НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИКИ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ БССР

Проф. М. И. ОРЛЕНКО

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ИСПРАВЛЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ БССР

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Директивами XX съезда КПСС по шестому пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР предусмотрено развивать в общеобразовательной школе политехническое обучение. Это предполагает ознакомление учащихся с важнейшими отраслями современного промышленного и сельскохозяйственного производства, тесную связь преподавания основ наук с производственной практикой.

Одним из средств, облегчающих достижение этой цели, в курсе математики является приобретение учащимися прочных знаний по геометрии, в частности, овладение практическими навыками в решении задач на построение.

К сожалению, в методике элементарной геометрии весьма слабо освещён вопрос о проведении с учащимися решения задач на построение. Не все преподаватели математики средних школ уделяют должное внимание упражнениям по решению задач на построение, приведённых в стабильном учебнике.

Предлагаемое пособие имеет целью способствовать тому, чтобы решение задач на построение стало существенной частью преподавания геометрии в средней школе.

Опыт показал, что ученики с интересом изучают геометрию, хорошо усваивают этот предмет и приобретают отчётливые пространственные представления, если учитель математики:

1) с первого же урока геометрии предлагает ученикам в порядке домашнего задания несложные графические упражнения, постепенно подготавливающие к решению задач на построение;

2) добивается того, чтобы ученики приобрели отчётливые представления о конфигурациях и связях геометрических образов, о геометрических местах и методах решения задач на построение;

3) преподавание всего курса геометрии сопровождает систематическим решением задач на построение, разнообразит виды соответствующих домашних заданий и точно указывает, как ученики должны оформлять эти работы.

В силу этого в данном пособии изложены не только основные методические положения, но и следующий материал:

а) подробно перечислены элементарные графические построения, выполнение которых должно предшествовать решению геометрических задач на построение;

б) указано влияние связей и конфигураций данных геометрических образов на ход решения задачи на построение и на число ответов;

в) перечислены те геометрические места на плоскости и в пространстве, с которыми ученику средней школы приходится встречаться при изучении геометрии, и приведены примеры, поясняющие, как можно этот перечень использовать для различных упражнений;

г) даны подробные решения многих задач на построение и показано, как надо производить детальное исследование этих задач;

д) описаны разнообразные виды домашних заданий, содержащих геометрические построения, и приведены образцы оформления этих работ.

Поскольку методическое пособие предназначено для преподавателей математики, многие задачи, помещённые во второй его части, сопровождаются лишь указанием, как можно осуществить требуемое построение.

Но, зная ход построения хотя бы для самой благоприятной конфигурации геометрических образов, упоминаемых в условии задачи, и имея в качестве примеров несколько полных решений задач на построение, читатель будет иметь полную возможность произвести исследование тех интересующих его задач, которые сопровождаются только анализом или построением.

В соответствии с критическими замечаниями учителей и изменениями в программе по математике второе издание книги значительно дополнено упражнениями по стереометрии, внесён новый материал на степень точки относительно окружности, в частности задачи на отыскание геометрического места точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны. Стремясь наиболее последовательно провести в книге идею геометрических преобразований, имеющих большое практическое значение в различных разделах математики и физики, автор уделил значительное внимание методике решения задач методом подобия и параллельного переноса. С этой же целью в пособие также включены задачи на построение, основанные на преобразованиях гомотетии.

Предлагаемое учебно-методическое пособие не претендует на исчерпывающую полноту сведений по данной теме, и автор будет признателен тем читателям, которые сообщат свои замечания о недостатках в этой работе и укажут, какие изменения и дополнения целесообразно в ней сделать.

Автор.

ВВЕДЕНИЕ.

ЗНАЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ОБЩЕМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ.

Геометрические задачи на построение не только дают возможность основательно изучить геометрию, но и прививают такие навыки и способности, которые весьма полезны каждому, так как облегчают изучение других предметов и помогают решать различные вопросы науки, техники, искусства и обыденной жизни.

Говоря о значении геометрических задач на построение, следует обратить внимание читателя на следующие моменты.

I. Решение геометрических задач на построение является одним из надёжных способов систематического повторения приобретённых сведений по геометрии.

Действительно, при решении геометрических задач на построение ученик должен теоретически обосновать правильность каждого своего действия.

Например, если ученик строит биссектрису, то он должен уметь доказать, что проведённая им полупрямая действительно делит данный угол пополам; если он ищет отрезок, который является средним пропорциональным между двумя данными отрезками, то нужно уметь доказать, что найденный им отрезок действительно удовлетворяет указанному требованию и т. п.

Само собой разумеется, что необходимость доказывать правильность геометрических построений вынуждает учащегося непрестанно повторять приобретённые сведения по геометрии, в результате чего эти сведения прочно закрепляются в его памяти.

Опыт убеждает нас, что учащиеся лучше усваивают геометрию в том случае, если изучение её теорем и вытекающих из них следствий сопровождается систематическим решением соответствующих геометрических задач на построение.

II. Геометрические задачи на построение заставляют учащегося обстоятельнее и глубже разобраться в известных ему сведениях по геометрии.

Уже на первых уроках геометрии ученику сообщается понятие об окружности как о геометрическом месте точек (на плоскости), равноотстоящих от данной точки (на той же плоскости). По мере дальнейшего прохождения геометрии и выполнения задач на построение ученик узнаёт, что окружность и её части (дуги) являются в то же время и другими геометрическими местами, число которых в объёме программы средних школ превышает двадцать пять. Действительно, учащийся убеждается, что: 1) окружность — геометрическое место точек, из которых каждая является центром окружности данного радиуса, проходящей через данную точку, 2) окружность — геометрическое место точек, из которых данная окружность видна под данным углом, 3) окружность — геометрическое место точек, расстояние которых до двух точек A и B находится в одном и том же отношении, 4) окружность — геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек есть данная величина и т. д.

III. Геометрические задачи на построение побуждают учащегося давать практическое применение имеющимся у него сведениям по геометрии.

Например, если требуется найти в треугольнике такую точку, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом, то для решения этой задачи учащийся вынужден дать практическое применение следующим имеющимся у него сведениям:

1) Лучи, выходящие из одной точки, на плоскости образуют прилежащие углы, сумма которых равна 360°.

2) Построение угла, равного 120°.

3) Построение сегмента, опирающегося на данный отрезок и вмещающего данный угол.

IV. Решение геометрических задач на построение помогает учащимся лучше изучить черчение.

Действительно, осуществляя требуемое задачей построение, учащиеся неизбежно выполняют ряд таких операций, которые, в сущности, относятся к черчению. И вполне понятно, что преподаватель математики, требуя от учеников аккуратного выполнения пояснительных чертежей, сопровождающих решение геометрических задач на построение, способствует выработке у учащихся необходимых чертёжных навыков.

Затем, если примем во внимание, что в черчении различные геометрические построения обычно излагаются без доказательств, а основные геометрические задачи на построение входят и в курс черчения, то станет ясным, что решение геометрических задач на построение даёт теоретический фундамент для изучения черчения.

V. Геометрические задачи на построение способствуют развитию пространственных представлений.

Действительно, выполняя хорошо подобранные упражнения по геометрии, среди которых задачи на построение играют главную роль, ученики приобретают следующие ценные качества:

во-первых, способность отчётливо представлять себе пространственные геометрические образы и, во-вторых, умение мысленно выполнять операции над воображаемыми геометрическими линиями, фигурами, поверхностями и телами.

Эти качества весьма облегчают изучение проекционного черчения и начертательной геометрии.

Геометрические задачи на построение, развивая пространственные представления, облегчают учащимся изучение химии, физики, астрономии.

Так, обладая хорошими пространственными представлениями, учащиеся при изучении химии отчётливо понимают структуру атомов и молекул всевозможных химических элементов и сложных соединений и даже в известной мере рисуют в своём воображении протекание химических процессов.

Равным образом, хорошие пространственные представления помогают ученикам при изучении физики вникать в суть многочисленных физических явлений и представлять в своём воображении, какой вид примет явление при изменении вызывающих его условий.

Отчётливые пространственные представления дают учащимся возможность хорошо понять также сущность таких явлений, как фазы Луны, видимое движение Солнца в различных широтах в разное время года, солнечные и лунные затмения, движение планет солнечной системы и т. п.

VI. Геометрические задачи на построение более, чем другие математические задачи, приучают учащихся средней школы дисциплинировать своё внимание.

Учеников не затрудняют только те геометрические задачи на построение, решение которых сводится к выполнению какого-нибудь элементарного построения. Что касается остальных задач этого рода, то в подавляющем большинстве они ученикам представляются трудными, подобными замысловатым ребусам или загадкам. Поэтому ученики, стремясь найти решение затрудняющей их геометрической задачи на построение, вынуждены сосредоточивать всё своё внимание на её условии, на свойствах и зависимостях тех геометрических образов, которые входят в набросок предполагаемого решения.

Приобретаемый таким образом навык сосредоточивать своё внимание на прорабатываемых геометрических задачах на построение весьма ценен, так как он приносит большую пользу и при изучении других предметов и при решении самых разнообразных вопросов.

VII. Геометрические задачи на построение прививают учащимся навык целеустремлённо припоминать.

Решая геометрическую задачу на построение, учащемуся приходится не просто припоминать всё, что он усвоил по геометрии, а именно тот круг сведений, к которому может относиться данная задача. Например, если вопрос идёт о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей, то учащийся старается припомнить всё, что ему известно об окружностях, их касании, пересечении и т. д. и не станет утруждать себя при этом припоминанием формул, выражающих поверхности и объёмы различных геометрических тел.

Таким образом, геометрические задачи на построение побуждают учащегося целеустремлённо припоминать и в этом процессе проявлять логичность рассуждений, так как из припоминаемого необходимо отбирать лишь то, что даёт возможность решить возникший вопрос.

Кроме того, решение геометрических задач на построение приводит к тому, что память учащегося из пассивной хранительницы разных сведений превращается в активную помощницу, облегчающую решение различных теоретических и практических вопросов.

VIII. Геометрические задачи на построение приучают учеников проявлять инициативу, изобретательность.

Пусть требуется, например, через две данные точки провести окружность, касающуюся данной прямой KL. Учащийся, прежде всего, от руки делает соответствующий чертёж (рис. 1).

Затем, принимая во внимание, что KL является касательной к искомой окружности, учащийся начинает перебирать в своей памяти всё, что относится к касательной.

Среди других сведений он вспоминает следующее: если из какой-нибудь точки, находящейся вне круга, проведём секущую и касательную к нему, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

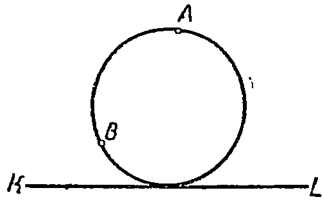


Рис 1.

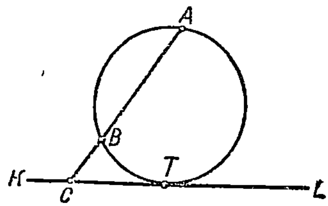


Рис. 2.

На чертеже нет той точки вне круга, из которой проведена секущая и касательная к нему, но учащийся создаёт её: соединяет точку A с B и продолжает этот отрезок до встречи с прямой KL в некоторой точке C (рис. 2). По теореме $CA \cdot CB = CT^2$. Из этого уравнения учащийся находит отрезок CT, а значит, и ту точку T, в которой данная прямая KL должна касаться искомой окружности. Таким образом, к двум данным точкам (A и B) на окружности он присоединяет ещё одну найденную точку T той же окружности. Затем, зная три точки A, B и T искомой окружности, он легко определяет центр и радиус и чертит её.

Как видим, в задаче не упоминалась секущая — учащийся должен по своей инициативе ввести её в чертёж, чтобы найти путь к выполнению требуемого построения.

Весьма много инициативы и изобретательности учащийся вынужден проявить при решении трудной геометрической задачи на построение и при отыскании новых способов получения требуемого построения.

IX. Геометрические задачи на построение приучают учащихся проявлять настойчивость в достижении намеченной цели.

Многочисленные наблюдения показывают, что при умелой постановке преподавания геометрии учащиеся охотно решают не только задачи на построение, помещённые в стабильных учебниках и задачниках, но и те задачи этого рода, которые встречаются в других учебных пособиях, причём при отыскании требуемого построения не останавливаются перед затратой значительного времени и труда.

X. Геометрические задачи на построение приучают учащихся логически рассуждать.

Действительно, в чём состоит процесс решения любой геометрической задачи на построение?

Учащийся ставит перед собой определённую цель: выполнить требуемое в задаче построение. Для достижения этой цели ему приходится, прежде всего, хорошо вдуматься в содержание условия задачи и припомнить необходимые сведения из геометрии. Только в самых простых геометрических задачах на построение оказывается возможным сразу же осуществить требуемое построение. В большинстве же случаев при решении таких задач, прежде чем получить возможность осуществить искомое построение, необходимо бывает предварительно сделать одно или несколько вспомогательных построений, каждое из которых представляет результат логических умозаключений.

Первое вспомогательное построение целиком основывается на данных условия задачи и на определённых геометрических сведениях, без знания которых невозможно решить рассматриваемую задачу. Если появляется необходимость во втором вспомогательном построении, то первое вспомогательное построение включается в число данных. Выполняя одно за другим вспомогательные построения, учащийся, наконец, приходит к возможности осуществить искомое построение.

Вспомогательные построения вообще являются целесообразно направленными попытками, но не всегда каждая из них приводит к желаемой цели. Поэтому в процессе решения геометрических задач на построение приходится отбрасывать те вспомогательные построения, которые не упрощают ход решения, а усложняют его или даже заводят в тупик. Таким образом, из всех логически возможных построений приходится выбирать наиболее подходящие, наиболее быстро приводящие к цели.

Найдя способ выполнить требуемое построение, учащийся должен, во-первых, логически обосновать правильность каждой из отдельных операций этого построения и, во-вторых, логическими рассуждениями установить, всегда ли рассматриваемая задача имеет решение и сколько она допускает решений в отдельных случаях.

XI. Принимая во внимание, какую роль играют геометрические задачи на построение в усвоении геометрии и развитии мышления, надо предлагать эти задачи в течение всего времени прохождения курса геометрии, начиная от самых лёгких и постепенно переходя к более сложным. Осуществить непрестанное упражнение учащихся в решении геометрических задач на построение нетрудно, потому что всегда можно найти достаточное количество задач этого рода, которые были бы тесно связаны с любым прорабатываемым разделом геометрии. Для этой цели надо использовать не только те геометрические задачи на построение, которые приведены в стабильном учебнике в конце каждого раздела, но и подходящие задачи, взятые из других пособий.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

I. ДАННЫЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

В условии геометрических задач на построение данные предлагаются в самой общей форме. Например: „Дан угол и внутри его точка. Построить окружность, которая проходит через эту точку и касается сторон угла".

Тому, кто решает эту задачу, предоставляется полная возможность принять за данный угол либо прямой, либо какой угодно из бесчисленного множества острых и тупых углов. Кроме того, точку можно взять внутри угла в произвольном месте.

Когда в условии геометрической задачи на построение в качестве данных упоминается точка, прямая линия, угол, окружность и т. д., то, отметив на плоскости произвольную точку, или начертив какую-нибудь прямую, или приняв любую точку за центр и описав около неё произвольным радиусом окружность и т. п., можем считать, что начерченные нами точки, линии, углы и фигуры являются теми данными, какие фигурируют в условии задачи. В действительности чертят окружности хотя и произвольными радиусами, однако, сообразуясь с размерами классной доски или тетрадного листка. Равным образом, чертят не бесконечные прямые, а только небольшие отрезки этих прямых и т. д. Те геометрические образы, которые преподаватель или ученик при решении задачи чертит на доске, как данные, должны иметь такие размеры, чтобы не встретилось затруднений в нанесении на доску вспомогательных точек, линий, углов и дуг, необходимых для выполнения требуемого в задаче построения.

Несоблюдение этого требования приводит к необходимости стереть с доски сделанный чертёж и заменить его новым, что вызывает потерю времени и вносит беспорядок в ученические тетради по геометрии.

Желая привить учащимся стремление выполнить аккуратно каждую поручаемую им работу, учитель должен, во-первых, сам аккуратно чертить на доске прямые и окружности посредством линейки и циркуля и, во-вторых, от учеников требовать такого же отношения к выполнению чертежей на доске и в тетрадях.

§ 1. СВЯЗИ И КОНФИГУРАЦИИ.

Геометрические образы, упоминаемые в условии задачи, непременно находятся в определённой геометрической связи, причём их конфигурация, т. е. относительное расположение, может изменяться как угодно.

Конкретизируя размеры образов, входящих в условие задачи, и изменяя конфигурацию этих образов, во многих случаях мы изменяем и число получаемых решений, а иногда можем изменить и самый метод решения. Поэтому преподаватель математики средней школы должен иметь отчётливое представление о наиболее часто встречающихся связях и конфигурациях геометрических образов.

Рассмотрим связи и конфигурации некоторых геометрических образов.

Две точки.

Связью между двумя данными точками является отрезок (d), равный расстоянию между ними.

Возможные конфигурации:

1) Точки не совпадают ($d \neq 0$).
2) Точки совпадают ($d = 0$).

Точка и прямая.

Связью точки P и прямой KL является расстояние (d) между ними. Другими словами: связь между ними выражается перпендикуляром, опущенным из точки P на прямую KL. Поэтому выражение „дана прямая и точка" равносильно такому: „дана прямая и точка, отстоящая от неё на определённом расстоянии".

Возможные конфигурации:

1) Точка P находится на данной прямой KL.
2) Точка P лежит вне данной прямой KL.

Две прямые.

Начертив на плоскости две совершенно произвольные прямые, мы можем считать их данными.

Если прямые пересекаются, то связь между ними определяется образуемым ими углом (α). Если прямые параллельны, то связь между ними выражается расстоянием (d) между ними.

Возможные конфигурации:

1) Прямые пересекаются ($\alpha \neq 0$).
2) „ параллельны ($\alpha = 0$, $d \neq 0$).
3) „ совпадают ($\alpha = 0$ и $d = 0$).

Прямая (KL) и две точки (A и B).

I. Каждая из точек A и B находится на определённом расстоянии d_1 и d_2 от прямой KL, и, кроме того, эти точки отстоят одна от другой на определённом расстоянии d, т. е. мы имеем три элемента связи (рис. 3) AA_1, AB и BB_1.

Вместо этих трёх элементов связи, можно взять следующие: AA_1, A_1B_1, BB_1 (рис. 4).

II. Связь между KL и точками A и B можно выразить и иначе: например, провести через точки A и B прямую до пересечения с прямой KL в некоторой точке C (рис. 5).

В этом случае (рис. 6) элементами связи будут $\angle BCL$, AC, BC, или $\angle BCL$, CA_1, AB, или $\angle BCL$, CB, AB.

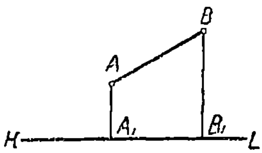


Рис. 3.

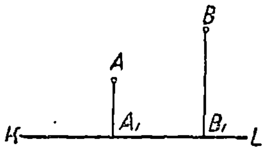


Рис. 4.

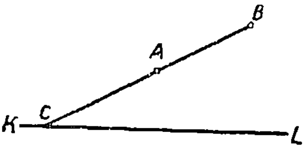


Рис. 5.

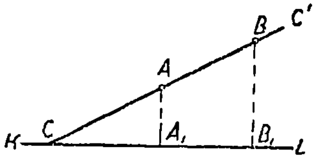


Рис. 6.

III. В случае надобности, можно обе системы связи (I) и (II) взять одновременно, т. е. считать, что нам даны $\angle BCL$, AC, BC, AA_1, BB_1.

В рассматриваемом случае на вид конфигурации влияет:

1) расположение точек A и B относительно прямой KL и

2) угол α, образуемый отрезком AB и прямой KL.

Если положим, что точка A не совпадает с точкой B, то получим 10 следующих конфигураций:

А. Обе точки A и B находятся по одну сторону прямой KL.

1) $0 < \alpha < 90°$ причём $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$, $d_1 \neq d_2$.
2) $\alpha = 0$,, $d_1 = d_2 > 0$.
3) $\alpha = 90°$,, $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$.

Б. Прямая KL проходит между точками A и B.

4) $0 < \alpha < 90°$, причём $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_1 \neq d_2$.
5) $0 < \alpha < 90°$, ,, $d_1 = d_2 > 0$.
6) $\alpha = 90°$, ,, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ и $d_1 \neq d_2$.
7) $\alpha = 90°$, ,, $d_1 = d_2 > 0$.

В. Одна из точек (например A) находится на прямой KL.

8) $0 < \alpha < 90°$, причём $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$.
9) $\alpha = 90°$, причём $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$.

Г. Обе точки A и B расположены на прямой KL.

10) $\alpha = 0°$, причём $d_1 = d_2 = 0$.

Точка и окружность.

Связь между точкой P и окружностью выражается: 1) радиусом (r) окружности и 2) расстоянием (d) между этой точкой и центром окружности.

Возможные конфигурации:

1) Точка P находится вне круга ($d>r$).
2) ,, P ,, на окружности ($d=r$).
3) ,, P ,, внутри круга, но не в центре ($0<d<r$).
4) ,, P ,, в центре круга ($d=0$).

Прямая и окружность.

Связью прямой с окружностью является: 1) радиус (r) окружности и 2) расстояние (d) от центра окружности до прямой.

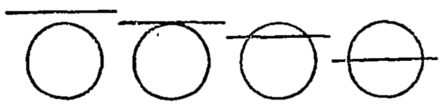


Рис. 7.

Возможные конфигурации (рис. 7):

1) Прямая не пересекает окружности ($d>r$).
2) ,, касается ,, ($d=r$).
3) ,, пересекает окружность, но не проходит через центр ($0<d<r$).
4) Прямая проходит через центр окружности ($d=0$).

Угол и точка.

Связью между точкой и углом является: 1) величина угла (α) и 2) расстояния (d_1 и d_2) точки от сторон угла или от их продолжений.

Возможные конфигурации:

1) Точка лежит во внутренней области угла ($d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $d_1 \neq d_2$).

2) Точка лежит на биссектрисе данного угла ($d_1 = d_2$) или на её продолжении за вершину.

3) Точка лежит во внешней области угла ($d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $d_1 \neq d_2$).

4) ,, ,, на биссектрисе смежного угла ($d_1 = d_2$).

5) ,, ,, на одной из сторон угла ($d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$).

6) ,, ,, в вершине угла ($d_1 = 0$, $d_2 = 0$).

Угол и прямая.

Связью между данным углом и данной прямой является: 1) величина угла (α) и 2) отрезки (l_1 и l_2), отсекаемые этой прямой от сторон угла, считая от вершины.

Возможные конфигурации:

1) Прямая отсекает от сторон угла одинаковые отрезки ($l_1 = l_2$).

2) Прямая отсекает от сторон угла неодинаковые отрезки ($l_1 \neq l_2$, $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$).

3) Прямая пересекает стороны смежного угла.

4) Прямая параллельна одной из сторон.

5) Прямая делит данный угол пополам.

6) Прямая делит смежный угол пополам.

7) Прямая совпадает с одной из сторон угла.

8) Прямая вся лежит во внешней области угла и не проходит через его вершину.

9) Прямая проходит через вершину угла, оставаясь во внешней области его.

10) Прямая проходит через вершину угла, причём часть её лежит во внутренней области его.

Окружность (O, R), прямая (KL) и точка (P) на этой прямой.

Связь между ними определяют следующие отрезки: 1) радиус (R) окружности, 2) расстояние (d) центра O окружности от прямой KL и 3) расстояние (d_1) между данной точкой и центром окружности.

Возможные конфигурации (рис. 8):

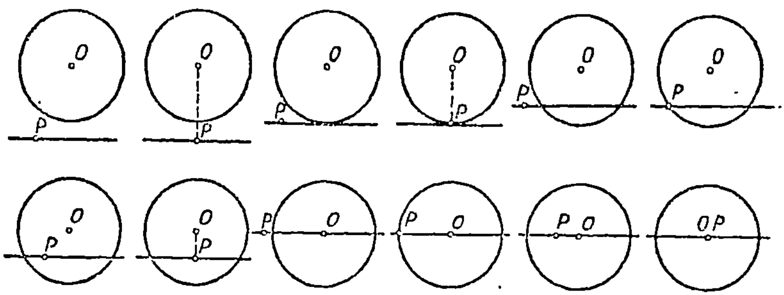


Рис. 8.

Две окружности (два круга).

Связью между двумя окружностями является: 1) расстояние (d) между их центрами и 2) радиусы (r и R) этих окружностей.

Возможные конфигурации:

I. Если $R > r$			
	Величина d	Конфигурация окружностей	Сколько общих точек имеют эти две окружности
1	$d > R + r$	Одна окружность лежит вне другой	0
2	$d = R + r$	Окружности внешне касаются одна другой	1
3	$R - r < d < R + r$	Окружности взаимно пересекаются	2
4	$d = R - r$	Окружности внутренне касаются одна другой	1
5	$0 < d < R - r$	Одна окружность находится внутри другой, причём их центры не совпадают	0
6	$d = 0$	Окружности концентричны	0
II. Если $R = r$			
1	$d > 2R$	Одна окружность лежит вне другой	0
2	$d = 2R$	Окружности внешне касаются	1
3	$0 < d < 2R$	Окружности взаимно пересекаются	2
4	$d = 0$	Окружности совпадают	∞

Точка (P) на окружности (O, r) и прямая (KL).

1) Связь окружности с прямой — расстояние (d) между центром окружности и прямой;

2) Связь точки на окружности с самой окружностью — радиус (r);

3) Связь прямой с точкой окружности — расстояние (d_1) между ними.

Возможные конфигурации представлены на рисунках 9 и 10.

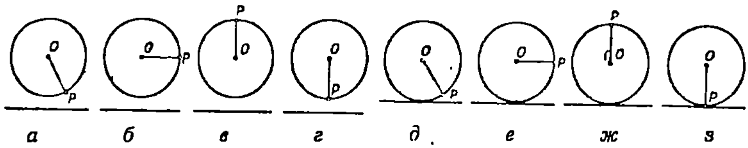


Рис. 9.

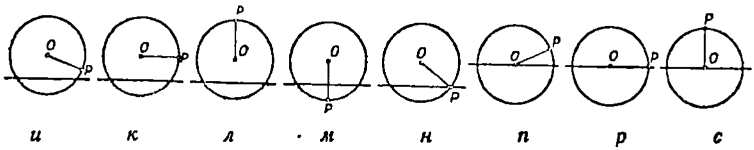


Рис. 10.

Прямая (AB) и две параллельные прямые (CD и EF).

Связью между прямой AB и двумя параллельными прямыми CD и EF является:

1) Расстояние между прямыми CD и EF (d).

2) Угол, образуемый прямою AB с прямыми CD и EF, или (если $AB \parallel CD$) расстояния (d_1 и d_2) между прямой AB и прямыми CD и EF.

Возможные конфигурации:

1) AB перпендикулярна к CD и EF.

2) AB образует с CD и EF тупой или острый угол.

3) AB параллельна CD и EF и равноудалена от каждой из них.

4) AB параллельна CD и EF и находится между ними на разных расстояниях от них.

5) AB параллельна CD и EF и не находится между ними.

6) AB совпадает с прямой CD или с прямой EF.

Окружность (K) и две параллельные прямые (AB и CD).

Связью между окружностью и двумя параллельными прямыми является:

1) Радиус окружности (R).

2) Расстояния (d_1 и d_2) данных параллельных прямых от центра окружности.

3) Расстояние (d) между параллельными прямыми.

Возможные конфигурации:

1) Окружность K не находится между прямыми AB и CD и не имеет с ними точки касания.

2) Окружность K не находится между прямыми AB и CD, но касается одной из них.

3) Окружность K пересекает только одну из прямых AB и CD и не касается другой.

4) Окружность K пересекает одну прямую (AB) и касается другой прямой (т. е. CD).

5) Окружность K пересекает обе прямые AB и CD.

6) Окружность K касается обеих прямых.

7) Окружность находится между прямыми AB и CD и касается одной из них.

8) Окружность находится между прямыми AB и CD и не имеет с ними общих точек.

9) Окружность не имеет общих точек с прямыми AB и CD, и её центр равноудалён от каждой из этих прямых.

Примечание. В указанных 3-й и 4-й конфигурациях центр окружности может лежать вне прямых, на одной из них или между прямыми. В 5-й конфигурации центр может быть равноудалённым от прямых.

Окружность (K) и угол (α).

Связь между окружностью и углом выражается:

1) Радиусом (R) окружности.

2) Расстояниями (d_1 и d_2) от центра окружности до сторон угла.

3) Величиной угла (α).

Возможные конфигурации:

1) Окружность лежит вне зоны угла, не касается его сторон и не пересекает их.

2) Окружность лежит вне зоны угла и касается одной из его сторон.

3) Окружность пересекает одну из сторон угла.

4) Окружность касается одной из сторон угла и пересекает другую.

5) Окружность пересекает каждую из сторон угла.

6) Окружность касается обеих сторон угла.

7) Окружность лежит внутри угла и касается одной из его сторон.

8) Окружность лежит внутри угла и не имеет со сторонами угла общих точек.

9) Окружность проходит через вершину угла, касается одной из его сторон и пересекает другую.

10) Окружность проходит через вершину угла, касается одной из его сторон и не пересекает другой стороны.

11) Окружность проходит через вершину угла и пересекает обе его стороны.

12) Центр окружности совпадает с вершиною угла.

13) Окружность проходит через вершину угла, пересекая продолжения его сторон.

14) Окружность пересекает обе стороны угла и их продолжения, причём центр её не совпадает с вершиною угла.

Примечание. В указанных отдельных конфигурациях центр окружности может лежать на стороне угла или на её продолжении, во внутренней области или во внешней.

§ 2. ОБЩИЕ ТОЧКИ ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ.

Необходимо сделать ученикам разъяснения, касающиеся вопроса о числе общих точек двух геометрических образов. Сущность этих разъяснений можно свести в следующую таблицу:

	Геометрическое место	Геометрическое место	Конфигурация этих геометрических мест	Число общих точек этих геометр. мест
На плоскости	прямая	прямая	параллельны пересекаются совпадают	0 1 ∞
	прямая	окружность	не пересекаются и не касаются касаются пересекаются	0 1 2
На плоскости	окружность	окружность	не пересекаются касаются пересекаются совпадают	0 1 2 ∞
	прямая	дуга окружности	не пересекаются и не касаются касаются пересекаются	0 1 1 или 2
На плоскости	дуга окружности	окружность	не пересекаются и не касаются касаются совпадают пересекаются	0 1 ∞ 1 или 2
	дуга окружности	дуга окружности	не касаются и не пересекаются касаются пересекаются совпадают (полностью или частично)	0 1 1 или 2 ∞
В пространстве	прямая	прямая	скрещиваются или параллельны пересекаются совпадают	0 1 ∞
	прямая	плоскость	параллельны пересекаются совпадают	0 1 ∞
	плоскость	плоскость	параллельны пересекаются совпадают	0 ∞ ∞

Эту таблицу преподаватель может использовать для устных упражнений, дополнив её различными сочетаниями пространственных геометрических мест, например:

Геометрические места	Конфигурация	Число общих точек
Прямая линия и шаровая поверхность	не пересекаются и не касаются	0
	касаются	1
	пересекаются	2

§ 3. ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ.

Отношение $m:n:p$.

В числе данных, указываемых в условии геометрической задачи на построение, могут встречаться и такие, которые выражают отношения между геометрическими величинами.

Пример. Построить треугольник, зная, что его периметр равен S, а отношение сторон равно $m:n:p$.

Следует разъяснить учащимся, что под записью $m:n:p$ разумеется отношение произвольных, но определённых отрезков, т. е. имеющих определённую длину.

Если в домашнем задании по геометрии встречаются упомянутые выражения, то с целью внесения определённости надо указать ученикам, какие отрезки они должны взять вместо m, n, p.

Вот несколько примеров, поясняющих, как учитель может указать ученикам выбор величин m, n, p.

I. В задаче № такой-то допустить, что m и n являются стороной квадрата и его диагональю.

II. В задаче № такой-то допустить, что m и n являются относительно произвольной окружности сторонами вписанного и описанного квадратов.

III. В задаче № такой-то возьмите, вместо m, n, p, какие угодно отрезки, лишь бы они удовлетворяли следующим условиям:

$$2\ см \leqslant m \leqslant 3\ см,\quad 3{,}5\ см \leqslant n \leqslant 4{,}5\ см,\quad 5\ см \leqslant p \leqslant 6\ см.$$

IV. В задаче № такой-то допустить, что m — сторона правильного треугольника, n — высота того же треугольника, а p — радиус круга, вписанного в этот же треугольник.

Если длину какого-нибудь определённого отрезка примем за единицу, то любой отрезок при заданной единице измерения можно считать выражением некоторого числа.

Примеры. 1) Если сторону квадрата примем за единицу, то его диагональ представит собою число, равное $\sqrt{2}$, или приближенно 1,4142. 2) Если сторону равностороннего треугольника примем за единицу, то его высота представит собою число $\frac{\sqrt{3}}{2}$, или приближённо 0,866.

Так как каждый отрезок можно считать графическим выражением числа, то отношение отрезков равно отношению выражаемых ими чисел.

Надо дать ученикам определённые указания, как они должны поступать в том случае, когда встречается потребность отношение чисел заменить отношением отрезков.

Пример. Дробь $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ заменить отношением каких-нибудь отрезков.

Решение. Выбираем произвольно какой-нибудь отрезок AB и принимаем его за единицу. Затем заменяем 2 посредством отрезка, равного $2\cdot AB$, $\sqrt{3}$—отрезком, равным $\sqrt{AB\cdot(3AB)}$, и 3—отрезком, равным $3\cdot AB$.

Таким образом,

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3}=\frac{2AB+\sqrt{AB\,(3AB)}}{3AB}.$$

Посредством известных построений найдём, что

$$2\cdot AB+\sqrt{AB\cdot(3AB)}$$

представляет собой отрезок KL вполне определённой длины. Что касается выражения $3\cdot AB$, то оно, очевидно, определяет некоторый отрезок MN, который втрое больше отрезка AB, принятого нами за единицу.

Итак, мы можем написать:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3}=\frac{KL}{MN},$$

где KL и MN—отрезки.

Отношения $a^2:b^2$, $a^3:b^3$ и т. п.

Иногда в геометрической задаче на построение отношение двух величин даётся в виде:

$$a^2:b^2,\ \text{или}\ a^3:b^3,\ \text{или}\ a^4:b^4\ \text{и т. п.,} \qquad (1)$$

где a и b представляют собою данные отрезки.

Покажем, что любое из отношений (1) можно заменить отношением двух отрезков.

I. Начертим две произвольные взаимно-перпендикулярные прямые KL и MN (рис. 11) и обозначим буквою O точку их пересечения. На прямых KL и MN, от точки O, отложим отрезки OA и OA_1, соответственно равные данным отрезкам b и a. Соединив точки A и A_1; восставим в точке A_1 перпендикуляр к A_1A и продолжим его до пересечения с прямой KL в некоторой точке A_2.

В точке A_2 восставим перпендикуляр к A_2A_1 и продолжим его до пересечения с прямой MN в некоторой точке A_3 и т. д.

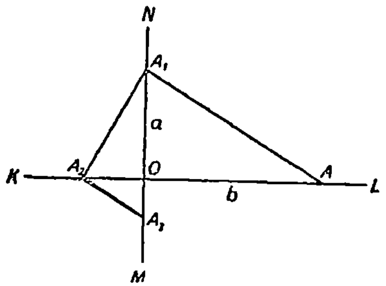


Рис. 11.

II. Определим величину каждого из следующих отношений:

$$OA_1:OA,\ OA_2:OA_1,\ OA_3:OA_2$$

и т. д.

Так как прямоугольные треугольники OAA_1, OA_1A_2, $OA_2A_3\ldots$ подобны, то, значит,

$$OA_1:OA = OA_2:OA_1 = \\ = OA_3:OA_2 = \ldots. \tag{2}$$

По построению,

$$OA_1:OA = a:b, \tag{3}$$

а потому, в силу (2), получим

$$OA_2:OA_1 = a:b, \tag{4}$$

$$OA_3:OA_2 = a:b \tag{5}$$

и т. д.

III. Определим величину отношения

$$OA_2:OA.$$

Оно не изменится, если мы каждый из его членов разделим на одну и ту же величину OA_1, а потому

$$OA_2:OA = \frac{OA_2}{OA_1}:\frac{OA}{OA_1}. \tag{6}$$

Но из равенств (4) и (3) усматриваем, что

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{a}{b} \tag{7}$$

и

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{b}{a}. \tag{8}$$

В силу (7) и (8) можем равенство (6) переписать так:

$$OA_2:OA = \frac{a}{b}:\frac{b}{a},$$

откуда, умножая на ab оба члена правой части равенства, получим:

$$OA_2:OA = a^2:b^2. \tag{9}$$

IV. Определим теперь отношение отрезков

$$OA_3:OA.$$

Рассмотрим равенство:

$$OA_3 : OA = \frac{OA_3}{OA_2} : \frac{OA}{OA_2}. \qquad (10)$$

Из (5) видно, что

$$\frac{OA_3}{OA_2} = \frac{a}{b}, \qquad (11)$$

а из (9) вытекает, что

$$\frac{OA}{OA_2} = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (12)$$

Приняв во внимание (11) и (12), можем равенству (10) придать такой вид:

$$OA_3 : OA = \frac{a}{b} : \frac{b^2}{a^2},$$

откуда, умножив на ab^2 оба члена правой части равенства, получим:

$$OA_3 : OA = a^3 : b^3. \qquad (13)$$

V. Аналогичными рассуждениями найдём, что

$$OA_4 : OA = a^4 : b^4, \qquad (14)$$

$$OA_5 : OA = a^5 : b^5 \qquad (15)$$

и т. д.

Отношения $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, $\sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{b}$ и т. п.

I. Допустим, что отношение величин задано в виде $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, где a и b — данные отрезки.

Для определения тех двух отрезков, отношение которых равно $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, поступаем следующим образом (рис. 11а).

1) На произвольной прямой от выбранной нами точки K отложим последовательно два отрезка: KN, равный a, и NM, равный b,

т. е. $$KN = a \text{ и } NM = b. \qquad (1)$$

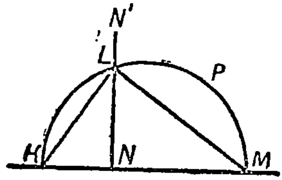


Рис. 11а.

2) На отрезке KM, как на диаметре, построим полуокружность KPM.

3) В точке N восставим перпендикуляр NN' к отрезку KM.

Прямая NN' пересечёт дугу KPM в некоторой точке L.

4) Соединяем отрезками точку L с точками K и M. Отрезки KL и LM — искомые,

т. е. $$KL : LM = \sqrt{a} : \sqrt{b}. \qquad (2)$$

Действительно, треугольник KLM прямоугольный. На основании известного следствия запишем:

$$KL^2 = KN \cdot KM \qquad (3)$$

и

$$LM^2 = MN \cdot KM. \qquad (4)$$

Разделив почленно (3) на (4), получим:

$$KL^2 : LM^2 = KN : NM. \qquad (5)$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства́ (5), найдём:

$$KL : LM = \sqrt{KN} : \sqrt{NM}. \qquad (6)$$

Из (1) и (6) получим:

$$KL : LM = \sqrt{a} : \sqrt{b}.$$

II. Чтобы получить два отрезка, отношение которых равно

$$\sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{b},$$

необходимо сначала построить такие два отрезка m и n, отношение которых определяется равенством

$$m : n = \sqrt{a} : \sqrt{b},$$

а затем, посредством такого же построения, найти отрезки p и q, которые определяются равенством

$$p : q = \sqrt{m} : \sqrt{n}.$$

III. Аналогичными построениями можно найти отрезки, отношение которых равно

$$\sqrt[2n]{a} : \sqrt[2n]{b},$$

где a и b — данные отрезки, а n — любое целое число.

II. ИСКОМЫЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

В курсе геометрии средней школы рассматриваются задачи на построение, большей частью относящиеся к планиметрии, где мы встречаемся со следующими геометрическими образами: точка, прямая (отрезок прямой), угол, окружность (дуга окружности).

В каждой геометрической задаче на построение отыскивается какой-нибудь из этих геометрических образов или определённая их совокупность, т. е. фигуры, образованные ломаными (треугольники, углы и т. д.) или смешанными линиями (круговой сектор, круговой сегмент). Но какова бы ни была геометрическая задача на построение, в конечном счёте дело сводится к последовательному определению точек и расстояний между ними.

Действительно, чтобы построить отрезок, равный данному, следует провести произвольную прямую, отметить на ней какую-нибудь точку и затем радиусом, равным длине данного отрезка, сделать на этой прямой засечку, чтобы определить точку, являющуюся другим концом искомого отрезка. При построении угла, равного данному, мы делаем засечки, т. е. ищем точки, находящиеся одна от другой на определённом расстоянии.

При построении треугольника по стороне и двум прилежащим углам делаем ряд засечек и ищем точку, являющуюся пересечением сторон углов, построенных при данном основании.

Подобных примеров можно привести неограниченное количество.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗА.

а) ТОЧКА.

Если искомая точка находится на каждом из двух данных геометрических образов, то она либо находится на их пересечении, либо является точкой их касания. Сколько окажется таких пересечений и касаний, столько и искомых точек (иначе: столько решений имеет данная задача).

В тех геометрических задачах на построение, которые встречаются в курсе средней школы, возможны только следующие три случая, когда искомая точка является общей для двух линий.

Искомая точка лежит на прямой (AB) и на прямой (CD).

1) Если прямые AB и CD пересекаются, то искомая точка одна.

2) Если прямая AB параллельна CD, то искомой точки не существует.

3) Если прямые AB и CD совпадают, то все точки прямой AB (или CD) являются искомыми.

Искомая точка лежит на прямой и на окружности.

1) Если прямая пересекает окружность, то искомых точек две.

2) Если прямая касается окружности, то искомая точка одна.

3) Если прямая не пересекает окружность и не касается её, то искомой точки не существует.

Обозначив буквой d расстояние между центром окружности и прямой, а буквой r—радиус окружности, можем сказать следующее:

1) искомых точек две, если $d < r$,

2) искомая точка одна, если $d = r$,

3) искомой точки не существует, если $d > r$.

Искомая точка лежит на одной и другой окружности.

1) Если эти две окружности (C и C_1) пересекаются, то искомых точек две.

2) Если окружности внешне или внутренне касаются друг друга, то искомая точка одна.

3) Если окружности не касаются и не пересекают друг друга, то искомой точки не существует.

4) Если окружности C и C_1 совпадают, т. е. имеют общий центр и радиус одной равен радиусу другой, то искомых точек бесконечное множество и все они лежат на окружности C (или C_1).

Обозначив буквою d расстояние между центрами данных окружностей, буквами R и r — их радиусы, можем сказать следующее:

1) Если $R-r<d<R+r$, то искомых точек две.

2) Если $d=R+r$ или $d=R-r$, то искомая точка одна.

3) Если $d>R+r$, или $d<R-r$, или $d=0$, $R\neq r$, то искомых точек нет.

4) Если $d=0$ и $R=r$, то искомых точек бесконечное множество.

б) ПРЯМАЯ И ОТРЕЗОК ПРЯМОЙ.

Положение прямой определяется двумя точками. Поэтому, когда речь идёт о построении какой-нибудь прямой, то стремятся найти те две точки, которые заведомо лежат на искомой прямой.

Отрезок вполне определён и по величине и по положению, если нам известны точки, являющиеся его концами.

В отдельных случаях одна из этих точек даётся, а другую надо отыскать, исходя из определённых геометрических условий.

Самым общим случаем будет такой, когда ни одна из точек, являющихся концами искомого отрезка, не дана, но известно, что эти точки должны удовлетворять определённым условиям.

в) УГОЛ.

Угол определяется положением двух составляющих его сторон. Поэтому задачи на определение угла сводятся к определению двух прямых, составляющих этот угол.

г) ОКРУЖНОСТЬ.

Окружность вполне определена, если известен её центр и длина радиуса. Если даны или найдены три точки, лежащие на искомой окружности, то легко определить её центр и радиус.

III. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

§ 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ.

Выполнение геометрического построения посредством циркуля и линейки основывается на возможности производить следующие четыре элементарных операций:

Содержание элементарной операции	В каких случаях операция выполнима
I. Взять (отметить) одну или несколько точек: а) на плоскости, б) на прямой или вне её, в) на окружности.	Всегда
II. Провести прямую: а) произвольную, б) проходящую через данную точку, в) проходящую через две данные точки.	Всегда
III. Описать окружность: а) из произвольной точки произвольным радиусом, б) из произвольной точки данным радиусом, в) из данной точки произвольным радиусом, г) из данной точки данным радиусом.	Всегда
IV. Найти точки пересечения: а) двух данных прямых, б) прямой и окружности, в) двух окружностей (дуг).	Если эти точки существуют

Примечание. Нет единого мнения о том, какие операции геометрических построений считать элементарными. Некоторые авторы, например, операцию „взять точку" не включают в число элементарных.

Если требуемое в геометрической задаче построение можно осуществить посредством конечного числа элементарных операций, то о такой задаче говорят, что она решается с помощью циркуля и линейки.

В программу геометрии средней школы включены только такие задачи на построение, которые решаются посредством циркуля и линейки.

Покажем на отдельном примере, что решение любой геометрической задачи на построение, выполняемое с помощью циркуля и линейки, состоит из перечисленных элементарных операций.

Задача. *Из данной точки A провести касательную к данной окружности, имеющей центр в точке O.*

Построение.

Содержание выполняемой элементарной операции	К какой из четырёх элементарных операций она относится
1. Через точку A и O проводим прямую	IIв
2. Из точки A, как из центра, произвольным радиусом (длина которого больше половины отрезка AO) описываем окружность K_1	IIIв
3. Из точки O, как из центра, тем же радиусом описываем окружность K_2	IIIг

Продолжение

Содержание выполняемой элементарной операции	К какой из четырёх элементарных операций она относится
4. Находим точки C и D пересечения построенных окружностей K_1 и K_2	IVв
5. Через точки C и D проводим прямую	IIв
6. Находим точку E пересечения прямолинейных отрезков AO и CD	IVа
7. Из точки E, как из центра, описываем окружность K_3 радиусом, равным отрезку AE (или EO)	IIIг
8. Находим точку F пересечения этой окружности (K_3) с данной окружностью	IVв
9. Через точки A и F проводим прямую, которая и является искомой касательной	IIв

§ 6. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ.

Некоторые типичные часто встречающиеся сочетания элементарных операций называют **основными построениями**.

Каждое основное построение представляет собой не что иное, как более или менее простенькую задачу, решение которой является составной частью решения множества сложных задач этого рода.

Вот перечень основных построений:

I. *Построить отрезок, равный данному отрезку a.*

Решение. Проводим произвольную прямую MN (рис. 12), отмечаем на ней произвольную точку A. Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку a, засекаем на прямой MN точки B и C. AB и AC—искомые отрезки; каждый из них равен данному отрезку a.

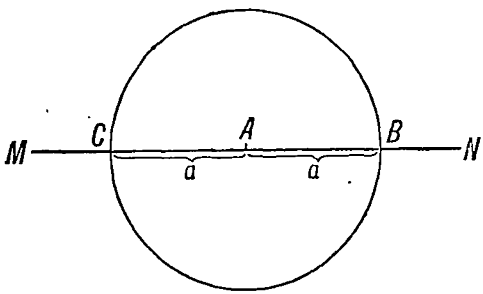


Рис. 12.

II. *Дана окружность K и требуется построить в ней хорду, длина которой равна данному отрезку a.*

Решение. На окружности K отмечаем произвольную точку A (рис. 12а). Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку a, засекаем на окружности K точки B и C. Проводим из точки A прямые, проходящие через точки B и C. Отрезки AB и AC—искомые хорды. Каждая из них равна данному отрезку a.

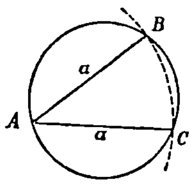


Рис. 12а.

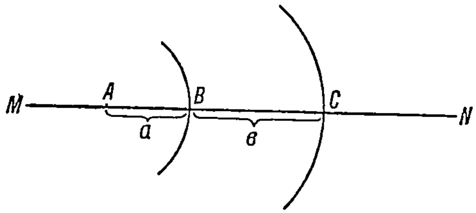


Рис. 12б.

III. *Построить отрезок, равный сумме данных отрезков a и $в$.*

Решение. Проводим произвольную прямую MN и отмечаем какую-нибудь на ней точку A (рис. 12б). Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку a, засекаем на луче AN точку B.

Из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку $в$, засекаем точку C на луче BN. AC—искомая сумма отрезков a и $в$.

IV. *Построить отрезок, равный разности данных отрезков a и $в$.*

Решение. Проводим произвольную прямую MN и отмечаем на ней какую-нибудь точку A (рис. 12в). Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку a, засекаем на луче AN точку B. Из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку $в$, засекаем точку C на луче BM. AC—искомая разность отрезков a и $в$.

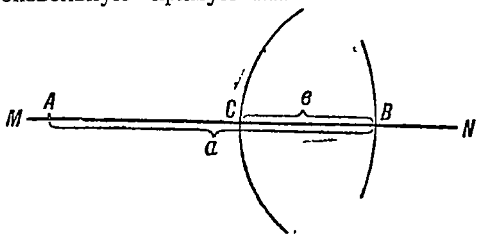


Рис. 12в.

V. *Построить треугольник, сторонами которого являются данные отрезки m, n, p.*

Решение. Проводим произвольную прямую MN (рис. 12г) и отмечаем на ней какую-нибудь точку A. Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку m, засекаем точку B на луче AN. Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку n, описываем дугу A_1A_2. Из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку p, описываем дугу B_1B_2. Дуги A_1A_2 и B_1B_2 пересекутся в некоторой

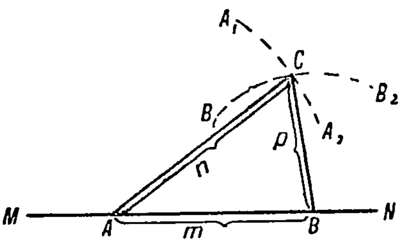


Рис. 12г.

точке C (если $n+p>m$). Точку C соединяем прямыми отрезками с точками A и B.

Треугольник ABC—искомый.

VI. *Построить угол, равный данному углу α.*

Решение. Проводим произвольную прямую MN и отмечаем на ней какую-нибудь точку O (рис. 12д). Из вершины данного угла α, как из центра, произвольным радиусом засекаем на сторонах этого угла точки A и B. Тем же радиусом из точки O, как из центра, начиная от луча ON, описываем дугу O_1O_2. Из точки O_1, как из центра, радиусом, равным расстоянию между точками A и B, засекаем на дуге O_1O_2 точку C.

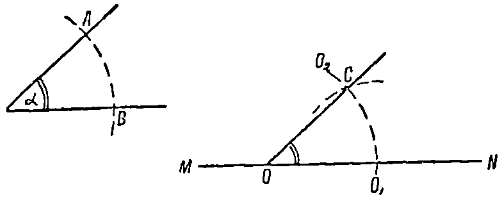


Рис. 12д.

Из точки O через точку C проводим прямую. $\angle CON$—искомый.

VII. *Разделить данный угол пополам.*

Решение. I-й способ. Из вершины B данного угла (рис. 12е), как из центра, произвольным радиусом засекаем на сторонах угла точки D и E. Из точек D и E, как из центров, произвольным радиусом чертим дуги D_1D_2 и E_1E_2, которые пересекутся в некоторой точке H. Из точки B через точку H проводим луч. BH—биссектриса угла ABC.

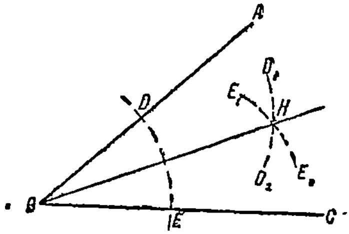


Рис. 12е.

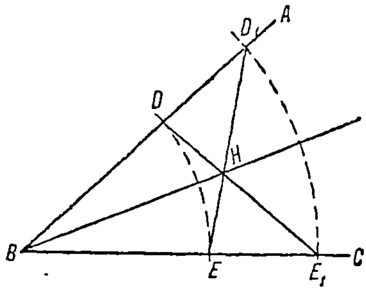


Рис. 12ж.

II-й способ. Из вершины B данного угла, как из центра, произвольным радиусом засекаем точки D и E на сторонах AB и BC этого угла (рис. 12ж).

Затем из той же вершины B, как из центра, другим радиусом засекаем точки D_1 и E_1 на сторонах AB и BC.

Проводим прямолинейные отрезки DE_1 и D_1E, которые пересекутся в некоторой точке H. Из точки B проводим луч через точку H. BH—биссектриса угла ABC.

VIII. *Провести перпендикуляр к данному отрезку AB через его середину.*

Решение. Из точек A и B (рис. 12з), как из центров, одним и тем же радиусом, который больше половины отрезка AB, описываем дуги A_1A_2 и B_1B_2. Эти дуги пересекутся в двух точках C и D.

Прямая, проведённая через точки C и D, является искомой: она перпендикулярна к отрезку AB и пересекает его в некоторой точке (M), которая является его серединой.

Примечание. Точно так же решается задача, в которой требуется отрезок AB разделить пополам.

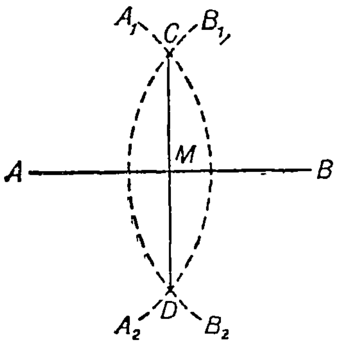


Рис. 12з.

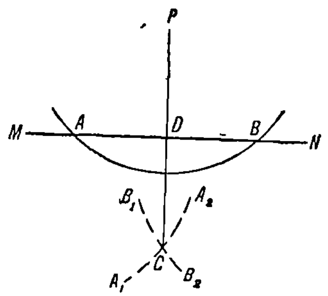


Рис. 12и.

IX. *Из данной точки P, лежащей вне данной прямой MN, опустить перпендикуляр на эту прямую* (рис. 12и).

Решение. Из точки P, как из центра, произвольным радиусом чертим такую дугу, которая пересекла бы данную прямую MN в двух точках. Обозначим их буквами A и B.

Затем из точек A и B, как из центров, тем же радиусом, равным AP, описываем дуги A_1A_2 и B_1B_2. Эти дуги пересекутся в некоторой точке C. Соединяем отрезком точки C и P. Отрезок CP пересечёт прямую MN в некоторой точке D.

PD—искомый перпендикуляр.

X. *Через данную точку P, лежащую вне данной прямой MN, провести прямую, параллельную MN.*

Решение. Из точки P (рис. 12к), как из центра, произвольным радиусом описываем дугу P_1P_2, пересекающую прямую MN в некоторых точках A и B. Из точки B, как из центра, тем же радиусом описываем дугу B_1B_2. Из точки P, как из центра, радиусом, равным отрезку AB, засекаем на дуге B_1B_2 точку C.

Проводим прямую через точки P и C.

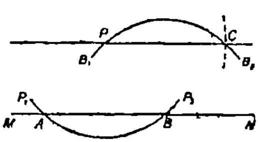


Рис. 12к.

Прямая PC—искомая, ибо она параллельна данной прямой MN.

Некоторые методисты относят к числу основных построений ещё следующие задачи:

а) разделить данный отрезок на равные части;

б) построить касательную к окружности, параллельную данной прямой;

в) через данную точку провести касательную к данной окружности;

г) построить общие касательные к двум данным окружностям;

д) построить многоугольник, подобный данному, если известна сторона, соответствующая одной из сторон данного;

е) разделить отрезок прямой на части, пропорциональные данным отрезкам;

ж) построить четвёртый пропорциональный отрезок к трём данным;

з) построить отрезок, средний пропорциональный между двумя данными отрезками;

и) построить отрезок, квадрат которого равен сумме квадратов двух данных отрезков;

к) построить отрезок, квадрат которого равен разности квадратов двух данных отрезков;

л) построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику.

§ 7. О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

При решении геометрических задач на построение может оказаться, что не один, а несколько или даже бесчисленное множество геометрических образов удовлетворяют условию задачи.

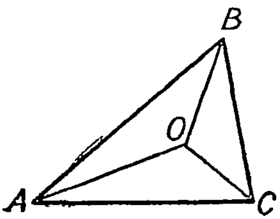


Рис. 13.

Рассмотрим в связи с этим решения различных видов геометрических задач на построение.

I. Если в геометрической задаче на построение требуется найти точки, то каждая из построенных точек, удовлетворяющая условию задачи, является решением.

Примеры.

а) *Найти точку, равноудалённую от сторон данного треугольника ABC.*

Искомая точка O является пересечением биссектрис внутренних углов (рис. 13).

Задача имеет одно решение.

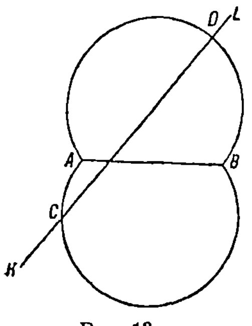


Рис. 13а.

б) *Дан отрезок AB и пересекающая его прямая KL* (рис. 13а). *Определить на прямой KL такую точку, из которой отрезок AB виден под данным углом α.*

Из чертежа видно, что эта задача при данной конфигурации имеет два решения: точки C и D.

II. Если в геометрической задаче на построение требуется найти линии, то каждая из построенных линий, удовлетворяющая условию задачи, является решением.

Примеры.

а) *Дана окружность и прямая AB* (рис. 13б). *Построить касательную к этой окружности, параллельную прямой AB.*

Задача имеет два решения (A_1B_1 и A_2B_2).

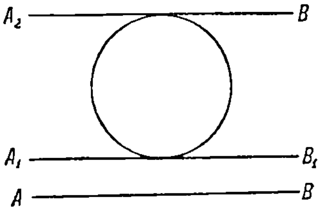


Рис. 13б.

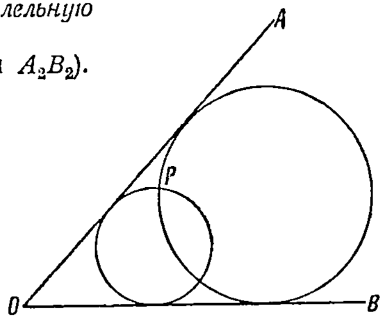


Рис. 13в.

б) *Дан угол AOB и внутри его точка P. Вписать в этот угол окружность, которая проходит через точку P.*

Из чертежа видим, что эта задача имеет два решения (рис. 13в).

в) *Дана окружность и прямая KL* (рис. 13г). *Требуется построить такую касательную к окружности, которая образовала бы с прямой KL угол α.*

Задача имеет четыре решения.

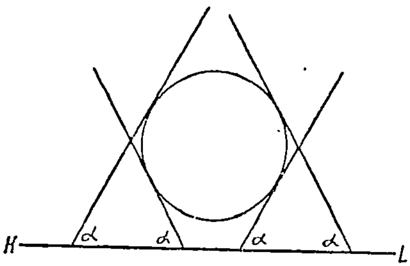


Рис. 13г.

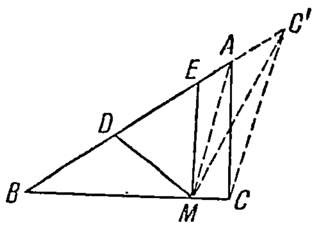


Рис. 13д.

III. Если надо построить совокупность прямых или отрезков, удовлетворяющих условию задачи, и оказывается возможным построить n таких совокупностей, отличающихся одна от другой, то считают, что задача имеет n решений.

Примеры.

а) *Разделить треугольник ABC на три равновеликие части лучами, выходящими из точки M, находящейся на его стороне BC.* (рис. 13д).

Задача имеет одно решение, потому что прямыми, проведёнными из точки M, можно единственным способом разделить площадь данного треугольника ABC на три равные части.

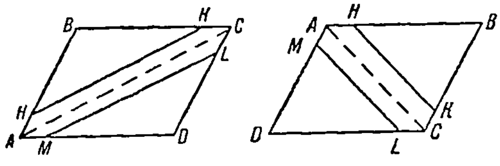


Рис. 13е.

б) *Разделить параллелограм на три равновеликие части прямыми, параллельными диагоналям.*

Задача имеет два решения (рис. 13е).

в) *Дан разносторонний треугольник ABC и требуется через его вершины провести параллельные прямые так, чтобы средняя из них рассекала сторону треугольника на части в отношении $m:n$.*

Задача имеет шесть решений (рис. 13ж), где $m:n = 1:2$.

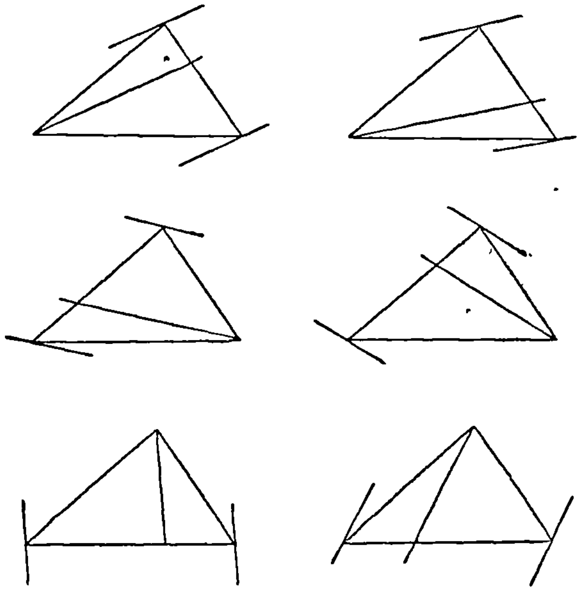


Рис. 13ж.

IV. Если в геометрической задаче на построение требуется найти различные положения определённого геометрического образа, имеющего данные размеры, то в этом случае каждая из построенных фигур, удовлетворяющая условию задачи, является решением.

Примеры.

а) *Дан угол AOB* (рис. 13з) *и требуется вписать в него окружность радиуса r.*

Задача имеет одно решение.

б) *Дан круг радиуса R и касательная к нему KL* (рис. 13и). *Требуется построить окружность радиуса r, которая касалась бы данной окружности и прямой KL, зная, что $r \neq R$.*

Задача имеет четыре решения.

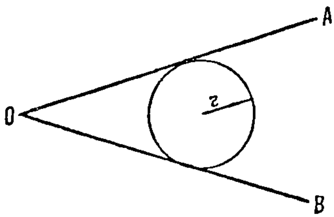


Рис. 13 з.

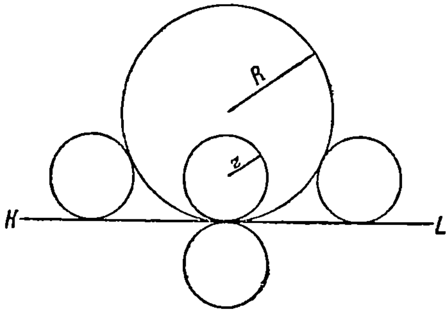


Рис. 13 и.

в) *Две параллельные прямые DD' и EE'* (рис. 13к), *расстояние между которыми равно h, пересечены под острым углом третьей прямой HH'. Построить равносторонний треугольник, сторона которого равна a, а вершины находятся на прямых DD', EE' и HH'* $(a > h)$.

Задача имеет четыре решения (в общем случае).

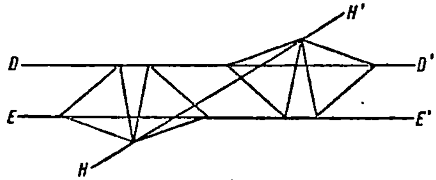


Рис. 13 к.

г) *Окружность радиуса R пересечена прямой (KL), проходящей через её центр. Построить окружность, которая касается данной окружности и прямой (KL) и имеет радиус вдвое меньший радиуса данной окружности.*

Задача имеет шесть решений (рис. 13л).

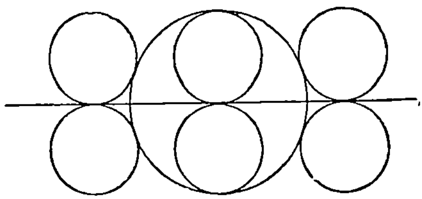


Рис. 13 л.

V. В некоторых геометрических задачах на построение требуется найти только форму и размеры некоторой фигуры, удовлетворяющей условию задачи, а положению этой фигуры относительно других геометрических образов не придаётся значения.

Если искомая фигура — круг, квадрат или правильный n-угольник, то построение сводится к определению лишь размеров искомой фигуры.

Примеры.

а) *Построить треугольник, зная один из его внутренних углов и длину каждой из высот* (h_1 *и* h_2), *опущенных на стороны этого угла* (рис. 13м).

Задача имеет одно решение.

б) *Построить четырёхугольник, зная его диагонали* (c *и* d), *две противоположные стороны* (a *и* b) *и отрезок* (e), *соединяющий середины этих сторон* (рис. 13н).

Задача имеет одно решение.

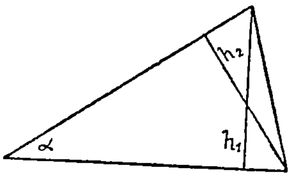


Рис. 13м

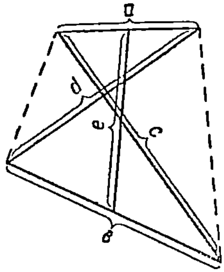


Рис. 13н.

в) *В данный разносторонний остроугольный треугольник ABC* (рис. 13о) *вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на одной стороне треугольника, а две другие вершины — на других сторонах.*

Задача имеет три решения.

Если условию задачи удовлетворяет n групп, каждая из которых может состоять из бесчисленного числа равных фигур, но фигура одной группы не равна фигуре другой какой-нибудь группы, то считают, что данная задача имеет n решений.

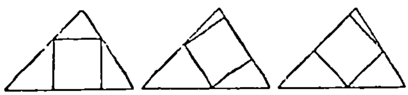


Рис. 13о.

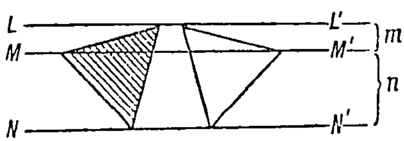


Рис. 13п.

Примеры.

г) *Вписать равносторонний треугольник в три данные параллельные прямые* LL', MM', NN', *расстояния между которыми даны* (рис. 13п).

Задача имеет одно решение.

д) *Даны три параллельные прямые* LL', MM', NN', *расстояния между которыми известны* (рис. 13р). *Построить прямоугольный треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а отношение катетов равно* $p:q$ (на чертеже $p:q = 1:2$).

Если каждый искомый треугольник будем строить так, чтобы вершина его прямого угла находилась на прямой MM' (рис. 13р), то получим две различных группы равных треугольников:

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2 = \ldots$$

и

$$\triangle DEF = \triangle D_1E_1F_1 = \ldots .$$

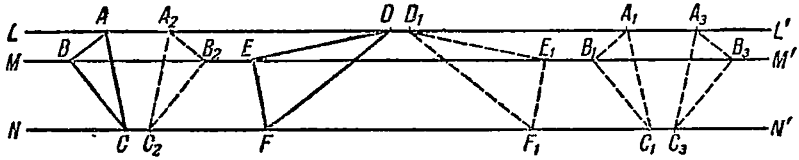


Рис. 13р.

Строя искомые треугольники так, чтобы вершины их прямых углов находились либо на прямой LL' (рис. 13с), либо на прямой NN' (рис. 13т), получим ещё четыре различных группы равных треугольников.

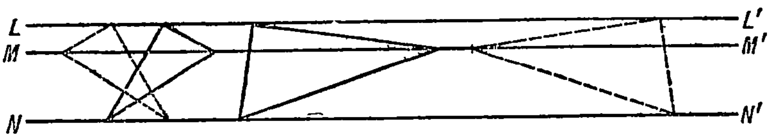


Рис. 13с.

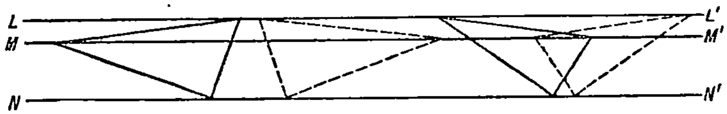


Рис. 13т.

Следовательно, рассматриваемая задача имеет шесть решений, т. е. в три данные параллельные прямые можно вписать шесть неравных между собою, но подобных прямоугольных треугольников, в которых отношение катетов равно $p:q$.

Примечание. Определяя число решений рассматриваемой геометрической задачи на построение, следует помнить, что как возможность получения решения, так и число решений может зависеть от конфигурации данных геометрических образов и их относительных размеров.

IV. СХЕМА РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

В основе решения всякой задачи на построение лежит отыскание и построение неизвестных элементов требуемой фигуры. Для достижения этой цели необходимо в первую очередь найти способ решения задачи, т. е. рассмотреть существующие связи и конфигурации между данными и искомыми элементами (точками) и свойства последних, выполнить само построение и проверить его с точки зрения соответствия требованиям задачи, а затем выяснить все возможные и характерные случаи этого построения.

В соответствии с этим геометрическая задача на построение решается по определённой схеме, состоящей из отдельных этапов, частей.

§ 8. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

Решение геометрической задачи на построение содержит следующие части: 1) анализ (отыскание способа решения), 2) построение, 3) доказательство и 4) исследование.

Анализ состоит в следующем. Предполагают задачу решённой и делают от руки вспомогательный чертёж, наглядно представляющий это решение.

Внимательно рассматривая чертёж искомой фигуры и, если нужно, пополняя его вспомогательными линиями, стремятся найти такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести решение сложной задачи к решению более простых, изученных ранее.

Таким образом, суть анализа состоит в том, чтобы путём установления геометрических связей и зависимостей между данными и искомыми задачи отыскать её решение.

Когда выяснено, каким образом можно получить требуемый геометрический образ, то выполняют соответствующее построение. После этого доказывают, что построенный геометрический образ действительно удовлетворяет условию задачи.

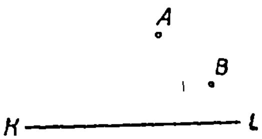


Рис. 14.

Наконец, исследуют, в каких случаях и сколько решений имеет задача и при каких данных она совсем не имеет решений.

Только некоторые, весьма простые задачи на построение не нуждаются ни в анализе, ни в доказательстве, ни в исследовании.

Покажем на примерах, как осуществляется решение геометрической задачи на построение.

I. **Задача.** *На данной прямой KL найти точку, одинаково удалённую от данных точек A и B.*

Анализ. Нам даны прямая и две точки (рис. 14).

Предположим, что задача решена и точка P является искомой (рис. 14а).

Искомая точка должна удовлетворять двум требованиям:

1) находиться на равном расстоянии от данных точек A и B и

2) находиться на данной прямой KL.

Так как по условию точка P отстоит на одинаковом расстоянии от точек A и B, то, значит, она одинаково удалена от концов отрезка AB, а потому лежит на прямой DE, которая проходит через середину D отрезка AB и перпендикулярна к нему.

Построив сначала вспомогательный отрезок AB, а затем вспомогательную прямую DE, мы определим точку P, в которой прямая DE пересекает прямую KL.

Точка P—искомая, так как она удовлетворяет условию задачи.

Построение. 1) Соединяем прямой точки A и B. 2) Проводим перпендикуляр DE через середину (D) отрезка (AB). 3) Находим точку P пересечения прямых DE и KL. Точка P—искомая.

