АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Институт методов обучения

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

И. Н. ШЕВЧЕНКО

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1958

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Академии педагогических наук РСФСР

Книга предназначена для учителей математики начальной и семилетней школы.

В пособии устанавливается преемственность в работе по арифметике в IV и V классах.

Автор умело использует буквенные обозначения, подготовляя учащихся к изучению алгебры. Большое место в книге уделено требованию наглядности и конкретности в обучении.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение дробей, вообще говоря, опирается на те же принципы, что и изучение целых чисел. Нельзя сказать, что в этом отделе больше затруднений, чем при изучении целых чисел. Дело в том, что, конечно, дроби — это числа более усложненные по сравнению с целыми числами, но учащиеся, приступающие к изучению дробей, значительно старше первоклассников, их общее развитие гораздо выше, и, кроме того, у них за плечами четырехлетний опыт и обширный запас знаний по теории целых чисел. Иногда мы просто недооцениваем этот багаж. А ведь сколько здесь изучено правил, сколько проделано упражнений, сколько решено текстовых задач! Важно, чтобы все это было использовано, не лежало мертвым капиталом, постоянно повторялось и освежалось.

Нужно не забывать, что целые числа должны быть опорой и прочным фундаментом при изучении дробных чисел. Дробь можно рассматривать как частное, и это обстоятельство должно служить источником многочисленных сопоставлений и аналогий, конечно, в тех случаях, где последние законны. Частые экскурсы в область целых чисел будут поднимать интерес у учащихся к дробям и дадут им возможность подмечать новое в старом и видеть старое с новой точки зрения.

В процессе преподавания математики мы должны стремиться к пониманию всех и каждого в отдельности положений и моментов рассуждения. К сожалению, это требование не всегда соблюдается. Иногда говорят так: «Решайте, а потом разберетесь». Где же здесь сознательность?

Необходимо также помнить, что обучение математике в пятом классе должно быть не столько логическим, сколько психологическим. Конечно, явные погрешности против логики недопустимы и здесь, но нельзя требовать той высокой степени строгости рассуждений и выводов, какая доступна для ученика старших классов школы. В силу этого в нашем изложении возможно некоторое забегание вперед, недопустимое при строгом изложении предмета.

Поясним сказанное примером. В самом начале изучения дробей полезно сказать о том, что дроби возникают от измерения и деления. Возникновение дробей от измерения не вызывает никаких затруднений и никаких возражений. Но как рассказать о возникновении дробей от деления? Ведь к делению ученики подойдут не скоро, почти в самом конце учения о дробях. И все-таки мы не откладываем этот вопрос до отдаленных времен, пытаемся, насколько возможно, дать детям об этом представление. Как же мы это делаем? Мы заменяем вопрос о делении чисел рассмотрением фактов деления на равные части величин, вещей, предметов. На каком основании это делается? Психологически это можно оправдать тем, что физический акт деления является прототипом абстрактного деления чисел. В силу этого мы говорим о действии деления как источнике возникновения дробей, опираясь на наглядное представление и на личный опыт школьников.

Далее мы хотели бы обратить внимание учителя на пользу, которую он может извлечь из более смелого внедрения в практику изучения дробей буквенных обозначений. Речь идет здесь не о пропедевтике алгебры, не о том, что, вводя буквы еще в арифметике, тем самым можно облегчить первые шаги изучения алгебры, это само собой разумеется. Здесь же речь идет о пользе введения буквенных обозначений для изучения самой арифметики. Конечно, первые моменты появления букв могут быть болезненными, но зато через несколько уроков не замедлит сказаться польза и их благотворное влияние на процесс обучения. Объясним нашу мысль. Формула должна быть сокращенной записью правила или предложения. Ученик, усвоивший некоторое предложение, должен попробовать записать его в виде формулы, и обратно: рассматривая имеющуюся формулу, он должен развернуть ее в целое предложение, т. е. выразить ее словами. Важнейшие формулы должны быть всегда перед глазами ученика; в случае какой-нибудь ошибки ученик должен обращаться к этому верному спутнику своих вычислений.

Исключительно полезной на всех ступенях обучения, и на данной в частности, является геометризация арифметического материала. Это особенно относится к отделу дробных чисел. Если целые числа удобно изучать и иллюстрировать с помощью наглядных пособий, наилучшим из которых являются русские счеты, то дробные числа лучше всего иллюстрировать с помощью простейшей геометрической модели, каковой является отрезок прямой линии. Уже самое первоначальное представление о дроби удобно вызывать с помощью отрезка прямой.

Правда, на самой начальной стадии удобно брать круг и квадрат и рассекать их с помощью подходящих прямых линий, но с каждой новой более высокой ступенькой изучения дробей круг как иллюстрация отодвигается на задний план и доминирующее значение принимает прямолинейный отрезок. Множество вопросов, относящихся к учению о дробях, таких, как сравнение дробей, обращение неправильной дроби в смешанное число, сокращение дробей, приведение дробей к общему знаменателю и т. д., допускает чрезвычайно простое и убедительное геометрическое истолкование с помощью прямолинейного отрезка.

В какой-нибудь момент обучения преподавателю следует побеседовать с учащимися и об «определениях». Когда это сделать? Во всяком случае, не в начальной школе. Но, вероятно, эту беседу нельзя откладывать дальше V класса. В начальной школе, конечно, изучается теория арифметики, сюда входит немало правил, но определения встречаются редко. Очень часто вместо определения ограничиваются показом. Например, когда нужно разъяснить, что такое квадрат, то берут большой чертежный треугольник, прикладывают его к доске и начинают строить прямые углы, затем изображают равные стороны (измеряя их линейкой). И дети видят, что у квадрата все углы равны между собой, потому что каждый из них построен по одной и той же модели и все стороны равны между собой, потому что каждая из них равна, положим 25 *см*. Преподаватель, конечно, постарается разъяснить, что эти углы называются прямыми, что прямые углы встречаются чрезвычайно часто и что получить прямой угол очень легко, достаточно взять какой-нибудь листок бумаги и перегнуть его два раза, сначала вдоль, а потом поперек. Что же касается определения, выраженного словами, то таковое до V класса может не даваться.

Однако дальше откладывать уже опасно. Мы знаем случаи, когда поступающий в высшее учебное заведение не знал, что такое определение. Может быть, это случай единичный, но, безусловно, печальный.

В арифметике V класса встречается уже много определений. Например, определения вычитания, умножения, деления, определения простого числа, наибольшего общего делителя и т. д. Эти определения, конечно, нужно твердо знать.

Но беда в том, что дети часто заучивают их, не понимая. Это совсем не клевета на детей, это факт, подтвержденный многолетним опытом. Есть еще второй факт: дети понимают известное теоретическое положение, но не знают, зачем оно заучивается, и думают, что заучивание — это каприз преподавателя. И, наконец, третий факт: дети иногда слишком привязываются к термину.

Вот три чрезвычайно важных обстоятельства, которые нужно преодолеть.

Первый факт происходит по следующей причине: обучение всякому предмету протекает в определенное время (число часов). Предположим, что за те два часа, которые отведены на эту тему, ученик не усвоил достаточно определения, а заучить его обязательно нужно, потому что учитель спросит. Таким образом, часто заучивается то, что непонятно. Мы считаем, что не нужно давать определение в готовом виде, а нужно, чтобы его вывел ученик.

Второй факт происходит потому, что, как показывает опыт, иногда детям предлагают выучить какое-нибудь определение и держать его в памяти до тех пор, пока его спросят, а если почему-либо не спросят, то так оно и будет лежать мертвым капиталом. Чтобы этого не было, необходимо заставить это определение (или другое теоретическое положение) «работать», т. е. использовать его при работе. Ученик может оценить не ту теорию, которая держится в уме на случай возможного опроса, а ту, которую приходится использовать, которая когда-то и для чего-то полезна.

Третий факт состоит в том, что ученик в первый раз воспринял термин с определенным значением и так свыкается с этим значением, что никак не может связать с этим термином некоторое новое значение. Опыт показывает, что учащиеся, связавшие термин «умножение» с увеличением числа, не понимают, как это умножение ведет к уменьшению, а деление, напротив, может обозначать увеличение. Ученик привык понимать термин «коэффициент» как цифровой сомножитель, стоящий перед буквой, и твердо держится этого понимания. Термин «погрешность», воспринятый первоначально учеником в его «моральном» значении, режет ему слух, когда встречается в математике, и т. д. Это явление довольно типично, и оно исчезает постепенно с повышением культурного уровня ученика и с расширением его кругозора.

Между педагогами нет согласия в отношении того, в какой последовательности следует проходить в школе дроби — обыкновенные раньше, а потом десятичные или наоборот. Но все без исключения педагоги признают, что в IV классе школы должен быть первый концентр ознакомления учащегося с обыкновенными дробями, где формируется первоначальное понятие о дроби, а уже потом мнения разделяются: одни рекомендуют продолжать начатое изучение обыкновенных дробей, а другие рекомендуют оставить их и перейти к десятичным. Мы считаем, что правильно будет углублять формирование понятия обыкновенной дроби на основе уже созданного привычного образа, написания и наименования.

Тема «Обыкновенные дроби» является наиболее трудной в курсе V класса. Трудность эта отчасти проистекает из того обстоятельства, что с вопросами, предшествующими дробям, учащиеся постепенно знакомились (хотя и не полностью) в начальной школе. Что же касается дробей, то здесь для них почти все ново, и если присоединить сюда безусловную усложненность материала, то будет понятно, что здесь от детей требуется несколько большее напряжение их умственных сил.

Мы уже сказали выше, что для облегчения прохождения этого раздела рекомендуется постоянно вспоминать сведения из теории целых чисел и прилагать их к дробям. Это уместно делать, например, при изучении сокращения дробей, проводя параллель между основным свойством дроби и рассмотренным ранее свойством частного — оставаться неизменным при одновременном изменении делимого и делителя. При изучении изменения дробей в связи с изменением их членов тоже полезно связать этот вопрос со знакомым им вопросом изменения частного при изменении делимого и делителя. Таким образом, лучшему усвоению дробей способствует своевременное обращение учеников к теории целых чисел.

Вторым эффективным методическим средством при изучении дробей, как мы сказали выше, является применение геометрических изображений. Они могут быть очень простыми (например, только отрезками), но всегда наглядными и безусловно полезными.

Было время, когда мы воздерживались от теории и придерживались того принципа, что учить нужно «показом», примером. Ученики должны делать так же, как делает учитель. Ученики должны подражать ему. Теперь наступает такое время, когда указанное воздержание может служить тормозом для дальнейшего движения вперед.

Уже такой раздел, как «Делимость чисел», не может быть изучен без вдумчивого размышления над изложенными в нем вопросами. Это и понятно. Часть арифметики, предшествующая делимости чисел, содержит главным образом четыре действия над целыми числами, именно д е й с т в и я. И для изучения этого раздела характерна такая рекомендация: «Делай так, как я делаю». Иначе обстоит дело с делимостью чисел. В этом разделе изучаются некоторые более тонкие с в о й с т в а чисел, понимание которых требует уже напряжения мысли, вдумчивости, размышления. То же самое можно повторить и относительно дробей.

Недаром же в начале курса V класса предлагается повторение. Что представляет собой это повторение? Это просмотр того же материала, но с более высоких позиций. Возьмем для иллюстрации любой вопрос. Уже во II классе ученику может быть предложен такой пример на устное сложение: $25+28=?$ Решение будет, по-видимому, такое:

$$25+28=25+30-2=53.$$

Во II классе такой прием принято называть округлением, но в V классе уже подводится база под это округление. Здесь этот прием ставится в связь с вопросом об изменении суммы при изменении слагаемых.

Трудным вопросом в отделе дробей является «нахождение числа по данной величине его дроби». На этот вопрос преподавателю стоит обратить внимание. Он безусловно связан с другим вопросом: «нахождение дроби данного числа». Авторы учебников излагают эти два вопроса иногда вместе, подряд, а иногда отдельно, помещая второй вопрос перед умножением, а первый перед делением дробей.

Нахождение дроби данного числа вызывает меньше затруднений у учащихся, чем обратный вопрос. Происходит это отчасти потому, что «нахождение дроби» вытекает из решения более естественной задачи. Сама задача — «найти, например, $\frac{3}{10}$ от 200 рублей» — более жизненна и более понятна детям, чем обратная задача. Некоторые учителя математики так привыкают к этим двум задачам, что сами постепенно начинают считать их «равнотрудными». Но это ошибка. В действительности, вторая задача и труднее первой и реже встречается в практике. Простейшей задачей этого типа является такая, в которой нужно найти число только по одной его части (в числителе дроби стоит единица). Вот эта задача: «Сколько у меня денег, если $\frac{1}{8}$ их составляет 10 рублей?» Уже эта коротенькая фраза производит на слушателя впечатление «загадки», потому что сразу видно, что автор знает, сколько у него денег, и почему-то об этом не говорит.

Пусть не думает читатель, что мы хотим исключить такие задачи из школьного обихода. Совсем нет. Может быть, как тренировочная задача она лучше всякой другой, но ее нужно поставить на свое место: ее нужно считать типичной школьной задачей, но не задачей практического характера. Указанная выше задача все же не представляет для детей затруднений, потому что она решается умножением 10 на 8 и, стало быть, относится к разделу целых чисел. Едва ли найдется ученик, который станет решать ее путем деления 10 на $\frac{1}{8}$ хотя, конечно, оба эти решения являются безукоризненными.

Таким образом, известная трудность заключена в самой задаче. Конечно, среди задач, которые на эту тему предлагаются найдутся жизненные и доступные детскому пониманию, но основная масса относится к числу надуманных. Более сложной задачей на ту же тему будет такая: «Чему равно расстояние между двумя пунктами, если $\frac{3}{4}$ этого расстояния равны 24 *км*?» Если она решается в два действия: путем нахождения сначала одной четверти ($24:3=8$), а потом вычисления четырех четвертей ($8\times4=32$), то дети без особых затруднений усваивают смысл этих действий и их последовательность. Но замена этих двух действий одним действием (делением на дробь) воспринимается механически, памятью без достаточного понимания, а потому легко забывается или смешивается с чем-нибудь другим. Было бы недостаточно убедительным сказать, что так как для нахождения части числа мы пользуемся умножением на дробь, то для нахождения целого по дроби мы применяем обратное действие (деление). Это мало убеждает потому, что мы апеллируем здесь к некоторым формальным свойствам действий.

Вполне строгим, с математической точки зрения, было бы еще такое решение. В задаче спрашивается: чему равно расстояние между двумя пунктами, если $\frac{3}{4}$ этого расстояния равны 24 *км*?

Обозначим искомое расстояние буквой x и попробуем найти $\frac{3}{4}$ этого расстояния. Так как дробь числа находится умножением, то можем написать $x\cdot\frac{3}{4}=24$.

Остается найти один из двух сомножителей по произведению и другому сомножителю, т. е.

$$x=24:\frac{3}{4};\qquad x=32.$$

В процессе решения этого простенького уравнения мы действительно пришли к делению целого на дробь, но этот путь покажется удобным и убедительным лишь после того, как учащиеся хотя бы немного ознакомятся с решением уравнений, т. е. когда они поднимутся на одну ступеньку выше.

Задача эта осложняется еще тем обстоятельством, что во многих случаях предлагается найти целое не по его дроби, а по дроби некоторой другой величины, входящей в условие задачи. Примером такой задачи может служить следующая: найти расстояние, пройденное поездом в течение часа, если в $\frac{5}{6}$ часа он проходит 40 *км*. Здесь нужно найти расстояние в километрах, а дробь дается не от расстояния, а от другой величины, от времени. Правда, можно сказать, что существует функциональная зависимость между временем и расстоянием, в силу которой пройденное расстояние пропорционально истекшему времени. Тогда на основании этого мы можем сказать, что за $\frac{5}{6}$ часа поезд прошел $\frac{5}{6}$ всего расстояния, и будем решать некоторую как бы вспомогательную задачу: найти расстояние, пройденное поездом, если $\frac{5}{6}$ этого расстояния составляют 40 *км*.

При решении задачи о поезде можно было бы рассуждать следующим образом. Составим подобную же задачу с целыми числами. Поезд в течение 3 часов прошел 150 *км*. Сколько километров он проходил в час? Каждый ученик догадается, что эта задача решается делением, т. е. что для нахождения скорости поезда нужно пройденное расстояние разделить на время ($150:3=50$ *км*). Ввиду того что предложенные задачи однотипны, так как в каждой из них нужно найти скорость (расстояние в единицу времени) по расстоянию, пройденному за некоторое время, — в первом случае за $\frac{5}{6}$ часа, а во втором случае за 3 часа— они должны решаться одним и тем же действием, т. е. делением. Значит, и первая задача будет решаться делением:

$$40:\frac{5}{6}=\frac{40\cdot 6}{5}=48.$$

Такое рассуждение допустимо, но в нем пропадает идея нахождения числа по данной его дроби. В самом деле, рассуждая подобным образом, мы ни разу не вспомнили, что ищем число по величине его дроби.

Естественно было бы эту задачу решить в два действия, т. е. примерно так, как мы решали выше задачу о расстоянии между двумя пунктами. Сделаем это. Если в $\frac{5}{6}$ часа поезд прошел 40 *км*, то в $\frac{1}{6}$ часа он пройдет в 5 раз меньше, т. е. $40:5=8$, а в час он пройдет в 6 раз больше: $8\times6=48$. После этого нужно будет сказать детям, что здесь выполнено деление на числитель (5) и умножение на знаменатель (6), т. е. как раз те действия, которые производятся при делении числа на дробь и, следовательно, указанные два действия могут быть заменены одним. С одного раза дети этого факта не усвоят. Необходимо повторить об этом несколько десятков раз. Нет оснований обвинять детей в тупости или недостаточной восприимчивости. Виноваты не дети, а задача. В делении числа на дробь не чувствуется идеи нахождения целого. Когда мы делим $6 : \frac{3}{4}$, то мы ищем отношение этих чисел, а не целое. Это отношение равно 8. Если бы мы составили задачу: $\frac{3}{4}$ некоторого числа равны 6, найти число, то, решая ее, мы тоже нашли бы 8. Но требуется многократное повторение аналогичных задач, чтобы ученик, наконец, усвоил, что отношение чисел, данных в задаче, по числовой величине совпадает с искомым числом.

Следует остановиться еще на одной чрезвычайно важной психологической детали. Ученик должен интересоваться своей работой, и работа должна быть предложена ему в занимательной форме.

Об условиях возникновения или возбуждения этого интереса говорили многие педагоги, в частности Л. Н. Толстой в своей «Арифметике» (Москва, 1913, стр. 143, 144) говорит: «Для того, чтобы ученик учился хорошо, нужно, чтобы он учился охотно; для того, чтобы он учился охотно, нужно: 1) чтобы то, чему учат ученика, было понятно и занимательно и 2) чтобы душевные силы его были в самых выгодных условиях.

Чтобы ученику было понятно и занимательно то, чему его учат, избегайте двух крайностей: не говорите ученику о том, чего он не может знать и понять, и не говорите о том, что он знает не хуже, а иногда и лучше учителя... Вообще давайте ученику как можно больше сведений и вызывайте его на наибольшее число наблюдений по всем отраслям знания; но как можно меньше сообщайте ему общих выводов, определений, подразделений и всякой терминологии.

Сообщайте определение, подразделение, правило, название только тогда, когда ученик имеет столько сведений, что сам в состоянии проверить общий вывод, когда общий вывод не затрудняет, а облегчает его.

Другая причина, по которой урок бывает непонятен и незанимателен, заключается в том, что учитель объясняет слишком длинно и сложно то, что ученик давно уже понял. Ученику так просто то, что ему сказали, что он ищет (в сказанном) особенного другого значения, и понимает (сказанное) ошибочно или уж вовсе не понимает...

Объясняйте ученику то, чего он не знает, и то, что вам самим было бы занимательно узнать, если бы вы не знали».

Глава первая

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ДРОБИ

§ 1. О долях единицы

Необходимо заранее представить себе тот путь, который нужно пройти с учениками, чтобы сформировать у них понятие дроби.

Полезно припомнить, как постепенно сложилось у людей понятие о целом числе. Человек рассматривал окружающие его предметы и постепенно научился их считать, т. е. давать им числовые характеристики. Первые шаги в этом направлении были примитивными. Человек отличал число предметов с помощью некоторых простейших приспособлений — зарубок на палке, пучков прутиков и т. д. Затем появляются слова и наконец знаки — цифры.

Все это полезно припомнить учителю при изучении дробных чисел. Понятие о дроби возникает в процессе наблюдения предметов, допускающих деление на части. Таких предметов должно быть достаточно много, и они должны заимствоваться из самых разнообразных областей человеческой практики. Когда таких дробных чисел появится в сознании ученика достаточно много, то возникнет естественная потребность назвать их и записать с помощью знаков. Эта потребность возникнет сама собой, неудобно же, в самом деле, каждую дробь записывать словами.

Значит, образ, слово и символ — это и есть надежная опора, на которой потом будут основаны все последующие рассуждения, относящиеся к дробным числам.

Этот период накопления представлений о дроби можно считать стихийным, так как мы собираем представление о дробях отовсюду, где бы они нам не встретились. Теперь же мы будем стремиться к упорядочению этого процесса. С этой целью поставим вопрос об источнике дробей. Когда появляются дроби? Откуда они возникают?

Математика знает два источника возникновения дробей: измерение и деление. Здесь учащиеся встретятся с очень интересным фактом. Они увидят, что все измерения неизбежно приводят нас к приближенным числам.

Эти числа округляются, и в результате округления возникает либо целое, либо чисто дробное число, либо целое число с дробью (смешанное число). Возникновение дробей от деления также представляет интерес. На первых порах нужно рассматривать фактическое деление на равные части вещей или величин, а затем перейти к делению чисел. Дети должны заметить, что деление без остатка (нацело) есть идеальный случай, который почти никогда не встречается в практике. Только в школьных задачниках в целях облегчения обучения подбираются искусственно такие удобные числа, которые делятся друг на друга без остатка. Жизненная же практика сплошь и рядом вынуждает нас получать либо приближенный целый, либо дробный результат.

До сих пор дроби представляются ученику неупорядоченной массой чисел. А между тем чрезвычайно важно навести порядок в огромном множестве дробных чисел. К сожалению, нет возможности расположить все множество дробей в порядке возрастания его элементов, т. е. так, как мы располагали в свое время целые числа (в натуральный ряд). Мы можем, конечно, расположить в ряд дроби с каким-нибудь определенным знаменателем, например:

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \ldots,$$

но как бы далеко мы ни протянули эту строку, все равно в ней окажется лишь ничтожная часть дробей, потому что между любыми двумя соседними дробями, например между $\frac{1}{10}$ и $\frac{2}{10}$, существует бесчисленное множество дробей, бо́льших $\frac{1}{10}$ и меньших $\frac{2}{10}$. Поэтому нужно поставить другую, более скромную задачу: уметь сравнить любые две данные дроби, т. е. относительно двух данных дробей сказать, какая из них меньше и какая больше.

Рассматривая различные дроби и сравнивая их между собой, мы неизбежно подметим, что все множество дробных чисел распадается на два больших класса. К первому классу относятся все дроби, меньшие единицы (так называемые правильные дроби), а ко второму классу все дроби, равные единице и большие единицы (так называемые неправильные дроби). Последние могут быть записаны особым способом в виде целого числа с дробью (смешанное число).

Это обстоятельство сразу наводит на мысль о необходимости научиться во всех возможных случаях выполнять замену неправильной дроби смешанным числом, если в этом представится надобность, и заменять смешанное число неправильной дробью, когда это почему-либо удобно.

Далее следует центральный вопрос всего этого раздела, вопрос, имеющий первостепенное значение для понимания существа дроби. Речь идет об изменении дроби при изменении ее членов. Этот раздел нуждается в неторопливом и вдумчивом изучении. Завершается он основным свойством дроби, которое лежит в основе таких важнейших преобразований дроби, как сокращение дробей и приведение их к общему знаменателю.

Трудно представить себе школьника V класса, который никогда не встречался с дробью раньше, т. е. до того момента, как учитель в классе стал ему систематически рассказывать о дробях. Ученик 11 лет несколько раз в день слышит из уст старших слова: четверть часа, полкилограмма, третья часть апельсина и т. д. Но он не только слышит эти слова, он видит и изображение дробей в книгах, в журналах, в газетах, на плакатах и т. д. Кроме того, в IV классе ученик проходит, как правило, небольшой концентр обыкновенных дробей. Поэтому учитель, который приступает к изложению дробей в V классе, рассказывает не что-то совершенно новое для детей, а на первых порах упорядочивает и систематизирует знакомое.

Изучение обыкновенных дробей распадается на две части: «Формирование понятия дроби» (Основные понятия) и «Действия над обыкновенными дробями». Формирование понятия дроби начинается с деления на части различных предметов, из которых каждый мы рассматриваем, как целую единицу. Абстрактное понятие дроби, по-видимому, возникло из этого конкретного деления, разламывания, раздробления, разложения. Об этом говорят сами слова: дробь (от дробить), ломаное число (в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого, изд. 1703 г.), немецкое Bruchzahl (от brechen — ломать), французское fraction (от fractionner — раздроблять).

Эту начальную стадию ученик прошел уже несколько лет назад. Еще в дошкольном возрасте ему приходилось разламывать яблоки, пряники и конфеты, резать арбузы, апельсины, лимоны, и уже в то время он неоднократно говорил о половине, о четверти, о трети и о некоторых других долях целого.

Для формирования понятия дроби ее рассматривают с различных сторон, а именно: откуда она возникает, как сравниваются различные дроби между собой, при каких условиях она изменяется и остается без изменения (между прочим, устанавливается, что дробь родственна частному) и т. п.

Эти сведения, чрезвычайно важные для дальнейшего, должны быть изложены в системе. Предыдущий вопрос должен порождать последующий, и последующий должен вытекать из предыдущего. Система, о которой мы говорим, может быть субъективной, и расположение материала у одного учителя может отличаться от расположения его у другого. Это возможно, но нужно, чтобы обдуманная система у учителя была. При этом ученикам необязательно сообщать избранную систему, важно, чтобы учитель ее наметил и ей следовал.

Сначала должен быть некоторый период, соответствующий нумерации. Здесь нужно избегать вербализма. Не нужно только говорить, что если мы возьмем яблоко и разрежем его пополам или если мы возьмем отрезок и разделим его на три равные части, то... а нужно взять настоящее яблоко и настоящий отрезок и проделать с ними то, что требуется. Заблуждается тот, кто говорит, что, так как дети знают, каким образом получаются половина, четверть, треть, то нет надобности этого касаться.

Первые опыты могут быть грубыми: берется яблоко и разламывается на две равные части, в каждой руке будет половина яблока; берется стакан, наполненный водой, и половина воды выливается в цветочную банку, значит, в стакане остается полстакана воды.

Затем можно взять единицы измерения: грамм, сантиметр, миллиметр, дециметр, метр и указать, какими долями они являются от других единиц измерения. Например, сантиметр — одна десятая дециметра, миллиметр — одна десятая сантиметра и т. д.

Далее следует перейти к геометрическим образам: взять квадрат и разделить его пополам диагональю или

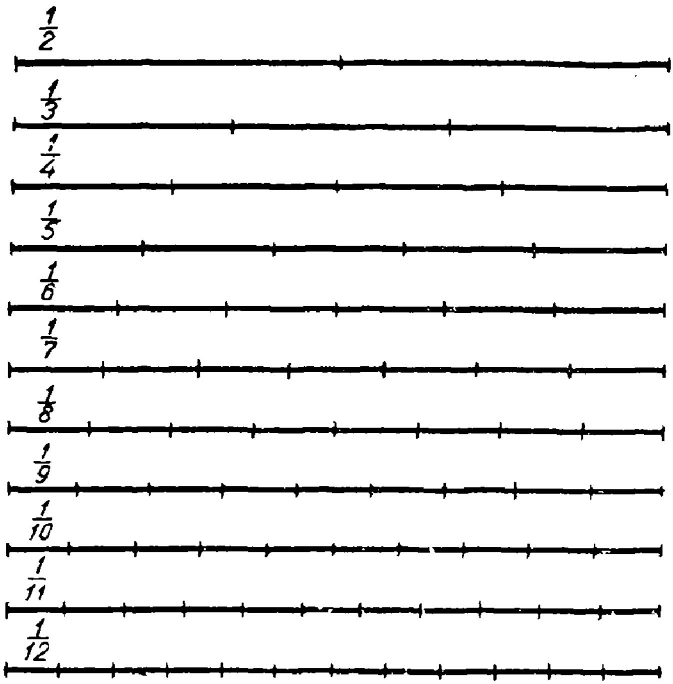


Рис. 1

прямой, проходящей через середины противоположных сторон, разделить его на четыре части двумя диагоналями или двумя прямыми, проходящими через середины противоположных сторон. Взять круг и разделить его диаметром пополам, двумя взаимно-перпендикулярными диаметрами на четыре части и т. д.

