и ту же функцию $F(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях неизвестного, то получится неравенство

$$f(x) + F(x) > \varphi(x) + F(x), \tag{2}$$

равносильное данному.

1) Пусть a есть решение неравенства (1), т. е.

$$f(a) > \varphi(a). \tag{3}$$

По условию $F(a)$ имеет числовой смысл. На основании правила: „если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получится неравенство того же смысла“ имеем:

$$f(a) + F(a) > \varphi(a) + F(a). \tag{4}$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (2), делаем заключение, что a есть решение неравенства (2).

2) Пусть c — решение неравенства (2), т. е.

$$f(c) + F(c) > \varphi(c) + F(c). \tag{5}$$

На основании того же правила, прибавив к обеим частям неравенства (5) число $-F(c)$, получим

$$f(c) > \varphi(c). \tag{6}$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (1), видим, что c — решение неравенства (1).

Итак, неравенства (1) и (2) — равносильны.

Доказательство теоремы настолько похоже на доказательство теоремы 1 о равносильности уравнений, что учитель поручает выполнить его одному из десятиклассников.

Отмечаются следствия: 1) любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком, при этом получается неравенство, равносильное данному; 2) два равных члена, содержащихся в обеих частях неравенства, можно зачеркнуть; при этом получается неравенство, равносильное данному.

7. *Теорема 2.* Если обе части неравенства

$$f(x) > \varphi(x) \qquad (7)$$

умножить на функцию $F(x)$, принимающую при всех допустимых значениях неизвестного положительные значения, то получится неравенство

$$f(x) \cdot F(x) > \varphi(x) \cdot F(x), \qquad (8)$$

равносильное первоначальному.

1) Пусть a — решение неравенства (7). Тогда

$$f(a) > \varphi(a). \qquad (9)$$

По условию теоремы $F(a) > 0$. На основании правила: „при умножении обеих частей неравенства на положительный множитель смысл знака неравенства не меняется" имеем:

$$f(a) \cdot F(a) > \varphi(a) \cdot F(a). \qquad (10)$$

Неравенство (10) получается из неравенства (8) путем замены неизвестного x числом a. Значит, a есть решение неравенства (8).

2) Пусть c — решение неравенства (8). Имеем:

$$f(c) \cdot F(c) > \varphi(c) \cdot F(c). \qquad (11)$$

По условию теоремы $F(c) > 0$. На основании только что приведенного правила, умножая обе части неравенства на положительный множитель $\frac{1}{F(c)}$, получим:

$$f(c) > \varphi(c) \qquad (12)$$

Сопоставляя неравенство (12) и неравенство (7), убеждаемся, что c — решение неравенства (7).

Итак, неравенства (7) и (8) — равносильны.

Вторая часть теоремы 2 читается так: если обе части неравенства $f(x) > \varphi(x)$ умножить на функцию $F(x)$, принимающую при всех допустимых значениях неизвестного отрицательные значения, то получится неравенство $f(x) \cdot F(x) < \varphi(x) \cdot F(x)$, равносильное первоначальному. Доказательство этой части теоремы выполняют учащиеся в порядке домашней работы.

Отмечаются следствия теоремы 2.

1) Равные положительные множители обеих частей неравенства можно зачеркнуть, сохранив смысл неравенства; при этом полученное неравенство равносильно исходному. Пример: $(3x-2)(x^2+5)>4(x^2+5)$, $3x-2>4$.

2) Равные отрицательные множители обеих частей неравенства можно зачеркнуть, изменив знак неравенства на противоположный; при этом полученное неравенство равносильно исходному.

Пример: $(1-2x)(-x^2-1)>5(-x^2-1)$, $1-2x<5$.

3) У всех членов неравенства знаки можно переменить на противоположные и изменить знак неравенства на противоположный; при этом получится неравенство, равносильное первоначальному. Пример:

$$-x-1<2x-1,\quad x+1<1-2x.$$

Решение неравенств первой степени с одним неизвестным с числовыми коэффициентами выполняется со ссылками на теоремы о равносильности неравенств и их следствия. Это поможет лучше усвоить теоретические положения и прочно связать их с практикой выполнения упражнений. Учащимся предъявляется требование истолковывать решение неравенств на числовой оси. Это подготовляет к использованию оси при решении систем неравенств, когда такое истолкование становится полезно, так как помогает наглядно представить, какое множество чисел является решением системы. Среди упражнений уместно давать и такие, которые по форме не являются неравенствами первой степени, однако на основании предложений о равносильности легко приводятся к неравенствам первой степени. Вот несколько примеров таких неравенств:

а) $1-x+2x^2<2(x-2)^2$; в) $(x^4+3)<(2x-1)(x^4+3)$;

б) $(2x-1)^2>(5-2x)$; г) $\frac{x}{x^2+2}>\frac{2x+1}{x^2+2}$.

Особого внимания заслуживают неравенства с буквенными коэффициентами, решение которых требует тщательного анализа.