Доказательство. Мы через середину отрезка AB провели прямую DE, перпендикулярную к отрезку AB. Каждая точка прямой DE одинаково удалена от концов отрезка AB. Точка P есть пересечение прямых DE и KL, а потому она лежит на каждой из этих двух линий. Так как точка P лежит на прямой DE, то, значит, эта точка одинаково удалена от точек A и B и, следовательно, удовлетворяет первому требованию условия задачи. Но точка P лежит и на прямой KL, значит, она удовлетворяет и второму требованию условия задачи.

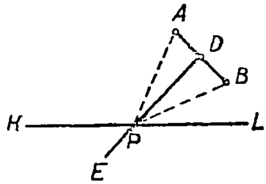


Рис. 14а.

Как видим, точка P удовлетворяет всем тем требованиям, какие изложены в условии задачи, а потому точка P—искомая.

Исследование. Всегда возможно провести через середину отрезка AB прямую DE, перпендикулярную к AB. Остаётся выяснить, всегда ли прямая DE пересечёт данную прямую KL. Тут возможны следующие случаи:

1) Если отрезок AB не образует прямого угла с данной линией KL, то прямая DE непременно пересечёт прямую KL в некоторой определённой точке, и задача будет иметь одно решение.

2) Если $AB \perp KL$, причём прямая KL не делит пополам отрезка AB, то прямая DE не пересечёт прямой KL, и, следовательно, задача не имеет ни одного решения.

3) Если же $AB \perp KL$ и KL делит пополам отрезок AB, то задача имеет бесчисленное множество решений, так как любая точка прямой KL отстоит на одинаковом расстоянии от точек A и B.

II. Задача. *Через точку P, данную внутри угла ABC, провести такую прямую, которая отсекала бы от сторон угла равные части.*

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 15) и что K и L суть те две точки, в которых искомая прямая пересекает стороны данного угла, причём $BK=BL$. Но в таком случае $\triangle BKL$—равнобедренный и, значит, биссектриса угла при вершине (B) должна быть перпендикулярна к основанию KL.

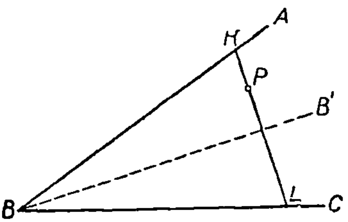


Рис. 15.

Построение. 1) Проводим биссектрису BB' угла ABC. 2) Из точки P опускаем перпендикуляр на биссектрису BB' и продолжаем его до пересечения со сторонами угла. Этот перпендикуляр—искомая прямая.

Доказательство. Биссектриса BB' разделила $\triangle BKL$ на два равных треугольника (2-й признак равенства треугольников). Следовательно, $BK = BL$.

Исследование. Построить биссектрису данного угла всегда возможно, и не может встретиться затруднений в проведении через точку P прямой, перпендикулярной к построенной биссектрисе. Следовательно, рассматриваемая задача всегда имеет решение.

III. **Задача.** *Построить сегмент по основанию* (a) *и высоте* (h).

Анализ. Делаем вспомогательный чертёж (рис. 16). Высота CD сегмента делит пополам его основание и лежит на прямой, проходящей через центр O того круга, частью которого является сегмент ACB.

Построив AB и высоту CD, мы определим три точки той окружности, частью которой является дуга ACB.

Построение. 1) Построим отрезок AB, равный a. 2) Из середины D отрезка AB восставим перпендикуляр и отложим на нём отрезок CD, равный h. 3) Из середины P отрезка CB восставим перпендикуляр PP', который пересечёт продолжение отрезка CD в некоторой точке O. 4) Из точки O, как из центра, радиусом, равным OA, опишем дугу, хордою которой является отрезок AB. Сегмент ACB — искомый.

Исследование. Задача всегда возможна, если оба данные отрезка a и h представляют собой конечные величины и не равны нулю.

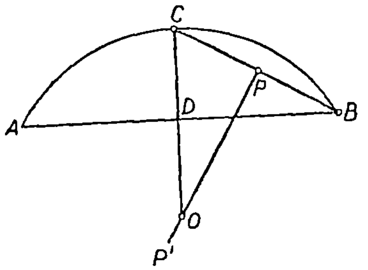


Рис. 16.

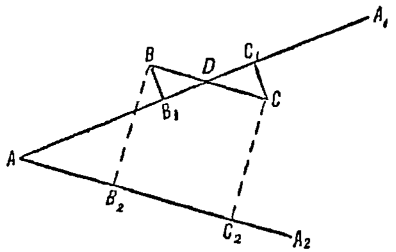


Рис. 17.

IV. **Задача.** *Три точки A, B и C не лежат на одной прямой. Провести из точки A прямую, равноотстоящую от точек B и C.*

Анализ. Допустим, что AA_1 — искомая прямая (рис. 17). В таком случае, опустив из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую AA_1, мы должны получить, что

$$BB_1 = CC_1. \qquad (1)$$

Отрезок BC пересечёт прямую AA_1 в некоторой точке D.

Очевидно, что

$$\triangle BB_1D = \triangle CC_1D, \qquad (2)$$

как прямоугольные, у которых равны катеты и противолежащие им острые углы:

$$\angle BDB_1 = \angle CDC_1.$$

Из (2) вытекает, что

$$BD = CD \qquad (3)$$

и, значит, искомая прямая проходит через точку D, которую легко определить.

Построение. 1) Соединяем точки B и C отрезком прямой. 2) Находим середину D отрезка BC. 3) Проводим прямую AA_1 через точки A и D. AA_1—искомая прямая.

Доказательство. По построению $BD=CD$, а потому прямоугольные треугольники BB_1D и CC_1D равны по гипотенузе и острому углу:

$$\angle BDB_1 = \angle CDC_1.$$

Из равенства этих треугольников вытекает, что $BB_1=CC_1$, и, следовательно, построенная прямая AA_1 удовлетворяет условию задачи.

Исследование. По условию, точки A, B, C не лежат на одной прямой, и в этом случае задача имеет два решения: одно решение состоит в том, что искомая прямая AA_1 проходит через середину отрезка BC, другое решение получим, если проведём прямую AA_2 параллельно отрезку BC.

V. **Задача.** *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе* (c) *и медиане* (m) *одного из катетов.*

Анализ. Допустим, что $\triangle ABC$ на рис. 18 представляет собою искомое решение. Отрезок AB нам известен; ясно, что для построения $\triangle ABC$ достаточно знать середину A_1 катета BC. Если соединим конец A_1 медианы с серединою C_1 гипотенузы AB, то отрезок A_1C_1 будет средней линией треугольника, и потому $A_1C_1 \parallel AC$. Отсюда вытекает, что $\triangle A_1BC_1$—прямоугольный и, значит, точка A_1 лежит на окружности, диаметром которой является отрезок BC_1.

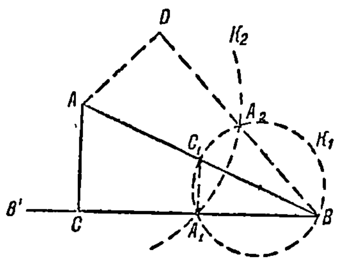


Рис. 18.

Но медиана AA_1 равна m, а потому точка A_1 находится где-то на окружности, описанной из точки A радиусом, равным m.

Итак, точка A_1 является пересечением этих двух окружностей.

Построение. 1) Строим отрезок AB, равный данному отрезку c. 2) Находим середину C_1 отрезка AB. 3) На отрезке BC_1, как на диаметре, строим окружность K_1. 4) Из точки A, как из центра, радиусом, равным m, описываем окружность K_2. 5) Окружности K_1 и K_2 пересекутся в точках A_1 и A_2. 6) Из точки B проводим прямую BB' через точку A_1. 7) Из точки A опускаем перпендикуляр AC на прямую BB'.

$$\triangle ABC \text{—искомый.}$$

Доказательство. По построению, $AB=c$, $AA_1=m$ и $\angle ACB=d$.

Угол BA_1C_1—прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр BC_1, а потому

$$A_1C_1 \parallel AC. \tag{1}$$

По построению, C_1 является серединою отрезка AB; значит (1), A_1C_1 есть средняя линия и A_1 — середина отрезка BC.

Отсюда следует, что AA_1 — медиана.

Таким образом, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем тем требованиям, какие вытекают из условия задачи: он прямоугольный, гипотенуза его равна отрезку c и медиана катета равна m.

Исследование. Две окружности могут пересечься не более, чем в двух точках.

Выполняя указанное построение относительно точки A_2, получим треугольник ABD, который равен треугольнику ABC, имеет с ним общую гипотенузу и оба они симметрично расположены относительно её.

Задача имеет решение, если пересекаются окружности K_1 и K_2. А это пересечение окажется возможным лишь в том случае, когда $\frac{c}{2} < m < c$.

VI. Задача. *Построить окружность, которая касалась бы данной прямой AB и данной окружности в данной на ней точке P.*

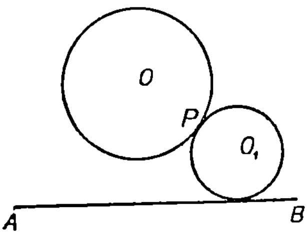


Рис. 19.

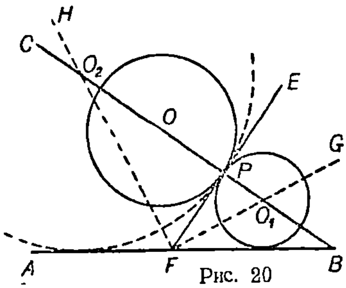


Рис. 20

Анализ. Предположив, что задача решена, делаем от руки чертёж, представляющий собою схематическое изображение тех данных, какие упоминаются в условии задачи, и искомую окружность (рис. 19).

Центры касающихся окружностей лежат на одной прямой с точкой касания, а потому центр (O_1) искомой окружности должен лежать где-то на прямой CB, проходящей через точки O и P (рис. 20).

Если проведём касательную EF к данной окружности в точке P, то прямая EF будет также касательной к искомой окружности. Искомая окружность должна касаться и данной прямой AB и прямой EF, а потому центр (O_1) этой окружности лежит на биссектрисе FG угла EFB.

Так как центр (O_1) искомой окружности лежит и на прямой CB и на прямой FG, то, значит, он находится на пересечении этих линий.

Найдя положение центра (O_1) искомой окружности, легко её построить, потому что радиус её окажется равным O_1P. Итак, одно решение найдено.

Прямая EF образует с данной прямой AB также угол AFE. Биссектриса FH этого угла пересечёт прямую CB в некоторой точке O_2. Точка O_2 является центром второй окружности, удовлетворяющей условию задачи.

Таким образом, при той конфигурации данных, какая представлена на рисунке, задача имеет два решения.

Построение. 1) Проводим прямую CB через точки O и P (рис. 20). 2) Через точку P проводим прямую EF, перпендикулярную к прямой CB. 3) Строим биссектрисы FG и FH углов EFB и AFE. Обозначим буквами O_1 и O_2 точки, в которых прямую CB пересекают прямые FG и FH. 4) Из точки O_1, как из центра, радиусом, равным O_1P, чертим окружность. 5) Из точки O_2, как из центра, радиусом, равным O_2P, чертим окружность. Эти две окружности являются искомыми.

Доказательство. По построению прямая EF является касательной к данной окружности (O, OP) в точке P.

Построенная окружность (O_1, O_1P) имеет центр в точке O_1, который лежит на перпендикуляре CB к прямой EF, и проходит через точку P. Следовательно, эта окружность (O_1, O_1P) касается и прямой EF и данной окружности (O, OP) в точке P.

Но центр O_1 окружности (O_1, O_1P) лежит на биссектрисе угла EFB, а потому эта окружность касается также данной прямой AB.

Так как окружность (O_1, O_1P) касается данной окружности (O, OP) в данной точке P и данной прямой AB, то она удовлетворяет требованию, поставленному в условии задачи, и потому является искомой.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся в том, что и вторая построенная окружность (O_2, O_2P) также является искомой.

Исследование. Различные характерные конфигурации прямой, окружности и точки на окружности представлены на рис. 9 и 10. Число решений, соответствующих каждой из этих конфигураций, можно представить в виде следующей таблички:

Конфигурации, данные на рис. 9 и 10	Число решений	Что представляет собою решение
(*а*), (*и*), (*п*)	2	Две окружности разных диаметров. Одна из них имеет внешнее касание с данной, другая — внутреннее
(*б*), (*к*)	2	Две окружности одного и того же диаметра. Одна из них имеет внешнее касание с данной, другая — внутреннее
(*в*), (*г*), (*л*), (*м*), (*с*)	1	Окружность, диаметр которой равен расстоянию от точки P до прямой AB
(*д*)	1	Окружность, которая внешне касается данной
(*е*)	1	Окружность, которая внешне касается данной и имеет одинаковый с нею диаметр
(*з*)	∞	Бесчисленное множество окружностей, каждая из которых, во-первых, проходит через точку P и, во-вторых, имеет центр на прямой, которая перпендикулярна к AB и проходит через точку P
(*ж*), (*н*), (*р*)	0	Задача не имеет ни одного решения

§ 9. КОНСТРУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ФИГУРЫ.

Две фигуры конструктивно связаны, если первая из них является такой частью второй, что, построив первую, можно построить и вторую.

Поэтому, если затруднительно построить искомую фигуру, то стараются выяснить, нет ли такой фигуры, которая конструктивно связана с данной и в то же время легко может быть построена на основании данных, приведённых в условии задачи.

Примеры.

Построить треугольник ABC (рис. 20а) *по основанию* ($AC=в$), *боковой стороне* ($BC=a$) *и медиане основания* ($BD=m$).

Фигурой, которая конструктивно связана с искомым треугольником, есть треугольник BDC, сторонами которого является боковая сторона (a), медиана (m) и половина основания $\left(\frac{в}{2}\right)$.

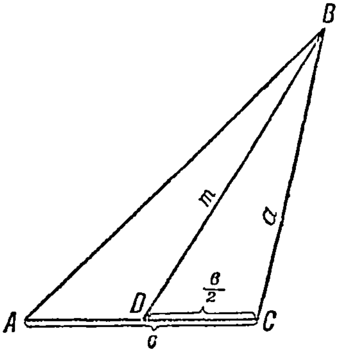


Рис. 20а.

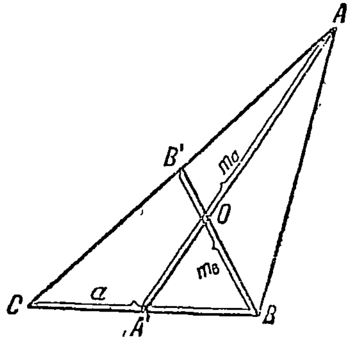


Рис. 20б.

Действительно, построив $\triangle BDC$, можем построить и $\triangle ABC$. Для этого достаточно продолжить отрезок CD за точку D, отложить от этой точки отрезок AD, равный CD, и соединить отрезком точки A и B.

Построить треугольник (ABC), *если дано основание* ($BC=a$) *и медианы основания* ($AA'=m_a$) *и боковой стороны* ($BB'=m_b$).

Анализ. Допустим, что треугольник ABC, изображённый на чертеже, — искомый (рис. 20б).

Так как все три медианы треугольника пересекаются в одной точке (O), которая делит каждую из них, считая от вершины, в отношении $2:1$, то имеем следующие равенства:

$$AO=\frac{2}{3}m_a,\quad A'O=\frac{m_a}{3},\quad BO=\frac{2}{3}m_b,\quad B'O=\frac{m_b}{3},\quad A'B=\frac{a}{2}.$$

Медианы AA' и BB' разделили треугольник ABC на четырёхугольник $CA'OB'$ и семь треугольников:

$$AA'B,\ OA'B,\ ACA',\ AOB',\ AOB,\ BB'C \text{ и } ABB'.$$

Легко убедиться в том, что каждая из этих восьми фигур конструктивно связана с искомым треугольником ABC, но не каждую из них можно построить.

Возьмём, например, четырёхугольник $CA'OB'$. В нём имеется одна из вершин (C) искомого треугольника. Продолжив отрезок $A'O$ за точку O и отложив на нём от точки O отрезок OA, равный удвоенному отрезку $A'O$, получим вторую вершину (A) искомого треугольника.

Соединив отрезками точки A, B, C, получим искомый треугольник ABC. Но, исходя из условия задачи, четырёхугольник $CA'OB'$ построить нельзя, так как знаем только три его стороны: $A'O$, $B'O$ и $A'C$.

Треугольник AOB' также конструктивно связан с искомым треугольником ABC.

Действительно, если продолжим отрезок $B'O$ за точку O, а затем отложим на нём от точки O отрезок OB, равный удвоенному отрезку $B'O$, то определим вторую вершину (B) искомого треугольника. А продолжив отрезок AO за точку O и отложив на нём от точки O отрезок OA', равный половине отрезка AO, определим точку A'.

Затем, продолжив отрезки AB' и BA' до их пересечения, получим третью вершину (C) искомого треугольника. Но так как в треугольнике AOB' нам известны только две стороны $\left(OB'=\frac{m_b}{3}\text{ и } AO=\frac{2}{3}m_a\right)$, то мы не можем построить этот треугольник, а следовательно, и не можем использовать его для построения искомого треугольника ABC.

По той же причине не могут быть использованы для построения треугольника ABC следующие, конструктивно с ним связанные, треугольники: $AA'B$, ACA', AOB, $BB'C$, ABB'.

Но треугольник $OA'B$ можем построить, так как нам известны три его стороны: $A'B=\frac{a}{2}$, $A'O=\frac{m_a}{3}$, $OB=\frac{2}{3}m_b$.

В построенном треугольнике $OA'B$ имеем одну из вершин (B) искомого треугольника (ABC). Продолжив сторону $A'O$ за точку O и отложив на этой прямой от точки O отрезок OA, равный удвоенному отрезку $A'O$, получим вторую вершину (A) искомого треугольника.

Продолжим сторону OB за точку O и на этой прямой от точки O отложим отрезок OB', равный половине отрезка OB.

Из точки A проводим отрезок, проходящий через точку B' до встречи с продолжением отрезка $A'B$ в некоторой точке C, которая является третьей вершиной искомого треугольника.

Как видим, при помощи треугольника $OA'B$ построен искомый $\triangle ABC$.

Примечание. На практике поступают так. Когда видят, что две или несколько фигур являются частями искомой фигуры, то прежде всего выясняют, какую из этих фигур можно построить, а затем уже определяют, является ли она конструктивно связанной с искомой фигурой. Например, в рассматриваемой задаче из всех фигур, на которые расчленяется искомый треугольник ABC, надо было сразу выбрать $\triangle OA'B$, так как его можно построить по трём сторонам и он конструктивно связан с искомой фигурой.

Построить параллелограм по двум диагоналям d и d_1 и стороне a.

Анализ. Допустим, что построение выполнено и $ABCD$ есть искомый параллелограм (рис. 21).

Проводя в нём диагонали AC и BD, разобьём его на четыре треугольника.

Рассматривая $\triangle AOD$, замечаем, что все его стороны нам известны: $AO=\frac{d}{2}$, $OD=\frac{d_1}{2}$ и $AD=a$.

Построив $\triangle AOD$, легко построить и искомый параллелограм.

Построение. 1) Находим отрезок AO, равный половине отрезка d. 2) Находим отрезок DO, равный половине отрезка d_1. 3) Строим треугольник по трём его сторонам: AO, DO и a. 4) На продолжении отрезка AO от точки O откладываем отрезок OC, равный AO. 5) На продолжении отрезка DO от точки O откладываем отрезок OB, равный OD. 6) Последовательно соединяем точки A, B, C и D отрезками прямой. $ABCD$—искомый параллелограм.

Исследование. Задача имеет решение во всех тех случаях, когда из отрезков a, $\frac{d}{2}$ и $\frac{d_1}{2}$ можно построить треугольник, т. е. когда сумма любых двух из этих отрезков больше третьего.

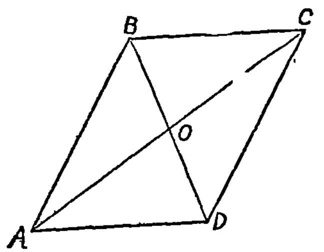


Рис. 21.

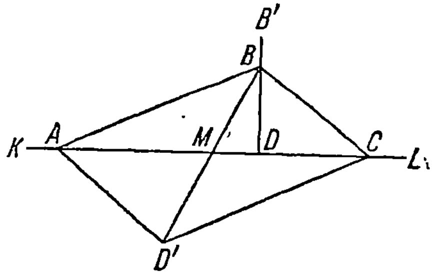


Рис. 22.

Построить треугольник по углу (α) *при вершине, высоте* (h) *и медиане* (m), *проведённой к основанию.*

Анализ. Допустим, что задача решена и $\triangle ABC$ — искомый (рис. 22). Проведя в этом треугольнике высоту BD и медиану BM, получим прямоугольный $\triangle BDM$, гипотенуза которого MB и катет BD нам известны. Этот треугольник мы можем построить.

Если на продолжении медианы BM, от точки M, отложим отрезок MD', равный BM, и соединим точку D' с концами основания AC, то получим параллелограм, внутренние углы которого известны. Действительно, $\angle ABC=\angle AD'C=\alpha$, а $\angle BCD'=\angle BAD'=180°-\alpha$.

Мы можем построить $\triangle BAD'$, так как знаем: 1) что основание $BD'=2m$, 2) что его вершина A находится где-то на прямой KL и 3) что угол при вершине равен $180°-\alpha$. Построив $\triangle BAD'$, легко построить и искомый $\triangle ABC$.

Построение. 1) На произвольной прямой KL в произвольной её точке D восставим перпендикуляр DB'. 2) На линии DB' от точки D

отложим отрезок DB, равный данной высоте h. 3) Радиусом, равным медиане (m), из точки B, как из центра, засекаем на линии KL точку M. 4) На продолжении медианы BM от точки M отложим отрезок MD', равный MB. 5) На отрезке BD' строим сегмент, вмещающий угол $180°-\alpha$. Точка A, в которой прямая KL пересечёт дугу построенного сегмента, является одним из концов основания искомого треугольника. 6) Из точки M, как из центра, радиусом, равным AM, засекаем на прямой KL точку C. $\triangle ABC$—искомый.

Исследование. Очевидно, что медиана какой-нибудь стороны треугольника не может быть меньше высоты, опущенной на ту же сторону. Следовательно, для того чтобы задача имела решение, должно удовлетворяться неравенство $h \leqslant m$ (1). Что касается угла α, то он должен быть меньше суммы двух прямых углов: $\alpha < 180°$ (2). При соблюдении условий (1) и (2) задача имеет решение.

V. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

Для решения геометрических задач на построение существуют несколько методов.

В стабильном учебнике геометрии указываются следующие пять методов решения: метод геометрических мест, метод параллельного перенесения, метод симметрии, метод подобия и алгебраический метод. Кроме того, преподаватели средней школы должны знать и некоторые другие методы, а именно: метод спрямления и метод обратности.

Все методы решения геометрических задач на построение основываются: 1) на геометрических местах точек, 2) на геометрических соответствиях и 3) на применении алгебры.

№№	Название метода	Что лежит в основе этого метода
1	Метод геометрических мест	Геометрические места точек
2	Метод параллельного перенесения	
3	Метод симметрии	
4	Метод спрямления	
5	Метод подобия	Геометрические соответствия
6	Метод обратности	
7	Алгебраический метод	Алгебраическое выражение геометрических соответствий

Прежде чем перейти к подробному изложению перечисленных методов решения геометрических задач на построение, сделаем следующие замечания:

I. Если, зная фигуру F_1, можно построить фигуру F_2, то говорят, что между фигурами F_1 и F_2 имеется геометрическое соответствие, или конструктивная связь.

В большинстве случаев применение всех перечисленных методов состоит в том, что, не имея возможности сразу приступить к построению искомой фигуры, сначала строят фигуру, конструктивно связанную с ней.

II. Знакомя учеников с тем или иным методом решения геометрических задач на построение, надо соответствующим подбором задач давать ученикам возможность приобрести навык в применении этого метода.

III. Многие геометрические задачи на построение могут быть решены не одним, а двумя и несколькими методами. Поэтому каждую из таких задач, после её решения каким-либо одним методом, полезно снова решить, когда учащиеся ознакомятся с другим применимым к ней методом решения.

Такое повторное решение геометрических задач на построение следует включать в предлагаемые ученикам домашние задания и применять при проведении обзорного повторения.

IV. Более или менее сложные геометрические задачи на построение могут быть решены только в том случае, если к ним будут в определённой последовательности применены два или несколько из перечисленных методов.

§ 10. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ.

Решение геометрических задач на построение основывается на знании свойств различных геометрических образов, среди которых особо важное значение имеют геометрические места.

Геометрическим местом точек называется такой геометрический образ, все точки которого обладают определённым свойством.

В курсе геометрии средней школы основными геометрическими местами являются следующие:

В планиметрии: 1) прямая (одна прямая, пересекающиеся или параллельные прямые, определённые отрезки прямой); 2) окружность (одна окружность, две концентрические окружности, дуга сегмента, вмещающего данный угол).

В стереометрии: 1) прямая в пространстве (параллельные прямые); 2) плоскость (параллельные плоскости); 3) боковая поверхность круглого цилиндра; 4) боковая поверхность круглого конуса; 5) шаровая поверхность.

Перечень тех геометрических мест, с которыми учителю математики средней школы приходится встречаться при изучении планиметрии, дан в приложении.

На понятии о геометрическом месте точек основан особый метод решения геометрических задач на построение, который состоит в следующем: предложенную геометрическую задачу на построение прежде всего сводят к отысканию одной или нескольких точек, каждая из которых должна удовлетворять определённым условиям.

Если требуется найти на плоскости точку, которая удовлетворяла бы двум определённым требованиям или условиям I и II, то эту задачу превращают в две вспомогательные задачи: 1) найти точку, удовлетворяющую условию I и 2) найти точку, удовлетворяющую условию II.

Бесконечное число точек, являющихся решением 1-й вспомогательной задачи, представит собою некоторое вполне определённое геометрическое место точек (т. е. прямую, или окружность, или отрезок прямой, или дугу окружности). Обозначим это геометрическое место точек буквой G_1. Равным образом, бесконечное число точек, являющихся решением 2-й вспомогательной задачи, также образует геометрическое место точек, которое обозначим буквой G_2. Затем выясняем, пересекаются ли найденные геометрические места G_1 и G_2. Если G_1 и G_2 не пересекаются и не касаются друг друга, то искомой точки не существует, и, значит, задача не имеет ни одного решения. Если геометрические места G_1 и G_2 касаются одно другого в одной или нескольких точках, то каждая из них является искомой. Равным образом, если G_1 и G_2 пересекаются в одной или в нескольких точках, то каждая из них является искомой точкой.

Знакомя учащихся с применением метода геометрических мест, надо добиваться того, чтобы они, по возможности, каждое требование, изложенное в условии геометрической задачи на построение, умели выразить указанием определённого геометрического места точек.

Примеры.

1. Если требуется, чтобы точка A отстояла от точки B на расстоянии, равном данному отрезку CD, то указанная точка A принадлежит окружности, описанной из точки B радиусом, равным отрезку CD.
2. Если надо, чтобы искомая точка M отстояла на одинаковом расстоянии от двух данных точек P и O, то эта точка M находится на перпендикуляре, проведённом к отрезку PO через его середину.
3. Если необходимо, чтобы искомая точка N отстояла на равном расстоянии от сторон данного угла, то, значит, точка N принадлежит биссектрисе данного угла.
4. Если высота треугольника равна h, то вершина треугольника находится на прямой, которая параллельна основанию и удалена от него на расстоянии h.
5. Если медиана основания треугольника равна m, то вершина, противолежащая основанию, находится на окружности, описанной из середины основания, как из центра, радиусом, равным m.

Приведём примеры, поясняющие применение метода геометрических мест.

I. **Задача.** *На периметре данного треугольника ABC найти точку, равноудалённую от данных точек M и N.*

Анализ. Допустим, что задача решена и точка D является искомой (рис. 23). Чтобы точка D была равноудалена от точек M и N, она должна находиться на перпендикуляре ST, восставленном из середины (S) отрезка MN. Те точки (D и E), в которых прямая ST пересечёт периметр $\triangle ABC$, являются искомыми.

Построение. 1) Соединим точки M и N. 2) Восставим в середине отрезка MN перпендикуляр ST к этому отрезку. 3) Точки D и E, в которых прямая ST пересечёт периметр треугольника ABC, являются искомыми.

Доказательство. Точки D и E находятся на перпендикуляре ST, восставленном из середины S отрезка MN, следовательно, они равноудалены от точек M и N. Но точки D и E лежат также на сторонах треугольника, следовательно, они являются искомыми, так как удовлетворяют всем требованиям условия задачи.

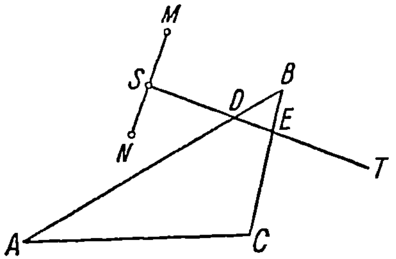


Рис. 23.

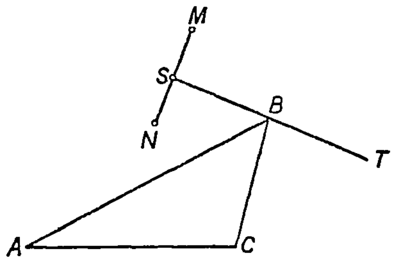


Рис. 24.

Исследование. При рассмотренном нами (рис. 23) положении точек M и N и $\triangle ABC$ прямая ST пересекла периметр $\triangle ABC$ в двух точках: D и E, и, значит, задача имеет в этом случае два решения.

Но если взять иной треугольник или изменить положение точек M и N, то может оказаться (рис. 24), что прямая ST проходит через вершину его и не пересекает его плоскости, а потому имеет с периметром данного треугольника только одну общую точку. В этом случае задача имеет одно решение (рис. 24).

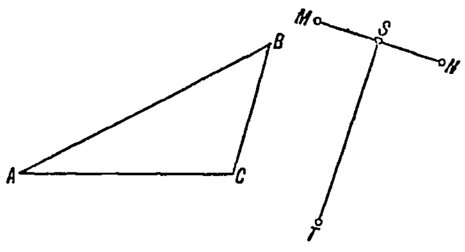


Рис. 25.

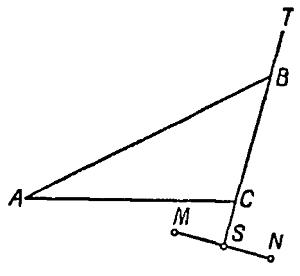


Рис. 26.

Перпендикуляр, восставленный из середины отрезка MN, может не иметь ни одной общей точки с периметром данного треугольника ABC, как это показано на рис. 25.

Если же окажется, что одна из сторон данного треугольника совпадает с прямой ST (рис. 26), то любая точка этой стороны (BC)

является искомой, и, следовательно, в этом случае задача имеет бесчисленное множество решений.

Итак, рассматриваемая задача может иметь следующее число решений:

0 (рис. 25)
1 (рис. 24)
2 (рис. 23)
∞ (рис. 26)

II. **Задача.** *Построить треугольник по основанию* (a), *высоте* (h) *и углу* (α) *при вершине.*

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 27). Искомый $\triangle ABC$ должен удовлетворять следующим трём требованиям: 1) его основание $= a$, 2) высота $= h$ и 3) угол при вершине $= \alpha$.

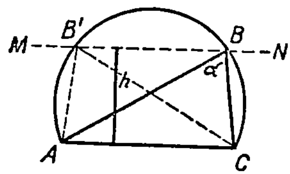


Рис. 27.

Чтобы удовлетворить первому требованию, достаточно построить отрезок AC, равный a. Если соединим любую точку плоскости, не лежащую на прямой AC, с концами отрезка AC, то получим треугольник, который удовлетворяет первому требованию условия задачи. Таких треугольников бесчисленное множество.

Построив основание (AC) искомого треугольника, постараемся определить положение его вершины B. Так как из точки B отрезок AC виден под углом α, то, значит, точка B лежит на дуге сегмента, который построен на отрезке AC, равном a, и вмещает угол α. Построение такого сегмента известно. Соединив отрезками прямой любую точку дуги этого сегмента с точками A и C, получим треугольник, который удовлетворяет первому и третьему требованиям условия задачи. Таких треугольников также бесчисленное множество.

Вершина B искомого треугольника отстоит от прямой AC на расстоянии h, а потому точка B лежит где-то на прямой MN, которая параллельна прямой AC и отстоит от неё на расстоянии h. Такую прямую MN мы можем построить. Если любую точку прямой MN соединим с концами отрезка AC, то получим треугольник, удовлетворяющий первому и второму требованиям.

Обратим внимание на точки B и B', в которых прямая MN пересекает дугу сегмента $AB'BC$. Так как точка B лежит на дуге сегмента, то $\triangle ABC$ удовлетворяет первому и третьему требованиям. Кроме того, точка B лежит на прямой MN, значит, $\triangle ABC$ удовлетворяет первому и второму требованиям. А отсюда приходим к выводу, что $\triangle ABC$ удовлетворяет всем трём требованиям, изложенным в условии задачи, т. е. является искомым.

Построение. 1) Строим отрезок AC, равный a. 2) На отрезке AC строим сегмент, вмещающий угол α. 3) Проводим прямую MN, параллельную отрезку AC и отстоящую от него на расстоянии h. 4) Точки B и B', в которых прямая MN пересекает дугу сегмента

$AB'BC$, соединяем отрезками с точками A и C. $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C$ — искомые и равные.

Доказательство. Правильность выполненного построения вытекает из самого хода построения и подтверждается тем, что найденные треугольники ABC и $AB'C$ удовлетворяют всем требованиям условия задачи.

Исследование. Всегда можно построить отрезок AC, равный a. Угол α есть внутренний угол треугольника, а потому должен удовлетворять такому условию: $0 < \alpha < 180°$. Всегда можно построить сегмент, вмещающий этот угол α. Можно также построить и прямую MN, которая параллельна отрезку AC и отстоит от него на расстоянии h. Что касается вопроса о том, сколько дуга сегмента имеет общих точек с прямой MN, то тут могут быть три случая: 1) Если прямая MN не пересекает дугу сегмента, задача не имеет ни одного решения. 2) Если прямая MN касается дуги сегмента, то задача имеет одно решение. На данном основании в этом случае можно построить два равных треугольника, лежащие по разные стороны от него. 3) Если прямая пересекает дугу сегмента, то задача имеет одно решение, хотя на данном основании можно построить четыре равных треугольника.

III. **Задача.** *Построить трапецию по основанию* (b), *высоте* (h) *и двум диагоналям* (d *и* d_1).

Анализ. Допустим, что построение выполнено (рис. 28).

Основание (AB) трапеции, равное данному отрезку (b), мы всегда можем построить. Остаётся найти две другие вершины трапеции C и P. Перпендикуляры, опущенные из вершин C и P трапеции на AB, равны h; значит, точки C и P находятся где-то на прямой KL, которая параллельна отрезку AB и отстоит от него на расстоянии h. Точка C находится от точки A на расстоянии, равном диагонали, проведённой из точки A; значит, вершина C лежит на окружности, центр которой в точке A, а радиус равен d.

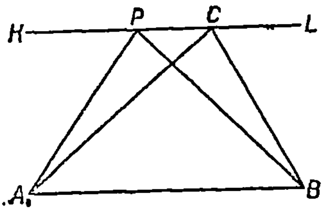


Рис. 28.

В силу аналогичных соображений приходим к выводу, что вершина P лежит на окружности, центр которой в точке B, а радиус равен d_1.

Построение. 1) Строим отрезок AB, равный данному основанию b. 2) Проводим прямую KL, которая параллельна отрезку AB и отстоит от него на расстоянии, равном h. 3) Из точки A, как из центра, радиусом, равным d, проводим дугу, пересекающую прямую KL в точке C. 4) Из точки B, как из центра, радиусом, равным d_1, проводим дугу, пересекающую прямую KL в точке P. 5) Соединяем отрезками точку A с P и B с C.

$ABCP$ — искомая трапеция.

Доказательство. Отрезок CP лежит на линии, параллельной отрезку AB, а потому четырёхугольник $ABCP$ — трапеция. Так как, по построению, расстояние между CP и AB равно h, то трапеция $ABCP$ имеет высоту h. Точка C, лежащая на прямой KL, является точкой дуги, которая описана из центра A радиусом, равным d. Поэтому точка C отстоит от точки A на расстоянии d, т. е. диагональ AC трапеции $ABCP$ равна d.

Подобными же рассуждениями убеждаемся, что другая диагональ (BP) трапеции равна d_1.

Как видим, построенная трапеция $ABCP$ удовлетворяет всем требованиям условия задачи и потому является искомой.

Исследование. Всегда можно построить отрезок AB, равный b, и прямую KL, отстоящую от отрезка AB на расстоянии h. Что касается пересечения прямой KL с дугой, которую станем описывать из точки A, как из центра, радиусом, равным d, то тут могут быть три случая: 1) Если $d>h$, то на прямой KL получим две точки пересечения. 2) Если $d=h$, то получим одну точку. 3) Если $d<h$, то не получим ни одной точки пересечения.

Аналогичные выводы получим, определяя пересечение прямой KL с дугой, которую станем описывать из точки B, как из центра, радиусом, равным d_1: 1) Если $d_1>h$, то на прямой KL получим две точки пересечения. 2) Если $d_1=h$, то получим одну точку. 3) Если $d_1<h$, то не получим ни одной точки пересечения на прямой KL.

Так как искомые точки P и C должны оказаться концами другого (неизвестного нам) основания искомой трапеции, то приходим к выводу, что для возможности решения задачи необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$d \geqslant h \text{ и } d_1 > h$$

или

$$d_1 \geqslant h \text{ и } d > h.$$

Кроме того, надо, чтобы отрезки AC и BP пересекались, ибо только в этом случае они будут диагоналями искомой трапеции. Если точки пересечения (P и C) совпадают, то задача не имеет решения, так как вместо трапеции получаем треугольник, сторонами которого являются отрезки b, d и d_1, а высотою—отрезок h.

Итак, задача не имеет решения в следующих случаях:

1) когда $d<h$ или $d_1<h$,
2) когда точки пересечения C и P сливаются в одну точку,
3) когда диагонали AC и BP не пересекаются.

§ 11. МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНЕСЕНИЯ.

Метод параллельного перенесения состоит в том, что в наброске предполагаемого решения геометрической задачи на построение производят параллельное перенесение фигуры или отрезков, входящих в искомую фигуру, чтобы обнаружить зависимости, позволяющие выполнить требуемое построение. Этим самым значительно упрощается решение тех геометрических задач на построение, к которым можно применить названный метод.

Желая узнать, нельзя ли использовать этот метод при решении рассматриваемой задачи, надо, прежде всего, сделать набросок решения задачи. Затем, внимательно рассматривая этот набросок, необходимо выяснить, не упростится ли решение задачи, если перенесём параллельно самой себе какую-нибудь фигуру или часть её.

В результате параллельного перенесения отрезков или фигур можем получить либо такое новое расположение линий, которое делает очевидным, как надо выполнить требуемое построение, либо новое расположение фигур, позволяющее установить путь к решению, либо новую фигуру, которая является частью искомой фигуры, конструктивно с нею связана и легко может быть построена.

Приведём примеры, поясняющие практическое применение этого метода.

I. **Задача.** *Две параллельные прямые DD' и EE' пересечены третьей HH'. Построить равносторонний треугольник с данной стороной a так, чтобы его вершины находились на прямых DD', EE' и HH'.*

Анализ (рис. 29). Если временно отбросим требование, состоящее в том, чтобы одна из вершин искомого треугольника находилась на прямой HH', то задача сведётся к построению равностороннего треугольника со стороною a так, чтобы его две вершины лежали на прямых DD' и EE'.

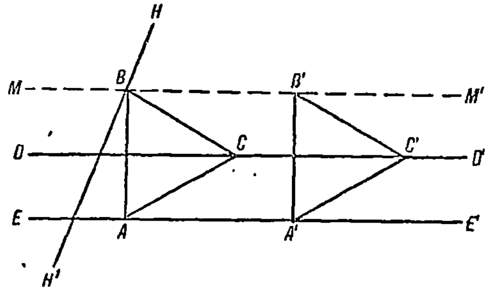


Рис. 29.

Таких треугольников можно построить бесчисленное множество. Допустим, что $\triangle A'B'C'$ является одним из них. Если этот треугольник переместим параллельно прямой DD' так, чтобы его вершина B' оказалась на прямой HH', то он и будет искомым.

Построение. 1) Из произвольной точки A' прямой EE' радиусом, равным a, проводим дугу, пересекающую прямую DD' в точке C'. 2) На отрезке $A'C'$ строим равносторонний $\triangle A'B'C'$. 3) Через B' проводим прямую MM', параллельную прямой DD'. Допустим, что линия MM' пересечёт прямую HH' в некоторой точке B.

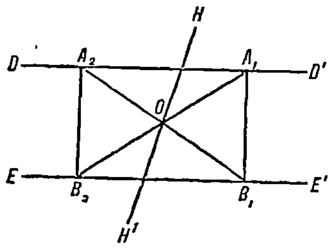


Рис. 29а.

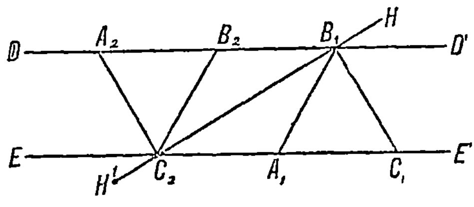


Рис. 29б.

4) На прямой DD' от точки C' в сторону прямой HH' отложим отрезок $C'C$, равный $B'B$. 5) На прямой EE' от точки A' в сторону

прямой HH' отложим отрезок $A'A$, равный отрезку $B'B$. Соединив последовательно точки A, B, C, получим искомый $\triangle ABC$.

Исследование. Обозначая буквою a длину стороны данного треугольника, а буквою d—расстояние между двумя данными параллельными прямыми, получим:

Если $d > a$, задача не имеет решения.

Если $d = a$, задача имеет два решения: $\triangle OA_1B_1$ и $\triangle OA_2B_2$ (рис. 29а).

Если $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, задача имеет два решения: $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ (рис. 29б).

Если $d < a$, задача имеет четыре решения: $\triangle OA_1B_1$, $\triangle OA_2B_2$, $\triangle QA_3B_3$, $\triangle QA_4B_4$ (рис. 29в).

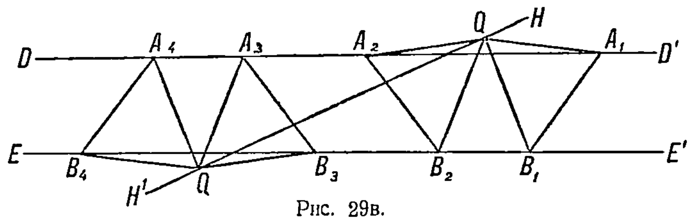


Рис. 29в.

II. Задача. *Между двумя данными окружностями* (O, R) *и* (Q, r) *провести отрезок данной длины* (a) *параллельно данной прямой* (AB).

Анализ. Допустим, что задача решена и отрезок CD является искомым (рис. 30). Если мысленно будем перемещать отрезок CD параллельно самому себе, оставляя один из его концов D скользить по данной окружности (Q, r), то ясно, что другой конец (C) отрезка CD опишет в это время окружность того же радиуса (r), имеющую центр в некоторой точке P, отстоящей от точки Q на расстоянии, равном отрезку a. Отсюда следует, что, построив окружность (P, r), мы сможем построить и искомые отрезки.

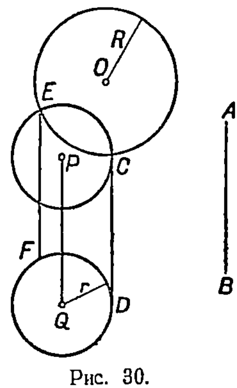


Рис. 30.

Построение. 1) Проведём из точки Q отрезок QP, который параллелен прямой AB и равен отрезку a. 2) Около точки P радиусом, равным r, опишем вспомогательную окружность (P, r). 3) Обозначим буквами C и E те точки, в которых вспомогательная окружность (P, r) пересечёт окружность (O, R). 4) Если из точек C и E проведём прямые, параллельные прямой AB, то они пересекут окружность (Q, r) в некоторых точках D и F.

Отрезки CD и EF—искомые.

Исследование. Если вспомогательная окружность (P, r) пересекает данную окружность (O, R), то задача имеет два решения. Если окружность (P, r) будет лишь касаться окружности (O, R), то задача имеет одно решение. Наконец, если окружность (P, r) не будет ни касаться окружности (O, R), ни пересекать её, то задача не имеет решений.

III. **Задача.** *Построить трапецию по четырём данным её сторонам* a, b, c, d.

Анализ. Допустим, что $ABCD$ есть искомая трапеция, причём $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $AD=d$ (рис. 31).

Переместив боковую сторону AB параллельно самой себе в положение CE, мы получим параллелограм $ABCE$ и $\triangle CDE$, так как $AE=BC=b$ и $AB=CE=a$. Поскольку $ED=AD-AE=d-b$, то, значит, стороны треугольника CDE нам известны:

$$CE=a,\ CD=c \text{ и } ED=d-b.$$

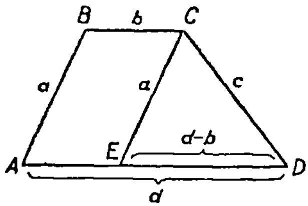


Рис. 31.

Построив $\triangle CDE$, можно построить и остальную часть искомой фигуры. Действительно, продолжив сторону ED и отложив на ней влево от точки E отрезок EA, равный b, мы получим две стороны AE и CE параллелограма и угол AEC между этими сторонами. Легко построить остальные две стороны параллелограма: с этой целью надо из точки A, как из центра, описать дугу радиусом, равным a, а из точки C, как из центра, описать дугу радиусом, равным b, и затем точку B пересечения этих дуг соединить отрезками с точками A и C. Полученная трапеция $ABCD$ является искомой.

Построение. 1) Определяем отрезок, равный $d-b$. 2) Строим треугольник, сторонами которого являются отрезки, равные a, c и $d-b$. 3) На стороне этого треугольника, равной a, строим параллелограм, другая сторона которого равна b и лежит на продолжении стороны, равной $d-b$.

Полученная трапеция является искомой.

Доказательство. Если отрезки a, c и $d-b$ (1) таковы, что могут быть сторонами треугольника, то не встретим затруднений в построении такого $\triangle CDE$, стороны которого порознь равны этим отрезкам, а именно: $CD=c$, $ED=d-b$ и $CE=a$ (2). Затем, продолжив влево сторону ED, равную $d-b$, и отложив на ней от точки E отрезок EA, равный b, получим:

$$AD=AE+ED=b+(d-b)=d. \tag{3}$$

Далее, описывая около точки C дугу радиусом, равным b, а около точки A дугу радиусом, равным a, мы получим точку пересечения B, причём

$$AB=a \text{ и } BC=b \tag{4}$$

и, по построению,

$$CE=a \text{ и } AE=b. \tag{5}$$

Из (4) и (5) заключаем, что в четырёхугольнике $ABCE$ противоположные стороны равны, а значит, они и параллельны, т. е.

$$BC \parallel AE. \tag{6}$$

Из (6) вытекает, что $ABCD$ представляет собой трапецию. Что касается сторон этой фигуры, то из равенств (2), (3) и (4) видно, что стороны этой фигуры равны следующим отрезкам a, b, c и d:

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c \text{ и } AD = d.$$

Построенная нами трапеция является искомой, потому что удовлетворяет всем требованиям условия рассматриваемой задачи.

Исследование. Вспомогательный $\triangle CDE$ можно построить только в том случае, если a, c и $d-b$ представляют собой такие отрезки, которые могут быть сторонами одного и того же треугольника, а именно, каждый из этих отрезков больше разности двух других отрезков:

$$a > |(d-b)-c|,\ c > |(d-b)-a| \text{ и } d-b > |a-c|. \tag{7}$$

Если эти требования (7) выполняются, то задачу можно решить. В условии задачи не указывается, какие из данных отрезков являются основанием и какие—боковыми сторонами, а потому приходится рассмотреть следующие шесть совокупностей по три отрезка:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ a,\ c,\ |d-b| & 4)\ b,\ c,\ |d-a| \\ 2)\ a,\ b,\ |d-c| & 5)\ d,\ b,\ |c-a| \\ 3)\ d,\ a,\ |c-b| & 6)\ c,\ d,\ |b-a| \end{array}\right\} \tag{8}$$

Если три отрезка какой-либо из этих совокупностей (8) могут быть сторонами треугольника (т. е. любой из них больше разности двух других), то легко построить вспомогательный $\triangle CDE$, а затем и всю трапецию $ABCD$.

Покажем на примере, как на практике проводится исследование задач такого типа.

IV. **Задача.** *Построить трапецию, сторонами которой являются отрезки:* 5 *см*, 6 *см*, 8 *см и* 12 *см*.

Мы видели, что построение искомой трапеции начинается построением вспомогательного $\triangle CDE$. Поэтому, делая то или иное предположение, надо определять, какой величины отрезки получаются для сторон вспомогательного $\triangle CDE$.

Для рассматриваемой задачи предположения и выводы, относящиеся к вспомогательному треугольнику CDE, можно представить в виде следующей таблицы:

Предположения	Нижнее основание трапеции d	Верхнее основание трапеции b	Стороны вспомогательного $\triangle CDE$		
			Боковые стороны трапеции		Разность оснований трапеции
			$a\,(CE)$	$c\,(CD)$	$(d-b)\,(ED)$
I	12	6	8	5	6
II	12	5	8	6	7
III	12	8	6	5	4
IV	8	6	12	5	2
V	8	5	12	6	3
VI	6	5	12	8	1

Рассматривая эту таблицу, видим, что при I-м, II-м и III-м предположениях возможно построить вспомогательный $\triangle CDE$, так как каждая из его сторон больше разности двух других:

$$\text{I. } 8>6-5, \quad 5>8-6, \quad 6>8-5,$$
$$\text{II. } 8>7-6, \quad 6>8-7, \quad 7>8-6,$$
$$\text{III. } 6>5-4, \quad 5>6-4, \quad 4>6-5.$$

Что касается IV-го, V-го и VI-го предположений, то их приходится отвергнуть, так как для сторон треугольника CDE получаются такие отрезки, которые не могут быть сторонами треугольника. Действительно,

$$\text{IV. } 12>5-2, \quad 5<12-2, \quad 2<12-5,$$
$$\text{V. } 12>6-3, \quad 6<12-3, \quad 3<12-6,$$
$$\text{VI. } 12>8-1, \quad 8<12-1, \quad 1<18-12.$$

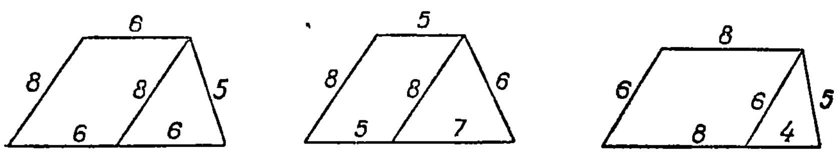


Рис. 32.

Из сказанного вытекает, что для рассматриваемой задачи можно построить только те три трапеции, которые соответствуют I-му, II-му и III-му предположениям.

Какой вид имеют эти трапеции, легко усмотреть из пояснительного рисунка 32.

§ 12. МЕТОД СИММЕТРИИ.

Иногда для получения фигуры, находящейся в конструктивной связи с данной, приходится строить симметричные точки, отрезки, углы, фигуры.

Построение симметричных геометрических образов осуществляется следующими приёмами.

Допустим, в плоскости S лежит фигура F, точка P и прямая KL. Если рассматриваемую фигуру мы повернём на угол в 180° около точки P (т. е. около прямой, которая проходит через точку P и перпендикулярна плоскости S), то получим фигуру F_1, симметричную фигуре F, причём центром симметрии является точка P.

Если же фигуру F повернём на угол в 180° около прямой KL, то получим фигуру F_2, симметричную фигуре F относительно прямой KL. В этом случае линия KL является осью симметрии.

При решении геометрических задач на построение, определяемых программой средней школы, большей частью приходится иметь дело с симметрией относительно оси.

Метод симметрии состоит в том, что для точек, линий и фигур, имеющихся в чертеже предполагаемого решения геометрической задачи на построение, вводят их симметричные геометрические образы и, рассматривая их в связи с начальным чертежом, определяют зависимости, позволяющие выполнить требуемое построение.

Применяя метод симметрии, следует за ось симметрии принимать такую прямую, которая либо дана, либо легко может быть построена. В несложных задачах, решаемых методом симметрии, лишь только перегнём чертёж по целесообразно выбранной оси симметрии, как становится очевидным тот приём, каким может быть получено требуемое построение. В более сложных задачах, решаемых методом симметрии, требуемое построение находится следующим образом.

1) Во вспомогательном схематическом чертеже, сделанном в предположении, что задача решена, строят симметричную фигуру (линию, точку).

2) Временно изменяют условие предложенной задачи, а именно: тем требованиям, какие относятся к данной фигуре (линии, точке), подчиняют симметричную ей фигуру (линию, точку) и решают эту вспомогательную задачу.

3) Когда выполнено построение, представляющее собой решение вспомогательной задачи, то выясняют, посредством каких операций можно получить решение предложенной задачи.

Приведём примеры, поясняющие, как на практике применяется метод симметрии.

I. **Задача.** *На бесконечной прямой AB найти такую точку C, чтобы полупрямые CM, CN, проведённые из C через данные точки M и N, расположенные по одну сторону AB, составляли с полупрямыми CA и CB равные углы.*

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 33) и

$$\angle ACM = \angle BCN. \tag{1}$$

Если повернём этот чертёж на 180° около оси AB, то отрезок CM примет положение CM_2, причём окажется, что

$$\angle ACM_2 = \angle ACM. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что $\angle ACM_2 = \angle BCN$, т. е. M_2CN — прямая линия. Если удастся построить эту прямую, то тем самым определим положение искомой точки C, потому что прямая M_2N пересекает прямую AB именно в этой точке.

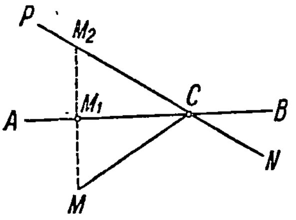


Рис. 33.

Стремясь построить прямую M_2N, нужно принять во внимание, что одна из её точек (N) нам дана, а другая (M_2) симметрична точке M относительно оси AB.

Построение. 1) Из точки M опустим перпендикуляр MM_1 на прямую AB. 2) На продолжении отрезка MM_1 от точки M_1 отложим отрезок M_1M_2, равный MM_1, и получим точку M_2, симметричную точке M относительно оси AB. 3) Соединим точки M_2 и N.

Отрезок M_2N пересечёт прямую AB в искомой точке C.

Исследование. Задача всегда имеет решение. Отметим следующих два частных случая. Если точки M и N не совпадают и находятся на одинаковом расстоянии от прямой AB, то искомую точку C можно найти иным путём: из середины отрезка MN опустить перпендикуляр на прямую AB. Основание этого перпендикуляра будет искомой точкой.

Если точки M и N лежат на некоторой прямой DE, перпендикулярной к AB, то точка C есть пересечение линий DE и AB.

II. **Задача.** *Построить по четырём сторонам (a, b, c, d) четырёхугольник $ABCD$, зная, что его диагональ AC делит угол A пополам.*

Анализ. Допустим, что $ABCD$ есть искомый четырёхугольник (рис. 34).

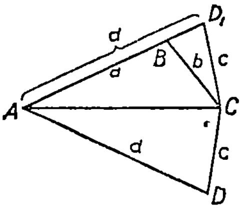


Рис. 34.

Так как диагональ AC делит угол A пополам, то, отложив на прямой AB от точки A отрезок AD_1, равный AD, мы получим точку D_1, симметричную точке D.

Соединив точки C и D_1, получим отрезок CD_1, равный CD, и $\triangle BCD_1$.

В $\triangle BCD_1$ нам известны все три стороны:
1) $BC = b$, 2) $CD_1 = CD = c$, 3) $BD_1 = AD_1 - AB = AD - AB = d - a$.

Построив $\triangle BCD_1$ по трём сторонам (b, c и $d - a$), можно найти положение точки A: для этого надо на отрезке D_1B от точки D_1 отложить отрезок D_1A, равный d. Соединив точки A и C, получим $\triangle ABC$. Если на стороне AC построить, как показано на рис. 34, $\triangle ACD$, равный треугольнику ACD_1, то и получим искомый четырёхугольник $ABCD$.

Построение. 1) Строим $\triangle BCD_1$ по трём сторонам: b, c и $d - a$. 2) На отрезке BD_1, равном $d - a$, откладываем от точки D_1 отрезок

D_1A, равный d. 3) Из точки A описываем дугу радиусом, равным d, а из точки C описываем дугу радиусом, равным c, и точку (D) пересечения этих дуг соединяем с точками A и C. $ABCD$—искомый четырёхугольник.

Исследование. Как видим, для получения искомого четырёхугольника надо сначала построить вспомогательный $\triangle BCD_1$, стороны которого равны отрезкам b, c и $d—a$ (1).

Если сумма любых двух из этих отрезков (1) больше третьего, то искомый четырёхугольник можно построить.

От нашего усмотрения зависит, какой из четырёх отрезков, данных в условии задачи, принимать за отрезок d, какой—за отрезок a и т. д. Поэтому для выяснения вопроса о числе решений всегда надо рассмотреть все возможные случаи распределения четырёх данных отрезков. Сказанное поясним примером.

Допустим, нам даны четыре отрезка: 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, 5 *см* (1) и из них требуется построить тот четырёхугольник, о котором говорится в условии предыдущей задачи.

Мы должны рассмотреть следующие случаи распределения отрезков (1) в искомом четырёхугольнике:

№ случая	a	d	Стороны вспомогательного треугольника			Возможно ли построить вспомогательный треугольник
			b	c	$d-a$	
I	1	5	2	3	4	Да, рис. 35*а*
II	1	5	3	2	4	Да, рис. 35*б*
III	2	5	1	3	3	Да, рис. 35*в*
IV	2	5	3	1	3	Да, рис. 35*г*
V	3	5	1	2	2	Да, рис. 35*д*
VI	3	5	2	1	2	Да, рис. 35*е*
VII	1	3	5	2	2	Нет
XII	1	2	3	5	1	Нет

Из этой таблички видно, что, приняв (I)

$$a=1,\ b=2,\ c=3 \text{ и } d=5,$$

мы можем построить вспомогательный треугольник BCD_1. Точно так же можно построить вспомогательный $\triangle BCD_1$ и в случаях II—VI. Следовательно, задача при рассматриваемых значениях данных (1) имеет шесть различных решений. Эти решения даны на рисунке 35.

В остальных же случаях (VII—XII) построение вспомогательного треугольника BCD_1 невозможно осуществить, а потому из этих случаев приведены только два.

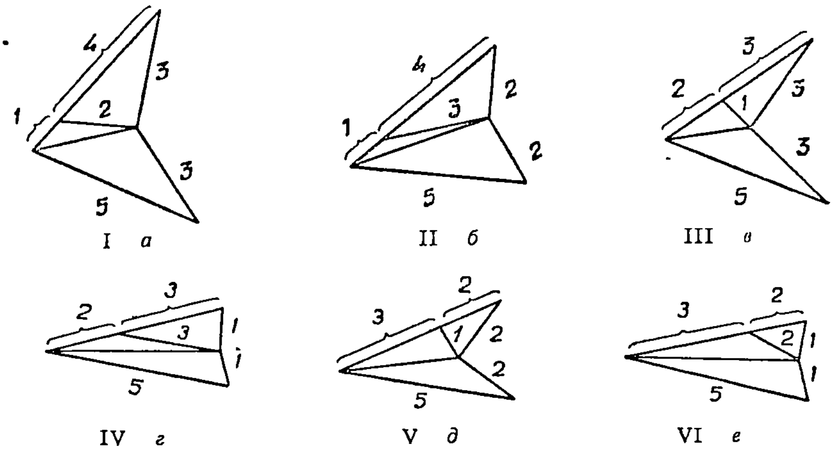


Рис. 35.

§ 13. МЕТОД СПРЯМЛЕНИЯ.

Метод спрямления состоит в том, что с целью открыть зависимости для решения данной геометрической задачи на построение в чертеже предполагаемого решения некоторые отрезки перекладывают так, чтобы вместо ломаной линии получился отрезок, равный сумме или разности её звеньев, и вместе с тем образовалась фигура, которая конструктивно связана с данной и легко может быть построена. Метод спрямления применяется, главным образом, при решении таких задач на построение, в которых даны сумма или разность определённых отрезков, являющихся сторонами искомой фигуры или тесно связанных с ней (диагональ, высота, радиус вписанного круга и т. п.).

Применение этого метода состоит из следующих операций.

1) Если в условии задачи дана сумма (s) определённых отрезков, то на схематическом чертеже, представляющем собою предполагаемое решение, продолжают определённый отрезок, на полученной прямой откладывают примыкающие к этому отрезку другие отрезки и получают отрезок, равный s. Если же в условии задачи дана разность (d) двух определённых отрезков, то на схематическом чертеже, на большем из этих отрезков, откладывают меньший так, чтобы получить отрезок, равный разности d.

2) Найденный таким образом отрезок, равный сумме или разности определённых отрезков, приводят посредством вспомогательных линий в связь со схематическим чертежом и получают новый, несколько более сложный, схематический чертёж.

3) Выясняют, посредством каких операций можно построить этот новый схематический чертёж, но строят его так, чтобы входящие в него линии имели длину, указанную в условии задачи.

4) Когда этот новый вспомогательный чертёж построен, то остаётся выяснить, что надо сделать, чтобы получить требуемое в задаче построение.

Применение метода спрямления поясним следующими примерами.

I. Задача. *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе* (a) *и сумме* (s) *катетов.*

Анализ. Допустим, что ABC есть искомый треугольник (рис. 36).

Чтобы ввести в чертёж сумму катетов, продолжим сторону AC и отложим на ней от точки C отрезок CD, равный BC.

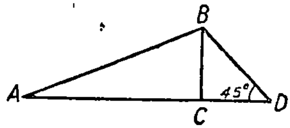


Рис. 36.

Отрезок AD равен s. Соединив точку B с D, получим равнобедренный $\triangle CBD$, и так как $\angle BCD$ — прямой, то $\angle BDC = 45°$.

В треугольнике ABD нам известны две стороны: AB, равная a, AD, равная s, и угол (45°) против меньшей из них.

Построив треугольник ABD, опустим из точки B перпендикуляр BC на сторону AD и получим искомый $\triangle ABC$.

Построение. 1) Строим угол KOL, равный 45° (рис. 37). 2) На стороне OK от точки O отложим отрезок OA, равный сумме двух катетов. 3) Из точки A радиусом, равным данной гипотенузе (a), проводим дугу, пересекающую сторону OL в точках B и B_1. 4) Из точек B и B_1 опускаем перпендикуляры BC и B_1C_1 на прямую OK. $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$ — искомые, причём они равны.

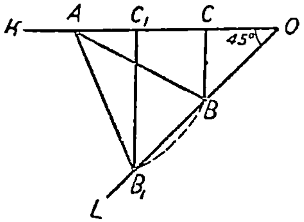


Рис. 37.

Исследование. Построить угол KOL, равный 45°, всегда возможно. Затем всегда можно отложить на прямой OK от точки O отрезок OA, равный s (сумме катетов). Далее можем из точки A радиусом, равным гипотенузе (a), начертить дугу окружности. Что касается точки её пересечения с прямой OL, то тут возможен один из следующих трёх случаев:

1) если дуга не пересекает прямую OL, то задача не имеет ни одного решения; 2) если дуга имеет с прямой OL точку касания, то задача имеет одно решение; 3) если дуга пересекает прямую OL, то искомых треугольников два, причём они равны.

II. Задача. *Построить треугольник по данному периметру* (s) *и двум данным углам* (α *и* β).

Анализ. Допустим, что задача решена и $\triangle ABC$ является искомым (рис. 38). Чтобы ввести в этот чертёж данный периметр, продолжим отрезок AB в одну и другую сторону и отложим на нём влево от точки A отрезок AD, равный AC, а вправо от точки B отрезок

BE, равный отрезку BC. Соединив точку C с D и E, получим два равнобедренных треугольника ACD и BCE.

Из чертежа усматриваем, что $\angle CDA = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle BEC = \frac{\beta}{2}$.

Можем построить $\triangle CDE$, так как знаем длину одной из его сторон (DE) и два прилегающих к ней угла. А после этого легко построить и искомый $\triangle ABC$.

Построение. 1) Строим отрезок DE, равный отрезку s. 2) На отрезке DE при точках D и E строим углы, равные α и β. 3) Проводим биссектрису угла α и биссектрису угла β. Точку пересечения биссектрис обозначим буквой C. 4) Из середины отрезка CD восставим перпендикуляр к нему. Этот перпендикуляр пересечёт отрезок DE в некоторой точке A. 5) Из середины отрезка CE восставим перпендикуляр к нему. Этот перпендикуляр пересечёт отрезок DE в некоторой точке B. 6) Соединив точку C с точками A и B, получим искомый $\triangle ABC$.

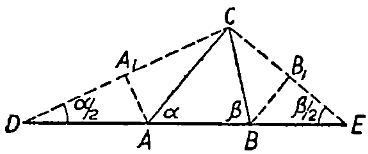


Рис. 38.

Исследование. Данные углы α и β должны быть внутренними углами искомого треугольника, а потому сумма их должна быть меньше двух прямых:

$$\angle \alpha + \angle \beta < 180^\circ. \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется, то задача имеет решение.

§ 14. МЕТОД ПОДОБИЯ.

Иногда конструктивная связь двух фигур состоит в том, что искомая фигура подобна вспомогательной, причём известны величины двух *сходственных* отрезков этих фигур. Такой вид конструктивной связи между искомой фигурой и той, которая дана или которую легко построить, является основой метода подобия.

Метод подобия состоит в следующем: если данные геометрической задачи на построение таковы, что, отбросив одно из них, можно построить бесчисленное множество фигур, подобных искомой, то сначала строят какую-нибудь из этих фигур, а затем, принимая во внимание отброшенное данное, строят искомую фигуру.

Этот метод является одним из мощных способов для решения весьма многих геометрических задач на построение. Поэтому необходимо добиваться того, чтобы учащиеся хорошо поняли его сущность и приобрели навык в практическом применении этого метода.

Для достижения этой цели учащиеся должны: во-первых, хорошо знать свойства подобных фигур; во-вторых, разбираться в той роли, которую играют данные геометрической задачи на построение, решаемой методом подобия; в-третьих, уметь без малейшего затруднения решать ту основную задачу, к которой сводится применение метода подобия; в-четвёртых, ясно представлять, какую роль играет центр подобия и в какой точке целесообразно его помещать при решении конструктивной задачи; в-пятых, решать методом подобия достаточное число задач, начиная с самых лёгких и постепенно переходя к более трудным.

I. Чтобы облегчить учащимся усвоение свойств подобных фигур, необходимо им предварительно дать ряд подготовительных упражнений. Так, после проработки теоремы о сходственных сторонах и высотах в подобных треугольниках, учащимся будет полезно одновременно доказать, что в подобных треугольниках сходственным сторонам пропорциональны: сходственные медианы, сходственные биссектрисы, радиусы вписанных окружностей, радиусы описанных окружностей.

Далее, необходимо добиться того, чтобы учащиеся твёрдо знали, что отношение любых сходственных отрезков или дуг двух каких-нибудь подобных фигур равно отношению двух других произвольно взятых сходственных отрезков или дуг тех же подобных фигур.

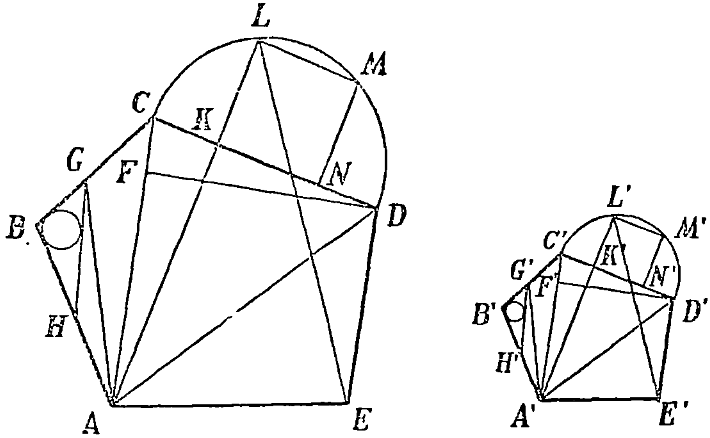


Рис. 38а.

Например, если пятиугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (рис. 38а) подобны и в них проведены сходственные диагонали AC и $A'C'$, а также AD и $A'D'$; из сходственных точек D и D' опущены перпендикуляры DF и $D'F'$ на сходственные диагонали AC и $A'C'$; проведены биссектрисы AG и $A'G'$ сходственных равных углов BAC и $B'A'C'$; из сходственных вершин G и G' сходственных треугольников проведены медианы GH и $G'H'$ к сходственным сторонам AB и $A'B'$; на сходственных сторонах CD и $C'D'$, как на диаметрах, построены полуокружности; вписаны квадраты $KLMN$ и $K'L'M'N'$ в сходственные полукруги; вписаны круги в сходственные треугольники BGH и $B'G'H'$ и вообще одинаковым образом построены в этих подобных фигурах какие угодно сходственные отрезки LE и $L'E'$.—то получим ряд равных отношений:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AG}{A'G'}=\frac{GH}{G'H'}=\frac{\smile CLD}{\smile C'L'D'}=$$
$$=\frac{KL}{K'L'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AL}{A'L'}=\frac{BK}{B'K'}=\frac{r}{r'}.$$

Наконец, основываясь на известных свойствах производных пропорций, можно составить ещё ряд новых отношений:

$$\frac{AB+BC}{A'B'+B'C'}=\frac{DF-AF}{D'F'-A'F'}=\ldots \text{ и т. д.,}$$

каждое из которых можно приравнять к любому отношению первого ряда.

II. Одно из данных в условии геометрической задачи на построение, решаемой методом подобия, представляет собой отрезок, определяющий размеры искомой фигуры, а остальные данные определяют её форму.

Следует обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что часто уже само название фигуры (иногда сопровождаемое одним или двумя прилагательными) вполне точно определяет её форму.

Примеры. 1) Равносторонний треугольник, 2) равнобедренный прямоугольный треугольник, 3) квадрат, 4) правильный n-угольник, 5) окружность, 6) дуга окружности в $n°$, 7) сектор в $m°$, 8) сегмент, дуга которого $t°$. Действительно, все равносторонние треугольники подобны один другому, все квадраты также подобны и т. д.

В тех же случаях, когда название искомой фигуры не определяет точно её форму, необходимо название фигуры сопровождать указанием угла (углов) или отношения отрезков этой фигуры и т. п.

Ниже приводим табличку, из которой можно видеть, какими данными должно сопровождаться название фигуры, чтобы её форма была точно определена.

Название фигуры	Какие данные определяют форму этой фигуры
1. Треугольник.	Два угла; отношение двух сторон и угол между ними; отношение трёх сторон; отношение трёх высот; отношение трёх медиан; отношение трёх биссектрис треугольника и т. п.
2. Равнобедренный треугольник.	Угол при основании; угол при вершине; отношение основания к боковой стороне; отношение высоты к боковой стороне; отношение высоты к основанию; отношение высоты к радиусу вписанного круга; отношение высоты к радиусу описанного круга и т. п.
3. Прямоугольный треугольник.	Отношение катетов; отношение катета к гипотенузе; отношение катета к радиусу вписанного круга; отношение катета к его медиане; отношение катета к биссектрисе прилежащего угла и т. п.
4. Параллелограм.	Угол и отношение сторон, образующих этот угол; отношение диагоналей и угол, образуемый ими.
5. Прямоугольник.	Отношение двух сторон, выходящих из одной вершины; угол, образуемый диагоналями; угол, образуемый стороною и диагональю.
6. Ромб.	Угол; отношение диагоналей.