Наконец, нужно перейти к иллюстрации долей с помощью отрезков.

Когда мы разламывали на две части яблоко или резали арбуз, то это разделение имело целью произвести наиболее сильное впечатление на глаз ученика, и в этом смысле этот первый опыт имеет значение, но, после того как мы проделали этот опыт несколько раз, нужно признать его уже сыгравшим свою роль и оставить. (Если бы, например, после разламывания яблока на две части положить эти части на чашки хороших весов, то равновесия не получилось бы.)

Для демонстрации всевозможных дробей отрезок является наиболее совершенной моделью и в смысле простоты и в смысле точности построения. Число дробей безгранично, поэтому достаточно проиллюстрировать только несколько дробей с однозначным и двузначным знаменателями. Рекомендуем ученикам тщательно воспроизвести чертеж, который здесь предлагается (рис. 1). Польза такого чертежа многообразна. Во-первых, ученик тщательно построит 11 отрезков, во-вторых, по указанию учителя он старательно разделит их на необходимое число равных частей, в-третьих, он воспримет на глаз величину каждой из получившихся долей и, в-четвертых, он заметит, что по мере увеличения знаменателя доли неограниченно уменьшаются. Так как в этот момент ученики могут еще не знать изображения дробей и наименований членов дроби, то названия долей можно писать словами.

§ 2. Изображение дробей

Для того чтобы формирование понятия дроби протекало успешнее, необходимо после первого ознакомления с дробью научиться изображению дробей. Писать дроби словами неудобно, воспринимать их наименования на слух недостаточно. Когда же дети начинают изображать дроби цифрами, то в этом изображении они находят незаменимую

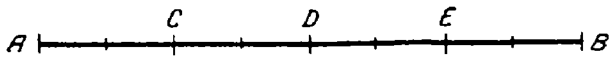


Рис. 2

опору и для восприятия дробей и для действий над ними Дробь есть число, и, как всякое число, она должна быть записана цифрами. Как это сделать?

Берется отрезок, принятый за единицу, и делится, по ложим, на четыре равные части (рис. 2).

Учащиеся рассматривают отрезок AB (образ) и говорят: отрезок AC составляет одну четверть отрезка AB, принятого за единицу. Это пишется так — $\frac{1}{4}$. Единица (1) называется числителем, 4 — знаменателем. Итак, образ, написание и слово должны взаимно порождать друг друга. После этого берется отрезок AD и указывается, что он равен двум четвертям отрезка AB. Пишется так — $\frac{2}{4}$. Затем рассматривается отрезок AE и указывается, что он равен трем четвертям AB. Записываем так — $\frac{3}{4}$. Наконец, берется весь отрезок AB (он был принят за единицу).

Рассматривая этот пример, мы последовательно переходили от образа (отрезок) к слову (название дроби) и к написанию (изображению дроби).

Затем полезно предложить ученикам последовательно перейти от образа к написанию и потом к слову (отрезок, изображение дроби и, наконец, наименование). Например,

Рис. 3

отрезок MN разделен на 8 равных частей (рис. 3). Как охарактеризовать отрезок MO? $MO = \frac{3}{8}$ отрезка MN.

После этого можно предложить ученику проделать путь от слова к написанию и образу. Преподаватель называет дробь $\frac{5}{9}$ и предлагает сначала ее записать, а потом сделать иллюстративный чертеж.

Такую процедуру следует проделать несколько раз, с разными учениками, на разных отрезках и при различной величине дробей.

Мы указали не все возможные здесь случаи, но это не значит, что мы их исключаем. Напротив, мы советуем выполнить и остальные три задания, т. е.

Слово $\longrightarrow$ образ $\longrightarrow$ написание.

Написание $\longrightarrow$ образ $\longrightarrow$ слово.

Написание $\longrightarrow$ слово $\longrightarrow$ образ.

Во всех случаях необходимо добиться свободы, скорости и уверенности.

Здесь вводится терминология: числитель, знаменатель члены дробей, смешанное число. Относительно терминологии учителем могут быть сделаны некоторые замечания Термины «числитель» и «знаменатель» встречаются еще в «Арифметике» Магницкого, поэтому к ним нельзя относиться строго с точки зрения современного русского языка. Термин «числитель» более близок к современности Термин «знаменатель» происходит от устарелого слова «знаменовать», т. е. означать, свидетельствовать о чем-либо. Термин «смешанное число» произносится именно как смешанное число, а не смешанная дробь. Этим термином подчеркивается соединение «смешение» в одном символе целого числа и дроби.

О том, что обозначают числитель и знаменатель, нужно несколько раз сказать при изображении дробей отрезками и записывании их цифрами.

Здесь же нужно сказать о чтении дробей. Указывается общая норма: числитель читается как целое количественное число в именительном падеже, знаменатель читается как порядковое число в родительном падеже множественного числа, например пять шестых. Затем указываются некоторые основные случаи, а именно: половина вместо одной второй, треть, четверть, две трети (числитель в женском роде, знаменатель в единственном числе), три четверти (знаменатель в единственном числе), но если имеется пять четвертей, то знаменатель употребляется во множественном числе; кроме того, иногда читается и по общему правилу: пять четвертых.

Так как мы уже упомянули о смешанном числе, то нужно среди записываемых чисел предлагать и смешанные числа. Берем отрезок AB, равный, положим, двум каким-нибудь линейным единицам, и затем справа «пристраиваем» к нему отрезок BC, равный $\frac{3}{4}$.

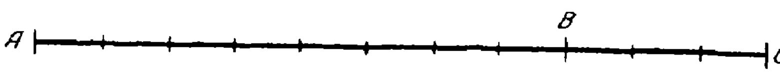


Рис. 4

той же единицы (рис. 4). Полученный отрезок AC записывается с помощью смешанного числа $2\frac{3}{4}$. После этого нужно еще взять несколько отрезков и записать соответствующие им смешанные числа.

Говорить о том, что $2\frac{3}{4}$ есть сумма числа 2 и дроби $\frac{3}{4}$, пока нет надобности, но если этот вопрос возникнет помимо воли преподавателя, то можно указать, что это есть сумма. Не следует бояться забегания вперед, стремясь к мнимой строгости изложения.

При разработке этого параграфа ученики часто будут писать дроби на слух с голоса преподавателя. Во избежание ошибок требуется отчетливое и выразительное чтение членов дроби, иначе неизбежны ошибки, особенно при написании дробей с большими числителем и знаменателем. В самом деле, если я читаю без паузы такую дробь: тысяча двести тридцать пятых, то на основании этого можно записать не одну единственную, а несколько дробей:

$$\frac{1000}{235}, \frac{1200}{35}, \frac{1230}{5}.$$

§ 3. Возникновение дробей

Откуда возникают дроби? Каковы те факты, которые заставляют нас ввести дробные числа? Эти вопросы должны быть неторопливо рассмотрены с учащимися, и их рассмотрение будет иметь воспитательное значение для учащихся. Учителю необходимо иметь метровую линейку или ленту для измерения. Кроме того, нужно заранее подобрать несколько предметов в классе, к которым удобно подойти (приблизиться), чтобы их измерить. Можно принести в класс несколько предметов и предложить ученикам их измерить: карандаш, книга, перо, ящик, листы бумаги, куски дерева и стекла и т. д. Выполняя эти измерения, дети увидят, что все измерения бывают неизбежно приближенными.

Предметы для измерения можно подобрать так, чтобы в результате измерения получились примерно такие дроби:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{3}{5}.$$

Так как учащиеся знакомы не только с длиной, но и с другими величинами, то полезно образовать дроби и от других величин. В первую очередь можно рассматривать вес.

Хорошо было бы иметь в классе весы с большим числом разнообразных гирек. Это дало бы возможность продемонстрировать соотношения между килограммом и некоторыми его частями, такими, как

$$\frac{1}{2}\text{кг},\ \frac{1}{4}\text{кг},\ \frac{3}{4}\text{кг},\ \frac{1}{5}\text{кг},\ \frac{2}{5}\text{кг},\ \frac{3}{5}\text{кг},\ \frac{1}{10}\text{кг}\ \text{и т. д.}$$

Интересно рассмотреть и бо́льшие единицы измерения веса, такие, как центнер и тонна. К сожалению, такие единицы нельзя продемонстрировать в классной обстановке, но преподаватель может обратиться к иллюстративным чертежам.

Остановимся еще на таких величинах, как время и деньги.

Время. Здесь можно рассмотреть такие случаи: 6 месяцев составляют полгода (снова следует обратить внимание на приближенный характер такого подразделения), 4 месяца составляют третью часть года, а 3 месяца — четвертую часть года (квартал). Если принимать месяц за 30 дней, то 15 дней составят половину месяца, 10 дней — треть месяца. 12 часов составляют половину суток, 15 минут — четверть часа и т. д. Вообще «время» дает обильный материал для образования разнообразных дробей.

Деньги. Рубль содержит 100 копеек, поэтому 1 копейка составляет одну сотую рубля, 2 копейки — 2 сотых и т. д. 10 копеек можно рассматривать, как 10 сотых, или как одну десятую. Ученики еще не имеют представления о сокращении, но не будет вреда в том, если они поймут, что одна величина выражается двумя дробями, которые равны между собой.

Относительно получения дробей от деления мы уже кратко заметили во введении, что говорить здесь об этом преждевременно до тех пор, пока не будет изучено действие деления. В этом смысле и высказываются некоторые методисты. Однако мы считаем полезным и даже необходимым на этом остановиться, но мы подойдем к этому вопросу наглядным, если угодно, опытным путем. Мы будем говорить о возникновении дробей не от деления чисел (это следующая, более высокая ступень), а от деления вещей, предметов, допускающих разделение. Можно ли это делать? Это нужно делать потому, что в этом месте имеется в виду наглядная концепция дроби. Здесь речь идет о возникновении дроби из некоторой конкретной реальности. (Это первое ознакомление.)

Здесь полезно припомнить, как в первый раз 7—8-летние дети знакомятся с действием деления.

Учитель берет, положим, 30 яблок и говорит: «Я хочу разделить эти яблоки между пятью учениками. Сколько яблок достанется каждому?» Затем он начинает откладывать по одному яблоку и говорит: «Это Коле, это Васе» и т. д. Затем он начинает откладывать по второму, по третьему и т. д. яблоку и делает так до тех пор, пока в куче из 30 яблок не останется ни одного. Вместо кучи из 30 яблок у него образовалось пять меньших кучек по 6 яблок в каждой. Такое опытное, фактическое деление вещей должно дать наглядное представление об абстрактном делении чисел.

Ученики стали старше, и они могут решать несколько более сложные задачи. Пусть у нас яблок меньше, чем детей, например яблок 3, а детей 4, и требуется разделить эти яблоки поровну между детьми. Очевидно, что по ц е л о м у яблоку дети не получат, а каждому из них достанется лишь некоторая часть яблока. Как эту часть найти? Можно поступить так. Каждое из двух яблок разрезать пополам и дать каждому мальчику по половине яблока. Затем взять оставшееся третье яблоко и разрезать его на четыре равные части. После этого нужно каждому ученику добавить еще по одной четверти яблока. Сколько всего пришлось каждому ученику? На этот вопрос ответить трудно, потому что здесь нужно сложить $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, а дети еще не знают сложения дробей. Чтобы довести задачу до конца нужно апеллировать к наглядности и здравому смыслу. На отрезках или на кружочках нетрудно показать, что в половине $\frac{2}{4}$ и, значит, сложить $\frac{1}{2}$ с $\frac{1}{4}$ это все равно, что сложить $\frac{2}{4}$ с $\frac{1}{4}$, — вместе получится $\frac{3}{4}$. Итак, мы разделим 3 яблока между 4 мальчиками, и каждый получил по $\frac{3}{4}$ яблока.

Деление вещей привело к появлению дробного числа. С течением времени эта задача будет облечена в отвлеченную форму: число 3 разделить на число 4 — в частном получается дробь $\frac{3}{4}$.

Мы пытались показать происхождение дробей от деления и для этой цели брали некоторые конкретные предметы (дискретные множества). Помимо этого, можно говорить о делимости величин. Рассмотрим, например, площадь. Изобразим квадрат с произвольной стороной и разделим его на две части или диагональю, или прямой, проходящей через середины противоположных сторон. Запишем в виде дробей полученные результаты. Изобразим несколько различных прямоугольников, разделим один из них пополам (хотя бы диагональю), другой — на три равные части, третий — на четыре и т. д., и все эти части обозначим дробями.

Аналогично можно рассмотреть деление на части объемов. Существуют деревянные шары, которые хорошо расщепляются на две равные части. Можно изготовить деревянную модель куба, которая допускала бы разделение на 2, на 4 и на 8 равных частей.

§ 4. Сравнение дробей по величине

Когда вводятся новые числа, то всегда возникает вопрос об их сравнении. Целые числа тоже нуждаются в сравнении. О них мы говорим, что из двух целых чисел то больше, которое в натуральном ряде стоит правее.

Начинать сравнение дробей можно так: возьмем два равных между собой отрезка AB и MN, значит, у нас $AB=MN$ (рис. 5). Пусть длина каждого из них равна, положим, одному дециметру.

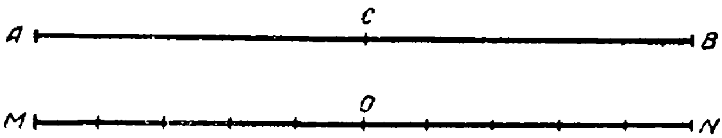


Рис 5

Разделим первый из них (AB) на две равные части ($AC=CB$), тогда каждый из отрезков AC и CB будет равен $\frac{1}{2}$ отрезка AB. Разделим второй отрезок (MN) на 10 равных частей, тогда каждый из отрезков MO и ON будет равен $\frac{5}{10}$ отрезка MN. Отрезки AC и MO равны между собой, значит, и числа, которыми они измеряются, равны между собой, т. е.

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}.$$

Две дроби равны между собой, несмотря на то, что у них различны числители и знаменатели. Равенство их очевидно, так как первая дробь получается из второй путем сокращения на 5, но учащиеся еще не знают сокращения, поэтому об этом нельзя с ними говорить.

В данный момент особенно важно обратить внимание учащихся на то, что многие дроби изображаются (пишутся) по-разному, но равны между собой по величине.

Можно предупредить учащихся, что о равенстве $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{10}$ мы могли бы говорить, приведя эти дроби к общему знаменателю, т. е. выразив первую дробь в 10-х долях, но пока этого делать не стоит, а следует заняться сравнением дробей в том виде, в каком они даются.

Вообще сравнение дробей представляет собой ценный материал для размышления и для понимания дробей. Для того чтобы судить о степени понимания детьми этого вопроса полезно предлагать им пары дробей для сравнения без приведения их к общему знаменателю.

1. Какая из дробей больше $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$?

Возьмем рисунок (рис. 6).

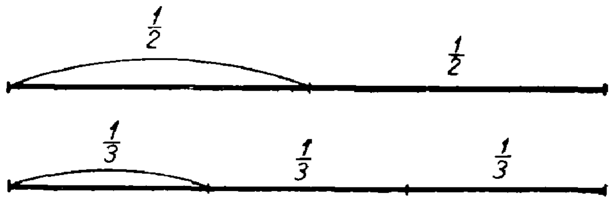


Рис. 6

Даны два разных между собой отрезка. Первый разделен на две, а второй на три равные части. Рисунок показывает, что $\frac{1}{2}$ больше $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{2} > \frac{1}{3}\right)$.

Значит, в данном случае дробь с меньшим знаменателем больше, чем дробь с бо́льшим знаменателем.

К этому выводу можно было бы прийти и без чертежа, путем рассуждения. В первом случае единица разделена на 2 равные части, а во втором случае та же единица разделена на 3 равные части; очевидно, что первые части должны быть более крупными, а вторые более мелкими: значит, $\frac{1}{2}$ больше $\frac{1}{3}$.

Мы брали две дроби с числителями, равными едини це. Теперь нужно взять две дроби с числителями, равны ми какому-нибудь другому числу, например $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{8}$. Чтобы их сравнить, воспользуемся чертежом. Возьмем два равных отрезка AB и MN (рис. 7). Разделим пер

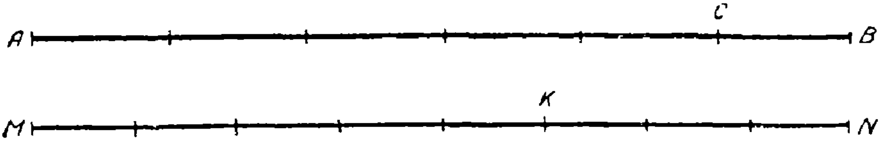


Рис. 7

вый отрезок на 6 равных частей и возьмем 5 таких ча стей, это будет отрезок AC, он равен $\frac{5}{6}$ AB. Раздели второй отрезок на 8 равных частей и возьмем тоже 5 таких частей, это будет отрезок MK, он равен $\frac{5}{8}$ от резка MN. Из чертежа видно, что отрезок AC больш отрезка MK:

$$AC > MK, \text{ значит,}$$
$$\frac{5}{6} > \frac{5}{8}.$$

Этот факт можно понять и без чертежа. Шестые до ли крупнее восьмых долей, значит, 5 более крупных до лей больше, чем 5 мелких долей.

Значит, из двух дробей с одинаковыми числителями та дробь больше, у которой знаменатель меньше.

2. После этого переходим к сравнению дробей с оди наковыми знаменателями. Этот вопрос проще предыду щего. Сравним дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$. Возьмем отрезок AB разделим его на 8 равных частей (рис. 8).

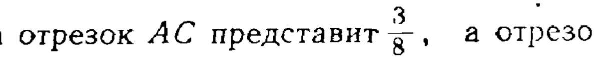


Рис. 8

Тогда отрезок AC представит $\frac{3}{8}$, а отрезок AD — от AB. Очевидно, что AC меньше AD; поэтому

$$\frac{3}{8} < \frac{5}{8} \text{ и } \frac{5}{8} > \frac{3}{8}.$$

При рассмотрении этого случая очень важно отчетливо произносить названия дробей, делая акцент на числителях: т р и восьмых меньше п я т и восьмых.

Конечно, необходимо оттенить тот факт, что у обеих дробей доли одинаковые, поэтому главную роль играет число долей. Значит, первая дробь ($\frac{3}{8}$) меньше второй ($\frac{5}{8}$), потому что у нее ч и с л о долей меньше.

Следовательно, из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой числитель больше.

3. Остановимся на сравнении дробей с разными числителями и знаменателями. В этом случае лучше всего привести дроби к общему знаменателю, но очень полезно для развития учащихся сравнить несколько пар дробей, не приводя их к общему знаменателю. Возьмем дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ и ответим на вопрос, какая из них больше. Начнем с чертежа. Построим два равных отрезка AB и MN (рис. 9).

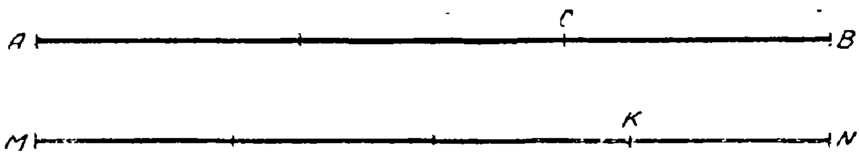


Рис. 9

Разделим AB на 3 равные части и выделим таких частей 2; разделим MN на 4 равные части и выделим таких частей 3. Из чертежа видно, что AC меньше MK, значит, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Можно рассуждать так: сравним каждую из данных дробей с единицей, дробь $\frac{2}{3}$ меньше 1 на $\frac{1}{3}$, а дробь $\frac{3}{4}$ меньше 1 на $\frac{1}{4}$. Одна треть, как мы уже знаем, больше одной четверти. Значит, у первой дроби больше недостает до единицы, чем у второй, и, значит, сама она меньше, чем вторая.

Полезно предлагать учащимся вопросы такого типа: «Какая из дробей больше $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, если a больше b?»

§ 5. Дроби правильные и неправильные. Смешанные числа

Рекомендуется взять отрезок, равный, например, какимнибудь двум линейным единицам, изобразить его на доске и в тетрадях, разделить каждый единичный отрезок на 10 равных частей и рассмотреть последовательно все части, на которые разделены эти отрезки (рис. 10).

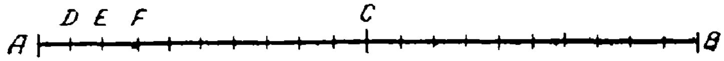


Рис. 10

Каждую часть нужно записать в виде дроби и назвать словами. Таким образом, получаем:

$$AC=1,\ CB=1,\ AD=\frac{1}{10},\ AE=\frac{2}{10},\ AF=\frac{3}{10}$$

и так далее до конца. Значит, у нас получаются, кроме написанных, следующие дроби:

$$\frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, \frac{14}{10}, \frac{15}{10}, \frac{16}{10}, \frac{17}{10}, \frac{18}{10}, \frac{19}{10}, \frac{20}{10}.$$

Затем нужно сначала выписать первые 9 дробей, у каждой из них числитель меньше знаменателя. Потом отдельно выписать дробь $\frac{10}{10}$, у которой числитель равен знаменателю и, наконец, отдельно выписать последние 10 дробей, у которых числитель больше знаменателя. Дроби первой группы называются правильными, дроби второй и третьей групп — неправильными.

Дети не должны воспринимать термин «неправильная дробь» как какой-то недостаток для дроби, точно так же и термин «правильная дробь» как подчеркивание каких-то достоинств этой дроби.

Эти названия нужно понимать в том самом обыкновенном смысле, что правильная дробь есть дробь, меньшая единицы, а неправильная дробь есть дробь, равная единице или большая единицы. Эти мысли нужно записать в виде неравенств и равенства, т. е.

$$\frac{1}{10}<1, \frac{2}{10}<1, \ldots \frac{10}{10}=1, \frac{11}{10}>1, \frac{12}{10}>1, \ldots$$

Затем возникает вопрос о том, что все неправильные дроби допускают второе написание, а именно: из чертежа видно, что

$$\frac{10}{10}=1, \text{ а } \frac{11}{10}=1\frac{1}{10}, \ \frac{12}{10}=1\frac{2}{10}$$

и т. д. У нас снова возникли смешанные числа, о которых уже два раза упоминалось в первых параграфах учения о дробях.

В данном случае мы заменяли неправильную дробь смешанным числом, опираясь на чертеж. Поэтому мы рекомендуем выполнить еще один чертеж с иным подразделением на части и снова проделать все прежние операции от начала до конца. Если учащиеся научатся безошибочно делать это по чертежу, то тогда нужно поставить перед ними две обратные задачи. Первая — обратить неправильную дробь в смешанное число и вторая, обратная ей, — обратить смешанное число в неправильную дробь. Об этом мы расскажем в следующем параграфе.

К изложенному прибавим еще следующее. При определении правильной и неправильной дроби должен быть указан и внешний признак их, что у правильной дроби числитель меньше знаменателя, а у неправильной дроби числитель или равен знаменателю или больше его.

После того как ученики схватили основную идею этого параграфа, необходимо предложить им самостоятельно написать три строчки дробей на доске и в тетрадях. В первой строке будет, положим, 10 дробей, у которых числитель меньше знаменателя (правильные дроби). Во второй строке столько же дробей с числителями, равными знаменателю (неправильные дроби). В третьей строке столько же дробей с числителями, большими знаменателей (неправильные дроби). Некоторые из этих дробей по указанию учеников можно проиллюстрировать с помощью чертежа.

§ 6. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование

1. Займемся обращением неправильной дроби в смешанное число. Сначала нужно выяснить целесообразность этого преобразования. Для какой цели это преобразование выполняется. Напишем несколько чисел:

$$\frac{11}{2}, \frac{57}{10}, \frac{169}{30}, \frac{331}{60}, \frac{541}{100}.$$

Сразу возникает такая мысль, что подобные числа очень редко встречаются в жизни и с первого взгляда трудно сказать большие это числа или маленькие. Нетрудно видеть, что каждое из этих чисел представляет собой неправильную дробь, т. е. содержит в себе какое-то число целых единиц, и если бы число этих единиц в каждом отдельном случае было выявлено, то эти числа были бы для нас гораздо ближе и легче было бы судить об их величине. Неправильные дроби чаще всего возникают в процессе каких-нибудь вычислений и играют, так сказать, промежуточную роль, но как только вычисление окончено и если оно привело к неправильной дроби, то ее сейчас же обращают в смешанное число. Вот почему необходимо уметь обращать неправильные дроби в смешанные числа. Как это делается?

Возьмем дробь $\frac{11}{2}$ и поставим вопрос, сколько в ней целых единиц? Вероятно, ученик будет исходить из той простой мысли, что в одной единице половин две, и если мы будем постепенно брать по две половины, то не только дойдем до 11 половин, но даже перешагнем их. Фактически это будет так: две половины дают единицу, единица и еще две половины дают два, два и еще две половины дают три, три и еще две половины дают четыре, четыре и еще две половины дают пять. Мы уже исчерпали 10 половин, остается одна 11-я половина, для которой нет пары. Значит, у нас получилось 5 целых единиц и одна $\frac{1}{2}$ единицы, т. е. смешанное число $5\frac{1}{2}$. На чертеже это можно было бы изобразить так (рис. 11):

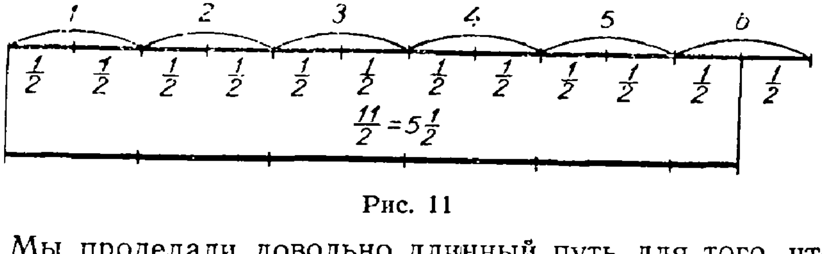


Рис. 11

Мы проделали довольно длинный путь для того, чтобы установить, что $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$. Обычно это делается гораздо короче. Требуется сообразить, сколько пар половин содержится в 11. Для этого 11 нужно разделить на 2, получится 5 и 1 в остатке.

Принимая это во внимание, рассмотрим остальные случаи:

$$\frac{57}{10} = ?\ 57:10 = 5\ (7\ \text{ост.}),\ \text{след.}\ \frac{57}{10} = 5\frac{7}{10}.$$

$$\frac{169}{30} = ?\ 169:30 = 5\ (19\ \text{ост.}),\ \text{след.}\ \frac{169}{30} = 5\frac{19}{30}.$$

$$\frac{331}{60} = ?\ 331:60 = 5\ (31\ \text{ост.}),\ \text{след.}\ \frac{331}{60} = 5\frac{31}{60}.$$

$$\frac{541}{100} = ?\ 541:100 = 5\ (41\ \text{ост.}),\ \text{след.}\ \frac{541}{100} = 5\frac{41}{100}.$$

Мы обратили пять неправильных дробей в смешанные числа. Интересно отметить, что все эти пять дробей очень близки между собой по величине, каждая из них оказалась большей 5 и меньшей 6.

После этого следует предложить учащимся сформулировать правило обращения неправильной дроби в смешанное число и затем решить несколько примеров по выбору учащихся. Подчеркнуть, что преобразование называется исключением целого числа из неправильной дроби.

Перейдем теперь к обратному преобразованию, т. е. к обращению смешанного числа в неправильную дробь. Такое преобразование тоже часто приходится выполнять в процессе решения различных задач.

Возьмем смешанное число $1\frac{1}{2}$ и подумаем, как представить его в виде неправильной дроби. В этих случаях никогда не нужно задумываться о том, какой у нас будет знаменатель, он нам уже дан — это число 2. Значит, вопрос ставится так: как заменить смешанное число $1\frac{1}{2}$ неправильной дробью со знаменателем 2? Единица (1) равняется $\frac{2}{2}$ да еще имеется $\frac{1}{2}$, значит, всего будет $\frac{3}{2}$. Итак,

$$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Обратим в неправильную дробь смешанное число $3\frac{3}{4}$.