Пусть требуется решить неравенство

$$\frac{x}{a}+1>\frac{4}{a}-3x.$$

Отмечаем, что $a \neq 0$: при $a = 0$ обе части неравенства теряют числовой смысл. Параметр a может быть или положительным или отрицательным. Рассмотрим отдельно оба случая.

1) $a > 0$. Получаем:

$$x + a > 4 - 3ax,$$
$$(1 + 3a)x > 4 - a.$$

Коэффициент при неизвестном больше 0. Находим:

$$x > \frac{4-a}{1+3a}.$$

2) $a < 0$. Получаем:

$$x + a < 4 - 3ax,$$
$$(1 + 3a)x < 4 - a.$$

Возможны 3 случая: $1 + 3a > 0$; $1 + 3a = 0$; $1 + 3a < 0$. Если $1 + 3a > 0$, т. е. $a > -\frac{1}{3}$, то

$$x < \frac{4-a}{1+3a}.$$

Если $1 + 3a = 0$, т. е. $a = -\frac{1}{3}$, то x — любое действительное число.

Если $1 + 3a < 0$, т. е. $a < -\frac{1}{3}$, то

$$x > \frac{4-a}{1+3a}.$$

Итак, получаем:

при $a > 0$ или при $a < -\frac{1}{3}$ $\quad x > \frac{4-a}{1+3a}$,

при $-\frac{1}{3} < a < 0$ $\quad x < \frac{4-a}{1+3a}$,

при $a = -\frac{1}{3}$ $\quad x$ — любое действительное число.

8. Переходя к решению систем неравенств первой степени с одним неизвестным, надо разъяснить постановку задачи. Пусть даны два неравенства с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 2x - 1 > x + 2, \\ x + 1 > 2x - 3; \end{cases}$$

требуется найти все значения неизвестного, при которых каждое из данных неравенств будет верно (удовлетворяется). В таком случае эти два неравенства называют системой. Система может содержать и более двух неравенств. Решить систему неравенств с одним неизвестным—значит найти все значения неизвестного, при которых каждое неравенство системы будет верно (удовлетворяется).

В первую очередь на уроке решаются такие системы двух неравенств, которые введут учащихся в возможные типичные соотношения интервалов, получаемых при решении каждого неравенства системы отдельно. Решение каждой системы истолковывается на числовой оси.

Рассмотрим несколько примеров:

1) $$\begin{cases} 3x + 1 > 2x + 5, \\ 3 - 2x > 4 - 3x. \end{cases}$$

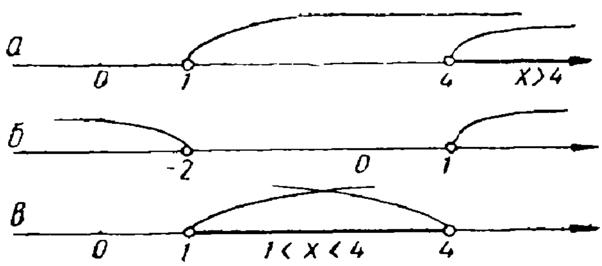
$$\begin{cases} x > 4, \\ x > 1. \end{cases}$$

$x > 4$ (черт. 16 *а*).

2) $$\begin{cases} 2(2x + 1) > 3(x + 1), \\ 4 - 2x < 2 - 3x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x < -2. \end{cases}$$

Нет решений (черт. 16 *б*).



Черт. 16.

3) $$\begin{cases} 1 - 4x < 5(1 - x), \\ (x + 1)^2 > x^3 + x + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1. \end{cases}$$ $1 < x < 4$ (черт. 16 *в*).

Далее естественно перейти к неравенствам второй степени, левая часть которых — произведение двух линейных сомножителей, а правая — нуль. Решение таких неравенств сводится к решению систем двух неравенств первой степени и подготовляет изучение неравенств второй степени.

Требуется решить неравенство:

$$(2x-7)(5+2x)>0. \qquad (1)$$

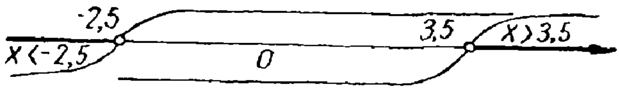
Оно будет удовлетворяться, если одновременно оба сомножителя правой части будут или положительные, или отрицательные. Таким образом, задача распадается на решение двух систем неравенств:

$$\begin{cases}2x-7>0,\\ 5+2x>0;\end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases}2x-7<0,\\ 5+2x<0.\end{cases} \quad (3)$$

Решаем (2) и (3) системы:

$$\begin{cases}x>3{,}5,\\ x>-2{,}5;\end{cases} \qquad \begin{cases}x<3{,}5,\\ x<-2{,}5;\end{cases}$$

$x>3{,}5$ (черт. 17), $\qquad x<-2{,}5$ (черт. 17).



Черт. 17.

Итак, x — любое действительное число, кроме чисел отрезка $[-2{,}5;\ 3{,}5]$.