Как уже было сказано, размер искомой фигуры определяется одним данным, которое обычно представляет собою прямолинейный отрезок, тесно связанный с этой фигурой.

Если искомой фигурой является треугольник, то данным, определяющим его размеры, может быть какая-нибудь из следующих величин: сторона, высота, медиана, биссектриса, радиус вписанной окружности, радиус описанной окружности и, кроме того, алгебраическая сумма любого числа этих отрезков (сумма высот, периметр, разность медианы и высоты и т. п.). Если искомой фигурой является четырёхугольник или n-угольник, то его размеры определяет какая-нибудь из следующих величин: сторона, диагональ, периметр, сумма диагоналей и т. п.

Благодаря данным, определяющим форму искомой фигуры, мы имеем возможность построить бесчисленное множество фигур, подобных искомой, а затем при помощи отрезка, определяющего размер искомой фигуры, выделить её из этого множества. На практике, применяя метод подобия к решению геометрических задач на построение, обычно строят только одну какую-нибудь из фигур, подобных искомой, а затем, приняв во внимание данные, определяющие размер одной из линий искомой фигуры, строят и саму эту фигуру.

Целесообразно решение геометрической задачи методом подобия расчленять на следующие две операции:

1) построение вспомогательной фигуры, которая может иметь произвольные размеры, но должна быть подобна искомой;

2) построение искомой фигуры, которая подобна вспомогательной, но имеет размеры, удовлетворяющие условию задачи.

III. Процесс решения любой конструктивной задачи состоит из последовательного выполнения ряда несложных построений, в результате чего данная задача постепенно сводится к более простой. Когда решение конструктивной задачи осуществляется методом подобия, то для получения искомой фигуры всегда приходится решать следующую простую задачу на применение этого метода: дана (или может быть построена) фигура Φ' и требуется построить подобную ей фигуру Φ, в которой определённый отрезок имеет данную длину l.

Приведём пример основной задачи на применение метода подобия.

Дан пятиугольник $A'B'C'D'E'$ и требуется построить подобный ему пятиугольник $ABCDE$, сторона которого AB, сходственная стороне $A'B'$, равна отрезку m.

Построение. 1) Точку A', являющуюся концом отрезка $A'B'$, сходственного с отрезком AB искомой фигуры, принимаем за центр подобия и проводим из него лучи через все вершины данного пятиугольника. 2) От точки A' на отрезке $A'B'$ (или на его продолжении) откладываем отрезок $A'B$, равный данному отрезку m. 3) Из точки B параллельно стороне $B'C'$ проводим прямую, которая пересечёт диагональ $A'C'$ (или её продолжение) в некоторой точке C. 4) Из точки C параллельно стороне $C'D'$ проводим прямую, которая пересечёт диагональ $A'D'$ (или её продолжение) в некоторой точке D. 5) Из точки D параллельно стороне $D'E'$ проводим прямую до пересечения с диагональю $A'E'$ в некоторой точке E.

$ABCDE$— искомый пятиугольник.

IV. Чтобы учащиеся рационально применяли метод подобия, необходимо разъяснить им, какое большое значение имеет умелый выбор центра подобия.

Если требуется построить фигуру, подобную данной, причём известен коэффициент подобия или определённый отрезок (или дуга) искомой фигуры, то можно любую точку принять за центр подобия.

Задача. *Построить треугольник ABC, подобный данному $A'B'C'$, если известно, что отрезок AB, сходственный с отрезком $A'B'$, равен m.*

На рисунках 38 б, в, г, д показаны три способа построения искомого треугольника.

I. Если центр подобия (O) взят вне данной фигуры (рис. 38б) или внутри её (рис. 38в), то построение выполняем следующим образом:

1) Из центра подобия (O) проводим лучи OA_0, OB_0, OC_0, проходящие через вершины A', B', C' данного треугольника $A'B'C'$. 2) Отдельно строим отрезок x, определяемый следующим уравнением: $A'B':AB=OA':x$, т. е. $A'B':m=OA':x$. 3) На луче OA_0 от точки O откладываем отрезок OA, равный найденному отрезку x. 4) Из точки A проводим отрезки AB и AC, параллельные соответственно отрезкам $A'B'$ и $A'C'$ до встречи с соответствующими лучами, проходящими через точки B' и C'. 5) Соединяем точки B и C отрезком прямой линии.

$\triangle ABC$— искомый.

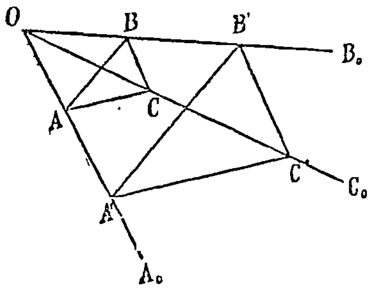


Рис. 38б.

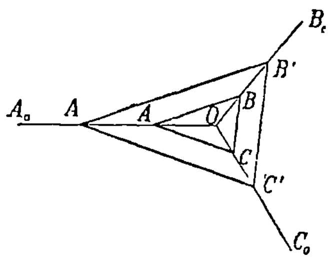


Рис. 38в.

II. Рассмотрим теперь тот случай (рис. 38г), когда центр подобия (O) взят на одной из сторон треугольника $A'B'C'$ (например, на стороне $B'C'$).

1) Из центра подобия (O) проводим луч OA_0 через точку A' (рис. 38г). 2) Отдельно строим тот отрезок x, который в искомом треугольнике ABC является сходственным с отрезком OA' треугольника $A'B'C'$.

Отрезок x определим из пропорции:

$$A'B':AB=OA':x,$$

т. е.

$$A'B':m=OA':x.$$

3) От точки O на луче OA_0 откладываем отрезок OA, равный найденному отрезку x. 4) Из точки A проводим отрезки AB и AC, параллельные соответственно сторонам $A'B'$ и $A'C'$ до встречи с продолжением стороны $B'C'$.

$\triangle ABC$ — искомый.

III. Наконец, рассмотрим тот случай, когда за центр подобия принята вершина A' (рис. 38д).

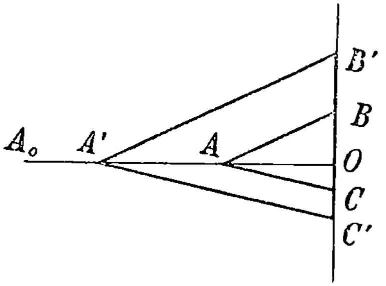


Рис. 38г.

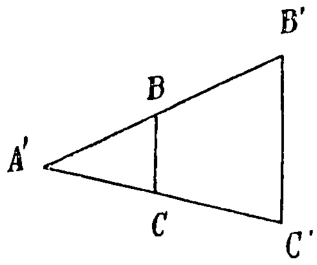


Рис. 38д.

1) От точки A' в направлении $A'B'$ откладываем отрезок $A'B$, равный отрезку m. 2) Из точки B проводим отрезок BC, параллельный стороне $B'C'$.

$\triangle A'BC$ — искомый.

Приведённые решения рассматриваемой задачи показывают, что построение искомой фигуры выполняется путём весьма небольшого числа простых графических операций, если за центр подобия принят конец отрезка, принадлежащего данной фигуре и в то же время сходственного с данным отрезком искомой фигуры.

Таким образом, от выбора центра подобия во многом зависит простота решения задачи и отдельных построений.

При выборе центра подобия можно руководствоваться следующими указаниями.

Если основной линейный элемент искомой фигуры задан непосредственно или легко определяется из условия задачи, то центр подобия удобно брать так, чтобы заданный линейный элемент искомой фигуры и сходственный элемент вспомогательной фигуры имели общую конечную точку при одном из возможных перспективных расположений искомой и вспомогательной фигур. Подобные преобразования по радиусу описанного треугольника одинаково удобно проводятся как из общего центра обеих окружностей, так и из любой вершины.

Приведём несколько примеров применения метода подобия к решению задач на построение.

Построить треугольник, который подобен данному треугольнику ABC и имеет периметр, равный данному отрезку MN.

Построение (рис. 39). 1) На продолжении стороны AC откладываем влево от точки A отрезок AD, равный AB, и вправо от точки C — отрезок CE, равный BC, тогда получим, что DE есть периметр данного $\triangle ABC$. 2) Из точки D проводим под произвольным углом луч DD' и на нём от точки D откладываем отрезок DF, равный MN. 3) Соединив точки E и F отрезком прямой, проводим через точки A и C прямые, параллельные отрезку EF; они пересекут его в некоторых точках G и H.

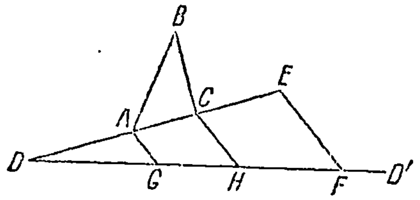


Рис. 39.

Отрезки DG, GH и HF являются сторонами искомого треугольника, который можно построить.

Но есть и другой способ получить искомый треугольник. 4) Отложив на стороне AB данного треугольника (рис. 40) от точки A отрезок AK, равный DG, проведём через точку K прямую KL, параллельную стороне BC. Линия KL пересечёт сторону AC в некоторой точке M. $\triangle AKM$ — искомый.

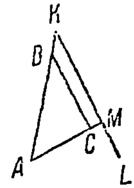


Рис. 40.

Доказательство. Правильность построения основана на свойстве подобных фигур.

Исследование. Если нам дан $\triangle ABC$, то, значит, существуют и подобные ему треугольники, а среди них искомый. Если только периметр искомого треугольника представляет собой конечный отрезок, не равный нулю, то задача имеет решение и притом одно.

Построить сегмент с дугой в 90°, высота которого равна данному отрезку h.

Анализ. Сегменты, дуги которых имеют одинаковое число градусов, подобны. Поэтому, чтобы получить какой-нибудь сегмент, подобный данному, чертим (рис. 41) произвольным радиусом круг и в нём строим сегмент с дугой в 90°. Если через центр O круга проведём прямую, перпендикулярную основанию AB сегмента, то она пересечёт хорду AB и стягиваемую ею дугу в точках D и E.

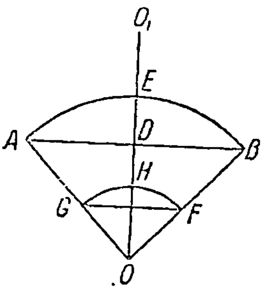


Рис. 41.

Отрезок DE является высотой сегмента ABE. В подобных сегментах отношение высот равно отношению их оснований или радиусов. Поэтому, если радиус круга искомого сегмента обозначим буквой R, то получим следующую пропорцию: $R : OA = h : DE$ (1).

Три члена этой пропорции (h, OA, DE) нам известны, а потому построением можем определить длину радиуса R. Затем, начертив круг радиуса R, можем построить искомый сегмент.

Построение. 1) Около произвольной точки O произвольным радиусом чертим окружность и проводим в ней два взаимно-перпендикулярных диаметра. Соединив концы (A и B) двух диаметров, получим сегмент с дугой в 90°. 2) Проводим через центр O окружности прямую OO_1, перпендикулярную к хорде AB. Линия OO_1 пересечёт хорду и дугу сегмента в точках D и E. Отрезок DE является высотой сегмента ABE. 3) Построением определяем R из следующей пропорции: $R:OA=h:DE$ (1). 4) На отрезке OB (или на его продолжении) от точки O откладываем отрезок OF, равный R. 5) Около точки O, в прямом угле AOB, радиусом, равным OF, чертим дугу до пересечения в точке G с прямой OA. 6) Отрезок FG отсекает от сектора OFG искомый сегмент.

Доказательство. Мы построили произвольной величины сегмент ABE с дугой в 90° и определили, какому отрезку (DE) равна его высота. Затем, принимая во внимание, что все сегменты с дугой в 90° подобны и что в двух подобных фигурах отношение любых сходственных линий есть величина постоянная, мы составили пропорцию (1).

Основываясь на этой пропорции, можно построением определить радиус (R) того круга, в котором сегмент с дугой в 90° имеет высоту, равную данному отрезку h. Поэтому сегмент с дугой в 90°, построенный нами в круге радиуса R, есть искомый.

Исследование. При данной величине h построение всегда можно выполнить, причём задача имеет одно решение.

Построить $\triangle ABC$, зная, что 1) $\angle BAC=\alpha$, 2) высота, опущенная на сторону BC, равна h и 3) $AB:AC=m:n$.

Анализ. Если построим угол A_1AA_2, равный данному углу α, (рис. 42) то, соединив любую точку стороны AA_1 с любой точкой стороны AA_2, получим треугольник, удовлетворяющий первому требованию.

Таких треугольников бесконечное множество. Чтобы выделить из них тот треугольник, который удовлетворяет третьему требованию условия задачи, отложим на стороне AA_1 от точки A отрезок AB_1, равный m, а на стороне AA_2 от точки A отрезок AC_1, равный n. $\triangle AB_1C_1$ удовлетворяет первому и третьему требованиям условия задачи, а потому подобен искомому треугольнику.

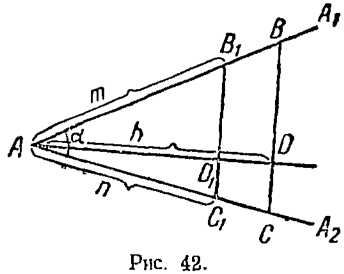


Рис. 42.

Нам дана высота (h) искомого треугольника, и мы можем построением определить высоту AD_1 треугольника AB_1C_1.

Если отложим на отрезке AD_1 или на его продолжении от точки A отрезок AD, равный h, и через точку D проведём прямую, параллельную B_1C_1, то она пересечёт стороны AA_1 и AA_2 в некоторых точках B и C, причём полученный $\triangle ABC$ будет удовлетворять всем трём требованиям, изложенным в условии задачи, т. е. будет искомым.

Построение. 1) Строим угол A_1AA_2, равный данному углу α. 2) На одной из сторон этого угла, от вершины A, откладываем отрезок AB_1, равный m, а на другой стороне угла, от вершины A, откладываем отрезок AC_1, равный n. 3) Соединяем точки B_1 и C_1 и на отрезок B_1C_1 или на его продолжение опускаем из точки A перпендикуляр AD_1. 4) На отрезке AD_1 или на его продолжении от точки A откладываем отрезок AD, равный данной высоте h. 5) Через точку D проводим прямую, параллельную отрезку B_1C_1; эта прямая пересечёт стороны угла A_1AA_2 в некоторых точках B и C. Треугольник ABC— искомый.

Доказательство. По построению в $\triangle AB_1C_1$ угол B_1AC_1 равен α и отношение сторон AB_1 и AC_1 равно $m:n$. Далее, по построению отрезок $BC \parallel B_1C_1$, а потому $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, и, значит, в $\triangle ABC$ угол $BAC = \alpha$ и $AB:AC = m:n$. Кроме того, в $\triangle ABC$ высота AD, опущенная из вершины A на сторону BC, равна h.

Как видим, $\triangle ABC$ удовлетворяет всем трём требованиям условия задачи, а потому является искомым.

Исследование. Если $0 < \alpha < 180°$, то рассматриваемая задача всегда имеет одно решение.

§ 15. МЕТОД ОБРАТНОСТИ.

Метод обратности заключается в том, что в некоторых случаях сначала так изменяют условие предложенной геометрической задачи на построение, чтобы искомые стали данными, а данные искомыми, а затем, решив эту обратную задачу, определяют те зависимости, посредством которых можно решить предложенную задачу.

Практическое применение этого метода видно из следующих примеров.

I. Задача (предложенная). *В данный $\triangle ABC$ вписать такой треугольник, стороны которого были бы параллельны сторонам другого данного $\triangle KLM$.*

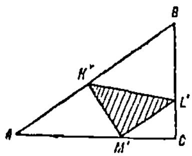


Рис 43.

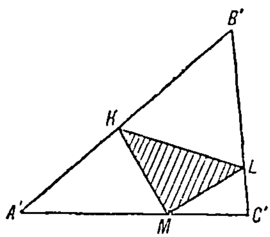


Рис. 44.

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 43) и $\triangle K'L'M'$ есть искомый, т. е. $K'L' \parallel KL$, $L'M' \parallel LM$ и $K'M' \parallel KM$. Так как из чертежа не усматриваем таких конструктивных зависимостей, которые позволяют построить $\triangle K'L'M'$, то превращаем предложенную задачу в обратную.

Задача (обратная). *Около данного $\triangle KLM$ описать такой треугольник, стороны которого были бы параллельны сторонам другого данного $\triangle ABC$.*

Решить обратную задачу легко: если через вершины K, L, M треугольника KLM проведём прямые, параллельные сторонам данного треугольника ABC (рис. 44), то эти прямые попарно пересекутся в точках A', B', C', и получим $\triangle A'B'C'$, описанный около треугольника KLM.

Но если стороны одного треугольника параллельны сторонам другого, то такие треугольники подобны, а потому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle K'L'M' \sim \triangle KLM$, $\triangle AK'M' \sim \triangle A'KM$ и т. д.

Из подобия этих треугольников вытекает, что точки K, L, M треугольника $A'B'C'$ являются сходственными соответствующим точкам подобного треугольника ABC. Отсюда следует, что $AK' : A'K = AB : A'B'$. Три члена этой пропорции $A'K$, AB и $A'B'$ нам известны (AB — из условия задачи, $A'K$ и $A'B'$ — по построению), а потому можем определить четвёртый член AK'.

Как только будет найден отрезок AK', то можем на стороне AB отметить положение точки K'. Для этого надо на стороне AB, от точки A, отложить отрезок, равный найденному значению AK'. Далее, чтобы закончить требуемое построение, достаточно из точки K' провести прямые, параллельные сторонам KL и KM треугольника KLM. Они пересекут стороны треугольника ABC в некоторых точках L' и M'. Соединив точки L' и M', получим искомый $\triangle K'L'M'$.

Построение. 1) Через точки K, L, M проводим прямые, параллельные сторонам треугольника ABC, и получаем $\triangle A'B'C'$, описанный около $\triangle KLM$. 2) Точку K' треугольника ABC, сходственную точке K треугольника $A'B'C'$, определяем (известным построением) из пропорции $AK' : A'K = AB : A'B'$. 3) На стороне AB, от точки A, откладываем найденный отрезок AK'. 4) Из точки K' проводим прямые, параллельные сторонам KL и KM треугольника KLM. Эти прямые пересекут стороны треугольника ABC в точках L' и M'. $\triangle K'L'M'$ — искомый.

Исследование. Через каждую из трёх несовпадающих точек K, L, M плоскости всегда можно провести прямые, параллельные сторонам треугольника ABC, лежащего в той же плоскости, и получить подобный ему треугольник $A'B'C'$. Точкам K, L, M треугольника $A'B'C'$ соответствуют сходственные точки K', L', M' в треугольнике ABC. Следовательно, всегда возможно осуществить требуемое построение.

II. **Задача** (предложенная). *Построить треугольник, равный данному $\triangle KLM$, так, чтобы его вершины лежали на трёх данных прямых OA, OB и OC, выходящих из одной точки* (рис. 45).

Предварительно решим обратную задачу: „Найти такую точку, чтобы прямые, выходящие из неё, проходили бы через вершины $\triangle KLM$ и образовали бы между собою углы, равные $\angle AOB$ и $\angle BOC$“.

Анализ. Предположим, что требуемое построение выполнено (рис. 46) и точка O' удовлетворяет этому требованию, т. е.

$\angle LO'K = \angle AOB$ и $\angle LO'M = \angle BOC$, отрезок KL виден из точки O' под углом α, а отрезок LM — под углом β.

Построение. 1) Строим на отрезках KL и LM сегменты, вмещающие соответственные углы α и β. Пересечение дуг этих сегментов определит положение точки O'. 2) Из точки O' через точки K, L и M проводим прямые $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ и получаем решение обратной задачи. Переходя к предложенной задаче, построение заканчиваем так: 3) От точки O на лучах OA, OB и OC откладываем отрезки, соответственно равные отрезкам $O'K$, $O'L$ и $O'M$, и вторые концы их обозначаем точками K_1, L_1, M_1. 4) Соединив точки K_1, L_1 и M_1, получим $\triangle K_1L_1M_1$, который равен данному треугольнику KLM и имеет вершины на данных прямых OA, OB и OC.

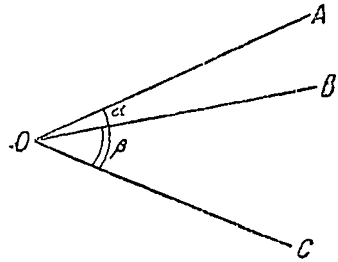


Рис. 45.

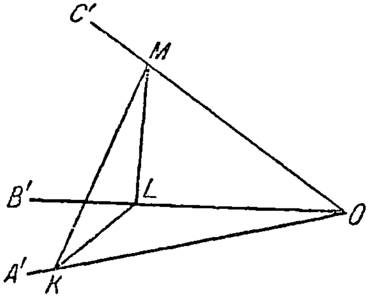


Рис 46.

§ 16. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД.

Прежде чем изложить вопрос о применении алгебраического метода к решению геометрических задач на построение, покажем, как надо строить искомые отрезки, определяемые формулами, в которых a, b, c — данные отрезки, а N — целое положительное число.

Построение этих отрезков выполняется следующим образом.

I. $x = \frac{a}{N}$.

Из произвольной точки O проводим два луча OA и OB (рис. 47). На луче OA от точки O откладываем отрезок OC, равный отрезку a. На луче OB от точки O последовательно откладываем N равных отрезков. Для определённости допустим, что $N = 3$, и отложим на луче OB следующие отрезки:

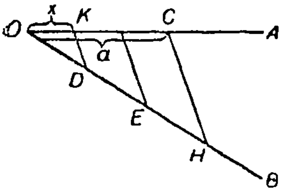


Рис. 47.

$$OD = DE = EH.$$

Затем соединяем точки C и H.

Из точки D проводим прямую, параллельную отрезку CH. Проведённая прямая отсечёт на луче OA отрезок OK, равный искомому отрезку x.

Точно так же решается эта задача, когда N — любое целое положительное число.

II. $x=\frac{bc}{a}$.

Этому равенству можем придать вид пропорции,

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{x},$$

три члена которой (a, b, c) известны.

Из произвольной точки O проводим два луча OM и ON (рис. 47а). На одном из них от точки O откладываем последовательно отрезки: $OE=a$ и $EH=b$, а на другом луче от точки O откладываем отрезок $OD=c$.

Соединяем точки E и D. Из точки H проводим луч, параллельный отрезку ED. Этот луч пересечёт прямую OM в некоторой точке K. Отрезок DK равен x.

III. $x=\sqrt{ab}$.

На произвольной прямой откладываем два примыкающих один к другому отрезка AB и BC (рис. 47б), соответственно равные данным отрезкам a и b.

Находим середину O отрезка AC и из неё радиусом, равным AO, описываем полуокружность AMC. Из точки B восставим перпендикуляр к диаметру AC. Этот перпендикуляр пересечёт полуокружность в некоторой точке D. Отрезок OD равен искомому отрезку. В данном случае определение отрезка x основано на том, что перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы.

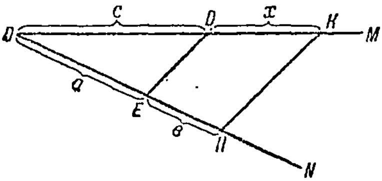


Рис. 47а.

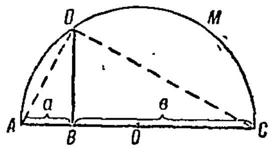


Рис. 47б.

IV. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Строим прямой угол $A'OB'$. На сторонах этого угла от его вершины отложим отрезок OA, равный a, и OB, равный b.

Соединив точки A и B, получим отрезок AB, равный x.

V. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Строим прямой угол $A'OB'$ (рис. 47в). На стороне OB' от точки O отложим отрезок OB, равный b. Из точки B радиусом, равным отрезку a, проводим дугу, пересекающую сторону OA' в точке A.

Отрезок AO—искомый (рис. 47г).

Во всех тех случаях, когда отрезок, определяемый какой-нибудь алгебраической формулой, можно построить посредством циркуля и линейки, решение задачи приводится к построению отрезков, определяемых формулами (I—V).

Примеры.

1. $x=\frac{a}{N}$.

Если число N можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа, то получим

$$x=\frac{a}{N}=\frac{an}{m}.$$

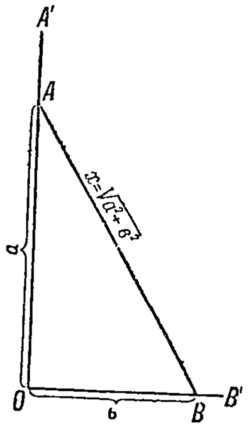


Рис. 47в.

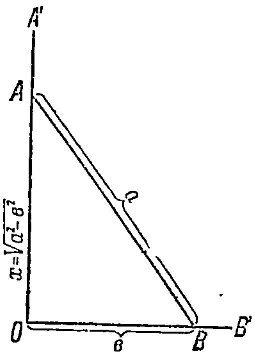


Рис. 47г.

Строим отрезок b, определяемый равенством

$$b=an,$$

и получаем:

$$x=\frac{b}{m},$$

после чего строим (I) отрезок x.

2. $x=\frac{ab}{m+n+p}$.

Строим отрезок c, определяемый следующим равенством:

$$c=m+n+p.$$

После этого формула (2) примет такой вид:

$$x=\frac{ab}{c}.$$

Затем отрезок x строим указанным выше приёмом (II).

3. $x=\sqrt{3mn}$. Сначала строим отрезок p, равный утроенному отрезку m, а затем строим x по формуле: $x=\sqrt{np}$ (III).

4. $x=c\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Выражение, стоящее в правой части, преобразуем так:

$$x=c\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}c^2}=\sqrt{2c\cdot\frac{c}{3}}.$$

Сначала строим отрезок a, равный $2c$, затем строим отрезок b, равный $\frac{c}{3}$. Тогда получим, что $x=\sqrt{ab}$. Наконец, строим (III) отрезок x.

5. $x=\sqrt[4]{abcd}$.

Так как $x=\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$, то сначала строим отрезки p и q по формулам: $p=\sqrt{ab}$ и $q=\sqrt{cd}$ (III), а потом находим $x=\sqrt{pq}$ (III).

6. $x=\sqrt{ab+c^2}$.

Сначала строим отрезок d по формуле: $d=\sqrt{ab}$ (III), а затем находим $x=\sqrt{c^2+d^2}$ (IV).

7. $x=\sqrt{\frac{mn+np+mp}{3}}$.

Сначала находим отрезки a, b, c по формулам: $a=\sqrt{mn}$, $b=\sqrt{np}$, $c=\sqrt{mp}$. Вследствие этого получаем $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Потом строим отрезок d по формуле: $d=\sqrt{a^2+b^2}$ (IV), и, значит, $x=\sqrt{\frac{c^2+d^2}{3}}$. Далее строим отрезок e по формуле: $e=\sqrt{c^2+d^2}$ (IV), и, следовательно, $x=\sqrt{\frac{e^2}{3}}$. Подкоренное количество разбиваем на два множителя и получаем $x=\sqrt{\frac{e}{3}\cdot e}$. Находим (I) отрезок f, равный одной трети отрезка e, и тогда $x=\sqrt{e\cdot f}$ (III).

8. $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Строим прямой угол $A'OB'$ (рис. 47д) На сторонах OA' и OB' от точки O откладываем отрезки OA и OB, соответственно равные отрезкам a и b.

Отрезок $AB=\sqrt{a^2+b^2}$.

Из точки B восставим перпенди-

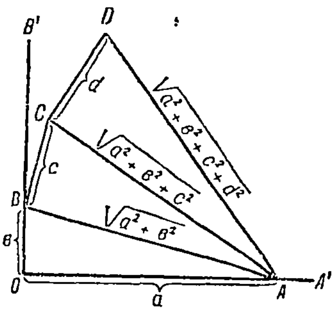


Рис. 47д.

куляр к отрезку AB и на этом перпендикуляре от точки B отложим отрезок BC, равный c.

Отрезок $AC=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Из точки C восставим перпендикуляр к отрезку AC и на этом перпендикуляре от точки c отложим отрезок CD, равный d.

Отрезок $AD=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, т. е. $x=AD$.

Совершенно так же строим отрезок x, определяемый формулой

$$x=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+\ldots+a_n},$$

где n — целое положительное число.

9. $x=\frac{abc}{de}$.

Придаём этому равенству следующий вид:

$$x=\frac{ab}{d}\cdot\frac{c}{e}. \qquad (1)$$

Если введём обозначение

$$y=\frac{ab}{d}, \qquad (2)$$

то известным построением (II) можем определить длину отрезка y.

После этого тем же построением (II) определяем длину отрезка x, так как из (1) и (2) вытекает, что

$$x=y\cdot\frac{c}{e},$$

или

$$x=\frac{cy}{e}.$$

Точно так же поступаем, когда искомый отрезок определяется дробью, числитель которой представляет собою произведение n данных отрезков, а знаменатель $n-1$ данных отрезков.

Пример.

$x=\frac{abcde}{fghk}$.

Придаём этой формуле такой вид:

$$\frac{ab}{f}\cdot\frac{c}{g}\cdot\frac{d}{h}\cdot\frac{e}{k}$$

и строим отрезок (II) $x_1=\frac{ab}{f}$.

Затем аналогичными построениями определяем длину отрезка $x_2=x_1\cdot\frac{c}{g}$, потом — длину отрезка $x_3=x_2\cdot\frac{d}{h}$ и, наконец, — длину искомого отрезка $x=x_3\cdot\frac{l}{k}$.

10. $x=\sqrt{a}$.

Если m есть отрезок, принимаемый за единицу, то, очевидно, $x=\sqrt{a}=\sqrt{ma}$ (III).

11. $x=\sqrt[4]{a}$.

Если m есть отрезок, принимаемый за единицу, то сначала строим отрезок b по формуле: $b=\sqrt{am}$, а затем строим отрезок x по формуле: $x=\sqrt{bm}$.

Алгебраический метод решения геометрических задач на построение состоит в следующем:

1) Неизвестные величины, фигурирующие в условии задачи, обозначают буквами x, y, z и т. д.

2) Составляют уравнения, связывающие эти неизвестные с данными в задаче величинами a, b, c, ...

3) Решают составленные уравнения.

4) Исследуют полученные ответы.

5) Выполняют требуемое построение.

Приведём примеры, поясняющие применение алгебраического метода решения геометрических задач на построение.

По данной сумме (s) *и разности* (d) *двух отрезков найти эти отрезки.*

Анализ. Обозначив искомые отрезки буквами x, y, можем написать такие уравнения: $x+y=s$ (1) и $x-y=d$ (2). Сложив почленно эти равенства, получим $2x=s+d$, откуда $x=\frac{1}{2}(s+d)$. Определив x, можно при помощи уравнения (1) найти y.

Построение. 1) Строим отрезок AB, равный сумме отрезков s и d. 2) Делим пополам найденный отрезок AB и получаем отрезок x. 3) Из отрезка, равного s, отнимаем найденный отрезок x, и полученная разность представит собой искомый отрезок y.

Исследование. Задача возможна при всех конечных значениях отрезков s и d.

Построить круг, равновеликий данному круговому кольцу.

Анализ. Если буквами R и r обозначим радиусы внешней и внутренней окружности кольца (рис. 48), а буквою x — радиус искомого круга, то получим следующее уравнение:

$$\pi R^2-\pi r^2=\pi x^2,$$

откуда:

$$R^2-r^2=x^2,$$

т. е.

$$x^2=(R+r)(R-r) \quad (1)$$

и, следовательно,

$$x=\sqrt{(R+r)(R-r)}.$$

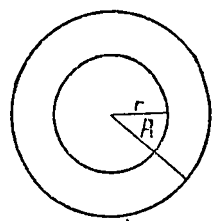


Рис. 48.

При помощи этой формулы можем известным построением найти длину отрезка x.

Построение (рис. 48а). 1) На произвольной прямой KL отмечаем какую-нибудь точку A. 2) На полупрямой AL, от точки A, отложим отрезок AB, равный сумме отрезков R и r. 3) На полупрямой BL, от точки B, отложим отрезок BC, равный разности отрезков R и r. 4) На отрезке AC, как на диаметре, строим полуокружность AC. 5) В точке B восставим перпендикуляр к прямой AC; он пересечёт полуокружность в некоторой точке D. Отрезок BD представляет собой радиус искомого круга, равновеликого данному круговому кольцу.

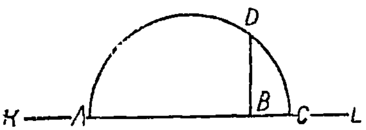


Рис. 48а.

Доказательство. Соединив точку D с концами диаметра AC, получим прямоугольный треугольник, в котором BD есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу. Отсюда следует, что квадрат отрезка BD равен произведению отрезков AB и BC, т. е. $BD^2=(R+r)(R-r)$, что и подтверждает правильность выполненного построения.

Исследование. Задача всегда имеет решение. Действительно, если дано круговое кольцо, то, значит, радиусы R и r как внешней, так и внутренней окружностей представляют собой два конечных отрезка, и потому можно известным построением определить отрезок, квадрат которого равен разности квадратов двух радиусов, т. е. $x^2=R^2-r^2$. Умножив обе части этого равенства на π, получим то равенство, которое требуется условием задачи.

Разделить параллелограм ABCD на три равновеликие части прямыми, исходящими из его вершины.

Анализ. Допустим, что задача решена и AK и AL—искомые прямые, делящие параллелограм на три равные части (рис. 49).

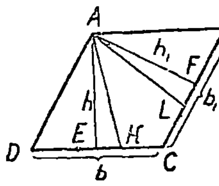


Рис. 49.

Обозначая буквами b, b_1, h и h_1 стороны и высоты данного параллелограма, можем написать, что площадь его определяется любой из следующих формул: bh и b_1h_1.

Если отрезок AK отсекает одну треть площади параллелограма, то, значит,

$$\text{пл. } \triangle AKD=\frac{bh}{3}, \tag{1}$$

причём

$$\text{пл. } \triangle AKD=\frac{DK\cdot h}{2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{DK\cdot h}{2}=\frac{bh}{3},$$

откуда

$$DK=\frac{2}{3}b,$$

т. е.

$$DK=\frac{2}{3}DC.$$

Аналогичными рассуждениями найдём, что

$$BL=\frac{2}{3}b_1=\frac{2}{3}BC.$$

Определив отрезки DK и BL, легко найдём искомое положение точек K и L.

Построение. 1) Сторону DC делим на три равные части: DE, EK, KC и соединяем точку K с точкою A. 2) Сторону BC делим на три равные части: BF, FL, LC и соединяем точку L с точкою A. Полученные треугольники ADK, ABL и фигура $AKCL$ представляют собою искомые равновеликие части параллелограма $ABCD$.

Доказательство. Из хода построения видно, что

$$\text{пл. } \triangle ADK=\frac{1}{3}\text{пл. } ABCD \tag{3}$$

и

$$\text{пл. } \triangle ABL=\frac{1}{3}\text{пл. } ABCD. \tag{4}$$

Что касается площади четырёхугольника $AKCL$, то из чертежа усматриваем следующее:

$$\text{пл. } AKCL=\text{пл. } ABCD-\text{пл. } \triangle ADK-\text{пл. } \triangle ABL. \tag{5}$$

Приняв во внимание равенства (3) и (4), можем равенство (5) переписать так:

$$\text{пл. } AKCL=\text{пл. } ABCD-\frac{1}{3}\text{пл. } ABCD-\frac{1}{3}\text{пл. } ABCD,$$

т. е

$$\text{пл. } AKCL=\text{пл. } ABCD-\frac{2}{3}\text{пл. } ABCD=\frac{1}{3}\text{пл. } ABCD.$$

Исследование. Задача имеет решение при любых конечных размерах данного параллелограма. Можно различать два решения: первое, когда данный параллелограм разбивается на три равновеликие части прямыми, выходящими из вершины тупого угла (A), и второе, когда эти прямые выходят из вершины острого угла (B). Фигуры, на которые рассекается параллелограм в первом случае, равновелики фигурам, получаемым во втором случае, но не равны им. Два решения сливаются в одно, когда рассматриваемая фигура представляет собой прямоугольник.

Алгебраический метод решения геометрических задач на построение полезно применять возможно чаще, так как это, во-первых, приучает ученика выражать посредством математических формул зависимости между геометрическими величинами и, во-вторых, упражняет учеников в выполнении чисто алгебраических операций.

Ознакомив учеников с геометрической теоремой, следует показать её приложение к решению задач на построение. Например, после проработки теорем о квадрате стороны треугольника можно предложить ученикам следующие упражнения:

I. *По данным отрезкам a и b найти отрезок x, определяемый формулой:* $x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Построение. 1) Строим отрезок BC, равный данному отрезку a (рис. 50). 2) На отрезке BC от точки C откладываем отрезок CD, равный данному отрезку b. 3) На отрезке CD строим равносторонний треугольник ACD. 4) Соединив точку A с B, получим отрезок AB, равный искомому отрезку x.

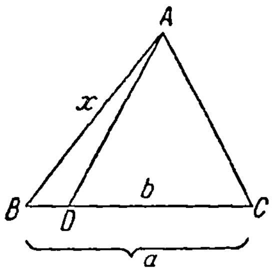


Рис. 50.

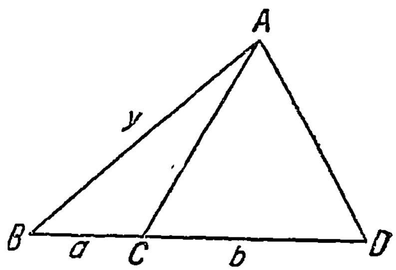


Рис. 50а.

II. *По данным отрезкам a и b найти отрезок y, определяемый формулой:* $y=\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Построение. 1) Строим отрезок BC, равный данному отрезку a (рис. 50а). 2) Продолжаем отрезок BC за точку C и откладываем на этой прямой от точки C отрезок CD, равный b. 3) На отрезке CD строим равносторонний треугольник ACD. 4) Соединив точку A с B, получим отрезок AB, равный искомому y.

Примечание. Последние две задачи на построение можно было решить иначе, опираясь на построения отрезков, выраженных формулами теоремы Пифагора и среднего пропорционального двух чисел.

После изучения теоремы Пифагора можно рассмотреть следующую задачу.

В углы B и D прямоугольника $ABCD$ вписать две равные окружности, касающиеся одна другой.

Анализ (рис. 51).

Введём обозначения: a—длина стороны AD, b—длина стороны

AB, r — длина радиуса искомых окружностей, O и Q — центры искомых окружностей.

Если проведём $OE \perp AD$ и $QF \parallel AD$ (рис. 51), то получим прямоугольный $\triangle OFQ$, и потому

$$OQ^2 = OF^2 + QF^2. \qquad (1)$$

Из чертежа усматриваем, что

$$OQ = 2r, \qquad (2)$$

$$QF = a - 2r, \qquad (3)$$

$$OF = OE - FE = (b - r) - r = b - 2r. \qquad (4)$$

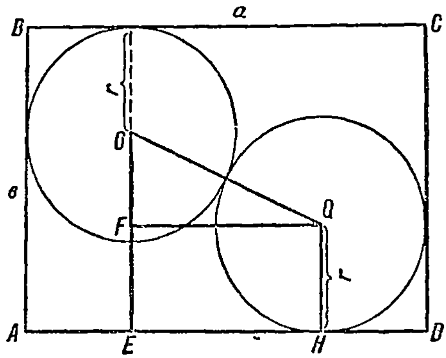


Рис. 51.

Подставляя в (1) значения OQ, QF и OF, взятые из (2), (3) и (4), получим

$$(2r)^2 = (b - 2r)^2 + (a - 2r)^2$$

и придём к следующему уравнению:

$$r^2 - (a + b)\,r + \frac{a^2 + b^2}{4} = 0. \qquad (5)$$

Решая это уравнение (5), найдём, что

$$r = \frac{a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}}{2},$$

т. е.

$$r = \frac{a + b \pm \sqrt{2ab}}{2},$$

откуда

$$r_1 = \frac{a + b + \sqrt{2ab}}{2} \qquad (6)$$

и

$$r_2 = \frac{a + b - \sqrt{2ab}}{2}. \qquad (7)$$

Из чертежа усматриваем, что $r < \frac{b}{2}$ и $r < \frac{a}{2}$, а потому значение r_1 (6) отбрасываем, как непригодное.

Таким образом, решением является радиус, определяемый по формуле (7).

VI. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 17. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ.

Линейка и циркуль не могут быть применены для черчения геометрической фигуры в пространстве, но посредством воображения можно строить в пространстве любые геометрические образы, особенно те, свойства которых нам известны. Чтобы иметь возможность судить о том, насколько воображаемые построения в пространстве, выполняемые учениками, протекают в соответствии со свойствами геометрических образов и в логической последовательности, целесообразно наложить на эти построения определённые ограничения.

Условимся, что никаких других элементарных построений в пространстве не можем выполнить, кроме следующих семи:

1. Можем взять (отметить) о́дну или несколько точек в пространстве или на любом пространственном геометрическом образе.

2. Можем построить плоскость, проходящую:

а) через три данные точки, не лежащие на одной прямой,
б) через прямую и точку, лежащую вне её,
в) через две пересекающиеся прямые,
г) через две параллельные прямые.

3. Можем построить прямую, являющуюся пересечением данных плоскостей.

4. Можем описать шаровую поверхность из данной точки пространства, как из центра, радиусом данной величины.

5. Можем построить цилиндрическую поверхность, осью которой является данная определённая прямая пространства, причём радиус имеет данную величину.

6. Можем построить коническую поверхность, осью которой является произвольно взятая прямая, вершиною — данная точка на этой оси, и известен угол, составляемый осью с образующей.

7. Можем на плоскости, взятой в пространстве, выполнять все построения, какие осуществляются в планиметрии.

Все построения в пространстве, выполненные на основании этих семи постулатов, будем считать правильными.

Принимая во внимание сказанное, можно решать следующие основные задачи на построение в пространстве.

1. Опустить перпендикуляр на пространственную прямую из точки, данной вне этой прямой.

2. Восставить перпендикуляр к плоскости в данной на ней точке.

3. Через точку, лежащую вне данной пространственной прямой, провести прямую, параллельную данной.

4. Через точку, лежащую вне данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной.

5. Разделить двухгранный угол пополам.

6. Через прямую, лежащую на данной плоскости, провести плоскость, образующую с данной плоскостью данный двухгранный угол.

Решение всякой задачи на построение в пространстве можно свести к элементарным построениям в пространстве. Однако, если задача сложна, то, решая её, можно ссылаться на отдельные основные построения.

Примеры.

В точке A плоскости P восставить перпендикуляр.

Покажем, как при помощи перечисленных постулатов можно осуществить это основное построение.

1) На данной плоскости P через точку A проводим *) произвольную прямую AB (рис. 52). 2) Берём **) вне плоскости P какую-нибудь точку C. 3) Через точку C и прямую AB проводим ***) плоскость P_1. 4) На плоскости P через точку A проводим*) прямую AD, перпендикулярную к AB. 5) В плоскости P_1 восставим *) перпендикуляр AE к прямой AB. 6) Через две пересекающиеся прямые AD и AE проводим ***) плоскость P_2. Плоскость P_2, в силу известной теоремы, перпендикулярна к прямой AB:

$$P_2 \perp AB. \qquad (1)$$

7) В плоскости P_2 восставим*) перпендикуляр AH к прямой AD:

$$AH \perp AD. \qquad (2)$$

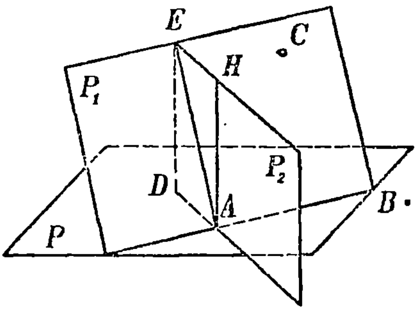


Рис. 52.

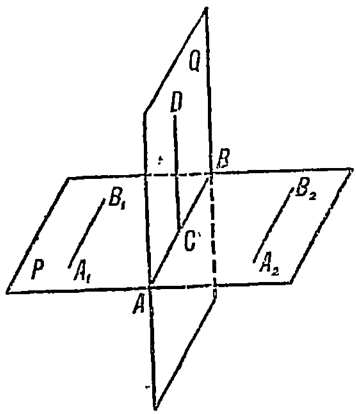


Рис. 52а.

Так как прямая AH находится в плоскости P_2, которая перпендикулярна к AB (1), то

$$AH \perp AB. \qquad (3)$$

Прямая AH перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AB (3) и AD (2) плоскости P, а потому

$$AH \perp P.$$

*) На основании 7-го постулата.
**) На основании 1-го постулата.
***) На основании 2-го постулата.

Даны в пространстве две параллельные прямые A_1B_1 и A_2B_2. Требуется построить плоскость, которая перпендикулярна к плоскости, в которой расположены данные прямые, и отстоит от них на одинаковом расстоянии.

Построение (рис. 52а). 1) Через данные прямые проводим плоскость P. 2) В плоскости P между данными прямыми проводим прямую AB, которая им параллельна и равноудалена от каждой из них. 3) Из произвольной точки C прямой AB восставим перпендикуляр CD к плоскости P. 4) Через пересекающиеся прямые AB и CD проводим искомую плоскость Q.

§ 18. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

В §§ 10—17 были указаны методы решения задач на построение по планиметрии.

Ниже приводим примеры, показывающие, что те же методы могут быть использованы и при решении задач на построение, которые относятся к стереометрии.

Метод геометрических мест.

Даны в пространстве четыре точки A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Построить точку, которая равноудалена от точек A, B, C и отстоит от точки D на расстоянии, равном данному отрезку m.

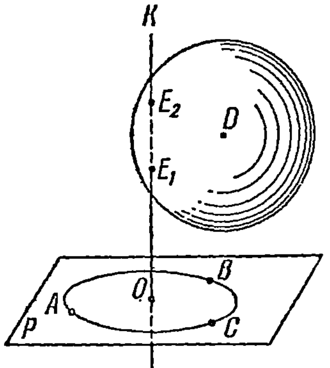


Рис. 53.

Анализ (рис. 53). Если точка равноудалена от трёх данных точек A, B, C, то она находится на некоторой прямой KL, которая перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и проходит через центр круга, описанного около этого треугольника.

По условию, искомая точка отстоит от данной точки D на расстоянии, равном m, а потому эта точка принадлежит шаровой поверхности S, описанной из точки D, как из центра, радиусом, равным отрезку m

Так как искомая точка должна находиться и на прямой KL и на шаровой поверхности S, то она будет являться точкою их пересечения.

Построение. 1) Проводим плоскость P через три данные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. 2) В плоскости P определяем центр O окружности, проходящей через эти три точки (A, B, C). 3) Через точку O проводим прямую KL, перпендикулярную к плоскости P. 4) Из точки D, как из центра, радиусом, равным отрезку m, описываем шаровую поверхность S.

Точки E_1 и E_2, в которых прямая KL пересекает шаровую поверхность S, являются искомыми.

Исследование. Если прямая KL пересекает шаровую поверхность S, то имеются две точки, удовлетворяющие условию задачи. Если KL лишь касается шаровой поверхности S, то задача имеет одно решение. Наконец, если KL лежит вне шаровой поверхности, не касаясь её, то задача не имеет ни одного решения.

Метод параллельного перенесения.

Даны две шаровых поверхности (O, R) и (Q, r); требуется построить боковую поверхность кругового цилиндра, высота которого равна данному отрезку h, ось находится на линии центров, а окружности оснований лежат на данных шаровых поверхностях.

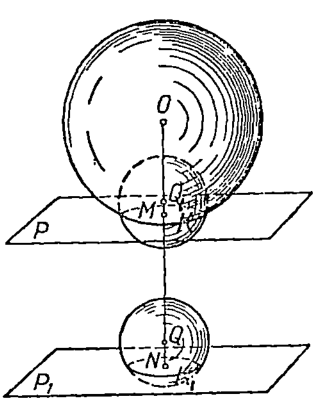


Рис. 53а.

Построение (рис. 53а). 1) Проводим прямую, проходящую через центры O и Q данных шаровых поверхностей. 2) На прямой OQ от точки Q по направлению к O откладываем отрезок QQ_1, равный данному отрезку h. 3) Из точки Q_1, как из центра, радиусом, равным r, описываем шаровую поверхность (Q_1, r). 4) Определяем окружность K, по которой пересекаются шаровые поверхности (O, R) и (Q_1, r). 5) Проводим через окружность K плоскость P. 6) Плоскость P пересечёт прямую OQ в некоторой точке M. 7) На прямой OQ от точки M в направлении точки Q отложим отрезок MN, равный h. 8) Через точку N проводим плоскость P_1, перпендикулярную к прямой OQ. 9) Плоскость P_1 пересечёт шаровую поверхность (Q, r) по окружности K_1, равной и параллельной окружности K. 10) Строим искомую боковую поверхность цилиндра, контурами оснований которого являются окружности K и K_1.

Исследование. Задача имеет решение только в том случае, если $h > OQ-(R+r)$.

Метод симметрии.

Дана плоскость P и по одну сторону её две точки A и B. Найти на плоскости P такую точку C, чтобы сумма её расстояний до точек A и B, т. е.

$$AC+CB, \tag{1}$$

была наименьшей.

Анализ. Эта задача совершенно сходна с задачей 334, помещённой на странице 379. Легко убедиться в том, что обе эти задачи решаются одним и тем же методом (симметрии).

Построение (рис. 53 б). 1) Строим точку A', симметричную точке A относительно плоскости P. 2) Через точки A, B и A' проводим плоскость Q, которая пересечёт плоскость P по некоторой прямой DE. 3) В плоскости Q соединяем точки B и A'. Отрезок BA' пересечёт прямую DE в некоторой точке C.

Точка C — искомая.

Доказательство. Точка C находится на прямой DE, которая перпендикулярна к отрезку AA' и проходит через его середину (A_0), а потому

$$AC = A'C,$$

и, значит,

$$AC + CB = A'C + CB = A'B. \quad (2)$$

Если возьмём на прямой DE произвольную точку M, то получим, что

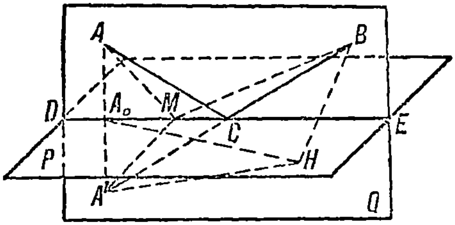


Рис. 53б.

$$AM = A'M,$$

и, значит,

$$AM + MB = A'M + MB. \quad (3)$$

Так как длина ломаной $A'M + MB$ больше прямолинейного отрезка $A'B$, т. е.

$$A'M + MB > A'B, \quad (4)$$

то из (4) и (3) получаем:

$$A'M + MB > AC + CB. \quad (5)$$

Точка M, не совпадающая с точкою C, является совершенно произвольной точкой прямой DE, а потому равенство (5) показывает, что из всех точек прямой DE только C удовлетворяет условию задачи.

Далее возьмём на плоскости P произвольную точку H, лежащую вне прямой DE.

Соединив точки A_0 и H, получим отрезок A_0H, который перпендикулярен к отрезку AA' и проходит через его середину, а потому

$$AH = A'H.$$

Отсюда вытекает, что

$$AH + HB = A'H + HB.$$

Ломаная линия $A'H + HB$ больше прямолинейного отрезка $A'B$:

$$A'H + HB > A'B.$$

Так как

$$A'B = AC + CB,$$

то ясно, что

$$A'H + HB > AC + CB.$$

Приняв во внимание, что для любой точки M, которая находится на прямой DE и не совпадает с точкою C, имеет место неравенство $AM + MB > AC + CB$, а для любой точки H, лежащей на плоскости

P и находящейся вне прямой DE,—неравенство $AH+HB>AC+CB$, приходим к выводу, что сумма $AC+CB$ имеет наименьшее значение, и, следовательно, точка C является искомой точкой плоскости P.

Метод подобия.

В два противоположных трёхгранных угла $ABDA_1$ и $C_1CB_1D_1$ данного прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписать два равных шара, касающихся один другого.

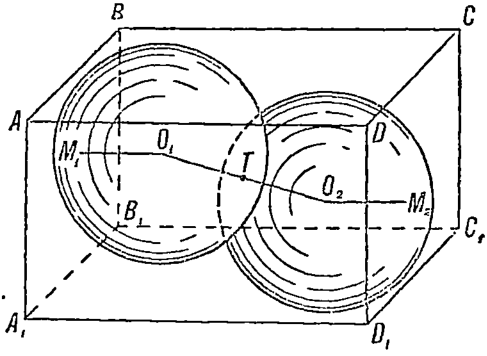


Рис. 53в.

Анализ. Пусть рисунок 53в изображает данный параллелепипед с вписанными в него шарами. Противоположные грани этого параллелепипеда равны: боковые (ABB_1A_1 и CDD_1C_1), верхняя и нижняя ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$), передняя и задняя (ADD_1A_1 и BCC_1B_1).

Обозначив центры искомых шаров и точку их касания буквами O_1, O_2 и T, выполним следующее построение (рис. 53г): проведём линию центров O_1O_2; опустим из точек O_1 и O_2 перпендикуляры O_1M_1 и O_2M_2 на грани ABB_1A_1 и CDD_1C_1; через точку T проведём прямую T_1T_2, перпендикулярную к этим же граням, и, наконец, через прямые O_1M_1 и O_2M_2 проведём плоскость P, которая пересечёт боковые грани по некоторым отрезкам $A'B'$ и $C'D'$.

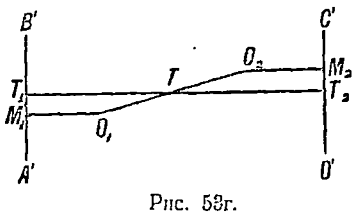


Рис. 53г.

Ясно, что прямоугольные трапеции $TT_1M_1O_1$ и $TT_2M_2O_2$ равны, а потому

$$TT_1=TT_2,$$

т. е. точка T равноудалена от боковых граней.

Путём таких же рассуждений можем убедиться в том, что точка T находится на равном расстоянии как от верхней и нижней, так и от передней и задней граней.

Из сказанного вытекает, что точка T есть точка пересечения диагоналей данного параллелепипеда.

Полученный вывод даёт возможность построить искомые шары.

Построение. 1) Через вершину A трёхгранного угла проводим прямую AM, равноудалённую от его граней. 2) В этот же трёхгранный угол вписываем шаровую поверхность S произвольного радиуса. Ясно, что центр O этого шара будет находиться на прямой AM. 3) Из точки A проводим луч, проходящий через точку T. Этот луч пересечёт шаровую поверхность S в некоторых точках E_1 и E_2. Допустим, что точка E_1 дальше отстоит от точки A, чем от точки T. 4) Соединяем точку E_1 с точкой O. 5) Из точки T проводим прямую, параллельную отрезку OE_1. Проведённая прямая пересечёт прямую AM в некоторой точке O_1. 6) Из точки O_1, радиусом, равным отрезку O_1T, описываем шаровую поверхность S_1. 7) Строим прямую C_1N, равноудалённую от граней трёхгранного угла $C_1B_1CD_1$. 8) На прямой C_1N от точки C_1 откладываем отрезок C_1O_2, равный отрезку AO_1. 9) Из точки O_2 радиусом, равным отрезку O_1T, описываем шаровую поверхность S_2.

S_1 и S_2—поверхности искомых шаров.

Метод обратности.

Около цилиндра, высота которого равна h, а радиус основания r, надо описать шаровой сегмент, в котором отношение высоты к диаметру основания равно $m:n$.

Анализ. Допустим, что рис. 53д представляет собою изображение требуемого решения. Если найдём, чему равно отношение радиуса основания цилиндра к радиусу основания описанного сегмента, то легко будет выполнить требуемое построение.

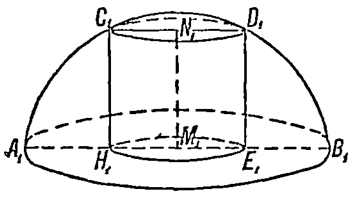


Рис. 53д.

Для определения этого отношения проведём плоскость через ось (M_1N_1) цилиндра и получим в сечении круговой сегмент $A_1B_1D_1C_1$ с вписанным в него прямоугольником $C_1D_1E_1H_1$. Ясно, что отношение отрезков M_1E_1 и M_1B_1 равно отношению радиуса основания цилиндра к радиусу основания описанного шарового сегмента.

Таким образом, рассматриваемую задачу мы привели к следующей: *Около прямоугольника $C_1D_1E_1H_1$, высота которого равна h, а основание $2r$, надо описать такой круговой сегмент, высота которого относится к основанию, как $m:n$.*

Так как непосредственно решить эту задачу затруднительно, то заменяем её обратной задачей:

В круговой сегмент, в котором отношение высоты к основанию равно $m:n$, требуется вписать прямоугольник, в котором отношение высоты к основанию равно $h:2r$ (8:7).

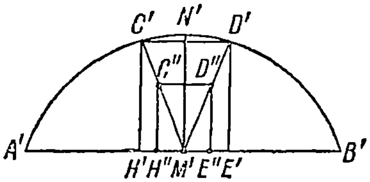


Рис. 53е.

Построение (рис. 53е). 1) Строим отрезок $A'B'$ произвольной длины. 2) Строим отрезок x, определяемый по формуле

$$\frac{x}{A'B'} = \frac{m}{n}.$$

3) Из середины M' отрезка $A'B'$ восставим перпендикуляр $M'N'$, равный найденному отрезку x. 4) Через точки A', N', B' проводим дугу окружности и получаем круговой сегмент $A'N'B'$. 5) В круговой сегмент $A'N'B'$ вписываем прямоугольник $C'D'E'H'$, отношение сторон которого равно $h:2r$ (8:7), причём меньшая сторона находится на основании ($A'B'$) сегмента. Выполнив это построение, получим отрезки $M'E'$ и $M'B'$, отношение которых равно отношению радиуса основания цилиндра к радиусу основания описанного шарового сегмента.

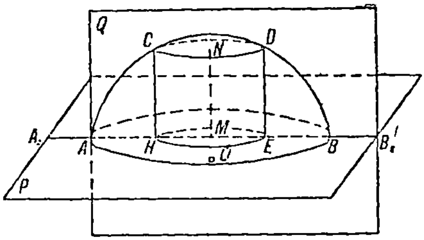


Рис. 53ж.

Теперь можем решить предложенную задачу.

Построение (рис. 53ж). 1) Проводим плоскость P через нижнее основание данного цилиндра. 2) Проводим плоскость Q через ось данного цилиндра. Эта плоскость пересечёт окружности оснований цилиндра в точках C, D, E, H. 3) Плоскости P и Q пересекутся по некоторой прямой A_1B_1, которая пересечёт ось цилиндра в некоторой точке M. 4) Строим отрезок x, определяемый следующей формулой:

$$\frac{r}{x}=\frac{M'E'}{M'B'}.$$

5) На прямой A_1B_1 от точки M отложим отрезок MB, равный найденному отрезку x. 6) В плоскости Q определим центр O окружности, проходящей через точки B, C, D. 7) Из точки O, как из центра, радиусом OB строим ту часть шаровой поверхности, которая является поверхностью сегмента, описанного около данного цилиндра. Построенный сегмент является искомым.

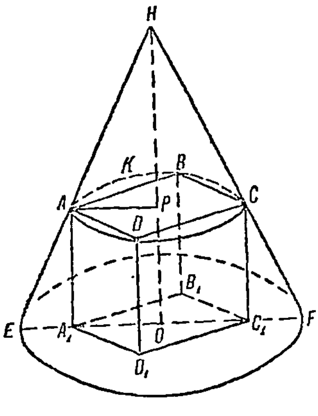


Рис. 53 з.

Алгебраический метод.

В данный конус, радиус основания которого равен r, а высота h, требуется вписать куб так, чтобы четыре его вершины лежали на основании конуса, а остальные вершины—на его боковой поверхности.

Анализ. Пусть рис. 53 з представляет собою изображение требуемого решения, где буквами O и P обозначены точки, в которых высота конуса пересекает две противоположные грани вписанного куба.

Из рассмотрения подобных треугольников HAP и HEO получим:

$$\frac{HO}{HP}=\frac{EO}{AP}. \tag{1}$$

Обозначая буквою x длину ребра искомого куба, можем пропорции (1) придать следующий вид:

$$\frac{h}{h-x}=\frac{2r}{x\sqrt{2}},$$

откуда

$$h\sqrt{2}\cdot x=2rh-2rx,$$

или

$$(2r+h\sqrt{2})\,x=2rh,$$

и, значит,

$$x=\frac{2rh}{2r+h\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый формулой (2). 2) На отрезке OH от точки O отложим отрезок OP, равный найденному отрезку x. 3) Через точку P проводим плоскость S, перпендикулярную к отрезку OH. Эта плоскость пересечёт боковую поверхность конуса по некоторой окружности K. 4) В окружность K впишем квадрат $ABCD$, сторона которого равна x. 5) Через стороны этого квадрата проводим плоскости, параллельные отрезку OH. Эти плоскости, пересекаясь между собою и с основанием конуса, образуют искомый куб, вписанный в данный конус.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ШКОЛЕ.

I. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ.

Все те геометрические задачи на построение, которые учитель предлагает ученикам, должны быть заранее и целеустремлённо подобраны.

В отличие от других видов математических упражнений решение геометрических задач на построение представляет часто большую трудность. Иногда даже опытный преподаватель математики не в силах сразу решить предложенную ему задачу на построение, а находит её решение лишь после продолжительного размышления.

Поэтому учитель математики должен строго соблюдать следующее правило: предлагать учащимся для решения в классе или в порядке домашней работы только те геометрические задачи на построение, которые предварительно сам всесторонне изучил, т. е. сделал анализ, выполнил построение, доказал правильность решения и произвёл исследование.

Геометрическая задача на построение должна иметь определённую цель: либо способствовать тому, чтобы ученики прочно усвоили новый для них материал по геометрии, либо носить характер повторения, т е. побуждать учеников припомнить те сведения по этому предмету, которые были сообщены раньше Цель, которую ставит перед собою учитель, определяет характер тех задач на построение, какие предполагается решить в классе или в порядке домашнего задания.

В том случае, когда учитель ставит целью урока усвоить с учениками новый для них метод решения геометрических задач на построение, необходимо для первоначального ознакомления подобрать несколько таких весьма простеньких, лёгоньких задачек на построение, на которых можно вполне убедительно показать сущность этого метода.

Учитель должен подумать и о том, какие упражнения целесообразно будет предложить ученикам после того, как они решат предложенную им геометрическую задачу на построение.

§ 19. УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ.

Условие геометрической задачи на построение должно быть изложено кратко и ясно. Поэтому целесообразно придерживаться определённых обозначений. Приводим обозначения, большая часть которых общеизвестна.

I. В треугольнике ABC:

A, B, C — вершины;
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — внутренние углы;
a, b, c — стороны, противолежащие углам A, B, C;
h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на стороны a, b, c;
m_a, m_b, m_c — медианы сторон a, b, c;
b_A, b_B, b_C — биссектрисы углов A, B, C;
R — радиус описанной окружности;
r — радиус вписанной окружности;
S_a, S_b, S_c — радиусы внешних вписанных окружностей, касающихся сторон a, b, c;
S — площадь;
$2p$ — периметр.

II. k^2 — площадь квадрата, сторона которого равна отрезку k;
окр. (O, R) — окружность, центр которой находится в точке O, а радиус равен R;
цил. (AB, R) — цилиндр, осью которого служит линия AB, а радиус основания равен R;
шар. (O, R) — шар, центр которого находится в точке O, а радиус равен R;
пов. шар. (O, R) — поверхность шара, центр которого находится в точке O, а радиус равен R.

Условия геометрических задач на построение, предложенных учащимся, должны иметь такую форму, чтобы их изучение было наиболее продуктивным и не требовало слишком много времени. Формулировка условия геометрической задачи на построение влияет как на число решений, так и на трудность исследования. Поэтому, прежде чем предложить ученикам геометрическую задачу на построение, следует подумать о том, не целесообразнее ли будет упростить или усложнить её условие.

Учитель математики должен придерживаться принципа, что каждое последующее упражнение должно быть посильным для учащихся и в то же время открывать им нечто новое, двигать их вперёд.

Пример. Допустим, учитель проработал с учениками следующую задачу: „Построить треугольник, подобный данному $\triangle ABC$, но имеющий высоту, равную отрезку MN“.

После этого он может предложить ученикам следующие задачи:

,,Построить треугольник, который подобен *данному* $\triangle ABC$ и имеет периметр, равный отрезку MN''.

,,Построить треугольник, зная, что он подобен данному и что сумма его медиан равна данному отрезку MN'', и т. д.

Если геометрическая задача на построение, которую преподаватель намерен решать в классе, трудновата для учеников, то он должен так изменить её, чтобы она стала посильной для них. А после того, как будет решён упрощённый вариант геометрической задачи на построение, можно предложить ученикам задачу в её первоначальном виде.

Пример. Допустим, что учитель хочет решить с учениками такую задачу: ,,Дан треугольник и на стороне его точка P. Требуется прямыми, выходящими из точки P, разделить этот треугольник на n равновеликих частей''.

Если учитель находит, что эта задача очень затруднит учеников, он может сначала предложить следующую задачу: ,,Дан треугольник и на его стороне точка P. Провести через эту точку такую прямую, чтобы она разделила треугольник на две равновеликие части''.

После того, как ученики решат эту задачу, следует усложнить её условие: ,,Дан треугольник и на его стороне точка P. Провести через эту точку прямые, которые разделили бы данный треугольник на три равновеликие части''.

Наконец, когда будет решена и эта задача, ученики смогут прямыми, выходящими из данной точки, которая лежит на одной из сторон треугольника, разделить эту фигуру на какое угодно число равновеликих частей.

Иногда условию задачи надо сообщить такую форму, при которой решение этой задачи во всех ученических тетрадях имело бы пояснительные чертежи с совершенно одинаковыми буквенными обозначениями точек, линий и углов

Возьмём, например, такую задачу:

,,Построить треугольник по двум сторонам и разности углов, противолежащих этим сторонам''.

Целесообразно этому условию задачи придать следующую форму:

,,Построить $\triangle ABC$ по двум сторонам (AB и BC) и разности углов (C и A), противолежащих этим сторонам''.

На анализ и число решений геометрической задачи на построение имеет влияние не только конфигурация, но и отношение данных величин. Поэтому отношение известных в условии задачи величин должно иметь такое значение, которое обеспечивало бы выбранный учителем ход анализа.

В условии геометрической задачи на построение упоминаются определённые геометрические образы в виде данных и искомых. Надо добиться того, чтобы ученики хорошо поняли, что осуществить требуемое построение возможно лишь тогда, когда будут учтены не только необходимые связи, существующие между этими величинами в силу определённых условий, изложенных в задаче, но и те, которые существуют независимо от них.

Примеры. 1. Если дана точка внутри угла, то, значит, тем самым даны: 1) расстояния этой точки от вершины угла и от сторон угла; 2) углы, под которыми видны из вершины угла те отрезки, на которые разбивает данная точка любой отрезок, проходящий через неё и имеющий концы на сторонах угла.

2. Если речь идёт о построении прямоугольного треугольника, у которого один катет втрое больше другого, то к этой зависимости мы присоединяем еще и такую: угол, образуемый катетами, является прямым.

3. Если известно, что биссектриса искомого вписанного угла пересекает данную хорду в данной точке, то следует учесть, что эта биссектриса проходит и через середину дуги, стягиваемой данной хордой.

Чтобы ученикам легче было разобраться в условии геометрической задачи на построение, намеченной к решению в классе, необходимо на предыдущем уроке сказать им, какие пройденные разделы учебника они должны повторить. С этой же целью иногда полезно порекомендовать учащимся посмотреть решения тех геометрических задач на построение, которые были раньше выполнены, но имеют тесную связь с намечаемой к проработке в классе задачей.

Надо предлагать ученикам только такие геометрические задачи на построение, которые для них посильны.

Задачу можно считать посильной, если учащийся имеет представление об упоминаемых в ней данных и искомых величинах, знает те зависимости, которые имеются между этими величинами, и даже имеет некоторое представление о том методе, каким можно решить данную задачу.

§ 20. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ.

Пояснительный чертёж.

После того как ученики разобрались в условии геометрической задачи на построение, они приступают к анализу, исходным пунктом которого является пояснительный чертёж, вытекающий из предположения, что задача решена.

Пояснительный чертёж является непременной частью решения геометрической задачи на построение и должен выполняться учителем уверенно и правильно. Если учитель, сделав на доске неудачный чертёж, стирает и принимается чертить новый, то ученики, которые обычно копируют всё, что делается на доске, вынуждены зачеркнуть в своих тетрадях сделанные наброски и чертить новые. Такое перечёркивание, производимое на доске и в тетрадях, снижает авторитет учителя, вызывает ненужную трату времени и приводит к тому, что ученические тетради, содержащие решение геометрических задач на построение, наполняются поправками, помарками, перечёркнутыми набросками.

Поэтому учитель, готовясь к уроку, на котором планирует решать геометрические задачи на построение, должен позаботиться о том, чтобы пояснительные чертежи на классной доске были бы выполнены без перечёркивания и имели наиболее подходящую форму и размеры.

Конечно, сделанный от руки чертеж неминуемо будет содержать погрешности, неточности, но посредством соответствующих упражнений учитель должен добиться возможно более аккуратного выполнения пояснительных чертежей. Например, начерченная окружность действительно должна походить на окружность, а не на вытянутый эллипс; квадрат не должен иметь острых и тупых углов, параллельные линии не должны быть явно пересекающимися и т. п.

Даже в том случае, когда учитель предполагает пояснительные чертежи делать посредством циркуля и линейки, всё же следует предварительно прорепетировать выполнение этой операции с целью выяснить: 1) какие следует придать размеры чертежу, чтобы оставалось место и для тех записей, которые придется делать при выполнении искомого построения, 2) какое расположение линий чертежа является наиболее целесообразным для выявления зависимостей между геометрическими величинами этого чертежа.

В большинстве случаев пояснительный чертёж на доске выполняет учащийся.

Следует иметь в виду, что небрежно сделанный чертеж затрудняет выявление тех зависимостей, какие имеются между входящими в него геометрическими образами.

Анализ.

Чтобы решение геометрических задач на построение было наиболее продуктивным, характер анализа задачи должен быть не случайным, а протекать по намеченному учителем плану.

Для достижения этой цели учитель должен, готовясь к уроку, не только найти то построение, которое требуется в данной задаче, но и произвести подробное исследование.

Весьма целесообразно, чтобы результаты исследования были бы представлены соответствующими табличками (образцы табличек даны в § 22). Имея перед собою таблички, относящиеся к рассматриваемой в классе задаче, учитель легко может выбрать ту конфигурацию, которая наиболее характерна для этой задачи, и взять такие размеры данных величин, которые обеспечивают получение хотя бы одного решения

Анализ начинается с того, что делают чертёж решения рассматриваемой задачи. Если учитель запланировал рассмотреть с учениками определённую конфигурацию, то он должен после изложения условия задачи сам сделать на доске набросок чертежа, иллюстрирующего эту конфигурацию. Надо добиваться того, чтобы ученики, глядя на чертёж, сделанный ими или учителем, умели подмечать, какие имеются зависимости между геометрическими образами этого предварительного наброска.