Задача состоит в том, чтобы смешанное число $3\frac{3}{4}$ написать в виде неправильной дроби со знаменателем 4. Можно и здесь обратиться к помощи чертежа. Для этого построим отрезок AB, равный $\frac{3}{4}$ какой-нибудь единицы (рис. 12).

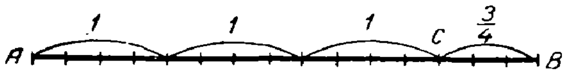


Рис. 12

Подсчитаем, сколько в нем четвертей. В нем 15 четвертей. Как это проще подсчитать? Нужно число четвертей в каждом отрезке умножить на число отрезков, т. е. на 3, и потом прибавить число четвертей в отрезке CB. Получим

$$\frac{4\times 3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}.$$

Как нужно рассуждать, не обращаясь к чертежу? Каждая целая единица содержит четыре четверти, а 3 единицы будут содержать в три раза больше четвертых долей. Значит, в 3 целых единицах содержится 12 четвертей, да в дробной части смешанного числа имеется еще 3 четверти. Итого в $3\frac{3}{4}$ содержится $\frac{15}{4}$ долей. Следовательно, $3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$.

После этого ученики формулируют правило обращения смешанного числа в неправильную дробь.

§ 7. Обращение целого числа в неправильную дробь

Всякое целое число может быть написано в виде неправильной дроби с любым знаменателем.

Для чего это нужно? Это бывает иногда полезно при выполнении вычислений, когда почти все числа, кроме немногих, выражены дробями, тогда и эти немногие целые числа удобно записать в виде дробей.

Рассмотрим этот вопрос последовательно.

Прежде всего у всякого целого числа можно в качестве знаменателя подразумевать единицу, т. е.

$$1=\frac{1}{1},\quad 2=\frac{2}{1},\quad 3=\frac{3}{1},\quad 4=\frac{4}{1},\quad 5=\frac{5}{1} \text{ и т. д.}$$

Но это случай тривиальный. Рассмотрим более сложные случаи.

Попробуем написать единицу (1) в виде дроби с знаменателем 2. Мы знаем, что дробь равна единице том случае, когда ее числитель равен знаменателю, а так как в качестве знаменателя нам предложено 2, то, очевидно, и числителем должно быть число 2, т. е.

$$1 = \frac{2}{2}.$$

Таким же образом мы можем записать единицу в виде неправильной дроби с любым другим знаменателем, а именно:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8}\dots$$

Но это частный случай, из которого еще не вытекает общего правила для написания всякого числа в виде неправильной дроби с любым знаменателем.

Напишем теперь число 2 со знаменателями 1, 2, 3... Как написать число 2 со знаменателем 1, мы уже знаем. Для этого нужно в числителе написать число 2, а в знаменателе единицу (1), получится

$$2 = \frac{2}{1}.$$

Напишем число 2 со знаменателем 2. Будем рассуждать так: нам нужно написать число 2 в виде дроби со знаменателем 2, т. е. задача имеет вид:

$$2 = \frac{x}{2}.$$

Чему равен x? Очевидно, x есть такое число, которое от деления на 2 дает в частном 2. Значит, $x=4$, т. е.

$$2 = \frac{4}{2}.$$

Напишем по этому образцу число 2 со знаменателем 3:

$$2 = \frac{x}{3};\ x = 6,$$

следовательно,

$$2 = \frac{6}{3}.$$

Таким образом, мы можем написать следующее:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}\dots$$

Как же обратить целое число в неправильную дробь с каким-нибудь знаменателем? Пусть требуется, например, число 5 обратить в неправильную дробь со знаменателем 6. Будем рассуждать так: в одной единице заключается шесть шестых долей, а в 5 единицах этих долей будет в 5 раз больше, т. е. $6 \times 5 = 30$ шестых долей. Это можно записать так: $5 = \frac{6 \cdot 5}{6} = \frac{30}{6}$.

Таким же точно образом можно число 5 выразить и в каких-нибудь других долях, например,

$$5 = \frac{4 \cdot 5}{4} = \frac{20}{4}; \quad 5 = \frac{10 \cdot 5}{10} = \frac{50}{10};$$

$$5 = \frac{8 \cdot 5}{8} = \frac{40}{8}; \quad 5 = \frac{12 \cdot 5}{12} = \frac{60}{12}.$$

После этого учащиеся выведут правило обращения целого числа в неправильную дробь.

§ 8. Изменение величины дроби с изменением ее членов

Этот вопрос вызывает споры. Некоторые педагоги заявляют, что место этого параграфа среди действий над дробями. Мы излагаем этот вопрос в общей части и считаем, что если ученик хорошо усвоит относящиеся сюда положения, то ему гораздо легче будет продвигаться вперед. Мы рекомендуем с исключительным вниманием изучить этот параграф.

1-й вопрос. Учитель берет какую-нибудь дробь, например $\frac{1}{12}$, и предлагает ученику изменить ее, увеличивая числитель. Ученик увеличивает числитель дроби в 2 раза и получает дробь $\frac{2}{12}$. Он должен ответить на вопрос, что произошло с дробью и почему (дробь увеличилась в 2 раза, потому что вдвое увеличилось число долей). Затем нужно увеличить числитель в 3, в 4, в 5 и т. д. раз и каждый раз делать вывод.

Полезно взять отрезок, принять его за единицу, разделать на 12 равных частей и зафиксировать одну двенадцатую часть этого отрезка — это будет $\frac{1}{12}$, затем взять две такие части и указать на то, что второй отрезочек (две части) в два раза больше первого, ясно, что и число, т. е. соответствующая ему дробь в два раза больше первой дроби, т. е. $\frac{1}{12}$. После этого таким же образом рассмотреть другие отрезки и соответствующие им дроби $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$ и т. д.

После этого нужно взять другую дробь, например $\frac{1}{15}$ и проделать над ней ту же самую операцию. Желательно, чтобы каждый ученик принял участие в этой работе.

Наконец, учащиеся делают вывод: если числитель дроби увеличить в несколько раз, то дробь увеличится во столько же раз.

Сделав этот вывод, попробуем сравнить изменение дроби в зависимости от изменения ее членов с изменением частного в зависимости от изменения делимого и делителя.

Возьмем частное от деления числа 16 на 8.

$$16 : 8 = 2.$$

Увеличим делимое (16) в два, в три, в четыре раза, разделим каждое новое делимое на прежний делитель и посмотрим, какое будет частное:

а) увеличиваем делимое в 2 раза:

$$(16 \cdot 2) : 8 = 32 : 8 = 4;$$

б) увеличиваем делимое в 3 раза:

$$(16 \cdot 3) : 8 = 48 : 8 = 6;$$

в) увеличиваем делимое в 4 раза:

$$(16 \cdot 4) : 8 = 64 : 8 = 8.$$

Во всех трех случаях частное увеличивалось во столько же раз, во сколько было увеличено делимое. Значит, частное и дробь в этом отношении ведут себя одинаково.

2-й вопрос. Что происходит с величиной дроби при уменьшении ее числителя в несколько раз.

После того как рассмотрен первый вопрос, учащиеся с большей самостоятельностью смогут разрешить второй вопрос. Пусть они возьмут какую-нибудь дробь и попробуют уменьшить в несколько раз ее числитель. Может случиться, что они возьмут дробь $\frac{7}{20}$, которая дает мало возможностей для уменьшения. Ее числитель можно уменьшить только в 7 раз, и, значит, для обнаружения нашей мысли она, хотя и годится, но мало показательна. Однако отвергать этот детский пример не следует, его нужно использовать. Но после этого нужно предложить взять какую-нибудь другую дробь. Если у этой дроби числитель будет с достаточным числом делителей, например 36, то на нем можно хорошо продемонстрировать изменение дроби в зависимости от изменения числителя.

Рассуждение должно быть проведено полностью, т. е. если уменьшим числитель вдвое, то дробь уменьшится тоже вдвое. Почему? Потому что стало вдвое меньше число долей, а доли остались те же самые и т. д.

Полезно взять отрезок, принять его за единицу, разделить его, например, на 15 равных частей и таких частей зафиксировать, положим, 8. Значит, на нашем рисунке наглядно будет представлена дробь $\frac{8}{15}$ в виде определенного отрезка. Мы можем брать теперь части от этого отрезка: половину, четверть, восьмую. Числитель нашей дроби будет уменьшаться вдвое, вчетверо, в восемь раз; соответственно и величина дробей будет уменьшаться, так как изображающие их отрезки будут становиться все меньше и меньше.

Сопоставление с частным провести обязательно на числовых примерах.

3-й вопрос. Дальше учащиеся должны сообразить сами, что мы будем рассматривать. Мы рассмотрели изменение дроби в зависимости от увеличения и уменьшения числителя. Теперь, очевидно, нужно рассматривать изменение дроби при изменении знаменателя. Иногда эти вопросы пропускаются на том основании, что теперь уже все ясно. Это неверно. Изменение знаменателя представляет собой более трудное явление, потому что здесь, выражаясь кратко, «увеличение ведет к уменьшению», и обратно, и именно здесь ученики делают наибольшее число ошибок. Поэтому изменение дроби в зависимости от изменения знаменателя нужно рассмотреть подробно и обстоятельно.

Мы намерены показать, что с увеличением знаменателя дробь уменьшается. Чтобы это действительно было показательно, нужно взять сначала дробь с очень маленьким знаменателем, например со знаменателем 2, и затем не пожалеть времени и места на записывание дробей с постепенно увеличивающимися знаменателями. Конечно, не обязательно писать подряд все эти дроби, а написав несколько дробей, сделать разрыв, потом написать еще несколько дробей и т. д. На учеников, конечно, произведет сильное впечатление, если, например, данный знаменатель будет увеличен в 100 раз, тогда вся дробь уменьшится в 100 раз. И если при этом пользовались геометрической иллюстрацией, то ученики даже не в состоянии будут изобразить такой крошечный отрезочек, какой нужно отложить, например $\frac{1}{200}$. Такого рода сильные впечатления необходимы, потому что через короткое время ученики начнут опять путать увеличение числителя с увеличением знаменателя.

Для того чтобы сделать вывод, полезно воспользоваться чертежом. Изобразим шесть отрезков (рис. 13).

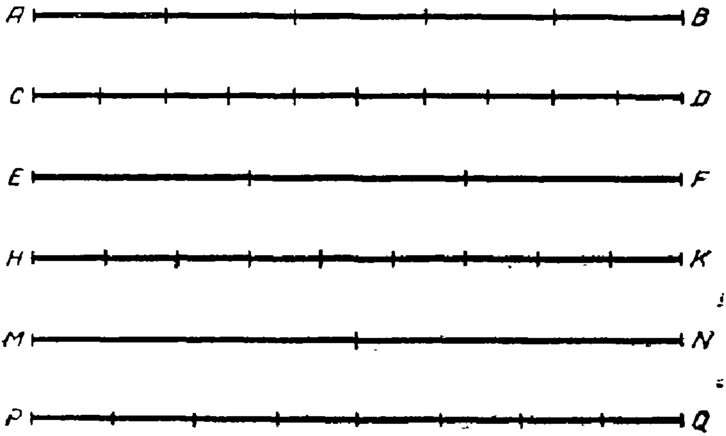


Рис. 13

Первый отрезок AB разделим на 5 равных частей, а второй CD—на 10 равных частей. На этих двух отрезках можно иллюстрировать уменьшение дроби в 2 раза при увеличении знаменателя, например $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$.

Третий отрезок EF разделим на 3 равные части, а четвертый HK — на 9 равных частей. На этих отрезках можно иллюстрировать уменьшение дроби в 3 раза при увеличении знаменателя во столько же раз, например $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$.

Пятый отрезок MN разделим пополам, а шестой отрезок PQ разделим на 8 равных частей. На этих отрезках можно иллюстрировать уменьшение дроби в 2 и в 4 раза при соответствующем увеличении знаменателя.

Повторяем, что трех пар отрезков недостаточно для того, чтобы ученики раз и навсегда усвоили идею изменяемости дроби в зависимости от изменения знаменателя: они еще долго будут ошибаться. Чтобы добиться безошибочных ответов, нужно взять еще несколько рядов чисел (дробей) и чертежей. Необходимо почаще к этому вопросу возвращаться и почаще его повторять.

Аналогию с частным провести нужно и в этом случае. Например: $144 : 2 = 72$;

$$144 : (2 \cdot 6) = 144 : 12 = 12.$$

4-й вопрос. Необходимо, чтобы учащиеся сами сообразили, в чем будет состоять четвертый вопрос. Так как мы только что рассмотрели изменение дроби при увеличении знаменателя, то нужно думать, что теперь мы будем говорить об изменении дроби при уменьшении знаменателя. Конечно, есть много общего между третьим и четвертым вопросами, но все-таки четвертый вопрос нужно тщательно рассмотреть, тем более что, рассматривая четвертый вопрос, мы тем самым повторяем и третий. При этом можно даже использовать предыдущий чертеж, рассматривая его, так сказать, в обратном порядке (снизу вверх).

Рассмотрим отрезок CD; он разделен на 10 равных частей. Значит, каждая часть равна $\frac{1}{10}$. Отрезок AB разделен на меньшее число частей, на 5 частей. Значит, каждая часть равна $\frac{1}{5}$. Сравним дроби $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{5}$ Знаменатель первой в два раза больше, чем знаменатель второй. Иными словами, знаменатель второй дроби в два раза меньше знаменателя первой, но вторая дробь все-таки в два раза больше первой, что очень хорошо видно на чертеже. После этого следует и остальные пары отрезков рассмотреть в том же порядке.

Далее можно этот же вопрос рассмотреть на числах. Для этого возьмем какую-нибудь дробь, например $\frac{1}{24}$, и будем постепенно уменьшать ее знаменатель:

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

Знаменатели наших дробей постепенно уменьшаются (с 24 до 2), зато сами дроби все время увеличиваются. И если мы сравним первую дробь с последней, то увидим, что знаменатель последней в 12 раз меньше знаменателя первой, но сама последняя дробь в 12 раз больше первой. Нужно сравнить и другие пары дробей. При этом недостаточно говорить «больше» или «меньше», а нужно указывать во сколько раз. Например, сравним первую дробь с третьей ($\frac{1}{24}$ и $\frac{1}{8}$). Знаменатель второй дроби (8) в три раза меньше знаменателя первой (24), но сама вторая дробь в три раза больше первой. Чтобы убедиться в том, что восьмая доля именно в три раза больше двадцать четвертой, можно отложить ту и другую на одном и том же отрезке прямой.

Наконец, полезно сопоставить это свойство дроби с аналогичным свойством частного. Разделим 120 на 12:

$$120 : 12 = 10.$$

Уменьшим делитель (12) в шесть (6) раз и снова выполним деление:

$$120 : 2 = 60, \text{ или } 120 : (12 : 6) = 60.$$

Свойство дроби и свойство частного совпадают.

5-й вопрос. Мы приступаем к рассмотрению самого интересного в теоретическом отношении и самого важного в практическом отношении свойства дроби: дробь не изменяется при одновременном увеличении или уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз. Следует последовательно рассмотреть оба случая — увеличение и уменьшение.

а) Для большей ясности полезно подробнее остановиться хотя бы на какой-нибудь одной дроби. Возьмем дробь $\frac{3}{5}$ и увеличим сначала только ее числитель, положим, в 4 раза, получится дробь $\frac{12}{5}$, т. е.

$$\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Мы получили дробь $\frac{12}{5}$, которая будет иметь, так сказать, вспомогательное значение. Она в 4 раза больше первой дроби. Теперь возьмем вспомогательную дробь $\frac{12}{5}$ и увеличим в 4 раза только ее знаменатель. Получим следующее:

$$\frac{12}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}.$$

Дробь $\frac{12}{5}$ уменьшилась в 4 раза. Что же произошло в конце концов с первой дробью $\left(\frac{3}{5}\right)$? Сначала мы увеличили ее числитель в 4 раза и тем самым увеличили всю дробь в 4 раза, затем мы увеличили знаменатель вспомогательной дроби тоже в 4 раза и тем самым уменьшили всю дробь в 4 раза. Таким образом, исходная дробь $\left(\frac{3}{5}\right)$ после этих двух операций осталась без изменения. Значит,

$$\frac{3}{5}=\frac{12}{20}.$$

Факт неизменяемости дроби при одновременном увеличении числителя и знаменателя в одинаковое число раз прекрасно иллюстрируется на чертеже. Нужно изобразить отрезок AB, разделить его на 5 равных частей и взять три такие части (рис. 14). Тогда отрезок AC будет

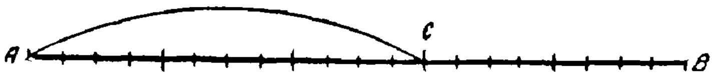


Рис. 14

равен $\frac{3}{5}$ отрезка AB. Разделим теперь каждую пятую часть отрезка AB на четыре равные части, тем самым весь отрезок AB разделится на 20 равных частей. Таким образом, при первом делении отрезок AC изображался дробью $\frac{3}{5}$, а при новом раздроблении тот же отрезок AC изображается дробью $\frac{12}{20}$.

После этого можно несколько сократить изложение. Можно взять какую-нибудь исходную дробь, например $\frac{1}{2}$, и, увеличивая одновременно ее члены, получить ряд равных ей дробей, т. е.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}.$$

Если в отношении какой-либо дроби возникнет сомнение, то можно повторить те рассуждения, которые мы провели выше.

Теперь ученики должны сформулировать вывод: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же число, то величина дроби не изменится.

Это свойство в высшей степени важно записать на буквах. Потому что, если даже ученики слабо владеют буквенным аппаратом, все-таки оно (это свойство) на-столько рельефно выглядит на буквах, что его поймет каждый. Обозначим дробь через $\frac{a}{b}$, а число, на которое умножаются числитель и знаменатель, — буквой m, тогда полученное свойство дроби примет вид:

$$\frac{a}{b}=\frac{a \cdot m}{b \cdot m}.$$

б) Переходя к изменению дроби в связи с уменьшением ее членов, можно еще раз изложить рассуждения, аналогичные проведенным выше.

Возьмем дробь $\frac{6}{15}$ и уменьшим сначала только ее числитель в 3 раза, получится дробь $\frac{2}{15}$, т. е.

$$\frac{6:3}{15}=\frac{2}{15}.$$

Мы получили дробь $\frac{2}{15}$, которая будет иметь вспомогательное значение. Она в 3 раза меньше первой дроби. Теперь возьмем полученную вспомогательную дробь $\frac{2}{15}$ и уменьшим в 3 раза только ее знаменатель, получим

$$\frac{2}{15:3}=\frac{2}{5}.$$

Дробь $\frac{2}{15}$ увеличилась в 3 раза. Что же произошло с первой дробью $\left(\frac{6}{15}\right)$ в конце концов? Сначала мы уменьшили ее числитель в 3 раза и тем самым уменьшили всю дробь в 3 раза. Затем мы уменьшили знаменатель вспомогательной дроби тоже в 3 раза и тем самым увеличили всю дробь в 3 раза. Таким образом, исходная дробь $\left(\frac{6}{15}\right)$ после этих двух операций осталась без изменения. Значит,

$$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}.$$

Неизменяемость дроби при одновременном уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз удобно иллюстрируется на чертеже. Возьмем отрезок AB, разделим его на 15 равных частей и зафиксируем 6 таких частей. Тогда отрезок AC будет равен $\frac{6}{15}AB$. Теперь произведем другое деление отрезка точками D, C, E, F на 5 равных частей. Тогда отрезок AC будет соответствовать

$\frac{2}{5}$ отрезка AB (рис. 15). Значит, один и тот же отрезок

Рис. 15

AC при одном делении выражался дробью $\frac{6}{15}$, а при другом делении дробью $\frac{2}{5}$, т. е.

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Теперь тот же вопрос можно рассмотреть на числах. Возьмем какую-нибудь исходную дробь, например $\frac{60}{120}$, и, уменьшая одновременно ее члены, получим ряд равных ей дробей, т. е.

$$\frac{60}{120} = \frac{30}{60} = \frac{20}{40} = \frac{15}{30} = \frac{12}{24} = \frac{10}{20} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Если в отношении какой-либо дроби возникнет сомнение, то можно повторить те рассуждения, которые мы провели выше. Теперь ученики должны сформулировать вывод: если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же число, то величина дроби не изменится. Запишем этот вывод с помощью буквенных символов. Обозначим дробь через $\frac{a}{b}$, а число, на которое делятся числитель и знаменатель, — буквой m, тогда полученное свойство дроби примет вид:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}.$$

Затем два последних вывода объединяются вместе и получается основное свойство дроби.

Провести аналогию между основным свойством дроби и соответствующим свойством частного совершенно необходимо.

§ 9. Сокращение дробей

Изучение сокращения дробей рекомендуется начать с установления того факта, что существуют дроби с различными членами (числителями и знаменателями) и все-таки равные между собой.

Установить этот факт можно сначала экспериментально. Можно взять яблоко и показать, что $\frac{2}{4}$ его все равно, что $\frac{1}{2}$, т. е $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Можно взять другой предмет (круглый хлеб, арбуз и т. д.) и показать (разрезав его на 8 равных частей), что $\frac{6}{8}$ все равно, что $\frac{3}{4}$, а $\frac{4}{8}$ все равно, что $\frac{2}{4}$, и $\frac{2}{4}$ все равно, что $\frac{1}{2}$.

После этого рекомендуем перейти к геометрическим представлениям: отрезок делится на 4 части и указывается, что $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; отрезок делится на 6 частей, и указывается, что $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; отрезок делится на 8 частей и указывается, что $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Этих отрезков недостаточно. Нужно взять еще несколько различных по длине отрезков, принять каждый из них за единицу и выполнить фактическое деление отдельных отрезков на 12, 16, 18, 20, 24 и т. д. частей. Не следует ограничиваться только указанием на то, что такое деление может быть выполнено. Необходимо, чтобы все построения, измерения, записи и выводы были сделаны самостоятельно учащимися. Преподаватель в данном случае только исправляет ошибки.

Теперь поставим вопрос, что же эти факты являются для нас неожиданностью, или мы подготовлены к ним предыдущими теоретическими рассуждениями? Ничего неожиданного в этом нет. Все это вытекает из основного свойства дроби. Поэтому, всякий раз когда мы какую-нибудь дробь, например $\frac{5}{10}$, заменяем $\frac{1}{2}$ путем деления числителя и знаменателя на 5, мы опираемся на основное свойство дроби. Само преобразование называется сокращением дроби.

Теперь нужно перейти к деталям этого преобразования. Возьмем, например, дробь $\frac{1}{3}$. Ее нельзя сократить. Почему? Потому что ее числитель и знаменатель не имеют общих делителей. Это дробь н е с о к р а т и м а я.

Возьмем дробь $\frac{2}{6}$. Ее числитель и знаменатель имеют общий делитель 2, и, значит, на него можно разделить каждый из членов дроби. Сделаем это:

$$\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{3}.$$

Получили несократимую дробь $\frac{1}{3}$.

Деления, которые мы сейчас написали в числителе и знаменателе, обычно не пишутся, а выполняются в уме. Можно воспользоваться геометрической иллюстрацией. Возьмем отрезок AB и разделим его на 6 равных частей

Рис. 16

(рис. 16). Каждый из отрезков AC, CD и DB равняется $\frac{2}{6}$ отрезка AB. Теперь пусть ученики посмотрят на чертеж и скажут, сколько на чертеже отрезков, равных $\frac{2}{6}$? Три. Каждый из них обведен дугой. Какую же часть отрезка AB составляет каждый из этих отрезков? Одну треть ($\frac{1}{3}$). Следовательно,

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Теперь возьмем дробь $\frac{6}{12}$ и сократим ее на 2:

$$\frac{6}{12}=\frac{3}{6}.$$

Это сокращение не привело нас к несократимой дроби, напротив, полученная дробь $\frac{3}{6}$ снова может быть сокращена на 3:

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Значит, мы сократили дробь $\frac{6}{12}$ сначала на 2, а потом полученную дробь $\frac{3}{6}$ сократили на 3. Мы выполнили сокращение последовательно. Можно ли было сразу сократить $\frac{6}{12}$ на 6? Можно. Получилась бы та же самая дробь $\frac{1}{2}$.

Возьмем теперь дробь с большими числителем и знаменателем, например $\frac{160}{224}$, и попробуем ее сократить. Мы сократим ее сначала на наименьший из возможных делителей, т. е. на 2:

$$\frac{160}{224}=\frac{80}{112}.$$

Полученная от этого сокращения дробь тоже допускает сокращение на 2, т. е.

$$\frac{80}{112}=\frac{40}{56}.$$

Снова у нас в числителе и знаменателе четные числа, и, стало быть, снова возможно сокращение на два:

$$\frac{40}{56}=\frac{20}{28}.$$

Выполним еще сокращение, причем уже не на 2, а сразу на 4, получим:

$$\frac{20}{28}=\frac{5}{7}.$$

Мы получили несократимую дробь, выполнив несколько последовательных сокращений. Однако можно было бы привести данную дробь к несократимой не путем последовательных сокращений, а путем деления числителя и знаменателя на их наибольший общий делитель. Иногда можно догадаться, чему равен этот делитель, но если догадаться трудно, то нужно разыскать его по известному правилу. Сделаем это, разложим числитель и знаменатель на простые множители:

$$160=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5$$
$$224=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7$$

$$\text{Н.О.Д.}=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32.$$

Таким образом, предложенную выше дробь $\frac{160}{224}$ можно было бы сразу сократить на 32, т. е.

$$\frac{160^{(32)}}{224}=\frac{5}{7}.$$

Сверху справа от числителя в скобочках написан делитель, на который мы сокращаем числитель и знаменатель.

Сделаем еще несколько замечаний относительно сокращения дробей. Если в числителе и знаменателе имеется один или несколько (поровну) нулей, то прежде всего нужно сократить на этот нуль или на эти нули. Например:

$$\frac{230}{750}=\frac{23}{75}.$$

Этим путем мы сразу уменьшаем члены дроби, и тогда становится виднее, возможно ли дальнейшее сокращение. Относительно полученной выше дроби может возникнуть вопрос, нельзя ли ее еще сократить. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно обратить внимание на то, что в числителе этой дроби написано простое число 23, значит, сокращение было бы возможно лишь в том случае, если бы знаменатель делился на 23, но знаменатель 75 разлагается так: $3 \cdot 5 \cdot 5$ и на 23 делиться не может. В данном случае числитель и знаменатель являются числами взаимно простыми и дробь оказывается несократимой.

При изучении этого отдела мы рекомендуем не отказываться от устного сокращения небольших дробей, например таких:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{12}, \frac{5}{10}, \frac{6}{8}, \frac{10}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{16}{18}, \frac{12}{18}, \frac{16}{24} \text{ и т. д.}$$

§ 10. Приведение дробей к общему знаменателю

Цель приведения дробей к общему знаменателю достаточно очевидна, и она должна быть в самом начале сформулирована. Эта цель состоит в том, что, во-первых, приведение дробей к общему знаменателю позволяет сравнивать по величине любые дроби, и, во-вторых, дроби с равными знаменателями без труда можно складывать и вычитать. И то и другое следует объяснить на примере. И хотя ученики еще не знают сложения и вычитания дробей, но никто не пострадает, если мы покажем им по одному примеру на сложение и вычитание.

Мы возьмем только две простейшие дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ и на них продемонстрируем все эти три факта.

Сравнение дробей. Дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ легко выражаются в шестых долях, что можно показать на чертеже. Для этого достаточно взять два равных отрезка и разделить первый на две равные части, а второй — на три равные части. После этого каждый отрезок нужно дополнительно разделить на 6 равных частей, и тогда будет видно, что

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \text{ а } \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Итак, мы привели наши дроби к общему знаменателю и теперь видим, что $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, потому что $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$.

Сложение дробей. Мы должны сложить $\frac{1}{2}$ с $\frac{1}{3}$. Мы можем заменить эти дроби равными им дробями $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. Спрашиваем, сколько шестых долей получится в сумме, если в первом слагаемом их 3, а во втором 2. Очевидно, в сумме их будет 5, т. е.

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6},$$

Вычитание дробей. Мы должны вычесть из дроби $\frac{1}{2}$ дробь $\frac{1}{3}$. Заменим эти дроби равными им дробями $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. Поставим вопрос, сколько шестых долей останется, если из трех шестых мы вычтем две шестых. Очевидно, останется $\frac{1}{6}$, т. е.

$$\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$

Таким образом мы выясним цель **«приведения дробей** к общему знаменателю».