Решение неравенств дробных всегда можно свести к решению целых неравенств.

Теорема. Неравенство

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}>0 \qquad (1)$$

равносильно неравенству

$$f(x)\cdot\varphi(x)>0. \qquad (2)$$

Неравенство (1) равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ \varphi(x)>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}f(x)<0,\\ \varphi(x)<0.\end{cases}$$

Неравенство (2) равносильно тем же двум системам. Это и свидетельствует о том, что неравенство (1) и (2) равносильны.

Эта теорема позволяет решение неравенства

$$\frac{ax+b}{cx+d}>0 \tag{3}$$

свести к решению неравенства $(ax+b)(cx+d)>0$. Однако неравенства вида (3) легко решаются непосредственно. Пусть требуется решить неравенство:

$$\frac{7-2x}{2x+1}<0. \tag{4}$$

Дробь левой части неравенства (4) будет отрицательна, если знаменатель ее будет иметь разные знаки. Получаем две системы неравенств:

$$\begin{cases} 7-2x>0, \\ 2x+1<0; \end{cases} \quad (5) \qquad \begin{cases} 7-2x<0, \\ 2x+1>0. \end{cases} \quad (6)$$

Решая каждую из этих систем, получим:

$$\begin{cases} x<3{,}5, \\ x<-0{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3{,}5, \\ x>-0{,}5; \end{cases}$$

$$x<-0{,}5, \qquad x>3{,}5.$$

Итак, x — любое действительное число, кроме чисел, принадлежащих отрезку $[-0{,}5;\ 3{,}5]$.

9. В журнальных статьях отмечалось, что многие кончившие среднюю школу слабо справляются с решением неравенств второй степени с одним неизвестным. Каковы причины такого явления? При изучении неравенств второй степени делается ставка на запоминание ряда правил, позволяющих полуавтоматически находить решения. Некоторые из этих правил довольно громоздки. Память — ненадежный союзник: он легко изменяет — правила забываются, путаются, искажаются. В таком случае могут помочь обоснования правил. Однако теоретические пути обоснования правил изучались легкомысленно: восстановить их не удается. В результате бывшей питомец школы через два месяца после получения аттестата зрелости не может решить пример неравенства второй степени.

Чтобы избежать такого положения, надо отказаться от решения неравенств по предварительно установленным правилам. При решении каждого неравенства следует широко использовать анализ и находить требуемое, опираясь на то, что прочно усвоено.

Если старший член неравенства второй степени отрицательный, то такое неравенство можно преобразовать в равносильное неравенство с положительным старшим членом. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать неравенства, считая коэффициент старшего члена положительным:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1)$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad (2)$$

где $a > 0$.

Пусть требуется решить неравенство (1) или (2). Прежде всего по дискриминанту выясняется, каковы корни трехчлена левой части неравенства.

Пусть $b^2 - 4ac > 0$. Трехчлен имеет действительные и различные корни. Разложив трехчлен на множители, получаем неравенства:

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \qquad (3)$$

и

$$a(x - x_1)(x - x_2) < 0. \qquad (4)$$

Решение неравенств (3) и (4) уже известно учащимся: оно сводится к решению систем двух неравенств первой степени с одним неизвестным.

Пусть $b^2 - 4ac = 0$. Трехчлен имеет два равных действительных корня. Неравенства (1) и (2) соответственно преобразуются:

$$a(x - x_1)^2 > 0 \qquad (5)$$

и

$$a(x - x_1)^2 < 0. \qquad (6)$$

Неравенство (5) удовлетворяется любыми значениями x, кроме $x = x_1$. Неравенство (6) не имеет решений.

Пусть $b^2 - 4ac < 0$. Трехчлен не имеет действительных корней. Выделяя из трехчлена полный квадрат, неравенства (1) и (2) преобразуются соответственно в неравенстве:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] > 0 \qquad (7)$$

и

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] < 0. \qquad (8)$$

Так как $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то левые части неравенств (7) и (8) при любых значениях x положительны. Значит, решение неравенства (7) есть любое действительное число, а неравенство (8) не имеет решений.

Очень хорошо, если при решении неравенств второй степени дается графическое истолкование ответов с помощью использования параболы.

Полезно решение задач, сводящихся к неравенствам.

Очерк пятнадцатый

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

1. По программам математики средней школы уравнения высших степеней составляют последнюю главу курса алгебры. Учащиеся уже знают мнимые числа, познакомились со множеством комплесных чисел. Это дает возможность им рассматривать уравнения высших степеней над множеством комплексных чисел в том смысле, что корни уравнений могут быть комплексные. Однако на коэффициенты уравнения накладываются существенные ограничения; рассматриваются, как правило, уравнения с целыми коэффициентами.