Лишь при решении более простых геометрических задач на построение сразу же видно по предварительному наброску, как выполнить требуемое построение. В сложных же задачах всегда приходится в этот набросок вводить вспомогательные отрезки, линии, углы и т. п.

Учитель должен всемерно прививать ученикам умение тесно связывать эти вспомогательные геометрические образы с той фигурой, которая изображена на предварительном наброске решения задачи.

Если задача сложна и по чертежу сразу не ясно, какие операции и в какой последовательности надо выполнить для её решения, то необходимо произвести анализ этой задачи, т. е. вникнуть в её содержание и, выяснив свойства упоминаемых в ней геометрических образов и указанные в условии зависимости, найти тот метод, посредством которого можно осуществить требуемое построение.

Приступая к выполнению анализа геометрической задачи на построение, не следует упускать возможности упростить ее условие или расчленить её на две или несколько более простых задач.

Для ознакомления с сущностью упрощения условия задачи, рассмотрим следующие два упражнения:

I. *Построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам KL, MN и PQ.*

II. *Построить треугольник, зная, что одна из его сторон равна данному отрезку, другая сторона относится к первой, как $m:n$, а третья равна полусумме двух первых.*

Задача I относится к основным построениям. Что касается задачи II, то, как видим, её условие усложнено: необходимо определить посредством построений те геометрические образы, которые играют роль данных.

Задачу II можно свести к задаче I, если предварительно определить вторую и третью стороны искомого треугольника, т. е. решить следующие задачи:

а) Найти отрезок, длина которого относится к длине данного отрезка a, как $m:n$.

б) Найти отрезок, равный полусумме двух данных отрезков.

При упрощении условия той или иной задачи следует считать известными те геометрические образы, которые входят в условие как данные и определение которых вытекает из него.

Допустим, что предложена такая задача:

Построить треугольник по углу при вершине (α), основанию (a) и отношению ($m:n$) этого основания к одной из боковых сторон.

В рассматриваемой задаче легко определить неизвестную нам сторону, а потому условие задачи можно упростить следующим образом:

Построить треугольник по углу при вершине (α), основанию (a) и боковой стороне.

После того, как найдём способ решить задачу с упрощённым условием, не представит труда выполнить построение, требуемое в предложенной задаче, имеющей усложнённое условие.

Сущность расчленения предложенной задачи на несколько задач легко уяснить из примера, приведённого ниже.

Сравним следующие две задачи.

I. *Даны четыре отрезка: a, b, c, d; требуется построить из них трапецию, в которой отрезки b и d являются основаниями.*	II. *Даны четыре отрезка: a, b, c, d; требуется построить из них трапецию.*

Условие задачи I вполне ясное и определённое, эта задача имеет одно решение или ни одного.

Условие же задачи II таково, что можно по своему усмотрению любые два из данных отрезков принять за основания трапеции. Значит, эта задача распадается на шесть задач, аналогичных I-й, а именно:

	основания трапеции	боковые стороны
1)	a, b	c, d
2)	a, c	b, d
3)	a, d	b, c
4)	b, c	d, a
5)	b, d	a, c
6)	c, d	a, b

Приведённые примеры отличаются между собой только размером данных в них величин.

Но может случиться, что рассматриваемая геометрическая задача на построение распадается на две или несколько таких задач, которые отличаются одна от другой конфигурацией не только данных, но и искомых.

Рассмотрим следующую задачу:

Описать окружность, касающуюся двух данных окружностей (O, R) и (O_1, r), причём одной из них — в данной точке T.

В условии не указано, какова конфигурация данных окружностей (K_1 и K_2) и какова должна быть конфигурация искомой окружности (K) относительно данных (K_1 и K_2).

Между тем, данные окружности (K_1 и K_2) могут иметь одну из следующих характерных конфигураций:

1) K_1 находится вне K_2;*
2) K_1 и K_2 имеют внешнее касание;
3) K_1 и K_2 имеют внутреннее касание;
4) K_1 и K_2 взаимно пересекаются;
5) Одна из этих окружностей находится внутри другой;
6) K_1 и K_2 концентричны.

---

* и не касаются одна другой.

Кроме того, искомая окружность может:

1) иметь внешнее касание с окружностями K_1 и K_2;

2) иметь внутреннее касание с окружностями K_1 и K_2;

3) иметь внешнее касание с K_1 и внутреннее касание с K_2;

4) иметь внутреннее касание с K_1 и внешнее касание с K_2.

Следовательно, рассматриваемая задача формально распадается на несколько задач.

Поэтому, когда приходится производить анализ такой геометрической задачи на построение, которая явно распадается на несколько задач, аналогичных одна другой, то поступают следующим образом: находят способ решить наиболее характерную из них, а вопрос о решении остальных задач рассматривают в исследовании.

Анализ геометрической задачи на построение состоит из последовательных целесообразно направленных попыток, имеющих целью выяснить, какой из методов является пригодным для выполнения требуемого построения.

Приводим формы попыток, к которым приходится прибегать при анализе геометрической задачи на построение.

1. Пробуют решить рассматриваемую задачу посредством основных построений (§ 6).

2. Выясняют, нельзя ли построить такую часть искомой фигуры, чтобы оказалось возможным построить и всю фигуру (§ 9).

3) Искомую геометрическую точку рассматривают как пересечение таких двух геометрических мест, которые легко могут быть построены (§ 10).

4) Посредством параллельного перенесения отрезка искомой фигуры стараются получить фигуру, конструктивно связанную с искомой (§ 11).

5) Выясняют, нельзя ли построить фигуру, удовлетворяющую всем требованиям условия, кроме одного, чтобы затем путём параллельного перенесения некоторого отрезка получить искомую фигуру (§ 11).

6) Стремятся посредством параллельного перенесения так сблизить некоторые отрезки искомой фигуры, чтобы получилась возможность построить фигуру, конструктивно связанную с искомой (§ 11).

7) Выясняют, нельзя ли построить фигуру, равную искомой, а затем параллельно перенести её так, чтобы она удовлетворяла условию задачи (§ 11).

8) Посредством параллельного перенесения одной из данных фигур пробуют определить точки, дающие возможность выполнить требуемое построение (§ 11).

9) Строят геометрические образы, симметричные данным или искомым, чтобы получить возможность построить искомую фигуру (§ 12).

10) Спрямляют отрезки, чтобы получить фигуру, конструктивно связанную с искомой (§ 13).

11) Строят фигуру, подобную искомой, а затем, сообразно коэффициенту подобия этих фигур, строят искомую фигуру (§ 14).

12) Решают задачу, обратную данной, чтобы найти зависимости, необходимые для построения искомой фигуры (§ 15).

13) Обозначают данные и искомые отрезки буквами, выражают алгебраическими уравнениями зависимость между ними, решают эти уравнения относительно искомого отрезка, затем при помощи формулы полученного решения определяют этот отрезок и, наконец, выполняют требуемое построение (§ 16).

14) Посредством применения тригонометрии составляют уравнение, определяющее такой отрезок или угол, при помощи которого можно выполнить требуемое построение.

15) Стараются к решению данной задачи применить те или другие теоремы, которые выражают имеющиеся зависимости между элементами чертежа.

Все перечисленные формы попыток делаются с единственной целью: найти путь, приводящий к получению требуемого построения.

Поэтому, если одна из них привела к желанной цели, то продолжают эти попытки только в том случае, если хотят найти другой способ решения рассматриваемой задачи.

При проведении анализа задачи необходимо учитывать, что для решения некоторых геометрических задач на построение приходится применять не один, а два-три метода.

В отдельных случаях ученик без помощи учителя может потратить очень много времени на обнаружение тех зависимостей, благодаря которым можно выполнить требуемое построение. В силу этого обстоятельства, а также ввиду необходимости экономить время, отводимое на классные занятия, учитель должен наводящими вопросами помогать ученику в выявлении существующих зависимостей.

Вопросы, предлагаемые учителем, должны лишь направлять внимание учащихся на те зависимости, которые необходимо учесть для осуществления построения. По мере того, как ученики осваиваются с сущностью анализа, число наводящих вопросов должно постепенно уменьшаться

Производя с учениками анализ геометрических задач на построение, учитель должен добиваться того, чтобы ученики сами выискивали способы осуществления требуемого построения, и всячески поощрять сообразительность, находчивость, инициативу, изобретательность учеников.

Если учащийся в самом начале анализа выбирает для решения задачи такой план, который не похож на тот, какой наметил учитель, но способ, указываемый учеником, верен, то следует решить задачу тем способом, который был указан учеником.

Но если учащийся выбирает такой ход рассуждения, относительно которого преподаватель не знает, приведёт ли он к желаемой цели, то, во избежание возможной непроизводительной траты времени, следует соответствующими вопросами навести учащегося на намеченный учителем план рассуждения.

Однако высказанное учащимся соображение надо потом рассмотреть на предмет отыскания нового способа решения.

Если учащийся, стремясь найти путь к открытию возможности построения, предложит вспомогательное построение, несостоятельность которого сразу же обнаружится, то можно позволить ученику выполнить его, чтобы он и класс убедились бы в нерациональности такого построения.

Каждый анализ должен заканчиваться подробным перечислением тех операций, посредством которых выполняется требуемое построение.

Вопрос о количестве решений, какое может иметь данная геометрическая задача на построение при первоначально выбранной конфигурации, относится к исследованию. Но в некоторых случаях уже при выполнении анализа ясно видно, сколько решений имеет данная задача.

Построение.

После того, как ученики подробно перечислят, какие операции необходимо проделать для получения искомого построения, надо, чтобы они аккуратно выполнили это построение.

Такое требование со стороны преподавателя выработает у учащихся привычку доводить начатое до конца, заставит их ещё раз повторить те основные построения, из которых состоит всякая задача такого рода, закрепит в памяти учащихся те элементы находчивости и изобретательности, которые были проявлены при осуществлении данного построения.

Ученики могут сделать требуемое построение на доске от руки или при помощи линейки, циркуля, чертёжного угольника и транспортира. Но надо вменить ученикам в обязанность, чтобы они в тетрадях выполняли построения посредством чертёжных инструментов возможно тщательнее (см. § I, IV).

В тех редких случаях, когда при решении задачи в классе выясняется, что требуемые построения довольно сложны, учитель может предложить ученикам, чтобы они в черновой тетради или на отдельных листках сделали от руки необходимый чертёж, а дома выполнили этот чертёж набело

Доказательство.

I. Надо добиться того, чтобы ученики при решении геометрических задач на построение могли последовательно и с полным пониманием доказывать правильность выполненного построения, делая ссылки на определённые аксиомы, теоремы, следствия и свойства геометрических образов.

По мере того, как у учащихся расширяется круг сведений по геометрии, требования к форме доказательства видоизменяются: обращается внимание на главное, а второстепенное опускается

II В некоторых задачах правильность выполненного построения настолько очевидна, что нет надобности её доказывать. В таких случаях надо указать, что правильность выполненного решения вытекает из самого построения искомой фигуры и подтверждается тем, что найденная фигура удовлетворяет всем требованиям, изложенным в условии задачи.

Исследование.

Исследование является одним из важных моментов решения геометрических задач на построение: оно заставляет учащихся внимательно относиться к условию задачи, вникать в её содержание и выяснять, какие причины обусловливают получение нескольких, двух, одного или ни одного решения. Производя исследование, необходимо отдельные конфигурации рассматривать в их логической последовательности. Исследование задачи значительно упрощается, если имеется под руками наглядное пособие в виде таблицы, на которой изображены все конфигурации величин, являющихся в рассматриваемой задаче данными. Переходя от рассмотрения одной конфигурации к другой, учитель должен всё больше и больше добиваться от учеников проявления самостоятельности, инициативы и изобретательности в выполнении исследования.

Если исследование является сложным, то его результаты необходимо представить в виде соответствующей таблицы, из которой легко было бы усмотреть, при какой конфигурации, сколько и какие решения имеет данная геометрическая задача на построение. Например, если речь идёт о касании окружностей, то надо указать число касаний, имеющихся в решении при данной конфигурации, а также какие из них относятся к внутреннему касанию и какие к внешнему. Решая геометрические задачи на построение, необходимо производить полное исследование, чтобы у учащегося не выработалось привычки поверхностно относиться к поручаемой ему работе.

Прежде чем задавать ученикам на дом геометрические задачи на построение, учитель должен сам решить их и произвести подробное исследование. Это следует сделать хотя бы уже потому, что учителю необходимо подготовить правильные ответы на все вопросы, которые могут возникнуть у учеников при решении заданной им геометрической задачи на построение.

П р и м е р. Допустим, что учитель предложил ученикам решить дома такую задачу: „Построить окружность, которая проходит через две данные точки и касается данной прямой". Обычно эту задачу ученики решают для той конфигурации, при которой обе данные точки лежат по одну сторону данной прямой на различных расстояниях от неё. Но вполне вероятно, что у учащихся возникнут вопросы о решении этой задачи для тех случаев, когда данные две точки лежат: 1) по разные стороны данной прямой, 2) по одну сторону прямой на одинаковом от нее расстоянии, 3) на данной прямой, 4) на прямой, перпендикулярной к данной, 5) когда одна из данных точек лежит на данной прямой, а другая вне этой линии и т. д.

Каждый раз, при исследовании геометрической задачи на построение, учащийся видит, что внимательное и всестороннее рассмотрение даже самого простого вопроса приводит к получению таких логических выводов, которые трудно было предугадать. Поэтому систематическое проведение исследования каждой геометрической задачи на построение, прорабатываемой в классе или предложенной на дом, не только весьма способствует прочному усвоению геометрических сведений учениками и является для них превосходным упражнением в логическом мышлении, но и прививает молодёжи ценную привычку — продуманно рассматривать любой вопрос, выдвигаемый наукой, техникой, искусством или повседневной жизнью.

Исследовать геометрическую задачу на построение — это значит выяснить, при каких значениях данных она имеет или не имеет решений, количество этих решений и характер их.

Независимо от того, какое число данных имеется в условии задачи, исследование геометрической задачи на построение проводится по одному и тому же плану, который состоит в следующем.

После того, как посредством графических операций, выполненных в определенной последовательности, получено решение геометрической задачи на построение, пересматривают эти операции в том же порядке, стараясь выяснить, при каких соотношениях между величинами, данными в условии задачи, каждая из этих операций выполнима, какое число точек, отрезков и т. д. она может давать и в каких случаях оказывается невозможной. Результаты такого исследования отдельных операций построения выражают соответствующими равенствами и неравенствами, обычно содержащими отрезки и углы.

Отрезки, имеющиеся в этих равенствах, иногда заменяют формулами, выражающими длину этих отрезков посредством величин, данных в условии задачи, и получают аналитические зависимости, дающие возможность определить, когда, сколько и какие решения имеет рассматриваемая задача.

Нередко приходится исследование расчленять на две или несколько частей, а затем полученные результаты объединять в один общий вывод.

Если, например, в геометрической задаче на построение одной из данных величин является угол, то целесообразно сначала отдельно исследовать те случаи, когда этот угол острый, прямой и тупой. Если в числе данных имеются окружности, то иногда полезно предварительно выполнить исследование для каждой из возможных конфигураций этих окружностей.

Вообще, если в условии задачи среди данных имеются такие два геометрических образа, которые могут находиться в различных конфигурациях, то надо выяснить, не будет ли целесообразно произвести сначала исследования, относящиеся к каждой из конфигураций этих образов.

Сказанное поясним примером.

Возьмем геометрическую задачу на построение, найдем ее решение и затем покажем, как осуществляется исследование этой задачи.

Задача. *Построить треугольник ABC по боковой стороне $AB = m$, углу $BAC = \alpha$, образуемому ею с основанием, и биссектрисе $BD = s$ угла (B) при вершине.*

Построение (рис. 54). 1) Строим угол $B'AA_0$, равный данному углу α. 2) На луче AB' от точки A откладываем отрезок AB, равный данному отрезку m. 3) Из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку s, проводим дугу, пересекающую луч AA_0 в точках D и D_1. 4) Отрезками прямой соединяем точку B с точками D и D_1. 5) На отрезке BD при точке B строим угол DBC, равный углу ABD, и получаем треугольник ABC. 6) На отрезке BD_1 при точке B строим угол D_1BC_1, равный углу ABD_1, и получаем треугольник ABC_1.

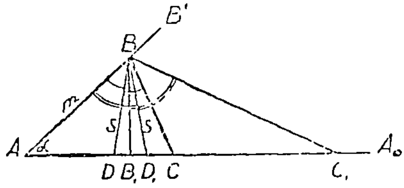


Рис. 54.

Треугольники ABC и ABC_1 — искомые.

Исследование. Рассматривая выполнение построения, видим, что решение задачи начинается построением вспомогательного треугольника ABD, конструктивно связанного с искомым треугольником ABC.

Как известно, в тех случаях, когда невозможно построить такой треугольник, задача не имеет решения.

В рассматриваемой задаче возможность построения вспомогательного треугольника зависит от размера угла α и от относительных размеров отрезков m и s.

Так как одним из данных является угол (α), размер которого не указан, то исследование рассматриваемой задачи на построение расчленим на три части, а именно: сначала примем, что угол α — острый, потом будем считать, что $\alpha = 90°$, и наконец, положим, что угол α — тупой.

$$\text{I. } 0° < \alpha < 90°.$$

Третья операция построения вспомогательного треугольника состоит в том, что из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку s, описываем дугу до пересечения с прямой AA_0.

Тут возможны три случая: проведённая дуга либо не пересечет линию AA_0, либо коснётся линии AA_0, либо пересечет ее в двух точках.

1) Если

$$s < BB_1, \qquad (1)$$

где BB_1 есть перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую AA_0, то указанная дуга не пересекает прямую AA_0, а потому невозможно построить треугольник, конструктивно связанный с искомым треугольником ABC, и, значит, при выполнении неравенства (1) задача не имеет решения.

Чтобы придать неравенству (1) аналитическую форму, выразим длину отрезка BB_1 посредством величин, являющихся данными.

Из прямоугольного треугольника ABB_1 находим, что

$$BB_1 = m \sin \alpha,$$

а потому признак (1), что рассматриваемая задача при $0 < \alpha < 90°$ не имеет решения, можем написать в таком виде:

$$s < m \sin \alpha. \tag{2}$$

2) Если

$$s = BB_1,$$

т. е.

$$s = m \sin \alpha, \tag{3}$$

то прямая AA_0 касается дуги, центр которой в точке B, а радиус равен s.

В этом случае s является по построению высотою, а по условию задачи — биссектрисою угла искомого треугольника. Отсюда следует, что при $0° < \alpha < 90°$ и $s = m \sin \alpha$ задача имеет одно решение, причём искомым является равнобедренный треугольник.

Легко понять, что формула (3) определяет наименьшее значение биссектрисы, при котором задача имеет решение.

3) Если

$$s > BB_1,$$

т. е.

$$s > m \sin \alpha, \tag{4}$$

то дуга, описанная из точки B, как из центра, радиусом, равным s, пересечёт прямую AA_0 в двух точках D и D_1.

Выясним, в каких случаях возможно построить искомые треугольники ABC и ABC_1, биссектрисами которых являются отрезки BD и BD_1.

Как мы видели (3), наименьшая длина биссектрисы (s), при которой задача имеет решение, равна BB_1, т. е. $m \sin \alpha$.

Если, приняв отрезок BB_1 за начальное значение биссектрисы, постепенно увеличивать длину биссектрисы s, то будет увеличиваться и угол ABD_1 вспомогательного треугольника ABD_1.

Всматриваясь в чертёж, приходим к следующему выводу: до тех пор, пока угол ABD_1 остается меньше $90° - \frac{\alpha}{2}$, можно построить искомый треугольник ABC_1, определяемый вспомогательным треугольником ABD_1. Это следует из того, что сторона BC_1 пересечёт прямую AA_0, если $\alpha + \angle ABC_1 < 180°$ и, следовательно, $\angle ABC_1 < 180° - \alpha$, а $\angle ABD_1 < 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Но когда $\angle ABD_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$,

то

$$\angle ABC_1 = 180° - \alpha,$$

т. е.

$$\angle \alpha + \angle ABC_1 = 180^\circ,$$

откуда вытекает, что

$$BC_1 \parallel AA_0 \tag{5}$$

и, следовательно, нет искомого треугольника ABC_1, определяемого вспомогательным треугольником ABD_1.

Далее, так как по построению

$$\angle ABD_1 = \angle D_1BC_1,$$

а из (5) вытекает, что

$$\angle D_1BC_1 = \angle BD_1A,$$

то

$$\angle ABD_1 = \angle BD_1A$$

и, следовательно, треугольник ABD_1 — равнобедренный.

Опустив из точки A перпендикуляр AA_1 на отрезок BD_1, получим

$$BA_1 = A_1D_1$$

или

$$s = BD_1 = BA_1 + A_1D_1,$$

и, значит,

$$s = 2 \cdot BA_1. \tag{6}$$

Но в треугольнике ABA_1

$$BA_1 = AB \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = m \sin\frac{\alpha}{2},$$

а потому равенство (6) принимает такой вид:

$$s = 2m \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Итак, если величины α, m, s связаны равенством (7), то невозможно построить треугольник ABC_1. Легко понять, что не получим треугольника ABC_1 и в том случае, когда

$$s > 2m \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Если же

$$s < 2m \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{9}$$

причём (4)

$$s > m \sin\alpha, \tag{10}$$

то можно построить треугольник ABC_1.

Что касается построения треугольника ABC, то легко убедиться в том, что оно осуществимо тогда, когда

$$s = 2m \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{11}$$

если только

$$m > s > m \sin\alpha. \tag{12}$$

Таким образом, искомый треугольник ABC можно построить, если

$$m > s > m \sin \alpha$$

и в то же время

$$s \leqslant 2m \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

II. $\alpha = 90°$.

Задача приводится к построению прямоугольного треугольника по катету и биссектрисе прилежащего угла. Для построения искомого треугольника сначала можем построить вспомогательный треугольник ABD, в котором AB, равное m, является катетом, а BD, равное s, — гипотенузой.

Построение. Из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку s, описываем дугу до пересечения с лучом AA_0.

При $s < m$ описанная дуга не пересечёт луч AA_0.

При $s = m$ луч AA_0 будет касаться окружности K в точке A.

Из сказанного вытекает, что при $\alpha = 90°$ задача не имеет решения, если

$$s \leqslant m. \tag{14}$$

При $s > m$ указанная дуга всегда пересекает луч AA_0 в одной точке (D_1), однако не всякому вспомогательному треугольнику ABD_1 будет соответствовать искомый треугольник. Действительно, когда биссектриса s образует со стороною AB угол, равный 45°, то ясно, что в этом случае

$$s = \frac{m}{\cos 45°} = m\sqrt{2},$$

т. е.

$$s = m\sqrt{2},$$

и задача не имеет решения, так как BC_1 будет параллельна AA_0.

Отсюда вытекает, что при $\alpha = 90°$ и $s \geqslant m\sqrt{2}$ задача также не имеет решения.

Вывод: при $\alpha = 90°$ и $m < s < m\sqrt{2}$ задача имеет решение и притом только одно.

В остальных случаях (при $\alpha = 90°$) задача не имеет решения.

III. $90° < \alpha < 180°$.

Ясно, что при $s \leqslant m$ задача не имеет решения.

Далее, рассуждениями, аналогичными предыдущим, убеждаемся в том, что задача (при $90° < \alpha < 180°$) имеет решение и притом только одно, если

$$m < s < 2m \sin\frac{\alpha}{2}.$$

В остальных случаях (при $90° < \alpha < 180°$) задача не имеет решения.

II. РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В КЛАССЕ.

§ 21. ПИСЬМЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

При первом знакомстве с геометрическими задачами на построение ученики испытывают большие затруднения в их решении.

Поэтому учитель математики должен применить эвристический метод преподавания: целесообразно поставленными вопросами побуждать ученика думать целеустремлённо, так направлять его мысль, чтобы он, в конце концов, сообразил, как надо выполнить требуемое построение. Но по мере того, как ученик всё более и более приобретает навык в решении геометрических задач на построение, следует ослаблять применение эвристического метода при решении задач такого рода, а давать ученику возможность самостоятельно находить способы их решения.

Надо стремиться к тому, чтобы каждая последующая геометрическая задача на построение, предлагаемая ученику, была бы немного труднее, немного сложнее предыдущей, а, следовательно, заставляла бы ученика думать, искать способ, который привёл бы к требуемому построению.

Приведём образцы решения геометрических задач на построение в классе.

Задача. *Построить равнобедренный треугольник по углу* (α) *при основании и высоте* (h), *опущенной на боковую сторону.*

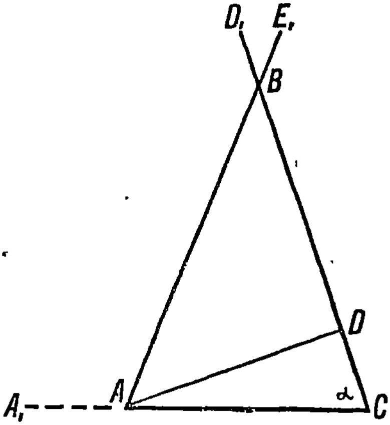


Рис. 55.

К доске вызывается ученик, который вычерчивает данные элементы условия задачи: h и α. Затем учитель выясняет с учащимися, что в зависимости от величины данного угла при основании равнобедренные треугольники встречаются в трёх видах: остроугольные, тупоугольные и прямоугольные.

Анализ. Исходя из предположения, что задача решена, вызванный ученик делает набросок чертежа (остроугольного) равнобедренного треугольника и опускает в нём высоту на боковую сторону (рис. 55).

После этого ставятся вопросы учащимся:

— Можно ли по данным элементам непосредственно построить равнобедренный треугольник?

— Этого сделать нельзя, так как, построив данный угол α, мы не сможем отложить величину сторон треугольника, о которых в условии ничего не сказано.

— А можно ли построить одну из частей равнобедренного треугольника, отсекаемую данной высотой? Что представляют эти части?

— Данная высота разбивает искомый равнобедренный треугольник на два прямоугольных: $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$.

— В какой из этих треугольников входят оба данных в условии элемента?

— В треугольник ACD.

— Чем являются для треугольника ACD данные h и α?

— Катетом и противолежащим ему острым углом.

— Можно ли построить прямоугольный треугольник, зная катет и противолежащий острый угол?

— Можно.

— Как это сделать?

— Построим сначала угол, равный данному углу α. Зная, что вершина A удалена от стороны CD на отрезок, равный h, построим прямую, параллельную этой стороне и отстоящую от неё на расстоянии h Эта прямая пересечёт другую сторону угла в точке A. Из точки A опустим на первую сторону перпендикуляр AD. Получим треугольник ACD, составляющий часть искомого.

— После построения треугольника ACD, какие ещё элементы искомого равнобедренного треугольника мы получим?

— Построив $\triangle ACD$, мы получим ещё основание искомого треугольника, а вместе с ним и вторую вершину (A) этого треугольника.

— Нам известны две вершины треугольника. Что остаётся определить для того, чтобы построить искомый треугольник?

— Надо найти его третью вершину (B).

— Что нужно принять во внимание, чтобы построить третью вершину (B) искомого равнобедренного треугольника?

— Надо учесть, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

— Значит, к какой же задаче теперь приводится рассматриваемая нами задача?

— Теперь задача сводится к построению искомого треугольника по стороне (AC) и двум прилежащим углам, порознь равным углу C (α).

Построение.

— Как же построить искомый равнобедренный треугольник?

— Строим сначала угол A_1CD_1, равный данному углу α. Затем проводим прямую, которая параллельна стороне CD_1, отстоит от неё на расстоянии h и пересекает другую сторону угла A_1CD_1 в некоторой точке A. Из точки A опускаем на сторону CD_1 перпендикуляр AD.

— Мы выяснили, как построить вспомогательный $\triangle ACD$. Как же построить искомый $\triangle ABC$?

— Достаточно на стороне AC, при точке A, построить угол CAE_1, равный углу α. Сторона (AE_1) этого угла и продолжение отрезка CD пересекутся в точке B, которая будет вершиной искомого равнобедренного $\triangle ABC$.

Доказательство.

— Проверим теперь, действительно ли $\triangle ABC$ является искомым равнобедренным треугольником. Что в условии задачи сказано об этом треугольнике?

— В условии задачи сказано, что искомый треугольник равнобедренный, что в нём угол при основании равен α и что высота, опущенная на боковую сторону, равна h.

— Удовлетворяет ли найденный нами $\triangle ABC$ этим требованиям?

— Да.

— Почему $\triangle ABC$ равнобедренный?

— Потому что в нём углы при основании AC равны по построению.

— Почему в $\triangle ABC$ высота, опущенная на боковую сторону, равна h?

— По построению отрезок AD есть перпендикуляр между двумя параллельными прямыми, отстоящими одна от другой на расстоянии h.

— Почему мы называем треугольник ABC искомым?

— Мы называем $\triangle ABC$ искомым, так как он удовлетворяет всем требованиям условия задачи.

Исследование.

— Можно ли построить искомый равнобедренный $\triangle ABC$ в том случае, если $\angle \alpha$ тупой или прямой?

— Нет, потому что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны и двух тупых или прямых углов в треугольнике не может быть.

— Значит, каким требованиям должна удовлетворять величина угла α, чтобы можно было построить искомый $\triangle ABC$?

— Угол α должен быть острым, т. е.

$$0 < \alpha < 90°.$$

— При всяком ли значении данного отрезка можно построить искомый треугольник ABC?

— Чтобы можно было выполнить построение искомого $\triangle ABC$, отрезок должен быть конечной величиной, не равной нулю.

В заключение следует указать учащимся, что аналогичные построения можно осуществить, анализируя набросок чертежа тупоугольного равнобедренного треугольника, который получится при $\alpha < 45°$.

Задача. *Построить треугольник, если даны его углы, прилежащие к основанию (α и β) и длина (s) биссектрисы угла, противолежащего основанию.*

Решение этой задачи можно проводить в следующей вопросно-ответной форме.

Анализ (рис. 56).

— Сколько можно построить треугольников по двум данным углам при основании?

— Бесчисленное множество.

— Какие это будут треугольники?

— Эти треугольники будут подобными.

— Что общего у подобных треугольников?

— Они имеют одинаковую форму и углы одного соответственно равны углам другого.

— Чем отличаются эти треугольники один от другого?

— Эти подобные треугольники отличаются один от другого размерами, сходственные стороны у них не одинаковы.

— Что в рассматриваемой нами задаче определяет размеры искомого треугольника?

— Размеры искомого треугольника определяет длина (s) биссектрисы угла, противолежащего основанию.

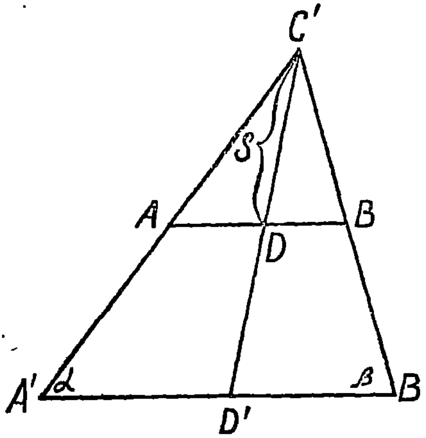


Рис. 56.

— Можно ли из этого множества подобных треугольников выбрать (построить) треугольник, имеющий биссектрису данной длины?

— Можно.

— Как это сделать? С чего начнём построение?

— По двум данным углам сначала построим вспомогательный треугольник произвольного размера, подобный искомому; проведём в нём биссектрису угла, противолежащего основанию; на ней отложим от вершины отрезок s и через его конец (не являющийся вершиной угла) проведём прямую, параллельную основанию.

— Как в рассматриваемой задаче можно построить вспомогательный треугольник, подобный данному?

— Надо взять произвольной длины отрезок $A'B'$, на нём при точках A' и B' построить углы, порознь равные данным углам α и β, и продолжить стороны этих углов до пересечения в некоторой точке C'.

— Что надо сделать для установления зависимости между размерами вспомогательного треугольника $A'B'C'$ и искомого треугольника?

— Надо во вспомогательном треугольнике построить биссектрису угла, противолежащего основанию $A'B'$.

— Зачем надо строить эту биссектрису?

— Она является сходственной с биссектрисой данного треугольника.

— А что собою представляет отношение этих биссектрис?

— Коэффициент подобия.

— Как же теперь построить искомый треугольник?

— Надо точку C' вспомогательного треугольника, принять за центр подобия.

— Потом?

— На отрезке $C'D'$ (или на его продолжении) от точки C' отложить отрезок $C'D$, равный данному отрезку s.

— Затем?

— Через точку D провести прямую, параллельную стороне $A'B'$. Эта линия пересечёт стороны $A'C'$ и $B'C'$ (или их продолжения) соответственно в некоторых точках A и B.

— Что получим?

— Искомый треугольник ABC'.

Построение

— Перечислите операции, которые приводят к получению искомого треугольника.

— 1) Строим произвольной длины отрезок $A'B'$.

2) На отрезке $A'B'$ при точках A' и B' строим соответственно углы α и β и продолжаем их стороны до пересечения в некоторой точке C'.

3) Проводим внутри треугольника $A'B'C'$ биссектрису $C'D'$ угла C'.

4) На отрезке $C'D'$ от точки C' откладываем отрезок $C'D$, равный отрезку s.

5) Через точку D проводим прямую параллельно основанию $A'B'$. Эта линия пересечёт стороны $C'A'$ и $C'B'$ (или их продолжения) в некоторых точках A и B. Треугольник ABC' — искомый.

Доказательство.

— Как доказать, что полученный треугольник ABC' является искомым?

— Биссектриса $C'D$ равна данному отрезку s по построению; $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$, как соответственные при параллельных прямых AB и $A'B'$ и секущих $A'C'$ и $B'C'$, а так как $\angle A' = \alpha$ и $\angle B' = \beta$ по построению, то $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

Итак, построенный треугольник ABC' удовлетворяет всем требованиям условия задачи и поэтому является искомым.

Исследование.

— При любых ли значениях углов α и β и биссектрисы s можно построить искомый треугольник?

— Задача имеет решение, если сумма углов α и β меньше двух прямых углов.

— А биссектриса?

— Биссектриса может иметь какую угодно длину.

Задача. *Построить прямоугольный треугольник, в котором один катет вдвое больше другого, а биссектриса меньшего из острых углов равна данному отрезку m.*

Анализ.

— Сколько можем построить прямоугольных треугольников, в которых один катет вдвое больше другого?

— Сколько угодно.

— Идите, N, к доске и начертите от руки прямоугольный треугольник, в котором один катет вдвое больше другого. Обозначьте вершины этого треугольника и проведите в нём биссектрису меньшего из острых углов.

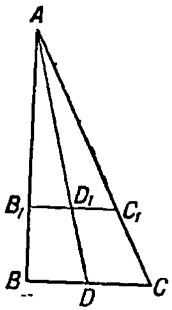


Рис. 57.

Ученик чертит на доске треугольник ABC и проводит биссектрису AD (рис. 57).

— Какая связь между этим треугольником (ABC) и искомым?

— Оба эти треугольники подобны, потому что в каждом из них отношение катетов равно 2:1.

— Как надо провести в треугольнике ABC прямую линию, чтобы она отсекала от него треугольник, подобный искомому?

— Для этого достаточно провести в треугольнике ABC прямую, параллельную одной из его сторон.

— На произвольном ли расстоянии от точки A надо в треугольнике ABC провести прямую, параллельную стороне BC, чтобы она отсекала от него треугольник не только подобный искомому треугольнику, но и равный ему?

— Прямую надо провести так, чтобы она была параллельна стороне BC и в то же время в отсекаемом треугольнике биссектриса угла оказалась бы равной отрезку m.

— Как же выполнить это построение?

— Надо на биссектрисе AD от точки A отложить отрезок AD_1, равный m, а затем через точку D_1 провести прямую, параллельную стороне BC. Проведённая линия пересечёт продолжение сторон AB и AC в таких точках B_1 и C_1, что $\triangle AB_1C_1$ будет искомым.

Построение.

— Итак, какие операции надо выполнить для построения искомого треугольника?

Ученики перечисляют:

— 1) Надо построить прямой угол. — 2) На сторонах этого угла от вершины B отложить такие катеты (AB и BC), чтобы один из них был вдвое больше другого. — 3) Соединив отрезком точки A и C, получим треугольник ABC, подобный искомому. — 4) Делим угол BAC пополам и получаем биссектрису AD. — 5) На биссектрисе AD от точки A откладываем отрезок AD_1, равный отрезку m. — 6) Через точку D_1 проводим прямую, параллельную стороне BC. Она пересечёт стороны AB и AC (или их продолжения) в точках B_1 и C_1. Треугольник AB_1C_1 — искомый.

— Выполните это построение.

Ученики строят искомый треугольник.

Доказательство.

— Почему $\triangle AB_1C_1$ является искомым?

— Потому что он удовлетворяет условию задачи. В самом деле, по построению $B_1C_1 \parallel BC$, а потому $\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle ABC$, и, значит, в нём один катет вдвое больше другого. Кроме того, по построению биссектриса меньшего из углов $\triangle AB_1C_1$ равна данному отрезку m.

Исследование.

— Всегда ли возможно построить тот искомый треугольник, о котором идёт речь в условии рассматриваемой нами задачи?

— Всегда, если только m представляет собою отрезок конечных размеров.

§ 22. УСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

Устное решение геометрических задач на построение является весьма полезным упражнением, так как побуждает учащихся мысленно сделать чертёж и мысленно пополнять его необходимыми вспомогательными построениями, направленными к решению предложенных задач. Однако, такого рода упражнения лишь в том случае принесут пользу, если они будут хорошо подобраны как со стороны их увязки с проработанным материалом, так и со стороны их посильности. В круг упражнений этого рода могут входить и те геометрические задачи на построение, которые учащимися уже были решены в письменной форме. Приведём примеры устного решения геометрических задач на построение.

В тех случаях, когда имеется в виду предложить учащимся ряд упражнений, касающихся построения одной и той же фигуры, можно для сокращения записи условия задачи сделать на доске чертёж этой фигуры. Например, желая решить с учащимися несколько устных геометрических задач на построение треугольника, учитель чертит на доске разносторонний треугольник, обозначает только его вершины A, B, C и затем предлагает классу следующие вопросы:

Как построить $\triangle ABC$, если даны:

1) AC, $\angle A$ и $\angle C$?
2) $\angle A$, AB и AC?
3) $\angle A$, AC и высота, опущенная на сторону AC?
4) $\angle A$, AC и медиана, проведённая из точки B?
5) AB, BC и высота, опущенная на сторону AC?
6) BC, медиана и высота, проведённые из точки B, и т. п.

Если число решений задачи зависит от конфигурации данных величин, то следует разбить эту задачу на столько отдельных задач, сколько имеется возможных характерных конфигураций. Допустим, что ученикам предложена для устного решения такая задача:

„Построить окружность, которая касалась бы данной окружности и данной прямой KL в данной на ней точке P“.

Конфигурации величин, которые в условии этой задачи являются данными, были нами рассмотрены в § 1 и изображены на рисунке 8. Заранее заготовив те 12 чертежей, на которых изображены эти конфигурации, учитель вывешивает на доске один из них и спрашивает учеников, сколько решений имеет рассматриваемая задача при той конфигурации данных величин, которая представлена на этом чертеже.

Добившись от учеников правильного ответа, учитель предлагает сделать на доске соответствующий пояснительный чертёж. Аналогичным образом рассматриваются и остальные 11 чертежей.

Примечание. Полезно заранее заготовить необходимые чертежи, так как это даст возможность наглядно сопоставить различные конфигурации геометрических образов, данных в условии задачи, и сделать соответствующие обобщения относительно числа решений.

Результаты устного решения в классе геометрических задач на построение следует сделать предметом домашнего задания. Например, для задач, подобных той, которая изложена выше, домашнее задание может иметь следующую форму:

„Написать условие разобранной нами задачи и под ним поместить табличку, в которой было бы отражено, сколько эта задача имеет решений при каждой из рассмотренных нами конфигураций".

Причём, табличку к такому заданию рекомендуется сделать следующего вида (рис. 58):

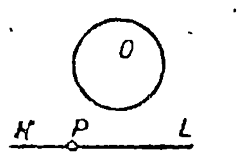
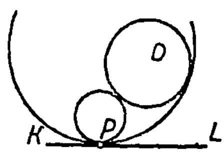
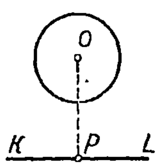
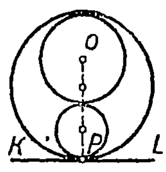
№№ п/п	Рассматриваемая конфигурация геометрических образов	Число решений	Пояснительный чертёж
1		2	
2		2	

Рис. 58.

III. СИСТЕМА ДОМАШНИХ УПРАЖНЕНИЙ.

Обстоятельное решение более или менее сложной геометрической задачи на построение требует много времени. Между тем на уроки геометрии в средней школе отводится сравнительно мало часов.

В силу этих причин, преподаватель математики решает в классе с учениками весьма ограниченное число задач на построение, а остальные упражнения этого рода предлагает ученикам в порядке домашней работы, причём, если есть в том необходимость, даёт соответствующие пояснения и указания. Кроме задач, помещённых во второй части этой книги, можно предлагать ученикам разнообразные упражнения, относящиеся к геометрическим задачам на построение.

Ниже приводим различные виды этих упражнений, которые не являются обязательными Каждый учитель математики, сообразуясь с конкретными условиями своей работы в классе, может предлагать учащимся лишь те упражнения, которые он находит наиболее целесообразными, и в том количестве, какое определяется бюджетом времени ученика.

Но прежде всего сделаем несколько замечаний об оформлении домашних работ, имеющем большое образовательное и воспитательное значение в школе.

§ 23. ОФОРМЛЕНИЕ ДОМАШНИХ РАБОТ.

Письменная работа ученика, представляющая собою решение геометрической задачи на построение, должна содержать следующие части: 1) условие задачи, 2) пояснительный чертёж, 3) анализ задачи, 4) построение, 5) доказательство, 6) исследование.

Условие задачи.

В условии задачи ученик обязательно должен указывать те обозначения, которые он намерен применить в пояснительном чертеже.

Допустим, что ученику предложено дома решить такую задачу: „Построить окружность, которая проходит через две данные точки и касается данной прямой".

При выполнении этого упражнения ученик должен записать условие этой задачи так: „Построить окружность, которая проходит через две данные точки (A и B) и касается данной прямой (KL)".

В геометрической задаче на построение иногда следует уточнять данные. Например, учитель намерен предложить ученикам такую письменую домашнюю работу: „Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведённой к основанию". Этой задаче учитель может придать следующую форму: „Построить треугольник по основанию (a), углу при вершине (α) и медиане (m), проведённой к основанию, при $a = 7$ *см*, $\alpha = 60°$, $m = 4$ *см*". Такая форма условия задачи облегчает учителю проверку письменных работ и, в случае надобности, даёт возможность предложить ученикам эту же задачу, но при других численных значениях данных (например, при $a = 8$ *см*, $\alpha = 45°$, $m = 5$ *см*)

Анализ.

Некоторые геометрические задачи на построение настолько просты по содержанию, что ученик сразу видит, при помощи каких операций можно решить задачу. Однако и в этом случае ученик всё же должен указать, на чём основано данное решение.

Но в задачах на построение отрезков, соответствующих данным алгебраическим формулам, и в простейших задачах на превращение данных фигур в равновеликие ученик может не писать анализа, а сразу приступать к построению.

Пояснительный чертёж.

Необходимо, чтобы пояснительный чертёж вполне соответствовал содержанию задачи и её решению, причём в нём не должно быть лишних линий и букв.

Надо требовать, чтобы пояснительный чертёж, относящийся к геометрической задаче на построение, аккуратно выполнялся карандашом при помощи линейки, чертёжного угольника, циркуля и транспортира.

Отдельные линии чертежа могут быть различной толщины, смотря по тому, являются ли они вспомогательными или выражают данные или искомые геометрические линии, но каждая из них должна быть на всём своём протяжении единообразна: если она сплошная, то одинаковой толщины, а если штриховая, то она от начала до конца должна состоять из приблизительно одинаково густо расставленных чёрточек.

Для того чтобы при одном взгляде на чертёж было видно, какие геометрические образы даны, какие относятся к вспомогательным построениям и какая фигура является искомой, можно разрешить ученикам выполнять пояснительный чертёж цветными карандашами. От тех учеников, которые пожелают воспользоваться этим разрешением, следует требовать, чтобы они выполняли построение так, как это принято в чертёжной практике: данные изображать тонкой сплошной синей линией, вспомогательные линии — штрихами красного цвета, искомую фигуру — жирными сплошными чёрными линиями. Пояснительные чертежи должны быть приблизительно такого же размера, как и те, что даны в стабильном учебнике геометрии.

Пояснительный чертёж должен помещаться непосредственно после условия задачи, в левой половине страницы, а на правой половине рядом с чертежом пишутся пояснения, относящиеся к решению.

Построение.

Под этим заголовком ученик последовательно п
рации, которые приводят к решению задачи. Пояснительный чертёж должен представлять собою результаты этих операций.

Для большей ясности изложения ученик может некоторые из этих операций сопровождать особыми пояснительными чертежами. Например, решая задачу, в которой требуется семиугольник превратить в равновеликий квадрат, ученик может поступить следующим образом: дать чертёж, поясняющий превращение семиугольника в равновеликий пятиугольник, а затем начертить отдельно полученный пятиугольник и превратить его в равновеликий квадрат.

Доказательство.

I. Если правильность выполненного построения очевидна, то можно разрешить ученикам не доказывать её. В этом случае преподаватель говорит ученикам, что предложенную задачу они должны решить, опуская доказательство, но излагая анализ, построение и исследование.

II. В домашнем задании доказательство правильности геометрического построения должно быть выполнено в возможно лаконичной форме.

Примеры:

1) $AB=\sqrt{BC^2-CA^2}$ (по теореме Пифагора).
2) $KM=MN$ (т. к. OM—биссектриса).
3) $\angle POK=\angle QOS$ (как вертикальные углы).
4) $AB=BC$ (по построению).
5) $OC=OD=OE$, как радиусы одной окружности и т. п.

Исследование.

В тех случаях, когда полное исследование геометрической задачи на построение является довольно сложным, необходимо точно указывать для какого частного случая ученики должны произвести исследование предложенной им задачи.

Например, предложив ученикам построить трапецию по её сторонам a, b, c, d, можно обусловить, что исследование должно быть произведено для следующих значений сторон трапеции: $a=13$ *см*, $b=14$ *см*, $c=15$ *см* и $d=31$ *см*.

Результаты выполненного исследования ученик должен представить в виде таблички с соответствующими пояснительными чертежами.

Если такая табличка должна содержать много пояснительных чертежей, то в некоторых случаях целесообразно расчленить исследование на несколько частных исследований и выполнение каждого из них поручить отдельным ученикам (или группам учеников); затем из наиболее аккуратно изготовленных табличек составляется одна стенная таблица, представляющая собою полное исследование.

§ 24. ВИДЫ ДОМАШНИХ УПРАЖНЕНИЙ.

I. Простейшие графические построения.

В стабильном учебнике основные задачи на построение излагаются после того, как ученики пройдут смежные и вертикальные углы, свойство сторон треугольников, признаки равенства треугольников, ознакомятся с некоторыми геометрическими местами точек.

Между тем ученики с первых же дней знакомства с геометрией должны выполнять некоторые простейшие построения, чтобы в дальнейшем при решении геометрических задач на построение не встречать затруднений в выполнении графической стороны таких упражнений.

Ниже приводим примеры таких упражнений. Последние предлагаются ученикам до ознакомления с основными построениями и имеют целью не только закрепить приобретаемые ими сведения по геометрии, но и привить учащимся навыки в выполнении графических операций. Поэтому при решении таких упражнений учащимся разрешается пользоваться не только циркулем и линейкой, но также транспортиром и чертёжным угольником.

1. Даны на плоскости пять точек: A, B, C, D, E, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Построить отрезки, соединяющие каждую пару этих точек.

2. Даны на плоскости шесть точек: A, B, C, D, E, F. Провести из точки C лучи, проходящие через остальные пять точек.

3. Даны на плоскости четыре точки: A, B, C и D. Соединить их попарно прямолинейными отрезками, сравнить их длину и расположить эти отрезки в порядке убывания (напр. $AC > BC > AB$).

4. Построить отрезок, равный сумме двух данных отрезков KL и MN.

5. Даны на плоскости три точки: A, B и C, не лежащие на одной прямой. Требуется построить отрезок, равный сумме отрезков AB, BC и CA.

6. Построить отрезок, равный разности двух данных отрезков KL и MN.

7. Даны четыре точки: K, L, M, N. Требуется построить следующие алгебраические суммы отрезков:

$$1)\ KL+LM+MN-KM,$$
$$2)\ KM+MN-KN+KL,$$
$$3)\ LM+LN-MN+KN.$$

8. Даны пять точек: A, B, C, D, E, не лежащие на одной прямой. Эти точки последовательно соединены прямолинейными отрезками AB, BC, CD и т. д. и, кроме того, проведён отрезок AE.

Определить, на сколько сумма отрезков $AB+BC+CD+DE$ больше отрезка AE.

9. Начертить отрезок, который больше данного отрезка MN в 2, 3, 4 и т. д. раз.

10. Даны три точки: P, Q и T.

Построить отрезок, равный следующей алгебраической сумме отрезков:

$$2PQ+3QT-2PT.$$

11. Даны четыре точки: A, B, C, D, не лежащие на одной прямой. Построить отрезки:

1) $3AB+BC-CA$,
2) $2AC+4BC+5AB-3AD$,
3) $4BD-2AC+3BC+6AB$.

12. От произвольно взятой точки данной окружности последовательно отложить шесть хорд так, чтобы их концы лежали на окружности.

13. Даны три точки: A, B и C. Построить следующие окружности:

1) Центр в точке A; радиус равен $AB+AC-BC$,
2) „ „ „ B; „ „ $BC+AB-AC$,
3) „ „ „ C; „ „ $AC+BC-AB$.

14. Построить окружность и на ней отметить (по движению часовой стрелки) семь точек: A, B, C, D, E, F, G.

Сравнить величины дуг: AB, BC, CD, DE, EF и т. д. и написать их в возрастающем порядке:

(Напр. $\smile AB < \smile CD < \smile BC < \ldots$ и т. д.)

15. Дана окружность и на ней три дуги: AB, CD и EF. На той же окружности или на равной ей построить дугу, равную сумме данных дуг.

16. Дана окружность и на ней две дуги: AB и CD.

Построить дугу того же радиуса, равную разности этих дуг.

17. На данной окружности отмечено последовательно пять точек: A, B, C, D и E. Построить окружность, равную данной, и на ней от произвольно выбранной точки (P) отложить (по направлению движения часовой стрелки) следующие алгебраические суммы дуг:

1) $AB+CD+DE$, 3) $AC-BC+CE$,
2) $BC+CD-DE$, 4) $BE+AB+BC-AC$.

18. Дана окружность и на ней точки: A, B, C, D, E и F. Начертив тем же радиусом другую окружность и отметив на ней произвольную точку P, отложить от неё (по направлению движения часовой стрелки) на окружности следующие дуги:

1) дугу, которая втрое больше дуги CD;
2) дугу, которая впятеро больше дуги AB;
3) $4\smile BC$,
4) $2\smile BD$,
5) $3\smile EF$.

19. Дана окружность радиуса $R=6$ *см* и на ней 8 точек: A, B, C, D, E, F, G, H. Построить окружность, равную данной, отметить на ней произвольную точку P и от неё на окружности (против движения часовой стрелки) отложить следующие алгебраические суммы дуг:

1) $AB+2BC$,
2) $4BE+ED-2FG$,
3) $3AC-2BC+DE+5BC-4GH$.

20. Начертить шесть совершенно произвольных углов: AOB, ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$. Посредством транспортира сравнить величины этих углов и выписать углы в порядке убывания их величины:

(Напр. $\angle ABC > \angle A_2B_2C_2 > \angle A_1B_1C_1 > \ldots$ и т. д.

21. Даны углы: ABC, KLM, PQS. Определить углы α, β и γ, зная, что

$$\alpha = \angle ABC + \angle KLM + \angle PQS,$$
$$\beta = \angle KLM + \angle PQS - \angle ABC,$$
$$\gamma = \angle PQS + \angle ABC - \angle KLM.$$

22. На данной прямой KL, при лежащей на ней точке O, построить угол, равный данному углу PQS.

23. Даны два угла: ABC и KLM. Построить угол, равный их сумме.

24. Дан угол AOB и требуется построить угол, втрое больший.

25. Построить угол, равный разности двух данных углов ABC и KLM.

26. Даны углы ABC и DEF. Построить сектор, угол которого равен сумме данных углов, а радиус равен FM.

27. Дан круг и в нём два сектора. Построить круговой сектор того же радиуса, равный сумме данных секторов.

28. Даны два круговых сектора одного и того же радиуса ($R = 4$ *см*); построить сектор того же радиуса, равный разности этих секторов.

29. Даны три угла α, β, γ и отрезок AB. Требуется в круге, радиус которого равен AB, построить два сегмента: первый сегмент должен иметь дугу, соответствующую центральному углу, равному $\alpha + \beta$, второй же сегмент должен иметь дугу, соответствующую разности углов β и γ.

30. Посредством транспортира разделить пополам следующие данные углы: 1) тупой угол ABC и 2) острый угол KLM.

31. Дана окружность, её центр и пять точек на ней: A, B, C, D и E.

Соединив эти точки с центром O, построить отдельно углы, смежные следующим углам: 1) AOC, 2) COD, 3) BOD, 4) BOC, 5) COE.

32. Даны два смежных угла: AOB и BOC. Построить биссектрисы этих углов и определить угол, образуемый этими биссектрисами.

33. На произвольной прямой AB взята произвольная точка O и из неё проведён луч OC. Построить угол, равный разности полученных смежных углов AOC и COB.

34. Дана прямая AB и на ней точки: C, D, E и F.

Требуется посредством чертёжного угольника восставить в точках C, D, E и F перпендикуляры к прямой AB.

35. Дана прямая AB и вне её точки: K, L, M и N.

Посредством чертёжного треугольника опустить из этих точек перпендикуляры на данную прямую AB.

36. Даны две пересекающиеся прямые KL и MN и пять точек: A, B, C, D, E, не лежащие на этих прямых. Определить

(с точностью до 1 *мм*), на каком расстоянии отстоит каждая из этих точек от данных прямых.

37. Даны две прямые AB и CD, пересекающиеся в точке O. Определить, на сколько градусов сумма одной пары вертикальных углов больше суммы другой.

38. Дана ломаная линия $ABCDEFGH$. Определить, на сколько её длина больше отрезка, соединяющего её концы.

39. Начертить произвольной формы выпуклый многоугольник и построить отрезок, равный периметру этой фигуры.

40. Начертить произвольной формы выпуклый четырёхугольник и определить отрезок, представляющий собою разность между периметром этой фигуры и суммой её диагоналей.

41. Построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны данным отрезкам AB и CD.

42. Дан треугольник ABC. Построить его высоты и биссектрисы углов.

43. Дан треугольник ABC и требуется построить три отрезка, из которых первый равнялся бы сумме его биссектрис, второй — сумме его медиан и третий — сумме его высот.

44. Дана прямая AB и по одну сторону её четыре точки: C, D, E и F. Посредством чертёжного угольника построить точки, симметричные точкам C, D, E, F относительно прямой AB.

45. Построить равнобедренный треугольник, основание которого равно 6 *см*, а углы при основании равны по 55°.

46. Построить треугольник, две стороны которого равны соответственно 7 *см* и 9 *см*, а угол, заключённый между ними, равен 50°.

47. Построить треугольник по данной стороне $AB = 8$ *см* и двум прилежащим углам, из которых один 48°, а другой 72°.

48. В данном треугольнике ABC требуется построить биссектрисы его внешних углов.

49. Дан треугольник ABC. Требуется найти отрезки, которые показывали бы, на сколько каждые две (вместе взятые) стороны этого треугольника больше третьей.

50. Из данной точки P, находящейся вне данной прямой AB, опущен на эту прямую перпендикуляр PP' и проведено четыре наклонных: PC, PD, PE и PF. Определить отрезки, показывающие, на сколько каждая из этих наклонных длиннее перпендикуляра PP'.

Приводим образец выполнения учениками одного из таких упражнений.

Между двумя данными точками A и B проведён прямолинейный отрезок AB и ломаная линия $ACDEFB$, состоящая из пяти звеньев. Определить, на сколько эта ломаная линия длиннее отрезка AB.

Решение (рис. 59). Берём шесть точек: A, B, C, D, E, F.

Точку A соединяем прямолинейным отрезком с точкой B.

Точки A, C, D, E, F и B соединяем последовательно.

Чертим произвольную прямую и отмечаем на ней точку O (рис. 60). От точки O в одном и том же направлении откладываем последовательно отрезки OC_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1 и F_1B_1, соответственно равные отрезкам AC, CD, DE, EF и FB. Можно написать, что

$$OB_1 = OC_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1F_1 + F_1B_1,$$
$$\text{т. е. } OB_1 = AC + CD + DE + EF + FB.$$

На отрезке OB_1, от точки O, отложим отрезок OH, равный отрезку AB. Отрезок HB_1 есть разность между длиной ломаной линии $ACDEFB$ и отрезком AB.

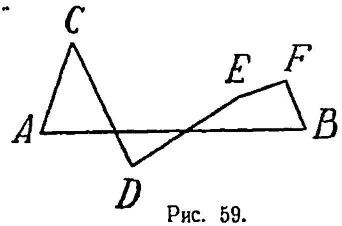


Рис. 59.

Рис. 60.

II. Построение углов.

При выполнении упражнений, приведённых ранее, ученики могли строить углы с помощью транспортира; познакомившись же с основными геометрическими построениями, они должны строить некоторые углы, главным образом, посредством циркуля и линейки.

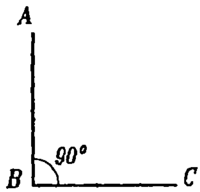


Рис. 61.

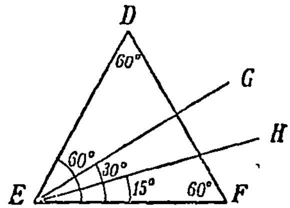


Рис. 61а.

Примеры.

I. *Построить угол, равный 105°.*

Построение (рис. 61 и 61а). 1) Строим прямой угол ABC. 2) Строим равносторонний треугольник DEF. 3) Проводим биссектрису EG угла DEF, равного 60°. 4) Проводим биссектрису EH угла GEF. Ясно, что

$$\angle HEF = 15^\circ.$$

5) Строим искомый угол, равный сумме углов ABC и HEF:

$$\angle ABC + \angle HEF = 105^\circ.$$

II. *Построить угол α, если известно, что* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Построение (рис. 61б). 1) Произвольно взятый отрезок m принимаем за единицу длины. 2) Строим прямоугольный треугольник ABC, один из катетов которого равен $3m$, а другой — $4m$ ($AB=3m$, $BC=4m$). Острый угол ACB является искомым:

$$\alpha=\angle ACB.$$

III. *Построить угол* β, *если известно, что* $\sin\beta=\frac{2}{7}$.

Построение (рис. 61в). 1) Произвольно взятый отрезок m принимаем за единицу длины. 2) Строим прямоугольный треугольник DEF, гипотенуза которого равна $7m$, а катет $2m$:

$$DF=7m \text{ и } DE=2m.$$

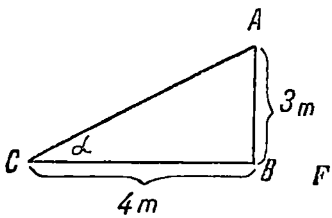


Рис. 61б.

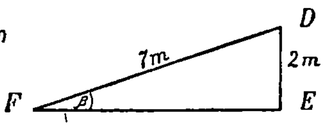


Рис. 61в.

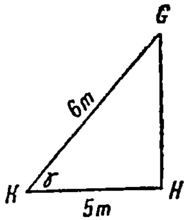


Рис 61г.

Острый угол, лежащий против катета, равного $2m$, — искомый:

$$\beta=\angle DFE.$$

IV. *Построить угол* γ, *если известно, что* $\cos\gamma=\frac{5}{6}$.

Построение (рис. 61г). 1) Произвольно выбранный отрезок m принимаем за единицу длины. 2) Строим прямоугольный треугольник GHK, гипотенуза которого (GK) равна $6m$, а катет $5m$:

$$GK=6m,\ HK=5m.$$

Острый угол GKH — искомый:

$$\gamma=\angle GKH.$$

V. *Построить следующие углы:* а) $90°$, $60°$, $30°$, $15°$, $7°30'$, $11°15'$, $45°$, $22°30'$, $75°$, $105°$, $67°30'$, $26°15'$ *и т. д.* б) α, β, γ, φ, *если известно что* $\sin\alpha=0{,}3$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\gamma=1{,}6$, $\operatorname{ctg}\varphi=5$.

VI. *Построить угол, равный* $52°30'$.

Анализ. $52°30'=30°+22°30'=\frac{60°}{2}+\frac{90°}{4}$.

Построение (рис. 62). 1) Строим прямой угол $A'BC'$. 2) На сторонах угла

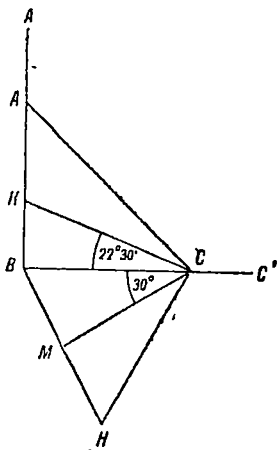


Рис. 62.

от его вершины откладываем равные отрезки BA и BC. 3) Соединив точки A и C, получим равнобедренный прямоугольный треугольник, а потому $\angle ACB = 45°$. 4) Проводим биссектрису CK угла ACB:

$$\angle KCB = \frac{45°}{2} = 22°30'.$$

5) На отрезке BC строим равносторонний треугольник BCH:

$$\angle BCH = 60°.$$

6) Проводим биссектрису CM угла BCH:

$$\angle BCM = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Угол KCM — искомый, потому что он равен сумме углов KCB и BCM, т. е. $22°30' + 30° = 52°30'$.

III. Построение отрезков, определяемых алгебраическими формулами.

Даны отрезки: $a = 4$ *см,* $b = 3$ *см,* $c = 2$ *см,* $e = 2{,}5$ *см,* $f = 2$ *см,* $k = 1$ *см. Требуется построить отрезки, определяемые следующими формулами:*

1. $x = a + 2b.$
2. $x = 3b - 2c.$
3. $x = 0{,}5a + 3c - 2e.$
4. $x = a + 2b - \frac{c + e}{2}.$
5. $x = \sqrt{bc}.$
6. $x = \frac{ab}{c}.$
7. $x = \frac{cef}{ab}.$
8. $x = \frac{(a + b)(c + e)}{f}.$
9. $x = \frac{ab(c + e)}{(b + f)(a + k)}.$
10. $x = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}.$
11. $x = \sqrt{(a - b)^2 + (c - k)^2}.$
12. $x = \sqrt{a^2 + (b - c)^2 - e^2}.$
13. $x = \sqrt{\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 + 4a^2}.$
14. $x = \sqrt{3a^2 + 2b^2 + c^2}.$
15. $x = \sqrt{ab + ce}.$
16. $x = \sqrt{ab + ce + fk}.$
17. $x = \sqrt[4]{(b - c)^2(a + b)\sqrt{ce}}.$
18. $x = \sqrt{\frac{a \cdot (b + c)(c - e)(e - f)}{(a - b)(c - k)}}.$
19. $x = \sqrt[4]{abce}.$
20. $x = \sqrt[4]{(a + b) \cdot (b + c) \cdot ef}.$

Построить отрезок x, *определяемый равенством*

$$x = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Анализ. $x = a\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2a^2 + a^2\sqrt{3}}.$

Построение. 1) Строим отрезок m, определяемый равенством $m^2 = 2a^2$ (рис. 63). 2) В окружности радиуса a проводим хорду n, равную стороне вписанного треугольника (рис. 64). 3) Находим отрезок p, определяемый равенством $p^2 = a^2\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{3} = a \cdot n$ (рис. 64а). 4) Строим прямоугольный треугольник, катетом которого являются отрезки m и p (рис. 64б). Его гипотенуза равна искомому отрезку x.

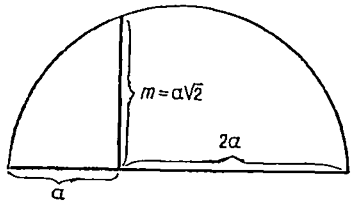


Рис. 63.

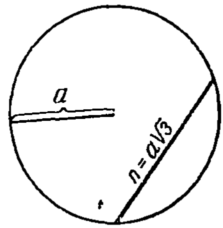


Рис. 64.

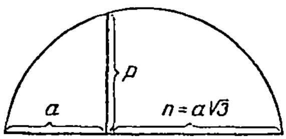


Рис. 64а.

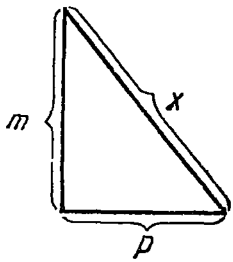


Рис. 64б.

Построить отрезок x, если известно, что

$$x = \sqrt{3a^2 + 2b^2 + c^2},$$

где $a = 5$ см, $b = 3$ см, $c = 1$ см.

Построение. 1) Из произвольной точки O описываем окружность, радиус которой (a) равен 5 *см*. 2) Строим сторону m равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность. Ясно, что $m = a\sqrt{3}$ и $m^2 = 3a^2$. 3) Из произвольной точки O радиусом, равным $b = 3$ *см*, описываем окружность. 4) Строим сторону n квадрата, вписанного в эту окружность. Ясно, что $n = b\sqrt{2}$ и $n^2 = 2b^2$. 5) Формуле $x = \sqrt{3a^2 + 2b^2 + c^2}$ придаём такой вид:

$$x = \sqrt{m^2 + n^2 + c^2}.$$

6) Строим отрезок p, определяемый формулой $p = \sqrt{m^2 + n^2}$, и, значит, $p^2 = m^2 + n^2$. 7) Строим отрезок x, определяемый формулой $x = \sqrt{p^2 + c^2}$.

IV. Установление связи между данными геометрическими образами.

Эти упражнения побуждают учащихся вдумываться в условие предлагаемой геометрической задачи на построение и развивают в них умение отыскивать те метрические зависимости между данными геометрическими образами, с изменением которых изменяется конфигурация этих образов.

Примеры.

Определить связь между следующими геометрическими образами:

1. Окружность и две точки.
2. Две окружности и точка.
3. Две параллельные прямые и окружность.
4. Плоскость и две точки.
5. Две пересекающиеся плоскости и точка.
6. Две пересекающиеся плоскости и прямая.
7. Две параллельные плоскости и точка.
8. Две параллельные плоскости и прямая.
9. Трёхгранный угол и точка.
10. Трёхгранный угол и прямая.
11. Трёхгранный угол и плоскость.
12. Боковая поверхность кругового цилиндра и точка.
13. Боковая поверхность кругового цилиндра и две точки.
14. Боковая поверхность кругового цилиндра и прямая.
15. Шаровая поверхность и точка.
16. Шаровая поверхность и две точки.
17. Шаровая поверхность и прямая.
18. Шаровая поверхность и плоскость.
19. Две параллельные плоскости и шар.
20. Две пересекающиеся плоскости и шар.
21. Трёхгранный угол и шаровая поверхность.

Вопрос: От каких величин зависит конфигурация окружности и двух параллельных прямых?

Ответ: Связь между окружностью и двумя параллельными прямыми определяют следующие величины:

1. Расстояние (l) между данными параллельными прямыми (рис. 65).
2. Радиус (r) окружности.
3. Расстояние (d) от центра окружности до прямой, равноотстоящей от двух данных параллельных прямых.

Изменяя эти величины (r, l, d), можем получить всевозможные конфигурации окружности и двух параллельных прямых.

Вопрос: Какие величины определяют связь между шаровой поверхностью и прямою в пространстве?

Ответ: Положение шаровой поверхности относительно прямой вполне определяется величиною радиуса (r) шаровой поверхности и расстоянием (d) от центра шаровой поверхности до данной прямой (рис. 65а).

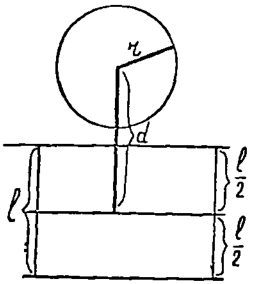


Рис. 65.

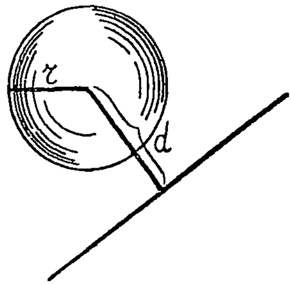


Рис. 65а.

V. Определение возможных конфигураций данных геометрических образов.

Эти упражнения приучают вдумчиво относиться к условию геометрической задачи на построение.

Особенно желательно, чтобы в каждом отдельном случае выполнение такого упражнения предшествовало решению задачи, в которой имеют место рассматриваемые конфигурации геометрических образов. Вот некоторые из таких упражнений:

А. Указать возможные конфигурации следующих геометрических образов:

1. Точка и прямая. 2. Две прямые. 3. Прямая и две точки. 4. Точка и окружность. 5. Прямая и окружность. 6. Угол и точка. 7. Угол и прямая. 8. Окружность, прямая и точка на этой прямой. 9. Две окружности. 10. Точка на окружности и прямая.

Б. Пояснить чертежами, что контур треугольника и контур квадрата могут иметь общих точек 6, 5, 4, 3, 2, 1 и ни одной.

В. Сколько точек касания и пересечения и при каких конфигурациях могут иметь геометрические образы F_1 и F_2:

№№ упраж.	F_1	F_2
1	Контур треугольника	прямая
2	прямая	окружность
3	две пересекающиеся прямые	окружность
4	две параллельные прямые	окружность
5	окружность	контур квадрата
6	контур ромба	окружность
7	окружность	окружность
8	дуга сегмента	дуга сегмента
9	контур трапеции	контур квадрата

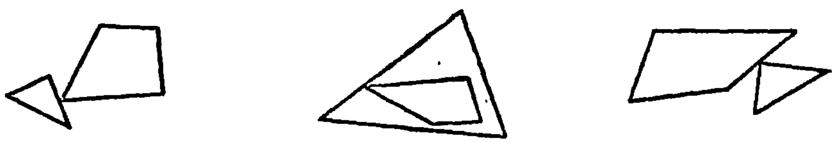
№№ упраж.	F_1	F_2
10	контур сегмента	контур квадрата
11	контур сегмента	контур сегмента
12	контур сегмента	контур сектора
13	контур квадрата	контур сектора
14	контур треугольника	окружность
15	контур трапеции	окружность
16	контур четырёхугольника	контур треугольника

Г. Пояснить чертежами, в каких случаях окружность и контур правильного пятиугольника имеют 8, 9 и 10 общих точек.

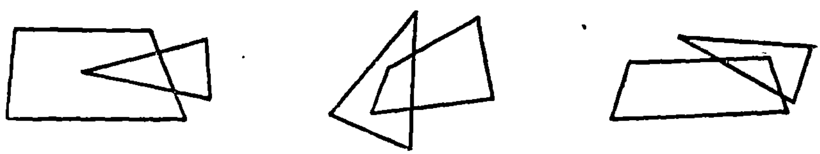
Д. Дать различные конфигурации трёх окружностей.