Теперь мы займемся изучением этого преобразования.

Обычно рассматриваются три случая: а) один из знаменателей данных дробей делится на каждый из остальных, б) знаменатели имеют общих множителей, но ни один из них не делится на остальные, в) знаменатели — числа взаимно простые.

Рассмотрим их последовательно. Конечно, в этих трех случаях ученики не должны видеть три разные задачи, это одна и та же задача, и идея решения ее во всех случаях одна и та же. Задача эта решается единообразно и независимо от того, сколько дано дробей для приведения их к общему знаменателю. Этот единый метод может быть изложен в самом начале, и он всегда должен быть перед глазами ученика. Он состоит в следующем:

1) найти наименьшее кратное знаменателей данных дробей. Это и будет наименьший общий знаменатель;

2) найти дополнительный множитель для каждой дроби путем деления наименьшего общего знаменателя на знаменатель первой, второй и т. д. дроби;

3) умножить оба члена каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.

Эти три пункта нужно выполнить во всех случаях. Разница будет лишь в незначительных деталях.

Начинать изложение вопроса лучше с небольшого числа дробей, а постепенно число дробей можно увеличить.

а) Привести к общему знаменателю дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{16}$

Наименьшим кратным знаменателей является знаменатель второй дроби (16). В таком простом случае мы, конечно, не выполняем процедуры нахождения наименьшего кратного, потому что сразу видно, что 16 делится на 8.

Итак, первый шаг мы выполнили в уме. Теперь нужно найти дополнительные множители. Для первой дроби дополнительный множитель 2, для второй единица. Какой же вид примут наши дроби после приведения?

$$\frac{3}{8}=\frac{3\ 2}{8\cdot 2}=\frac{6}{16};\ \frac{5}{16}=\frac{5\cdot 1}{16\cdot 1}=\frac{5}{16}.$$

Сравнительная простота этого примера состоит в том, что общий знаменатель можно найти в уме и дополнительный множитель для второй дроби равен 1. Последнее обстоятельство влечет за собой обычные последствия, т. е. от умножения числителя и знаменателя на единицу члены дроби остаются без изменения. Практически это сводится к тому, что дробь, у которой знаменатель оказывается наименьшим общим знаменателем, можно переписать без изменения.

Рассмотрим три дроби: $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{40}$. Этот пример отличается от первого только числом дробей. Наименьшим кратным знаменателей является знаменатель третьей дроби (40). Дополнительные множители: для первой дроби — 4, для второй — 2. Дальнейшие вычисления протекают обычно:

$$\frac{3}{10}=\frac{3\cdot 4}{10\cdot 4}=\frac{12}{40};\ \frac{7}{20}=\frac{7\cdot 2}{20\cdot 2}=\frac{14}{40};\ \frac{11}{40}=\frac{11\cdot 1}{40\cdot 1}=\frac{11}{40}.$$

Таким образом, общая схема решения, намеченная выше, выполняется и в этом случае.

б) Приведем к общему знаменателю дроби: $\frac{5}{18}$ и $\frac{7}{24}$.

Здесь больший из знаменателей (24) не делится на меньший (18) и поэтому прежний путь для нас закрыт. Мы должны искать наименьшее общее кратное знаменателей не среди данных знаменателей. Если решать по всем правилам, то для нахождения наименьшего общего кратного знаменателей нужно разложить знаменатели данных дробей на простые множители. Однако в данном случае знаменатели 18 и 24 не столь велики, чтобы дети не сообразили без разложения, что здесь наименьшим общим кратным будет число 72. Дополнительные множители для первой дроби — 4, а для второй — 3. Выполним вычисления:

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} = \frac{20}{72}; \frac{7}{24} = \frac{7 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{21}{72}.$$

Рассмотрим теперь другой пример. Приведем к общему наименьшему знаменателю дроби:

$$\frac{7}{18}, \frac{5}{24}, \frac{8}{25}, \frac{11}{40}, \frac{7}{72}, \frac{45}{48}.$$

Найдем наименьшее общее кратное знаменателей по общему правилу:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3;$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3;$$
$$25 = 5 \cdot 5;$$
$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5;$$
$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3;$$
$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$
$$\text{Н.О.К.} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3600.$$

Дополнительные множители рекомендуется находить рационально. Это значит, что не следует делить наименьший общий знаменатель на каждый из данных знаменателей, а выключать из состава множителей общего знаменателя множители данного знаменателя. Если на первых порах это покажется ученикам трудным, то можно сначала пойти трафаретным путем деления, а затем уже постепенно перейти к рациональному пути.

Доп. множ. для	I	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$	$= 200;$
	II	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	$= 150;$
	III	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$= 144;$
	IV	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	$= 90;$
	V	$2 \cdot 5 \cdot 5$	$= 50;$
	VI	$3 \cdot 5 \cdot 5$	$= 75.$

Умножая числители и знаменатели данных дробей на соответствующие дополнительные множители, наконец, приведем наши дроби к общему знаменателю:

$$\frac{7}{18} = \frac{7 \cdot 200}{18 \cdot 200} = \frac{1400}{3600};$$

$$\frac{5}{24}=\frac{5\cdot150}{24\cdot150}=\frac{750}{3600};$$

$$\frac{8}{25}=\frac{8\cdot144}{25\cdot144}=\frac{1152}{3600};$$

$$\frac{11}{40}=\frac{11\cdot90}{40\cdot90}=\frac{990}{3600};$$

$$\frac{7}{72}=\frac{7\cdot50}{72\cdot50}=\frac{350}{3600};$$

$$\frac{5}{48}=\frac{5\cdot75}{48\cdot75}=\frac{375}{3600}.$$

На первых порах дополнительные множители пишут и возле числителя, и возле знаменателя.

Конечно, это необязательно. Мы рекомендуем это только для того, чтобы внести окончательную ясность в этот процесс.

В практике вычислений многие само собой разумеющиеся факты пропускаются, многие вычисления выполняются устно и весь этот процесс носит полуписьменный характер.

Нам кажется, что в тех случаях, когда для упражнения даются дроби с громоздкими числителями и знаменателями, нужно стремиться к более подробной записи, в особенности на первых порах.

С течением времени запись, естественно, должна сократиться.

в) Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$. Это приведение нужно сделать, конечно, в уме. При этом ученики должны заметить особенность этого случая. Она состоит не в том, что здесь маленькие числа, а в том, что знаменатели — числа взаимно простые. Поэтому общий знаменатель равен произведению данных знаменателей, а дополнительными множителями будут: для первой дроби знаменатель второй, а для второй дроби — знаменатель первой. И это не случайно, а совершенно закономерно. Значит, решение примет вид:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}=\frac{10}{15};\quad \frac{3}{5}=\frac{3\cdot3}{5\cdot3}=\frac{9}{15}.$$

Возьмем другой пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{10}$ и $\frac{5}{21}$. Знаменатели —

числа взаимно простые, поэтому общий знаменатель будет равен их произведению:

$$\frac{7}{10}=\frac{7\cdot21}{10\cdot21}=\frac{147}{210};\ \frac{5}{21}=\frac{5\cdot10}{21\cdot10}=\frac{50}{210}.$$

Возьмем более сложный пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби: $\frac{5}{33}$, $\frac{3}{25}$ и $\frac{2}{14}$. Знаменатели этих дробей — числа взаимно простые, и потому наименьший общий знаменатель будет равен их произведению. Пусть ученики сообразят, как можно написать дополнительные множители. Конечно, дополнительные множители можно вычислить по общему правилу (разделить наименьший общий знаменатель на знаменатель данной дроби). Но гораздо интереснее и в образовательном отношении полезнее, если ученики поймут, что наименьший общий знаменатель составлен здесь от перемножения знаменателей данных дробей (есть их произведение). Дополнительный же множитель (или множители) можно получить путем «выключения» из произведения всех знаменателей одного знаменателя (знаменателя данной дроби). Выполним теперь «приведение»:

$$\frac{5}{33}=\frac{5\cdot25\cdot14}{33\cdot25\cdot14}=\frac{1750}{11550};$$

$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot33\cdot14}{25\cdot33\cdot14}=\frac{1386}{11550};$$

$$\frac{2}{14}=\frac{2\cdot33\cdot25}{14\cdot33\cdot25}=\frac{1650}{11550}.$$

Глава вторая

ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

§ 11. Сложение дробей

Здесь последовательно рассматриваются три случая:
1) сложение дробей с одинаковыми знаменателями;
2) сложение дробей с разными знаменателями;
3) сложение смешанных чисел.

1. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями

Это самый простой и важный случай сложения дробей, важный потому, что сложение любых дробей сводится к сложению дробей с одинаковыми знаменателями.

Сложение дробей, как и сложение целых чисел, есть нахождение суммы дробей.

Наилучшее объяснение этого действия будет состоять в использовании чертежа. Пусть нужно сложить дроби $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$. Возьмем отрезок AB (рис. 17), примем его

Рис. 17

за единицу и разделим на 5 равных частей. Тогда отрезок AC будет равен $\frac{1}{5}$ AB, отрезок CD равен $\frac{2}{5}$ AB, а отрезок AD, который является суммой AC и CD, очевидно, равен $\frac{3}{5}$ отрезка AB. Значит, можно написать:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

В этом и заключается все объяснение. Для того чтобы впечатление было более глубоким, нужно взять две другие дроби, например $\frac{4}{15}$ и $\frac{8}{15}$, построить новый отрезок, принять его за единицу, разделить на 15 равных частей и провести соответствующие рассуждения. В результате получим, что

$$\frac{4}{15}+\frac{8}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Полезно взять еще две дроби по желанию учащихся и с помощью чертежа проделать над ними необходимые манипуляции.

После этого ученики должны вывести правило. Вообще все правила выводят ученики и выписывают их на доске. Если это правило лучше книжного, то его следует предпочесть.

Для усиления впечатления полезно использовать классные «дробные счеты», если таковые имеются в школе. На этих счетах можно продемонстрировать несколько случаев сложения простейших дробей с одинаковыми знаменателями. Брать дроби с какими-нибудь сложными знаменателями, конечно, нельзя, потому что набор долей на счетах ограничен простейшими. Вся работа по сложению дробей на счетах проводится учеником. Учитель только дает задание, например, сложить $\frac{5}{12}$ и $\frac{5}{12}$, а ученик должен сам указать необходимую проволоку и проделать действия. Следует постоянно обращать внимание учащихся на то, что какие доли складываются, такие получаются и в сумме (конечно, если возможно сокращение, то доли уже получатся иные).

Не следует лишать учащихся возможности выполнять некоторые довольно простые манипуляции, например складывать отрезки, пользоваться дробными счетами, на том основании, что ученики это хорошо понимают и в этом не нуждаются. Те, кто говорит это, упускают из виду одно чрезвычайно важное обстоятельство. Когда ученик складывает отрезки, то при этом он видит эти отрезки, своими руками чертит их, а не только слышит наименование дробей и видит их изображение цифрами.

Почему у нас часто бывает так, что ученик, пока изучал начальные сведения о дробях, все понимал, а потом вдруг он переставал понимать? А потому что он бегло прошел начальные сведения о дробях, нигде он не встречал больших затруднений, все ему казалось очень простым и даже не заслуживающим большого внимания.

С. И. Шохор-Троцкий в своей методике арифметики (стр. 243, 1912 г.) высказывает такую интересную мысль: «Все дело только в том — правильно ли и достаточно ли выразительно прочтены данные дроби, т. е. правильно ли поставлены ударения на словах, обозначающих числители. От выразительности чтения в начале (изучения), можно сказать, зависит все. Когда требуется сложить $\frac{3}{16}$ и $\frac{5}{16}$, то это требование надо прочесть так: «Т р и шестнадцатых, д а е щ е п я т ь шестнадцатых а не так: три ш е с т н а д ц а т ы х, да еще пять ш е с т н а д ц а т ы х».

К его словам стоит прислушаться. Однообразное чтение, без выделения, без остановок, без логических ударений, производит меньшее впечатление на ученика, чем чтение осмысленное, выразительное, сопровождающееся изменением интонации, паузами и подчеркиванием особо важных слов.

Некоторые авторы, желая облегчить изучение дробей, проводят аналогию между именованными числами (числами с наименованиями) и дробями. Этим путем они хотят, в частности, предотвратить иногда встречающуюся, особенно на первых порах, ошибку, состоящую в том, что дети при сложении дробей складывают не только числители, но и знаменатели. В таком случае рекомендуется сопоставить, например, такие суммы:

$$\frac{4}{15}+\frac{7}{15}=\frac{11}{15};\ 4\ \text{см}+7\ \text{см}=11\ \text{см}.$$

После рассмотрения сложения двух слагаемых можно перейти к сложению большего числа слагаемых, в первую очередь трех. По существу, здесь ничего нет нового, но без выработки навыка учащиеся не научатся складывать дроби. Необходимо обращать внимание учащихся на своевременное сокращение суммы и исключение целого числа из неправильной дроби, если таковая получится в результате сложения. Например:

$$\frac{3}{16}+\frac{5}{16}+\frac{7}{16}+\frac{9}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями завершается выводом формулы. Возьмем хотя бы три дроби: $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ и сложим их:

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}=\frac{a+b+c}{k}.$$

Преподаватель должен внимательно следить за настроением учеников. Интересно установить, какое впечатление произведет на учеников это буквенное равенство, доставит ли оно им чувство удовлетворения, или, напротив, они будут недовольны и разочарованы. В зависимости от той или иной реакции учеников преподаватель должен построить свои дальнейшие объяснения. Если ученики спросят, для чего это нужно, то можно ответить, что эта формула дает сокращенную символическую запись правила сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Правило гласит: чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и оставить тот же знаменатель. В левой части формулы записана «задача» сложить три дроби с одинаковыми знаменателями, а в правой части дается ее решение, оно состоит в сложении числителей дробей и в сохранении того же знаменателя. Глядя на формулу, ученик должен своими словами выразить эту мысль. Если же кто-нибудь из учеников спросит: «что» или «сколько» здесь получится (это уже печальный, хотя и возможный случай), то придется ответить, что формула не дает ответа на вопрос «что» или «сколько», а отвечает на вопрос «как».

Формулы нужно постепенно накапливать. Заучивать их не следует. Они должны быть записаны в карманных книжках учеников или на классных стенных таблицах. Время от времени нужно предлагать ученикам объяснить ту или иную формулу. Иногда, если ученик допускает ошибку в вычислениях, нужно указать ему формулу и спросить, понимает ли он, что отклоняется в своих действиях от формулы, и может ли он теперь, взглянув на формулу, исправить свою ошибку.

2. Сложение дробей с разными знаменателями

Если сложение дробей с одинаковыми знаменателями усвоено отчетливо, то сложение дробей с разными знаменателями затруднений не представит. Здесь могут быть особые ошибки, связанные с неумением найти наименьшее общее кратное при отыскании общего знаменателя. Вот на эту сторону дела и следует обратить внимание. Если действительно дети несколько забыли эти вопросы (делимость чисел и проч.), то полезно сделать краткое повторение.

Сложение дробей с разными знаменателями начинается с простейшего случая, когда один из знаменателей является наименьшим общим кратным данных знаменателей. Сначала нужно взять только два слагаемых, а потом можно перейти к большему числу их.

Возьмем самый простой случай сложения:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$$

Пусть ученики сами скажут, что мы не можем сложить эти дроби, потому что у них разные знаменатели (выражены в различных долях). Поэтому (вероятно, догадаются ученики) их нужно сначала привести к общему знаменателю. Можно воспользоваться таким чертежом. Возьмем отрезок AB и разделим его в точке C на две равные части (рис. 18). Разделим отрезок CB

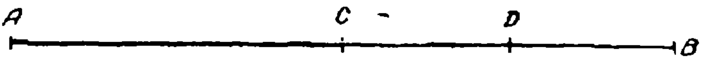


Рис. 18

пополам, тогда отрезок CD будет равен $\frac{1}{4}$ AB. Значит нам нужно сложить отрезки AC и CD, их сумма выразится отрезком AD, который можно представить как:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Но если мы разделим отрезок AC пополам, то ему будет соответствовать дробь $\frac{2}{4}$. Значит, наша задача примет вид:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Такого рода пример ученики должны решать в уме, рассуждая так: нужно сложить половину с одной четвертью, но половина содержит две четверти, значит, две четверти да одна четверть составляют $\frac{3}{4}$.

После этого можно взять пример сложнее:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=?$$

Общим знаменателем будет 12, дополнительным множителем для первой дроби—2. Решение примет вид:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}+\frac{7}{12}=\frac{10+7}{12}=\frac{17}{12}=1\,\frac{5}{12}.$$

В дальнейшем нужно стремиться к сокращению записи, но на первых порах следует писать подробно с обоснованием каждого шага. Мы написали дополнительные множители и у числителя, и у знаменателя, чтобы подчеркнуть, что на дополнительный множитель умножается каждый член дроби и что здесь мы опираемся на основное свойство дроби.

Можно еще рассмотреть какой-нибудь случай сложения трех дробей, взятых из условия задачи.

После этого можно предложить несколько примеров дробей с небольшими знаменателями, которые можно привести к общему знаменателю по соображению (не разлагая знаменатели на простые множители). Например,

$$\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=?$$

$$\frac{7}{12}+\frac{5}{18}=?$$

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=?$$

и т. д.

В этих случаях, если трудно сообразить, какой будет общий знаменатель, можно пользоваться таким приемом: увеличить наибольший из знаменателей вдвое и посмотреть, не разделится ли полученное число на другой знаменатель, если не разделится, то увеличить его втрое, и т. д.

После этого можно перейти к тому общему случаю сложения дробей, когда для нахождения наименьшего общего знаменателя требуется найти наименьшее общее кратное путем разложения знаменателей на простые множители. Например,

$$\frac{13}{40}+\frac{5}{32}=?$$

$$\frac{13}{40}+\frac{5}{32}=\frac{52+25}{160}=\frac{77}{160}.$$

$$\begin{array}{l} 40=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5 \\ 32=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \\ \hline \text{Н. О. З.}=2\cdot 2\cdot 2\,.\,2\cdot 2\cdot 5=160. \end{array}$$

Дальше учащиеся будут решать подобные тренировочные примеры с двумя, тремя, четырьмя слагаемыми. Желательно, чтобы примеры предлагали сами учащиеся. При этом учащиеся будут часто подбирать неудачные примеры, например будут предлагать сократимые дроби, преподаватель будет исправлять отдельные недочеты и объяснять, почему данный пример не совсем удачный.

Наконец, рассматривается тот случай сложения дробей, когда знаменателями являются числа взаимно простые. Например,

$$\frac{7}{15}+\frac{9}{14}=?$$

Нужно найти наименьшее общее кратное знаменателей (15 и 14). Учащиеся должны припомнить, как найти наименьшее общее кратное чисел взаимно простых. Выяснив, что в таких случаях числа следует перемножить, приступаем к сложению дробей:

$$\frac{7}{15}+\frac{9}{14}=\frac{7^{(14)}}{15}+\frac{9^{(15)}}{14}=\frac{98+135}{210}=\frac{233}{210}=1\,\frac{23}{210}.$$

Может еще возникнуть вопрос о законности при сложении приведения дробей не к наименьшему общему знаменателю, а просто к общему знаменателю. Конечно, мы имеем право приводить дроби к любому общему знаменателю, но это нерационально.

Рассмотрев все случаи сложения дробей с различными знаменателями, ученики должны сформулировать правило сложения дробей. Так как в это правило неизбежно войдет пункт «приведения дробей к общему знаменателю», то здесь же нужно спросить другое правило, как привести дроби к общему знаменателю.

3. Сложение смешанных чисел

После того как изучено сложение дробей с одинаковыми и различными знаменателями, сложение смешанных чисел уже не представит никаких затруднений. Но пропустить этот вопрос нельзя ни при каких обстоятельствах, потому что именно здесь должны быть рассмотрены самые разнообразные и все возможные случаи сложения дробных чисел. Поэтому необходимо рассмотреть различные комбинации слагаемых, дабы убедиться в том, что все эти случаи доступны учащимся и они безошибочно выполняют любой из них. Можно последовательно рассмотреть следующие случаи:

1. Сложение целого числа с правильной дробью:

$$12 + \frac{5}{8} = 12\frac{5}{8}.$$

Сложение целого числа с правильной дробью состоит в том, что целое число и правильная дробь пишутся рядом. В сумме получается смешанное число. Этот факт известен учащимся с первых шагов ознакомления с дробями. Еще не имея представления о сложении дробей, учащиеся устно по соображению делали вывод, что 2 яблока и $\frac{1}{2}$ яблока составляют $2\frac{1}{2}$ яблока. Может быть, тогда сама конкретная постановка вопроса помогала сделать этот вывод, но теперь они должны решать такие примеры на любых абстрактных числах:

2. Сложение целого числа со смешанным числом:

$$5 + 4\frac{3}{4} = 9\frac{3}{4}.$$

Сложение целого числа со смешанным числом состоит в сложении целых чисел и в приписывании к их сумме дробной части. В сумме получается смешанное число.

3. Сложение смешанного числа с правильной дробью:

$$6\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = 6\,\frac{15+14}{24} = 6\,\frac{29}{24} = 7\,\frac{5}{24}.$$

Сложение смешанного числа с правильной дробью состоит в сложении дробной части смешанного числа с правильной дробью. Эта сумма потом записывается рядом с целым числом. В случае возникновения неправильной дроби от сложения дробей следует исключить целое число и, если возможно сокращение, сделать таковое.

4. Сложение смешанных чисел:

$$8\frac{5}{9} + 4\frac{5}{6} = 12\,\frac{10+15}{18} = 12\,\frac{25}{18} = 13\,\frac{7}{18}.$$

При сложении смешанных чисел нужно сначала сложить целые числа, а потом, приведя дроби к общему знаменателю, сложить дроби. Если при этом получится неправильная дробь, то нужно исключить из нее целое число и присоединить его к ранее полученным целым. Если возможно, то следует сократить полученную дробь.

В порядке выполнения упражнений нужно брать больше двух слагаемых и с более сложными знаменателями. Полезно брать не только отвлеченные примеры, но и несложные текстовые задачи, приводящие к сложению разнообразных дробных чисел.

Если в примере встретятся большие целые числа и громоздкие дроби, то промежуточные вычисления могут быть сделаны отдельно и в стороне. Как раз в этом случае нужно следить за правильной записью, потому что дети иногда пропускают одно звено суммы и соединяют вычисления знаком равенства. Например,

$$123\,\frac{5}{12} + 456\,\frac{7}{18} = \frac{15+14}{36} = \text{и т. д.}$$

Нужно своевременно обратить внимание учеников на то, что при сложении смешанных чисел нет надобности обращать их в неправильные дроби. Такой прием нельзя назвать ошибочным, но он должен быть охарактеризован, как нерациональный. Правда, сейчас он не придет в голову ученикам, но после изучения умножения и деления смешанных чисел они нередко будут сбиваться на этот путь, и вот тогда этот прием уже будет свидетельствовать о том, что ученик плохо усвоил действия над дробями. Вина ученика тогда будет состоять не в том, что он применяет некоторый нерациональный прием, а в том, что он переносит правила, относящиеся к одним действиям, на другие, а это есть типичнейшая школьная ошибка, свойственная тем ученикам, которые схватывают только внешнюю форму явления. Эта ошибка чрезвычайно распространена, и виды ее многообразны. Например, ошибка, состоящая в сокращении слагаемых из числителя и знаменателя, относится к той же категории.

§ 12. Вычитание дробей

Здесь последовательно рассматриваются три случая:
1) вычитание дробей с одинаковыми знаменателями;
2) вычитание дробей с разными знаменателями;
3) вычитание смешанных чисел.

1. Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

После того как усвоено сложение дробей, вычитание их не представит затруднений. Это, однако, не значит, что вычитание может быть рассмотрено бегло. Его следует изучить столь же тщательно, не пропуская ни одного пункта.

Вычитание дробей определяется (как и вычитание целых чисел), т. е. как действие, обратное сложению. Оно состоит в нахождении по сумме двух слагаемых и одному из слагаемых другого слагаемого.

Объяснение вычитания можно начать с рассмотрения чертежа. Пусть нужно из дроби $\frac{13}{15}$ вычесть дробь $\frac{4}{15}$. Возьмем отрезок AB, разделим его на 15 равных частей (рис. 19), тогда отрезок AD составит $\frac{13}{15}$ от AB, а от-

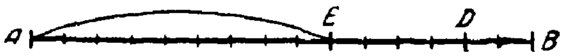


Рис. 19

резок ED будет равен $\frac{4}{15}$ AB. Если от отрезка AD отнять отрезок ED, то останется отрезок AE, равный $\frac{9}{15}AB$. На этом основании мы можем написать.

$$\frac{13}{15}-\frac{4}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Значит, $\frac{3}{5}$ и есть разность дробей $\frac{13}{15}$ и $\frac{4}{15}$. Таким образом, числитель разности получается от вычитания числителя вычитаемого из числителя уменьшаемого, а знаменатель остается тот же самый.

Для закрепления этого вывода нужно взять еще несколько пар дробей с равными знаменателями и выполнить вычитание меньшей из большей, сопровождая каждое вычитание иллюстративным чертежом.

Как и при сложении, здесь полезно использовать дробные счеты. Работу на счетах учащиеся могут проделать самостоятельно под наблюдением преподавателя. При выполнении вычитания разность может выразиться сократимой дробью, поэтому необходимо обращать внимание учеников на необходимость своевременных сокращений.

Вычитание небольших дробей нужно выполнять в уме, при этом если данные дроби произносятся голосом, а учащиеся воспринимают их на слух, то преподаватель должен произносить их выразительно, делая ударение на числителях данных дробей, например девять десятых минус три десятых. Устное вычитание дробей, как и письменное, следует проверять сложением.

Полезно сопоставить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями с вычитанием, так называемых именованных чисел. Это сопоставление можно провести путем сравнения таких записей:

$$\frac{11}{15}-\frac{7}{15}=\frac{4}{15},$$

$$11\ \textit{кг}-7\ \textit{кг}=4\ \textit{кг}.$$

Теперь следует предложить ученикам, сопоставив все решенные примеры, самостоятельно без помощи учителя написать формулу вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Ученики, может быть, вспомнят, как пишется формула сложения дробей. Если они в самом деле это помнят, то они без труда напишут и формулу вычитания. Тогда можно, имея формулу, высказать и правило вычитания. Если же ученики не смогут написать формулу, тогда нужно сначала составить правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями, а потом на основании правила написать:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Необходимо проверить, понимают ли ученики формулу, что обозначает каждая буква, как понято то, что написано слева от знака равенства, и как понять то, что написано справа от знака равенства?

2. Вычитание дробей с разными знаменателями

Теперь уже дети вполне подготовлены к вычитанию дробей с разными знаменателями. Они уже знают сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями и сложение дробей с разными знаменателями. Все это такие факты, которые облегчают изучение дробей с разными знаменателями. Ведь единственный пункт, который требует к себе пристального внимания, — это приведение дробей к общему знаменателю.

Вычитание дробей с разными знаменателями начинается с того простейшего случая, когда один из знаменателей является наименьшим общим кратным данных знаменателей. Вычтем из дроби $\frac{7}{8}$ дробь $\frac{3}{4}$. Можно сначала предложить выполнить это вычитание в уме без всяких правил: $\frac{3}{4}$ равны $\frac{6}{8}$, и поэтому

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{7-6}{8}=\frac{1}{8}.$$

Таким образом, этот пример (приведение дробей к общему знаменателю и вычитание их) дети решают в уме. Тем не менее полезно проиллюстрировать это действие с помощью чертежа. Возьмем отрезок AB и разделим его на 8 равных частей (рис. 20). Часть этого отрезка AC

Рис. 20

будет равна $\frac{7}{8}$ AB. Требуется вычесть из этого отрезка отрезок, равный $\frac{3}{4}$, или после приведения к общему знаменателю $\frac{6}{8}$. На рисунке эту дробь можно представить отрезком AD. Таким образом, нам нужно вычесть такие отрезки:

$$AC-AD=DC.$$

На рисунке видно, что отрезок DC равен $\frac{1}{8}$ отрезка AB.

Теперь нужно взять дроби с большими знаменателями, но *опять такими*, чтобы знаменатель одной без остатка делился на знаменатель другой, например:

$$\frac{35}{64}-\frac{7}{16}=\frac{35-28}{64}=\frac{7}{64}.$$

После этого должны идти многочисленные упражнения такого же характера, как предложенные выше. В каждом случае нужно подметить, что один из данных знаменателей делится на другой. Этот больший знаменатель и будет общим знаменателем, а частное от деления его на меньший знаменатель будет дополнительным множителем для дроби, у которой меньший знаменатель.