Основные задачи и план главы об уравнениях высших степеней таковы: познакомить учащихся с теоремой Безу и ее следствием, научить решать некоторые уравнения высших степеней разложением левой части на множители, применить этот прием к решению простейших двучленных уравнений, познакомить с решением трехчленных уравнений путем целесообразной замены неизвестного, изучить некоторые свойства уравнений n-ой степени с одним неизвестным и применить их к определению рациональных корней, познакомить с графическими приемами отыскания корней.

Изложение этой главы в учебнике „Элементарная алгебра" А. П. Киселева не вызывает удовлетворения и по содержанию, и по ограниченности класса уравнений, которые рассматриваются в ней. Приведенный план имеет преимущества; объем класса решаемых уравнений значительно расширяется, приемы решений обогащаются, материал главы объединяется единством целей, накопленные учащимися сведения об уравнениях с одним неизвестным систематизируются.

При изучении главы учащиеся не только усвоят новые теоретические положения и приобретут новые навыки, но и многое повторят; например, они вспомнят деление многочлена на многочлен, разложение на множители, решение некоторых видов уравнений, изученных ранее.

2. Прежде всего целесообразно уточнить понятие о многочлене относительно одного переменного и выделить из множества этих многочленов тот вид их, который будет изучаться в дальнейшем и который войдет в состав уравнений в качестве левой части их.

Рассмотрим, например, многочлен $2x^3+x^2-$ $-13x+6$. Он третьей степени относительно x, расположен по убывающим степеням x. Его коэффициенты — целые числа. Естественная область допустимых значений x — множество комплексных чисел. Для различных значений x многочлен принимает, вообще говоря, различные значения. Например, при $x=0$ его числовое значение равно 6, при $x=3$ значение равно 30, при $x=i$ получим $5-14i$ и т. д. Значит, многочлен представляет собой функцию переменного x. При некоторых значениях x многочлен принимает значения, равные 0: например, при $x=2$ его значение равно 0. В таком случае 2 называют корнем многочлена.

Любой многочлен n-ой степени относительно переменного x записывают так.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (1)$$

где $a_0\neq 0$, а n — натуральное число.

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n могут быть любыми числами из множества комплексных чисел. Однако в дальнейшем будем рассматривать преимущественно тот класс многочленов, коэффициенты которого—целые числа. Итак, в дальнейшем, как правило, коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n — целые числа. Чтобы многочлен имел n-ую степень, коэффициент старшего члена не должен равняться 0, т. е.

$a_0 \neq 0$. Допустимые значения переменного x — множество комплексных чисел. Значения x, при которых многочлен становится равным 0, называют корнями многочлена.

Если многочлен приравнять нулю, то получим уравнение n-ой степени с одним неизвестным. В дальнейшем рассматриваются уравнения вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n = 0, \qquad (2)$$

в которых a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n — целые числа, $a_0 \neq 0$, n — натуральное число. Отступления от этого оговариваются особо. Допустимые значения неизвестного — множество комплексных чисел. Самые простые виды таких уравнений уже изучены. К ним относятся линейные с одним неизвестным, квадратные и биквадратные уравнения.

Если коэффициент старшего члена $a_0 = 1$, то уравнение называется приведенным.

Из уравнения (2) получить приведенное можно двумя способами.

1. Делим обе части уравнения на коэффициент старшего члена, при этом вводятся дробные коэффициенты.

2. Второй способ покажем на примере. Дано уравнение:

$$2x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 2^2:

$$2^3x^3 + 4 \cdot 2^2x^2 - 2^2x - 2^3 = 0$$

или $$(2x)^3 + 4 \cdot (2x)^2 - 2 \cdot 2x - 8 = 0.$$

Заменим $2x$ через y:

$$y^3 + 4y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Если бы удалось найти корни полученного приведенного уравнения, то по ним, применяя равенство $2x = y$, легко найти корни данного уравнения.

Предложим учащимся таким же способом преобразовать в приведенные следующие уравнения:

$$3x^4 - x^2 + x - 1 = 0{,}5 \quad z^3 - z^2 - z + 2 = 0.$$

Чтобы найти корни многочлена, надо приравнять его нулю и решить полученное уравнение.

3. Рассмотрим вопрос о том, какой остаток получается при делении многочлена n-ой степени отно-

сительно переменного x на двучлен первой степени того же переменного, т. е. на $x-a$.

Начнем с примера. Дан многочлен

$$f(x)=2x^3+x^2-13x+6.$$

Найдем остаток, получающийся от деления этого многочлена на $x-3$. Выполнив деление, отмечаем, что остаток равен 30. Он не содержит x, так как деление производилось на двучлен первой степени относительно x. По той же причине частное — многочлен степени на 1 ниже, чем степень делимого.

Остаток можно получить и не выполняя деления, путем подстановки в многочлен $f(x)$ вместо x числа 3. Получим:

$$f(3)=2\cdot 3^3+3^2-13\cdot 3+6=30.$$

Аналогичные наблюдения производятся еще на двух-трех примерах: а) $(x^3+5x^2+x+5):(x+2)$, б) $(x^4-2x^3+3x^2-2x+1):(x-1)$.