Задача. *Пояснить чертежами, при каких конфигурациях и сколько общих точек имеют контуры четырёхугольника и треугольника.*

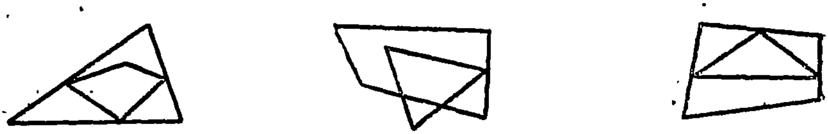
Решение. *a*) Одна общая точка:



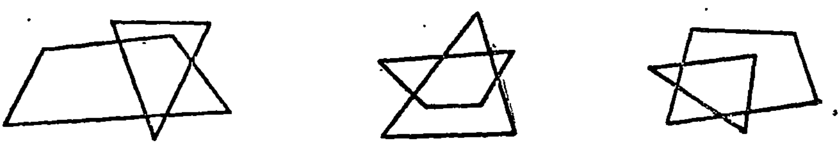
b) Две общие точки:



c) Три общие точки:

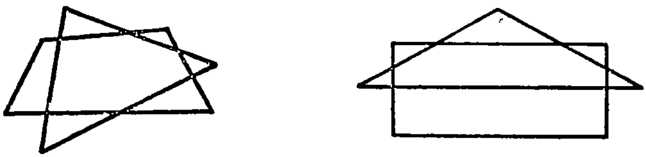


d) Четыре общие точки:



e) Пять общих точек:

f) Шесть общих точек:



g) Бесконечное число общих точек:

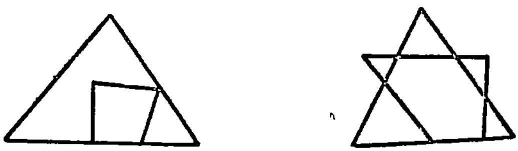


Рис. 66.

VI. Превращение данной фигуры в равновеликую ей фигуру, удовлетворяющую определённым требованиям.

Надо предложить учащимся достаточное количество таких упражнений, в которых требуется превратить данную фигуру в равновеликую ей фигуру другого вида. Вот небольшой перечень такого рода упражнений.

Превратить данную фигуру F_1 в равновеликую фигуру F_2:

№№ задач	F_1	F_2
1	Квадрат	Треугольник
2	„	Равнобедренный треугольник
3	Параллелограм	Квадрат
4	„	Равносторонний треугольник
5	Ромб	Квадрат
6	Пятиугольник	Прямоугольный треугольник
7	„	Равносторонний треугольник
8	„	Равнобедренный прямоугольный треугольник

№№ задач	F_1	F_2
9	Шестиугольник	Прямоугольный треугольник
10	,,	Равнобедренный прямоугольный треугольник
11	,,	Равносторонний треугольник
12	Семиугольник	Квадрат
13	Квадрат	Прямоугольник, отношение сторон которого дано: $m : n$
14	Ромб	Прямоугольник, отношение сторон которого дано: $m : n$
15	Треугольник	Ромб, один из углов которого равен α
16	Квадрат	Ромб, один из углов которого равен α
17	Правильный шестиугольник	Треугольник, два угла которого даны: α и β
18	Пятиугольник	Равнобедренный треугольник, имеющий при вершине угол α
19	Ромб, имеющий угол, равный α	Ромб, имеющий угол, равный β
20	Квадрат	Четырёхугольник, подобный данному $ABCD$
21	Треугольник	Параллелограм, подобный данному
22	Параллелограм	Пятиугольник, подобный данному
23	Пятиугольник	Шестиугольник, подобный данному и т.д.

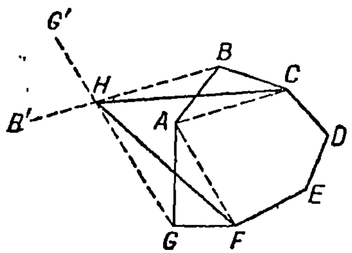


Рис. 67.

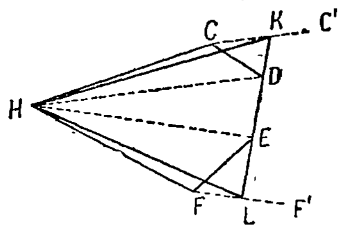


Рис. 67а.

Превратить данный семиугольник $ABCDEFG$ в равновеликий квадрат.

Построение (рис. 67). 1) Из вершины A проводим диагонали AC и AF. 2) Через точку B проводим прямую BB', параллельную отрезку AC. 3) Через точку G проводим прямую GG', параллельную отрезку AF. 4) Точку (H) пересечения прямых BB' и GG' соединяем с точками C и F. Получаем пятиугольник $HCDEF$, равновеликий данному семиугольнику $ABCDEFG$. Из вершины H полученного пятиугольника проводим диагонали HD и HE (рис. 67а).

Через точку C проводим прямую CC', параллельную отрезку HD. Через точку F проводим прямую FF', параллельную отрезку HE. Продолжаем в обе стороны отрезок DE; он пересечёт прямые CC' и FF' в некоторых точках K, L.

Соединив точку H с точками K и L, получим $\triangle HKL$, равновеликий данному семиугольнику. Из точки H опускаем перпендикуляр HM на сторону KL (рис. 67б).

Площадь $\triangle HKL = \frac{KL \cdot HM}{2}$. Обозначив буквой x длину стороны искомого квадрата, равновеликого треугольнику HKL, а через x^2 его площадь, получим:

$$x^2 = \frac{1}{2} KL \cdot HM.$$

На произвольной прямой (рис. 67в) от какой-нибудь точки N отложим два примыкающих один к другому отрезка: NO, равный KL, и OP, равный половине отрезка HM.

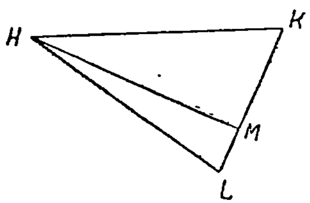


Рис. 67б.

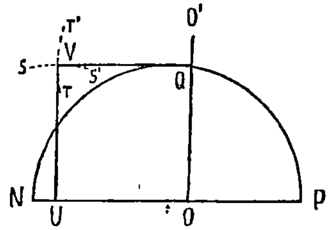


Рис. 67в.

На отрезке NP, как на диаметре, построим полуокружность. В точке O восставим перпендикуляр OO' к прямой NP; он пересечёт полуокружность в точке Q. Отрезок OQ—сторона искомого квадрата. На отрезке ON, от точки O, отложим отрезок OU, равный отрезку OQ. Из точки U, как из центра, проведём дугу SS' радиусом, равным OQ.

Из точки Q, как из центра, проведём дугу TT' радиусом, равным OQ. Дуги SS' и TT' пересекутся в некоторой точке V.

Соединив точку V с точками Q и U, получим квадрат $OQVU$, равновеликий данному семиугольнику $ABCDEFG$.

VIII. Построение данного геометрического места точек.

Геометрические места точек и линий находят широкое применение при решении задач на построение. Учитывая важность этих понятий и стремясь закрепить соответствующие знания в памяти учащихся, следует предлагать в порядке домашних заданий такие задачи, в которых требуется выполнить только построение того или иного геометрического места точек (или линий).

Примеры.

Построить геометрическое место точек, расстояния которых до точек A и B находятся в данном отношении: $m:n$, где m и n — положительные величины, причём $m \neq n$.

Анализ. Пусть точка F (рис. 67г) является одной из точек искомого геометрического места, т. е.

$$AF:FB=m:n. \tag{1}$$

Если последовательно соединим отрезками точки A, F, B, затем в полученном треугольнике проведём биссектрису угла AFB и обозначим буквою C точку, в которой эта биссектриса пересечёт сторону AB, то, согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника, получим

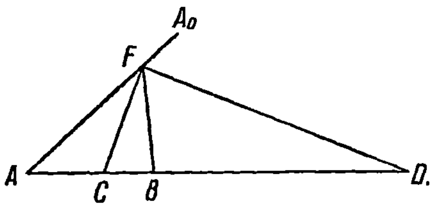


Рис. 67г.

$$AC:CB=AF:FB. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$AC:CB=m:n. \tag{3}$$

Через точку F проведём ещё биссектрису внешнего угла A_0FB, которая пересечёт продолжение отрезка AB в некоторой точке D. Основываясь на теореме о биссектрисе внешнего угла треугольника, можем написать, что

$$AD:BD=AF:FB. \tag{4}$$

Из (1) и (4) имеем

$$AD:BD=m:n. \tag{5}$$

Приняв во внимание, что F является совершенно произвольной точкой искомого геометрического места, а $\angle CFD=90^\circ$ (так как он составляет половину развёрнутого), придём к выводу, что прямые, проведённые из точки C и D в любую точку искомого геометрического места, пересекаются под прямым углом. А отсюда следует, что искомое геометрическое место точек есть окружность, диаметром которой является отрезок CD.

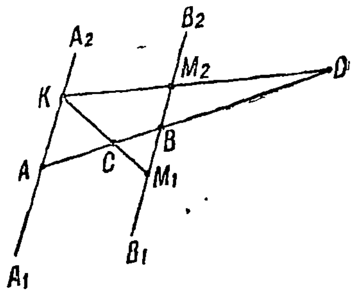


Рис. 67д.

Построение (рис. 67д). 1) Через точку A и B проводим прямую. 2) Через эти же точки в произвольном направлении проводим параллельные прямые, например A_1A_2 и B_1B_2. 3) На прямой A_1A_2 от точки A в направлении A_2 отложим отрезок AK, равный m:

$$AK=m. \tag{6}$$

4) На прямой B_1B_2 от точки B в разных направлениях отложим отрезки BM_2 и BM_1, равные n:

$$BM_2 = n. \tag{7}$$

$$BM_1 = n. \tag{8}$$

5) Соединим точки K и M_1. Отрезок KM_1 пересечёт отрезок AB в некоторой точке C. Так как $\triangle ACK \sim \triangle BCM_1$, то

$$AC:CB = AK:BM_1. \tag{9}$$

Из (6), (8) и (9) следует, что

$$AC:CB = m:n. \tag{10}$$

6) Через точки K и M_2 проведём прямую; она пересечёт продолжение отрезка AB в некоторой точке D.

Так как $\triangle AKD \sim \triangle BM_2D$, то

$$AD:BD = AK:BM_2. \tag{11}$$

Из (6), (7) и (11) имеем:

$$AD:BD = m:n. \tag{12}$$

8) На отрезке CD, как на диаметре, строим окружность — искомое геометрическое место точек.

Построить геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек M и N (расстояние m) равна квадрату данного отрезка (s).

Анализ (рис. 67е). Допустим, что точка K принадлежит искомому геометрическому месту точек, и, значит,

$$MK^2 + KN^2 = s^2. \tag{1}$$

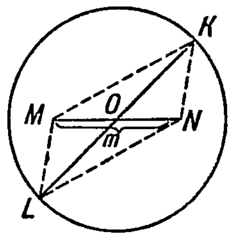


Рис. 67е.

Соединив отрезком точки M и N, получим $\triangle MKN$.

Обозначим буквою O середину отрезка MN:

$$MO = ON \tag{2}$$

и построим точку L, симметричную точке K относительно точки O. Соединив отрезками точку L с точками M и N, получим параллелограм $MKNL$. В параллелограме сумма квадратов его сторон равна сумме квадратов диагоналей, а потому

$$MK^2 + KN^2 + NL^2 + LM^2 = MN^2 + KL^2. \tag{3}$$

Во всяком параллелограме противоположные стороны равны, а потому

$$MK = LN \text{ и } KN = ML$$

и равенство (3) принимает такой вид:

$$2(MK^2 + KN^2) = MN^2 + KL^2. \tag{4}$$

Из условия задачи и из (1) вытекает, что равенство (4) можно переписать так:

$$2s^2 = m^2 + KL^2. \tag{5}$$

Из (5) находим, что

$$KL^2 = 2s^2 - m^2$$

и

$$KL = \sqrt{2s^2 - m^2}.$$

Отсюда вытекает, что половина (KO) диагонали KL параллелограма определяется следующей формулой:

$$KO = \frac{1}{2}\sqrt{2s^2 - m^2}. \tag{6}$$

Так как правая часть равенства (6) есть результат операций над величинами m и s, то ясно, что и отрезок KL, определяемый формулой (6), есть величина постоянная.

Поскольку точка K, принадлежащая искомому геометрическому месту, взята совершенно произвольно, то все точки этого геометрического места отстоят от точки O на одинаковом расстоянии, равном $\frac{1}{2}\sqrt{2s^2 - m^2}$.

Из сказанного вытекает, что искомое геометрическое место точек есть окружность, центром которой является середина отрезка MN, а радиус равен отрезку, определяемому по формуле (6).

Построение. 1) Находим середину (O) отрезка, соединяющего данные точки M и N. 2) Строим отрезок KO, определяемый формулой (6). 3) Из точки O, как из центра, радиусом, равным найденному отрезку OK, описываем искомую окружность.

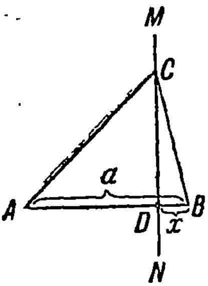


Рис. 68.

Доказательство. Правильность выполненного построения видна из того, что оно целиком основано на применении теорем о параллелограме.

Исследование. Из рассмотрения формулы (6) делаем следующие выводы.

1) Если $2s^2 - m^2 > 0$, то задача имеет решение и притом только одно.

2) Если $2s^2 - m^2 = 0$, то искомое геометрическое место обращается в одну точку (O).

3) Если $2s^2 - m^2 < 0$, то задача не имеет решения.

Построить геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний от данных точек A и B равна данному положительному числу k^2.

Анализ. Пусть точка C (рис. 68) принадлежит искомому геометрическому месту точек.

Из условия задачи вытекает, что

$$AC^2-BC^2=k^2, \tag{1}$$

причём $AC>BC$.

С изменением положения точки C будут изменяться и отрезки AC и BC.

Опустив из точки C перпендикуляр CD на прямую AB, видим, что

$$AC^2=AD^2+CD^2 \tag{2}$$

и

$$BC^2=BD^2+CD^2. \tag{3}$$

Вычитая почленно (3) из (2), получим

$$AC^2-BC^2=AD^2-BD^2. \tag{4}$$

Из (1) и (4) вытекает, что

$$AD^2-BD^2=k^2. \tag{5}$$

Это равенство показывает, что для всех точек искомого геометрического места положение точки D остаётся неизменным.

Нетрудно определить положение точки D на данном отрезке AB. Действительно, обозначая буквами a и x соответственно длину отрезков AB и BD, можем равенству (5) придать такой вид:

$$(a-x)^2-x^2=k^2.$$

Решая это уравнение относительно x, получим

$$x=\frac{a^2-k^2}{2a}. \tag{6}$$

Значит, при данных значениях a и k основание (D) перпендикуляра, опущенного из произвольной точки искомого геометрического места, есть вполне определённая точка, отстоящая от точки B на расстоянии, равном

$$\frac{a^2-k^2}{2a}.$$

Поэтому приходим к выводу, что искомое геометрическое место представляет собою прямую, перпендикулярную к AB и отстоящую от точки B на расстоянии, равном

$$\frac{a^2-k^2}{2a}.$$

Построение. 1) Соединяем данные точки A и B отрезком прямой линии. 2) Строим отрезок x, определяемый формулой (6).

3) На отрезке AB от точки B отложим отрезок BD, равный найденному отрезку x. 4) Из точки D проводим прямую MN, перпендикулярную к отрезку AB.

Прямая MN—искомое геометрическое место точек.

Доказательство. Правильность выполненного построения вытекает из теоремы Пифагора.

Исследование. Если $a^2 > k^2$, то точка D находится на отрезке AB между точками A и B и отстоит от точки B на расстоянии, равном

$$\frac{a^2-k^2}{2a}.$$

Если $k=0$, то точка D является серединою отрезка AB.

Если $a^2 < k^2$, то точка D находится на сделанном в сторону B продолжении отрезка AB и отстоит от точки B на расстоянии, равном

$$\frac{k^2-a^2}{2a}.$$

Задача имеет решение при любом расстоянии (a) между данными точками A и B и при любом значении величины k^2.

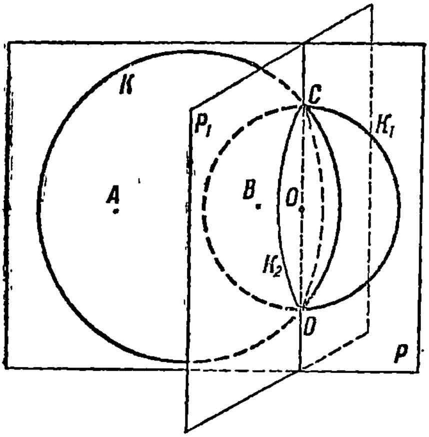


Рис. 69.

Построить геометрическое место точек в пространстве, для которых сумма квадратов расстояний до точек A и B равна p^2, а отношение расстояний до тех же точек равно $m:n$.

Построение (рис. 69). 1) Проводим через точки A и B какую-нибудь плоскость P. 2) В плоскости P строим окружность K, являющуюся геометрическим местом точек, для которых сумма квадратов расстояний до точек A и B равна p^2. 3) В плоскости P строим окружность K_1, являющуюся геометрическим местом точек, для которых отношение расстояний до точек A и B равно $m:n$. 4) Окружности K и K_1 пересекутся в некоторых точках C и D. 5) Через точку C (или D) проводим плоскость P_1, перпендикулярную к прямой AB. Плоскость P_1 пересечёт прямую AB в некоторой точке O. 6) В плоскости P_1 из точки O, радиусом, равным OC, описываем окружность K_2.

Окружность K_2—искомое геометрическое место точек.

VIII. Выявление аналогии между геометрическими местами на плоскости и пространстве.

Геометрическим местам в пространстве соответствуют определённые геометрические места на плоскости.

Примеры.

Каким общим свойством обладают точки данной совокупности их	Что собою представляет геометрическое место этих точек	
	в планиметрии	в стереометрии
Отстоят от точки O на расстоянии R.	Окружность,	Шаровая поверхность,
	центром которой является точка O, а радиус равен R.	
Равноудалены от двух данных точек A и B.	Прямая,	Плоскость,
	перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.	
Сумма квадратов их расстояний до двух данных точек A и B равна квадрату данного отрезка m.	Окружность,	Шаровая поверхность,
	центр которой находится в точке O, делящей пополам отрезок AB, а радиус равен $\frac{1}{2}\sqrt{2m^2 - AB^2}$.	
Разность квадратов их расстояний до двух данных точек A и B равняется квадрату данного отрезка m.	Прямая,	Плоскость,
	которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через ту его точку C, положение которой определяется равенством $AC^2 - CB^2 = m^2$.	
Расстояния их до двух данных точек A и B относятся, как $m:n$ $(m \neq n)$.	Окружность,	Шаровая поверхность,
	диаметром которой является отрезок CD, находящийся на прямой AB так, что точки C и D делят отрезок AB внутренне и внешне в отношении $m:n$.	

В упражнениях этого рода даётся определённое геометрическое место на плоскости (или в пространстве) и требуется указать аналогичное ему геометрическое место в пространстве (или на плоскости).

IX. Геометрические задачи на построение, содержащие числовые данные.

В геометрических задачах на построение обычно данные величины являются совершенно произвольными.

Примеры.

I. Дан треугольник и на одной из его сторон точка. Требуется прямыми, выходящими из этой точки, разделить площадь треугольника на несколько равновеликих частей.

Когда ученик ознакомился с приёмом, посредством которого решаются задачи такого рода, то он обычно берёт треугольник произвольных размеров и произвольной формы и делит его на число частей, взятое по своему усмотрению. Никто не станет отрицать полезности проведения решения в общей форме, но следует учитывать, что ученик прочнее закрепит в своей памяти усвоенный способ решения, если применит его к решению аналогичных задач, содержащих вполне определённые числовые данные.

II. Построить геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B относятся, как $m:n$, где $m \neq n$.

Решив эту задачу в общем виде, ученик находит, что искомым геометрическим местом точек является окружность, но часто затрудняется ответить, какая из точек A и B должна находиться внутри этой окружности, если $m < n$; какова зависимость между диаметром этой окружности, отрезком AB и отношением $m:n$; может ли диаметр искомой окружности равняться расстоянию между точками A и B.

Если же такая задача содержит числовые данные, то, решая её, ученик невольно запоминает те зависимости между данными величинами, которые обычно ускользают от его внимания при отыскании решения в общем виде.

Ниже приводим образцы геометрических задач на построение, содержащие числовые данные.

1. Данный отрезок AB (10 *см*) разделить на 3 (5, 7, 11, . . .) равных частей.

2. Построить общие касательные к двум кругам, радиусы которых 4 *см* и 5 *см*, а линия центров равна 12 *см*.

3. На данном отрезке AB (3 *см*) построить сегмент, вмещающий угол α, равный 30° (45°, 18°, 22°, 30°, . . .).

4. Отрезок AB, равный 6 *см* (5 *см*, 8 *см*, . . .), разделить в крайнем и среднем отношении.

5. Дан треугольник ABC, стороны которого таковы: $AB = 6$ *см*, $BC = 5$ *см*, $AC = 4$ *см*. Требуется прямыми, параллельными стороне AC, разделить его площадь на 5 (6, 4, 3, 7, . . .) равновеликих частей.

6. Дана длина сторон треугольника ABC: $AB = 4$ *см*, $BC = 7$ *см*, $AC = 5$ *см*. На стороне BC отмечена точка D, причём $BD = 3$ *см*. Провести из точки D прямые, которые разделили бы площадь этого треугольника на 5 (4, 6, . . .) равновеликих частей.

7. Отрезок $AB = 6$ *см*. Построить геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до точек A и B равно 3:2 (2:3; 3:4; 1:3; . . .).

8. Отрезок $AB = 8$ *см*. Построить геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний до точек A и B равно 4 *см* (5 *см*, 2 *см*, . . .).

9. Отрезок $AB = 7$ *см*. Построить геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний до точек A и B равна 36 *см*.

10. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AB и AC равны соответственно 12 *см* и 5 *см*. Построить точку, для которой разность квадратов расстояний до точек A и B равна 4 $см^2$, а сумма квадратов расстояний до B и C равна 225 $см^2$.

Задача. *Отрезок, равный 10 см, требуется разделить на три отрезка, которые относились бы, как*

$$2:\sqrt{2}:\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Построение. 1) Произвольным радиусом чертим окружность и проводим в ней две хорды, из которых одна (m) — сторона вписанного квадрата, а другая (n) — сторона правильного вписанного треугольника. 2) Данное отношение отвлечённых чисел (1) заменяем отношением следующих отрезков

$$2r:m:n.$$

3) Проводим из произвольно взятой точки O (рис. 70) два луча OA и OB, образующие угол AOB. 4) На луче OA от точки O откладываем отрезок OC, равный 10 *см*. 5) На луче OB от точки O

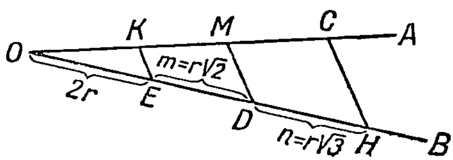


Рис. 70.

откладываем последовательно отрезки OE, ED, DH соответственно равные отрезкам $2r$, m и n. 6) Соединяем точки C и H. 7) Из точки D и E проводим прямые, параллельные отрезку CH. Они пересекут луч OA в точках K и M.

Отрезки OK, KM и MC — искомые, потому что

$$OK+KM+MC=10 \text{ см}$$

и

$$OK:KM:MC=2r:m:n=2:\sqrt{2}:\sqrt{3}.$$

X. Задачи на построение, решаемые любыми или указанными методами.

Многие конструктивные задачи можно решить не одним, а несколькими способами. Поэтому время от времени следует предлагать учащимся рассмотренную задачу снова решить произвольно выбранным или указанным методом.

Эти упражнения могут иметь следующий вид:

Задачу, решённую в классе, снова решить:

а) тем же методом, но изменив ход решения,

б) любым иным методом,

в) указанным методом.

Предложенную конструктивную задачу решить:

а) двумя любыми методами,

б) двумя указанными методами,

в) тремя любыми методами,

г) тремя указанными методами.

Приведём несколько примеров.

I. Допустим, в классе решена следующая задача:

Построить квадрат по разности (d) *диагонали и стороны.*

Анализ. Допустим, что $ABCD$ представляет собою искомый квадрат (рис. 71). Если на диагонали BD, от точки B, отложим отрезок BF, равный AB, то отрезок DF будет представлять собою разность диагонали и стороны квадрата. Соединив точку A с F, получим равнобедренный $\triangle ABF$, в котором $\angle ABF$ при вершине равен 45°, и, значит, остальные углы порознь равны 67°30′. Зная, что $\angle BFA = 67°30'$, найдём, что $\angle AFD = 180° - 67°30' = 112°30'$. Как видим, в треугольнике ADF нам известны сторона DF (по условию) и два прилежащих к ней угла: $\angle ADF = 45°$ и $\angle AFD = 112°30'$. Построив треугольник ADF, мы определим отрезок AD, являющийся стороной искомого квадрата.

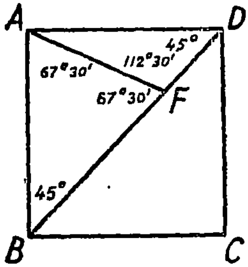


Рис. 71.

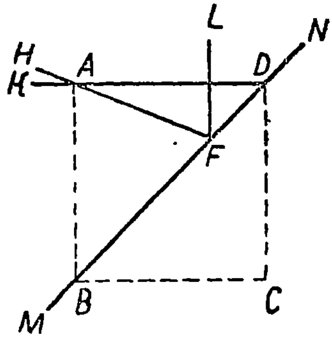


Рис. 72.

Построение. 1) Проводим произвольную прямую MN и на ней, от произвольной точки F, откладываем отрезок DF, равный данной разности (d) диагонали и стороны квадрата (рис. 72). 2) На стороне DF при точках D и F строим углы FDK и DFL, порознь равные 45°. 3) Проводим биссектрису FH угла LFM и обозначаем буквою A точку пересечения прямых DK и FH. Отрезок AD — искомая сторона квадрата.

Исследование. Рассматриваемая задача имеет решение и притом единственное, так как всегда можно построить треугольник (ADF), в котором углы, прилежащие к данному отрезку $d\,(DF)$, равны 45° и 112°30′.

На дом можно задать следующее упражнение:

„Решить предыдущую задачу тем же методом, но несколько *иначе*".

Выполненная работа будет иметь приблизительно такой вид:

Построить квадрат по разности (a) *диагонали и стороны.*

Анализ. Пусть (рис. 73) $ABCO$—искомый квадрат. Чтобы ввести в рассмотрение разность (a) диагонали и стороны, продолжим сторону CO и на ней от точки O отложим отрезок OM, равный a. Так как треугольник ACM—равнобедренный (ибо, по условию, $AC-CO=OM$, и, значит, $AC=CO+OM=CM$), причём угол (ACM) при вершине равен 45°, то

$$\angle CMA=\angle CAM=\frac{1}{2}(180°-45°)=67°30'.$$

Треугольник AMO можно построить по катету a и острому углу 67°30', и тогда другой катет (AO) представит собою сторону искомого квадрата.

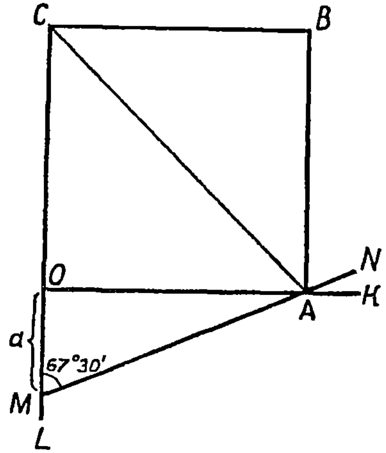


Рис. 73.

Построение. 1) Строим прямой угол KOL. 2) На стороне OL от точки O отложим отрезок OM, равный a. 3) На отрезке OM при точке M строим угол OMN, равный 67°30'. 4) Прямая MN пересечёт OK в некоторой точке A, которая является вершиной искомого квадрата. Другой вершиной его является точка O. Зная длину OA стороны квадрата, легко построить и всю эту фигуру.

II. *Построить треугольник по данным двум углам* α *и* β *и периметру* s. (Решить методом спрямления отрезков и методом подобия.)

Построение.

Метод спрямления	Метод подобия
1. По одну сторону какого-нибудь отрезка (DE), равного s, при точках D и E строим углы EDD' и DEE', порознь равные $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$. Лучи DD' и EE' пересекутся в некоторой точке C.	1. Строим произвольных размеров треугольник $A'B'C'$, два внутренних угла которого порознь равны углам α и β.

Метод спрямления	Метод подобия
2. Находим точки (A и B) пересечения отрезка DE с прямыми, которые перпендикулярны к отрезкам CD и CE и делят их пополам.	2. Отрезок DE, равный s, делим на три части DH, HK и KE, пропорциональные сторонам треугольника $A'B'C'$.
3. Соединяем точки A, B, C отрезками прямой. Треугольник ABC — искомый.	3. Строим треугольник ABC, стороны которого порознь равны найденным отрезкам DH, HK и KE. Треугольник ABC — искомый.

III. *Через точку (A), данную вне круга, провести секущую так, чтобы её внешняя часть была равна внутренней.* (Решить тремя любыми способами.)

I-й способ. Анализ. Пусть на рис. 74 представлено искомое построение. По условию отрезок AB делится точкою C пополам. Примем, что AB—есть сторона некоторого вспомогательного треугольника, для которого радиус OC является средней линией. Чтобы получить этот вспомогательный треугольник, учтём, что точка O должна быть серединою стороны этого треугольника.

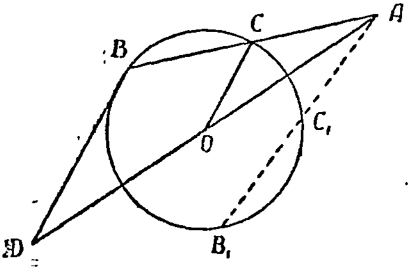


Рис. 74.

Отсюда вытекает, что другую сторону вспомогательного треугольника получим, если проведём луч из точки A через центр O круга и отложим на этом луче от точки A отрезок AD равный $2AO$. Отрезок, соединяющий точки B и D, представит третью сторону вспомогательного треугольника. Так как средняя линия $CO=R$, то $BD=2R$.

Из сказанного следует, что второй конец искомого отрезка секущей (точка B) является вершиной треугольника ABD, лежит на окружности и удалён от вершины D на расстоянии, равном двум радиусам ($BD=2R$).

Построение. 1) Из точки A проводим луч через центр круга O. 2) На этом луче от точки A отложим отрезок AD, равный удвоенному отрезку AO. 3) Из точки D радиусом, равным диаметру данного круга, проводим дугу, пересекающую данную окружность в точках B и B_1. 4) Соединяем точки B и B_1 с точкою A.

Отрезки AB и AB_1 являются искомыми секущими.

2-й способ. Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 74а) и $AC=BC$.

Если центр O данного круга соединим с точками A, B, C, то получим $\triangle ABO$, в котором нам известны две стороны (AO и OB)

и медиана (OC) третьей стороны. Значит, задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и медиане третьей стороны.

Если на продолжении медианы OC отложим отрезок CD, равный OC, и соединим точку D с A, то получим, что

$$\triangle ACD = \triangle BCO \qquad (*)$$

по двум сторонам ($AC = BC$, $OC = CD$) и углу между ними ($\angle ACD = \angle BCO$, как вертикальные)

Из (*) вытекает, что $AD = BO$.

Следовательно, в треугольнике AOD нам известны все три стороны: $AD = BO = R$, $OD = 2OC = 2R$ и AO.

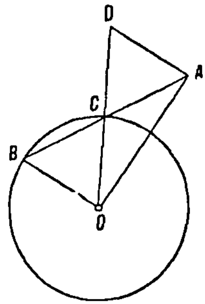


Рис. 74а.

Построив $\triangle ADO$, сможем определить отрезок AC, представляющий собою внешнюю часть искомой секущей.

Построение. 1) Строим треугольник $A'D'O'$ по трём сторонам: $A'D' = R$, $D'O' = 2R$ и $A'O' = AO$. 2) Находим точку C', которая делит пополам сторону $D'O'$. 3) Точку C' соединяем с точкою A'. 4) Радиусом, равным отрезку $A'C'$, проводим из точки A дугу до пересечения в точках C и C' с данной окружностью. 5) Через точку A и точки C и C' проводим искомые секущие AB и AB_1.

3-й способ. Анализ. Допустим, что секущая AB (рис. 74б) удовлетворяет условию задачи, т. е.

$$AC = CB. \qquad (1)$$

Из точки A проведём секущую AD, проходящую через центр O данного круга.

Положение точки A дано, а потому нам известны отрезки AE и AD. Если из точки A, находящейся вне круга, проведём секущую, то произведение всей секущей на её внешнюю часть есть величина постоянная, и, значит,

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE. \qquad (2)$$

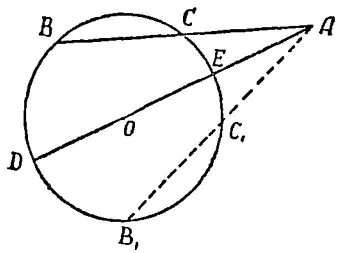


Рис. 74б.

Обозначив буквою x отрезок AC, можем (1) написать, что

$$\left.\begin{array}{l} AC = x \\ \text{и} \quad AB = 2x. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает, что

$$2x \cdot x = AD \cdot AE,$$

т. е.

$$x = \sqrt{\frac{AD}{2} \cdot AE}. \qquad (4)$$

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый формулой (4), как среднее пропорциональное отрезков $\frac{AD}{2}$ и AE. 2) Из точки A, как из центра, радиусом, равным найденному отрезку x, описываем дугу до пересечения с данной окружностью в некоторых точках C и C_1. 3) Через точку A и точки C и C_1, проводим искомые секущие AB и AB_1.

*Исследование**. По условию, часть секущей, находящаяся внутри круга, должна быть равна внешней её части. Но хорда, проведённая в круге, не может быть длиннее диаметра. А отсюда вытекает, что длина всей секущей не может превышать длину удвоенного диаметра, и, следовательно, задача возможна лишь в том случае, если кратчайшее расстояние от точки A до данной окружности не больше диаметра.

Обозначив центр и радиус данного круга буквами O и R, можем результаты исследования записать так:

1) задача не имеет решения, если $AO > 3R$;
2) задача имеет одно решение, если $AO = 3R$;
3) задача имеет два решения, если $AO < 3R$.

XI. Доказательство правильности построения.

Часто недостаток времени не позволяет учителю вполне закончить решение рассматриваемой в классе геометрической задачи на построение. Поэтому, после выполнения анализа и построения, учитель бывает вынужден предложить ученикам, чтобы они в порядке домашней работы вполне самостоятельно продолжили решение, а именно привели доказательство правильности сделанного построения.

Такое упражнение, будучи посильным для учеников, убеждает их в том, что построенный геометрический образ действительно удовлетворяет всем требованиям условия задачи, и побуждает учащихся повторять те определения, аксиомы, теоремы и следствия, которые необходимы для осуществления требуемого доказательства, а также приучает к последовательному и логическому изложению мыслей.

XII. Применение тригонометрии к решению геометрических задач на построение.

Задача. *Построить треугольник ABC, если известны две его стороны и площадь: $AC = b$, $BC = a$, $S = k^2$, где S — площадь, a, b, k — данные отрезки.*

Анализ (рис. 75). Обозначая буквой C угол, образуемый сторонами a и b, можем написать:

* Относится ко всем трём рассмотренным способам решения.

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = k^2,$$

и. значит,

$$\sin C = \frac{2k^2}{ab}. \qquad (1)$$

При помощи этой формулы можем определить угол C. Тогда задача сведётся к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Построение. 1) Определяя отрезок h из формулы площади треугольника $\frac{ah}{2}$, получим: $h = \frac{2k^2}{a}$. Преобразуем последнее равенство в пропорцию:

$$a : k = 2k : h.$$

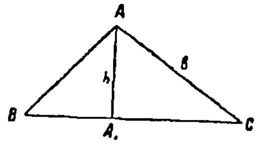


Рис. 75.

Отрезок h находим известным построением, и тогда формула (1) примет такой вид:

$$\sin C = \frac{h}{b}.$$

2) Строим прямоугольный треугольник, катетом которого является отрезок h, а гипотенузой—отрезок b. В полученном треугольнике AA_1C острый угол, лежащий против катета h, будет искомым углом C. 3) От точки C откладываем на линии катета CA_1 отрезок CB, равный a. 4) Соединяем точки A и B.

$\triangle ABC$—искомый.

Исследование. Синус угла (1) не может быть больше единицы, а потому задача имеет решение только в том случае, если

$$ab \geq 2k^2.$$

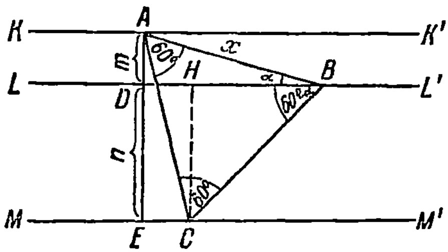


Рис. 75а.

Если $ab > 2k^2$, задача имеет два решения: в одном треугольнике угол C, образуемый сторонами a и b, будет острым, в другом — между этими сторонами будет угол, равный $180° - C$.

Если $ab = 2k^2$, задача имеет одно решение, причем искомый треугольник будет прямоугольным.

Задача. *Построить равносторонний треугольник, имеющий вершины на трёх данных параллельных прямых KK', LL' и MM', зная, что линия LL' делит расстояние между KK' и MM' на два отрезка, равные соответственно m и n.*

Анализ. Допустим, что рис. 75а представляет собою решение задачи, причём $\triangle ABC$—искомый.

Введём обозначения: x—длина стороны искомого треугольника, α—угол, образуемый стороной AB с прямой LL'.

Опустим из точек A и C перпендикуляры AD и CH на прямую LL'.

В прямоугольном треугольнике ABD:

$$AD = AB \cdot \sin\alpha, \text{ т. е. } m = x \cdot \sin\alpha. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике BCH:

$$CH = BC \cdot \sin(60° - \alpha), \text{ т. е. } n = x \cdot \sin(60° - \alpha). \qquad (2)$$

Итак, имеем два уравнения (1) и (2) с двумя неизвестными: x и α. Определив одну из этих величин, будем иметь возможность построить искомый треугольник.

I. Если желаем определить отрезок x, то следует из уравнений (1) и (2) исключить неизвестный угол α и из полученного уравнения определить x.

Из (1) имеем:

$$\sin\alpha = \frac{m}{x}. \qquad (3)$$

Из (2) находим

$$n = x(\sin 60° \cos\alpha - \cos 60° \sin\alpha) = x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right),$$

т. е.

$$n = \frac{x}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha). \qquad (4)$$

Подставив в (4) значение $\sin\alpha$, взятое из (3), получим

$$n = \frac{x}{2}\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \frac{m}{x}\right),$$

т. е.

$$n = \frac{x\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{2} - \frac{m}{2},$$

откуда

$$\frac{x\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = n + \frac{m}{2} = \frac{2n+m}{2}$$

и

$$\cos\alpha = \frac{2n+m}{x\sqrt{3}}. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) вытекает, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{m^2}{x^2} + \frac{(2n+m)^2}{3x^2},$$

т. е.

$$1 = \frac{1}{3x^2}[3m^2 + (2n+m)^2],$$

или

$$3x^2 = 3m^2 + (4n^2 + 4mn + m^2),$$

или

$$3x^2 = 4(m^2 + mn + n^2)$$

и

$$x = 2\sqrt{\frac{m^2 + mn + n^2}{3}}. \qquad (6)$$

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый формулой (6). 2) Из произвольной точки (например, A) любой из трёх данных прямых (например, KK'), как из центра, радиусом, равным найденному отрезку x, засекаем точки B и C на прямых LL' и MM'. 3) Соединив точки A, B, C отрезками прямой, получим искомый треугольник ABC.

II. Если желаем определить угол α, то должны из уравнений (1) и (2) исключить величину x и решить полученное уравнение относительно α.

Разделив почленно (1) на (2), получим:

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

Далее последовательно находим:

$$m\sin(60^\circ-\alpha)=n\sin\alpha,\quad m(\sin 60^\circ\cos\alpha-\cos 60^\circ\sin\alpha)=n\sin\alpha,$$

$$m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=n\sin\alpha,\quad \frac{m\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{m}{2}\sin\alpha=n\sin\alpha,$$

$$\frac{m\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{2n+m}{2}\sin\alpha$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m\sqrt{3}}{2n+m}. \tag{7}$$

Построение. 1) Сначала строим угол α, определяемый формулой (7).

Построение угла α выполняем так:

Описываем окружность радиусом, равным отрезку m, и строим сторону p вписанного равностороннего треугольника:

$$p=m\sqrt{3}.$$

Строим отрезок q, равный сумме отрезков $2n+m$:

$$q=2n+m.$$

Строим прямой угол $F'OG'$.

На сторонах угла OF' и OG' отложим соответственно отрезки:

$$OF=p \text{ и } OG=q.$$

Угол FGO — искомый:

$$\angle FGO=\alpha.$$

2) Из любой точки (B) прямой LL' проводим прямую, образующую с линией LL' найденный угол α. 3) Проведённая прямая пересечёт линию KK' в некоторой точке A. 4) Из точки B, как из центра, радиусом, равным найденному отрезку AB, проводим дугу до пересечения с прямой MM' в некоторой точке C.

$\triangle ABC$ — искомый.

Задача. *Построить треугольник ABC, зная две его стороны ($BC=a$, $AC=b$) и длину (s) биссектрисы (CD) образуемого ими внутреннего угла (ACB) треугольника.* (Решить эту задачу посредством тригонометрии.)

А н а л и з. Допустим, что рис. 76 изображает искомый $\triangle ABC$. Введём следующие обозначения:

x — половина угла ACB,

β — угол ABC.

Опустим из точки C перпендикуляр CC_1 на отрезок AB или на его продолжение.

Из прямоугольных треугольников BCC_1, DCC_1 и ACC_1 имеем:

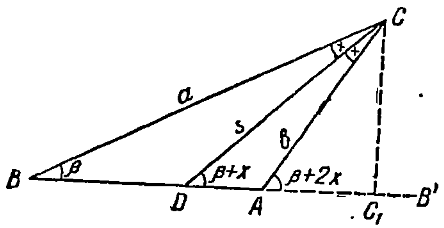


Рис. 76.

$$a\sin\beta=CC_1,\quad s\cdot\sin(\beta+x)=CC_1,$$
$$b\cdot\sin(\beta+2x)=CC_1,$$

откуда получаем:

$$a\sin\beta=s\cdot\sin(\beta+x) \qquad (1)$$

и

$$a\sin\beta=b\cdot\sin(\beta+2x). \qquad (2)$$

Уравнениям (1) и (2) можно придать такой вид:

$$a\sin\beta=s\sin\beta\cos x+s\cos\beta\sin x, \qquad (3)$$

$$a\sin\beta=b\sin\beta\cos 2x+b\cos\beta\sin 2x. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) соответственно получим:

$$(a-s\cdot\cos x)\sin\beta=s\cos\beta\cdot\sin x, \qquad (5)$$

$$(a-b\cos 2x)\sin\beta=b\cos\beta\cdot\sin 2x. \qquad (6)$$

Разделив почленно (5) на (6), придём к такой пропорции:

$$\frac{a-s\cos x}{a-b\cos 2x}=\frac{s\cdot\sin x}{b\cdot\sin 2x}. \qquad (7)$$

Используя формулу синуса и косинуса двойного угла, можем пропорцию (7) преобразовать так:

$$\frac{a-s\cdot\cos x}{a-b\,(2\cos^2 x-1)}=\frac{s\cdot\sin x}{2b\sin x\cos x}, \qquad (8)$$

т. е.,

$$\frac{a-s\cos x}{a+b-2b\cos^2 x}=\frac{s}{2b\cos x},$$

откуда

$$2ab\cos x-2bs\cos^2 x=s\,(a+b)-2bs\cos^2 x$$

или

$$2ab\cos x=(a+b)\,s$$

и

$$\cos x=\frac{(a+b)\,s}{2ab}. \qquad (9)$$

Построение. 1) Строим угол x, определяемый формулою (9). 2) Строим $\triangle BCD$ по двум сторонам (a и s) и углу x, заключённому между ними. 3) Из точки B через точку D проводим луч BB'. 4) Из точки C, как из центра, радиусом, равным b, проводим дугу до пересечения с лучом BB' в точке A. 5) Соединив отрезком точки A и C, получим искомый $\triangle ABC$.

Исследование. В формуле (9) угол x есть половина угла ABC.

Так как внутренний угол треугольника всегда меньше двух прямых, то угол x всегда меньше прямого угла, и, следовательно,

$$0 < x < 90^\circ,$$

а потому

$$1 > \cos x > 0. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получим

$$1 > \frac{(a+b)s}{2ab} > 0,$$

откуда

$$s < \frac{2ab}{a+b}. \tag{11}$$

Формула (11) показывает, какова должна быть зависимость между a, s, b, чтобы рассматриваемая задача имела решение.

XIII. Определение плоского сечения многогранника.

В этих упражнениях даётся многогранник, а также точки или линии, определяющие положение пересекающей его плоскости, и требуется построить фигуру сечения.

Примеры.

Задача. *Треугольная пирамида $SABC$ пересечена плоскостью, которая проходит через данную точку D, находящуюся на ребре SA, и параллельна рёбрам AB и SC. Построить фигуру сечения.*

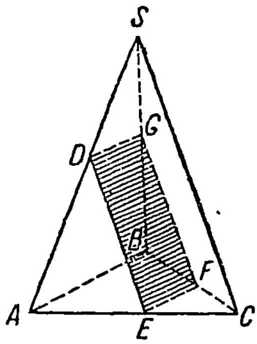


Рис. 77.

Анализ (с определением вида искомого сечения).

Так как плоскость искомого сечения с гранями SAC и SAB (рис. 77) имеет общую точку D, то она пересечёт эти грани по некоторым прямолинейным отрезкам DE и DG.

Согласно теореме о линии пересечения двух плоскостей, из которых одна проходит через прямую, параллельную другой плоскости, можно утверждать, что отрезки DE и DG будут соответственно параллельны рёбрам пирамиды SC и AB, т. е. $DE \parallel SC$ и $DG \parallel AB$.

На основании таких же рассуждений можно утверждать, что плоскость искомого сечения, имеющая с основанием пирамиды общую точку E пересечёт его по отрезку EF, параллельному AB, т. е. $EF \parallel AB$.

Зная, что точки F и G находятся как на плоскости искомого сечения, так и на грани SBC, приходим к выводу, что отрезок FG является их пересечением; причём, согласно вышеуказанной теореме, отрезок FG будет параллелен SC.

Четырёхугольник $DEFG$ — искомое сечение.

Так как $DE \parallel SC$ и $GF \parallel SC$, то $DE \parallel GF$.

Точно так же $DG \parallel AB$ и $EF \parallel AB$, а потому $DG \parallel EF$.

Следовательно, $DEFG$ — параллелограм.

Построение. 1) Проводим отрезок DE, параллельный ребру SC, до встречи с ребром AC пирамиды в некоторой точке E. 2) Из точки E проводим отрезок, параллельный прямой AB, до встречи с ребром BC пирамиды в некоторой точке F. 3) Из точки D проводим отрезок DG, параллельный отрезку AB, до встречи с ребром SB пирамиды в некоторой точке G. 4) Соединяем прямолинейным отрезком точки F и G. Параллелограм $DEFG$ является искомой фигурой сечения.

Исследование. 1) Какова бы ни была данная треугольная пирамида, задача имеет одно вполне определённое решение. 2) Если ребро SC образует с ребром AB угол, отличный от прямого, то искомая фигура сечения представляет собою параллелограм. В этом случае можно для точки D найти такое положение на ребре SA, что фигура сечения будет представлять собою ромб. 3) Если $SC \perp AB$, то искомой фигурой сечения является прямоугольник, и можно для точки D найти такое положение на ребре SA, что фигура сечения будет представлять собою квадрат.

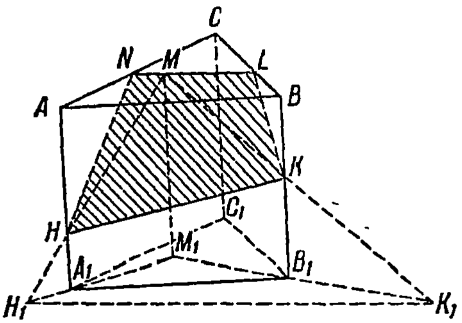


Рис. 78.

Задача. *Прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через точки H, K и M, лежащие соответственно на рёбрах AA_1 и BB_1 и на верхнем основании ABC. Построить фигуру сечения.*

Построение (рис. 78). 1) Соединив точки H, M, K отрезками прямой, получим $\triangle HMK$, который лежит в искомой плоскости сечения. 2) Находим проекцию A_1M_1 отрезка HM на плоскость нижнего основания призмы. Так как призма прямая, то $MM_1 \parallel AA_1$ и $MM_1 = AA_1$. 3) Продолжив отрезки A_1M_1 и HM, получим точку H_1, в которой продолжение отрезка HM пересекает плоскость нижнего основания призмы. 4) Находим проекцию B_1M_1 отрезка MK на плоскость нижнего основания призмы. 5) Продолжив отрезки B_1M_1 и MK до пересечения, получим точку K_1, в которой продолжение отрезка MK пересекает плоскость нижнего основания призмы. 6) Соединив отрезком точки H_1 и K_1, получим прямую, по которой плоскость сечения пересекает плоскость нижнего основания призмы. 7) Параллельые плоскости (основания призмы) секущая плоскость может пересечь только по параллельным прямым, а потому в плоскости верхнего основания через точку M проводим прямую (NL), параллельную отрезку H_1K_1. 8) Соединив точки H и N, а также точки K и L отрезками прямой, получим четырёхугольник $HKLN$, представляющий собою искомое сечение.

XIV. Составление учениками геометрических задач на построение.

Можно потребовать, чтобы составляемая учеником задача удовлетворяла одному из следующих условий:

а) была бы аналогична данной геометрической задаче на построение;
б) решалась бы указанным методом;
в) требовала бы применения двух (или трёх) данных геометрических мест, или теоремы Пифагора, или деления отрезка в данном отношении и т. п.
г) была бы такой стереометрической задачей на построение, которая аналогична данной планиметрической задаче.

Ученик должен решить задачу, составленную им самим, и исследовать её.

Ниже помещаем несколько примеров аналогичных задач.

Задачи, проработанные в классе	Аналогичные задачи, составленные учениками
Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.	Построить треугольник по боковой стороне, углу при вершине и высоте.
В треугольнике найти точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.	В треугольнике найти точку, из которой две его стороны были бы видны под углами в 135°, а третья — под прямым углом.
Разделить треугольник на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными основанию.	Разделить треугольник на четыре равновеликие части прямыми, перпендикулярными основанию.
Через данную точку, находящуюся внутри угла, провести прямую так, чтобы часть её, заключённая между сторонами угла, делилась этой точкой пополам.	Через данную точку, находящуюся внутри угла, провести прямую так, чтобы часть её, заключённая между сторонами угла, делилась бы этой точкой в отношении $m:n$.
Через точку, данную на стороне данного треугольника, провести прямую, рассекающую площадь этого треугольника пополам.	Через точку, данную на стороне данного треугольника, провести прямые, рассекающие площадь этого треугольника на 3 равные части.

Задачи проработанные в классе	Аналогичные задачи, составленные учениками
Вписать в три данные параллельные прямые правильный треугольник.	Вписать в три данные параллельные прямые: 1) равнобедренный прямоугольный треугольник; 2) равнобедренный треугольник, имеющий при вершине угол, равный 30°; 3) треугольник, стороны которого относятся, как $m:n:p$; 4) треугольник, подобный данному треугольнику ABC, и т. п.

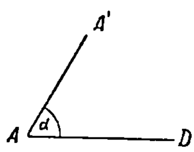
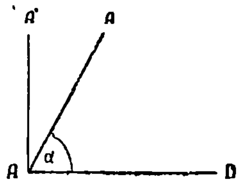
XV. Изготовление таблицы, иллюстрирующей постепенное выполнение требуемого построения.

Такой вид домашних упражнений имеет целью закрепить в памяти учащихся не только сами операции построения, но и последовательность их выполнения.

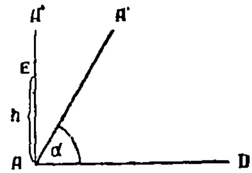
Сущность таких упражнений заключается в том, чтобы учащиеся сами изготовляли таблицу, которая бы поясняла чертежами решение рассматриваемой задачи, причём в строгой последовательности. Так, на первом чертеже изображается первая операция построения, на втором — первая и вторая операции, на третьем — первая, вторая и третья и т. д., пока не будет выполнено всё требуемое построение.

Приведём пример.

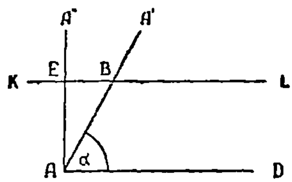
Задача. *Построить трапецию $ABCD$, если даны: одно из её оснований ($AD=a$), угол при этом основании ($A=\alpha$), высота трапеции (h) и угол, образуемый её диагоналями* [$\angle(AC, BD)=\beta$]. Дать таблицу чертежей, показывающих последовательные стадии решения.

Построение (рис. 79). 1. Строим отрезок AD, равный a.	
2. На отрезке AD при точке A строим угол $A'AD$, равный α.	
3. В точке A восставим перпендикуляр AA'' к отрезку AD.	

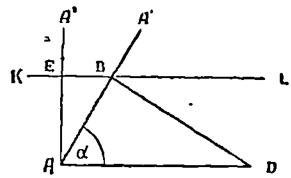
4. На прямой AA'' от точки A отложим отрезок AE, равный данной высоте h трапеции.



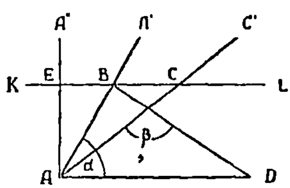
5. Через точку E проводим прямую KL, параллельную основанию AD. Точку пересечения KL и AA' обозначим буквою B.



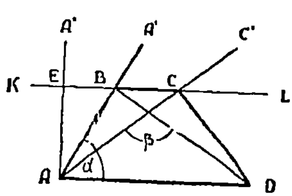
6. Соединив точки B и D отрезком прямой, получаем диагональ BD.



7. Из точки A проводим такую прямую AC', которая образует с диагональю BD данный угол β. Прямая AC' пересечёт прямую KL в точке C.



8. Соединяем точки C и D отрезком прямой и получаем искомую трапецию.



XVI. Изготовление модели, поясняющей выполнение геометрического построения на плоскости.

Чтобы учащиеся более отчётливо представляли себе решение геометрической задачи на построение, полезно требовать от них изготовления модели, поясняющей это решение. Предлагая ученикам такое задание, следует показать им чертёж модели и подробно изложить, как и из чего надо изготовить её.

Чем предлагать такое упражнение всему классу, лучше так организовать изготовление этих моделей, чтобы каждый учащийся в течение учебного года сделал одну-две модели для иллюстрации различных задач на построение.

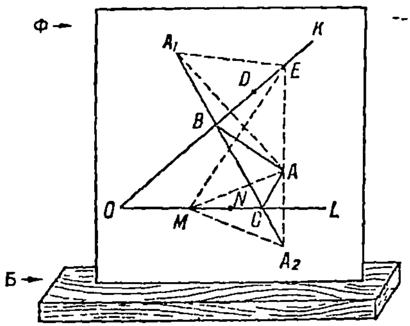


Рис. 80.

Вот описание модели, поясняющей решение следующей задачи.

Дан острый угол KOL и внутри его точка A. Построить такой треугольник наименьшего периметра, чтобы одна его вершина лежала в данной точке A, а две другие B и C—на сторонах угла KOL.

1. Берётся прямоугольный кусок фанеры Ф (рис. 80), к которой приклеена плотная бумага с нарисованными на ней отрезками OK, OL, A_1A_2, AB, AC и двумя пунктирными линиями AA_1 и AA_2.

2. В точках A и A_1 закреплены концы соединяющей их резинки, имеющей вид шнурка. Такой же резинкой должны быть соединены точки A и A_2.

3. В точках E, D, M и N вбиты в фанеру небольшие гвоздики так, что часть их ствола со шляпкой выступает над фанерой настолько, чтобы они могли удержать перекинутую через них резинку. На чертеже первая резинка перекинута через гвоздик, вбитый в точке E, а вторая резинка перекинута через гвоздик M.

4. Модель должна иметь два кольца, посредством которых её можно было бы повесить на классной доске или на стене.

XVII. Изготовление модели, иллюстрирующей выполнение геометрического построения в пространстве.

Такие модели можно изготовлять из дерева, картона, фанеры, жести, проволоки, ниток, тонких палочек и стекла. На рисунке 81 показана модель, относящаяся к следующей задаче:

„*Дана плоскость P и по одну сторону её две точки A и B. Найти на плоскости P такую точку C, чтобы сумма отрезков AC и BC была бы наименьшей из всех возможных*“.

Изготовление таких моделей в высшей степени полезно, потому что оно способствует развитию пространственных представлений, даёт возможность ученику составить отчётливое представление о зависимости между геометрическими образами и, наконец, довольно прочно закрепляет в памяти решение данной задачи.

Модели и таблицы, хорошо изготовленные учениками, следует хранить в кабинете учебных пособий.

Вот описание модели, которая поясняет пересечение треугольной призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ плоскостью, проходящей через точки A, B, C и находящейся соответственно на следующих рёбрах призмы: A_2C_2, A_1A_2 и B_1C_1 (рис. 82).

1. Деревянная подставка прямоугольной формы (a).

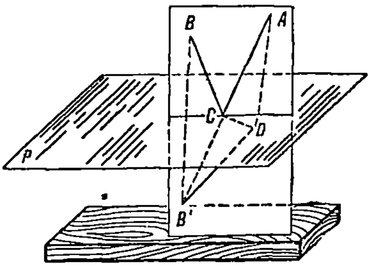


Рис 81

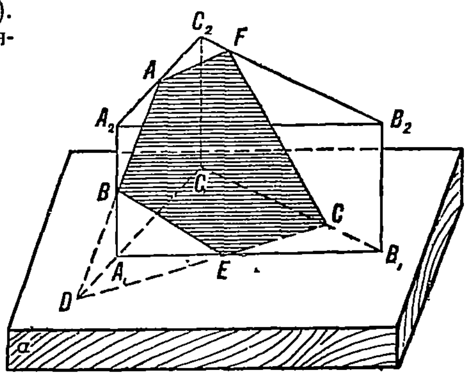


Рис. 82.

2. Проволочные отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (воткнутые в подставку), A_2C_2, C_2B_2, B_2A_2, AD, BE, CF, FA.

3. На подставке (a) нарисованы следующие отрезки: DC, A_1D, A_1C_1, C_1B_1, A_1B_1.

4. Картонный пятиугольник $ABECF$ прикреплён к проволочным стержням A_2C_2, C_2B_2 и т. д.

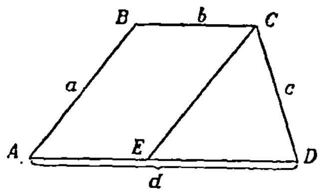
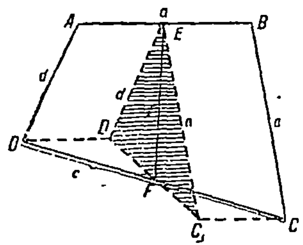
XVIII. Изготовление таблиц, иллюстрирующих применение данного метода к решению задач на построение.

Предлагать ученикам такие упражнения можно лишь тогда, когда они решили достаточное число задач, требующих применения данного метода.

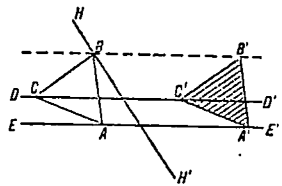
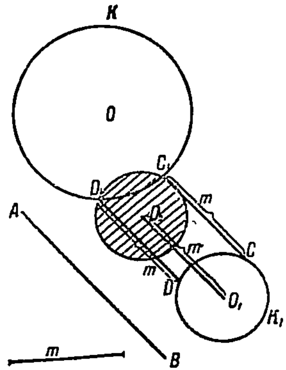
Чтобы на изготовление этих таблиц ученики тратили возможно меньше времени, следует указать им номера решённых ими задач на построение, в которых применяется данный метод; обстоятельно разъяснить, как надо оформлять выполнение требуемой таблицы, и показать образец аналогичной таблицы.

Ниже приводим пример одной из предлагаемых нами таблиц.

Метод параллельного перенесения.

	Условие задачи	Пояснительный чертёж	Ход построения	Объект параллельного перенесения
I	Построить трапецию по четырём данным её сторонам: a, b, c, d.	 Рис. 83.	1. Переносим* сторону AB по направлению BC до совмещения B с C и получаем $\triangle CDE$, в котором нам известны три стороны. 2. Построив $\triangle CDE$, переносим* сторону CE в начальное положение (AB) и получаем искомую трапецию $ABCD$.	Одна из сторон искомой фигуры.
II	Построить четырёхугольник $ABCD$, зная все его стороны a, b, c, d и отрезок f, соединяющий середины (E и F) двух противоположных сторон.	 Рис. 84.	1. Стороны AD и BC переносим* по направлению AB до совпадения точек A и B с точкою E. 2. Соединив отрезком точки C и D, получим $\triangle C_1D_1E$, в котором нам известны две стороны (D_1E и C_1E) и медиана третьей стороны. 3. Построив $\triangle C_1D_1E$, переносим стороны C_1E и D_1E в начальное положение (BC, AD) и получаем искомый четырёхугольник $ABCD$.	Две стороны искомой фигуры.

* Параллельно своему направлению.

III	Две параллельные прямые DD' и EE' пересечены третьей HH'. Построить равносторонний треугольник с данной стороной m так, чтобы его вершины находились на прямых DD', EE' и HH'.	 Рис. 85.	1. Строим $\triangle A'B'C'$, стороны которого порознь равны m, а вершины A' и C' находятся на прямых DD' и EE'. 2. Переносим $\triangle A'B'C'$ параллельно прямой DD' до совпадения точки B' с некоторою точкою B прямой HH': получаем искомый $\triangle ABC$.	Построенная фигура.
IV	Между двумя данными окружностями K и K_1 провести отрезок данной длины m параллельно данной прямой AB.	 Рис. 86.	1. Переносим центр O_1 параллельно прямой AB на расстояние O_1O_2, равное m, и описываем из O_2 окружность K_2, равную K_1. 2. Из точек C_1 и D_1, являющихся пересечением окружностей K и K_2, проводим отрезки C_1C и D_1D, параллельные O_1O_2 (или AB) до встречи с окружностью K_1 в точках C и D. CC_1 и DD_1 — искомые отрезки, каждый из которых равен m. Примечание. Точки C и D можно получить, проводя дуги радиусов m, центры которых находятся в точках C_1 и D_1.	Данная фигура.

XIX. Исследование решённой в классе задачи на построение.

Если недостаток времени не даёт возможности произвести исследование решённой в классе геометрической задачи на построение, то целесообразно предложить ученикам выполнить это в порядке домашней работы. Когда такое исследование является очень сложным, можно его ограничить указанием определённой конфигурации.

Допустим, что в классе решена такая задача: „Построить окружность радиуса r, которая касается данной окружности радиуса R и данной прямой KL".

После этого учитель может предложить ученикам одно из таких упражнений:

Исследовать, сколько решений имеет эта задача,

1) если $R > 2r$,

2) если $R > r > \frac{R}{2}$,

3) если $R = r$,

4) если $R < r$.

Чтобы учащиеся вникали в суть произведённого исследования решённой геометрической задачи на построение и отчётливо представляли его результаты, они должны это исследование оформлять таблицей, содержащей либо соответствующие формулы, либо пояснительные чертежи, либо формулы, сопровождаемые чертежами.

Допустим, в классе рассматривалась следующая задача: „Данным радиусом (R) описать окружность, проходящую через данную точку (P) и касающуюся данной прямой (KL)".

Учитель не успел произвести исследование этой задачи и предложил ученикам выполнить часть решения в виде домашней работы.

Выполненная работа должна содержать условие, анализ, построение, доказательство и заканчиваться исследованием по проводимому ниже образцу.

Исследование. Обозначая буквою d расстояние от точки P до прямой KL, можно результаты исследования представить в виде следующей таблички:

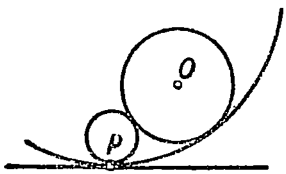
	Значение d	Число решений	Что собою представляет решение
I	$d = 0$	2	Две окружности, симметрично расположенные относительно прямой KL, которая имеет с ними общую точку (P) касания
II	$0 < d < R$ или $R < d < 2R$	2	Две окружности, пересекающиеся в точке P.

Продолжение

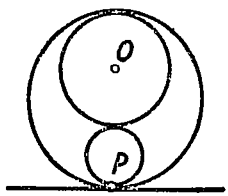
	Значение d	Число решений	Что собою представляет решение
III	$d=R$	2	Две окружности, касающиеся одна другой в точке P.
IV	$d=2R$	1	Окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точку P с точкою, в которой прямая KL касается этой окружности.
V	$d>2R$	0	

Задача. *Дана прямая и окружность, имеющая центр в точке O, и точка P на прямой. Построить окружность, которая касалась бы данной окружности и прямой в точке P. Исследовать эту задачу, указав, сколько решений она имеет при различных конфигурациях данных величин.*

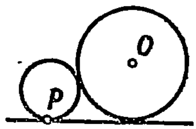
Решение. Величины, данные в условии задачи, имеют одиннадцать различных характерных конфигураций. Под рисунками № 87 указано, сколько решений имеет задача при данной конфигурации.



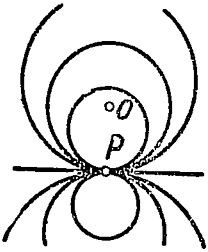
(Два решения.)



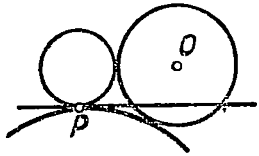
(Два решения.)



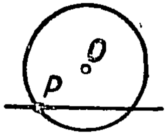
(Одно решение.)



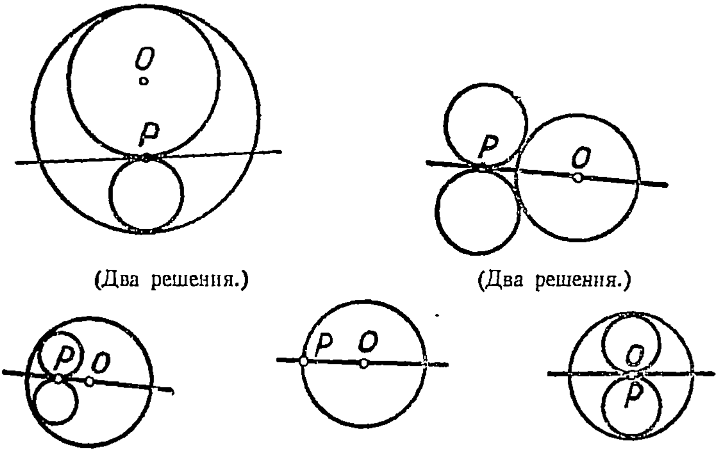
(Бесконечное множ. решений.)



(Два решения.)



(Ни одного решения.)



(Два решения.) (Два решения.)

(Два решения.) (Ни одного решения.) (Два решения.)

Рис. 87.

Задача. *Даны две точки A и B, лежащие вне прямой KL. Найти на прямой KL такую точку C, чтобы отрезки AC и BC составляли с прямой KL равные углы. Определить, какое число решений может иметь задача.* *

Исследование. Если введём обозначения: h_a—длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую KL; h_b—длина перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую KL, d—расстояние между основаниями этих перпендикуляров, то результаты исследования можно представить в виде такой таблички с пояснительным чертежом (рис. 88, *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*).

		Значения d	Значения h_a и h_b	Число решен.	Пояснит. рис. 88
1	Точки A и B расположены по обе стороны прямой KL	$d \neq 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a \neq h_b$	2	*а*
2		$d \neq 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a = h_b$	1	*б*
3		$d = 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a \neq h_b$	1	*в*
4		$d = 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a = h_b$	∞	*г*
5	Точки A и B расположены по одну сторону прямой KL	$d \neq 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a \neq h_b$	2	*д*
6		$d \neq 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a = h_b$	1	*е*
7		$d = 0$	$h_a \neq 0$, $h_b \neq 0$, $h_a \neq h_b$	1	*ж*

* Такое упражнение можно предложить ученикам после того, как упоминаемая в нём задача решена хотя бы для какого-нибудь частного случая.

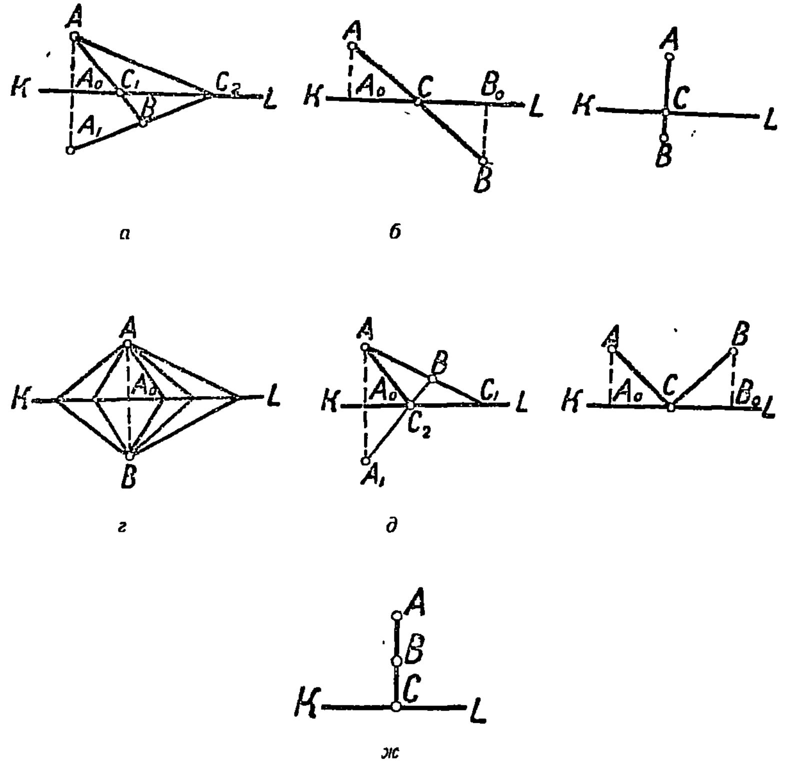


Рис. 88.

Задача. *В данную коническую поверхность* (S) *вписать шаровую поверхность, которая проходила бы через данную точку* (M).

Построение. 1) Проводим плоскость P через точку M и ось данной конической поверхности. Плоскость P пересечёт поверхность S по двум образующим AT и BT, где T—вершина данной конической поверхности. 2) В угол ATB вписываем две окружности K_1 и K_2, каждая из которых проходит через точку M и касается сторон угла ATB. 3) Из центра O_1 окружности K_1 её радиусом описываем шаровую поверхность S_1. 4) Из центра O_2 окружности K_2 её радиусом описываем шаровую поверхность S_2.

S_1 и S_2—искомые шаровые поверхности.

Затем ученикам предлагается в порядке домашней работы произвести исследование этой задачи.

В данном случае ученическая работа примет, примерно, такой вид.