Перейдем ко второму случаю, когда среди двух данных знаменателей нет такого, который был бы кратным второго. В этом случае нужно находить наименьшее кратное знаменателей. Но мы начнем с таких простейших примеров, когда наименьшее кратное можно найти в уме. Такими примерами являются:

$$\frac{7}{15} - \frac{3}{10} = ?$$

$$\frac{11}{18} - \frac{5}{12} = ?$$

$$\frac{15}{16} - \frac{5}{24} = ?$$

Если в каком-нибудь из этих случаев трудно догадаться, какой будет общий знаменатель, то можно удвоить больший знаменатель или утроить его и посмотреть, не будет ли полученное число делиться и на другой знаменатель.

Затем можно перейти к тому общему случаю, когда по соображению трудно найти наименьшее общее кратное и приходится прибегать к разложению данных знаменателей на простые множители.

Рассмотрим пример:

$$\frac{13}{40} - \frac{5}{32} = ?$$

$$\frac{13}{40} - \frac{5}{32} = \frac{13^{(4)}}{40} - \frac{5^{(5)}}{32} = \frac{52-25}{160} = \frac{27}{160}$$

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{Н.О.З.} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 160.$$

Теперь учащиеся могут решать тренировочные упражнения на вычитание и даже комбинированные задачи на сложение и вычитание.

Остается рассмотреть только частный случай вычитания, когда знаменателями являются числа взаимно простые. Например:

$$\frac{18}{35} - \frac{5}{12} = ?$$

Учащиеся уже знают, что наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению. Поэтому

$$\frac{18}{35}-\frac{5}{12}=\frac{18^{(12)}}{35}-\frac{5^{(35)}}{12}=\frac{216-175}{420}=\frac{41}{120}.$$

Для большей ясности последний случай можно записать в виде формулы:

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{n}=\frac{an-bm}{m\cdot n}.$$

Из формулы отчетливо видно, что общий знаменатель получается от умножения данных знаменателей, а дополнительным множителем для первой дроби служит знаменатель второй дроби, и обратно — дополнительным множителем второй дроби — знаменатель первой.

После этого можно предлагать всякие примеры на сложение и вычитание устно и письменно. В примерах, содержащих вместе слагаемые и вычитаемые, можно отыскивать общий знаменатель сразу для всех дробей, как слагаемых, так и вычитаемых; затем отдельно сложить слагаемые дроби и отдельно вычитаемые и из одной суммы вычесть другую.

Не следует забывать о проверке вычитания посредством сложения.

3. Вычитание смешанных чисел

Учащиеся, усвоившие сложение смешанных чисел, не встретят затруднений и при вычитании смешанных чисел. Единственное место, где преподавателю нужно быть внимательным, это случай, когда дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого. Рассмотрим последовательно ряд случаев:

а) $2-\frac{5}{8}=1\frac{3}{8}$.

Здесь из 2 берется единица и выражается в восьмых долях, получается $\frac{8}{8}$, а затем из них вычитается $\frac{5}{8}$, остается $\frac{3}{8}$.

б) $15\frac{4}{7}-5=10\frac{4}{7}$.

Случай совсем простой: вычитаемое не имеет дробной части, действие выполняется только над целыми числами.

в) $12\frac{9}{10}-\frac{2}{5}=12\frac{9-4}{10}=12\frac{5}{10}=12\frac{1}{2}$.

Вычитаемое не имеет целой части. Действие выполняется над дробными частями уменьшаемого и вычитаемого.

г) $5\frac{17}{36} - 2\frac{5}{24} = 3\frac{34-15}{72} = 3\frac{19}{72}$.

Здесь из целой части уменьшаемого вычитается целая часть вычитаемого, дроби приводятся к общему знаменателю и тоже вычитаются.

д) $6\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4} = ?$

Приводим дроби к общему знаменателю:

$$6\frac{2}{12} - 2\frac{9}{12} = ?$$

Здесь $\frac{2}{12}$ меньше $\frac{9}{12}$, поэтому для выполнения вычитания нужно взять (занять) у уменьшаемого одну целую единицу и, обратив ее в соответствующие доли, присоединить их к таким же долям уменьшаемого, а потом вычесть:

$$6\frac{2}{12} - 2\frac{9}{12} = 5\frac{14}{12} - 2\frac{9}{12} = 3\frac{5}{12}.$$

$$10\frac{2}{5} - 2\frac{7}{8} = ?$$

$$10\frac{16}{40} - 2\frac{35}{40} = 9\frac{56}{40} - 2\frac{35}{40} = 7\frac{21}{40}.$$

Не следует при вычитании смешанных чисел сначала производить вычитание целых чисел, а потом приступать к приведению дробей к общему знаменателю. Сначала нужно выяснить, возможно ли будет вычитание дробей, а потом уже приступать к вычислениям.

Таким образом, мы окончили действия первой ступени над дробными числами. Каких-нибудь принципиальных затруднений при сложении и вычитании быть не может. Необходимо только тщательно следить за соблюдением некоторых деталей в процессе выполнения действий. Укажем следующие:

1. Сложение и вычитание дробей с небольшими знаменателями следует выполнять устно.

2. Обращать при сложении и вычитании смешанные числа в неправильные дроби нецелесообразно.

3. Результаты сложения и вычитания (сумму и разность) нужно сокращать, если это возможно.

4. После выполнения действий необходимо сложение проверять вычитанием, а вычитание — сложением.

5. Общий знаменатель при сложении и вычитании нужно искать наименьший, а не какой-нибудь из числа возможных.

§ 13. Умножение дробей

Большой раздел «Умножение дробей» излагается в следующем порядке:

1. Умножение дроби на целое число.
2. Нахождение дроби данного числа.
3. Умножение целого числа на дробь.
4. Умножение дроби на дробь.
5. Умножение смешанных чисел.
6. Понятие о проценте.
7. Нахождение процетов данного числа.

Все эти вопросы связаны между собой и излагаются именно в той последовательности, какая здесь указана. В учебнике арифметики этот материал изложен менее чем на десяти страницах и, следовательно, в среднем на каждый вопрос приходится немного более одной страницы. Это обстоятельство может породить мысль, что здесь все так гладко и просто, как в учебнике, и что достаточно разделить весь материал на 7 равных частей и спокойно изложить каждую часть.

В действительности это один из самых трудных разделов арифметики, и его прохождение нельзя будет вести в равномерном темпе, а, напротив, некоторые вопросы придется проходить значительно медленнее, чем другие.

Пункт 1-й затруднений не представит, потому что для умножения дроби на целое число сохраняют силу прежние определения. Но пункт 3-й вызовет затруднения. Ведь ради того, чтобы изложить третий пункт, понадобилось введение второго пункта.

Нам кажется, что непреодолимых трудностей здесь быть не должно, и мы разъясним почему они возникали.

Вопрос об умножении числа на дробь имеет свою историю. Некоторые авторы учебников и методик, подходя к этому вопросу, старались представить дело так, что здесь ничего нового не происходит. Этим путем они надеялись избежать трудностей. Они рассуждали так: нужно придумать такое универсальное определение умножения, под которые подходили бы все случаи умножения (вплоть до умножения отрицательных чисел), и тогда все трудности отпадут сами собой. И вот такое определение было придумано (умножить одно число на другое — это значит составить из множимого новое число так, как множитель составлен из единицы). Что же получилось? Эффект получился противоположный ожидаемому. Затруднения не уменьшились, а, напротив, усилились. Мы не будем подвергать указанное определение критике: оно уже неоднократно критиковалось. Укажем лишь на то, что оно удивляет учеников и кажется им непонятным.

Мы же со своей стороны рекомендуем не становиться на тот путь, что в умножении на дробь нет ничего нового, а напротив, с самого начала советуем заявить откровенно, ничего не затушевывая, что здесь будет нечно новое; и этим путем, мы полагаем, удастся избежать многих затруднений.

1. Умножение дроби на целое число

Изучение вопроса начинается с определения. Определение умножения дроби на целое число не отличается от определения умножения целого числа на целое. Это есть нахождение суммы одинаковых слагаемых, где каждое слагаемое равно множимому, а число слагаемых равно множителю.

Предлагается ряд примеров:

$$\frac{1}{2}\times 5=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1+1+1+1+1}{2}=\frac{5}{2}=2\,\frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{3}\times 4=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2+2+2+2}{3}=\frac{8}{3}=2\,\frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{5}\times 6=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=$$

$$=\frac{3+3+3+3+3+3}{5}=\frac{18}{5}=5\,\frac{3}{5}.$$

Чтобы умножение дроби на целое число приобрело в глазах учеников еще более реальный смысл полезно давать теперь же не только абстрактные примеры, но и текстовые задачи с жизненным содержанием. Например, сколько нужно заплатить за 10 коробок спичек, если одна коробка стоит $\frac{1}{5}$ рубля?

$$\frac{1}{5} \times 10 = \frac{1 \cdot 10}{5} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2 \text{ (рубля)}.$$

Мы считаем, что, несмотря на всю простоту этого действия, ему должно быть уделено достаточно внимания. Если ученик приобретет хороший навык умножения дроби на целое число, то это поможет ему и в дальнейшем. Дело в том, что хотя последующие пункты по своему смыслу будут отличаться от данного, но длительные занятия этим первым пунктом приучат ученика к той мысли, что дробь иногда может выступать в качестве одного из сомножителей, что здесь обязательно будет фигурировать дробная черта, что здесь будет выполняться сокращение на месте не после того, как выполнены вычисления, а до выполнения вычислений. Само по себе это сокращение нельзя сводить к бездумному зачеркиванию чисел в числителе и знаменателе, а нужно рассматривать как преобразование, имеющее определенный смысл. Этот смысл должен быть понятен и доступен ученикам. В самом деле, пусть требуется $\frac{7}{12} \times 18$. В результате этого умножения мы получим:

$$\frac{7 \cdot 18}{12}.$$

Прежде всего нужно убедить ученика в целесообразности сокращения. Цель заключается здесь в том, чтобы избежать перемножения больших чисел. Далее, чтобы ученик понимал, что он делает, выполняя сокращение, нужно, чтобы он отчетливо представлял себе, что числитель дроби можно рассматривать как делимое, а знаменатель — как делитель, дробь же есть частное от деления числителя на знаменатель. Кроме того, числитель представляет собой произведение, но еще из отдела целых чисел ученик знает, что для того, чтобы разделить произведение на число, можно разделить на это число один из сомножителей.

После решения нескольких примеров следует сформулировать правило умножения дроби на целое число и написать формулу. Последнюю можно получить постепенно, рассматривая частные случаи умножения, например, можно рассмотреть:

$$\frac{3}{4}\times 2=\frac{3\cdot 2}{4};\quad \frac{3}{4}\times 3=\frac{3\cdot 3}{4};$$

$$\frac{3}{4}\times 4=\frac{3\cdot 4}{4};\quad \frac{3}{4}\times 5=\frac{3\cdot 5}{4}\text{ и т. д.}$$

Обобщая эти отдельные факты, мы можем написать:

$$\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}.$$

2. Нахождение дроби данного числа

Рассмотрим основную (важнейшую) задачу — нахождение дроби от числа. Ее так и следует называть **основная задача на дроби**. Она будет встречаться особенно часто. Кроме того, она является безусловно жизненной и естественной, в то время как обратные задачи и реже встречаются, и часто являются искусственными. В дальнейшем (будущем) мы встретимся с другими, более сложными задачами, но многие из них будут сводиться к основной.

Сначала ее нужно (во всяком случае, на первом уроке) называть задачей на нахождение части числа, а потом перейти к обычному названию.

Первоначально полезно решать ее устно и запомнить наизусть некоторые результаты. Вот первые шаги: .

Найти $\frac{1}{2}$ метра в сантиметрах: $100:2=50$ *(см)*

„ $\frac{1}{4}$ „ „ „ $100:4;\ 25$ *(см)*

„ $\frac{3}{4}$ „ „ „ $100:4;\ 25\cdot 3=75$ *(см)*

„ $\frac{1}{10}$ „ „ „ $100:10=10$ *(см)*

„ $\frac{1}{2}$ суток в часах: $24:2=12$ (час.)

„ $\frac{1}{3}$ „ „ „ $24:3=8$ (час.)

„ $\frac{1}{4}$ „ „ „ $24:4=6$ (час.)

Найти $\frac{2}{3}$ суток в часах: $24 : 3 = 8$; $8 \cdot 2 = 16$ (час.)

» $\frac{3}{4}$ » » » $24 : 4 = 6$; $6 \cdot 3 = 18$ (час.)

» $\frac{1}{6}$ » » » $24 : 6 = 4$ (час.)

» $\frac{1}{2}$ часа в минутах: $60 : 2 = 30$ (мин.)

» $\frac{2}{3}$ месяца в днях: $30 : 3 = 10$; $10 \cdot 2 = 20$ (дней)

После этого можно перейти к более трудным задачам. Под трудным мы подразумеваем задачи с бо́льшими числами. По существу, в последующих задачах ничего не будет трудного, но их придется решать не в уме, а на бумаге.

1. Мать, давая дочери 480 рублей, сказала: $\frac{3}{4}$ этих денег израсходуешь на ручные часы, а остаток денег — на продукты. Сколько стоили часы?

$480 : 4 = 120$ (руб.); $120 \times 3 = 360$ (руб.).

2. В школе учатся 1200 учащихся. Из них мальчики составляют $\frac{3}{8}$ от общего числа детей. Сколько мальчиков?

$1200 : 8 = 150$ (м.); $150 \times 3 = 450$ (м.)
или $(1200 : 8) \times 3 = 450$ (м.).

Полезно приучать учеников записывать решение задач в виде числовой формулы.

3. Один килограмм ветчины стоит 32 рубля. Сколько стоят $\frac{3}{4}$ килограмма?

Отличие этой задачи от предыдущих состоит в том, что здесь дается дробь не от той величины, которая фигурирует в задаче, а от *некоторой другой*. Мы ищем здесь не часть товара (ветчины), а часть его стоимости (денег). Решение ничем не отличается от решения предыдущих задач, потому что для нахождения стоимости покупок нужно будет взять $\frac{3}{4}$ от цены килограмма.

$(32 : 4) \times 3$; $32 : 4 = 8$; $8 \times 3 = 24$ (руб.).

Таких задач нужно решить множество. Сюжеты их должны быть разнообразны. Несколько задач нужно решать устно и рассматривать их как стандарт, к которому время от времени следует обращаться, если что-нибудь неясно. На решение основной задачи можно затратить значительно больше времени, с тем чтобы потом уделить последующим темам меньше времени.

Может возникнуть вопрос, почему основная задача помещена где-то между другими темами и как-то теряется между ними. Дело в том, что эту задачу можно было бы и выделить, например поставить ее первой в разделе действий над обыкновенными дробями, т. е. перед сложением дробей. Но так как эта задача теснейшим образом связана с вопросом умножения числа на дробь, то она поставлена непосредственно перед этим вопросом. Есть опасность, что если эти два пункта как-нибудь разъединить во времени, то дети, приступая к умножению числа на дробь, могут позабыть то, что является как раз основой для этого умножения.

После решения нескольких таких задач устно и письменно и после достаточного выяснения их смысла ученики должны сформулировать правило.

Нужно взять одну из решенных задач и выявить, какие действия и в какой последовательности применялись для ее решения. Получим правило: чтобы найти величину дроби от данного числа, нужно разделить это число на знаменатель дроби и полученное частное умножить на ее числитель.

Обозначим число, от которого нужно найти дробь, буквой a. Пусть дробь, которую нужно найти от числа a, будет обозначаться через $\frac{b}{c}$. Значит, задача формулируется так: найти дробь $\frac{b}{c}$ от числа a.

Для полной конкретизации возьмем такую задачу: монтер выполнил в доме работу по освещению и получил за труд 1000 рублей. $\frac{5}{8}$ этих денег он отложил на летний отдых. Сколько рублей он отложил на отдых?

Установим соответствие между числами в абстрактной задаче и в конкретной:

$$1000 \text{ рублей} \longleftrightarrow a$$

$$\frac{5}{8} \longleftrightarrow \frac{b}{c}$$

Решим задачу:

$$1)\ 1000 : 8 = 125;$$
$$2)\ 125 \times 5 = 625$$

или

$$(1000 : 8) \times 5 = 625,$$

или

$$\frac{1000 \cdot 5}{8} = 625.$$

Формула примет вид:

$$\frac{a \cdot b}{c}.$$

Понимают ли ученики, что данное в задаче число, от которого находят дробь, согласно формуле, умножается на числитель и делится на знаменатель? Предложите ученикам написать формулу, изменив все буквы и решив другую конкретную задачу.

3. Умножение целого числа на дробь

После изложения вопроса о нахождении дроби числа нужно дать определение умножения на дробь: умножить целое число (множимое) на дробь (множитель) — значит найти эту дробь множимого.

Итак, под умножением на дробь разумеется не то, что раньше понималось под умножением на целое число, а нахождение дроби данного числа. Это сразу мобилизует учеников и заставляет их насторожиться. Мы считаем, что с этого нужно начать, а потом уже нужно не поскупиться на всякие разъяснения.

Переходим к умножению целого числа на дробь. В свое время мы изучали умножение целых чисел и знаем, что под умножением разумеется сложение одинаковых слагаемых. Например,

$$10 \times 4 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40.$$

Значит, всякое умножение можно заменить сложением одинаковых слагаемых.

Теперь напишем такое умножение $12 \times \frac{3}{4}$.

Это действие нельзя рассматривать, как нахождение суммы равных слагаемых, потому что у нас на месте множителя стоит дробь, т. е., иными словами, не указано ни одного слагаемого. Значит, в данном случае под умножением нужно разуметь не то, что разумелось раньше, а нечто другое. Что же именно?

Ответ на этот вопрос должен дать учитель, а не ученик, потому что ученик не может знать тех соглашений, которые установлены в математике.

Итак, под умножением числа на дробь условились понимать нахождение дроби данного числа.

Если предыдущий параграф усвоен учениками хорошо, то все остальное будет ясно и в дальнейшем никаких трудностей не встретится.

Как же выполняется умножение целого числа на дробь? По существу, уже все рассказано выше. Мы еще повторим этот вывод, потому что такое повторение всегда полезно. Теперь мы будет исходить не из текстовой задачи, а из числового примера. Пусть нужно 50 умножить на $\frac{3}{4}$. Согласно определению, это значит — найти $\frac{3}{4}$ от 50. Найдем сначала $\frac{1}{4}$ от 50, а затем уже $\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{4} \text{ числа } 50 \text{ составляет } \frac{50}{4};$$

$$\frac{3}{4} \text{ числа } 50 \text{ составляют } \frac{50 \cdot 3}{4}.$$

Следовательно,

$$50 \cdot \frac{3}{4} = \frac{50 \cdot 3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}.$$

После решения нескольких подобных примеров с другими числами можно предложить учащимся сформулировать правило: чтобы умножить целое число на дробь, нужно умножить целое число на числитель дроби и это произведение сделать числителем, а знаменателем подписать знаменатель данной дроби.

Затем можно написать формулу:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Ученики должны сравнить это правило с правилом нахождения дроби данного числа и убедиться, что, по существу, между этими двумя правилами нет разницы; они отличаются только порядком действий, что, конечно, не может повлиять на результат.

Формулы же в обоих случаях совершенно тождественны.

После этого следует еще немало потрудиться над этим новым действием. Нужно решить множество примеров устно и письменно, нужно решить ряд текстовых задач, выучить правило, поупражняться в применении формулы.

Рассмотрим теперь задачу на *нахождение площади прямоугольника*. Возьмем прямоугольник $ABCD$ со следующими размерами: длина 4 и ширина 3 линейные единицы (рис. 21). (Чертеж увеличен.)

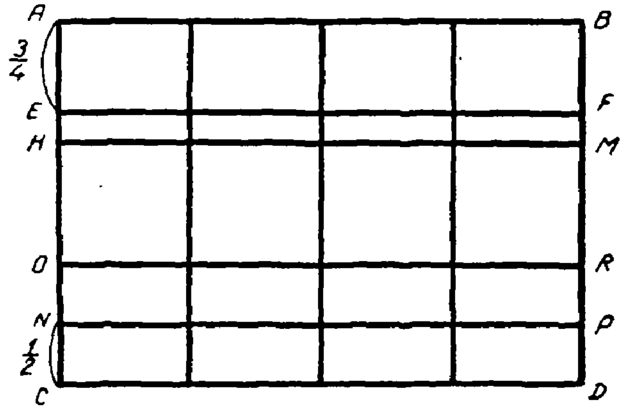


Рис. 21

Площадь этого прямоугольника будет равна $4 \times 3 = 12$ (*кв. см*).

Теперь вычислим площадь прямоугольника $ABFE$. Его длина 4 *см*, а ширина $\frac{3}{4}$ *см*. Поступая так же, как и прежде, найдем площадь этого прямоугольника:

$$4 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ (кв. см).}$$

Проверим, соответствует ли найденный результат (3 *кв. см*) действительности. Проверять нужно с помощью чертежа. Площадь прямоугольника $ABFE$ действительно равна 3 *кв. см*, потому что она состоит из площадей четырех маленьких прямоугольников, каждый из которых имеет площадь, равную $\frac{3}{4}$ *кв. см*:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

Можно проверку выполнить иначе: взять прямоугольник $ABMH$ и вычесть из него полоску $EFMH$, которая равна 1 *кв. см*. В результате получим $4-1=3$. Значит, вычисление сделано правильно.

Наконец, вычислим площадь прямоугольника $NPDC$, у которого длина 4 *см*, а ширина $\frac{1}{2}$ *см*. Площадь его будет

$$4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ (кв. см)}.$$

Проверим полученный результат, соответствует ли он действительности. Интересующая нас площадь состоит из четырех полуквадратов; площадь каждого из них равна половине квадратной единицы. Значит, площадь всей полосы равна 2 *кв. см*. Очевидно, площадь вычислена правильно.

Следовательно, умножение целого числа на правильную дробь дает возможность решать совершенно правильно задачу нахождения площади прямоугольника, и полученная в свое время формула площади ($S = ab$) сохраняет свою силу и в этом случае.

Возникает такой вопрос: мы определили в свое время действие умножения целого числа на дробь, как нахождение дроби от множимого. Сохраняет ли это определение силу теперь, в двух последних случаях, когда мы искали площади полос? Да, сохраняет. В предпоследнем случае имеется умножение:

$$4 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ (кв. см)}.$$

Здесь мы ищем дробь $(\frac{3}{4})$ от 4 *кв. см*. На чертеже полоса $ABMH$ равна 4 *кв. см*. Умножив 4 на $\frac{3}{4}$, мы нашли $\frac{3}{4}$ от 4, и эта дробь равна 3.

В последнем случае имеется умножение:

$$4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ (кв. см)}.$$

Здесь мы тоже ищем дробь $(\frac{1}{2})$ от 4 *кв. см*. На чертеже полоса $ORDC$ равна 4 *кв. см*. Умножив 4 на $\frac{1}{2}$, мы нашли $\frac{1}{2}$ от 4, и эта дробь равна 2.

Таким образом все наши действия вполне отвечают определению умножения.

Далее ученики могут поставить вопрос, почему при умножении на правильную дробь произведение меньше множимого. Может быть, этот вопрос и не будет поставлен. Вообще его постановка говорит о неблагополучии в изложении или в изучении этого раздела. Возникновение такого вопроса говорит о том, что ученики не поняли этой темы.

Тот факт, что произведение меньше множимого, является совершенно естественным. Подобный факт был бы противоестественным при умножении целых чисел. Но теперь, когда мы дали новое определение умножения, появление такого вопроса говорит либо о том, что ученики не поняли этого определения, либо не обратили на него внимания, либо отнеслись к нему с той легкомысленностью, какая иногда встречается у детей и выражается фразой: «Ладно, рассказывайте, что такое умножение, а мы и без вас знаем, что это такое».

Для ученика, который хорошо усвоил, что под умножением целого числа на дробь условились понимать нахождение дроби данного числа, должно быть ясно, что искать дробь (правильную) от числа — это значит искать часть этого числа. Часть же всегда меньше целого. Таким образом, когда мы, например, умножаем 20 на $\frac{3}{4}$, то мы должны заранее ожидать, что мы получим только три четверти от 20.

Что касается условного характера определения умножения на дробь, то дети должны припомнить факты, с которыми они встречались еще при изучении целых чисел. Умножение там определялось, как нахождение суммы одинаковых слагаемых. Однако умножение на единицу не подходит под это определение и мы условно принимаем, что произведение числа на единицу равно данному числу, т. е. $a \cdot 1 = a$.

Точно также при умножении числа на нуль мы принимаем, что произведение равно нулю, т. е. $a \cdot 0 = 0$.

Могут возникнуть еще такие вопросы: почему при умножении на дробь мы пошли как будто более трудным путем, а не воспользовались, например, перестановкой сомножителей или вычислением площади прямоугольника или каким-нибудь иным, более простым, способом. Кроме того, не ученики, а многие авторы, пытаясь избежать трудностей, давали универсальное определение умножения (умножить одно число на другое — значит из множимого составить новое число точно так, как множитель составлен из единицы). Последнее определение довольно старое, и встречается оно у многих авторов (Рашевский, Малинин и Буренин, Португалов и другие).

Ученики такого определения никогда не придумают, но первый вопрос у них возникнет обязательно.

Почему мы не воспользуемся перестановкой сомножителей? Почему мы не можем сказать, что если $\frac{3}{4}\times 8=6$, то $8\times\frac{3}{4}=6$? Мы не можем пользоваться переместительным законом для дробных чисел, потому что он установлен пока только для целых чисел. Однако нам могут возразить, что мы стремимся к исключительной строгости. Зачем на этой ступени стремиться к такой большой строгости? Неужели дети не поверят, что этим факт доказан в математике, и разве на этой ступени мы всегда стремимся к такой исключительной строгости?

Дело в том, что отступать от строгости не стоит, если от этого нет никакого выигрыша. Что мы этим выиграем? Ничего. Мы «затушуем» это неприятное место, а ученики от этого пользы не получат. Важно не отмахиваться от трудностей, нужно преодолеть трудное место и понять его, а если мы переставим сомножители, то, по существу, мы ничего не объясним, а только искусным маневром обойдем опасное место.

Что касается того факта, что многие учителя и даже авторы учебников пользовались «универсальным» определением умножения, то об этом нужно сказать следующее: определение это не совсем удачно потому, что оно двусмысленно. Но если бы мы даже договорились раз навсегда, в каком смысле его нужно понимать, то оно все-таки не принесло бы пользы делу обучения, потому что оно непонятно ученикам. Об этом говорит педагогический опыт.

Может возникнуть, наконец, еще такой вопрос, почему это особое действие, которое мы сейчас изучали, получило название умножения. Здесь будет разрыв между трактовкой этого вопроса в науке и в школьной практике. В математике действиям, различным по своим внешним признакам и природе компонентов, дается общее название в том случае, когда эти действия обладают общими формальными свойствами (например, подчиняются переместительному и сочетательному законам и т. п.). Для школы такое объяснение было бы неуместным. Поэтому мы предлагаем другое объяснение. Мы говорим: одинаковые по смыслу (содержанию) задачи решаются одним действием, т. е. мы считаем, так сказать, непоследовательным находить стоимость 5 *кг* сахара при цене 10 руб. за 1 *кг* одним действием, а стоимость $\frac{3}{4}$ *кг* при той же цене другим действием. Напротив, мы принимаем за очевидный факт, что в обоих этих случаях нужно применять одно действие, и это действие называем умножением:

$$10 \times 5 = 50 \text{ (руб.)},$$

$$10 \times \frac{3}{4} = 7 \text{ (руб.) } 50 \text{ (коп.)}.$$

4. Умножение дроби на дробь

После того как учащиеся усвоили умножение целого числа на дробь, они уже не встретят никаких затруднений при умножении дроби на дробь. В самом деле, если можно найти, например, половину от 10, то почему нельзя найти половину от $\frac{1}{4}$, от $\frac{1}{3}$, от $\frac{1}{5}$ и т. д.?