В результате этих наблюдений формулируется теорема.

Теорема 1. Остаток от деления многочлена n-ой степени относительно x на двучлен $x-a$ равен значению этого многочлена при $x=a$.*

Теорема открыта учащимися с помощью неполной индукции. Теперь предстоит ее доказать.

Обозначим многочлен n-ой степени относительно x через $f(x)$. Пусть при делении $f(x)$ на $x-a$ получилось частное $Q(x)$ и остаток R. Частное—многочлен $n-1$ степени, а остаток—число.

Так как делимое равно делителю, умноженному на частное плюс остаток, то получаем:

$$f(x)=(x-a).\ Q(x)+R.$$

Это равенство верно при любых значениях x. В частности, оно удовлетворяется и при $x=a$. Получаем:

$$f(a)=R \quad \text{или} \quad R=f(a).$$

* Эту теорему обычно называют теоремой Безу. Beozout (1730—1783)—французский математик, член Парижской Академии наук. Его работы относятся главным образом к высшей алгебре.

Остаток действительно равен значению многочлена n-ой степени при $x=a$.

Теорема Безу верна для любого многочлена, т. е. и для такого, коэффициенты которого комплексные числа. Общее доказательство ее не отличается от изложенного.

Учащиеся, опираясь на теорему Безу, находят остатки от деления: а) $2x^4-3x^2+7x-5$ на $x-2$, б) $5x^3-3^2-12$ на $x+1$. Среди упражнений находят место и такие, в которых остаток равен 0. Например, при делении $f(x)=x^3-x^2-4x+4$ на $x+2$ получается

$$f(-2)=(-2)^3-(-2)^2-4\cdot(-2)+4=0,$$

т. е. остаток $R=0$. Так как значение многочлена при $x=-2$ равно 0, то $x-2$—корень многочлена.

Такие упражнения подготовляют переход к важному следствию теоремы 1: чтобы многочлен $f(x)$ относительно x делился на двучлен $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=a$ многочлен обращался в 0, т. е, чтобы $x=a$ был корнем многочлена.

На самом деле, если многочлен $f(x)$ делится на $x-a$, то из этого необходимо следует, что остаток $R=0$, т. е. $f(a)=0$. Значит, a—корень многочлена.

Пусть a—корень многочлена $f(x)$. По определению корня $f(a)=0$. А это показывает, что при делении многочлена $f(x)$ на $x-a$ получается остаток $R=0$. Следовательно, чтобы многочлен делился на $x-a$, достаточно, чтобы $x=a$ был корнем многочлена.

Продолжается решение упражнений. Учащимся предлагается, не производя деления, определить, выполняется оно с остатком или без него: а) $(x^3-3x^2+4):(x-2)$, б) $(4x^4-35x^2-9):(x+3)$, в) $(x^4+1):(x-1)$, г) $(a^4-1):(a+1)$.

Удачный подбор упражнений дан в стабильном задачнике алгебры. Из них полезны упражнения такого вида: „При каком значении k трехчлен $4x^3-6x+k$ делится на $x+3$?" „При каких значениях a и b многочлен $ax^3+bx^2-73x+102$ делится на x^2-5x+6?"

Теорема Безу и ее следствие применяются при выяснении делимости двучленов вида $x^n \pm a^n$ на $x \pm a$. От учащихся не следует требовать запоминания правил делимости этих двучленов. Нужно только, чтобы в любом конкретном случае они умели определить, делится или не делится заданный двучлен.

4. Общий способ решений квадратных уравнений, приведенных к нормальному виду, заключается в разложении левой части уравнения на множители. Этот способ применяется и для решения некоторых уравнений, степень которых выше двух.

Требуется решить уравнение $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.

Попытаемся разложить левую часть уравнения на множители первой и второй степени относительно неизвестного. Это можно сделать различными путями. Один из них таков: средний член представим в виде суммы двух слагаемых $x^2 + x^2$ и произведем группировку членов по три:

$$(x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1) = 0.$$

Далее последовательно получаем:

$$x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 x^2 + 1) = 0,$$
$$(x+1)^2 = 0, \; x^2 + 1 = 0.$$
$$x_1 = -1, \; x_2 = \quad 1, \; x_3 = i, \; x_4 = -i.$$

При решении равносильность не нарушалась. Поэтому проверка полезна только как средство, свидетельствующее об отсутствии или наличии ошибок.

При решении разложением на множители последующих уравнений: а) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, б) $x^3 - 4x^3 - x^2 + 4x = 0$, в) $x^3 - 2x + 1 = 0$, г) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ обращается внимание учащихся на два факта: во-первых, уравнение имеет столько корней, сколько единиц в показатели степени старшего члена; во-вторых, если уравнение имеет мнимые корни, то они парные, при этом в пару входят сопряженные числа. Таким образом, с помощью неполной индукции устанавливается, что уравнение n-ой степени с одним неизвестным имеет n корней.