Исследование. 1) Если данная точка M совпадает с вершиною T конической поверхности или лежит вне пространства, ограничиваемого этой поверхностью, то задача не имеет решения. 2) Если точка M находится на какой-нибудь из образующих поверхности S, то задача имеет одно решение. 3) Если точка M находится внутри пространства, ограничиваемого поверхностью S, то задача имеет два решения.

К этим выводам ученик должен приложить изготовленную им таблицу соответствующих пояснительных чертежей.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ШЕСТОГО КЛАССА.

1. *Построить сумму нескольких углов.*

Решение. Пусть требуется найти сумму трёх углов: K, L и M (рис. 89).

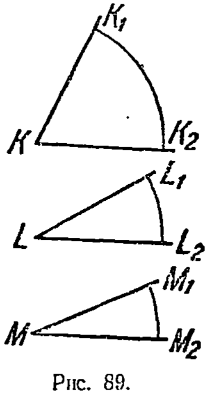


Рис. 89.

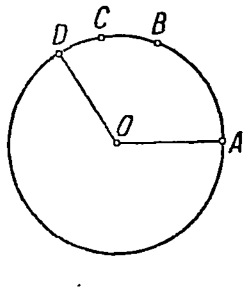


Рис. 90.

Построение (рис. 90). 1) Около произвольной точки O описываем произвольным радиусом (r) окружность и какую-нибудь её точку A соединяем с центром. 2) Тем же радиусом около точек K, L, M, внутри данных углов, описываем дуги K_1K_2, L_1L_2, M_1M_2, концы которых лежат на сторонах углов. 3) На окружности от точки A откладываем последовательно дуги AB, BC, CD, соответственно равные дугам K_1K_2, L_1L_2 и M_1M_2.

Угол DOA искомый: $\angle DOA = \angle K + \angle L + \angle M$.

2. *Построить разность двух углов*: K *и* L (рис. 91).

Построение. 1) Произвольным радиусом (r) чертим около вершин K и L дуги K_1K_2 и L_1L_2 внутри каждого из данных углов.

2) На дуге K_1K_2, проведённой в большем из двух данных углов, от точки K_2 откладываем дугу K_2M, равную дуге L_1L_2. Соединив прямой точку M с точкой K, получим угол MKK_1, равный разности двух данных углов, то есть угол $MKK_1 = \angle K - \angle L$.

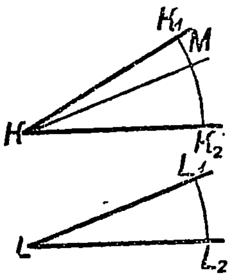


Рис. 91.

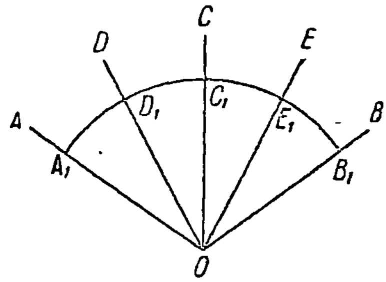


Рис. 92.

3. *Разделить данный угол AOB на 4 равные части* (рис. 92).

Построение. 1) Известным приёмом делим данный угол AOB пополам: $\angle AOC = \angle COB = \frac{\angle AOB}{2}$. 2) Тем же приёмом делим пополам угол AOC и получаем:

$$\angle AOD = \angle DOC = \frac{\angle AOB}{4}.$$

3) Таким же образом делим пополам угол COB и получаем:

$$\angle COE = \angle EOB = \frac{\angle AOB}{4}.$$

4. *Дан угол A и внутри его точка P. Найти такую точку, которая была бы одинаково удалена от обеих сторон угла и находилась бы от точки P на данном расстоянии m.*

Анализ. По условию, искомая точка равноудалена от обеих сторон и потому находится где-то на биссектрисе данного угла.

Кроме того, известно, что искомая точка отстоит от данной точки P на расстоянии, равном m, и, следовательно, находится на окружности K, описанной из точки P радиусом, равным m.

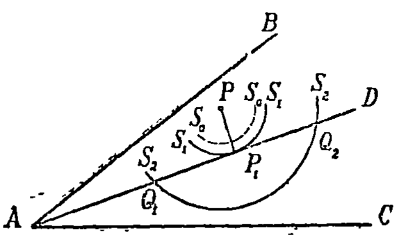


Рис. 93.

Отсюда вытекает, что искомая точка находится на пересечении окружности с биссектрисой угла A.

Построение. 1) Проводим биссектрису AD угла BAC. 2) Из точки P, как из центра, радиусом, равным m, описываем окружность K. 3) Точки Q_1 и Q_2, в которых окружность пересечёт прямую AD, являются искомыми.

Исследование. Перпендикуляр, опущенный из точки P на биссектрису AD, обозначим посредством PP_1.

Если $m < PP_1$, то задача не имеет решения.

Если $m = PP_1$, ,, ,, имеет одно решение.

Если $AP \geqslant m > PP_1$, то задача имеет два решения.

Если $m > AP$, то задача имеет одно решение.

5. *Через вершину данного угла AOB* (рис. 94) *провести вне его прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.*

Построение. 1) Строим биссектрису OO' данного угла AOB. 2) Через точку O проводим прямую KL, перпендикулярную к OO'. KL — искомая линия.

6. *Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу* (α) *при основании.*

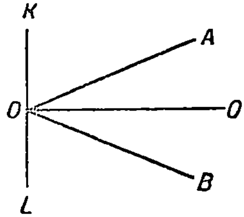


Рис. 94.

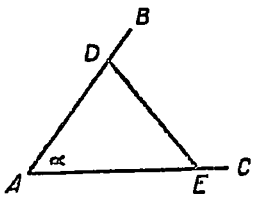


Рис. 95.

Построение (рис. 95). 1) На произвольной прямой при какой-нибудь точке A строим угол BAC, равный данному углу α. 2) На стороне AB от точки A откладываем отрезок AD, равный данной боковой стороне. 3) Из точки D, как из центра, радиусом, равным AD, проводим дугу до пересечения со стороной AC.

$\triangle ADE$ — искомый.

7. *Построить равнобедренный треугольник по высоте* (h) *и углу* (α) *при вершине.*

Анализ. Предположим, что задача решена и $\triangle ADC$ — искомый (рис. 96). Опустив из точки A перпендикуляр AB на основание DC, мы разобьём $\triangle ADC$ на два равных прямоугольных треугольника ABD и ABC. Так как ясно, что $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$, то, значит, мы можем построить прямоугольный $\triangle ABC$, представляющий собой половину искомого треугольника. Затем, продолжив BC за вершину и отложив на нём отрезок BD, равный BC, получим искомый $\triangle ADC$.

8. *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.*

Построение (рис. 97). 1) Строим отрезок KL, равный данной гипотенузе. 2) На отрезке KL при точке K строим угол LKM, равный данному острому углу. 3) Из точки L опускаем перпендикуляр LN на прямую KM.

Треугольник KLN—искомый.

9. *Построить прямоугольный треугольник, в котором дан острый угол и высота, опущенная на гипотенузу.*

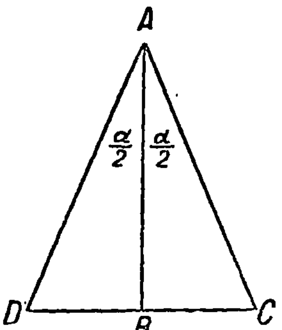


Рис. 96.

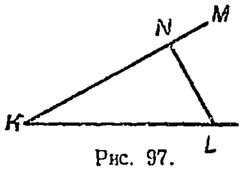


Рис. 97.

10. *Построить равнобедренный треугольник, если известны следующие его элементы:* 1) *угол при вершине и боковая сторона,* 2) *основание и опущенная на него высота,* 3) *угол при вершине и высота, опущенная на боковую сторону,* 4) *основание и боковая сторона,* 5) *угол при основании и высота, опущенная на боковую сторону,* 6) *основание и высота, опущенная на боковую сторону.*

11. *Построить равнобедренный треугольник по основанию* (a) *и прилежащему углу* (α) (рис. 98).

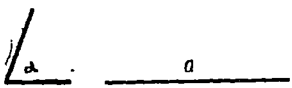


Рис. 98.

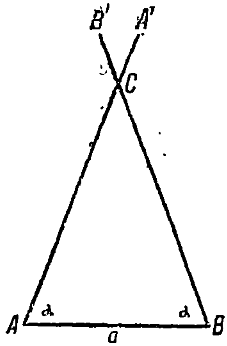


Рис. 99.

Анализ. Так как искомый треугольник равнобедренный, то в нём углы при основании равны. Следовательно, нам дано основание треугольника и два прилежащих к нему угла.

Построение (рис. 99). На произвольной прямой строим отрезок AB, равный данному отрезку a.

На отрезке AB, при точках A и B, строим углы BAA' и ABB', порознь равные данному углу α.

Отмечаем буквою C пересечение прямых AA' и BB'.

$\triangle ABC$—искомый.

Доказательство. Мы построили отрезок, равный a, и на нём, при его концах, углы, порознь равные углу α.

Прямые AA' и BB' не параллельны; следовательно, они непременно пересекутся в некоторой точке C, и мы получим $\triangle ABC$. Так как в $\triangle ABC$ стороны AC и BC лежат против равных углов, то они равны, т. е.

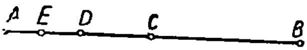


Рис. 100.

$$AC = BC,$$

и, значит, $\triangle ABC$—равнобедренный. Треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям условия задачи, а потому он искомый.

Исследование. Если угол α острый, то задача имеет решение. В том случае, когда $\angle \alpha \geqslant 90^\circ$, задача не имеет решений.

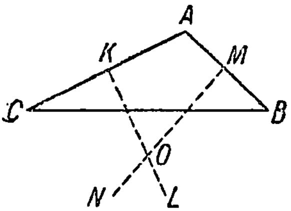


Рис. 101.

12. *Разделить данный отрезок AB на 8 равных частей.*

Построение (рис. 100). 1) Известным приёмом делим отрезок AB пополам, т. е. находим его середину — точку C, так что $AC = CB$ и $AC = \frac{1}{2}AB$. 2) Тем же приёмом находим середину D отрезка AC и получаем $AD = \frac{1}{4}AB$. 3) Тем же приёмом находим середину E отрезка AD. Ясно, что $AE = \frac{1}{8}AB$. 4) Откладывая на отрезке AB от точки A последовательно отрезки, равные AE, мы разделим его на 8 равных частей.

13. *Найти точку, равноотстоящую от трёх вершин треугольника ABC.*

Построение (рис. 101). Из середины (K) отрезка AC восставим к нему перпендикуляр KL. 2) Из середины (M) отрезка AB восставим к нему перпендикуляр MN. Прямые KL и MN пересекутся в искомой точке O.

14. *На прямой KL, пересекающей стороны угла AOB, найти точку, одинаково удалённую от сторон этого угла.*

Построение (рис. 102). Проводим биссектрису OQ данного угла AOB. Точка (P) пересечения прямых KL и OQ—искомая.

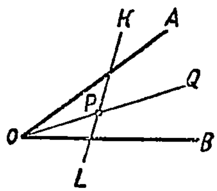


Рис. 102.

15. *Дан угол A и точки B и C, расположенные одна—на одной стороне угла, другая — на другой. Найти:*

1) *точку M, равноотстоящую от сторон угла и от точек B и C.*

2) *точку N, равноотстоящую от сторон угла и удалённую от точки C на отрезок, равный BC.*

Построение (рис. 103). I. 1) Проводим биссектрису AD данного угла BAC. 2) Из середины O отрезка BC восставим перпендикуляр. Он пересечёт биссектрису указанного угла в искомой точке M.

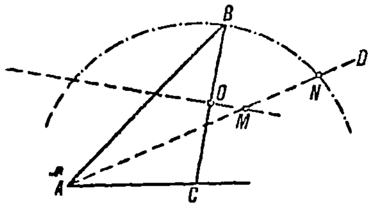


Рис. 103.

II. 1) Строим биссектрису AD данного угла BAC. 2) Из точки C, как из центра, радиусом, равным BC, проводим дугу, пересекающую биссектрису данного угла в искомой точке N.

16. *Построить прямоугольный треугольник по катету (p) и разности (d) двух других сторон.*

Анализ. Допустим, что чертёж 104 представляет решение задачи, причём $\triangle AOB$ — искомый. В нём сторона AO есть катет, длина которого нам дана (p). Чтобы ввести в рассмотрение разность (d) двух других сторон, т. е. гипотенузы AB и катета OB, продолжим этот катет за точку O и отложим на нём от точки B отрезок BC, равный гипотенузе AB. Отрезок CO равен данному отрезку d. Можем построить прямоугольный треугольник ACO, катеты которого (p и d) нам известны.

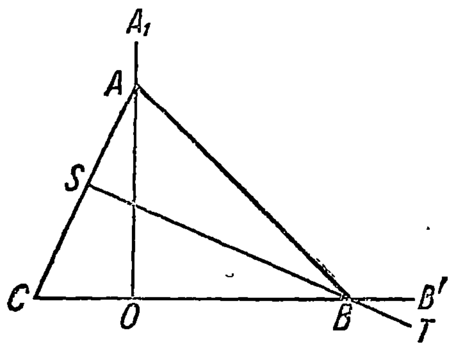


Рис. 104.

Треугольник ABC — равнобедренный, так как по построению $BC = AB$.

Если из середины гипотенузы AC построенного нами треугольника ACO восставим перпендикуляр к ней, то он пройдёт через вершину равнобедренного треугольника ABC, являющуюся третьей вершиной искомого прямоугольного треугольника AOB.

Построение. 1) Строим прямой угол A_1OB'. 2) На стороне OA_1 от точки O отложим отрезок OA, равный данному катету (p). 3) На продолжении стороны $B'O$ от точки O отложим отрезок OC, равный d. 4) Соединяем точки A и C отрезком прямой. 5) Из середины S отрезка AC восставим перпендикуляр к отрезку AC, который пересечёт прямую OB' в некоторой точке B.

Треугольник AOB — искомый.

17. *Построить треугольник по двум сторонам a и b и углу A, лежащему против меньшей из них.*

Построение (рис. 105). 1) Строим угол $B'AC'$, равный данному углу A. 2) На стороне AC' этого угла откладываем отрезок AC, равный большей стороне b. 3) Из точки C, как из центра, радиусом, равным отрезку a, проведём дугу, которая пересечёт сторону AB' в точках B и B_1. 4) Соединяем отрезками точки B и B_1 с точкою C.

$\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$—искомые.

Исследование. Угол A острый, так как он лежит против меньшей из данных сторон.

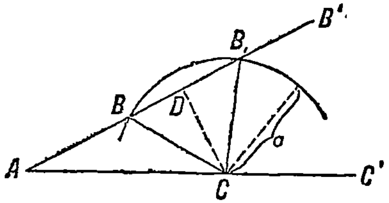


Рис. 105.

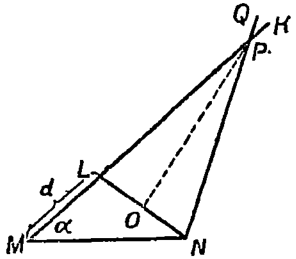


Рис. 106.

Опустим из точки C перпендикуляр CD на сторону AB'.

Если $CD < a < b$, задача имеет два решения.

Если $a = CD$, задача имеет одно решение.

Если $a < CD$, задача не имеет решений.

18. *Построить треугольник по основанию* (a), *меньшему из углов* (α), *прилежащих к основанию, и разности* (d) *двух других сторон.*

Построение (рис. 106). 1) Построим отрезок MN, равный данному основанию, и на нём при точке M угол NMK, равный α. 2) Отложим на MK от точки M отрезок ML, равный отрезку d. 3) Соединим точки L и N. 4) Из середины (O) отрезка LN восставим перпендикуляр OQ к этому отрезку. 5) Обозначим буквою P точку пересечения прямых MK и OQ. Треугольник MNP—искомый.

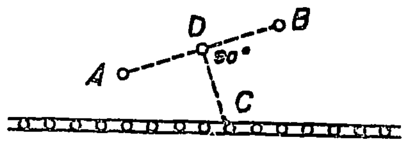


Рис. 107.

18a. *По соседству с железной дорогой расположены две деревни: A и B* (рис. 107). *Найти на линии железной дороги, имеющей прямолинейную форму, место для станции, которая была бы одинаково удалена от A и B.*

Указание. Эта задача решается точно так же, как и задача, приведённая на стр. 38.

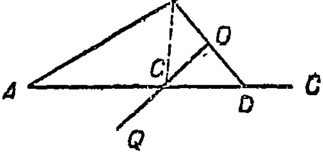


Рис. 108.

19. *Дан угол $B'AC'$ и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C, чтобы сумма $AC+BC$ была равна данному отрезку l.*

Построение (рис. 108). 1) На стороне AC' от точки A отложим отрезок AD, равный данному отрезку l, и соединим точки B и D. 2) Из середины O отрезка BD восставим к нему перпендикуляр OQ, пересекающий прямую AD в некоторой точке C.

Точка C — искомая.

Доказательство. $l = AD = AC + CD$, но $BC = CD$, следовательно, $l = AC + BC$.

20. *Даны два угла треугольника α и β. Требуется построить третий угол его.*

Построение. 1-й способ. 1) Чертим произвольную прямую AB и около произвольно взятой на ней точки O описываем произвольным радиусом (R) полуокружность так, чтобы её концы K и L лежали на прямой AB (рис. 109). 2) Тем же радиусом R чертим (рис. 110) дуги P_1P_2 и Q_1Q_2 в данных углах α и β. От точки K на полуокружности откладываем последовательно дуги KC и CD, соответственно равные дугам P_1P_2 и Q_1Q_2. Соединив отрезком прямой точку D с O, получим искомый третий угол ($\angle DOL$) треугольника.

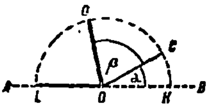


Рис. 109.

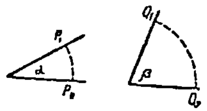


Рис. 110.

2-й способ. 1) Строим отрезок AB, имеющий произвольную длину. 2) Строим треугольник по стороне, равной AB, и двум прилежащим углам α и β.

Третий угол этого треугольника — искомый.

21. *Дан острый угол AOB прямоугольного треугольника* (рис. 111). *Требуется построить другой острый угол его.*

Построение. В вершине данного угла восставим перпендикуляр OC к одной из сторон этого угла, например к стороне OB.

$\angle AOC$ — искомый.

22. *Провести прямую, параллельную данной прямой (KL) и находящуюся от неё на данном расстоянии (d).*

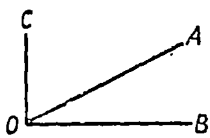


Рис. 111.

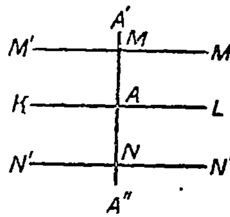


Рис. 112.

Построение (рис. 112). 1) Через любую точку A прямой KL проведём прямую $A'A''$, перпендикулярную KL. 2) На линии $A'A''$ от точки A отложим в одну и другую сторону отрезки AM и AN, равные данному расстоянию d. 3) К прямой $A'A''$ в точках M и N восставим перпендикуляры $M'M''$ и $N'N''$. Прямые $M'M''$ и $N'N''$ — искомые.

23. *Построить прямоугольный треугольник, если известен его острый угол и сумма противолежащего катета и гипотенузы.*

24. *Построить прямоугольный треугольник, если известен его острый угол и периметр.*

25. *Даны два отрезка A_1A_2 и B_1B_2, лежащие на сторонах угла, вершина которого не помещается на чертеже. Разделить пополам этот угол.*

Построение (рис. 113). 1) Берём внутри угла произвольную (но подходящую) точку P вблизи отрезка A_1A_2 и через эту точку проводим прямую $P'P''$, параллельную A_1A_2. 2) Берём точку Q, которая отстоит от прямой B_1B_2 на таком расстоянии, на каком точка P отстоит от прямой A_1A_2. 3) Через точку Q проводим прямую $Q'Q''$, параллельную B_1B_2. 4) Обозначим буквой C ту точку, в которой пересекаются прямые $P'P''$ и $Q'Q''$. Биссектриса угла $P''CQ''$ делит пополам угол, образуемый отрезками A_1A_2 и B_1B_2.

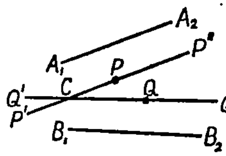


Рис. 113.

26. *Через данную точку (P) провести прямую под данным углом (α) к данной прямой (KL).*

Построение (рис. 114). 1) При точке A прямой KL строим угол $A'AL$, равный углу α. 2) Через точку P проводим прямую $P'P''$, параллельную AA'. Прямая $P'P''$ — искомая.

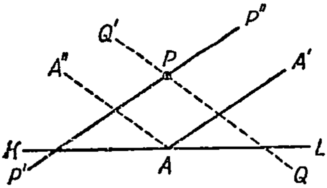


Рис. 114.

Примечание. Мы строили угол α на полупрямой AL. Если бы мы построили этот же угол на полупрямой AK, то получили бы другую прямую QQ', представляющую собою иное решение рассматриваемой задачи.

27. *Даны две прямые (xy и $x'y'$) и точка P. Провести через эту точку такую секущую, чтобы часть её, заключённая между данными прямыми, делилась точкой P пополам.*

Построение (рис. 115). 1) Опустим из точки P перпендикуляр PP_1 на одну из данных прямых, например на $x'y'$. 2) На продолжении перпендикуляра PP_1 от точки P отложим отрезок PP_2, равный PP_1. 3) Через точку P_2 проведём прямую MN, перпендикулярную к PP_2; она пересечёт прямую xy в некоторой точке A. Прямая, которая проходит через точки A и P, есть искомая секущая.

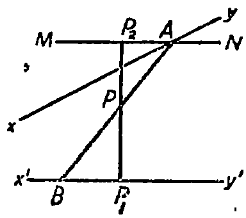


Рис. 115.

28. *Построить треугольник ABC, если даны: сторона, медиана, проведённая к ней, и угол между ними.*

29. *Построить треугольник, если известны две его стороны (a и b) и медиана (m), проведённая к третьей стороне.*

Анализ. Допустим, что $\triangle ABC$ (рис. 116) представляет собою требуемое построение. Непосредственно по трём данным элементам $\triangle ABC$ построить нельзя. Но если на продолжении медианы CM отложим от точки M отрезок MD, равный CM, а затем соединим точки B и D, то получим, что

$$\triangle BDM = \triangle ACM \tag{1}$$

по двум сторонам ($AM = BM$, $CM = DM$) и углу между ними ($\angle AMC = \angle BMD$, как вертикальные).

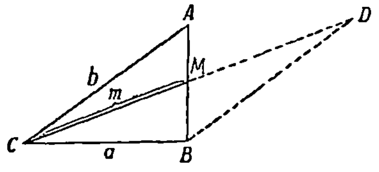


Рис. 116.

Из (1) вытекает, что

$$BD = AC = b.$$

Рассматривая $\triangle BCD$, видим, что его стороны нам известны:

$$BC = a,\ BD = b,\ CD = 2\ m.$$

Построив вспомогательный треугольник BCD, легко получить и $\triangle ABC$.

Построение. 1) Определяем отрезок, равный удвоенной длине данной медианы (m). 2) Строим $\triangle BCD$ по трём сторонам: $BC = a$, $BD = b$, $CD = 2m$. 3) Находим точку M, делящую пополам отрезок CD. 4) Соединяем точки B и M. 5) На продолжении отрезка BM откладываем от точки M отрезок AM, равный BM. 6) Точку A соединяем с точкою C.

$\triangle ABC$—искомый.

30. *Построить $\triangle ABC$ по следующим данным:*

1) $a,\ b,\ h_c$,
2) $h_b,\ \angle(h_b,\ a) = \alpha,\ \angle(h_b,\ c) = \beta$,
3) $a,\ b,\ h_b$,
4) $a,\ m_a,\ h_a$,
5) $a,\ b,\ h_a$,
6) $\angle A,\ h_c,\ m_c$,
7) $a,\ h_c,\ m_c$,
8) $\angle A,\ b,\ m_c$.

31. *Между сторонами данного острого угла (AOB) поместить отрезок данной длины (MN) так, чтобы он был перпендикулярен к одной стороне угла.*

Построение (рис. 117). 1) В точке O восставим перпендикуляр OO'. 2) Отложим на прямой OO' от точки O отрезок OO_1, равный отрезку MN. 3) Через точку O_1 проведём до пересечения с AO прямую O_1C, параллельную линии OB. 4) На прямой OB от точки O отложим отрезок OD, равный O_1C. 5) Соединяем точки C и D. CD — искомый отрезок.

32. *Между сторонами данного угла поместить отрезок данной длины (MN) так, чтобы он отсекал от стороны угла равные отрезки.*

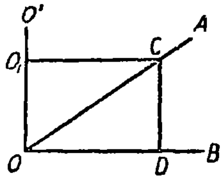


Рис. 117.

Анализ. Искомый отрезок вместе со сторонами данного угла образует равнобедренный треугольник. Следовательно, нам известно направление искомого отрезка; значит, данная задача сводится к предыдущей.

Построение (рис. 117а). 1) На сторонах OA и OB от точки O отложим равные отрезки OM_1 и ON_1. 2) Соединим точки M_1 и N_1. 3) На отрезке M_1N_1 от точки M_1 отложим отрезок M_1K, равный данному отрезку MN. 4) Через точку K проведём прямую KL, параллельную стороне OA. 5) Из точки N, в которой прямая KL пересекает сторону OB, проводим прямую NP, параллельную M_1K.

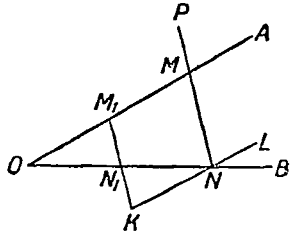


Рис. 117а.

Точку, в которой прямая NP пересекает сторону OA, обозначим буквой M. Отрезок MN—искомый.

33. *Построить треугольник по двум углам (α и β) и стороне (MN), лежащей против одного из них.*

Построение (рис. 118). 1) Строим треугольник ABC по двум данным углам α и β и произвольно взятой стороне AB. 2) Если отрезок MN есть сторона, лежащая против угла α, то на стороне CB от точки C откладываем отрезок CD, равный MN. 3) Из точки D проводим прямую DD', параллельную стороне AB. 4) Обозначим буквой E точку пересечения прямой DD' с продолжением стороны AC.

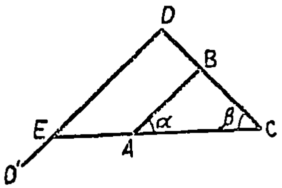


Рис. 118.

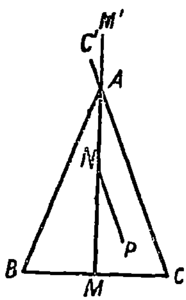


Рис. 119.

Треугольник CDE — искомый.

34. *Построить равнобедренный треугольник по данному основанию (a) и углу (α) при вершине.*

Построение (рис. 119). 1) Строим отрезок BC, равный a. 2) Из середины M этого отрезка восставим перпендикуляр MM'. 3) В какой-нибудь точке N этого перпендикуляра построим угол MNP, равный половине данного угла (α). 4) Из точки C проведём прямую CC', параллельную NP. Эта прямая (CC') пересечёт линию MM' в точке A. 5) Точку A соединяем с B.

Треугольник ABC—искомый.

35. *Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне (b) и высоте (h), опущенной на неё.*

Построение (рис. 120). 1) Проводим две параллельные прямые KL и MN, отстоящие одна от другой на расстоянии h. 2) Из произвольной точки A прямой MN, как из центра, радиусом, равным (b), проводим дуги, пересекающие прямые KL и MN соответственно в точках B и C.

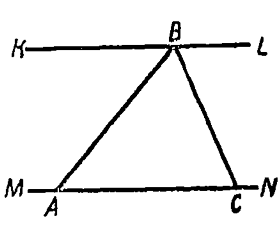


Рис. 120.

Треугольник ABC — искомый.

36. *Построить равносторонний треугольник по его высоте* (h).

Построение (рис. 121). 1) На произвольной прямой AB в точке C восставим перпендикуляр CC'. 2) На прямой CC' от точки C отложим отрезок CD, равный данной высоте h. 3) На прямой AB при произвольной точке E строим угол CEF, равный 60°. 4) Через точку D проводим прямую DD', параллельную EF. 5) Буквой K обозначим пересечение прямых DD' и AB. 6) Влево от точки C отложим отрезок CM, равный CK.

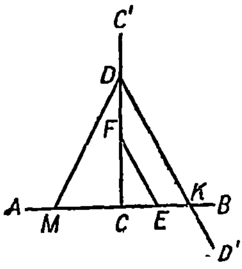


Рис. 121.

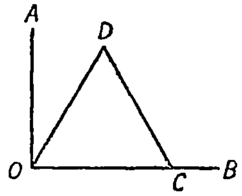


Рис. 122.

Треугольник DKM — искомый.

37. *Разделить прямой угол на три равные части, то есть построить угол, равный 30°.*

Построение (рис. 122). 1) Построим прямой угол AOB. 2) Отложим на стороне OB произвольный отрезок OC. 3) Построим на отрезке OC равносторонний треугольник OCD. $\angle AOD$ — искомый. Он равен 30°.

38. *Построить треугольник по основанию* (a), *высоте* (h) *и боковой стороне* (b).

Построение (рис. 123). 1) Построим прямой угол AOB. 2) На стороне OA от точки O отложим отрезок OM, равный данной высоте h. 3) Из точки M, как из центра, радиусом, равным данной боковой стороне, проводим дугу до пересечения со стороною OB в точке N. 4) От точки N отложим на линии OB в направлении O отрезок NP, равный данному основанию a. Отрезком прямой соединяем точку P с точкой M.

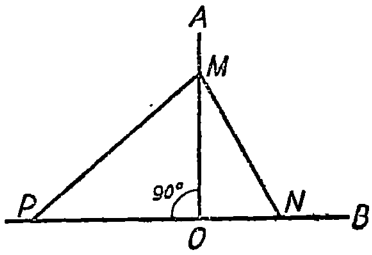


Рис. 123.

$\triangle MNP$ — искомый.

39. *Построить треугольник по основанию* (MN), *высоте* (h) *и углу* (α) *при основании.*

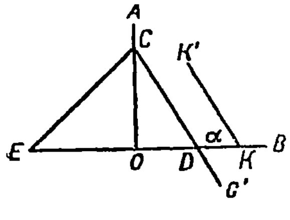


Рис. 124.

Построение (рис. 124). 1) Построим прямой угол AOB. 2) Отложим на стороне OA отрезок OC, равный высоте h. 3) При какой-нибудь точке K на стороне OB строим угол OKK', равный углу α. 4) Из точки C проводим прямую CC', параллельную линии KK'. 5) Влево от точки D, в которой прямая CC' пересекает прямую OB, откладываем отрезок DE, равный данному основанию MN. 6) Соединяем точки C и E.

Треугольник CDE—искомый.

40. *Построить треугольник по углу* (α) *и двум высотам* (h_1 *и* h_2), *опущенным на стороны этого угла.*

Построение (рис. 125). 1) Строим угол $A'BC'$, равный α. 2) На стороне BA' находим точку A, отстоящую от прямой BC' на расстоянии h_1. Для этого достаточно провести прямую, которая параллельна стороне BC' и отстоит от неё на расстоянии, равном h_1. 3) На стороне BC' находим точку B_1, отстоящую от прямой BA' на расстоянии h_2. 4) Соединяем точки A и B_1.

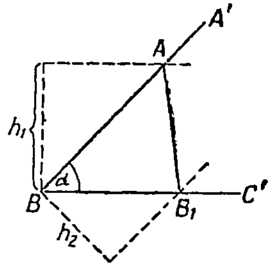


Рис. 125.

Треугольник ABB_1—искомый.

41. *Построить треугольник по стороне* (a), *сумме двух других сторон* (s) *и высоте* (h), *опущенной на одну из этих сторон.*

Построение. 1) Строим прямой угол $A'OB'$. 2) На стороне $A'O$ от точки O отложим отрезок OC, равный данной высоте h. 3) Из точки C, как из центра, радиусом, равным отрезку a, проводим дугу до пересечения с другой стороной прямого угла в точке B. 4) На прямой BO в направлении точки O отложим отрезок BE, равный s. 5) Точку E отрезком прямой соединяем с точкою C. 6) Из середины M отрезка CE восставим перпендикуляр, который пересечёт прямую OB в некоторой точке F. 7) Отрезками прямой соединяем точку C с точками B и F, получим искомый треугольник CBF.

42. *Построить* $\triangle ABC$ *по следующим данным:*

1) $a,\ h_a,\ m_b$,	6) $a,\ \angle B,\ a+b+c=s$,
2) $a,\ m_a,\ \angle C$,	7) $a,\ \angle A,\ \angle B$,
3) $\angle A,\ b_A,\ h_a$,	8) $h,\ \angle A,\ h_b$,
4) $a,\ h_c,\ b_B$,	9) $\angle A,\ h_c,\ b+c=s$,
5) $a,\ h_c,\ b+c=s$,	10) $\angle A,\ \angle B,\ a-b=l$.

43. *Построить треугольник по высоте* (h), *периметру* (s) *и углу* (α) *при основании.*

Построение (рис. 126). 1) Строим прямой угол AOB. 2) На стороне OA от точки O отложим отрезок OC, равный данной высоте h. 3) Через точку C проведём прямую, пересекающую прямую BO под данным углом α в некоторой точке B. От отрезка s, выражающего длину периметра, отнимем отрезок CB (найденную сторону искомого треугольника) и получим некоторый отрезок KL. 4) На стороне OB угла α от точки B отложим отрезок BE, равный KL. 5) Из середины M отрезка CE восставим к нему перпендикуляр; он пересечёт прямую BE в некоторой точке F. 6) Соединяем точки C и F.

Треугольник CBF—искомый.

44. *Построить треугольник по двум сторонам (a и b) и разности (α) углов (B и A), противолежащих этим сторонам.*

Анализ. Допустим, что задача решена и $\triangle ABC$ является искомым, т. е. $AC=b$, $BC=a$ и $\angle B-\angle A=\angle\alpha$ (рис. 127).

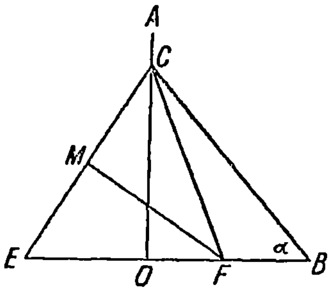


Рис. 126.

Чтобы ввести в рассмотрение данный угол α, строим на стороне AB при точке B угол ABC', равный углу A; получим: $\angle CBC'=\angle ABC-\angle A=\angle\alpha$. В треугольнике ABC' $\angle C'AB=\angle C'BA$, и, значит, $BC'=AC'$.

Прибавив к обеим частям этого равенства отрезок $C'C$, придём к такому равенству:

$$BC'+C'C=AC'+C'C,$$

т. е.

$$BC'+C'C=AC=b.$$

Итак, в $\triangle CBC'$ нам известны:

1) сторона BC, равная a,
2) угол CBC', прилежащий к стороне BC, и
3) сумма (b) двух других сторон этого треугольника ($BC'+C'C=b$).

Такой треугольник мы умеем построить.

Если, построив $\triangle CBC'$, отложим на продолжении отрезка CC' от точки C отрезок CA, равный данному отрезку b, и соединим точку A с B, то и получим искомый треугольник.

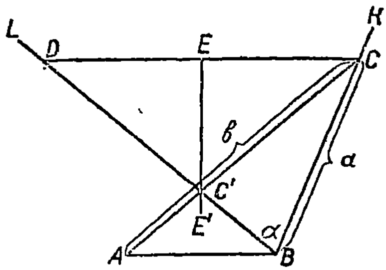


Рис. 127.

Построение. 1) Строим угол KBL, равный данному углу α. 2) На стороне BK этого угла от точки B отложим отрезок BC, равный данному отрезку a. 3) На стороне BL того же угла от точки B отложим отрезок BD, равный данному отрезку b. 4) Соединяем точки C и D отрезком и из середины E отрезка CD восставим перпендикуляр EE'. Этот перпендикуляр пересечёт отрезок BD в некоторой точке C'. 5) Из точки C через C' проводим полупрямую и на ней от точки C отложим отрезок CA, равный данному отрезку b. Соединив точки A и B отрезком, получим искомый треугольник ABC.

45. *Построить треугольник ABC по следующим данным:*

1) $\angle A$, $\angle B$, $a+b=s$,
2) $\angle A$, a, $c-b=l$,
3) $\angle B$, h_c, $a-b=l$,
4) $\angle C$, h_a, $a-b=l$,
5) $\angle C$, h_a, $a-c=l$,
6) $\angle A$, $\angle B$, $a+b+c=s$,
7) a, h_b, $b+c=s$,
8) $\angle B$, b, $a+c=s$,
9) a, $b+c=s$, $\angle B-\angle C=\alpha$.

46. *Построить треугольник по стороне (a), медиане (m_a) этой стороны и высоте (h_b), опущенной на другую его сторону.*

Анализ. Допустим, что $\triangle ABC$—искомый (рис. 128). Проведём в нём медиану AA_1 и высоту BD. Непосредственно по данным элементам искомый треугольник построить нельзя.

Поэтому предварительно построим прямоугольный треугольник BCD, так как нам известны его гипотенуза $BC=a$ и катет $BD=h_b$. Заметим теперь, что вершина A должна лежать на прямой CD и отстоять на расстоянии m_a от середины A_1 отрезка BC, т. е. должна находиться на пересечении прямой CD и окружности, описанной из точки A_1, как из центра, радиусом, равным m_a.

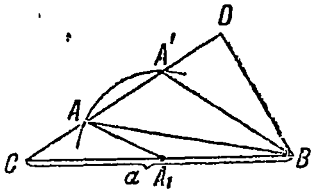


Рис. 128.

Построение. 1) Строим прямоугольный треугольник BCD (рис. 128), гипотенуза (BC) которого равна отрезку a, а катет (BD) равен отрезку h_b. 2) Находим точку A_1, делящую пополам отрезок BC. 3) Из точки A_1, как из центра, радиусом, равным m_a, проводим дугу до пересечения с прямой CD в точках A и A'. 4) Точки A и A' соединяем отрезками с точкою B.

Треугольники ABC и $A'BC$—искомые.

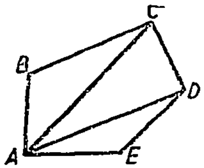


Рис. 129.

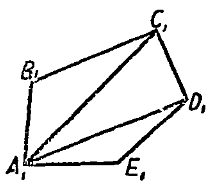


Рис. 130.

47. *Построить многоугольник, равный данному (например, построить пятиугольник, равный данному $ABCDE$.)*

Построение (рис. 129). 1) Диагоналями, выходящими из одной вершины (A), разбиваем данную фигуру на треугольники: ADE, ACD и т. д. 2) Строим треугольник $A_1D_1E_1$, равный треугольнику ADE (рис. 130). 3) На стороне A_1D_1 строим треугольник $A_1C_1D_1$, равный треугольнику ACD и т. д.

48. *Провести в треугольнике (ABC) прямую, параллельную основанию (BC), так, чтобы отрезок, заключённый между боковыми сторонами, был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.*

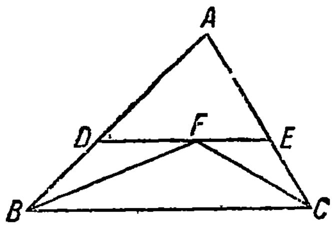


Рис. 131.

Анализ. Допустим, задача решена (рис. 131) и отрезок DE — искомый. Так как $BD+CE=DE$, то, значит, на отрезке DE должна существовать такая точка F, что

$$DF=BD, \quad \text{а} \quad FE=CE. \qquad (1)$$

Если соединим точку F с точками C и B, то получим равнобедренные треугольники BDF и CEF.

Из (1) следует, что

$$\angle ECF = \angle EFC, \qquad (2)$$

но

$$DE \parallel CB,$$

а потому

$$\angle BCF = \angle EFC, \qquad (3)$$

как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых DE и BC и секущей FC.

Из (2) и (3) вытекает, что CF есть биссектриса угла ACB. Аналогичными рассуждениями найдем, что BF есть биссектриса угла ABC. Таким образом, точка F является пересечением биссектрис углов B и C.

Построение. 1) Строим биссектрисы углов B и C. 2) Через точку F, которая представляет собою пересечение этих биссектрис, проводим прямую DE, параллельную основанию. DE—искомый отрезок.

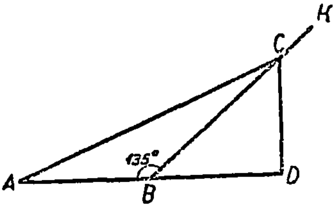


Рис. 132.

49. *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе* (a) *и разности* (d) *катетов.*

Построение (рис. 132). 1) Строим отрезок AB, равный данной разности (d) катетов. 2) На отрезке AB при точке B строим угол ABK, равный 135°. 3) Из точки A, как из центра, радиусом равным a, проводим дугу до пересечения с лучом BK в некоторой точке C. 4) Из точки C опускаем перпендикуляр CD на прямую AB. 5) Соединяем отрезками точку A с точками C и D.

Треугольник ACD—искомый.

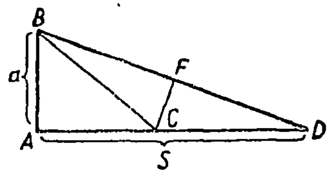


Рис. 133.

50. *Построить прямоугольный треугольник по катету* (a) *и сумме* (s) *другого катета с гипотенузой.*

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 133) и треугольник ABC—искомый. Если на продолжении катета AC отложим отрезок CD, равный гипотенузе BC, и соединим точку B и D, то получим новый треугольник ABD, который находится в конструктивной связи с треугольником ABC. Действительно, если из середины F отрезка BD восставим перпендикуляр к этому отрезку, то он пересечёт сторону AD в точке C.

Построение. 1) Строим прямоугольный треугольник ABD, один катет (AB) которого равен a, а другой (AD) равен s. 2) Через середину F отрезка BD проводим к нему перпендикуляр, который пересечёт отрезок AD в некоторой точке C. 3) Соединяем точку C с B отрезком.

Треугольник ABC—искомый.

51. *Построить прямоугольный треугольник по острому углу* (α) *и разности* (d) *катетов.*

Анализ. Допустим, что задача решена и треугольник ABC — искомый, причём $\angle A = \alpha$ и $AC - BC = d$ (рис. 134).

Чтобы ввести в рассмотрение отрезок d, отложим на большем катете (AC), от точки C, отрезок CD, равный меньшему катету BC.

По построению, прямоугольный треугольник BCD — равнобедренный, а потому $\angle BDC = \angle DBC = 45°$.

Отсюда следует, что

$$\angle ADB = 180° - \angle BDC = 180° - 45° = 135°.$$

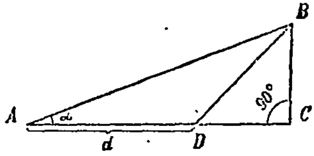


Рис. 134.

Как видим, в треугольнике ABD нам известны сторона AD и два прилежащих к ней угла: $\angle BAD = \alpha$ и $\angle ADB = 135°$.

Построив $\triangle ABD$, легко построить и искомый треугольник: для этого достаточно будет из точки B опустить перпендикуляр на продолжение отрезка AD.

Построение. 1) Строим отрезок AD, равный данному отрезку d. 2) На отрезке AD, при точках A и D, строим углы, соответственно равные данным углам α и 135°. 3) Стороны этих углов пересекутся в некоторой точке B. 4) Из точки B опускаем перпендикуляр BC на продолжение отрезка AD.

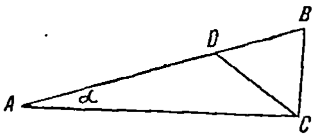


Рис. 135.

Треугольник ABC — искомый.

Исследование. При заданном α задача имеет решение, если угол α острый.

52. *Построить прямоугольный треугольник по острому углу* (α) *и разности* (d) *гипотенузы и противлежащего углу* α *катета.*

Анализ. Чтобы ввести в рассмотрение отрезок d, отложим на гипотенузе AB (рис. 135) от точки B отрезок BD, равный катету BC.

Так как

$$BD = BC, \qquad (1)$$

треугольник CBD — равнобедренный и

$$\angle BCD = \angle BDC. \qquad (2)$$

Кроме того,

$$\angle BCD + \angle BDC = 180° - \angle B. \qquad (3)$$

Но

$$\angle B = 90° - \alpha. \qquad (4)$$

Из (2), (3) и (4) найдём, что

$$\angle BDC = 45° + \frac{\alpha}{2}, \qquad (5)$$

Так как

$$\angle ADC + \angle CDB = 180°, \tag{6}$$

то

$$\angle ADC = 180° - \angle CDB, \tag{7}$$

или

$$\angle ADC = 135° - \frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Мы можем построить треугольник ACD, в котором нам известны сторона $AD = d$ и два прилежащих к ней угла: $\angle A$, равный α, и $\angle ADC$, равный $135° - \frac{\alpha}{2}$.

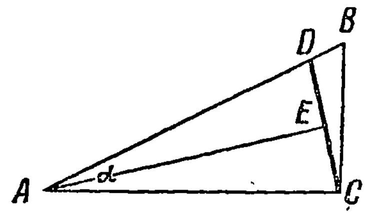


Рис. 136.

Построив $\triangle ACD$, легко построить искомый треугольник.

53. *Построить прямоугольный треугольник по острому углу (α) и разности (d) гипотенузы и прилежащего к углу α катета.*

Анализ. Желая ввести в рассмотрение отрезок d, отложим на гипотенузе от точки A (рис. 136) отрезок AD, равный AC. Очевидно,

$$BD = d. \tag{1}$$

Соединив точки C и D, получим равнобедренный треугольник ACD, и, значит,

$$\angle ADC = \angle ACD. \tag{2}$$

Но

$$\angle ADC + \angle ACD = 180° - \alpha. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получим:

$$\angle ADC = 90° - \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Так как

$$\angle ADC + \angle CDB = 180°, \tag{5}$$

то

$$\angle CDB = 180° - \angle ADC = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Можем построить треугольник CBD по стороне DB (1) и двум прилежащим углам: $\angle CDB = 90° + \frac{\alpha}{2}$ и $\angle B = 90° - \alpha$.

Построив его, мы найдём две вершины прямоугольного треугольника. Третью вершину прямоугольного треугольника — точку A найдём как точку, равноудалённую от точек C и D.

Построение. 1) Строим отрезок DB, равный данному отрезку d. 2) На отрезке BD, при точках B и D, строим углы, соответственно равные $90° - \alpha$ и $90° + \frac{\alpha}{2}$. Получим $\triangle BDC$. 3) Проводим перпендикуляр к отрезку CD через его середину. Он пересечёт продолжение отрезка BD в некоторой точке A. Соединив отрезком точки A и C, получим искомый треугольник.

54. *Построить прямоугольный треугольник по острому углу* (α) *и сумме* (s) *прилежащего к нему катета и гипотенузы.*

Анализ. Желая ввести в рассмотрение отрезок s, на продолжении гипотенузы BA (рис. 136а) от точки A отложим отрезок AD, равный катету AC, и получим:

$$BD = s. \tag{1}$$

По построению, треугольник ACD — равнобедренный, а потому

$$\angle ADC = \angle ACD. \tag{2}$$

Так как

$$\alpha = \angle ADC + \angle ACD, \tag{3}$$

то из (2) и (3) получим:

$$\angle ADC = \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

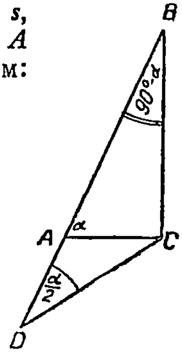


Рис. 136а.

Следовательно, можем построить треугольник BCD, в котором нам известны сторона BD (1) и два прилежащих к ней угла: $\angle B$, равный $90° - \alpha$, и $\angle BDC$, равный $\frac{\alpha}{2}$. Выполнив это построение, легко получить и искомый треугольник.

Построение. 1) Строим отрезок BD, равный данному отрезку s. 2) На отрезке BD, при точках B и D, строим соответственно углы $90° - \alpha$ и $\frac{\alpha}{2}$.

Стороны этих углов пересекутся в некоторой точке C. В точке C восставим перпендикуляр к отрезку CB. Он пересечёт отрезок BD в некоторой точке A. Получим искомый треугольник ABC.

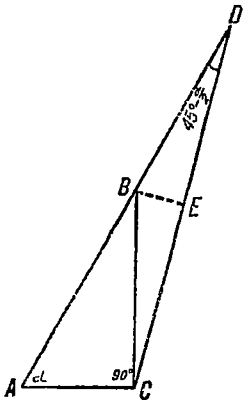


Рис. 136б.

55. *Построить прямоугольный треугольник по острому углу* (α) *и сумме* (s) *противолежащего ему катета и гипотенузы.*

Анализ (рис. 136б). Чтобы ввести в рассмотрение отрезок s, продолжим гипотенузу AB и отложим на её продолжении от точки B отрезок BD, равный катету BC.

Имеем: $AD = s$. (1)

Соединив точки C и D, получим равнобедренный (по построению) треугольник BCD, и, значит,

$$\angle BCD = \angle BDC. \tag{2}$$

На основании свойства внешнего угла треугольника

$$\angle BCD + \angle BDC = \angle ABC = 90^\circ - \alpha. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получим, что

$$\angle BDC = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Таким образом, в треугольнике ACD нам известны сторона AD (1) и два прилежащих к ней угла: α и $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Построив $\triangle ADC$, легко построить и искомый треугольник.

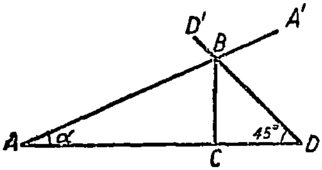


Рис. 137.

Построение. 1) Строим отрезок AD, равный отрезку s. 2) На отрезке AD при точках A и D строим соответственно углы α и $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Стороны этих углов пересекутся в некоторой точке C. 3) Через середину E отрезка CD проводим прямую, перпендикулярную к нему. Проведенная линия пересечёт отрезок AD в некоторой точке B.

Соединив точки B и C отрезком прямой, получим искомый треугольник ABC.

56. *Построить прямоугольный треугольник по острому углу* (α) *и сумме* (s) *катетов.*

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 137) и $\triangle ABC$ является искомым.

Чтобы ввести в рассмотрение данный отрезок s, отложим на продолжении катета AC от точки C отрезок CD, равный CB. Так как по условию $AC + CB = s$, а по построению $CD = CB$, то, значит, $AC + CB = AC + CD$. Так как $CB = CD$, то, соединив точки B и D, получим равнобедренный прямоугольный $\triangle BCD$, в котором $\angle BDC = 45^\circ$.

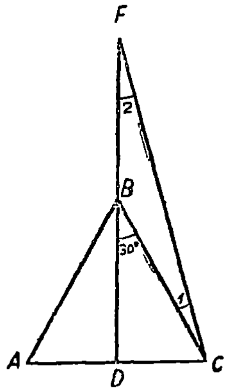


Рис. 138.

Треугольник ABD мы можем построить, так как нам известны: 1) сторона AD, равная отрезку s, 2) угол A, равный α и 3) угол D, равный 45°. Затем, если в построенном $\triangle ABD$ опустим из точки B перпендикуляр BC на сторону AD, то и получим искомый прямоугольный $\triangle ABC$.

Построение. 1) Строим отрезок AD, равный данному отрезку s. 2) На отрезке AD при точке A строим $\angle DAA'$, равный данному острому углу α. 3) На отрезке AD при точке D строим $\angle ADD'$, равный 45°. 4) Из точки B пересечения сторон AA' и DD' опускаем перпендикуляр BC на сторону AD. $\triangle ABC$—искомый.

57. *Построить равносторонний треугольник, зная, что сумма его стороны и высоты равна отрезку MN.*

Анализ. Допустим, что $\triangle ABC$ (рис. 138) есть искомый.

В условии задачи сказано, что сумма высоты и стороны искомого треугольника равна отрезку MN. Поэтому введём эту сумму в сделанный нами чертеж. На продолжении высоты BD от точки B отложим отрезок BF, равный стороне BC. Чтобы связать точку F с предварительным чертежом, соединяем ее отрезком с точкой C. У нас получится два новых треугольника: BDC и BFC.

Совершенно ясно, что, построив один из этих треугольников, можно построить и искомый треугольник ABC.

Рассмотрим эти треугольники, чтобы выяснить, нельзя ли построить какой-нибудь из них.

Прежде всего из самого построения вытекает, что треугольник BFC—равнобедренный, так как $BF=BC$, а отсюда следует, что

$$\angle 1=\angle 2 \ldots \qquad (1)$$

Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных, а потому

$$\angle 1+\angle 2=30^\circ \ldots \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$\angle 1=\angle 2=15^\circ.$$

В треугольнике BFC нам известны только два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$. Этого недостаточно для построения треугольника BFC.

Обращаемся к треугольнику FCD.

Треугольник FCD — прямоугольный. В нем нам известен катет FD, равный MN, и острый угол DFC. Эту фигуру мы можем построить. Построив треугольник FCD, мы узнаем длину отрезка DC, т. е. определим, чему равна половина стороны искомого треугольника.

Зная, чему равна половина стороны искомого равностороннего треугольника, можно узнать и длину всей стороны, после чего легко будет построить искомый треугольник по трем сторонам.

58. *Построить равносторонний треугольник по разности (d) стороны и высоты.*

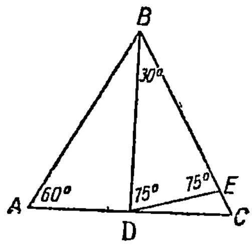


Рис. 139.

Анализ (рис. 139). Чтобы ввести в рассмотрение разность (d) отрезков, отложим на стороне BC отрезок BE, равный высоте BD. Получим равнобедренный треугольник BDE и треугольник DEC, в котором $CE=d$.

Так как $BED=75^\circ$, то, значит, $\angle DEC=105^\circ$ и $\angle C=60^\circ$.

Следовательно, в треугольнике CDE нам известна сторона $EC = d$ и два прилежащих к ней угла.

Построение. 1) Строим отрезок EC, равный данному отрезку d. 2) На отрезке EC при точках C и E строим соответственно углы, равные 60° и 105°. Стороны этих углов пересекутся в некоторой точке D. 3) В точке D восставим перпендикуляр к отрезку CD. 4) Этот перпендикуляр пересечёт продолжение стороны EC в некоторой точке B. 5) На продолжении отрезка CD от точки D отложим отрезок AD, равный CD. 6) Соединим отрезком прямой точки A и B.

Треугольник ABC — искомый

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ СЕДЬМОГО КЛАССА.

59. *Дан угол BAE и прямая, пересекающая его стороны в точках M и N. Между сторонами угла вписать отрезок данной длины a так, чтобы он был параллелен прямой MN.*

Построение (рис. 140 и 140а). 1) На прямой MN от точки M отложим отрезок MC', равный a. 2) Из точки C' проведём прямую, параллельную стороне AB. Проведённая прямая пересечёт сторону AE в некоторой точке C.

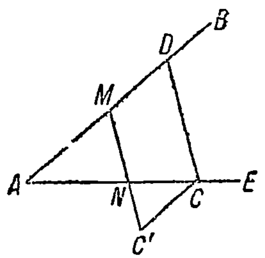


Рис. 140.

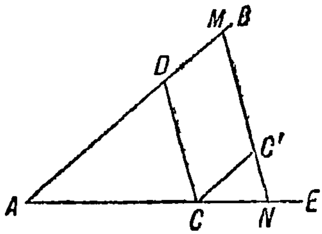


Рис. 140а.

Из точки C проводим прямую параллельно MN. Она пересечёт сторону AB в некоторой точке D.

Отрезок CD — искомый.

60. *В данный треугольник ABC вписать три отрезка m, n, p, соответственно параллельные AB, BC и AC.*

Примечание. Задача решается тем же приёмом, что и предыдущая.

Исследование. Вписать в данный треугольник данный отрезок параллельно какой-нибудь его стороне можно только в том случае, если отрезок меньше соответствующей стороны.

В связи с этим при заданных отрезках m, n и p в данный треугольник можно будет вписать согласно условию задачи 3, 2, 1 или ни одного отрезка.

61. *В треугольник ABC вписать отрезок m, образующий со стороною AC угол α.*

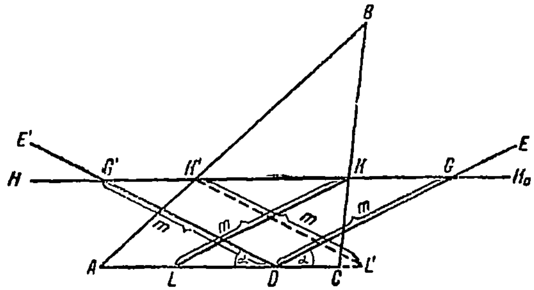


Рис. 140б.

Построение (рис. 140б).

1. При любой точке D отрезка AC строим угол EDC, равный α.

2. На луче DE от точки D откладываем отрезок DG, равный данному отрезку m.

3. Через точку G проводим прямую HH_0 параллельно стороне AC.

4. Прямая HH_0 пересечёт сторону BC в некоторой точке K.

5. Через точку K проводим прямую параллельно линии DE, которая пересечёт сторону AC в некоторой точке L.

Отрезок KL — искомый. Он равен отрезку m, образует со стороною AC угол α и целиком находится внутри треугольника ABC.

1. При любой точке D отрезка AC строим угол $E'DA$, равный α.

2. На луче DE' от точки D откладываем отрезок DG', равный данному отрезку m.

3. Через точку G' проводим прямую HH_0 параллельно стороне AC.

4. Прямая HH_0 пересечёт сторону AB в некоторой точке K'.

5. Через точку K' проводим прямую параллельно линии DE', которая пересечёт продолжение стороны AC в некоторой точке L'.

Отрезок $K'L'$, хотя и равен отрезку m и образует со стороною AC угол α, но не лежит целиком внутри треугольника ABC и потому не является решением данной задачи.

Исследование. Первая и вторая операции построения всегда выполнимы. Относительно третьей операции заметим следующее.

Если построенная прямая HH_0 пройдёт вне треугольника ABC, то задача не имеет решения.

Если прямая HH_0 пройдёт через вершину (B) треугольника или пересечёт его стороны, то задача может иметь два решения, одно или ни одного: всё зависит от того, будут ли оба отрезка KL и $K'L'$ лежать внутри треугольника, или только один из них, или оба они только частично будут находиться внутри данного треугольника.

62. *Дана прямая AB и вне её две точки C и D. Провести через точки C и D параллельные прямые так, чтобы часть линии AB, находящаяся между этими прямыми, равнялась отрезку m.*

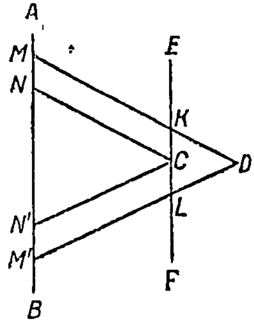


Рис. 141.

Построение (рис. 141). 1) Через точку C проводим прямую EF, параллельную прямой AB. 2) На прямой EF по обе стороны от точки C откладываем отрезки CK и CL, порознь равные данному отрезку m. 3) Из точки D проводим две прямые: одну через точку K, а другую через точку L. Проведённые линии пересекут прямую AB соответственно в точках M и M'. 4) Через точку C проводим две прямые, соответственно параллельные прямым DM и DM'. Проведённые линии пересекут прямую AB в точках N и N'.

Две пары прямых DM и CN, а также DM' и CN'—искомые: прямые каждой пары параллельны между собой, а часть прямой AB, заключённая между ними, равна данному отрезку m, т. е. $MN=m$ и $M'N'=m$.

63. *Через данную точку (P) провести прямую так, чтобы отрезок её, заключённый между двумя данными параллельными прямыми KK_1 и LL_1, равнялся данному отрезку m.*

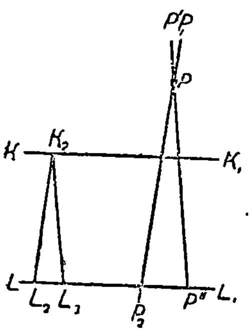


Рис. 142.

Построение (рис. 142). 1) Из любой точки K_2 прямой KK_1, как из центра, радиусом, равным m, проводим дугу до пересечения с прямой LL_1 в точках L_2 и L_3. 2) Соединяем отрезками точку K_2 с точками L_2 и L_3. 3) Проводим через точку P прямую P_1P_2, параллельную отрезку K_2L_2, и прямую $P'P''$, параллельную отрезку K_2L_3

P_1P_2 и $P'P''$—искомые прямые,

64. *Построить четырёхугольник $CODE$ по трём его углам ($\angle C=\alpha$; $\angle D=\beta$; $\angle E=\gamma$) и двум сторонам, образующим четвёртый угол.*

Построение (рис. 142а). 1) Определяем 4-й угол искомого четырёхугольника и находим, что он, допустим, равен δ. 2) Строим угол AOB, равный углу δ. 3) На сторонах угла AOB от точки O откладываем отрезки OC и OD, равные двум данным сторонам искомой фигуры. 4) При точке C на прямой AO строим угол OCC', равный углу α. 5) На прямой OB

при точке D строим угол ODD', равный углу β. 6) Точку пересечения прямых CC' и DD' обозначаем буквой E. Четырёхугольник $CODE$ — искомый.

65. *По двум диагоналям* (d_1 и d_2) *и углу* (α) *между ними построить параллелограм.*

Построение (рис. 143). 1) Строим отрезок AC, равный диагонали d_1. 2) Находим середину O отрезка AC. 3) При точке O на прямой AC строим угол AOC', равный α. 4) Находим половину другой диагонали $\frac{d_2}{2}$. 5) На прямой OC' по одну и другую сторону от точки O отложим отрезки OB и OD, порознь равные $\frac{d_2}{2}$. 6) Соединяем точки B и D с точками A и C.

Четырёхугольник $ABCD$ — искомый параллелограм.

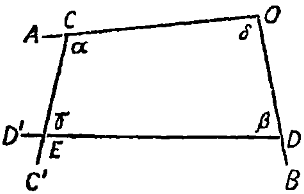


Рис. 142а.

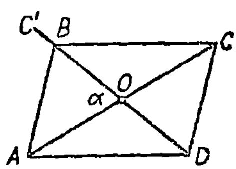


Рис. 143.

Исследование. Если угол α меньше развёрнутого угла, то всегда можно построить $\triangle AOB$, а затем и искомый параллелограм.

66. *Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Построить прямую, равноудалённую от этих точек.*

Анализ. Средняя линия треугольника равноудалена от каждой из его вершин. Это свойство средней линии даёт возможность решить рассматриваемую задачу.

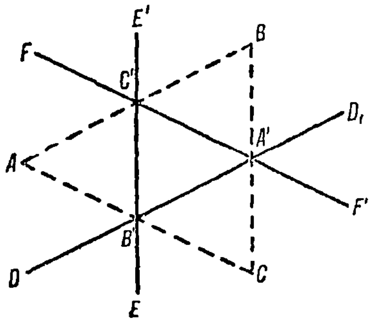


Рис. 144.

Построение (рис. 144). 1) Соединив отрезками данные точки, получим треугольник ABC. 2) Известным построением найдём середины A', B', C' сторон полученного треугольника ABC. 3) Проводим прямые DD_1, EE' и FF', порознь проходящие через каждую пару точек A', B', C'.

Прямые DD_1, EE', FF' — искомые. Задача имеет три решения.

67. *Построить четырёхугольник $ABCD$ по следующим данным:*

1) $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $AC=f$;
2) $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AC=f$, $\angle A=m$;
3) $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $\angle B=n$;

4) $AB=a$, $CD=c$, $AC=f$, $BD=g$, $\angle C=p$;
5) $AB=a$, $BC=b$, $AD=d$, $\angle A=m$, $\angle B=n$;
6) $AB=a$, $BC=b$, $\angle A=m$, $\angle B=n$, $\angle C=p$;
7) $AB=a$, $CD=c$, $AC=f$, $BD=g$, $\angle C=p$;
8) $AB=a$, $BC=b$, $AD=d$, $\angle A=m$, $\angle B=n$.

68. *Построить трапецию по одному её углу, двум диагоналям и средней линии.*

Анализ. Допустим, что построение выполнено и $ABCD$ представляет собою трапецию (рис. 145), в которой нам известны: 1) $\angle BAD$, 2) диагональ AC, 3) диагональ BD, 4) средняя линия MN. Отрезок AC переместим параллельно самому себе в положение BE и продолжим среднюю линию MN до отрезка BE.

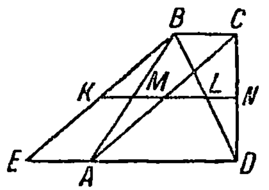


Рис. 145.

Обозначим буквами K и L точки, в которых средняя линия и её продолжение пересекает отрезок BE и диагональ BD.

$\triangle ABE$ и $\triangle DBC$ имеют одинаковые основания и одинаковые высоты, а потому и отрезки, соединяющие середины сторон этих треугольников, т. е. KM и LN, должны быть равны:

$$KM=LN. \qquad (1)$$

Если к тождеству $ML=ML$ прибавим почленно равенство (1), то получим: $ML+KM=ML+LN$, т. е. $KL=MN$. (2)

Отрезок KL, соединяющий середины K и L двух сторон $\triangle BDE$, равен половине основания DE.

Значит $DE=2KL$, т. е.

$$DE=2MN. \qquad (2)$$

Все стороны $\triangle BDE$ нам известны: 1) $BE=AC$ (данная диагональ), 2) BD (другая данная диагональ), 3) $DE=2MN$ (удвоенная данная средняя линия). Построив $\triangle BDE$, мы можем из точки B провести прямую BA, образующую с основанием DE угол BAD, равный данному, и тем самым определим боковую сторону AB искомой трапеции. Затем около точки B описываем дугу радиусом, равным AE, а около точки A описываем дугу радиусом, равным BE. Точку C пересечения этих дуг соединяем отрезками с точками B и D.

$ABCD$ — искомая трапеция.

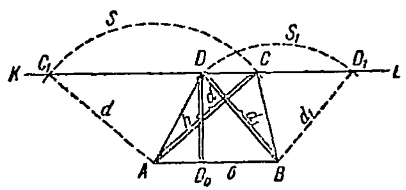


Рис. 146.

69. *Построить трапецию по основанию (b), высоте (h) и двум диагоналям (d и d_1).*

Анализ. Допустим, что построение выполнено и трапеция $ABCD$ (рис. 146) является искомой, т. е. $AB=b$, $DD_0=h$, $AC=d$, $BD=d_1$.

Основание (AB) трапеции, равное данному отрезку (b), мы всегда можем построить. Остаётся найти две другие вершины C и D трапеции.

Перпендикуляры, опущенные из вершин C и D трапеции на её основание, равны h; значит, точки C и D находятся где-то на прямой KL, которая параллельна отрезку AB и отстоит от него на расстоянии h. Кроме того, точка C находится от точки A на расстоянии, равном диагонали, проведённой из точки A. Значит, вершина C лежит на окружности S, центр которой находится в точке A, а радиус равен d. Следовательно, точка C лежит на пересечении окружности S и прямой KL.

В силу аналогичных соображений приходим к выводу, что вершина D лежит не только на прямой KL, но и на окружности S_1, центр которой находится в точке B, а радиус равен d_1, т. е. лежит на пересечении S_1 и прямой KL.

Построение. 1) Строим отрезок AB, равный данному основанию b. 2) Проводим прямую KL, которая параллельна отрезку AB и отстоит от него на расстоянии, равном h. 3) Из точки A, как из центра, радиусом, равным d, проводим дугу до пересечения с прямой KL в точках C и C_1. 4) Из точки B_1, как из центра, радиусом, равным d_1, проводим дугу до пересечения с прямой KL в точках D и D_1. 5) Точку A соединяем с точками C и C_1, а точку B с точками D и D_1. 6) Те из четырёх отрезков AC, AC_1, BD и BD_1, которые пересекаются между параллельными прямыми AB и KL, являются диагоналями искомой трапеции.

Доказательство. Отрезок CD лежит на линии, параллельной отрезку AB, а потому, соединив прямолинейно точку A с D, а точку C с B, получим трапецию. Так как, по построению, расстояние между DC и AB равно h, то трапеция $ABCD$ имеет высоту h. Точка C, лежащая на прямой KL, является точкой дуги, которая описана из центра A радиусом, равным d. Поэтому точка C отстоит от точки A на расстоянии d, т. е. диагональ AC трапеции $ABCD$ равна d.

Подобными же рассуждениями убеждаемся, что другая диагональ (BD) трапеции равна d_1.

Как видим, построенная трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем требованиям условия задачи, а потому и является искомой.

Исследование. При заданной величине b всегда можно построить отрезок AB, а также прямую KL, отстоящую от отрезка AB на расстоянии h.

Что касается пересечения прямой KL с дугой, которую станем описывать из точки A, как из центра, радиусом, равным d, то тут могут быть три случая:

1) если $d > h$, то получим две точки пересечения,

2) если $d = h$, то получим одну точку пересечения,

3) если $d < h$, то не получим ни одной точки пересечения.

Аналогичные выводы получим, определяя пересечение прямой KL с дугой, которую станем описывать из точки B, как из центра, радиусом, равным d_1:

1) если $d_1 > h$, то получим две точки пересечения,

2) если $d_1 = h$, то получим одну точку пересечения,

3) если $d_1 < h$, то не получим ни одной точки пересечения.

Так как искомые точки пересечения должны оказаться концами другого (неизвестного нам) основания искомой трапеции, то для возможности решения задачи необходимо, но недостаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$d > h \text{ и } d_1 \geqslant h \text{ или } d_1 > h \text{ и } d \geqslant h.$$

Кроме того, надо, чтобы отрезки AC и BD пересекались, так как только в этом случае они будут диагоналями искомой трапеции.

Если две точки (D и C) совпадают, то задача не имеет решения, так как вместо трапеции получаем треугольник, сторонами которого являются отрезки b, d и d_1, а высотою отрезок h.

Итак, задача не имеет решения в следующих случаях:

1) когда $d < h$ или $d_1 < h$,

2) когда $d = d_1 = h$,

3) когда точки C и D сливаются в одну,

4) когда отрезки AC и BD не пересекаются.

В остальных случаях задача имеет одно решение.

70. *Построить трапецию $ABCD$ (где $AD \parallel BC$) по следующим данным:*

1) $AD = d$, $BC = b$, $AB = a$, $BD = g$;

2) $AD = d$, $AB = a$, $CD = c$, высота $= h$;

3) $AD = d$, $AB = a$, $CD = c$, $AC = f$;

4) $AD = d$, $BC = b$, $AB = a$, высота $= h$;

5) $AD = d$, $BC = b$, $BD = g$, высота $= h$;

6) $AD = d$, $AB = a$, $CD = c$, $\angle A = m$;

7) $AD = d$, $BC = b$, $AB = b$, $\angle B = n$;

8) $AD = d$, $BC = b$, $\angle A = m$, $\angle D = q$;

9) $AD = d$, $AB = a$, высота $= h$, средняя линия $= l$;

10) $\angle B = n$, $\angle C = p$, высота $= h$, средняя линия $= l$;

11) $\angle B = n$, $AD = d$, $AB = a$, средняя линия $= l$.

71. *Построить параллелограм по его стороне (a) и двум диагоналям (d_1 и d_2).*

Указание. Диагонали параллелограма взаимно делятся пополам. Следовательно, можем построить треугольник ABO (рис. 147) по трём сторонам $\left(a, \frac{d_1}{2} \text{ и } \frac{d_2}{2}\right)$, после чего легко закончить решение задачи.