Таким образом, определение умножения в данном случае остается прежнее, т. е. умножить дробь на дробь— это значит найти дробь от множимого. Для первоначального нахождения искомого результата можно обратиться

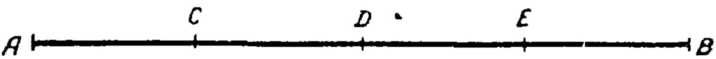


Рис. 22

к чертежу. Найдем половины от дробей, написанных выше. Найдем половину от четверти. Построим отрезок AB, примем его за единицу и разделим на 4 равные части. Каждая из полученных частей, т. е. AC, CD, DE и EB, будет равна $\frac{1}{4}$ отрезка AB (рис. 22). Разделим теперь каждый из этих отрезков пополам, мы получим восьмые доли, потому что весь отрезок AB тем самым разделился на 8 равных частей. Как же решилась наша задача? Мы должны были найти половину от $\frac{1}{4}$. Оказалось, что половина от четверти равна $\frac{1}{8}$. Это можно записать с помощью знака умножения:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Можно было бы, не прибегая к чертежу, рассуждать следующим образом: требуется $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$; по определению, это значит, что нужно найти половину от четверти, или, иными словами, нужно $\frac{1}{4}$ уменьшить в два раза. Спросим учеников, как можно дробь уменьшить в два раза? Они должны это знать. Дробь можно уменьшить в два раза или путем уменьшения числителя в два раза, или путем увеличения знаменателя в два раза. Возьмем наш пример:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = ?$$

Уменьшить числитель в два раза (разделить на два) мы не можем, но увеличить знаменатель всегда возможно. Значит,

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Мы получили тот же самый результат, что и с помощью чертежа. Теперь найдем половины от двух остальных дробей:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ и } \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Мы выполнили умножение в трех простейших случаях. Теперь рассмотрим более общий случай.

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = ?$$

Что это значит? Найти $\frac{5}{7}$ от $\frac{3}{4}$. Поступим так: сначала найдем $\frac{1}{7}$ от $\frac{3}{4}$, а потом $\frac{5}{7}$.

$\frac{1}{7}$ числа $\frac{3}{4}$ выразится так: $\frac{3}{4 \cdot 7}$;

$\frac{5}{7}$ числа $\frac{3}{4}$ выразится так: $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$.

Значит, вместе все это можно написать так:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

После этого нужно сопоставить полученный результат с результатами трех предыдущих примеров и вывести правило умножения дроби на дробь.

Чрезвычайно существенным при умножении дробей является своевременное сокращение. Об этом мы уже говорили выше, полезно напомнить еще раз. Сокращение должно быть сознательным. Положим, делается умножение:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 9} = \frac{5}{18}.$$

Выполняя сокращение, учащийся не должен механически зачеркивать сокращаемые числа, а должен думать и рассуждать, например, в данном случае так: разделим числитель дроби на 4, тем самым мы уменьшим его в 4 раза. Значит, после этого действия наша дробь уменьшилась в 4 раза. Теперь разделим знаменатель на 4 (в знаменателе есть число 8, которое делится на 4), тем самым мы увеличим дробь в 4 раза. Значит, мы сделали два уничтожающих друг друга действия: уменьшили дробь в 4 раза и затем увеличили результат в 4 раза, дробь осталась без изменения.

Сокращение дробей довольно часто приводит к ошибкам. Наиболее типичной ошибкой является сокращение слагаемых из числителя и знаменателя. Существует взгляд, что не нужно подсказывать детям ошибочные действия, нужно воспитывать только на правильных образцах. Согласимся с этим. Но все же рекомендуем преподавателю, как только хотя бы один ученик допустит сокращение слагаемых, сейчас же подвергнуть этот случай обсуждению и осуждению. Нужно поставить вопрос, есть ли такое правило, что для деления суммы достаточно разделить только одно слагаемое. Если ученик его применяет, то пусть он найдет его в учебнике.

Для большей убедительности изложенного полезно прибегнуть к чертежу. Проще всего взять квадрат, разделить каждую его сторону на 8 равных частей и через точки деления провести две серии параллельных прямых.

В квадрате получится 64 клетки. Умножим $\frac{5}{8}$ на $\frac{3}{8}$. Результат выразится дробью $\frac{15}{64}$. Этот результат и нужно проверить по чертежу. Для этого на одной стороне квадрата нужно отложить 5 клеток, а на другой — 3 и потом подсчитать клетки.

Очень полезно записать правило умножения дробей в виде формулы. Эта формула очень удобна:

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}.$$

5. Умножение смешанных чисел

Умножение смешанных чисел почти не вносит ничего нового в теорию умножения дробей. Тем не менее этот раздел нужно неторопливо разобрать с учащимися, потому что здесь будут подытожены и еще раз пересмотрены все вопросы, относящиеся к умножению дробей. Мы рассмотрим последовательно все относящиеся сюда случаи.

$$\text{а) } 2\frac{3}{5} \times 5 = ?$$

Во множимом смешанное число $2\frac{3}{5}$. Обратим его в неправильную дробь:

$$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$

Задача сводится теперь к умножению дроби на целое число. Этот случай мы рассмотрели выше:

$$\frac{13}{5} \times 5 = \frac{13 \cdot 5}{5} = 13.$$

Этот пример можно было бы решить иначе, применяя распределительный закон:

$$2\frac{3}{5} \cdot 5 = \left(2 + \frac{3}{5}\right)5 = 2 \cdot 5 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 10 + 3 = 13.$$

Такую возможность всегда следует использовать.

В примере нет никаких особенностей, которые могли бы смутить учеников. Здесь множитель больше единицы, значит, произведение больше множимого.

$$\text{б) } 12 \times 3\frac{3}{4} = ?$$

Во множителе смешанное число $3\frac{3}{4}$. Обратим его в неправильную дробь:

$$12 \times \frac{15}{4}.$$

Задача теперь сводится к умножению целого числа на дробь. Этот случай мы рассмотрели выше.

$$12 \times \frac{15}{4} = \frac{12 \cdot 15}{4} = 45.$$

Этот пример можно было бы решить иначе, применяя распределительный закон:

$$12 \times 3\frac{3}{4} = 12 \times \left(3 + \frac{3}{4}\right) = 12 \times 3 + 12 \times \frac{3}{4} =$$
$$= 36 + 9 = 45.$$

Ученики должны использовать и эту возможность. Решение примера не может вызвать никаких недоумений. Множитель здесь больше единицы, значит, произведение, как и следует ожидать, больше множимого.

в) $12\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = ?$

Во множимом смешанное число $12\frac{1}{2}$. Обратим его в неправильную дробь:

$$12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}.$$

Задача сводится теперь к умножению дроби на дробь. Такой случай был рассмотрен выше:

$$\frac{25}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 10.$$

В результате умножения здесь получилось число, меньшее множимого. Этого и нужно было ожидать, так как мы умножили $1\frac{1}{2}$ на правильную дробь $\frac{4}{5}$.

г) $\frac{7}{8} \times 4\frac{2}{3} = ?$

Во множителе смешанное число $4\frac{2}{3}$. Обратим его в неправильную дробь:

$$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

Теперь задача сводится к умножению дроби на др .
Такой случай был рассмотрен выше.

$$\frac{7}{8} \times \frac{14}{3} = \frac{7 \cdot 14}{8 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}.$$

Мы умножали правильную дробь $\left(\frac{7}{8}\right)$ на смешанное число (число, большее единицы). Результат выразился смешанным числом (числом, большим единицы).

$$\text{д) } 5\frac{3}{5} \times 3\frac{2}{11} = ?$$

Здесь и множитель, и множимое выражены смешанными числами. Обратим каждое из них в неправильную дробь:

$$5\frac{3}{5} = \frac{28}{5}; \quad 3\frac{2}{11} = \frac{35}{11}.$$

Теперь нам остается перемножить две дроби. Напишем весь процесс подробно:

$$5\frac{3}{5} \times 3\frac{2}{11} = \frac{28}{5} \times \frac{35}{11} = \frac{28 \cdot 35}{5 \cdot 11} = \frac{28 \cdot 7}{1 \cdot 11} = \frac{196}{11} = 17\frac{9}{11}.$$

Можно было бы перед выполнением этого действия сделать так называемую «прикидку», т. е. хотя бы грубо оценить ожидаемый результат. Для этого нужно перемножить только целые части сомножителей (5 и 3), получится 15. Отсюда можно сделать вывод, что произведение должно быть больше 15.

Теперь учащиеся могут сформулировать правило умножения смешанных чисел.

Здесь после рассмотрения всех случаев умножения можно подумать о некотором общем правиле умножения чисел и целых, и дробных. Какие бы два числа мы ни взяли, их всегда можно перемножить по правилу умножения двух дробей. Почему? Потому что если среди двух множителей есть целое число, то его можно рассматривать как дробь со знаменателем, равным единице. Если же среди сомножителей есть смешанное число, то его можно обратить в неправильную дробь.

После изучения трех действий полезно, прежде чем перейти к делению, сделать остановку и проделать ряд упражнений на три совместные действия. Здесь можно решить несколько хорошо подобранных примеров со скобками и без скобок, а также несколько текстовых задач.

зно написать на доске и в тетрадях такую легко
ую таблицу:

	$12 \times 6 = 72$
	$12 \times 5\frac{1}{6} = 62$
	$12 \times 5 = 60$
	$12 \times 4\frac{1}{2} = 54$
	$12 \times 4 = 48$
	$12 \times 3 = 36$
	$12 \times 2\frac{3}{4} = 33$
	$12 \times 2 = 24$
	$12 \times 1 = 12$
	$12 \times \frac{5}{6} = 10$
	$12 \times \frac{3}{4} = 9$
	$12 \times \frac{2}{3} = 8$
	$12 \times \frac{1}{2} = 6$
	$12 \times \frac{1}{3} = 4$
	$12 \times \frac{1}{4} = 3$
	$12 \times \frac{1}{6} = 2$
	$12 \times \frac{1}{12} = 1$
	$12 \times 0 = 0$

Эту таблицу нужно внимательно рассмотреть. Достойны внимания следующие факты:

1. Множимое во всех 18 случаях остается без изменения, множитель изменяется и при этом все время уменьшается (убывает до нуля).

2. До тех пор пока множитель был больше единицы произведение было больше множимого.

3. При множителе, равном единице, произведение равно множимому.

4. Во всех тех случаях, где множитель меньше единицы (равен правильной дроби), произведение меньше множимого.

5. При множителе, равном нулю, произведение равно нулю.

После этого полезно предложить учащимся другую таблицу, которая отличается от первой тем, что в ней множимое выражено не целым, а дробным числом. Ученики должны рассмотреть каждую строчку этой таблицы (ее можно изобразить на большом листе и повесить в классе), снова решить каждый пример и сравнить свое решение с табличным. Работу необходимо проводить внимательно и аккуратно.

Множимое во всех 18 случаях равно $\frac{1}{2}$, множитель изменяется, постепенно уменьшаясь от шести до нуля. Дальнейшее рассмотрение таблицы можно провести с помощью вопросов.

1. Как изменяется произведение при уменьшении множителя от 6 до единицы?

2. Чему равно произведение, когда множитель равен единице?

3. Что больше — множимое или произведение в тех случаях, когда множитель меньше единицы? Почему?

4. Чему равно произведение в том случае, когда множитель равен нулю?

Таблицу можно разделить на четыре неравные части горизонтальными прямыми:

в первой части произведение больше множимого,
во второй части произведение равно единице,
в третьей части произведение меньше множимого,
в четвертой части произведение равно нулю.

Эти замечания относятся и к первой таблице.

$\frac{1}{2}\times 6 = 3$ $\frac{1}{2}\times 5 = 2\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\times 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}\times 4 = 2$ $\frac{1}{2}\times 3 = 1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\times 2\frac{3}{4} = 1\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}\times 2 = 1$ $\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$ $\frac{1}{2}\times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}\times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}\times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}\times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}\times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}\times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{2}\times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$
$\frac{1}{2}\times 0 = 0$

6. Понятие о процентах

Теперь рассмотрим некоторую разновидность (вариант) или частный случай основной задачи на дроби. Сначала напомним основную задачу.

Я выехал ночью из города *A* по направлению к городу *B*, между которыми расстояние 600 *км*. Утром я посмотрел на часы и сообразил, что я проехал уже $\frac{3}{4}$ всего расстояния. Сколько *км* я проехал?

Решение: $600 \times \frac{3}{4} = 450$ (*км*).

Это образец основной задачи.

Рассмотрим теперь такую задачу.

На одном участке железнодорожного пути уложено 800 шпал. В текущем году во время ремонта сменили $\frac{13}{100}$ всех шпал. Сколько шпал сменили?

$$\text{Решение: } 800 \times \frac{13}{100} = 104.$$

В этой задаче иное содержание, чем в предыдущей, и другие числа, но, так сказать, здесь сохранен тот же самый тип: нахождение дроби данного числа. В силу этого обе задачи решаются одним и тем же способом. В обеих задачах применяется умножение числа на дробь. Значит, по существу, вторая задача почти ничем, за исключением чисел и сюжета, не отличается от первой. Но для решения почти безразлично, какие числа попались в задачах, важно ведь только содержание. Небольшие затруднения возникают только в тех случаях, когда в условие входят слишком большие числа или неудобные дроби, требующие утомительных вычислений, но это вопрос не принципиального характера.

Таким образом, ученик, который решил первую задачу, без труда решит и вторую.

Мы остановим внимание учащихся на второй задаче, потому что в ней встретилась дробь со знаменателем 100. Конечно, знаменатель 100 ничуть не лучше и не хуже знаменателя 4, который встречается в первой задаче. Но во многих чисто практических задачах стараются употреблять дроби именно с этим знаменателем (100), и поэтому целесообразно на эти задачи обратить некоторое внимание. Почему задачи именно с этим знаменателем получили широкое распространение в практике, объясняется тем, что очень часто удобно выражать дроби, встречающиеся в различных задачах, в одинаковых долях, в частности в сотых. Чтобы это было яснее, рассмотрим пример. В одной школе учится 800 учеников, причем успевающие составляют $\frac{81}{10}$ от общего числа учащихся: в другой школе — 900 учеников и успевающие составляют $\frac{87}{100}$ от общего числа учащихся.

В этой задаче число успевающих выражается двумя дробями со знаменателем 100 и сразу видно, что успеваемость во второй школе выше, чем в первой. А если бы дроби были с разными знаменателями, то об успеваемости судить было бы труднее. Теперь можно спросить, ну, а если бы знаменатель был не 100, а положим, 50 или 200, то тогда удобно было бы судить об успеваемости или неудобно? Можно взять и 50, можно взять и 200, но практика людей избрала 100, а почему — будет сказано позже. Сейчас же мы обращаем внимание на тот факт, что в задачах удобно выражать дробные числа в одних и тех же долях.

Теперь попробуем решить нашу задачу, т. е. вычислить, сколько успевающих учеников в первой школе и сколько во второй.

Решение: 1) $800 \times \frac{81}{100} = 648$ (учеников),

2) $900 \times \frac{87}{100} = 783$ (ученика).

Представим себе теперь, что об этих двух школах было сказано следующее: в одной школе учится 800 учеников, из них успевающих 648, в другой школе 900 учеников, из них успевающих 783, где лучше учатся?

Мы выпишем эти числа для сопоставления:

I школа — 800 учащихся — 648 успевающих
II » 900 » 783 »

Рассматривая эти числа, трудно сказать, в какой школе успеваемость выше, правда, во второй школе успевающих больше, но ведь в ней и учащихся больше. А вот две дроби, данные в задаче $\left(\frac{81}{100}$ и $\frac{87}{100}\right)$ красноречиво говорят о том, что успеваемость во второй школе выше, чем в первой. Мы провели эти рассуждения для того, чтобы показать, что в некоторых случаях сами числа говорят менее убедительно, чем некоторые полученные из них отвлеченные дроби с равными знаменателями.

Что касается того, почему было избрано число 100, а не 1000, то дать научно обоснованного ответа на этот вопрос нельзя. Учащимся нужно простое и доступное им объяснение. Можно сказать, что число 100 является средним по величине между числами 10 и 1000. Число 10 является очень малым. Например, если мы возьмем предыдущую задачу и попробуем выразить число неуспевающих (783) в десятых долях, то почувствуем, что это неудобно. Число же 1000 является довольно большим, неудобным для сравнения и трудно обозримым. Поэтому жизненная практика выдвинула в качестве числа, удобного для всякого рода сравнений, число 100. Число 10 в этих целях не употребляется, что же касается числа 1000, то и оно иногда употребляется, но об этом ученики узнают впоследствии.

Мы выяснили, что при решении основной задачи мы часто будем пользоваться дробями со знаменателем 100. Несмотря на то, что эти задачи ничем не отличаются от задач на нахождение дроби числа, которые мы решали раньше, все-таки учащиеся иногда видят в этих задачах что-то новое и необычное и затрудняются в их решении.

Затруднение возникает, вероятно, потому, что теперь эти задачи по-новому называются — они называются задачами на проценты. А называются они так потому, что сотые части чисел принято называть процентами. Чтобы облегчить решение этих задач, нужно в старых задачах, где встречаются сотые доли, изменить терминологию. Вот недавно мы решали задачу о замене шпал на некотором участке железнодорожного пути, там встречалась дробь $\frac{13}{100}$ нужно теперь ввести в эту задачу словно «проценты». Кроме того, мы решали задачу об успеваемости учеников в двух школах, нужно и в эту задачу ввести слово «процент».

Одним словом, нужно проделать некоторую работу, чтобы ученики привыкли к новым формулировкам. Для этой цели мы предлагаем здесь несколько задач, которые нужно неторопливо рассмотреть и решить с учениками. Терминология должна быть двойная, т. е. одну и ту же задачу нужно сформулировать со словом «процент» и ее же — без этого слова. Вот образцы этих задач.

1. Служащий получает 800 рублей в месяц. Из них он вносит в профессиональный союз 1%. Сколько это составляет рублей?

2. Сберегательные кассы платят вкладчикам 2% в год с положенной суммы. Сколько получит дохода вкладчик, положивший в кассу 500 рублей?

3. Комната имеет объем 60 *куб. м*. Сколько в ней кубических метров кислорода, если кислород составляет приблизительно 20% воздуха?

4. Один сорт сукна стоил 200 рублей. Цена на него понизилась на 15%. На сколько рублей понизилась цена на сукно?

5. Школа получила 600 учебников, причем задачники составили 12%. Сколько было задачников?

6. В одном населенном пункте 5000 человек. За год население увеличилось на 3%. Найти прирост населения.

7. Сколько содержится борной кислоты в 250 *г* ее четырехпроцентного раствора?

8. В классе 40 учеников. Из них неуспевающих по арифметике 5%. Сколько учеников не успевают по арифметике?

9. Из одного пункта в другой перевезли 6000 яиц. Бой в дороге составил 5%. Сколько яиц разбито при перевозке?

10. В одном учебном заведении 2000 студентов. Из них иногородних 32%. Сколько иногородних студентов?

После этого необходимо рассмотреть и выучить наизусть некоторые основные (опорные) равенства, а именно:

1 соответствует 100%,
$\frac{1}{2}$ „ 50%,
$\frac{3}{4}$ „ 75%,
$\frac{1}{4}$ „ 25%,
$\frac{1}{10}$ „ 10%,
$\frac{1}{5}$ „ 20%,
$\frac{3}{20}$ „ 15%,
$\frac{9}{10}$ „ 90%,

$\frac{4}{5}$	соответствуют	80%,
$\frac{3}{5}$	"	60%,
$\frac{2}{5}$	"	40%,
$\frac{3}{10}$	"	30%,
$\frac{1}{20}$	"	5%,
$\frac{1}{50}$	"	2%,
$\frac{1}{100}$	"	1%,
$\frac{1}{3}$	"	33% (прибл.),
$\frac{2}{3}$	"	66% (прибл.),
$\frac{1}{25}$	"	4%,
$\frac{7}{10}$	"	70%.

7. Нахождение процентов данного числа

Задача нахождения процентов данного числа есть первая из задач на проценты. Успех ее решения будет обеспечен, если с самого начала будет подчеркнуто, что эта задача ничем не отличается от задачи о нахождении дроби данного числа. В силу этого устанавливается тот непреложный факт, что для решения первой задачи на проценты ничего не нужно знать сверх того, что ученики знают о нахождении дроби данного числа. Задача о нахождении дроби данного числа может быть решена двумя действиями, но это уже, так сказать, давно пройденный этап. Ученик, усвоивший умножение на дробь, должен решать эту задачу одним действием — умножением числа на дробь. То же самое можно сказать и относительно первой задачи на проценты, ее можно решать двумя действиями, но рекомендуется делать одним действием. Можно в редких случаях снова решать ее в два действия, но это только в тех случаях, когда дети с трудом усваивают задачу.

Приступить к решению первой задачи можно так: предложить две формулировки какой-нибудь очень простой задачи «в дробях» и «в процентах».

Например: в магазин доставили 500 тарелок. Из них $\frac{3}{100}$ в дороге разбилось. Сколько тарелок разбилось?

Решение двумя действиями:

$$1)\ 500:100=5,$$
$$2)\ 5\times 3=15.$$

Решение одним действием:

$$500\times\frac{3}{100}=\frac{500\cdot 3}{100}=15.$$

Формулировка задачи в процентах: в магазин доставили 500 тарелок. Из них 3% разбилось. Сколько тарелок разбилось?

Решение: 3% составляют $\frac{3}{100}$, следовательно

$$500\times\frac{3}{100}=15.$$

Мы ограничимся здесь лишь немногими рекомендациями. Процентом числа называется сотая часть этого числа. Но можно сказать иначе: проценты указывают, сколько каких-нибудь предметов приходится на 100 (сотню) этих предметов. Например, в последней задаче сказано, что разбили 3% тарелок, иными словами, на каждую сотню тарелок приходится 3 разбитых. Это полезно помнить, потому что благодаря этому мы можем делать проверку решения задач. В самом деле, на каждую сотню приходится 3 разбитых тарелки, а сотен пять, значит, всего разбито 15 тарелок, а этот результат мы нашли и посредством вычисления.

Далее, бывают, например, задачи такого типа. Учреждение получило 3000 рублей. Из этих денег 30% израсходовано на библиотеку, 40%—на оплату лекторов, 20%—на ремонт лекционного зала и 10% — на электрификацию. После решения задачи будут получены следующие цифры: библиотека — 900 рублей, лекторы — 1200 рублей, ремонт — 600 рублей, электричество — 300 рублей.

Рекомендуется проверить, чему равна сумма процентов, данных в задаче: 30%+40%+20%+10%=100%. Значит, общая стоимость мероприятий принята за 100%. Такая проверка необходима, потому что эта цифра может быть, допустим, случайно не равна 100.

Кроме того, нужно проверить свои вычисления. Для этого нужно сложить числа, полученные при решении:

$$900+1200+600+300=3000.$$

Методы проверки (контроля) могут быть различные. Иногда в задаче может встретиться какое-нибудь очень несложное число процентов, например: 10%, 20%, 25%, 50% и т. д. В этих случаях проверка сильно упрощается. Например, требуется найти 10% от 600. Мы можем выполнить все выкладки и получим 60. Однако нетрудно догадаться, что 10% представляют собой десятую часть числа и, следовательно, можно было, не решая задачу по общему правилу, найти десятую часть от 600. Но если уж задача решена, то, принимая это во внимание, легко ее проверить. Вообще нужно добиться того, чтобы ученики легко переходили от одной формы записи к другой, например: $20\% — 0{,}2 — \frac{1}{5}$.

Это послужит и для облегчения решения, и для контроля. В таблице, которая была дана выше, эти соотношения указаны, а такие простые случаи, как те, что 50% — это половина, 25% — четверть, 75% — три четверти, — ученик должен постоянно помнить. Мы сказали выше, что эти равенства могут быть для него опорными. Что это значит? Это значит, что на них можно опираться даже в тех случаях, когда дается число процентов, близкое к знакомому.

Например, нужно найти 21% от 800. Здесь придется выполнить несложные вычисления. Однако полезно предварительно сделать такую «прикидку»: 21% это немного больше 20%, а 20% — это одна пятая от числа. Поэтому попробуем сообразить, чему равна одна пятая от 800. Это будет 160. Значит, искомый результат должен быть несколько больше 160, т. е. $800\times0{,}21 = 168$.

Значит, этот прием позволяет нам приблизительно оценить возможный результат.

То же самое можно повторить и относительно процентов, близких к «опорным», например: 9%, 11%, 19%, 22%, 49%, 51%, 24%, 26% и т. д.

§ 14. Деление дробей

Мы указываем следующий порядок изложения этой темы: 1) деление целого числа на целое (конечно, в случае дробного частного), 2) деление дроби на целое число, 3) деление целого числа на дробь, 4) деление дроби на дробь, 5) деление смешанных чисел, 6) нахождение числа по данной его дроби, 7) нахождение числа по его процентам.

Кроме того, мы не склонны класть в основу этого раздела задачу на нахождение числа по данной его дроби. Эта задача у нас стоит на шестом месте. Она носит крайне искусственный характер, и эта искусственность чувствуется учениками. В самом деле, рассмотрим задачу: я израсходовал 32 руб., что составляет $\frac{2}{5}$ бывших у меня денег; сколько у меня было денег. Искусственность этой задачи очевидна. Совершенно понятно, что для того чтобы расходовать, нужно было иметь деньги, а для того, чтобы сообразить, что я потратил именно $\frac{2}{5}$, нужно было знать, **с к о л ь к о** у меня денег.

Чувствуя искусственность такой задачи, многие авторы несколько ее изменяют и предлагают, например, такую: за $\frac{3}{4}$ *кг* конфет заплатили 30 руб.; сколько стоит килограмм конфет? Это уже не совсем та задача, о которой говорилось выше. Она тоже искусственная, только здесь не говорится, что 30 — это и есть величина дроби ($\frac{3}{4}$) от некоторого числа; это, так сказать, подразумевается. Однако существо дела от этого не изменяется.

1. Деление целого числа на целое

Деление целого числа на целое относится к области целых чисел, и в свое время оно было рассмотрено, но не полностью. Мы рассматривали в свое время такой случай, когда деление выполнялось, как говорят, «нацело». Например,

$$30 : 5 = 6.$$

Мы рассматривали, кроме того, случай деления с остатком. Например,

$$43 : 5 = 8 \text{ (3 остаток)}.$$

Здесь делимое больше делителя, 8 — приближенное частное с точностью до единицы с недостатком и 3 — остаток. Но мы решительно избегали таких случаев деления целого числа на целое, когда делимое было бы меньше делителя.

Теперь мы рассмотрим общий случай. Примеры будем усложнять постепенно. При этом необходимо помнить, что деление есть действие, обратное умножению, т. е. разделить одно число на другое — это значит найти такое третье число, которое после умножения на второе дает в произведении первое. Рассмотрим следующие случаи:

1) $$1 : 10 = ?$$

Возьмем отрезок AB, примем его за единицу и разделим на 10 равных частей, тогда каждая из полученных

Рис. 23

частей будет равна одной десятой (рис. 23). Значит, переходя от отрезков к числам, мы можем сказать, что частное от деления единицы на 10 равно одной десятой, т. е.

$$1 : 10 = \frac{1}{10}.$$

Если действие выполнено правильно, делимое должно быть равно делителю, умноженному на частное. Проверим

$$10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

Действие выполнено правильно.

2) $$2 : 9 = ?$$

Возьмем снова отрезок AB, примем его за единицу и разделим на 9 равных частей (рис. 24), тогда каждая из полученных частей будет равна одной девятой. Но нам

Рис. 24

предложено разделить на 9 не один, а два. Попробуем это выполнить так:

$$2:9=(1+1):9=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

Мы воспользовались здесь основным свойством деления, состоящим в том, что для деления суммы на число можно разделить каждое слагаемое отдельно. В силу этого мы представили число 2, как сумму: $1+1$.

Сделаем проверку деления:

$$2=9\cdot\frac{2}{9}=2.$$

Деление выполнено правильно.

3) $$3:10=?$$

Мы не будем здесь прибегать к чертежу, а поступим так, как во втором примере:

$$3:10=(1+1+1):10=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.$$

Сделаем проверку деления:

$$3=10\cdot\frac{3}{10}=3.$$

Деление выполнено правильно.

Сравнивая эти три случая, мы можем сделать такой вывод: для того чтобы разделить целое число на целое, нужно в частном написать такую дробь, у которой числитель равен делимому, а знаменатель равен делителю. В буквенных символах это будет:

$$a:b=\frac{a}{b}.$$

2. Деление дроби на целое число

Задача деления дроби на целое число равносильна уменьшению дроби во столько раз, сколько единиц в целом числе. Таким образом, если вопрос об увеличении и уменьшении дроби был в свое время учащимися усвоен хорошо, то и деление дроби на целое число не представит для них никаких затруднений. Здесь мы встречаемся с двумя случаями: а) числитель делимого делится на делитель; б) числитель делимого не делится на делитель. Рассмотрим их последовательно. Совершенно необходимо начинать этот раздел с первого случая, хотя он и является сравнительно редким, это необходимо потому, что при этом условии действие деления психологически для ученика свяжется с актом разделения, расщепления, и он не увидит в этом делении чего-то противоречащего здравому смыслу.