Успех решения уравнений высших степеней рассматриваемым способом зависит от умения разлагать многочлены одного переменного на множители. Вместе с тем решение уравнений дает возможность углубить навыки в разложении многочленов на множители.

Способ разложения на множители применяется к решению двучленных уравнений. Уравнение вида $a_0 x^n + a_n = 0$ называется двучленным. Так как $a_0 \neq 0$, то двучленное уравнение можно представить в виде $x^n + \frac{a_n}{a_0} = 0$.

Если $\frac{a_n}{a_0} > 0$, то, положив $\frac{a_n}{a_0} = b$, получим $x^n + b = 0$; если $\frac{a_n}{a_0} < 0$, то, положив $\frac{a_n}{a_0} = -b$, получим $x^n - b = 0$. В обоих случаях b — положительное рациональное число. Такое ограничение параметра b в школьных условиях целесообразно.

В школе рассматриваются немногие простейшие виды двучленных уравнений: $x^3 \pm b = 0$; $x^4 \pm b = 0$, $x^6 \pm b = 0$. Технику решения таких уравнений учащиеся усваивают путем решения примеров.

Для решения уравнений $x^3 \pm b = 0$ применяются хорошо известные учащимся формулы сокращенного умножения, при этом предварительно b представляют в форме куба числа. Уравнение $x^4 - b = 0$ также легко решается разложением на множители.

Несколько больше затрудняет учащихся уравнение вида $x^4 + b = 0$. Да и учитель иногда избегает таких уравнений. Рассмотрим пример: $x^4 + 1 = 0$.

К левой части прибавим $2x^2$ и $-2x^2$. Последовательно получаем:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = 0,$$

$$(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).$$

Учащиеся решают два-три таких уравнения, а затем можно предложить им решить уравнение $x^4 + b = 0$.

Уравнение $x^6 - b = 0$ распадается на 2 кубических двучленных уравнения, решение которых известно.

Левую часть уравнения $x^6 + b = 0$ можно представить в виде произведения трех множителей второй степени относительно неизвестного. Учащиеся знакомятся с этим на примере:

$$x^6+64=0,$$

$$(x^2+4)\ (x^4-4x^2+16)=0,$$

$$(x^2+4)\cdot[(x^4+8x^2+16)-12x^2]=0,$$

$$(x^3+4)\cdot[(x^2+4)-(\sqrt{12}\cdot x)^2]=0,$$

$$(x^2+4)\ (x^2-\sqrt{12}x+4)\ (x^2+\sqrt{12}\,x+4)=0.$$

В результате получаются 3 пары мнимых попарно сопряженных корней.

Уравнение называется трехчленным, если оно имеет вид: $ax^{2n}+bx^n+c=0$. При $n=1$ получается квадратное, при $n=2$—биквадратное уравнения. Решение их известно. В школе рассматриваются трехчленные уравнения при $n=3, 4, 6$. Решение их заменой неизвестного сводится к квадратному и двучленным уравнениям.

Отступая от общего условия, что в главе рассматриваются только натуральные показатели степени, учащимся предлагаются и такие трехчленные уравнения, в которых $n=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Соответствующие упражнения предусмотрены задачником.

5. Для решения некоторых видов уравнений высших степеней применяются и другие элементарные способы. Если среди корней уравнения имеются рациональные, то их можно найти. Для этой цели применяются две теоремы.

Теорема 2. Всякий целый корень общего уравнения n-ой степени с целыми коэффициентами является делителем свободного члена.

Дано уравнение

$$ax_0^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (2)$$

коэффициенты которого a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n— целые числа; α—целый корень уравнения (2).

Требуется доказать, что α — делитель a_n.

Подставим в уравнение (2) вместо x число α. Получим равенство:

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}\alpha+a_n=0.$$

Найдем a_n:

$$a_n = -a_0\alpha^n - a_1\alpha^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\alpha$$

или
$$a_n = \alpha(-a_0\alpha^{n-1} - a_1\alpha^{n-2} - \ldots - a_{n-1}).$$

По условию левая часть последнего равенства — целое число. Выражение в скобках — целое число. Значит, правая часть есть произведение двух целых чисел. Следовательно, α — делитель свободного члена a_n.

Примеры: а) Уравнение $2x^2 - 9x + 4 = 0$ имеет корень 4. Этот корень является делителем свободного члена. б) Уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$ имеет корень 2. Он же — делитель свободного члена.

Теорема 3. Приведенное уравнение n-ой степени с целыми коэффициентами не может иметь дробных корней.

Дано приведенное уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (3)$$

коэффициенты которого целые числа.

Требуется доказать, что уравнение (3) не имеет дробных корней.