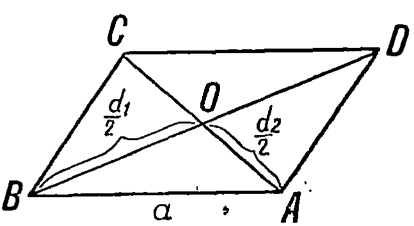


Рис. 147.

72. *Построить ромб по данной стороне (a) и прилежащему углу (α).*

Построение. (рис. 147а). 1) Строим отрезок AB, равный данному отрезку a. 2) На отрезке AB при точке B строим угол ABC', равный данному углу α. 3) На стороне BC' (этого угла) от точки B откладываем отрезок BC, равный данному отрезку a. 4) Из точек A и C, как из центров, радиусами, равными отрезку a, проводим дуги A_1A_2 и C_1C_2, которые пересекутся в некоторой точке D. 5) Соединив точку D с точками A и C, получим искомый ромб.

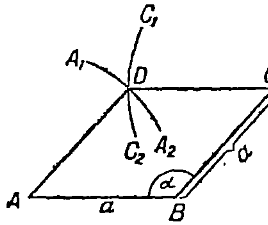


Рис. 147а.

73. *Построить параллелограм по основанию (b), высоте (h) и диагонали (d).*

Построение (рис. 148). 1) Построим отрезок AB, равный данному основанию. 2) Проведём прямую MM', параллельную отрезку AB и отстоящую от него на расстоянии h. 3) Из точки A, как из центра, радиусом, равным диагонали d, проведём дугу до пересечения с прямой MM' в точке C.

4) На прямой MM' от точки C в направлении к M откладываем отрезок CD, равный AB. 5) Соединяем точку A с D, а точку C с B.

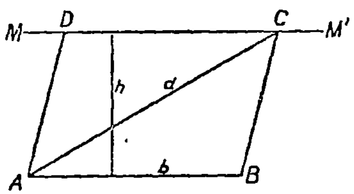


Рис. 148.

$ABCD$ — искомый параллелограм.

Исследование. Требуемое построение можно выполнить только в том случае, если d не меньше h. Если $d = h$, то на данном основании (AB) можно построить четыре параллелограма, разных по положению относительно основания (AB), но одинаковых по величине. Значит при $d = h$ задача имеет одно решение. Если $d > h$, то на данном основании (AB) можно построить восемь параллелограмов, удовлетворяющих условию задачи и различных по положению относительно основания (AB). Однако в этом случае, т. е. при $d > h$, надо считать, что рассматриваемая задача имеет только два решения, так как эти параллелограмы можно разбить лишь на две группы, в каждой из которых будет по четыре одинаковых параллелограма, причём фигуры одной группы не будут равны фигурам другой.

74. *Построить ромб по двум диагоналям (d_1 и d_2).*

Указание. Диагонали рассекают ромб на четыре равных прямоугольных треугольника. Один из них мы можем построить по двум данным катетам $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$ (рис. 148а). После этого легко построить и весь ромб.

Исследование. При заданных величинах d_1 и d_2 задача всегда имеет решение.

75. *Построить ромб по углу (α) и диагонали (d), проходящей через этот угол.*

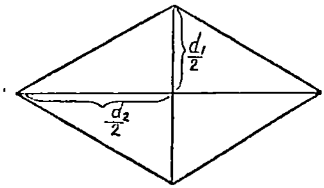


Рис. 148а.

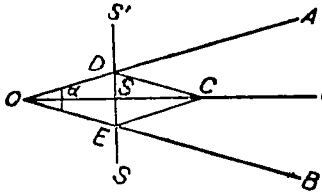


Рис. 149.

Построение (рис. 149). 1) Строим угол AOB, равный углу α. 2) Строим биссектрису OO' угла AOB. 3) На прямой OO' от точки O откладываем отрезок OC, равный данной диагонали d. 4) Через середину S отрезка OC проводим линию SS', перпендикулярную OC. 5) Точки пересечения линии SS' со сторонами угла OA и OB обозначаем буквами D и E. 6) Соединяем точку C с точками D и E.

Четырёхугольник $ODCE$ — искомый ромб.

76. *Построить ромб по диагонали (d) и противолежащему ей углу (α).*

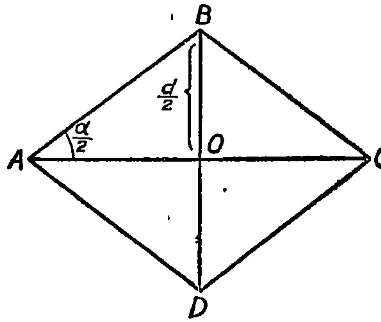


Рис. 149а.

Построение (рис. 149а). Первый способ. 1) Находим половину данного угла α. 2) Находим половину данной диагонали d. 3) Строим прямоугольный треугольник OAB по катету, равному $\frac{d}{2}$, и по противолежащему углу, равному $\frac{\alpha}{2}$. 4) На продолжении катета AO откладываем от точки O отрезок OC, равный AO. 5) На продолжении отрезка BO откладываем отрезок OD, равный OB. 6) Соединяем последовательно точки B, C, D и A отрезками прямой.

$ABCD$ — искомый ромб.

Второй способ. 1) На произвольно взятой прямой KL отмечаем какую-нибудь точку A и строим при ней угол MAL, равный данному углу α. 2) Проводим биссектрису AE угла KAM. 3) На луче AK от точки A откладываем отрезок AC, равный данной диагонали d. 4) На отрезке AC при точке C строим угол FCA, равный углу EAC. Лучи CF и AE пересекутся в некоторой точке B. 5) Из точек A и C, как из центров, радиусами, равными отрезку AB, описываем дуги, которые пересекутся в некоторой точке D, симметричной точке B относительно AC.

$ABCD$ — искомый ромб.

77. *Построить ромб по сумме (s) диагоналей и углу (α), образованному диагональю со стороной.*

Построение (рис. 150). 1) Строим отрезок AB, равный полусумме диагоналей: $AB = \frac{s}{2}$. 2) На отрезке AB при точках A и B строим соответственно углы: $\angle BAC$, равный α, и $\angle ABD$, равный 45°. 3) Из точки E, являющейся пересечением прямых AC и BD, опускаем перпендикуляр EF на отрезок AB. $\triangle AFE$ представляет собою один из тех четырёх прямоугольных треугольников, на которые разбивается диагоналями искомый ромб. 4) На линии AB от точки F в направлении к B откладываем отрезок FG, равный AF. 5) На продолжении отрезка EF от точки F откладываем отрезок FH, равный EF.

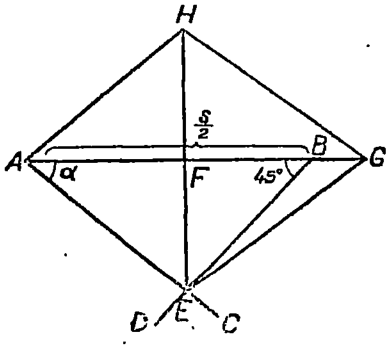


Рис. 150.

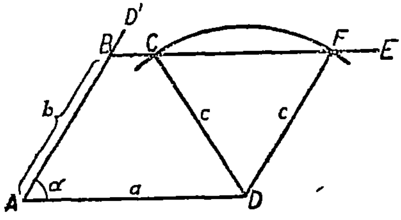


Рис. 151.

$AEGH$ — искомый ромб.

78. *Построить квадрат по данной диагонали.*

Указание. Эта задача представляет собой частный случай задачи № 74.

79. *Построить трапецию по основанию (a), двум непараллельным сторонам (b и c) и углу α, заключённому между данным основанием (a) и стороной (b).*

Построение (рис. 151). 1) Строим отрезок AD, равный данному основанию (a). 2) На отрезке AD при точке A строим угол DAD', равный данному углу α. 3) На стороне AD' от точки A откладываем отрезок AB, равный стороне (b). 4) Через точку B проводим прямую BE, параллельную основанию AD. 5) Из точки D, как из центра, радиусом, равным другой данной стороне (c), проводим дугу, которая, допустим, пересечёт прямую BE в точках C и F. 6) Соединяем точки C и F с D.

$ABCD$ и $ABFD$ — искомые фигуры.

Исследование. Если угол α меньше развёрнутого, то при заданных величинах a, b и c первые четыре операции построения всегда выполнимы. Что касается пятой операции, то тут могут быть три случая. Если дуга, проведённая из точки D, как из центра, радиусом, равным отрезку c, пересекает прямую BE в двух точках, то задача имеет одно или два решения; если проведённая дуга лишь коснётся прямой BE — задача имеет одно решение (получается прямоугольная трапеция); наконец, если дуга не пересечёт прямой BE, задача не имеет решения.

Примечания. 1) Если $b < c$, то задача будет иметь одно или два решения. 2) Если боковые стороны равны ($b = c$), причём $\alpha \neq 90°$, то задача имеет два решения (равнобочная трапеция и параллелограм). 3) Если $b = c$ и $\alpha = 90°$, то задача имеет одно решение (прямоугольник). 4) Если $a = b = c$ и $\alpha = 90°$, то задача имеет одно решение (квадрат).

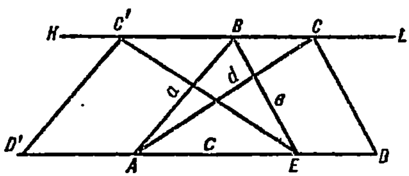


Рис. 152.

80. *Построить трапецию по разности оснований (c), двум боковым сторонам (a и b) и одной диагонали (d).*

Построение (рис. 152). 1) Строим треугольник ABE по двум боковым сторонам и разности оснований. 2) Проводим через точку B прямую KL, параллельную AE.

3. Из точки A, как из центра, радиусом, равным данной диагонали (d), проводим дугу до пересечения с прямой KL в некоторой точке C по другую сторону отрезка BE.

4. На продолжении отрезка AE от точки E откладываем отрезок ED, равный BC.

5. Последовательно соединяем точки A, B, C, D отрезками прямой. $ABCD$ — искомая трапеция.

3. Из точки E, как из центра, радиусом, равным данной диагонали (d), проводим дугу до пересечения с прямой KL в некоторой точке C' по другую сторону отрезка AB.

4. На продолжении отрезка EA от точки A откладываем отрезок AD', равный BC'.

5. Последовательно соединяем точки D', C', B, E отрезками прямой. $D'C'BE$ — искомая трапеция.

Исследование. Для построения искомой трапеции прежде всего необходимо, чтобы из данных отрезков a, b, c можно было построить треугольник, а это возможно, если сумма любых двух этих отрезков больше третьего или их разность меньше третьего.

Для определённости предположим, что $a < b$. В таком случае, если $b \geqslant d > a$, то задача имеет одно решение. Если же $d > b$, то имеем два различных решения. Когда $a = b$ и $d > b$, то задача имеет одно решение (точнее два одинаковых решения).

81. *Построить трапецию по двум основаниям (a и b) и двум диагоналям (d_1 и d_2).*

Анализ. Допустим, что трапеция $ABCD$ (рис. 153) есть искомая. Если продолжим нижнее основание трапеции на отрезок BE, равный верхнему основанию, то получим $\triangle ACE$, все стороны которого нам даны в условии задачи. Построив $\triangle ACE$, легко построить и трапецию $ABCD$.

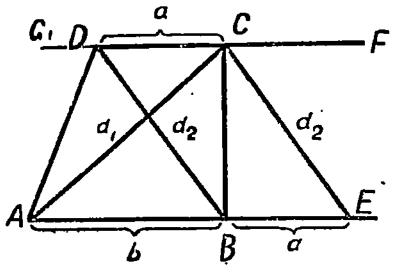


Рис. 153

Построение. 1) Строим $\triangle ACE$ по трём сторонам: одна (AE) равна сумме оснований искомой трапеции, другая и третья — равны данным диагоналям трапеции. 2) Через точку C проводим прямую C_1F, параллельную AE. 3) На прямой C_1F от точки C отложим отрезок CD, равный данному верхнему основанию. $ABCD$ — искомая трапеция.

Исследование. Построение искомой фигуры зависит от построения вспомогательной, какой является треугольник ACE. Следовательно, задача имеет решение, если возможно построить треугольник, сторонами которого были бы отрезки d_1, d_2 и $a+b$.

82. *Построить четырёхугольник $ABCD$, если известны три его стороны: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и диагонали $AC=d_1$, $BD=d_2$.*

Построение (рис. 154). 1) На данном отрезке $BC=b$ по трём данным сторонам строим два треугольника — ABC и BCD — так, чтобы их стороны AC и BD, являющиеся диагоналями искомого четырёхугольника, пересекались. 2) Отрезком прямой соединяем точку C с точкой D.

$ABCD$ — искомый четырёхугольник.

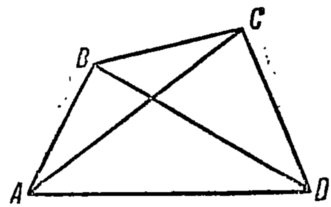


Рис. 154.

83. *Построить четырёхугольник по трём сторонам a, b, c и двум углам α и β, прилежащим к неизвестной стороне.*

Анализ (рис. 155). Допустим, что задача решена и $ABCD$ есть искомый четырёхугольник, причём $AD=a$, $DC=b$, $CB=c$, $\angle DAB=\alpha$ и $\angle CBA=\beta$. Если перенесём сторону AD параллельно самой себе в положение CG и продолжим отрезок CG до пересечения со стороной AB в некоторой точке F, то получим $\triangle BCF$, в котором нам известны: сторона CB, равная данному отрезку c, и два угла: $\angle CFB$, равный α, и $\angle CBF$, равный β. Но если нам известны два угла (α и β) треугольника BCF, то мы можем определить и третий угол (γ) его: $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$. Как только будет найден угол γ, мы построим $\triangle BCF$ по стороне CB, равной c, и двум углам β и γ.

Если в построенном треугольнике BCF отложим на стороне CF от точки C отрезок CG, равный a, и соединим точку G с A, то получим параллелограм $ADCG$, так как по построению $AD \parallel CG$ и $AD = CG$.

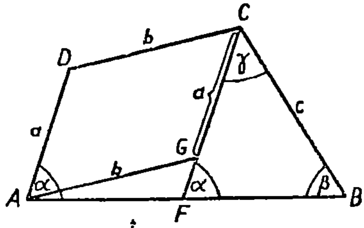


Рис. 155.

Обратим внимание на $\triangle AFG$. Угол AFG нам известен, как смежный относительно угла CFB, равного α. Следовательно, можно построить $\triangle AFG$ по двум сторонам (AG и FG) и углу AFG против одной из них. Что касается параллелограма $ADCG$, то после построения треугольников BCF и AFG мы будем знать три его вершины A, C, G и, значит, легко сможем найти его четвёртую вершину (D).

Построение. 1) Определяем угол γ, исходя из формулы $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. 2) Строим треугольник BCF по данной стороне c и двум прилежащим углам β и γ. 3) На стороне CF, противолежащей углу β, отложим от точки C отрезок CG, равный данному отрезку a. 4) Продолжим сторону BF за точку F. 5) Из точки G, как из центра, радиусом, равным отрезку b, опишем дугу, которая пересечёт продолжение отрезка BF в некоторой точке A. 6) Из точек A и C, как из центров, радиусами, соответственно равными a и b, опишем дуги, которые пересекутся в некоторой точке D.

Соединив отрезками точку D с точками A и C, получим искомый четырёхугольник $ABCD$.

У учеников может возникнуть вопрос: „А как угадать, какую из сторон (a, b, c) надо в рассматриваемом построении переносить параллельно самой себе?“ Поэтому целесообразно показать, что любую из данных сторон (a, b, c) можно подвергнуть этой операции. На рис. 155а показано, что произойдёт, если сторону c перенесём параллельно самой себе. Если сторону b перенесём параллельно самой себе, то придём либо к первому случаю (рис. 155), либо ко второму (рис. 155а), смотря по тому, по какой из сторон (a или c) будет перемещаться конец отрезка b.

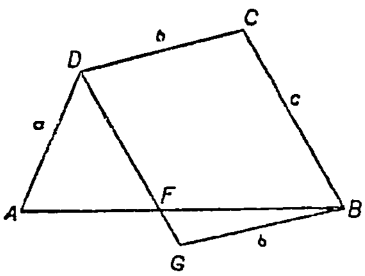


Рис. 155а.

Покажем, как можно эту же задачу решить иным способом.

Построение (рис. 155б). 1) На произвольной прямой при произвольно выбранных точках A и E строим углы: $\angle EAA_1$ и $\angle AEE_1$, соответственно равные данным углам α и β. 2) На стороне AA_1 от точки A откладываем отрезок AD, равный данной стороне a. 3) На стороне EE_1 от точки E откладываем отрезок EF, равный данной стороне c. 4) Через точку F проводим прямую F_1F_2, параллельную отрезку AE. 5) Из точки D, как из центра, радиусом, равным данной стороне b, проводим дугу до пересечения с прямой F_1F_2 в точках C и C_1. 6) Из точек C и C_1 проводим прямые, параллельные EE_1. Обозначаем буквами B и B_1 точки, в которых проведённые прямые пересекут линию AE. 7) Соединяем точку D с точками C и C_1.

Четырёхугольники $ABCD$ и AB_1C_1D — искомые.

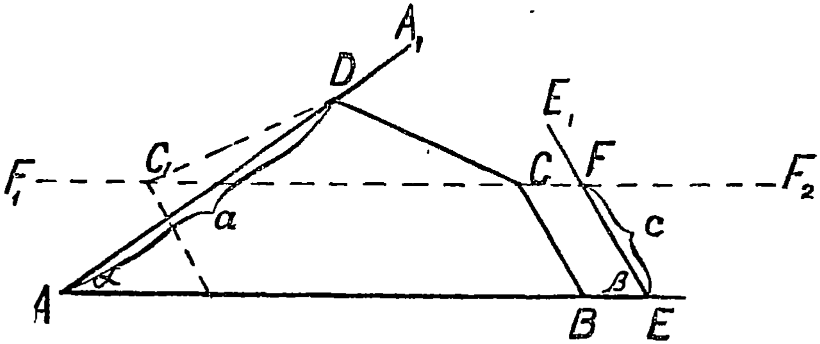


Рис. 155б.

Исследование. В задаче не указано, какие из данных сторон образуют с неизвестной 4-й стороной данные углы α и β. Мы сделали построение так, что отрезок a образует с неизвестной стороной угол α. Но мы могли вместо отрезка a взять другой отрезок, b или c, и тогда искомый четырёхугольник приобрёл бы другой вид. Учитывая это, легко понять, что тут возможны следующие конфигурации:

Конфигурации	Какая из данных сторон образует с неизвестной стороной угол α	Какая из данных сторон образует с неизвестной стороной угол β	Какая из данных сторон остаётся	Рисунок
I	a	b	c	155д
II	a	c	b	155г
III	b	a	c	155ж
IV	b	c	a	155в
V	c	a	b	155е
VI	c	b	a	155з

Таким образом, остаётся выяснить, какие из этих конфигураций допускают построение искомого четырёхугольника.

Если для определённости положим, что отрезки и углы, изображённые на рисунке 155а, являются теми величинами, которые даны в условии задачи, то получим следующие построения:

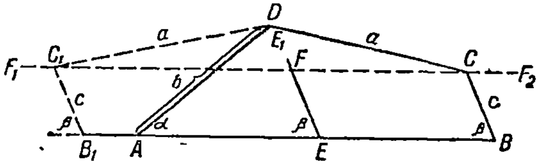


Рис. 155в.

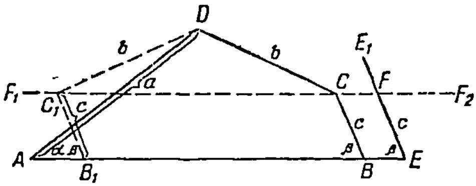


Рис. 155г.

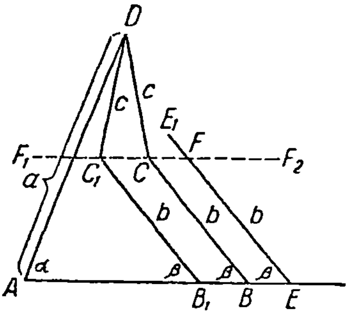


Рис. 155д.

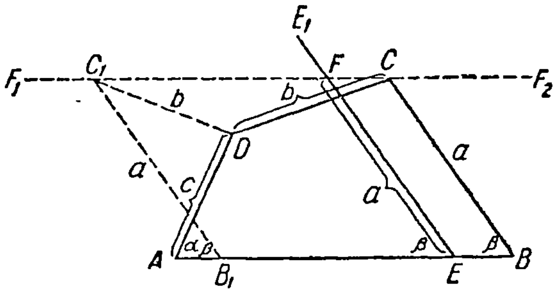


Рис. 155е.

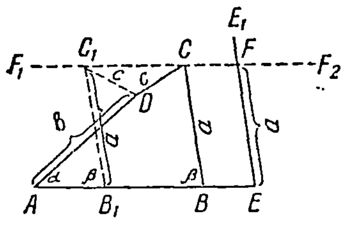


Рис. 155ж.

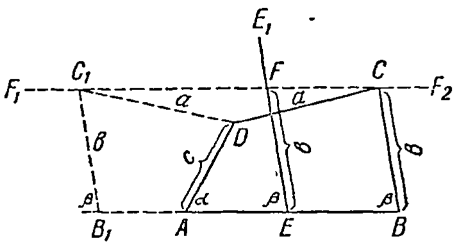


Рис. 155з.

Во всех этих шести случаях четырёхугольник $ABCD$ является искомым. Кроме того, для конфигурации, изображённой на рисунке 155д, имеется ещё одно решение: четырёхугольник AB_1C_1D. Что касается других фигур AB_1C_1D на рисунках 155в — 155з, то они не представляют собою решений.

Примечание. Надо принять во внимание, что, проводя из точки D дуги до пересечения с прямой F_1F_2, мы можем таких точек пересечения получить либо две, либо одну, либо ни одной. Наконец, необходимо учесть, что не всякая из полученных точек C и C_1 может оказаться пригодной для того, чтобы её принять за одну из вершин искомого четырёхугольника.

84. Построить четырёхугольник $ABCD$, если даны все его стороны и отрезок HK, соединяющий середины противоположных сторон.

Анализ. Допустим, что $ABCD$ (рис. 156) представляет собою искомый четырёхугольник. Перенесём отрезок AD параллельно самому себе так, чтобы его конец A совпал с точкою H. Вследствие этой операции отрезок AD примет положение HD_1. Перенесём отрезок

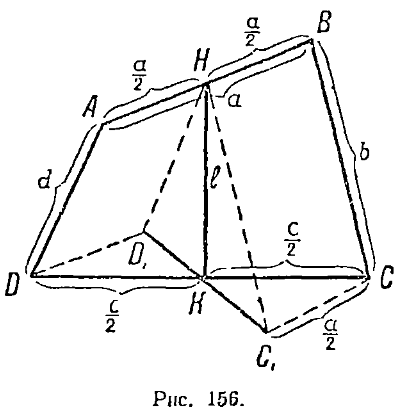


Рис. 156.

BC параллельно самому себе так, чтобы точка B совпала с точкою H. Тогда отрезок BC примет положение HC_1. Соединяем точку K с точками D_1 и C_1 и рассмотрим треугольники CC_1K и DD_1K.

Так как $DD_1 \parallel AB$ и $CC_1 \parallel AB$, то $CC_1 \parallel DD_1$, причём отрезок CD является секущей. Отсюда следует, что

$$\angle KCC_1 = \angle KDD_1, \tag{1}$$

как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых DD_1 и CC_1 и секущей CD.

По условию,

$$AH = HB, \tag{2}$$

$$DK = KC. \tag{3}$$

По построению,

$$\left.\begin{aligned} DD_1 &= AH \\ \text{и} \qquad CC_1 &= BH. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из (2) и (4) вытекает, что

$$DD_1 = CC_1. \tag{5}$$

Равенства (1), (3) и (5) показывают, что

$$\triangle D_1DK = \triangle CC_1K \tag{6}$$

по первому признаку равенства треугольников.

Из (6) имеем

$$\angle DKD_1 = \angle CKC_1, \tag{7}$$

и, значит, D_1K и C_1K составляют прямолинейный отрезок C_1D_1.

В треугольнике C_1HD_1 нам известны две стороны ($HD_1 = d$, $HC_1 = b$) и медиана стороны C_1D_1 ($HK = l$).

Построив этот треугольник, сможем построить и искомый четырёхугольник.

Построение. 1) Строим треугольник HC_1D_1 по двум сторонам и медиане третьей стороны. 2) Строим треугольник DD_1K по трём сторонам (D_1K определяем предыдущей операцией построения, $DD_1 = AH = \frac{a}{2}$, $DK = \frac{c}{2}$). 3) На продолжении отрезка DK от точки K откладываем отрезок KC, равный DK. 4) Из точек D и H, как из центров, проводим дуги соответственно радиусами d и $\frac{a}{2}$; точку пересечения этих дуг обозначаем буквою A. 5) Из точек C и H, как из центров, проводим дуги соответственно радиусами b и $\frac{a}{2}$; точку пересечения этих дуг обозначаем буквою B. 6) Точки D, A, B и C соединяем отрезками и получаем искомый четырёхугольник $ABCD$.

85. *Построить четырёхугольник, зная его диагонали (c и d), две противоположные стороны (a и b) и отрезок (l), соединяющий середины этих сторон.*

Анализ. Допустим, что построение выполнено и имеет вид, представленный на чертеже 156а.

Если отрезок AC переместим параллельно самому себе так, чтобы точка A совпала с точкою E, то он примет положение EC_1.

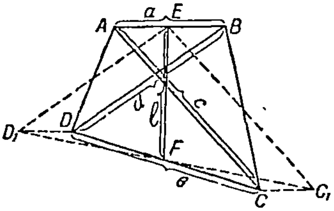


Рис. 156а.

Далее, если отрезок BD переместим параллельно самому себе так, чтобы точка B совпала с точкою E, то он примет положение ED_1.

Соединив точку F с точками C_1 и D_1, получим, что

$$\triangle CC_1F = \triangle DD_1F \qquad (1)$$

по двум сторонам ($CC_1 = DD_1$, $DF = FC$) и углу между ними ($\angle D_1DF = \angle C_1CF$, как накрестлежащие при параллельных прямых DD_1 и CC_1 и секущей DC).

Из равенства (1) вытекает, что

$$\angle CFC_1 = \angle DFD_1 \qquad (2)$$

и

$$C_1F = D_1F. \qquad (3)$$

Поскольку отрезки DF и CF лежат на одной прямой, а C_1F и D_1F расположены по разные стороны линии CD, можем из (2) вывести заключение, что углы (2) являются вертикальными. Значит, отрезки C_1F и D_1F образуют прямолинейный отрезок C_1D_1.

Рассматривая $\triangle C_1D_1E$, видим, что в нём нам известны две стороны ($EC_1 = c$, $ED_1 = d$) и медиана ($EF = l$) третьей стороны.

Такой треугольник мы можем построить, после чего легко будет выполнить и требуемое в задаче построение.

Построение. 1) Строим $\triangle EC_1D_1$, в котором $C_1E = c$, $D_1E = d$ и медиана (EF) стороны C_1D_1 равна l. 2) На отрезке C_1F строим треугольник со сторонами C_1F, $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ и получаем $\triangle CC_1F$. 3) На продолжении стороны CF за точку F откладываем отрезок DF, равный CF. 4) Через точку E проводим прямую, параллельную отрезку CC_1, и на ней по обе стороны точки E откладываем отрезки AE и BE, порознь равные отрезку $\frac{a}{2}$. 5) Отрезками прямой соединяем точку A с D, а точку B с C.

Четырёхугольник $ABCD$ — искомый.

86. *Построить четырёхугольник $ABCD$, зная, что его стороны $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$ и $AD = d$ и угол между двумя противоположными сторонами AD и BC равен α.*

Анализ. Допустим, что чертёж 156б представляет собою решение рассматриваемой задачи. Если сторону BC переместим параллельно самой себе так, чтобы точка B совпала с точкою A, то точка C

займёт некоторое положение E. Соединив точку E с D, получим треугольник ADE, в котором нам известны две стороны: $AD=d$, $AE=BC=b$ и $\angle DAE=\alpha$. Треугольник CDE можно построить по трём сторонам: 1) сторона DE найдена построением треугольника ADE, 2) $CD=c$, 3) $CE=AB=a$.

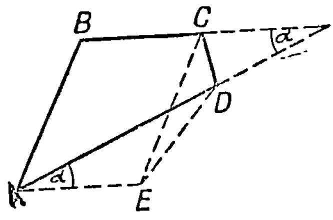


Рис. 156б.

Построив треугольник CDE, мы тем самым определим положение вершины C и будем иметь по величине и по положению две стороны AE и CE параллелограма $ABCE$. После этого легко будет найти четвёртую вершину B этого параллелограма и закончить построение искомого четырёхугольника.

Построение. 1) Строим треугольник ADE по двум сторонам b и d и углу α между ними. 2) Из точки D, как из центра, радиусом, равным c, а из точки E, как из центра, радиусом, равным a, проводим дуги, которые пересекутся в некоторой точке C. 3) Из точек A и C, как из центров, радиусами, равными a и b, проводим дуги, которые пересекутся в некоторой точке B.

Четырёхугольник $ABCD$ — искомый.

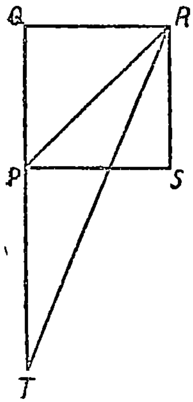


Рис. 156в.

87. *Построить квадрат по сумме (s) его стороны и диагонали.*

Анализ. Начертим какой-нибудь квадрат (рис. 156в). По условию нам дана сумма его стороны и диагонали, например сумма $PQ+PR$. Чтобы спрямить эту ломаную линию, продолжим сторону PQ и на ней от точки P отложим отрезок PT, равный PR. Соединив точку T и R, получим $\triangle QRT$ и $\triangle PRT$. Если бы мы знали, как построить $\triangle QRT$, то, очевидно, нашли бы сторону QR искомого квадрата. Но в этом треугольнике нам известны лишь катет $QT=s$, а потому мы его построить не можем. Обращаемся к $\triangle PRT$. Он равнобедренный, а потому $\angle PTR=\angle PRT$.

Сумма этих углов равна внешнему, не смежному с ним углу QPR, т. е. 45°. Отсюда следует, что $\angle PTR=22^\circ 30'$, т. е. составляет четверть прямого угла. Теперь мы можем построить $\triangle QRT$ по катету (s) и острому углу ($22^\circ 30'$). Построив $\triangle QRT$, найдём длину стороны искомого квадрата.

Построение (рис. 156г). 1) Строим прямой угол KOL. 2) На стороне OL от точки O отложим отрезок OM, равный s (сумме стороны и диагонали квадрата). 3) На отрезке OM при точке M построим угол OMN, равный $22^\circ 30'$ ($\frac{1}{4}$ прямого угла). 4) Прямая MN пересечёт OK в некоторой точке A, являющейся вершиною искомого квадрата, причём отрезок AO представит собою сторону искомого квадрата. Зная, что AO является стороной искомого квадрата, легко построить и весь квадрат.

88. *Построить параллелограм по двум диагоналям (d_1 и d_2) и высоте (h).*

Указание (рис. 157). Вспомогательной фигурой является $\triangle AOD$, который можно построить по высоте $OL = \frac{h}{2}$ и двум боковым сторонам $AO = \frac{d_1}{2}$ и $OD = \frac{d_2}{2}$.

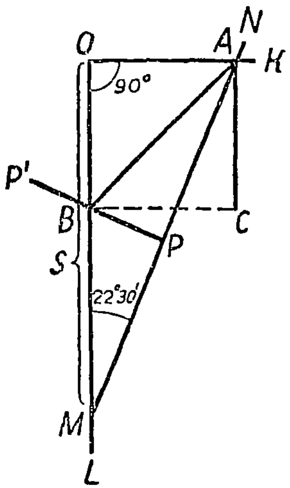


Рис. 156г.

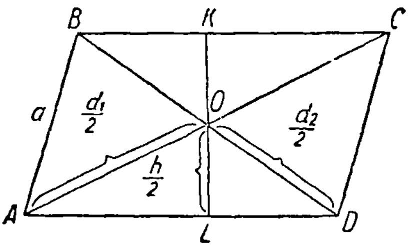


Рис. 157.

89. *Построить треугольник ABC по двум сторонам ($AC = b$ и $BC = a$) и медиане ($CD = m$) третьей стороны.*

Анализ. Допустим, что треугольник ABC, изображённый на чертеже 158, является искомым. Продолжим медиану CD за точку D, отложим на этой прямой от точки D отрезок DH, равный данной медиане CD, и, соединив отрезком точку H с точкою B, рассмотрим треугольники ACD и BDH.

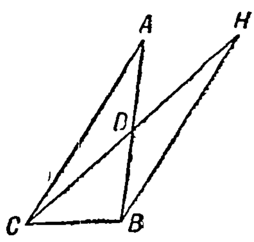


Рис. 158.

Так как $\angle ADC = \angle BDH$, $AD = DB$ (по условию) и $CD = DH$ (по построению), то

$$\triangle ACD = \triangle BDH,$$

откуда вытекает, что

$$BH = CA = b.$$

Относительно треугольника BCH заметим, что стороны его нам известны:

$$CB = a,\ CH = 2m \text{ и } BH = b.$$

Построив этот треугольник, можем построить конструктивно связанный с ним треугольник ABC.

Построение. 1) Строим треугольник CBH. 2) Находим середину D стороны CH. 3) Продолжаем отрезок BD за точку D и откладываем на этой линии от точки D отрезок DA, равный отрезку BD. 4) Соединяем отрезком точку A с точкой C.

Треугольник ABC — искомый.

90. *Построить треугольник ABC по основанию ($AB = a$), высоте (h) и медиане (m), проведённой к боковой стороне BC.*

Построение (рис. 159). 1) Строим отрезок AB, равный данному основанию (a). 2) Проводим прямую KL, которая параллельна основанию и отстоит от него на расстоянии, равном высоте (h). 3) Строим прямую MN, равноотстоящую от параллельных прямых KL и AB. 4) Из точки A, как из центра, радиусом, равным m, проводим дугу до пересечения с прямой MN в точках E и E_1. 5) Соединяем точки B и E и продолжаем отрезок BE до пересечения с прямой KL в некоторой точке C. 6) Соединяем точки B и E_1 и продолжаем отрезок BE_1 до пересечения с прямой KL в некоторой точке D. $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ — искомые.

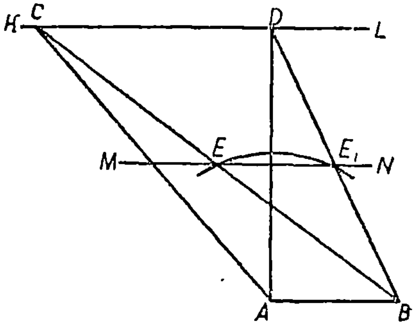


Рис. 159.

Исследование.

	Значение m	Число решений
I	$m > \frac{h}{2}$	2
II	$m = \frac{h}{2}$	1
III	$m < \frac{h}{2}$	0

91. *Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой (xy). Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины (l) так, чтобы ломаная $AM + MN + NB$ была наименьшей длины.*

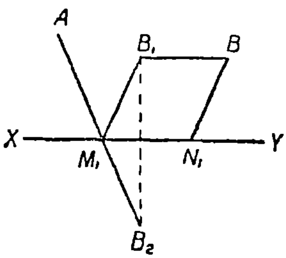


Рис. 160.

Анализ. Длина отрезка MN остаётся неизменной, а потому задача сводится к тому, чтобы найти minimum $AM + NB$.

Построение (рис. 160). 1) Перенесём точку B параллельно xy на расстояние MN в некоторую точку B_1. 2) Строим точку B_2, симметричную точке B_1 относительно прямой xy. 3) Соединяем отрезком точку A с точкой B_2. 4) От точки M_1, являющейся пересечением xy и AB_2, отложим на прямой xy отрезок M_1N_1, равный MN. M_1N_1 есть искомое положение отрезка MN.

92. *Найти центр данной окружности.*

Построение (рис. 160а). 1) Отмечаем на окружности три произвольные точки A, B, C. 2) Через середину M отрезка AB проводим прямую MM', перпендикулярную к хорде AB. 3) Через середину N отрезка BC проводим прямую NN', перпендикулярную к хорде BC. 4) Точка O, в которой пересекутся прямые MM' и NN', есть центр данной окружности.

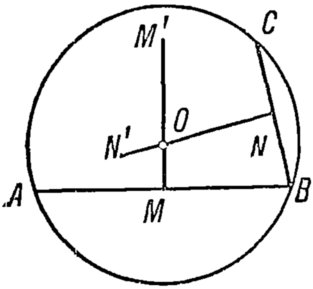


Рис. 160а.

93. *Данную дугу окружности дополнить до целой окружности.*

Построение (рис. 160б). 1) На данной дуге отмечаем три произвольные точки H, K, L. 2) Через середину M хорды HK проводим прямую MM', перпендикулярную к HK. 3) Через середину N хорды KL проводим прямую NN', перпендикулярную к KL. 4) Точка O пересечения прямых MM' и NN' является центром искомой окружности. 5) Из центра O радиусом, равным отрезку OK, чертим дугу, дополняющую данную дугу до целой окружности.

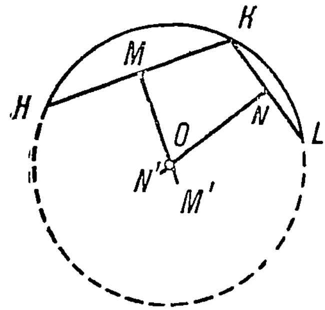


Рис. 160б.

94. *Разделить данную дугу AB на 8 равных частей.*

Указание (рис. 161). Прямая, которая перпендикулярна к хорде AB и проходит через её середину (C), разделит дугу AB пополам: $\smile AD = \smile DB$. Затем этим же приёмом делим пополам $\smile AD$ и т. д.

95. *Описать такую окружность с центром в данной точке, которая разделила бы данную окружность пополам.*

Анализ (рис. 162). Только концы диаметра делят окружность пополам, и, значит, через концы какого-то из диаметров должна пройти искомая окружность, имеющая центр в точке P. А если так, то концы этого диаметра должны отстоять на равном расстоянии от точки P. Значит, задача сводится к следующему: надо найти такой диаметр данной окружности, концы которого одинаково удалены от данной точки P Чтобы концы отрезка находились на одинаковом расстоянии от данной точки P, необходимо, чтобы он

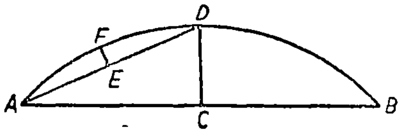


Рис. 161.

был перпендикулярен к отрезку, соединяющему его середину с точкой P.

Серединой любого из диаметров данной окружности является точка O. Соединив O и P, мы получаем отрезок, которому должен быть перпендикулярен нужный нам диаметр. Так как этот диаметр должен быть перпендикулярен прямой OP, то в точке O восставим перпендикуляр и продолжим его до пересечения с данной окружностью в некоторых точках A и B. Ясно, что $PA = PB$, и если около точки P, как центра, опишем окружность радиусом, равным PA, то она разделит данную окружность пополам, так как проходит через концы диаметра.

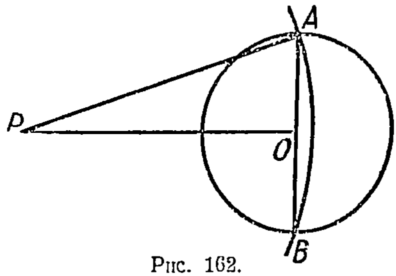


Рис. 162.

96. *Через точку A, лежащую внутри круга, провести хорду так, чтобы она в точке A разделилась пополам.*

Построение (рис. 162а). 1) Соединяем точку A с центром O круга. 2) Через точку A проводим прямую MN, перпендикулярную к отрезку AO. 3) Прямая MN пересечёт окружность в некоторых точках B и C. BC — искомая хорда.

97. *Данным радиусом (r) описать окружность, проходящую через две данные точки M и N.*

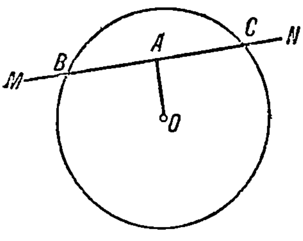


Рис. 162а.

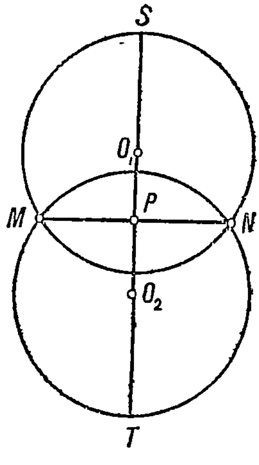


Рис. 162б.

Построение (рис. 162б). 1) Соединяем точки M и N. 2) Через середину P отрезка MN проводим прямую ST, перпендикулярную к этому отрезку. 3) Из точки M (или N), как из центра, радиусом, равным r, проводим дугу до пересечения с прямой ST в некоторых точках O_1 и O_2. 4) Из точек O_1 и O_2, как из центров, радиусом, равным отрезку r, описываем окружности K_1 и K_2.

98. *Дана окружность радиуса R и внутри её точка P. Построить хорду, которая проходит через точку P и имеет данную длину m.*

Построение (рис. 163). 1) Из произвольной точки A данной окружности, как из центра, радиусом, равным отрезку m, проводим дугу до пересечения с окружностью в некоторой точке B. 2) Центр O данной окружности соединяем отрезком с точкою P. 3) Из точки O радиусом, равным отрезку OP, описываем окружность. Она пересечёт хорду AB в некоторых точках C и D. 4) Из точки P, как из центра, радиусом, равным отрезку AC, проводим дугу до пересечения с данной окружностью в точках E и F. 5) Через точки E и P, а также через точки F и P проводим внутри данного круга хорды EH и FK, которые и будут искомыми.

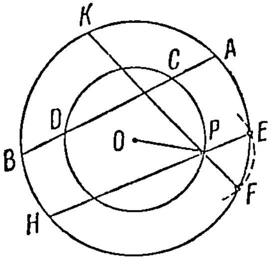


Рис. 163.

Исследование. Данная хорда отстоит от центра круга на расстоянии h, которое определяется следующей формулой:

$$h=\sqrt{R^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2}.$$

Если $OP>h$, задача имеет два решения, т. е. через точку P можно в данном круге провести две хорды, порознь равные отрезку m.

Если $OP=h$, задача имеет одно решение, причём искомая хорда перпендикулярна к отрезку OP.

Если $OP<h$, задача не имеет решения.

99. *Из точки O, данной на стороне AB угла ABC, описать окружность, которая от другой стороны угла отсекла бы хорду данной длины (PQ).*

Анализ (рис. 164). Так как точка O является центром искомой окружности, то, опустив перпендикуляр OD на линию BC, мы найдём середину хорды.

Отложив на прямой BC в разных направлениях от точки D отрезки DM и DN, порознь равные половине данного отрезка (PQ), мы вполне определим положение этой хорды.

Если около точки O, как центра, радиусом, равным отрезку OM (или ON), опишем окружность, то она и будет искомой.

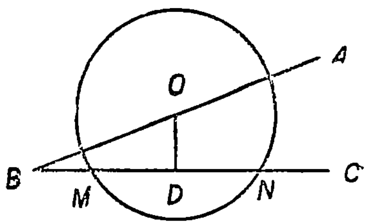


Рис. 164.

100. *Данным радиусом (R) описать окружность, центр которой лежал бы на стороне данного угла и которая от другой стороны его отсекала бы хорду данной длины (MN).*

Анализ (рис. 165). Допустим, что задача решена. Из чертежа легко усмотреть, что, соединив центр O данной окружности с концами хорды MN, мы получим равнобедренный треугольник, основание которого (MN) и боковые стороны (R) известны, причём высота этого треугольника выражает расстояние центра O от стороны BC. Теперь ясно, как надо решить задачу.

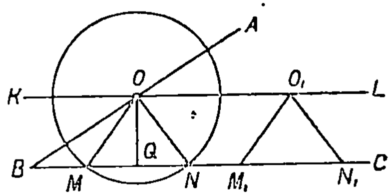


Рис. 165.

Построение. 1) Строим на прямой BC равнобедренный $\Delta\, O_1M_1N_1$, основанием которого является отрезок M_1N_1, равный MN, а боковыми сторонами — отрезки, равные данному радиусу R. 2) Через точку O_1 проводим прямую KL, параллельную стороне BC. 3) Точка O пересечения линий KL и AB является центром искомой окружности.

101. *Провести касательную к данной окружности параллельно данной прямой (KL).*

Построение (рис. 166). 1) Через центр O данной окружности проведём прямую PQ, перпендикулярную к данной прямой KL, и обозначим буквами C, A и B точки, в которых она пересечёт данные окружность и прямую KL. 2) В точках A и B построим прямые DE и GH, перпендикулярные к прямой PQ, которые и есть искомые касательные.

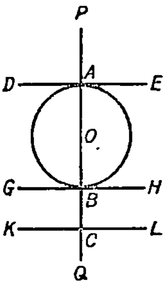


Рис. 166.

102. *Провести к данной окружности касательную под данным углом (α) к данной прямой KL (сколько решений?).*

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 166а). Касательная TT' образует с прямой KL данный угол α и пересекает эту прямую в некоторой точке A.

Соединив центр O окружности с точкой касания, получим отрезок OS, перпендикулярный к TT'.

Возьмём на прямой KL произвольную точку B и при ней построим $\angle LBB'$, равный α.

Если продолжим отрезок OS, то он пересечёт прямую BB' в некоторой точке S'.

Перпендикуляр, опущенный из центра O данной окружности на любую прямую BB', параллельную прямой TT' и образующую с прямой KL данный угол α, пересечёт окружность в той точке, через которую проходит искомая касательная.

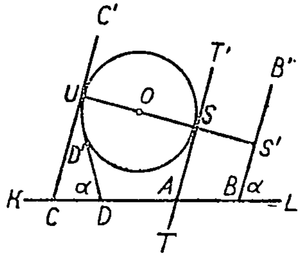


Рис. 166а.

Построение. При произвольной точке (B) данной прямой KL строим угол LBB', равный α.

Из центра O данной окружности опускаем перпендикуляр OS' на прямую BB'. Этот перпендикуляр пересечёт окружность в некоторой точке S.

Строим прямую TT', которая проходит через точку S и перпендикулярна прямой OS'.

TT' — искомая касательная.

Доказательство. По построению, прямая BB' образует с прямой KL угол α. Прямая TT' параллельна прямой BB' и, следовательно, образует с прямой KL угол α. Но так как прямая TT' перпендикулярна к радиусу OS, то она является касательной к данной окружности.

Прямая TT' удовлетворяет всем требованиям условия задачи, а потому она является искомой.

Исследование. Очевидно, что продолжение отрезка OS за точку O пересечёт окружность в некоторой точке U. Прямая CC', которая проходит через U и перпендикулярна к прямой US', также будет искомой.

Таким образом, мы получили две искомые касательные, параллельные прямой BB'.

Строя угол при точке B, мы располагали его на полупрямой BL. А если бы мы построили этот угол и на полупрямой BK, то получили бы ещё два решения.

Данная задача вообще имеет четыре решения (если $\angle \alpha \neq 90°$). И легко понять, что лишь в том случае, когда $\angle \alpha = 90°$, задача имеет только два решения.

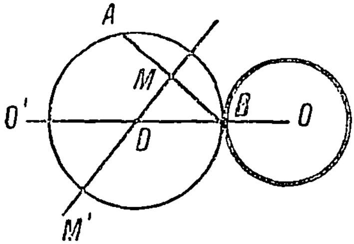


Рис. 166б.

103. *Описать окружность, проходящую через точку A и касающуюся данной окружности в точке B.*

Анализ. По условию, искомая окружность должна касаться данной окружности в точке B (рис. 166б), а потому её центр D должен находиться где-то на луче OO', проходящем через точку B.

Так как искомая окружность должна проходить через точки A и B, то отрезок AB есть хорда этой окружности. Отсюда вытекает, что центр D искомой окружности должен также находиться на перпендикуляре MM' к хорде AB, проходящем через середину M этой хорды.

Построение. 1) Из точки O проводим луч OO', проходящий через точку B. 2) Через середину (M) отрезка AB проводим прямую MM', перпендикулярную к AB. 3) Прямые OO' и MM' пересекаются в некоторой точке D. Из точки D радиусом, равным отрезку AD, описываем искомую окружность.

104. *Описать окружность, которая проходила бы через данную точку A и касалась бы данной прямой KL в данной на ней точке B.*

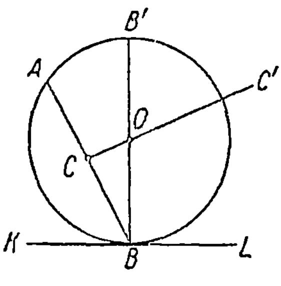


Рис. 167.

Анализ (рис. 167). Искомая окружность

должна проходить через точки A и B; значит, отрезок AB есть хорда, а потому центр искомой окружности находится на перпендикуляре CC', восставленном из середины отрезка AB.

А так как, по условию, искомая окружность касается прямой KL в точке B, то центр этой окружности находится на линии BB', которая перпендикулярна к данной линии KL и проходит через точку B. Точка O пересечения линий CC' и BB' будет центром искомой окружности, а радиусом её будет отрезок OB (равный OA).

105. *Описать окружность, касающуюся сторон данного угла ABC, причём одной из них в данной точке (P).*

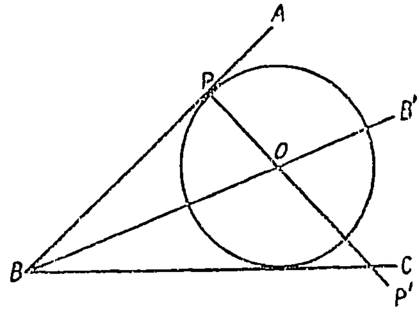


Рис. 168.

Анализ (рис. 168). По условию, искомая окружность касается сторон угла, значит, её центр находится на биссектрисе BB' угла. По условию, искомая окружность касается стороны AB в точке P, значит, центр этой окружности находится на прямой PP', перпендикулярной к стороне AB в точке P.

Точка O пересечения линий BB' и PP' будет центром искомой окружности. Радиус же этой окружности равен OP.

106. *Между двумя параллельными прямыми AB и CD дана точка P. Провести окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.*

Анализ (рис. 169). Искомая окружность должна касаться обеих параллельных; значит, её диаметр равен расстоянию d между прямыми AB и CD, а радиус равен $\frac{d}{2}$. Центр искомой окружности находится на равном расстоянии от каждой из данных параллельных линий. Геометрическим местом таких точек является прямая, которая параллельна AB и CD, проходит между ними и отстоит от каждой из них на одном и том же расстоянии, равном $\frac{d}{2}$. Так как искомая окружность имеет радиус, равный $\frac{d}{2}$, и должна проходить через точку P, то её центр должен находиться на расстоянии $\frac{d}{2}$ от точки P. Геометрическим местом точек, отстоящих от точки P

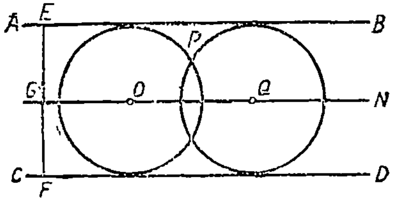


Рис. 169.

на данном расстоянии, является окружность, центр которой находится в точке P, а радиус равен $\frac{d}{2}$.

Построение. 1) Из любой точки E прямой AB опустим перпендикуляр EF на прямую CD. 2) Из середины G отрезка EF восставим перпендикуляр GN. 3) Около точки P, как центра, радиусом, равным EG, опишем окружность, котороя пересечёт прямую GN в некоторых точках O и Q. 4) Каждая из точек O и Q является центром искомой окружности, радиус которой равен $\frac{d}{2}$.

107. *Из точки (P), данной вне круга, провести к нему секущую так, чтобы её внутренняя часть равнялась данному отрезку (MN).*

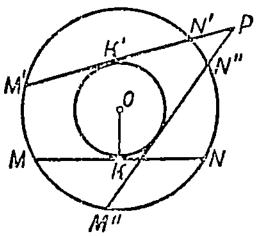


Рис. 170.

Анализ (рис. 170). В поисках решения, мы видоизменяем условие этой задачи так: найти в данном круге такую хорду, которая имела бы длину, равную MN, и продолжение которой проходило бы через точку P.

Если $MN < 2R$, то в данном круге можно провести бесчисленное множество хорд, имеющих длину MN. Геометрическим местом середин всех таких хорд является окружность, центр которой совпадает с центром данной окружности, а радиус равен перпендикуляру OK, опущенному из центра на одну из таких хорд. Построив вспомогательную окружность с центром в точке O и с радиусом, равным отрезку OK, мы можем сказать, что каждая из хорд, проведённая в данном круге и равная MN, является касательной к построенной нами вспомогательной окружности.

Построение. 1) Проводим в данной окружности хорду, равную MN. 2) На эту хорду опускаем из центра данной окружности перпендикуляр (OK). 3) Около центра O радиусом, равным OK, описываем вспомогательную окружность. 4) Наконец, из точки P проводим касательные (PM'' и PM'') к этой вспомогательной окружности. PM' и PM' — искомые секущие.

Исследование. Построение можно выполнить лишь в том случае, если $MN \leqslant 2R$. При $MN < 2R$ задача имеет два решения. При $MN = 2R$ задача имеет одно решение, причём секущая проходит через центр O данной окружности.

108. *Описать окружность, которая проходит через две точки A и B и пересекает данную окружность так, что хорда, соединяющая точки пересечения, параллельна данной прямой KL.*

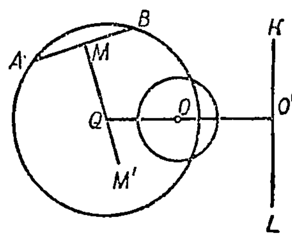


Рис. 171.

Построение (рис. 171). 1) Опустим перпендикуляр OO' из центра O данной окружности на прямую KL. 2) Из середины M отрезка AB восставим к нему перпендикуляр MM'. 3) Прямые OO' и MM' пересекаются в точке Q, являющейся центром искомой окружности. Радиус её равен AQ.

109. *В круге дана хорда (AB). Провести другую хорду, которая делилась бы первой пополам и составляла бы с ней данный угол (α). При всяком ли данном угле задача возможна?*

Анализ (рис. 172). Построим на данной хорде AB при точке A угол BAC, равный данному (α), и получим некоторую хорду AC. Полученная хорда AC удовлетворяет лишь одному условию задачи: она образует с хордой AB данный угол α. Искомая хорда должна образовать с хордой AB тот же угол α, т. е. должна быть параллельна хорде AC и удовлетворять ещё второму условию задачи: середина искомой хорды должна находиться на хорде AB. Как известно, перпендикуляр, опущенный из центра окружности на какую-нибудь хорду, делит эту хорду и все параллельные ей хорды пополам. Значит, если из центра O опустим перпендикуляр OQ на хорду AC, то можем сказать, что середина искомой хорды находится где-то на прямой OQ. Так как, по условию, середина искомой хорды должна лежать на хорде AB и на прямой OQ, то ясно, что середина искомой хорды находится в точке (P) пересечения прямой OQ с отрезком AB.

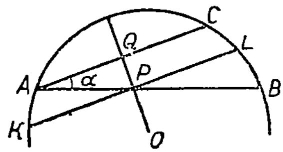


Рис. 172.

Поэтому, если через точку P проведём прямую, параллельную хорде AC, то получим искомую хорду KL.

Исследование. Чем меньше угол α, тем ближе к середине хорды AB находится точка P. По мере возрастания величины угла α точка P будет перемещаться к концу хорды AB.

Если угол α измеряется половиной дуги AB, то линия AC окажется касательной к окружности, и в этом случае хорда AC будет равна нулю. Допустим, что центральный угол, соответствующий дуге AB, равен 2ω. Легко убедиться, что задача имеет решение лишь в том случае, когда $0 < \alpha < \omega$. Причём, в общем случае можно провести две хорды, удовлетворяющие условию задачи.

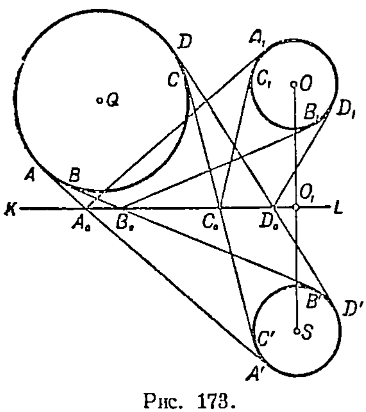


Рис. 173.

110. *Дана прямая KL и по одну сторону её две окружности. Найти на прямой KL такую точку, чтобы касательные, проведённые из этой точки к двум данным окружностям, составляли равные углы с прямой KL.*

Построение (рис. 173). 1) Из центра O первой окружности опустим перпендикуляр OO_1 на прямую KL. 2) На продолжении отрезка OO_1 от точки O_1 отложим отрезок O_1S, равный OO_1. 3) Около точки S радиусом первой окружности описываем новую (третью) окружность, симметричную первой. 4) Касательные ко второй и третьей окружностям пересекут прямую KL в искомых точках (A_0, B_0, C_0, D_0).

Доказательство. Прямая AA' является внешней касательной ко второй и третьей окружностям и пересекает линию KL в точке A_0. Ясно, что

$$\angle AA_0K = \angle A'A_0L. \tag{1}$$

Первая и третья окружности имеют равные радиусы и симметрично расположены относительно прямой KL, а потому касательные к этим окружностям, проведённые из любой точки прямой KL, образуют с этой прямой равные углы. Следовательно, если из точки A_0 проведём касательные A_0A_1 и A_0A' к первой и третьей окружностям, то получим, что

$$\angle A_1A_0L = \angle A'A_0L. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим, что

$$\angle AA_0K = \angle A_1A_0L.$$

Аналогичными рассуждениями убедимся в том, что и касательные, проведённые из точек B_0, C_0, D_0 к двум данным окружностям, также образуют с прямою KL равные углы, а именно:

$$\angle BB_0K = \angle B_1B_0L,$$
$$\angle CC_0K = \angle C_1C_0L,$$
$$\angle DD_0K = \angle D_1D_0L.$$

111. *Данным радиусом (R) описать окружность, проходящую через данную точку (P) и касающуюся данной прямой (KL).*

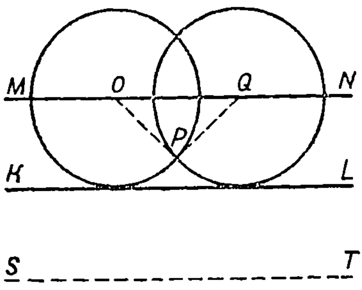


Рис. 173а.

Анализ (рис. 173а). Искомая окружность радиуса (R) должна касаться данной прямой KL, а потому центр этой окружности отстоит от прямой KL на расстоянии R. Начертим геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой KL на расстоянии R. Это будут две параллельные линии MN и ST. Но искомая окружность проходит через точку P; значит, её центр отстоит от точки P на расстоянии, равном R. Поэтому радиусом, равным R, из точки P, как из центра, проводим дугу до пересечения с прямой в точках O и Q.

O и Q — центры искомых окружностей.

Исследование (рис. 174). Обозначив буквою h расстояние от точки P до прямой KL, можем результаты исследования представить в таком виде:

Значение h	0	$0<h<R$	$h=R$	$R<h<2R$	$h=2R$	$h>2R$
Число решений	2	2	2	2	1	0
Пояснит. рисунок	174*а*	174*б*	174*в*	174*г*	174*д*	174*е*

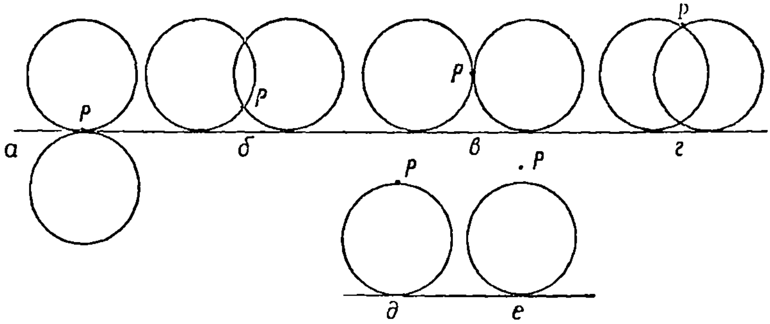


Рис. 174.

112. *На данной прямой (KL) найти такую точку (P), чтобы касательные, проведённые из неё к данной окружности, были данной длины (k).*

Анализ (рис. 175). Касательная, проведённая из искомой точки к данной окружности радиуса r, должна иметь данную длину k. Следовательно, искомая точка лежит на окружности, которая концентрична с данной и имеет радиус R, определяемый по формуле:

$$R=\sqrt{k^2+r^2}. \qquad (1)$$

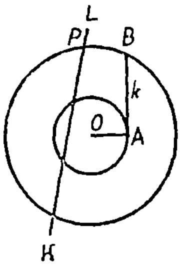


Рис. 175.

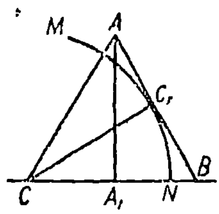


Рис. 176.

Построение. 1) Строим отрезок R, определяемый формулой (1). 2) Из точки O радиусом, равным R, описываем окружность. Эта окружность пересечёт прямую KL в искомых точках.

Исследование. Обозначая буквою d расстояние от центра O данной окружности до прямой KL, можем результаты исследования записать так:

если $\sqrt{k^2+r^2}>d$, то задача имеет 2 решения,

„ $\sqrt{k^2+r^2}=d$, „ „ „ 1 решение,

„ $\sqrt{k^2+r^2}<d$, „ „ не имеет решения.

113. *Построить треугольник, зная один угол и две высоты, из которых одна проведена из вершины данного угла.*

Анализ (рис. 176). Допустим, что задача решена и $\triangle ABC$ — искомый. Нам даны: 1) $\angle ACB$, 2) высота AA_1 и 3) высота CC_1. Прежде всего из чертежа усматриваем, что (1) можно построить $\triangle ACA_1$, так как знаем его катет AA_1 и противолежащий острый угол ACB. Направление стороны AB определим, если около точки C опишем дугу MN радиусом, равным высоте CC_1, а затем из точки A проведём к дуге MN касательную, которая пересечёт продолжение стороны CA_1 в некоторой точке B. $\triangle ABC$ — искомый.

Исследование (рис. 177).

h_1 — высота, опущенная на сторону данного угла ACB.

h_2 — высота, проведённая из вершины данного угла ACB.

	Вид $\angle ACB$	Высоты h_1 и h_2	Число решений	Какая фигура является искомой	Рисунок
I	Острый	$h_2 \geqslant AC$	0	—	177*а*
II		$A_1C < h_2 < AC$	1	Остроугольный $\triangle ACD$	*б*
III		$h_2 = A_1C$	1	Прямоугольный $\triangle AA_1C$	*в*
IV		$h_2 < A_1C$	1	Тупоугольный $\triangle ACD$	*г*
V	Прямой	$h_2 \geqslant h_1$	0	—	*д*
VI		$h_2 < h_1$	1	Прямоугольный $\triangle ACK$	*е*
VII	Тупой	$h_2 \geqslant h_1$	0	—	*ж*
VIII		$h_2 < h_1$	1	Тупоугольный $\triangle ACM$	*з*

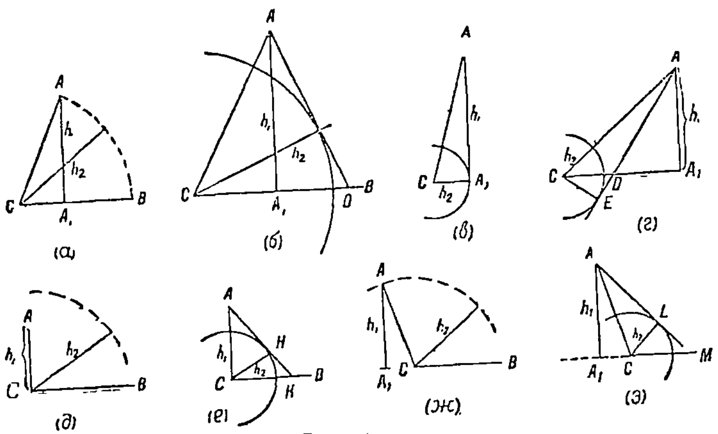


Рис. 177.

114. *Даны две точки (A и B). Провести прямую (KL) так, чтобы перпендикуляры, опущенные на неё из этих точек, имели данные длины (MN и PQ).*

Указание (рис. 177а). Задача сводится к определению касательных к двум вспомогательным окружностям (A, MN; B, PQ).

В зависимости от относительной величины отрезков AB, NM и PQ задача имеет 4, 3, 2, 1 или 0 решений.

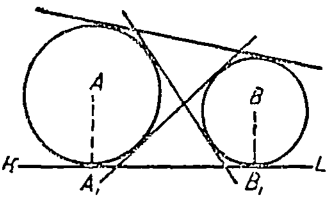


Рис. 177а.

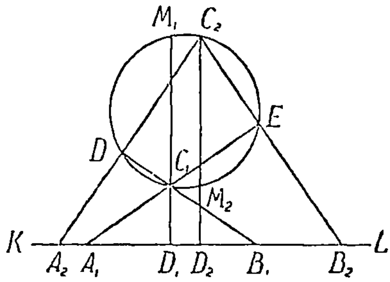


Рис. 178.

115. *Дана прямая KL и две точки D и E на данной окружности. Найти на этой окружности такую точку C, чтобы хорды CD и CE, продолженные до пересечения с прямой KL, образовали равнобедренный треугольник,* (рис. 178).

Указание. Точки D и E делят окружность на две дуги: $\smile DM_1E$ и $\smile DM_2E$.

Прямые (M_1D_1 и M_2D_2), которые перпендикулярны к KL и проходят через середины M_1 и M_2 дуг DM_1E и DM_2E, пересекают окружность в искомых точках C_1 и C_2. Треугольники $A_1C_1B_1$ и $A_2C_2B_2$ — равнобедренные. Решений либо 2, либо 1 (если точка C_1 или точка C_2 совпадает с точкой D или E).

116. *Описать окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и данного круга.*

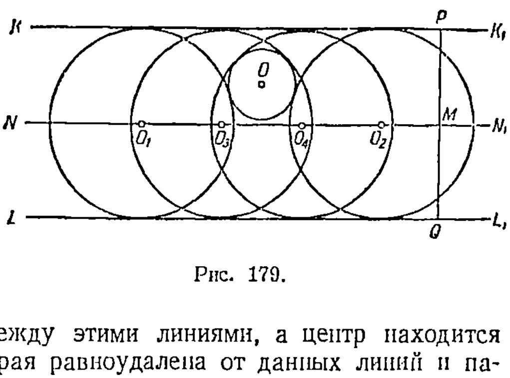


Рис. 179.

Прежде всего решим эту задачу для того случая, когда весь данный круг находится между данными параллельными прямыми.

Анализ (рис. 179). Искомая окружность касается двух параллельных линий; значит, её радиус равен половине расстояния между этими линиями, а центр находится где-то на прямой NN_1, которая равноудалена от данных линий и параллельна им. Так как искомая окружность касается данной окружности, имеющей центр в точке O, то центр искомой окружности отстоит от центра (O) данной окружности либо на расстоянии суммы радиусов этих окружностей (при внешнем касании), либо на расстоянии разности радиусов этих окружностей (при внутреннем касании) и может быть определён пересечением соответствующих дуг, проведённых из точки O, как из центра, с прямой KK_1.

Построение. 1) Из любой точки (P) одной данной линии опускаем перпендикуляр PQ на другую параллельную ей линию. Радиус искомой окружности равен половине этого отрезка $\left(R=\frac{PQ}{2}\right)$. 2) Через середину M отрезка PQ проводим прямую NN_1, параллельную данным параллельным линиям. 3) Находим длину отрезка AB, равного сумме двух радиусов: искомой окружности (R) и данной окружности (r), т. е. $AB=R+r$. 4) Находим длину отрезка CD, равного $R-r$. 5) Из центра O данной окружности радиусом, равным AB, проводим дугу до пересечения с прямой NN_1 в точках O_1 и O_2. Точки O_1 и O_2 представляют собой центры тех искомых окружностей, которые внешне касаются данной окружности. 6) Из центра O данной окружности радиусом, равным CD, проводим дугу до пересечения с прямой NN_1 в точках O_3 и O_4. Точки O_3 и O_4 являются центрами тех искомых окружностей, которые внутренне касаются данной окружности.

Аналогичным образом решаем задачу и для других конфигураций.

Исследование. Результаты исследования можно представить в виде такой таблицы:

Рисунок	Конфигурация данных геометрических образов	Число решений
180а	Данный круг лежит вне полосы, ограниченной параллельными линиями, и не касается ни одной из них.	0
180б	Данный круг лежит вне полосы, ограниченной параллельными линиями, и касается одной из них.	1
180в	Данный круг пересекает одну из параллельных линий и не касается другой.	2
180г	Данный круг пересекает одну из параллельных линий и касается другой.	3
180д	Данный круг пересекает обе параллельные линии.	4

Продолжение

Рисунок	Конфигурация данных геометрических образов	Число решений
180е	Данный круг целиком находится между параллельными линиями и не касается ни одной из них.	4
180ж	Данный круг целиком находится между параллельными линиями и касается одной из них.	3
180з	Данный круг касается обеих параллельных линий.	2

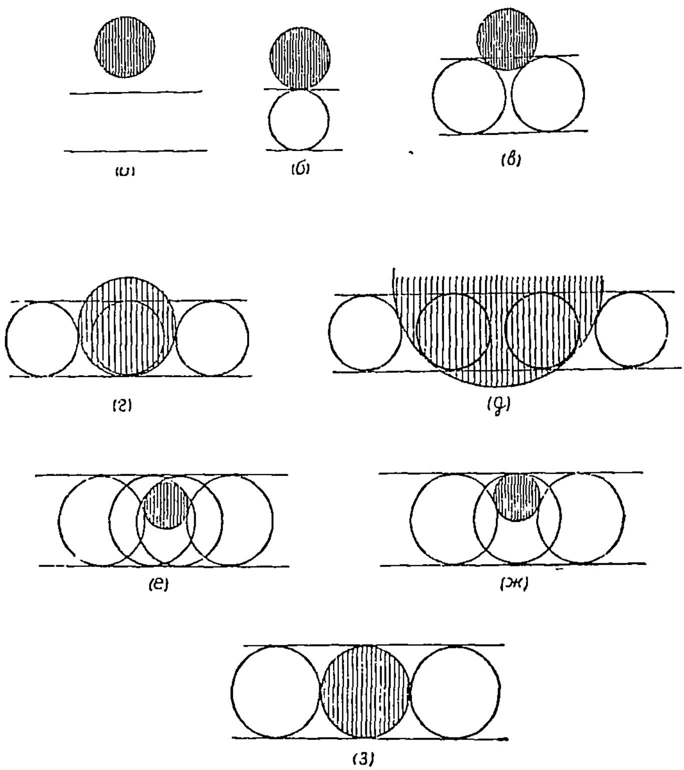


Рис. 180.

117. *Данным радиусом (r) описать окружность, которая касалась бы данного круга (R) и проходила бы через данную точку (P). Рассмотреть три случая: данная точка лежит 1) вне круга, 2) на окружности и 3) внутри круга.*

Прежде всего рассмотрим тот случай, когда точка P лежит вне данного круга и, следовательно, искомая окружность внешне касается этого круга.

Анализ (рис. 181). Чтобы искомая окружность внешне касалась данной окружности, центр её должен находиться на окружности, описанной около точки O, как из центра, радиусом, равным $R+r$.