1) $$\frac{8}{9} : 4 = ?$$

Построим отрезок AB, разделим его на 9 равных частей и возьмем таких частей 8 (рис. 25). Тогда у нас полу-

Рис. 25

чится отрезок AC. Разделим этот отрезок (AC) на 4 равные части и определим, сколько девятых долей будет в каждой из этих частей. Чертеж показывает, что в каждой из этих частей будет две девятых доли. Значит, мы можем написать, что

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}.$$

Что же нужно сделать с членами дроби, чтобы получить этот результат? Нетрудно видеть, что для этого достаточно только числитель дроби разделить на 2.

Можно, не прибегая к помощи чертежа, получить тот же самый ответ, рассуждая так. Требуется дробь $\frac{8}{9}$ разделить на 4. Разделить дробь на четыре это все равно, что уменьшить ее в 4 раза. А чтобы уменьшить дробь в несколько раз, нужно или уменьшить во столько же раз ее числитель, или увеличить во столько же раз ее знаменатель. В данном случае мы уменьшили числитель в 4 раза и получили искомый результат.

2. Может быть на детей более сильное впечатление произведет такая простая задача.

«В две недели израсходовали $\frac{4}{5}$ *кг* сахара. Сколько было израсходовано в одну неделю, если расходовали равномерно?»

Очевидно, что в одну неделю израсходовали сахара в два раза меньше, чем в две недели и, следовательно, для вычисления результата нужно $\frac{4}{5}$ разделить на два, а для этого достаточно разделить на два только числитель дроби, т. е.

$$\frac{4}{5}:2=\frac{2}{5}.$$

3. Значит, независимо от чертежа и от условий конкретной задачи во всех случаях, подобных двум рассмотренным, деление дроби на целое число сводится к делению числителя на это число, например,

$$\frac{12}{25}:3=\frac{4}{25}.$$

4. Все три рассмотренных случая отличались той особенностью, что числители данных дробей делились на делитель. Как же поступать в том случае, когда числитель не делится на делитель? Рассмотрим те же три случая, но будем выполнять действие иначе, имея в виду, что уменьшить дробь можно не только путем деления ее числителя, но и путем умножения ее знаменателя. Начнем с первого случая:

$$\frac{8}{9}:4=?$$

Умножим знаменатель (9) на 4 и выполним необходимые преобразования.

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9\cdot 4}=\frac{2}{9}.$$

После сокращения получился тот же самый результат. Возьмем решенную выше задачу:

$$\frac{4}{5}:2=\frac{4}{5\cdot 2}=\frac{2}{5}.$$

Результат получится тот же самый. Возьмем третий пример:

$$\frac{12}{25}:3=\frac{12}{25\cdot 3}=\frac{4}{25}.$$

Мы снова получили тот же самый результат.

Полное совпадение полученных результатов с прежними говорит о том, что при делении дроби на целое число можно пользоваться умножением на это число знаменателя дроби.

Рассмотрим пример: $\frac{5}{8}:3=?$

$$\frac{5}{8}:3=\frac{5}{8\cdot 3}=\frac{5}{24}.$$

Очень большая опасность заключается в том, что, может быть, некоторые учащиеся не «прочувствуют» справедливости этого результата, а, получив в ответе $\frac{5}{24}$, промолчат, чтобы не спорить с преподавателем. Если в самом деле на лицах некоторых учеников учитель прочтет недоверие к найденному результату, то пусть он возьмет отрезок, разделит его на 8 равных частей и выделит таких частей 5. Пусть он затем дополнительно маленькими штрихами разделит данный отрезок на 24 части и покажет ученикам, сколько будет двадцать четвертых долей в одной трети отрезка, составляющего $\frac{5}{8}$ данного.

Пример:

$$\frac{10}{21} : 15 = ?$$

$$\frac{10}{21} : 15 = \frac{10}{21 \cdot 15} = \frac{2}{21 \cdot 3} = \frac{2}{63}.$$

Теперь, чтобы устранить всякую неясность, нужно остановиться на сокращении. Конечно, сокращение должно выполняться не после того, как будут выполнены все действия, а раньше, чтобы тем самым избежать вычислений над большими числами. По поводу сокращения следует сделать такие замечания. Очевидно, что всякий раз при делении дроби на целое число мы будем встречаться с выражением такого вида:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$

Число a с числом b сокращаться, конечно, не будет, потому что нет смысла предлагать для деления сократимую дробь, но число a в некоторых случаях будет сокращаться с числом n. Если это сокращение покажется ученикам немотивированным, то можно сделать некоторые пояснения. Сокращение это опирается на «основное» свойство дроби: величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель разделим на одно и то же число. В отношении числителя сомнений никаких не будет, но в знаменателе два числа, а мы делим только одно. Это разъяснить можно так: в знаменателе написано произведение двух сомножителей — b и n, из них мы делим только один второй. Чтобы такое деление не вызывало смущения, нужно припомнить правило, изученное еще в отделе целых чисел, там было сказано: «Чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число один сомножитель, оставив другие без изменения».

3. Деление целого числа на дробь

Деление есть действие, обратное умножению, поэтому при изучении деления мы имеем право опираться на этот бесспорный и хорошо известный ученикам факт. Иногда говорят, что деление на дробь есть действие столь же трудное, как и умножение на дробь. Это абсолютно неверно! Умножение на дробь действительно является трудным действием — этого не нужно скрывать. Но деление числа на дробь есть обыкновенная несложная арифметическая тема, в которой нет ничего необычного.

Чтобы облегчить прохождение этой темы, нужно все время исходить из смысла деления. Разделим 20 на 5:

$$20 : 5 = 4.$$

Что показывает число 4 в этом случае? Математика знает одно действие деления, но смысл результата в каждом конкретном случае зависит от ситуации и может быть истолкован по-разному. Рассмотрим возможные случаи:

а) 20 конфет разделены между пятью мальчиками. Сколько получил каждый? 4 конфеты.

В этом случае число 4 обозначает величину одной пятой части (одного пая).

б) В коробке несколько отделений. В нее положили 20 яблок по 5 яблок в каждое отделение. Сколько отделений? Отделений, очевидно, столько, сколько раз 5 содержится в 20, т. е. 4.

в) Дяде 20 лет, а племяннику 4 года. Во сколько раз дядя старше племянника? Ответ: в 5 раз.

Рассмотрим теперь деление на дробь:

$$5 : \frac{1}{2} = ?$$

Что это значит? Очевидно, это действие нельзя понимать в первом смысле, как деление числа 5 на равные части. Но вполне допустимо такое истолкование, что здесь мы ищем, сколько раз половина содержится в 5 или во сколько раз 5 больше половины.

Ответ на эти вопросы учащиеся найдут легко. Они скажут: в одной единице две половины, а в 5 единицах—в 5 раз больше, т. е. 10 половин, или единица в 2 раза больше половины, а 5 единиц в 10 раз больше.

Таким же точно образом «по соображению» дети скажут, чему равно $6 : \frac{1}{4}$, $2 : \frac{1}{3}$, $4 : \frac{1}{5}$ и т. д.

Все эти случаи деления очень легко проиллюстрировать на чертеже с помощью отрезков.

Выполнив несколько делений по соображению устно, можно получить тот же результат, исходя из определения деления как действия, обратного умножению. Возьмем прежний пример: 5 разделить на $\frac{1}{2}$. Обозначим искомое частное буквой x:

$$5 : \frac{1}{2} = x.$$

По свойству деления $x \cdot \frac{1}{2} = 5$.

Что здесь написано? Здесь написано, что некоторое число (x), умноженное на $\frac{1}{2}$, дало 5. А что значит умножить число на $\frac{1}{2}$? Это значит найти половину этого числа. Таким образом, половина неизвестного числа равна 5, а все неизвестное число вдвое больше, т. е.

$$x = 5 \cdot 2;\ x = 10.$$

Теперь будем усложнять примеры: разделить

$$6 : \frac{2}{3}.$$

Попробуем найти искомый результат с помощью чертежа. Построим отрезок AB, равный 6 каким-нибудь линейным единицам и разделим каждую единицу на 3 равные части (рис. 26). Поставим теперь вопрос, сколько раз

Рис. 26

отрезок, равный двум третям единицы, содержится в шести единицах? Отметив на чертеже по две трети единицы дугами и подсчитав число полученных отрезков, мы увидим, что $\frac{2}{3}$ содержатся в 6 ровно 9 раз. Значит, можно написать, что

$$6 : \frac{2}{3} = 9.$$

Мы получили ответ с помощью чертежа. Проверим результат умножением:

$$6 = \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{2 \cdot 9}{3} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Деление выполнено правильно.

Теперь возникает вопрос, нельзя ли как-нибудь найти этот ответ без чертежа? Попробуем. Нам дано задание:

$$6 : \frac{2}{3} = x.$$

По свойству деления:

$$x \cdot \frac{2}{3} = 6.$$

Что здесь написано? Здесь написано, что некоторое число (x), умноженное на $\frac{2}{3}$, дало 6. А что значит умножить число на $\frac{2}{3}$? Это значит найти $\frac{2}{3}$ этого числа. Стало быть, можно рассуждать так: две трети какого-то числа равны шести, а одна треть, очевидно, равна трем, а три трети, т. е. все число, равно девяти.

Итак, мы получили тот же самый результат без чертежа, с помощью рассуждения.

Теперь выясним, какие же действия нужно выполнить над данными числами при делении целого числа на дробь. Возвратимся снова к прежнему примеру:

$$6 : \frac{2}{3} = ?$$

Требуется ответить на вопрос, сколько раз $\frac{2}{3}$ содержатся в 6. Узнаем сначала, сколько раз $\frac{1}{3}$ содержится в 6. В одной единице—3 трети, а в 6 единицах — в 6 раз больше, т. е. 18 третей. Для нахождения этого числа мы должны 3 умножить на 6. Таким образом, дробь $\frac{1}{3}$ содержится в 6 единицах 18 раз, а $\frac{2}{3}$ содержатся в 6 не 18 раз, а вдвое меньше, т. е. $18 : 2 = 9$ раз. Следовательно, при делении 6 на $\frac{2}{3}$ мы выполнили следующие действия:

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Здесь мы единственный раз позволили себе не сделать сокращения, чтобы не потерялась ни одна цифра, но в дальнейшем необходимо будет делать сокращения раньше, чем будут выполнены окончательные вычисления.

После этого необходимо решить таким же способом несколько примеров и затем предложить ученикам вывести общими силами правило.

Буквенная формула здесь необходима:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Учащиеся должны подумать над этой формулой и уяснить себе ее смысл.

4. Деление дроби на дробь

Деление во всех случаях рассматривается как действие, обратное умножению. Какой смысл имеет деление дроби на дробь? Такой же, какой имеет деление целого на дробь. Мы можем ставить такие вопросы:

1. Сколько четвертей в половине? Ответ дается делением:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2.$$

2. Сколько восьмушек в четверти? Ответ дается делением:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2.$$

3. Сколько восьмых долей в трех четвертях? Ответ дается делением

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = 6.$$

Проиллюстрируем каждый из этих вопросов чертежом (рис. 27).

Значит, во всех этих случаях деление имело реальный смысл.

Так как деление дроби на дробь является наиболее общим случаем деления дробей, то не следует спешить с выводом правила и с автоматизацией вычислений, а лучше побольше рассмотреть с учениками таких упражнений,

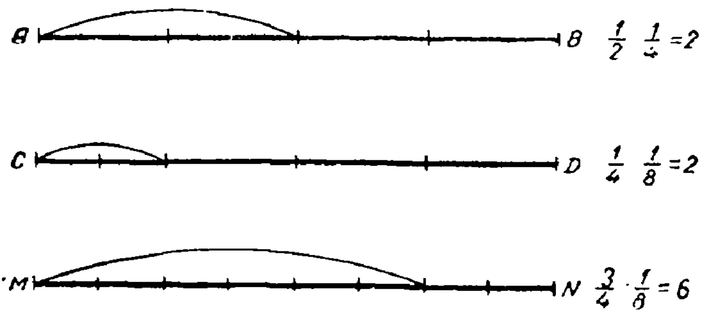


Рис. 27

где они рассуждали бы и проверяли свои рассуждения чертежом.

Здесь речь идет о делении числа на дробь, поэтому полезно обернуться назад и припомнить, как мы делили на дробь целое число.

Разделим, например, 2 на $\frac{3}{16}$. Ученики без труда это сделают:

$$2 : \frac{3}{16} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Советуем проиллюстрировать это деление чертежом и обратить внимание на то, что когда в делителе имеется дробь, то числитель этой дроби в результате попадает в знаменатель, а знаменатель — в числитель.

Теперь разделим единицу (1) тоже на $\frac{3}{16}$. Эту задачу дети тоже решать умеют:

$$1 : \frac{3}{16} = \frac{1 \cdot 16}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Этот пример тоже следует проиллюстрировать чертежом и снова обратить внимание на то, что единица умножается на знаменатель делителя и делится на числитель.

Далее рассмотрим более сложный пример, где и делимое выражено дробью:

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{16} = ?$$

Но в этом примере тоже не следует усматривать ничего необыкновенного. Мы должны разделить число $\left(\frac{7}{8}\right)$ на другое дробное число $\left(\frac{3}{16}\right)$. Чем мы будем руководствоваться? Мы уже не раз видели, что при делении на дробь нужно числитель делителя написать в знаменателе, а знаменатель делителя написать в числителе. Попробуем и здесь поступить так же. А чтобы застраховать себя от ошибок, мы потом сделаем проверку. Таким образом,

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{16} = \frac{7 \cdot 16}{8 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Теперь проверим. У нас получилось $4\frac{2}{3}$, но это все равно, что $\frac{14}{3}$. Поэтому умножим

$$\frac{3}{16} \times \frac{14}{3} = \frac{3 \cdot 14}{16 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 7}{8 \cdot 1} = \frac{7}{8}.$$

Наше предположение оправдалось. Деление сделано правильно. Но так как этот пример имеет для нас огромное значение, то мы проиллюстрируем его еще с помощью чертежа, не потому что мы не доверяем проверке, а просто ради того, чтобы посмотреть, как этот факт отражается на чертеже.

Изобразим отрезок AB, примем его за единицу (рис. 28), разделим на 8 равных частей и зафиксируем отрезок

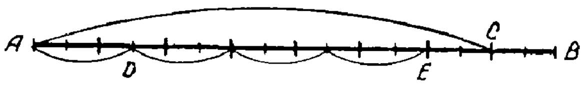


Рис. 28

AC, равный делимому, т. е. $\frac{7}{8}$ отрезка AB. Этот отрезок нужно разделить на $\frac{3}{16}$, т. е. ответить на вопрос, сколько раз $\frac{3}{16}$ содержатся в $\frac{7}{8}$. Для этого разделим каждую восьмую долю отрезка AB пополам, или, иными словами, разделим AB на 16 равных частей. Отметим на отрезке AC по $\frac{3}{16}$ доли и посмотрим, сколько же раз укладывается на отрезке AC $(\frac{7}{8})$ отрезок AD $(\frac{3}{16})$. Выполнив это откладывание, мы увидим, что отрезок $\frac{3}{16}$ откладывается 4 раза и после этого остается на отрезке AC маленький отрезок EC. Значит, можно сказать, что отрезок $\frac{3}{16}$ отложился больше 4 и меньше 5 раз, точнее, он отложился $4\frac{2}{3}$ раза. Хотя такой способ выражения не принят в русском языке, но мы уже сказали, что интересующий нас отрезок отложился больше 4 и меньше 5 раз, вычисления же дали нам число $4\frac{2}{3}$, чертеж дает такое же число, поэтому мы и воспользовались таким несколько необычным способом выражения.

Ввиду исключительной важности этого вопроса мы еще раз проведем рассуждения, но уже независимо от чертежа. Так как читателя, вероятно, уже утомили прежние числа, то мы для разнообразия возьмем другие.

Пусть требуется разделить $\frac{15}{16}$ на $\frac{3}{32}$, т. е.

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{32} = x.$$

Будем рассуждать так: нужно найти такое число, которое после умножения на $\frac{3}{32}$ даст произведение, равное $\frac{15}{16}$. Это можно записать так:

$$\frac{3}{32} \cdot x = \frac{15}{16}.$$

Запись имеет такой смысл: $\frac{3}{32}$ умножается на неизвестное число (x), и результат выражается дробью $\frac{15}{16}$. Как найти неизвестное число? Мы видим из последнего равенства, что $\frac{3}{32}$ неизвестного числа x составляют $\frac{15}{16}$, отсюда $\frac{1}{32}$ неизвестного числа x составляет $\frac{15}{16 \cdot 3}$, а $\frac{32}{32}$ числа x составляют $\frac{15 \cdot 32}{16 \cdot 3}$.

Следовательно, сопоставляя все эти выкладки, можно написать:

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{32} = \frac{15 \cdot 32}{16 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 10.$$

Необходимо обращать внимание на своевременное сокращение. После этого можно еще несколько раз провести аналогичные рассуждения, а потом предложить ученикам сформулировать правило деления дроби на дробь.

Исключительно важным звеном этого раздела является вывод формулы деления. Если эта формула будет сознательно усвоена, то это можно рассматривать как большой успех в изучении дробей. От искусства преподавателя зависит эффект подачи этой формулы. Можно предложить такой путь. После того как дети решат десятки упражнений на деление и уже почувствуют, как нужно поступать с делимым и с делителем, можно записать дроби русскими буквами так:

$$\frac{ч_1}{з_1} : \frac{ч_2}{з_2}.$$

А затем поставить вопрос, что делается при делении дробей с числителем ($ч_1$) и знаменателем ($з_1$) первой дроби и что делается с числителем ($ч_2$) и знаменателем ($з_2$) второй дроби. Можно надеяться, что дети догадаются и напишут:

$$\frac{ч_1}{з_1} : \frac{ч_2}{з_2} = \frac{ч_1 \cdot з_2}{з_1 \cdot ч_2}.$$

После этого можно заменить русские буквы латинскими.

5. Деление смешанных чисел

Этот небольшой отдел уже не содержит ничего принципиально нового, а имеет своею целью подытожить те сведения о делении дробей, которые изложены ранее. Рассмотрим последовательно относящиеся сюда вопросы.

1. $$6 : 2\frac{2}{5} = ?$$

Обратим делитель ($2\frac{2}{5}$) в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления целого числа на дробь, т. е.

$$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5},$$

тогда

$$6:2\frac{2}{5}=6:\frac{12}{5}=\frac{6\cdot5}{12}=\frac{1\cdot5}{2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}.$$

Проверим: $6=2\frac{2}{5}\times2\frac{1}{2}=\frac{12}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{12\cdot5}{5\cdot2}=6.$

Деление выполнено правильно.

2. $$3\frac{3}{4}:12=?$$

Обратим делимое $\left(3\frac{3}{4}\right)$ в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления дроби на целое число, т. е.

$$3\frac{3}{4}=\frac{15}{4},$$

тогда

$$3\frac{3}{4}:12=\frac{15}{4}:12=\frac{15}{4\cdot12}=\frac{5}{4\cdot4}=\frac{5}{16}.$$

Проверим: $3\frac{3}{4}=12\times\frac{5}{16}=\frac{12\cdot5}{16}=\frac{3\cdot5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}.$

Деление выполнено правильно.

3. $$12\frac{1}{2}:\frac{5}{6}=?$$

Обратим делимое $\left(12\frac{1}{2}\right)$ в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления дроби на дробь, т. е.

$$12\frac{1}{2}=\frac{25}{2},$$

тогда

$$12\frac{1}{2}:\frac{5}{6}=\frac{25}{2}:\frac{5}{6}=\frac{25\cdot6}{2\cdot5}=\frac{5\cdot3}{1\cdot1}=15.$$

Проверим: $12\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\times15=\frac{5\cdot15}{6}=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}.$

Деление выполнено правильно.

4. $$\frac{7}{8}:4\frac{2}{3}=?$$

Обратим делитель $\left(4\frac{2}{3}\right)$ в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления дроби на дробь, т. е.

$$4\frac{2}{3}=\frac{14}{3},$$

тогда

$$\frac{7}{8}:4\frac{2}{3}=\frac{7}{8}:\frac{14}{3}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 14}=\frac{1\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{3}{16}.$$

Проверим: $\frac{7}{8}=4\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{14}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{7\cdot 1}{1\cdot 8}=\frac{7}{8}.$

Деление выполнено правильно.

5. $$5\frac{5}{8}:3\frac{3}{4}=?$$

Обратим делимое и делитель в неправильные дроби и тогда разделим по правилу деления дроби на дробь т. е.

$$5\frac{5}{8}=\frac{45}{8};\ 3\frac{3}{4}=\frac{15}{4},$$

тогда

$$5\frac{5}{8}:3\frac{3}{4}=\frac{45}{8}:\frac{15}{4}=\frac{45\cdot 4}{8\cdot 15}=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

Проверим: $5\frac{5}{8}=3\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{2}=\frac{15}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{45}{8}=5\frac{5}{8}.$

Деление выполнено правильно.

В некоторых случаях полезно опираться на основное свойство деления, например:

$$12\frac{3}{4}:3=\left(12+\frac{3}{4}\right):3=12:3+\frac{3}{4}:3=4+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}.$$

Здесь мы не обращали смешанного числа $(12\frac{3}{4})$ в неправильную дробь, а, представив делимое как сумму, разделили каждое слагаемое отдельно.

В каждом из пяти выполненных примеров на деление мы делали последующую проверку. Но можно еще до выполнения деления сделать так называемую «прикидку», для того чтобы хотя бы грубо оценить ожидаемый результат. В последнем примере можно целую часть делимого разделить на делитель (12 на 3), получится 4. Отсюда можно сделать вывод, что частное должно быть приблизительно равно 4.

Учащиеся, выполнив все возможные случаи деления смешанных чисел, могут сформулировать, наконец, правило деления смешанных чисел.

Можно в порядке обобщения остановиться на вопросе о том, что всякое целое число можно представить как дробь со знаменателем, равным единице. Тогда любой случай деления можно свести к делению дроби на дробь.

После изучения всех четырех действий открываются широкие возможности для выполнения самых разнообразных упражнений на все четыре действия с целыми и дробными числами.

Здесь можно решить множество текстовых задач, так как благодаря введению дробных чисел значительно расширяется диапазон для составления самых разнообразных задач.

Далее, теперь можно уже без всякого ограничения брать упражнения на совместные действия как без скобок, так и со скобками.

Наконец, в вычисление можно ввести так называемые «сложные дроби», т. е. такие примеры, где и числитель и знаменатель выражены дробными числами. Вот несложный пример такого характера.

$$\frac{2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\right)}{1:\frac{5}{8}}=?$$

Мы взяли такой пример, который легко решается в уме. Преподаватели не должны упускать возможности почаще упражнять учащихся в устных вычислениях.

Кроме того, никогда не следует пренебрегать проверкой вычислений. Роль проверки нужно усилить. В книге Очаповского «Дроби» есть такой пример:

$$1\frac{7}{10}:\frac{\left(1\frac{2}{3}\cdot 4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{135}}{\frac{5}{9}}-\frac{5}{12}=?$$

Решив этот пример, мы получим единицу (1). Рекомендуется приравнять написанное 1, а вместо числа $1\frac{2}{3}$ поставить x и проделать все выкладки.

Полезно написать на доске и в тетрадях такую легко обозримую таблицу:

$24 : 6 = 4$

$24 : 5 = 4\frac{4}{5}$

$24 : 4\frac{1}{2} = 5\frac{1}{3}$

$24 : 4 = 6$

$24 : 3 = 8$

$24 : 2\frac{3}{4} = 8\frac{8}{11}$

$24 : 2 = 12$

$24 : 1\frac{1}{2} = 16$

$24 : 1 = 24$

$24 : \frac{5}{6} = 28\frac{4}{5}$

$24 : \frac{3}{4} = 32$

$24 : \frac{2}{3} = 36$

$24 : \frac{3}{5} = 40$

$24 : \frac{1}{2} = 48$

$24 : \frac{3}{8} = 64$

$24 : \frac{3}{10} = 80$

$24 : \frac{4}{25} = 150$

$24 : \frac{1}{10\,000} = 240\,000$

Эту таблицу нужно внимательно рассмотреть, обратив внимание на следующие факты:

1. Делимое во всех 18 случаях остается без изменения, делитель изменяется и при этом все время уменьшается (убывает до очень малых дробей).

2. До тех пор пока делитель больше единицы, частное — меньше делимого.

3. При делителе, равном единице, частное равно делимому.

4. Во всех тех случаях, где делитель меньше единицы (равен правильной дроби), частное больше делимого.

5. Если делитель сильно уменьшается (становится очень малой дробью), то частное может стать очень большим числом.

После этого полезно предложить учащимся другую таблицу, которая отличается от первой тем, что в ней делимое выражено не целым, а дробным числом. Вот эта таблица:

$\frac{1}{2} : 10 = \frac{1}{20}$	$\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = 1\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$
$\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 4$
$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{16} = 8$
$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{32} = 16$
$\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = \frac{2}{11}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{64} = 32$
$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{128} = 64$
$\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{1000} = 500$
$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{5\,000\,000} = 2\,500\,000$

Делимое во всех 18 случаях равно $\frac{1}{2}$, делитель изменяется, постепенно уменьшаясь от 10 до малых дробей. Дальнейшее рассмотрение таблицы можно провести с помощью вопросов.

1. Как изменяется частное при уменьшении делителя от 10 до единицы?

2. Чему равно частное, когда делимое равно делителю?

3. Что больше, делимое или частное, в тех случаях, когда делитель правильная дробь (меньше единицы)? Почему?

4. Как ведет себя частное в том случае, когда делитель неограниченно уменьшается?

Вообще, учителю почаще следует направлять внимание учеников на рассмотрение всевозможных таблиц. При этом не следует ограничиваться одним только пассивным созерцанием, нужно предложить ученикам вновь самостоятельно составить подобную таблицу, а таблица в книге или на стене должна быть тем образцом, к которому следует стремиться.

6. Нахождение числа по его дроби

Мы рассмотрели в свое время основную задачу на дроби (нахождение дроби данного числа). Теперь мы приступим к рассмотрению обратной задачи (нахождение числа по данной его дроби). Мы уже упоминали об этой задаче раньше и предупреждали, что в процессе изучения этой темы придется встретиться со значительными трудностями. Учащиеся не сразу освоятся с этой задачей. Чтобы облегчить изучение, мы рекомендуем следующее: во-первых, нужно проходить эти две задачи (основную и обратную ей) в разное время, т. е. так, чтобы между ними был некоторый промежуток времени; во-вторых, не нужно полагать обратную задачу в основу теории деления дробей — это создает дополнительные трудности при изучении.

Несомненно, что большинство задач на эту тему являются искусственными. Конечно, можно придумать несколько задач, отражающих реальные ситуации. Таким образом, путь изложения этой темы состоит в том, чтобы постепенно, в порядке возрастающей трудности предлагать детям задачи, вполне понятные им по содержанию и решаемые сначала одним действием (умножением), потом двумя действиями (делением и умножением) и, наконец, на завершающей стадии одним действием (делением). Мы не можем, конечно, совершенно отказаться от этой задачи, как предлагают некоторые практические работники, не можем уже потому, что в свое время мы рассматривали совершенно необходимую прямую задачу, а поэтому когда-то следует рассмотреть и обратную.

Выше было сказано, что задачу на нахождение дроби числа и обратную задачу на нахождение числа по его дроби целесообразно проходить в разное время, т. е. так, чтобы между ними был некоторый промежуток времени. Это нужно понимать так: прямая (основная) задача (нахождение дроби данного числа) рассматривается в отделе умножения дробей, перед умножением числа на дробь, а обратная здесь не рассматривается во избежание смешения одной задачи с другой. Первая задача слишком важна, и поэтому нужно добиться полного понимания этой задачи. Чтобы она прочно была усвоена, необходимы п о н и м а н и е, многочисленные упражнения и, конечно, время. Когда же мы окончим умножение дробей и пройдем все случаи деления, тогда можно показать ученикам, что есть задача, обратная основной задаче на дроби.