Применим доказательство от противного. Допустим, что несократимая дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ — корень уравнения (3). Подставляя этот корень в уравнение (3), получим равенство:

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} + \frac{a_1\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \frac{a_2\alpha^{n-2}}{\beta^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}\alpha}{\beta} + a_n = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на β^{n-1} и перенесем все члены, начиная со второго, в правую часть:

$$\frac{\alpha^n}{\beta} = -a_1\alpha^{n-1} - a_2\alpha^{n-2}\beta - \ldots - a_n\beta^{n-1}.$$

Так как по допущению $\frac{\alpha}{\beta}$ — несократимая дробь, то, значит, левая часть полученного равенства — тоже несократимая дробь, а правая — целое число. Рассматриваемое равенство противоречиво.

Следовательно, уравнение (3) не имеет дробных корней.

Покажем применение этих теорем к определению рациональных корней уравнений.

1) Найти рациональные корни уравнения:

$$x^4 - 6x^2 + 7x - 6 = 0.$$

Данное уравнение приведенное. По теореме 3 оно не может иметь дробных корней. Если оно имеет целые корни, то по теореме 2 эти корни — делители свободного члена. Этот член имеет делители: 1, —1, 2, —2, 3, —3, 6, —6.

Путем подстановки в уравнение последовательно испытываем эти числа и находим, что корнями уравнения являются: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. Таким образом, уравнение имеет только два рациональных корня.

2) Определить рациональные корни уравнения

$$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Уравнение неприведенное. Если оно имеет рациональные корни, то они могут быть и целыми и дробными. Преобразуем уравнение в приведенное с целыми коэффициентами. Умножив обе части его на 2^2, произведем замену неизвестного, положив $2x = y$:

$$2^3 x^2 - 2^3 x^2 - 2^3 x + 2^2 = 0,$$

$$y^3 - y^2 - 4y + 4 = 0.$$

Если полученное уравнение имеет рациональные корни, то по теореме 3 эти корни только целые. По теореме 2 эти корни могут принадлежать совокупности чисел: 1, —1,2; —2,4, —4. Испытания чисел относительно уравнения показывает, что $y_1 = 1$ есть корень уравнения. Значит, решаемое уравнение имеет корень $x_1 = \frac{1}{2}$.

Описанным способом находятся рациональные решения еще нескольких уравнений, например,

$$9x^3 + 9x^2 - x - 1 = 0, \quad 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Итак, научились определять рациональные корни. Встает вопрос, нельзя ли найти другие виды корней. Для некоторых уравнений это сделать возможно.

3) Решить уравнение $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Если оно имеет целые корни, то ими могут быть числа: 1 и — 1. Испытание по уравнению показывает, что $x_1 = 1$ — корень.

Многочлен левой части уравнения делится на $x-1$. Выполнив это деление, получим частное x^2+x-1. Можно записать:

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0.$$

Уравнение распадается на два: $x-1=0$, $x^2+x-1=0$. Решение первого из них уже известно. Остается решить второе. Оно имеет два иррациональных корня:

$$x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, все три корня найдены.

4) Решить уравнение $2x^3-9x^2+14x-5=0$.

Умножим обе части уравнения на 2^2:

$$2^3x^3-9\cdot2^2x^2+14\cdot2^2x-5\cdot2^2=0.$$

Подставим вместо $2x$ неизвестное y:

$$y^3-9y^2+28y-20=0.$$

Возможные целые решения последнего уравнения принадлежат совокупности чисел: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20. Испытание этих чисел показывает, что $y_1=2$ является корнем последнего уравнения. Значит, $x_1=\frac{1}{2}$ — корень данного уравнения.

Путем деления левой части данного уравнения на $2x-1$ найдем частное x^2-4x+5.

Приравняв его нулю и решив полученное уравнение, получим еще два корня:

$$x_{2,3}=2\pm i.$$

6. В интересах политехнического обучения уместно применить графические приемы решения некоторых уравнений высших степеней.

Прежде всего рассмотрим графическое решение неполного кубического уравнения, в котором коэффициент при неизвестном во второй степени равен 0.

Требуется решить уравнение $x^3-3x-2=0$.

Перенесем 2-й и 3-й члены в правую часть:

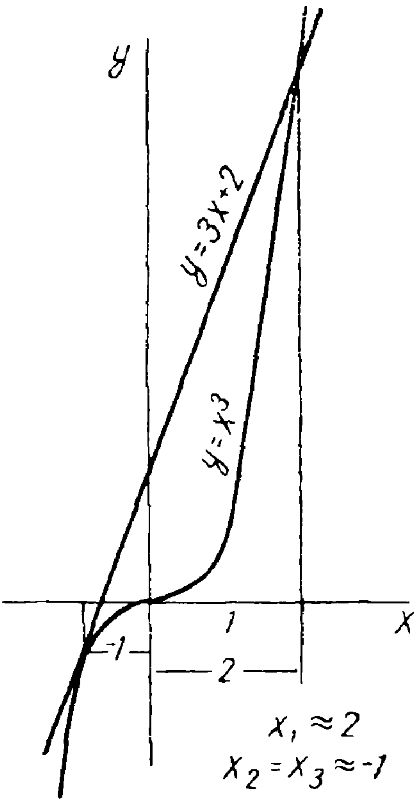
$$x^3=3x+2.$$

Функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, обозначим через y:

$$y = x^3, \quad y = 3x + 2.$$

Строим по точкам график первой функции.

x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 3
y	0	$\pm\frac{1}{8}$	± 1	± 8	± 27



Черт. 18.

График этой функции называют кубической параболой (черт. 18).

На том же чертеже строим график второй функции.

Те значения x, при которых обе рассматриваемые функции принимают равные значения, являются корнями решаемого уравнения. Иначе: абсциссы точек пересечения или касания графиков являются корнями уравнения.

Находим их:

$$x_1 \approx 2, \ x_2 = x_3 \approx -1.$$

При решении серии неполных кубических уравнений, в которых $a_1 = 0$, кубическую параболу вычерчивают один раз. Графическое решение дает только действительные корни.

Применяя тот же график кубической параболы, учащиеся решают следующие уравнения: а) $x^3 - x + 2 = 0$, б) $x^3 + x - 2 = 0$.

При решении уравнения $2x^3 - 2x + 3 = 0$ его можно заменить приведенным уравнением $x^3 - x + 1{,}5 = 0$ и применить тот же график кубической параболы.

Графически можно решить любое кубическое уравнение, при этом приходится пользоваться кубической и обыкновенной параболами. Пусть требуется, например, решить уравнение $2x^3 - 4x^2 - 5 = 0$.

Можно поступить так:

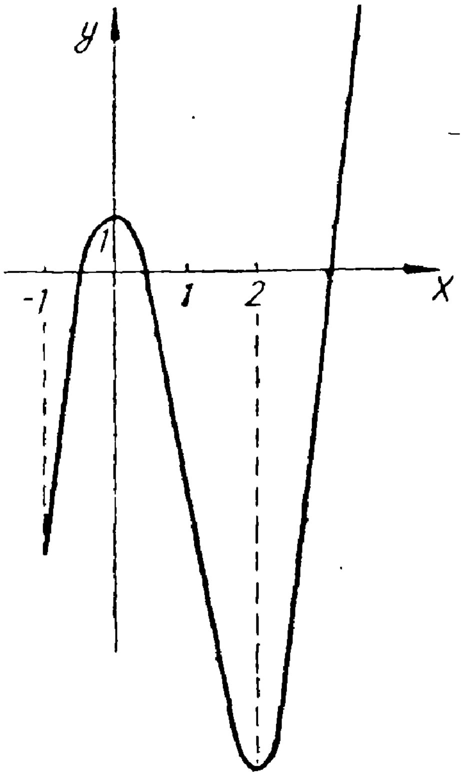
$$x^3 - 2x^2 - 2{,}5 = 0,$$

$$x^3 = 2x^2 + 2{,}5,$$

$$y = x^3, \ y = 2x^2 + 2{,}5.$$

Построив на одном чертеже обе параболы, найдем действительные корни уравнения.

Пользуясь решением уравнений n-ой степени с одним неизвестным, уместно напомнить учащимся общий прием графического решения уравнений. Он заключается в следующем: уравнение приводят к нормальной форме, левую часть его обозначают через y, строят график полученной функции и находят абсциссы точек пересечения графика с осью x-ов. Эти абсциссы и являются, как правило, приближенными значениями корней. Конечно, таким приемом определяются только действительные корни.



Черт. 19.

Пример. $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$,

$$y = 4x^3 - 12x^2 - x + 3.$$

x	-2	-1	0	1	2	4
y	-69	-8	3	-6	-15	127

Строим график функции. Масштаб по оси абсцисс в 2 раза крупнее масштаба по оси ординат (черт. 19).

Находим корни: $x_1 \approx -0{,}5$, $x_2 \approx 0{,}5$, $x_3 \approx 3{,}0$.

Изучение главы заканчивается решением задач, приводящих к уравнениям степеней выше второй. Вот простейшие примеры таких задач:

а) Сумма кубов двух последовательных натуральных чисел равна 91. Найти эти числа.

б) Сумма кубов трех последовательных четных положительных чисел равна 288. Определить эти числа.

в) Частное от деления суммы кубов двух последовательных нечетных положительных чисел на куб предыдущего нечетного числа равно 152. Вычислить эти числа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Васильевич Репьев

ОЧЕРКИ
ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ
АЛГЕБРЫ

Редактор *Е. А. Соколова*
Техн. редактор *Р. Г. Бруликовская*
Корректор *В. М. Плотникова*

Изд. № 3083. Подписано к печати 13/X 1958 г. МЦ 10415 Бумага 84×108[1]/[32]—16,25 (13,325), 12,83 уч.-изд. листов. Тираж 3000 экз. Заказ № 5059.

*

Горьковское книжное издательство, г. Горький, Кремль, 2-й корпус.

*

Типография изд-ва „Горьковская правда", г. Горький, ул. Фигнер, 32.