Таким образом, мы считаем, что к этому времени «основная» задача будет усвоена совершенно отчетливо. Однако, когда мы усвоим умножение и деление, то «обратная» задача должна быть изложена в связи с прямой, потому что нужно дать возможность ученикам осознать, по отношению к чему новая задача будет обратной. Нам кажется, что постановка здесь рядом двух взаимно обратных задач уже не будет опасной; как не вредит сложение вычитанию, так и в данном случае обратная задача не повредит прямой.

Мы полагаем, что целесообразно начинать с какой-нибудь прямой задачи, например: площадь участка 315 *кв. м*, $\frac{1}{5}$ часть его занята домом. Сколько квадратных метров занимает дом? Это прямая задача. Решив ее, получим, что дом занимает 63 *кв. м*.

Теперь рассмотрим обратную задачу: дом занимает 63 *кв. м*. Это составляет $\frac{1}{5}$ всего участка. Чему равна площадь всего участка? Эту задачу можно решить умножением: $63 \times 5 = 315$ (*кв. м*).

Решая эту задачу посредством умножения, мы еще не даем учащимся общего метода решения таких задач, т. е. того метода, который мы дадим им в конце концов. Мы пока хотим добиться только того, чтобы ученики уяснили себе эту проблему, т. е. поняли бы, что представляют собой задачи на нахождение числа по данной его дроби. Пусть на первых порах они решают подобные задачи так, как им доступно (умножением или двумя действиями), но пусть они уяснят себе их смысл и поймут, что от них требуется.

Теперь можно взять такую задачу: у меня было 500 руб. $\frac{3}{5}$ из них я израсходовал на покупку обуви. Сколько стоила обувь?

Это прямая задача. Решив ее, получим $500 \times \frac{3}{5} = 300$ (руб.).

Рассмотрим обратную задачу: я израсходовал на покупку обуви 300 руб., что составляло $\frac{3}{5}$ имевшихся у меня денег. Сколько было у меня денег?

Ученики будут решать эту задачу, конечно, наиболее естественным путем, т. е. они сначала найдут одну пятую от 300 посредством деления ($300 : 3 = 100$) и потом пять пятых посредством умножения ($100 \times 5 = 500$).

Таких задач нужно решить много, прежде чем перейти к решению их одним действием (делением).

После этого полезно записать параллельно прямую и обратную задачи и выяснить, что дано и что нужно найти в каждой из них. Тогда получится такая запись.

Прямая задача	Обратная задача
$500 \times \frac{3}{5} = \frac{500 \cdot 3}{5} = 300.$	$300 : \frac{3}{5} = \frac{300 \cdot 5}{3} = 500.$

7. Нахождение числа по его процентам

Если учащиеся усвоили задачу на нахождение числа по его дроби, то задача на нахождение числа по его процентам не должна представлять никаких затруднений. Это та же самая задача, но только ее частный случай. Частным этот случай можно назвать потому, что в общем случае дробь может быть с любым знаменателем, а здесь только со знаменателем 100. Возможно, что в основе возникающих трудностей лежит тот факт, что дети рассматривают эти задачи, как две различные, а не как одну и ту же задачу. Значит, первая забота учителя состоит в том, чтобы убедить учеников в тождественности этих задач. Чтобы этого добиться, нужно избегать скопления нескольких трудностей. Это значит, что нужно представить задачу в ее прозрачном виде, не загромождая и не осложняя какими-нибудь дополнительными деталями. Нужно показать, что это та же самая задача, носящая только особое название.

Как этого добиться? В изложении этого вопроса нужно соблюдать строгую постепенность, в особенности на первых порах. Например, до тех пор пока не будет достигнуто полного понимания изучаемого вопроса, не следует предлагать задач с дробным числом процентов, не следует вводить в условие каких-нибудь дополнительных данных.

Сначала нужно взять какую-нибудь очень простую задачу на нахождение числа по его дроби, например: поезд прошел 400 *км*, что составляет $\frac{2}{5}$ всего расстояния между двумя городами. Чему равно все расстояние между городами?

Решение. $400 : \frac{2}{5} = \frac{400 \cdot 5}{2} = 1000$ *км*.

Итак все расстояние между этими городами равно 1000 *км*.

Теперь обратим внимание на то, что $\frac{2}{5}$ расстояния все равно, что 40% расстояния, а 40% при решении задач заменяются дробью $\frac{40}{100}$.

Принимая это во внимание, мы можем нашу задачу изложить теперь так: поезд прошел 400 *км*, что составляет 40% всего расстояния между двумя городами. Чему равно все расстояние между этими городами?

Решение. $400 : \frac{40}{100} = \frac{400 \cdot 100}{40} = 1000$ *км*.

Таких задач нужно решить столько, сколько необходимо для того, чтобы ученики, наконец, поняли, что задача нахождения числа по его процентам решается так же, как и задача нахождения числа по его дроби.

Первоначально нужно решать по две одинаковые задачи так, чтобы в одной из них часть была выражена обыкновенной дробью, а в другой — процентами. Когда эта идея будет усвоена учащимися, можно уже не брать парных задач, а предлагать одну задачу, в которой часть выражена процентами.

Для полного понимания этих задач и для проверки решения (или самоконтроля) полезно решать здесь же задачу на нахождение дроби числа. Вообще, решение взаимно обратных задач должно практиковаться возможно чаще.

§ 15. Взаимно обратные числа. Замена деления умножением

Взаимно обратные числа имеют большое значение в математике, уже в арифметике они встречаются при делении дробей и при делении числа на пропорциональные части. В будущем они не раз нам встретятся. Прежде всего ученики должны научиться писать число, обратное любому данному. Сначала можно дать серию правильных дробей, например:

$$\frac{2}{9},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{5},\ \frac{7}{20},\ \frac{4}{11},\ \frac{1}{10}$$

и предложить учащимся написать обратные им дроби:

$$\frac{9}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{1},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{3},\ \frac{5}{1},\ \frac{20}{7},\ \frac{11}{4},\ \frac{10}{1}.$$

Когда ученики станут рассматривать полученные ими обратные дроби, то они невольно заметят, что среди них оказались целые числа, а именно:

$$\frac{2}{1}=2;\quad \frac{5}{1}=5;\quad \frac{10}{1}=10.$$

От обращения каких дробей возникли эти целые числа? От обращения тех, у которых числитель равен единице? Далее возникает вопрос, как написать число, обратное целому? Для этого достаточно написать это число со знаменателем единица (1) и потом выполнить обращение, например:

$$2=\frac{2}{1},\ \text{обратное}\ \frac{1}{2};\qquad 3=\frac{3}{1},\quad \text{обратное}\ \frac{1}{3};$$

$$4=\frac{4}{1},\ \text{обратное}\ \frac{1}{4};\quad 5=\frac{5}{1},\ \text{обратное}\ \frac{1}{5}\ \text{и т. д.}$$

После этого нужно изложить свойство взаимно обратных чисел, причем желательно, чтобы учащиеся сами его подметили. Наконец, нужно использовать взаимно обратные числа для замены деления умножением.

§ 16. Распространение законов и свойств действий на дробные числа

Здесь нужно изучить некоторый теоретический отдел. Предупреждаем об этом, потому что учащиеся все-таки и в этом возрасте больше любят действовать, чем заниматься теорией. Однако этот отдел имеет очень большое значение, потому что здесь «распространяются» известные ранее законы и свойства действий на дробные числа, и тем самым они снова воспроизводятся и повторяются.

Чтобы этот отдел не был скучным, нужно насытить его деятельностью и непрерывно поддерживать связь с теорией целых чисел. Ученики должны проявить максимум активности при изучении этого раздела.

Может возникнуть такой вопрос, когда лучше рассмотреть изложенные здесь законы и свойства действий в процессе изложения самих действий или после их прохождения. Это значит следующее. Положим, мы изучаем сложение дробей и здесь же, не переходя к вычитанию говорим, что для сложения дробей сохраняют свое значение переместительный и сочетательный законы. Либо можно поступить иначе: мы рассматриваем законы и свойства действий после того, как пройдены и усвоены все четыре действия.

В нашей книге мы идем по второму пути, т. е. мы «распространяем» известные нам из отдела целых чисел законы и свойства действий на дробные числа после того, как пройдены все действия над дробями. Можно, конечно, оспаривать такой порядок, но мы считаем, что после того, как изучены все четыре действия над дробными числами и создан известный навык в их выполнении, вторичный просмотр всех действий с более высоких позиций представляет собой прекрасную школу повторения и усвоения всех деталей ранее изученных действий.

1. Сложение

Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) переместительный закон сложения;

б) сочетательный закон сложения;

в) изменение суммы с увеличением одного слагаемого;

г) изменение суммы с уменьшением одного слагаемого.

Мы должны предупредить читателя, что занятия этого рода не могут быть слишком интересными и увлекательными. Это происходит потому, что сам материал является довольно однообразным. В силу этого мы рекомендуем разработку этого вопроса предоставить самим учащимся, а за учителем сохранить только право наблюдать, исправлять и контролировать. Мы представляем себе такое течение урока. Учитель говорит ученикам: вы знаете, что для целых чисел имеет место переместительный закон сложения, т. е. например,

$$18 + 32 = 32 + 18, \text{ или вообще } a + b = b + a.$$

Этот закон справедлив и для дробных чисел. Как нам это проверить? Вероятно, ученики пожелают проверить справедливость этого закона на каких-нибудь дробях. Пусть они скажут эти дроби. Несколько учеников назовут несколько пар дробей. Учитель берет какую-нибудь пару, например:

$$\frac{7}{25}+\frac{11}{25}=\frac{11}{25}+\frac{7}{25}=\frac{18}{25}.$$

Почему это происходит? Здесь не нужно никакой теории. Ученики, вероятно, скажут, что можно присчитывать к 7 по одной единице от числа 11 и можно, наоборот, к 11 присчитывать по одной единице от числа 7. Может быть, некоторые ученики скажут, что эти дроби можно представить в виде отрезков и тогда будет безразлично, в каком порядке мы будем складывать эти отрезки. Но наилучшее объяснение состояло бы в том, что сложение любых дробных чисел с одинаковыми знаменателями сводится к сложению **целых** чисел, т. е. их числителей.

Далее переходим к сочетательному закону. Берем несколько дробных чисел, например четыре, и выполняем сначала сложение дробей первой пары, затем сложение дробей второй пары и, наконец, сложение первой суммы со второй. В целях проверки и в целях, так сказать, подтверждения справедливости сочетательного закона следует выполнить действия в другом поряке. Можно допускать комбинацию переместительного и сочетательного законов. Очень важно подобрать серию удачных упражнений. Возьмем пример: $\frac{2}{3}+\frac{3}{10}+\frac{7}{12}+\frac{9}{20}$. Если выполнять сразу сложение всех дробей, то пришлось бы привести их к довольно большому знаменателю (60), но можно сделать перестановку и группировку некоторых слагаемых, например, так:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{3}{10}+\frac{9}{20}\right),$$

и тогда решение примет вид:

а) $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}=\frac{8+7}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$,

б) $\frac{3}{10}+\frac{9}{20}=\frac{6+9}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$,

в) $1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=2$.

Вообще, мы рекомендуем превратить этот отдел в серию занимательных упражнений, сопровождаемых теоретическими выводами и, если угодно, практическими приложениями.

Если в задачнике нет подходящих упражнений, то учитель может придумать такие упражнения самостоятельно. Еще лучше, если в составлении таких упражнений примут участие учащиеся.

Вопросы изменяемости (пункты «в» и «г») суммы при изменении слагаемых тоже полезно рассмотреть на хорошо подобранных примерах. Возьмем, например, дроби: $2\frac{3}{4}+3\frac{5}{8}$. Выполнение этого сложения никаких затруднений не представит, но попробуем выполнить это сложение устно, например, так: округлим первое слагаемое до целого числа, т. е. добавим (в уме) к нему $\frac{1}{4}$ и выполним сложение:

$$3+3\frac{5}{8}=6\frac{5}{8}.$$

Эта сумма больше суммы данных чисел на $\frac{1}{4}$, потому что первое слагаемое было увеличено на $\frac{1}{4}$. Чтобы получить сумму данных чисел, нужно от полученной суммы отнять $\frac{1}{4}$, т. е.

$$6\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=6\frac{3}{8}.$$

Это нужно сделать в уме.

Повторяем еще раз, что весь этот раздел нужно рассматривать как систему удачно подобранных упражнений. В этом случае он и не будет скучным, и принесет учащимся пользу: это будет хорошая тренировка в рационализации вычислений. Кроме того, ученик, который добросовестно выполнит все упражнения этой главы, сразу почувствует значительную беглость, смелость и уверенность в выполнении действий над дробными числами.

2. Вычитание

Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) вычитание суммы из числа;

б) вычитание числа из суммы;

в) изменение разности с увеличением уменьшаемого;

г) изменение разности с уменьшением уменьшаемого;

д) изменение разности с увеличением вычитаемого;

е) изменение разности с уменьшением вычитаемого;

ж) неизменяемость разности при одновременном увеличении или уменьшении уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число.

Одно из основных свойств вычитания целых чисел состоит в том, что вычитание суммы приводится к последовательному вычитанию каждого слагаемого. Это свойство бывает особенно заметным при устном вычитании, где например, при вычитании числа 234 из числа 500 мы сначала вычитаем 200, потом 30 и, наконец, 4. Это можно записать в общем виде:

$$a-(b+c+k)=a-b-c-k.$$

Это свойство остается справедливым и для дробных чисел. Применение его можно показать так: пусть, например, нужно выполнить действие:

$$5\frac{15}{16}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right).$$

Сначала можно найти сумму дробей, заключенных в скобки, а затем вычесть эту сумму из $5\frac{15}{16}$, но можно выполнить вычитание дробей последовательно и даже в уме, т. е. так:

1) $5\frac{15}{16}-\frac{1}{2}=5\frac{15}{16}-\frac{8}{16}=5\frac{7}{16}$ (это делается в уме);

2) $5\frac{7}{16}-\frac{1}{4}=5\frac{7}{16}-5\frac{4}{16}=5\frac{3}{16}$;

3) $5\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=5\frac{3}{16}-\frac{2}{16}=5\frac{1}{16}$.

Принимая во внимание сказанное в отделе «Сложение», мы и здесь можем, удачно подбирая большое число подходящих примеров, рассмотреть все указанные выше семь пунктов.

3. Умножение

Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) переместительный закон умножения;

б) сочетательный закон умножения;

в) распределительный закон умножения;

г) изменение произведения с увеличением одного сомножителя;

д) изменение произведения с уменьшением одного сомножителя.

Распространение законов и свойств умножения на дробные числа выполняется, как и для других действий, путем подбора и решения целесообразных упражнений. Исключительно важное значение имеет распределительный закон. Сначала полезно повторить его на целых числах и показать формулу: $(a+b+c)\cdot k=ak+bk+ck$.

Затем нужно сказать, что всякое умножение многозначного числа на однозначное (а затем и на многозначное) требует применения распределительного закона. Далее нужно отметить, что устное умножение сплошь и рядом сопровождается применением распределительного закона. Например, $123\times3=(100+20+3)\times3=300+60+$ $+9=369$.

После этого можно перейти к дробным числам. Нужно показать, что пример $\left(\frac{5}{18}+\frac{7}{12}+\frac{4}{9}\right)\times\frac{4}{5}$ может быть решен двумя способами: а) сначала можно найти сумму дробей, заключенных в скобки, а потом умножить ее на $\frac{4}{5}$; б) сначала можно вычислить произведение каждого слагаемого на $\frac{4}{5}$, а затем сложить три полученных произведения.

Наконец, на большом числе примеров нужно показать рационализирующее значение распределительного закона при вычислениях. Сначала нужно взять самые простые примеры, решаемые в уме. Например, $5\frac{1}{2}\cdot4=(5+\frac{1}{2})\times$ $\times4=20+2=22$, а затем можно рассмотреть более сложные примеры.

4. Деление

Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) деление суммы на число;

б) деление разности на число;

в) изменение частного с увеличением делимого;

г) изменение частного с уменьшением делимого;

д) изменение частного с увеличением делителя;

е) изменение частного с уменьшением делителя;

ж) неизменяемость частного при одновременном увеличении и уменьшении делимого и делителя в одинаковое число раз.

Предлагаемые здесь исключительно важные свойства деления следует, конечно, рассмотреть сначала на целых числах. Вполне возможно, что некоторые учащиеся при изучении целых чисел этих свойств не рассматривали. Учитель мог пропустить эти свойства на том основании, что детям трудно будет их усвоить. Если к моменту окончания изучения обыкновенных дробей дети стали более зрелыми, то целесообразно теперь на большом числе постепенно усложняющихся примеров рассмотреть эти интересные свойства. Начинать, конечно, нужно с целых чисел.

Свойство «а» имеет очень большое значение и, в частности, для устных вычислений. Если нужно $884 : 4$, то мы обычно поступаем так: $884 : 4 = (800+80+4) : 4 = 200 + 20 + 1 = 221$.

Свойство «б» тоже может быть применено при устных вычислениях. Пусть нужно $992 : 4$, тогда можно поступить так: $992 : 4 = (1000-8) : 4 = 250-2 = 248$.

Свойством «ж» мы очень часто пользуемся при делении. Если нужно разделить 36 000 на 300, то мы обычно «отбрасываем» по два нуля в делимом и в делителе. Это значит не что иное, как уменьшение делимого и делителя в одинаковое число (в 100) раз.

После тщательного рассмотрения всех семи случаев на целых числах, нужно продемонстрировать их на дробях.

§ 17. Отношение величин

Вопрос об «отношении» имеет свою историю.

В учебнике арифметики Малинина и Буренина, который еще в прошлом веке выдержал 20 изданий, говорится: «Отношением называют результат, полученный от сравнения двух чисел... Отношение можно находить только между величинами однородными». Затем вводятся термины: предыдущий, последующий и знаменатель отношения.

А. П. Киселев в «Арифметике» издания 1906 г. говорит: «Отношением одного значения величины к другому значению той же величины называется число, на которое надо умножить второе значение, чтобы получить первое».

Термина «знаменатель отношения» А. П. Киселев не вводит.

В издании «Арифметики» 1929 г. А. П. Киселев сохраняет прежнее определение отношения, но в отделе «Измерение величин» он определяет еще отношение двух однородных мер, как «число, показывающее, сколько раз меньшая мера содержится в большей».

В более ранних изданиях А. П. Киселев таким способом определил «единичное отношение».

В более поздних изданиях («Арифметика» А. П. Киселева в переработке А. Я. Хинчина, 1938 г.) говорится так: «частное от деления одного числа на другое иначе называется отношением этих чисел».

Термин «знаменатель отношения» уже окончательно исчезает. Правда, и до последнего времени некоторые авторы сохраняют этот термин или заменяют его термином «величина-отношения».

Если, излагая вопрос об отношении, мы просто скажем, что это есть частное, то нам не удастся избежать очень многих затруднений. Если частное и отношение это одно и то же, то нужно было еще в начальной школе при изучении деления сказать, что результат деления называется частным, или отношением. Если мы скажем, что там был допущен недосмотр, то нам никто не поверит, потому что здесь мы вводим новое название не только для частного, но и для делимого и для делителя.

Перед нами такой путь: либо отказаться от термина «частное», либо указать какую-нибудь специфичность понятия «отношение».

Есть сторонники того, что понятие отношения действительно нужно ввести в самом начале изучения арифметики и о терминологии деления говорить так: делимое, делитель, частное или отношение. При этом частное нужно отличать от отношения следующим образом. Пусть имеется задача: килограмм сахара стоит 10 рублей. Сколько стоят 5 *кг*. Решение: $10 \times 5 = 50$ (рублей).

Теперь решим две обратные задачи:

I) $50 : 5 = 10$ (рублей); II) 50 руб. : 10 руб. $= 5$.

Результат деления в первом случае называют частным, а во втором случае — отношением.

Профессор Парижского университета Жюль Таннери в своем большом курсе арифметики пишет так: «Понятие о т н о ш е н и я, в сущности, не отличается от понятия меры.

Два отрезка прямой (рис. 29), например RS и AB, называются соизмеримыми между собой, когда существует некоторый отрезок, который содержится точно известное число раз в RS и точно известное число раз в AB; такой отрезок есть так называемая **общая мера** для RS и для AB; если бы этот отрезок был принят за единицу, то оказалось бы возможным измерить RS и

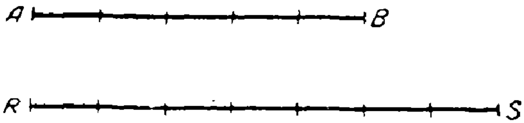


Рис. 29

AB целыми числами: на рисунке эта общая мера содержится точно 7 раз в RS и 5 раз в AB.

В настоящей главе, как только мы будем говорить об отношении двух величин, то этим самым мы будем предполагать, что эти величины **соизмеримы** между собой, что эти величины имеют **общую меру**, содержащуюся точно известное число раз в первой величине, и известное число раз во второй величине.

Отношение двух величин (первой ко второй) есть дробь, числитель которой выражает, сколько раз общая мера содержится в первой величине, а знаменатель которой выражает, сколько раз общая мера содержится во второй величине.

Или отношение первой величины ко второй величине есть дробь, которая служит мерой для первой величины, когда за единицу принимается вторая величина.

Отношение двух промежутков времени, из которых первый продолжается 7 минут, а второй продолжается 5 минут, есть $\frac{7}{5}$. Отношение второго промежутка времени к первому есть $\frac{5}{7}$».

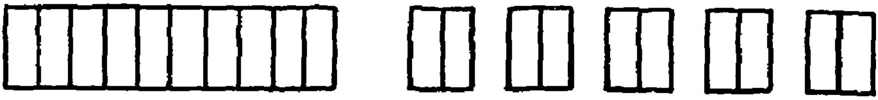
К формированию понятия «отношение» можно прийти на основании рассмотрения следующих фактов.

Сколько «пятерок» содержится в 10 рублях? (сознательно употреблено слово «пятерка», а не 5 рублей).

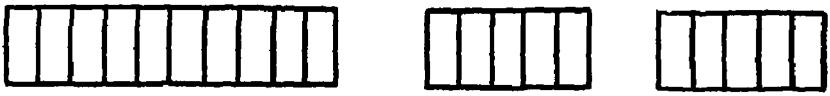
Ученики на этот вопрос ответят: две (2). Как это найти? Нужно 10 разделить на 5, т. е.

$$10 : 5 = 2.$$

Можно быть, здесь уместно подчеркнуть, что в данном случае 10 не делится на 5 равных частей, где в каждой части получается 2, а 10 сравнивается с пятью. Покажем это на чертеже (рис. 30).



а



б

Рис. 30

В случае а) десять разделено на пять равных частей.

В случае б) десять можно представить как два раза по пять.

Сколько «десяток» содержится в 30 рублях? (снова сознательно употреблено слово «десятка» вместо слов десять рублей).

Ученики на этот вопрос ответят: три (3). Как это найти? Нужно 30 разделить на 10, т. е.

$$30 : 10 = 3.$$

Что мы предлагаем? Мы рекомендуем называть отношением символ, состоящий из двух чисел, т. е. не одно число, а совокупность двух чисел. Одного числа в качестве отношения быть не должно. И это понятно. Ведь мы говорим об отношении чего-то к чему-то. Значит, чисел должно быть 2 (два).

В самом деле, если у нас речь идет об установлении отношения числа 5 к числу 7, то запись будет такая:

$$5 : 7, \text{ или } \frac{5}{7}.$$

Ну, а в тех случаях, когда предыдущий член делится без остатка на последующий, ведь получается одно число? Нет, не получается.

Пусть устанавливается отношение между числами 10 и 5. Это пишется так:

$$10:5, \text{ или } \frac{10}{5}.$$

А если сократим, то

$$10:5=2:1, \text{ или } \frac{10}{5}=\frac{2}{1}.$$

Ну, а если мы напишем так:

$$10:5=2, \text{ или } \frac{10}{5}=2,$$

будет в этом ошибка? Ошибки не будет, но так писать не нужно. Что выражают последние равенства? Они выражают, что 10 так относится к 5, как 2 относится к единице. Иными словами, 10 в два раза больше, чем 5. Зачем же отбрасывать единицу?

Если ученик этого факта на первых порах не понимает, пусть он сначала пишет без единицы, а когда привыкнет, пусть снова пишет единицу.

§ 18. Нахождение процентного отношения чисел

Это одна из весьма важных задач на проценты. В житейской практике и на производстве очень часто решаются такие задачи. Смысл ее понятен учащимся, и ее частные случаи решаются довольно просто, но вывести общее правило решения все-таки затруднительно. Может быть, следует пойти по линии подбора удачных задач. Возьмем задачу: в одном населенном пункте 200 домов, из них кирпичных 150 домов; сколько процентов кирпичные дома составляют от общего числа домов?

Эту задачу можно решить даже в уме, исходя из таких соображений: если на 200 домов приходится 150 кирпичных домов, то на 100 таких домов придется 75. А число домов, падающих на каждую сотню, и указывает их процент. Значит, кирпичных домов было 75%.

Но можно к решению этой задачи подойти иначе. Найдем сначала отношение числа кирпичных домов к общему числу домов. Это ученики должны делать достаточно уверенно:

$$150:200=3:4, \text{ или } \frac{3}{4}.$$

Значит, кирпичные дома составляют $\frac{3}{4}$ всех домов. Стало быть, на каждую сотню приходится $\frac{3}{4}$ кирпичных домов, и для нахождения числа кирпичных домов в каждой сотне нужно найти $\frac{3}{4}$ от 100, что делается, как известно, посредством умножения:

$$100 \times \frac{3}{4} = 75.$$

Значит, кирпичных домов было 75%. Вот тот путь, которым можно идти для того, чтобы вывести общее правило решения таких задач. Главное заключается в том, чтобы обосновать факт умножения отношения на 100.

Наилучшим способом закрепления является проверка результата путем решения обратных задач.

§ 19. Числовой масштаб

Изучение масштаба можно провести в таком порядке. Сначала нужно рассказать об изображении различных предметов на бумаге и выяснить роль чертежа, плана и карты. В производственной практике допускается различное изображение предметов: некоторые предметы изображаются в натуральную величину, иные в уменьшенном виде, другие, наоборот, в увеличенном виде. На планах и географических картах применяется изображение объектов в уменьшенном виде. Этим последним случаем мы и ограничимся.

Вопрос о масштабе затрудняет учащихся: их беспокоит прежде всего слово «масштаб», которое имеет ряд значений. Масштабом называется отрезок, масштабом называется число (отношение), масштабом называется линейка с делениями, иногда слово масштаб употребляется в обывательском смысле (например, районный масштаб). Это обстоятельство оказывает отрицательное влияние на восприятие учащимися этого понятия.

Прежде всего нужно выяснить, что и план, и карта должны давать представление не только о взаимном расположении предметов, но и об их величине. Чтобы это было возможно, на плане и картах делаются специальные указания, во сколько раз уменьшены действительные размеры предметов. Обычно эти указания пишутся, например, так: масштаб 1 : 10 000.

Можно рекомендовать решение трех задач:

1. Имея план (или карту) какого-нибудь участка и зная масштаб, вычислить истинные размеры этого участка или его частей, т. е. размеры в натуре.

2. Зная размер какого-нибудь расстояния в натуре и зная масштаб, найти длину соответствующего отрезка на плане.

3. Найти масштаб плана, зная какое-нибудь расстояние в натуре и соответствующее расстояние на плане.

Начинать нужно с той задачи, которая представляется ученикам более легкой и знакомой. Может быть, ученики данного или старшего класса снимали план школьного двора или огорода. У них имеется под руками план с цифровыми данными и масштабом. Интересно и поучительно предложить ученикам сначала определить на глаз истинные размеры участка, потом вычислить эти размеры, пользуясь планом, и, наконец, проверить найденные числа путем непосредственного измерения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иван Никитич Шевченко

Методика преподавания обыкновенных дробей

Редактор *Г. Г. Гуськов*

Обложка художника *А. М. Олевского*

Худож. редактор *Н. С. Орлова* Техн. редактор *В. I. Лаут*

Корректоры: *Е. А. Блинова и В. Н. Кузьмина*

Сдано в набор 11/XI 1957 г. Подписано к печати 6/II 1958 г.
Формат 84×108 1/32. Бум. л. 2,06 Печ. л. 8,25. Усл. печ. л. 6,76
Уч.-изд. л. 6,08 A02151 Тираж 35 000 Зак. 164

Изд-во АПН РСФСР, Москва, Погодинская ул., 8.

Калужская типография областного управления культуры,
пл. Ленина, 5.

Цена 1 р. 65 к.