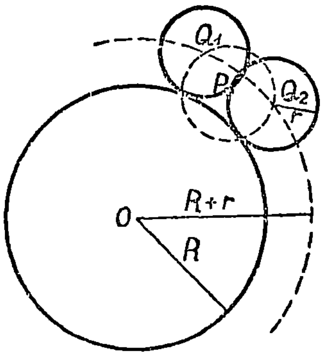


Рис. 181.

Искомая окружность должна проходить через точку P, поэтому центр её должен лежать на окружности, описанной около точки P, как центра, радиусом равным r. Точки пересечения первой и второй вспомогательных окружностей являются центрами искомых окружностей.

Построение. 1) Из центра O данной окружности описываем первую вспомогательную окружность радиусом, равным $R+r$. 2) Приняв точку P за центр, описываем радиусом r вторую вспомогательную окружность. Эта окружность либо пересечёт первую вспомогательную окружность в двух точках (Q_1 и Q_2), либо только коснётся в некоторой точке (T), либо не будет иметь с нею ни одной общей точки. 3) Описываем около точек Q_1 и Q_2, как центров, окружности радиусом, равным r. Эти окружности и будут искомыми.

Исследование. На число решений и их особенности влияет расстояние OP (рис. 181а).

Из прилагаемой таблицы видно, сколько и какие решения имеет данная задача при различных значениях OP (d — расстояние от точки P до центра O данной окружности).

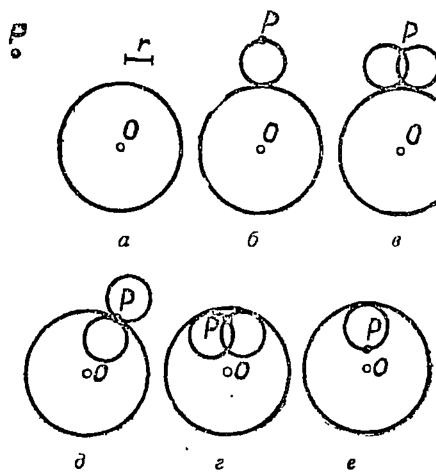


Рис. 181а.

Значения d / Характерные случаи		$d > R+2r$	$d = R+2r$	$R < d < R+2r$	$\mid R-2r \mid < d < R$	$d = R$	$d = \mid R-2r \mid$	$0 < d < \mid R-2r \mid$	$d = 0$
I. $R > 2r$	Число решений	0	1	2	2	2	1	0	0
Пояснит. чертежи № 181а		(*а*)	(*б*)	(*в*)	(*г*)	(*д*)	(*е*)		
II. $R = 2r$		0	1	2	2	2	∞	*	∞
III. $R < 2r < 2R$		0	1	2	2	2	1	0	0
IV. $R = r$		0	1	2	*	1	1	0	0
V. $r > R$		0	1	2	*	2	3	*	0

Примечание. Те сочетания значений d и r, которые невозможны для рассматриваемого случая или не являются характерными, обозначены звёздочкой (*).

118. *Данным радиусом (R) описать окружность, которая от сторон данного угла (ABC) отсекала бы хорды данной длины (DE и FG).*

Построение (рис. 181б). 1) Строим круг, радиус которого равен R. 2) В этом круге проводим две хорды, порознь равные отрезкам DE и FG. 3) Определяем перпендикуляры OP и OC, опущенные на эти хорды. 4) Проводим внутри угла ABC (рис. 182) прямую A_1K, которая параллельна стороне AB и отстоит от неё на расстоянии OP. 5) Проводим внутри угла ABC прямую B_1L, которая параллельна стороне BC и отстоит от неё на расстоянии OC. Точка M, в которой пересекутся A_1K и B_1L, представляет собой центр искомой окружности.

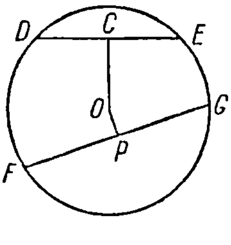


Рис. 181б.

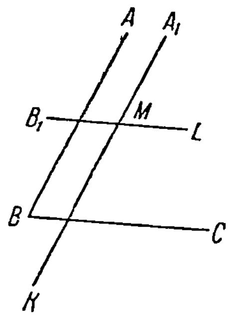


Рис. 182.

Исследование. Если данный $\angle ABC < 180°$, то при заданных отрезках DE и FG задача имеет решение.

119. *Описать окружность, касающуюся данного круга в данной точке (P) и данной прямой (KL).*

Анализ (рис. 183). I. Пусть O есть центр данной окружности. Так как искомая окружность касается данной окружности в точке P, то её центр лежит где-то на прямой OP', проходящей через точки O и P.

Искомая окружность касается также прямой KL.

Поэтому, если проведём в точке P касательную P_1P_2 к данной окружности, то искомая окружность окажется вписанной в угол P_1P_2K. Отсюда вытекает, что центр искомой окружности находится на биссектрисе P_2P_3 угла P_1P_2K. Из сказанного следует, что центр искомой окружности находится на пересечении (Q) прямой OP' и P_2P_3, а её радиус равен QP.

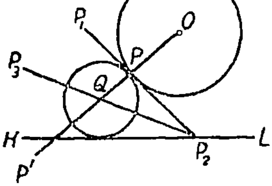


Рис. 183

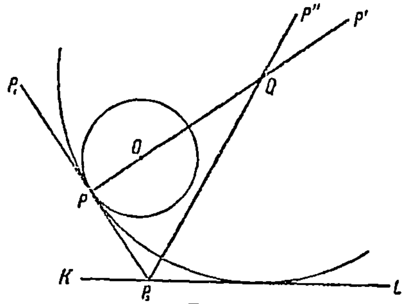


Рис 184.

II. Искомая окружность, будучи касательной к прямой KL, может иметь внутреннее касание с данной окружностью и поэтому (рис. 184) окажется вписанной в угол P_1P_2L; значит, её центр находится на биссектрисе P_2P'' угла P_1P_2L. При внутреннем касании искомой окружности с данной центр первой также находится на прямой, проходящей через точки O и P.

Из сказанного вытекает, что в этом случае центр Q искомой окружности находится на пересечении прямых OP' и P_2P''.

120. *Описать окружность, касающуюся данной прямой (KL) в данной точке (P) и данного круга (O, r).*

Анализ (рис. 185). I. Определим ту окружность, которая с данной имеет внешнее касание. Так как искомая окружность касается прямой KL в точке P, то её центр находится на перпендикуляре MN к прямой KL, проходящем через точку P.

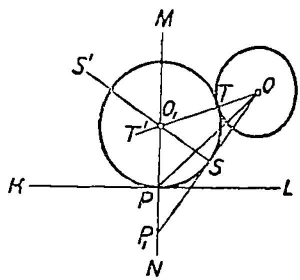


Рис 185

Нам неизвестна точка T касания искомой и данной окружностей, но ясно, что центр искомой окружности находится на прямой OT', проходящей через точки O и T. Из сказанного заключаем, что центр (O_1) искомой окружности находится на пересечении прямой OT' и MN. Соединяя точку O_1 с точками P и O, получим треугольник OO_1P, который можем построить, так как знаем его сторону OP, прилежащий угол O_1PO и разность OT двух других сторон: ($OO_1 - O_1P = OT$).

Построение. 1) Восставим в точке P перпендикуляр MN к прямой KL. 2) На прямой MN от точки P в направлении N отложим отрезок PP_1, равный OT, т. е. радиусу (r) данного круга. 3) Восставим из середины S отрезка OP_1 перпендикуляр SS' к OP_1. Точка O_1, в которой пересекаются линии MN и SS_1, есть центр искомого круга, а радиусом этого круга будет отрезок O_1P.

Анализ (рис. 185а). II. Теперь определим ту окружность, которая с данной имеет внутреннее касание в некоторой точке T. Центр искомой окружности находится, во-первых, на перпендикуляре MN, восставленном в точке P к данной прямой KL, и, во-вторых, на прямой TT', которая проходит через центр данной окружности и точку T. Соединив точки O и P отрезком прямой, получим $\triangle PQO$, в котором нам известны: 1) сторона OP, 2) прилежащий к ней угол OPQ и 3) разность r двух других сторон ($QP - QO = r$).

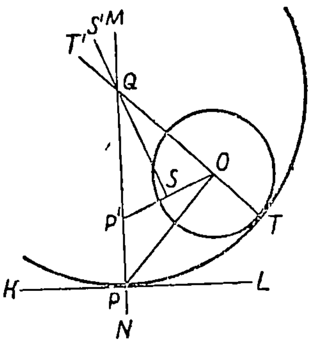
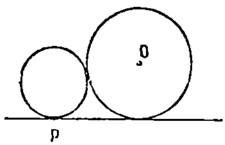
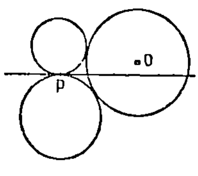
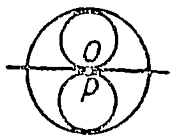
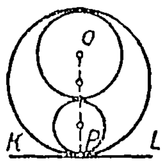
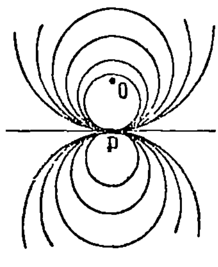
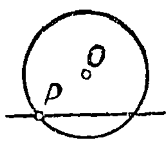


Рис. 185а.

Построение. 1) Восставим в точке P перпендикуляр MN к прямой KL. 2) На прямой MN от точки P в направлении M отложим отрезок PP', равный OT, т. е. радиусу (r) данного круга. 3) Проведём через середину S отрезка OP' перпендикуляр SS' к OP'. Точка Q, в которой прямая SS' пересекает прямую MN, есть центр искомой окружности, а её радиус равен QP.

Исследование (окружность F, прямая KL и точка P на прямой KL).

	№ чертежа	Конфигурация F, KL и P	Число решений	Примечание
I	 Рис. 186 а.	Окружность F касается прямой KL, но не в точке P.	1	Искомая окружность имеет внешнее касание с окружностью F.
II	 Рис. 186б.	Прямая KL пересекает окружность F, причём точка P находится вне круга.	2	Обе искомые окружности имеют внешнее касание с окружностью F.

	№ чертежа	Конфигурация F, KL и P	Число решений	Примечание
III	 Рис. 186в.	Прямая KL пересекает данную окружность, причём точка P находится внутри круга.	2	Обе искомые окружности имеют внутреннее касание с окружностью F и находятся внутри неё.
IV	 Рис. 186г.	Окружность F лежит вне прямой KL и точка P является основанием перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности F на прямую KL.	2	Одна из искомых окр жностей имеет внешнее касание с окружностью F, а другая — внутреннее.
V	 Рис. 186д.	Окружность F касается прямой KL в точке P.	Бесконечное множество	Все окружности, касающиеся прямой KL в точке P, являются искомыми.
VI	 Рис. 186е.	Прямая KL пересекает окружность F в точке P.	0	—

121. *Описать окружность, касающуюся двух данных окружностей (O, R и O_1, r), причём одной из них в данной точке T.*

Рассмотрим следующие три случая, зависящие от конфигурации данных и искомой окружностей.

I. Искомая окружность лежит вне данных окружностей. Анализ (рис. 187). Искомая окружность касается первой окружности в данной точке T, а второй- в некоторой неизвестной нам точке T_1. Центр искомой окружности лежит на пересечении (Q) прямых, являющихся продолжением отрезков OT и O_1T_1. Если сумеем построить $\triangle QOO_1$, то и найдём точку Q — центр искомой окружности.

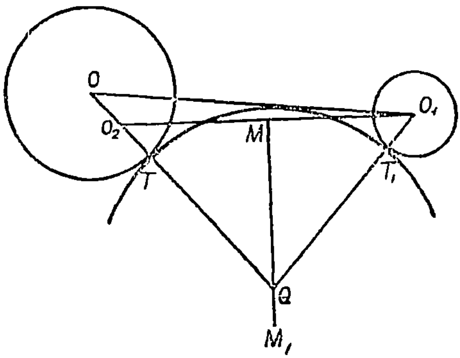


Рис. 187.

Определим разность сторон OQ и O_1Q:

$OQ - O_1Q = (OT + TQ) - (O_1T_1 + T_1Q) = (OT - O_1T_1) + (TQ - T_1Q)$. Но $OT = R$, $O_1T_1 = r$ и $TQ = T_1Q$, как радиусы одной и той же искомой окружности, а потому $OQ - O_1Q = R - r$. Итак, в $\triangle QOO_1$ нам известно следующее: 1) основание OO_1 (так как даны оба круга по величине и положению); 2) угол QOO_1 при основании (потому что дано положение точки T касания); 3) разность двух других сторон: $OQ - O_1Q = R - r$. Построение такого треугольника известно.

Построение. 1) Через точки O и T проведём прямую и на ней от точки O в направлении T отложим отрезок OO_2, равный $R - r$. 2) Соединим точки O_1 и O_2 и из середины M отрезка O_1O_2 восставим перпендикуляр MM_1. 3) Определим точку (Q) пересечения прямой MM_1 и продолжения отрезка OT. Радиус искомой окружности равен отрезку QT, а центром её является точка Q.

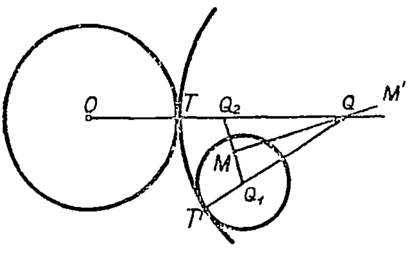


Рис. 188.

II. Одна из данных окружностей лежит вне искомой, а другая внутри. Анализ производится так же, как и для 1-го случая.

Построение (рис. 188). 1) Через точки O и T проведём прямую и на ней от точки O в направлении T отложим отрезок OQ_2, равный $R + r$. 2) Соединим точки Q_1 и Q_2 и из середины M отрезка Q_1Q_2 восставим перпендикуляр MM' к Q_1Q_2. 3) Прямые MM' и OT пересекутся в точке Q.

Радиус искомой окружности равен отрезку QT, а центром её является точка Q.

III. Обе данные окружности лежат внутри искомой. Анализ производится так же, как и для 1-го случая.

Построение (рис. 189). 1) Через точки O и T первого круга проведём прямую и на ней от точки T по направлению к центру отложим отрезок TO_2, равный радиусу другого данного круга. 2) Соединим точки O_1 и O_2 и из середины M отрезка O_1O_2 восставим перпендикуляр MM_1 к O_1O_2. 3) Прямые MM_1 и OT пересекутся в точке Q. Радиус искомой окружности равен отрезку QT, а центром её является точка Q.

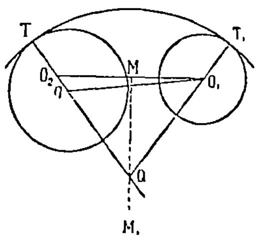


Рис. 189.

Исследование. Ниже помещена табличка, в которой изложены результаты исследования (рис. 190а и б).

Необходимо учесть, что в этой табличке не только использованы те обозначения, какие встречаются в условии задачи, но и введены следующие:

1. Если окружности, данные в условии задачи, касаются одна другой, то буква H_0 обозначает точку касания.
2. Если данные окружности пересекаются, то буквами S и S' обозначаются точки пересечения.
3. G и G' — две точки, которые принадлежат той же окружности, что и точка T, и находятся на внутренних касательных к данным окружностям.
4. H и H' — две точки, которые принадлежат той же окружности, что и точка T, и находятся на внешних касательных к данным окружностям.

Табличка составлена применительно к таким пояснительным чертежам, в которых точки H, G, S расположены по одну сторону прямой, проходящей через точки O и O_1, а H', G' и S' — по другую сторону. Возможность получения решений и число их зависит от того, какое требование предъявляется к искомой окружности, какова конфигурация данных окружностей и какое положение занимает точка T на данной окружности.

Эти три момента и отражены в табличке, причём указаны только те положения точки T, при которых задача имеет решение.

В сносках приведены необходимые пояснения и указано, в каких случаях задача не имеет ни одного решение.

Таблица

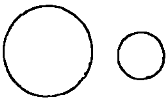
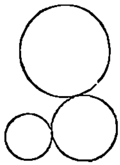
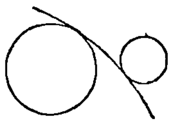
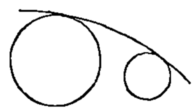
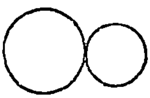
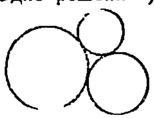
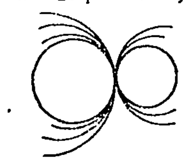
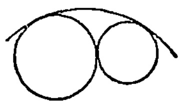
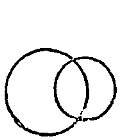
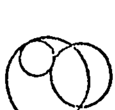
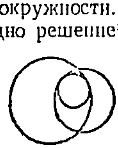
	Рассматриваемая конфигурация данных окружностей $R \neq r$	Требования, предъявляемые к искомой окружности		
		Искомая окружность имеет внешнее касание с каждой из данных окружностей.	Искомая окружность имеет с одной из данных окружностей внешнее касание, а с другой — внутреннее	Искомая окружность имеет с обеими данными окружностями внутреннее касание
I	Одна из данных окружностей лежит вне другой, т. е. $OO_1 > R+r$. 	Точка T не совпадает ни с точкою H, ни с точкою H' и находится на дуге HH', пересекающей отрезок OO_1. Одно решение×). 	Точка T не совпадает ни с точкою G, ни с точкою G'. Одно решение×). 	Точка T не совпадает ни с точкою H, ни с точкою H', а лежит на дуге HH', которая не пересекает отрезка OO_1. Одно решение+). 
II	Две данные окружности имеют внешнее касание, т. е. $OO_1 = R+r$. 	Точка T не совпадает ни с одной из трёх точек H, H' и H_0 и находится на дуге HH', пересекающей отрезок OO_1. Одно решение+). 	Точка T совпадает с точкою H_0 касания окружностей. Бесчисленное множество решений++). 	Точка T не совпадает с точками H и H' и лежит на дуге HH', которая не пересекает отрезка OO_1. Одно решение×). 
III	Две данные окружности пересекаются, т. е. $R-r < OO_1 <$ $< R+r$. 	Точка T не совпадает ни с одной из точек H, H', S и S', а лежит на дуге HS или на дуге $H'S'$, каждая из которых меньше четверти окружности. Одно решение*). 	Точка T находится на дуге SS' и не совпадает ни с точкою S, ни с точкою S'. Одно решение*). 	Точка T не совпадает ни с одной из четырёх точек H, H' S и S', а лежит либо на дуге SS', которая меньше полуокружности, либо на дуге HH', которой не принадлежит дуга SS', меньшая полуокружности. Одно решение‡). 

Рис. 190а.

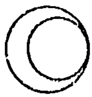
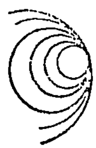
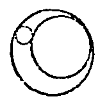
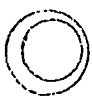
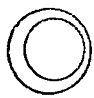
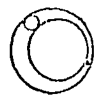
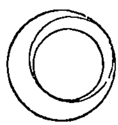
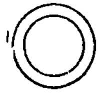
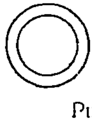
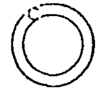
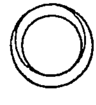
	Рассматриваемая конфигурация данных окружностей $R \neq r$	Требования, предъявляемые к искомой окружности		
		Искомая окружность имеет внешнее касание с каждой из данных окружностей	Искомая окружность имеет с одной из данных окружностей внешнее касание, а с другой— внутреннее	Искомая окружность имеет с обеими данными окружностями внутреннее касание
IV	Две данные окружности имеют внутреннее касание, т. е. $OO_1 = R - r$. 	Точка T совпадает с точкою H_0 внутреннего касания данных окружностей. Бесчисленное множество решений*). 	Точка T не совпадает с точкою H_0 внутреннего касания данных окружностей. Одно решение*). 	Точка T совпадает с H_0. Бесчисленное множество решений*). 
V	Одна из данных окружностей лежит внутри другой данной, т. е. $O < OO_1 < R - r$. 	Зада а не имеет решения**). 	При любом положении точки T на данной окружности задача имеет одно решение*). 	При любом положении точки T на данной окружности задача имеет одно решение. 
VI	Две данные окружности концентричны, т. е. $OO_1 = O$. 	Задача не имеет решения**). 	При любом положении точки T на данной окружности задача имеет одно решение, причём диаметр искомой окружности равен $R - r$. 	При любом положении точки T на данной окружности задача имеет одно решение. 

Рис. 190б.

*) Если точка T занимает на данной окружности иное положение, то, учитывая рассматриваемую конфигурацию данных окружностей и требование, предъявляемое к искомой окружности, найдём, что задача не имеет ни одного решения.

**) Задача не имеет ни одного решения, так как требование, предъявляемое к искомой окружности, невозможно удовлетворить при рассматриваемой конфигурации данных окружностей.

После того, как произведено исследование рассматриваемой задачи, можно предложить учащимся следующие упражнения:

1. Изготовить пояснительные чертежи к каждому из случаев, рассмотренных в исследовании.

2. Произвести исследование данной задачи для того случая, когда радиусы обеих данных окружностей равны ($R=r$).

3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках S и S', и точка T, находящаяся на дуге SS', которая меньше 180°. Построить окружность, которая проходит через точку T и имеет внутреннее касание с каждой из данных окружностей.

4. Узнать, при какой конфигурации равных данных окружностей K_1 и K_2 радиус окружности K, имеющей внутреннее касание с окружностями K_1 и K_2, вдвое меньше радиуса окружности K_1, и где в этом случае находится точка T.

5. На одной из двух данных окружностей K_1 и K_2 дана точка T, через которую проведена окружность K, имеющая внутреннее касание с окружностями K_1 и K_2. При каких конфигурациях окружностей K_1 и K_2 и при каком положении точки T возможно равенство $2R=R_1+R_2+O_1O_2$, где R_1, R_2 и R являются радиусами окружностей K_1, K_2 и K, а O_1O_2 — линией центров окружностей K_1 и K_2?

122. *Описать окружность, внешне (или внутренне) касающуюся трёх равных окружностей (O_1, r), (O_2, r) и (O_3, r).*

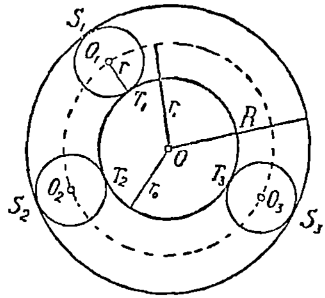


Рис. 191.

Анализ. Допустим (рис. 191), что окружность с центром O и радиусом R касается внутренне трёх данных окружностей радиуса r, имеющих центры в точках O_1, O_2 и O_3, причём S_1, S_2, S_3 — точки касания. Радиусы O_1S_1 и OS_1 перпендикулярны к касательной, проведённой к окружностям (O_1, r) и (O, R) в точке касания, а потому точка O лежит на прямой O_1S_1.

Аналогичными рассуждениями придём к выводу, что точка O лежит на прямой O_2S_2 и точка O — на прямой O_3S_3.

Так как

$$OS_1=OS_2=OS_3=R \text{ и } O_1S_1=O_2S_2=O_3S_3=r,$$

то

$$OS_1-O_1S_1=OS_2-O_2S_2=OS_3-O_3S_3, \tag{1}$$

т. е.

$$OO_1=OO_2=OO_3, \tag{2}$$

и, следовательно, точки O_1, O_2, O_3 лежат на окружности, радиус которой легко можем определить: он равен радиусу круга, описанного около треугольника $O_1O_2O_3$. Если радиус этого круга, имеющего центр в точке O, обозначим буквою r_1, то из (1) и (2) получим:

$$r_1 = R - r,$$

откуда

$$R = r_1 + r. \qquad (3)$$

Радиус r нам дан; радиус r_1 и положение точки O легко определить, а потому можем найти радиус R и описать им из точки O окружность, внутренне касающуюся данных окружностей.

Аналогичными рассуждениями придём к выводу, что окружность, которая внешне касается данных окружностей, имеет радиус r_0, определяемый по формуле

$$r_0 = r_1 - r. \qquad (4)$$

Ясно, что центр этой окружности также находится в точке O.

Построение. 1) Находим центр O и радиус r_1 окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. 2) По формуле (3) определяем радиус R окружности, внутренне касающейся данных окружностей. 3) Из точки O радиусом R описываем окружность; она внутренне касается данных окружностей. 4) По формуле (4) определяем радиус r_0 окружности, внешне касающейся данных окружностей. 5) Из точки O радиусом r_0 описываем окружность; она внешне касается данных окружностей.

Исследование. 1) Если центры данных равных окружностей лежат на одной прямой, то задача не имеет решения. 2) Если центры данных равных окружностей не лежат на одной прямой, то, значит, существует $\triangle O_1O_2O_3$, и потому можно определить центр и радиус окружности, описанной около этого треугольника, и построить окружность, внутренне касающуюся данных окружностей. 3) Что касается той окружности, которая внешне касается трёх данных окружностей, то она существует и легко может быть построена в том случае, если $r_1 > r$, т. е. радиус r_1 окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, больше радиуса любой из трёх данных окружностей. 4) Если $r_1 = r$,* то данные окружности проходят через одну точку, и, следовательно, в этом случае нет окружности, которая внешне касается данных окружностей (рис. 191а). 5) Если $r_1 < r$, то в этом случае нет окружности, внешне касающейся трёх данных окружностей, а имеется окружность $(O, r - r_1)$, внутренне касающаяся их (рис. 191б).

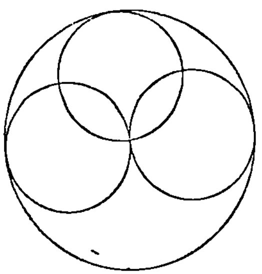


Рис. 191а.

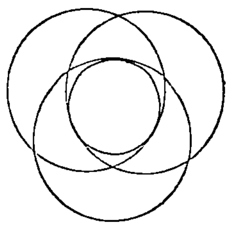


Рис. 191б.

*Примечание. При $r_1 = r$ радиус окружности, внутренне касающейся данных окружностей, равен $2r$.

123. *В данный сектор вписать окружность, касающуюся дуги сектора и радиусов, ограничивающих сектор.*

Анализ (рис. 191в). Искомая окружность (K_1) должна касаться радиусов, ограничивающих сектор, а потому её центр (O_1), как точка, равноудалённая от сторон угла AOB, должна находиться на биссектрисе этого угла. Заметим, что эта биссектриса проходит и через центр (O) той окружности (K), частью которой является дуга рассматриваемого сектора.

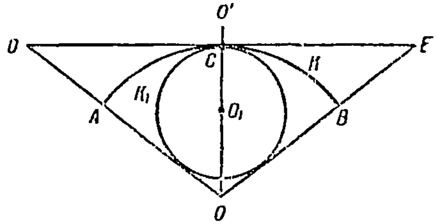


Рис. 191в.

Кроме того, искомая окружность K_1 должна также касаться окружности K.

Так как точка касания двух окружностей должна лежать на линии центров (O и O_1), а эти центры лежат на биссектрисе угла AOB, можно сказать, что биссектриса угла AOB проходит через точку (C) касания окружностей K и K_1.

Проведём через точку C касательную к окружностям K и K_1; эта касательная пересечёт продолжение радиусов OA и OB в некоторых точках D и E.

Как видим, искомая окружность K_1 оказалась вписанной в равнобедренный треугольник ODE, и, следовательно, её центр (O_1) находится на пересечении биссектрис его внутренних углов.

Построение. 1) Проводим биссектрису угла AOB; она пересечёт дугу в некоторой точке C. 2) Через точку C проводим прямую, перпендикулярную к отрезку OC, которая пересечёт продолжения радиусов OA и OB в некоторых точках D и E. 3) В треугольнике ODE проводим биссектрису угла DEO; она пересечёт отрезок OC в некоторой точке O_1. 4) Из точки O_1, как из центра, описываем окружность (K_1) радиусом, равным отрезку O_1C.

Окружность K_1 является искомой.

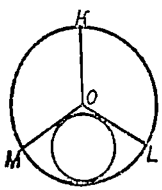


Рис. 192.

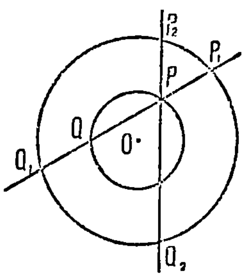


Рис. 193.

124. *Вписать в данный круг три равных круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.*

Указание (рис. 192). Сначала строим при центре O данной окружности три равных угла по 120°: $\angle KOL = \angle LOM = \angle KOM$, а затем в каждый из полученных секторов вписываем окружность (см. предыдущ. задачу).

125. *Через точку, данную внутри круга, провести хорду так, чтобы разность ее отрезков равнялась данному отрезку KL.*

Построение (рис. 193). 1) Около центра O данного круга описываем окружность, проходящую через данную точку P. 2) Проводим в этой вспомогательной окружности из точки P хорду PQ, равную данному отрезку KL. 3) Продолжаем хорду PQ до пересечения с данной окружностью в некоторых точках P_1 и Q_1.

Хорда P_1Q_1 есть искомая: $PQ_1 - PP_1 = PQ = KL$.

Заметим, что через точку P можно провести еще одну хорду, удовлетворяющую условию задачи.

126. *Построить сектор AOB по его хорде (c) и перпендикуляру (h), опущенному из конца дуги на радиус, ограничивающий сектор.*

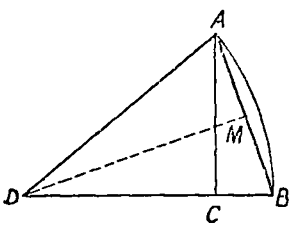


Рис. 191

Анализ. Допустим, что задача решена и сектор AOB—искомый (рис. 194). Если проведём хорду AB и опустим из точки A перпендикуляр на сторону OB, то получим прямоугольный $\triangle ABC$, который можем построить по катету (AC) и гипотенузе (AB). Между этим прямоугольным треугольником и сектором существует конструктивная связь: построив $\triangle ABC$, мы легко можем построить и сектор AOB.

Действительно, перпендикуляр, восставленный из середины M отрезка AB, пересечет продолжение стороны BC в некоторой точке O.

Описав около точки O радиусом, равным AO, дугу AB, стягиваемую хордой AB, получим искомый сектор AOB.

127. *Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть её, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длине MN.*

Анализ (рис. 194а). Из чертежа видно, что при любом положении секущей BC, проходящей через точку A пересечения окружностей, расстояние между основаниями O_1 и Q_1 перпендикуляров OO_1 и QQ_1, опущенных на эту секущую, равно полусумме хорд AB и AC. Так как нам известно, что длина отрезка BC должна быть равна MN, то можем узнать и длину отрезка O_1Q_1, а именно, $O_1Q_1 = \frac{MN}{2}$. Но $O_1Q_1 = QP$, где P есть основание перпендикуляра, опущенного из центра Q на линию OO_1. Таким образом, в прямоугольном треугольнике OPQ нам известны следующие элементы:

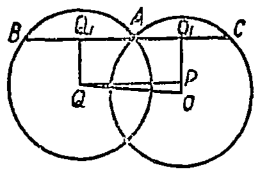


Рис. 194а.

1) катет QP, равный $\frac{MN}{2}$, и 2) гипотенуза OQ, равная отрезку линии центров данных пересекающихся окружностей.

Если построим этот треугольник и проведём через точку A прямую (BC), параллельную линии QP, то линия BC и будет искомой секущей.

Исследование. Решение задачи зависит от возможности построения прямоугольного треугольника, гипотенузою которого является прямолинейный отрезок OQ, соединяющий центры данных окружностей, а катетом — отрезок, равный половине данного отрезка MN.

Следовательно, если

$$\frac{MN}{2} < OQ,$$

то задача имеет решение.

В частном случае задача имеет решение и тогда, когда $\frac{MN}{2} = OQ$.

128. *Из точки A, данной вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя часть ее равнялась внутренней.*

Анализ. Допустим, что задача решена и секущая AC построена (рис. 195). $Б$ — точка пересечения её с окружностью. O — центр окружности. Заметим, что в $\triangle AOC$ известны две стороны и медиана, проведённая к третьей стороне.

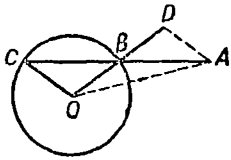


Рис. 195.

Непосредственно треугольник AOC по трём названным элементам построить нельзя. Но, продолжив медиану OB за точку B и отложив на этом продолжении отрезок, равный OB, получим треугольник OAD, который построить можно.

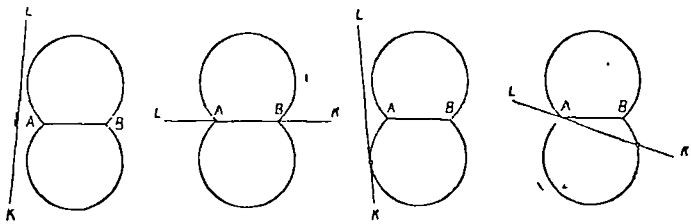
В самом деле, $\triangle CBO = \triangle BDA$ (по двум сторонам и углу между ними). Из этого следует, что $AD = OC$.

Итак, в $\triangle AOD$ нам известны три стороны: 1) AO, 2) $AD = OC = R$ и 3) $OD = 2R$.

Построение. 1) На отрезке AO строим $\triangle AOD$. 2) Через точку B пересечения стороны OD с данной окружностью проводим секущую AC. Отрезок AC — искомая секущая; её внешняя часть равна внутренней: $AB = BC$.

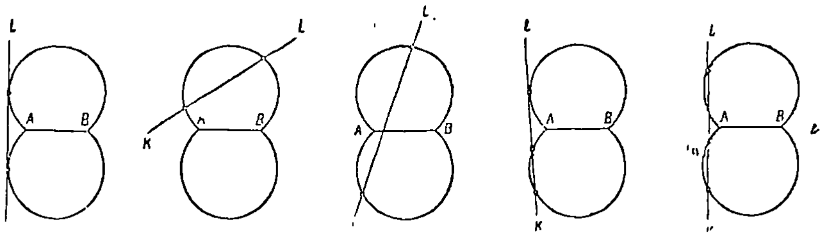
129. *На прямой KL найти точку, из которой данный отрезок AB был бы виден под данным углом α.*

Анализ (рис. 196 аи5).Построив наотрезке AB сегменты, вмещающие данный угол α, можно сказать, что только из точек дуг этих сегментов отрезок AB виден под данным углом α. А так как, по условию, искомая точка должна лежать на прямой KL, то приходим



0 реш. 0 реш. 1 реш. 1 реш.

Рис. 196а.



2 реш. 2 реш. 2 реш. 3 реш. 4 реш.

Рис. 196б.

к следующему выводу: если точка, определяемая условием задачи, существует, то она должна быть общей и для дуг построенных сегментов и для прямой KL. Очевидно, задача может иметь 0, 1, 2, 3 и 4 решения.

130. *Даны по величине и положению два отрезка KL и MN. Найти такую точку, из которой отрезок KL был бы виден под данным углом α и отрезок MN—под данным углом β.*

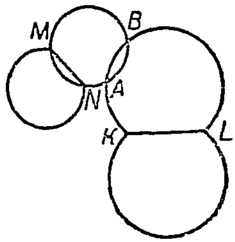
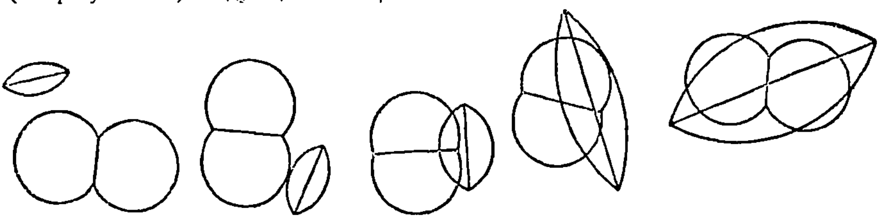


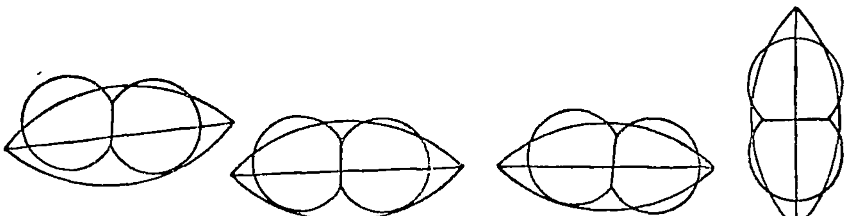
Рис. 197.

Построение (рис. 197). 1) На отрезке KL строим сегменты, вмещающие угол α. 2) На отрезке MN строим сегменты, вмещающие угол β. Точки, в которых пересекаются дуги построенных сегментов, являются искомыми.

Примечание. В зависимости от того, какова конфигурация сегментов, построенных на отрезках KL и MN, задача может иметь (см. рисунок 198) следующее число решений:



0 реш. 1 реш. 2 реш. 3 реш. 4 реш.



5 реш. 6 реш. 7 реш. 8 реш.

Рис. 198.

131. *Построить треугольник по (I) основанию (b), (II) углу (α) при вершине и (III) высоте (h).*

Анализ (рис. 199). Удовлетворить первому (I) требованию, т. е начертить отрезок AB, равный данному отрезку b, всегда возможно.

Второе требование (II) состоит в том, что угол при вершине должен равняться данному углу α. Следовательно, из этой вершины основание AB искомого треугольника видно под углом α. Построив на отрезке AB сегмент, вмещающий угол α, и соединив с точками A и B любую точку дуги AMB этого сегмента, мы получим треугольник, удовлетворяющий первым двум требованиям (I и II) условия задачи.

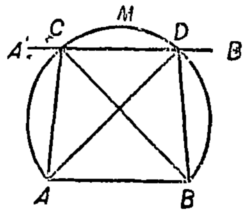


Рис. 199.

Обратимся теперь к третьему требованию (III) условия задачи. Так как высота искомого треугольника равна данному отрезку h, то его вершина находится где-то на прямой $A'B'$, которая параллельна основанию AB и отстоит от него на расстоянии h.

Соединив отрезками с точками A и B любую точку прямой $A'B'$, мы получим треугольник, удовлетворяющий I и III требованиям условия задачи. Обозначим буквами C и D те точки, в которых прямая $A'B'$ пересекает дугу AMB. Так как точка C лежит на дуге AMB, то $\triangle ABC$ удовлетворяет требованиям I и II. Поскольку точка C лежит на прямой $A'B'$, то $\triangle ABC$ удовлетворяет требованиям I и III. Отсюда приходим к выводу, что $\triangle ABC$ удовлетворяет всем трём требованиям, изложенным в условии задачи, т. е. является искомым. Повторяя приведённые рассуждения, придём к выводу, что $\triangle ABD$ также является искомым. Итак, мы получим два равных треугольника: ABC и ABD.

Исследование. Заметим, что, построив соответствующий сегмент на отрезке AB в другой полуплоскости, получим ещё два треугольника, равных первым. А так как все треугольники, полученные при решении этой задачи, равны между собою, то, значит, она имеет только одно решение.

Если бы прямая $A'B'$ не пересекала дугу AMB, а только коснулась бы её в некоторой точке P, то искомому треугольнику APB, расположенному по одну сторону отрезка AB, соответствовал бы ещё один равный $\triangle AP'B$, симметрично расположенный с ним относительно основания. В этом случае задача имела бы также одно решение.

В том случае, когда прямая $A'B'$ не пересекает дугу AMB и не касается её, задача не имеет решения, так как все требования условия задачи не могут быть выполнены.

132. *К дуге данного сектора провести такую касательную, чтобы часть её, заключённая между продолженными радиусами (ограничивающими сектор), равнялась данному отрезку (MN).*

Анализ. Допустим, что построение выполнено (рис. 199а). В таком случае мы будем иметь треугольник, в котором даны: 1) основание $CD = MN$, 2) угол при вершине, равный углу данного сектора, и 3) высота OE, равная радиусу данного сектора. Построение такого треугольника известно.

133. *Построить треугольник по основанию (a), углу (α) при вершине и медиане (m), проведённой к основанию.*

Построение (рис. 199б). 1) Строим отрезок AB, равный данному основанию (a). 2) На отрезке AB строим сегмент, вмещающий угол α. 3) Радиусом, равным m, из середины M основания AB, как из центра, проводим дугу до пересечения с дугой сегмента в точках C и D.

ABC и ADB — искомые равные треугольники, а потому задача имеет одно решение.

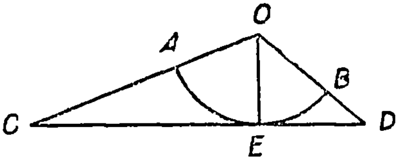


Рис. 199а.

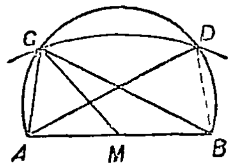


Рис. 199б.

Исследование. Если высоту сегмента, построенного на отрезке a и вмещающего угол α, обозначим буквою h, то результаты исследования можно представить в таком виде:

если $\frac{a}{2} < m < h$ или $m = h$, то задача имеет одно решение;

если $m > h$ или $m \leqslant \frac{a}{2}$, то задача не имеет решения.

134. *В треугольнике найти точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.*

Анализ (рис. 200). Так как требуется, чтобы угол AOB порознь равнялся углам BOC и AOC, а сумма этих углов равна 360°, т. е.

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360°,$$

то, значит, угол, под которым должна быть видна из точки O каждая сторона треугольника, равен 120°.

Построение. 1) На стороне AB строим сегмент, вмещающий угол, равный 120°. 2) На стороне BC также строим сегмент, вмещающий угол, равный 120°.

Точка O, в которой пересекаются дуги этих сегментов, является искомой.

135. *Построить треугольник, в котором даны: основание (a), прилежащий к нему угол (α) и угол (ω) между медианой, проведённой из вершины данного угла, и стороной, к которой она проведена (обращённой к основанию).*

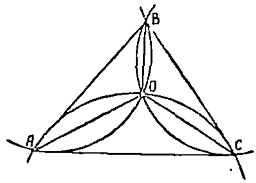


Рис. 200.

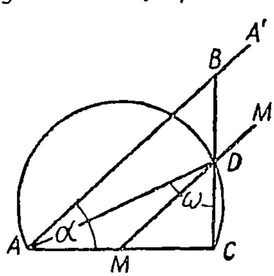


Рис. 201.

Построение (рис. 201). 1) Строим отрезок AC, равный данному основанию a. 2) На отрезке AC при точке A строим угол CAA', равный данному углу α. 3) На отрезке AC, как на хорде, строим сегмент, вмещающий угол ω. 4) Через середину M отрезка AC проводим прямую MM', параллельную AA'. Точку пересечения дуги сегмента с прямой MM' обозначим буквой D. 5) Через точки C и D проводим прямую. Обозначим буквой B ту точку, в которой эта прямая пересечёт линию AA'. $\triangle ABC$—искомый.

136. *Построить параллелограм по двум его диагоналям (d_1; d_2) и одному углу (α).*

Указание (рис. 202). Вспомогательной фигурой является $\triangle ABD$, который можно построить по основанию BD, равному d_1, медиане AO, равной $\frac{d_2}{2}$, и углу DAB при вершине, равному α. Затем на продолжении отрезка AO от точки O отложим отрезок OC, равный AO. Соединив отрезками прямой точку C с B и D, получим искомый параллелограм $ABCD$.

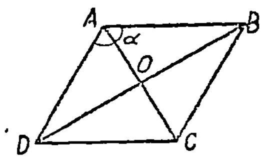


Рис. 202.

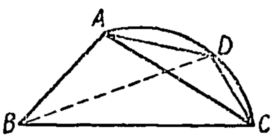


Рис. 203.

137. *Построить четырёхугольник $ABCD$ по двум диагоналям ($AC = d_1$ и $BD = d_2$), двум смежным сторонам ($AB = b$, $BC = c$) и углу (α), образованному остальными двумя сторонами.*

Построение (рис. 203). 1) Строим $\triangle ABC$ по трём сторонам b_1, c_1, d_1 ($AB = b$, $BC = c$ и $AC = d_1$). 2) На отрезке AC строим сегмент, вмещающий данный угол α. 3) Из точки B, как из центра, вадиусом, равным d_2, проводим дугу до пересечения с дугой сегмента в точке D. Соединяем отрезками точку D с точками A и C.

$ABCD$—искомый четырёхугольник.

138. *Даны три точки A, B и C. Провести через A такую прямую, чтобы расстояние между перпендикулярами, опущенными на эту прямую из точек B и C, равнялось данному отрезку m.*

Построение (рис. 204). 1) Строим прямоугольный треугольник BCD по гипотенузе, равной отрезку BC, и катету BD, равному отрезку m. 2) Из точки A проводим прямую AE, перпендикулярную прямой CD.

Прямая AE — искомая, т. е. $B_1C_1 = BD = m$.

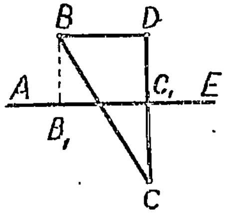


Рис. 204.

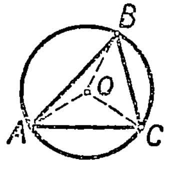


Рис. 205.

139. *В данный круг вписать треугольник, два угла которого (α и β) даны.*

Анализ (рис. 205). Обозначим буквой O центр данного круга и соединим его с вершинами треугольника ABC. Очевидно, получим:

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha,$$
$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta.$$

Построение. 1) Произвольную точку (A) данной окружности соединяем с центром O. 2) На отрезке AO при точке O строим угол AOC, равный 2β, вторая сторона которого пересечёт окружность в некоторой точке C. 3) На отрезке OC при точке O строим угол COB, равный 2α, вторая сторона которого пересечёт окружность в некоторой точке B. Соединяем точки A, B и C отрезками прямой.

Треугольник ABC — искомый.

140. *Около данного круга описать треугольник, два угла которого (α и β) даны.*

Построение (рис. 206). 1) Проводим произвольный радиус KO.

2) На отрезке KO при точке O строим угол, равный $180° - \alpha$, другая сторона которого пересечёт окружность в некоторой точке L. 3) На отрезке OL при точке O строим угол LOM, равный $180° - \beta$ (точка M лежит на окружности). 4) Через точки K, L, M проводим перпендикулярные прямые к отрезкам KO, LO и MO, которые попарно пересекутся в трёх точках, обозначенных буквами A, B, C.

Треугольник ABC — искомый.

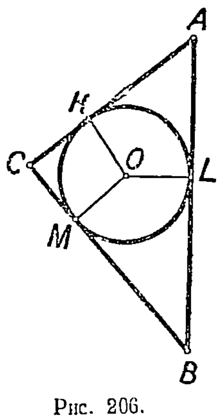


Рис. 206.

141. *Построить треугольник по радиусу (R) описанного круга, углу (α) при вершине и высоте (h).*

Построение (рис. 207). Первый способ. 1) Строим окружность данного радиуса R. 2) Произвольную точку A этой окружности соединяем отрезком с центром O. 3) На отрезке AO при точке O строим угол AOC, равный 2α. Хорда AC есть основание искомого треугольника. 4) Проводим прямую KL, которая параллельна основанию AC и отстоит от него на данном расстоянии h. Эта прямая пересечёт окружность в точках B и D.

Треугольники ABC и ADC—искомые ($\triangle ABC = \triangle ADC$).

Другой способ (рис. 207а). 1) Строим окружность радиуса R. 2) Из произвольной точки M этой окружности проводим какую-нибудь

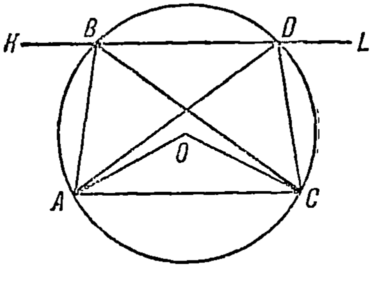


Рис. 207.

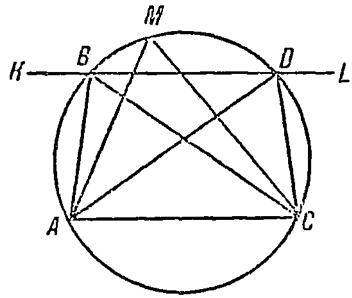


Рис. 207а.

хорду MA. 3) На хорде MA при точке M строим угол AMC, который равен данному углу α, причём его другой стороной является некоторая хорда MC. 4) Соединив отрезком точки A и C, получим основание искомого треугольника. 5) С той стороны хорды AC, где находится точка M, проводим прямую KL, которая параллельна хорде AC и отстоит от неё на расстоянии, равном отрезку h. 6) Прямая KL пересечёт дугу сегмента в некоторых точках B и D.

Треугольники ABC и ACD—искомые.

Так как эти треугольники равны, то задача имеет одно решение.

Исследование. Обозначая буквою H высоту сегмента, который имеет основанием отрезок AC и вмещает угол α, результаты исследования можем представить в таком виде:

	Значение	Число решений
I	$h \leqslant H$	1
II	$h > H$	0

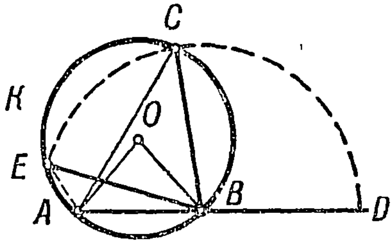


Рис. 208.

142. *Вписать в данный круг* (r) *треугольник, в котором известны: сумма* (s) *двух сторон и угол* (α), *противолежащий одной из этих сторон.*

Построение (рис. 208). 1) Проводим окружность радиуса r. 2) Строим центральный угол AOB, равный 2α. Следовательно, сторона искомого треугольника, лежащая против угла α, равна хорде AB. 3) На продолжении хорды AB за точку B откладываем отрезок AD, равный сумме (s) двух сторон искомого треугольника. 4) Из точки B, как из центра, радиусом, равным BD, проводим дугу до пересечения с окружностью в точках C и E.

Треугольники ABC и ABE—искомые.

Исследование.

AB	$S-AB$	Число решений
$AB<2r$	$AB \geqslant s-AB$	1
	$AB<s-AB<2r$	2
	$s-AB=2r$	1
	$s-AB>2r$	0
	$s \leqslant AB$	0
$AB=2r$	$s-AB \geqslant 2r$	0
	$0<s-AB<2r$	1
	$s-AB=0$	0

143. *Вписать в данный круг четырёхугольник, у которого даны сторона (a) и два угла (γ и δ), не прилежащие к этой стороне.*

Построение (рис. 209). 1) Строим в данном круге хорду AB, равную a. 2) На отрезке AB при точке A строим вписанный угол BAD, равный $180°-\gamma$. 2) На отрезке AB при точке B строим вписанный угол ABC, равный $180°-\delta$.

$ABCD$ — искомый четырёхугольник.

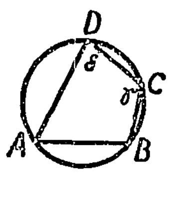


Рис. 209.

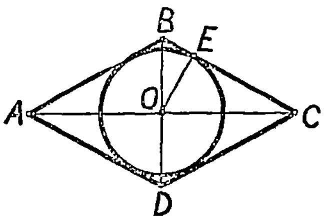


Рис. 210.

144. *В данный ромб вписать круг.*

Построение (рис. 210). 1) Проводим диагонали ромба AC и BD и точку их пересечения обозначаем буквой O. 2) Из точки O опускаем перпендикуляр OE на какую-нибудь сторону ромба. 3) Около точки O, как центра, радиусом, равным OE, описываем искомую окружность.

145. *В равносторонний треугольник вписать три круга, которые попарно касаются друг друга и из которых каждый касается двух сторон треугольника.*

Указание (рис. 211). Если из центра (O) данного равностороннего треугольника опустим перпендикуляры (OA_1, OB_1 и OC_1) на его стороны, то этот треугольник разобьётся на три четырёхугольника, в каждом из которых сумма противоположных углов равна двум прямым. Биссектрисы углов C_1AB_1 и AB_1O, прилегающие к стороне AB_1 четырёхугольника OC_1AB_1, пересекутся в центре (Q) вписанного круга. Радиус этого круга равен длине перпендикуляра (QQ_1), опущенного из центра (Q) на любую из сторон четырёхугольника.

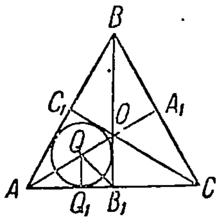


Рис. 211.

146. *Построить четырёхугольник, который можно было бы вписать в окружность, по трём его сторонам (a, b, c) и одной диагонали (d).*

Анализ. I. Допустим, что чертёж 211а представляет собою решение рассматриваемой задачи, т. е. $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $AC=d$. Три стороны треугольника ABC нам известны, а потому можем его построить. Так как, по условию, искомый четырёхугольник должен быть вписанным, то около треугольника ABC опишем окружность, на которой будут лежать три вершины (A, B, C) этого четырёхугольника.

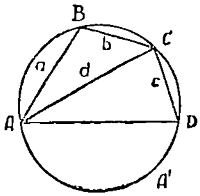


Рис. 211а.

Чтобы построить четвёртую вершину (D) искомого четырёхугольника, из точки C, как центра, радиусом, равным данной стороне c, опишем дугу S_C, которая пересечёт дугу $AA'C$ в некоторой точке D. Соединив отрезками точку D с точками A и C, получим четырёхугольник, удовлетворяющий условию задачи.

Построение (рис. 211а). 1) Строим $\triangle ABC$ по трём сторонам: $AB=a$, $BC=b$, $AC=d$. 2) Около треугольника ABC описываем окружность. 3) Из точки C, как центра, радиусом, равным третьей стороне четырёхугольника (c), проводим дугу до пересечения с дугой $AA'C$ в точке D. 4) Точку D соединяем отрезками с точками A и C.

$ABCD$—искомый четырёхугольник.

Исследование. I. Как было показано в рассматриваемой задаче, построение искомого четырёхугольника начинается с построения вспомогательного треугольника (ABC), одною из сторон которого служит данный отрезок d, а двумя другими сторонами являются два из данных отрезков a, b, c.

Значит, сторонами вспомогательного треугольника могут быть следующие отрезки:

либо a, b, (1)

,, b, c, (2)

,, a, c. (3)

Из сказанного вытекает, что при некоторых значениях a, b, c, d можно построить три различных вспомогательных треугольника.

Если отрезки a, b, c, d таковы, что невозможно построить ни одного из трёх вспомогательных треугольников (1), (2) и (3), то рассматриваемая задача не имеет решения.

II. Допустим оказалось возможным построить вспомогательный треугольник ABC, сторонами которого являются отрезки a, b, d. Хорда AC, т. е. диагональ d искомого четырёхугольника, разбивает построенный круг на два сегмента, в один из которых вписан вспомогательный треугольник ABC.

Так как точки B и D должны быть противолежащими вершинами искомого четырёхугольника, то отрезок AC, который, по построению, является диагональю этого четырехугольника, должен проходить между точками B и D, и, значит, точка D не может находиться на дуге ABC.

Приняв во внимание, что, по условию, точка D должна лежать на окружности, описанной около треугольника ABC, но не на дуге ABC, и не может совпадать ни с точкою A, ни с точкою C, приходим к выводу, что точка D находится где-то на дуге $AA'C$. Учтём теперь, что при данном расположении сторон a и b и диагонали d один из концов третьей данной стороны может совпадать как с точкой A, так и с точкой C.

Из сказанного вытекает, что 4-й вершиной искомого (вписанного) четырёхугольника будут лишь те точки, в которых дуги S_A и S_C, проведённые из точек A и C, как из центров, пересекают дугу $AA'C$. Число точек пересечения дуг S_A и S_C с дугой $AA'C$ зависит от длины стороны c и от того, будет ли дуга $AA'C$ больше или меньше полуокружности.

Ниже приводим табличку, в которой рассмотрены те случаи, какие возможны при определении точек пересечения дуг S_A и S_C с дугою $AA'C$, и указано, сколько решений имеет задача.

	Отрезок c	Конфигурация дуг $AA'C$, S_A и S_C	Точки пересечения (или касания)	Число решений	Какие четырехугольники являются решением	Пояснительный чертеж
$\smile AA'C \leqslant 180^\circ$						
I	$c \geqslant d$	S_A и S_C не пересекают дугу $AA'C$.	—	0	—	212а
II	$c < d$	Каждая из дуг S_A и S_C пересекает дуги $AA'C$ в одной точке.	E D	2	$ABCE$ $ABCD$	212б
III	c равно хорде, стягив. дугу $\frac{AA'C}{2}$	S_A и S_C пересекают дугу в одной и той же точке.	F	1	$ABCF$	212в

	Отрезок c	Конфигурация дуг $AA'C$, S_A и S_C	Точки пересечения (или касания)	Число решений	Какие четырёхугольники являются решением	Пояснительный чертёж
$\smile AA'C > 180°$						
IV	$c > 2R$	S_A и S_C не пересекают дугу $AA'C$ и не касаются её.	—	0	—	212г
V	$c = 2R$	S_A и S_C касаются дуги $AA'C$.	H G	2	$ABCH$ $ABCG$	212д
VI	$d < c < 2R$	Каждая из дуг S_A и S_C пересекает дугу $AA'C$ в двух точках.	K L M N	4	$ABCK$ $ABCL$ $ABCM$ $ABCN$	212е
VII	c равно хорде, стягивающей дугу $\frac{AA'C}{2}$	S_A и S_C имеют с дугой $AA'C$ три точки пересечения.	P Q S	3	$ABCP$ $ABCQ$ $ABCS$	212ж
VIII	$c = d = R\sqrt{3}$	S_A и S_C пересекают дугу $AA'C$ в одной и той же точке.	T	1	$ABCT$	212з
IX	$c < d$	Каждая из дуг S_A и S_C пересекает дугу $AA'C$ в одной точке.	U V	2	$ABCU$ $ABCV$	212и

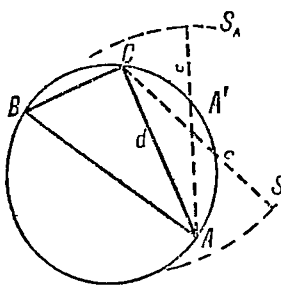


Рис. 212а.

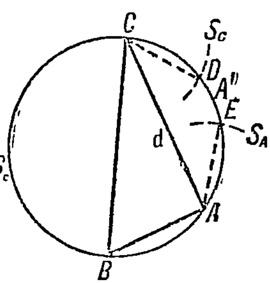


Рис. 212б.

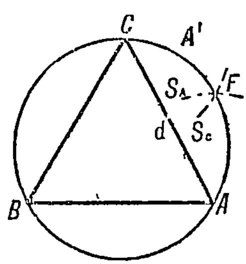


Рис. 212в.

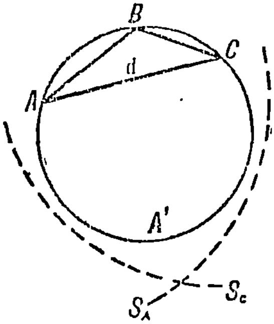


Рис. 212г.

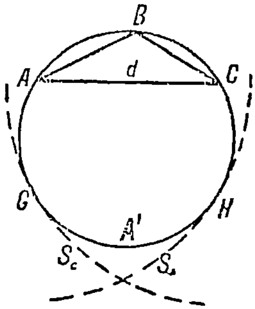


Рис. 212д.

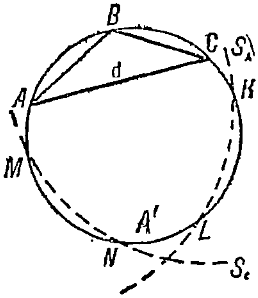


Рис. 212е.

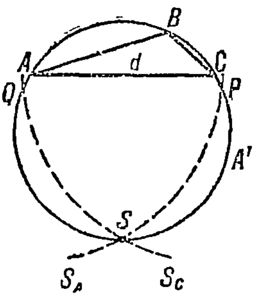


Рис. 212ж.

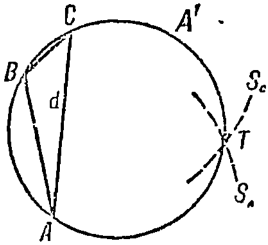


Рис. 212з.

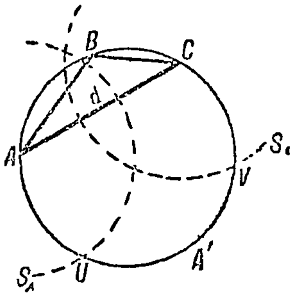


Рис. 212и.

Из рассмотрения таблички и чертежей видим, что, построив один из вспомогательных треугольников (1), можем получить следующее число решений: 0, 1, 2, 3, 4.

III. Далее, если отрезки (2) таковы, что из них также можно построить вспомогательный треугольник, то выполняем это построение и операциями, совершенно аналогичными тем, какие изложены в пункте II исследования, выясняем, сколько в этом случае (2) имеет решений рассматриваемая задача.

IV. Наконец, если возможно, строим вспомогательный треугольник, сторонами которого являются отрезки (3), и определяем получаемое число решений.

V. Если, выполняя операции II, III и IV, получим соответственно m_1, m_2 и m_3 решений, то сумма $m_1+m_2+m_3$ покажет, сколько решений имеет рассматриваемая задача при данных значениях отрезков a, b, c, d.

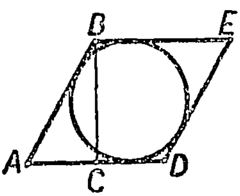


Рис. 213.

147. *Построить ромб по данной стороне* (a) *и радиусу* (r) *вписанного круга.*

Построение (рис. 213). 1) Строим прямоугольный $\triangle ABC$ по гипотенузе AB, равной стороне a ромба, и по катету BC, равному диаметру ($2r$) вписанного круга. 2) На продолжении отрезка AC от точки A откладываем отрезок AD, равный стороне AB. 3) Из точек B и D, как из центров, радиусами, равными a, проводим дуги, которые пересекутся в точке E, являющейся четвёртой вершиной искомого ромба. $ABED$—искомый ромб.

148. *Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный треугольник.*

Построение (рис. 214). 1) Через центр (O) и произвольную точку A данной окружности проводим прямую AA_1. 2) Через точку A проводим касательную TT' к этой окружности. 3) На прямой TT' от точки A откладываем отрезок AK, равный радиусу OA, и соединяем отрезком точки O и K. В точке O восставляем перпендикуляр к отрезку OK, который пересекает окружность в точке E. 4) Через точку E проводим к данной окружности прямую LD, которая параллельна OK. Линия LD пересечёт AA' и TT' в точках C и D. 5) Из точки C, как из центра, радиусом, равным CD, проводим дугу до пересечения с прямой TT' в точке B.

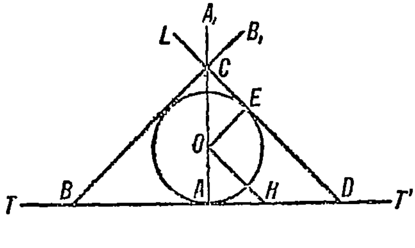


Рис. 214.

Треугольник BCD—искомый.

149. *Построить треугольник ABC по следующим данным:* 1) $\angle B$, h_a, m_b, 2) m_a, m_b, h_b, 3) a, m_b, $\angle B$, 4) a, b, R, 5) a, h_a, R, 6) R, $\angle A$, h_a, 7) a, $\angle A$, r.

150. *Построить равнобедренный треугольник по основанию (a) и радиусу (r) вписанного круга.*

Построение (рис. 215). 1) Строим окружность данного радиуса и проводим в ней какой-нибудь её радиус (AO). 2) В точке A восставим перпендикуляр к отрезку AO и отложим на нём по обе стороны от точки A отрезки AB и AC, каждый из которых равен половине данного основания (a). 3) Из точки B проводим касательную к кругу и продолжаем её до пересечения в некоторой точке D с продолжением радиуса AO. Соединяем отрезком прямой точки C и D. $\triangle BCD$—искомый.

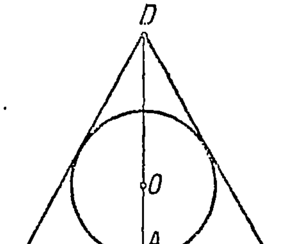


Рис. 215.

151. *Построить треугольник по основанию (a) и двум медианам (m_1 и m_2), исходящим из концов основания.*

Анализ (рис. 216). Допустим, что задача решена. Если AB—основание, а AA_1 и BB_1—две медианы (m_1 и m_2) и точка

S—их пересечение, то вспомогательную фигуру ($\triangle ASB$) мы можем построить по трём сторонам: $AB = a$, $AS = \frac{2}{3}m_1$ и $BS = \frac{2}{3}m_2$.

Построение. 1) Строим $\triangle ASB$ по трём сторонам: a, $\frac{2}{3}m_1$ и $\frac{2}{3}m_2$. 2) На прямой AS от точки A в направлении S откладываем отрезок AA_1, равный медиане m_1. 3) На прямой BS от точки B в направлении S откладываем отрезок BB_1, равный медиане m_2. 4) Соединяем отрезками точку B с A_1, а точку A с B_1 и продолжаем эти отрезки до пересечения в некоторой точке C. $\triangle ABC$—искомый.

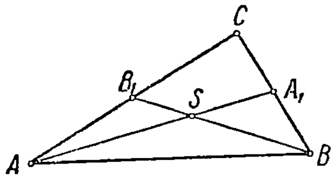


Рис. 216.

Исследование. Задача имеет решение лишь в том случае, если возможно построить треугольник, сторонами которого являются следующие отрезки:

$$a,\ \frac{2}{3}m_1 \text{ и } \frac{2}{3}m_2.$$

152. *Построить треугольник по трём медианам m_a, m_b, m_c.*

Анализ (рис. 217). Допустим, что задача решена. Если AA_1, BB_1 и CC_1—данные медианы, а S—точка их пересечения, то в треугольнике ASC нам известны две стороны ($AS = \frac{2}{3}m_a$, $CS = \frac{2}{3}m_c$) и медиана $SB_1 = \frac{m_b}{3}$. Если на продолжении отрезка SB_1 от точки B_1 отложим отрезок B_1D, равный SB_1, и соединим отрезком точки D и C, то получим треугольник DSC, три стороны которого нам известны: $DC = \frac{2}{3}m_a$, $SD = \frac{2}{3}m_b$ и $CS = \frac{2}{3}m_c$. Построив $\triangle DSC$, легко построить и искомый треугольник.

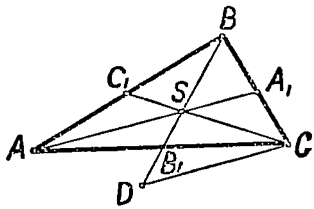


Рис. 217.

Исследование. Задача имеет решение лишь в том случае, если можно построить треугольник, сторонами которого являются следующие отрезки: m_a, m_b, m_c.

153. *Построить треугольник ABC по основанию*

$$BC = a, \tag{1}$$

сумме боковых сторон

$$AC + AB = s \tag{2}$$

и разности углов, прилежащих к основанию:

$$\angle B - \angle C = \alpha. \tag{3}$$

Анализ. Допустим, что $\triangle ABC$, изображённый на чертеже 217а, является искомым.

Введём в рассмотрение отрезок s. С этой целью продолжим сторону CA за точку A и отложим на этой линии отрезок AD, равный AB; тогда получим, что

$$CD = AC + AD = AC + AB,$$

т. е.

$$CD = s.$$

Соединив отрезком точку D с точкой B, получим равнобедренный треугольник ABD и треугольник CBD, в котором нам известны две стороны: $CB = a$, $CD = s$.

Треугольник CBD конструктивно связан с искомым треугольником ABC и, чтобы построить его, надо определить либо угол C, либо угол CBD.

Выясним, чему равен угол CBD.

Приняв во внимание, что

$$\angle ABD = \angle ADB \qquad (4)$$

и

$$\angle A = \angle ABD + \angle ADB, \qquad (5)$$

из (4) и (5) найдём, что:

$$\angle A = 2\angle ABD,$$

откуда

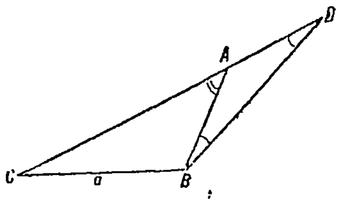


Рис. 217а.

$$\angle ABD = \frac{\angle A}{2}.$$

Последовательно находим:

$$\angle CBD = \angle B + \angle ABD = \angle B + \frac{\angle A}{2} = \angle B + \frac{[180^\circ - (\angle B + \angle C)]}{2} =$$

$$= \angle B + 90^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 90^\circ + \frac{\angle B - \angle C}{2},$$

т. е. $\angle CBD = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

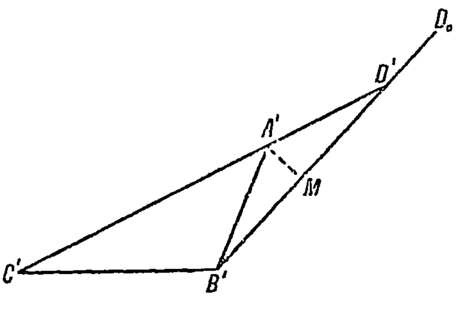


Рис. 217б.

Итак, оказывается в треугольнике BCD нам известны две стороны ($BC = a$, $CD = s$) и угол против большей $\left(\angle CBD = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$ из них. Построение такого треугольника известно.

Построение (рис. 217б). 1) Строим отрезок $B'C'$, равный отрезку a. 2) На отрезке $B'C'$ при точке B' строим угол $D_0B'C'$, равный $90°+\frac{\alpha}{2}$. 3) Из точки C', как центра, радиусом, равным отрезку s, проводим дугу, которая пересечёт луч $B'D_0$ в некоторой точке D'. 4) Соединяем отрезком точки C' и D'. 5) Через середину M отрезка $B'D'$ проводим перпендикулярную к нему прямую, которая пересечёт отрезок $C'D'$ в некоторой точке A'. 6) Соединяем отрезком точки A' и B'.

$\triangle A'B'C'$ — искомый.

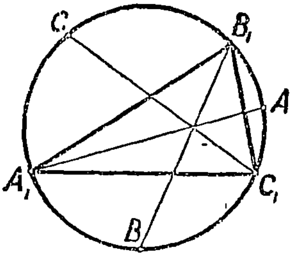


Рис. 218.

154. *Дана окружность и на ней точки A, B и C. Вписать в эту окружность такой треугольник, чтобы его биссектрисы при продолжении встречали окружность в точках A, B и C.*

Анализ (рис. 218). Допустим, что мы вписали в данную окружность требуемый $\triangle A_1B_1C_1$.

Так как AA_1 является биссектрисой $\angle B_1A_1C_1$, то $\angle B_1A_1A=\angle AA_1C_1$, и, значит, $\smile AB_1=\smile AC_1$. Обозначим длину этой дуги буквой x:

$$\smile AB_1=\smile AC_1=x.$$

Аналогичными рассуждениями придём к выводу, что

$$\smile BC_1=\smile BA_1=y$$

и

$$\smile CA_1=\smile CB_1=z.$$

Из чертежа легко усмотреть, что

$$\smile AB=\smile AC_1+\smile BC_1,$$
$$\smile BC=\smile BA_1+\smile CA_1,$$
$$\smile CA=\smile AB_1+\smile CB_1,$$

т. е.

$$\smile AB=x+y,$$
$$\smile BC=y+z,$$
$$\smile CA=z+x.$$

Сложив почленно эти равенства, найдём, что

$$x+y+z=\frac{1}{2}\,(\smile AB+\smile BC+\smile CA)=180°.$$

Из последних четырёх равенств легко найти дуги x, y и z.

Построение. 1) Строим окружность, равную данной, и проведём в ней диаметр MN. 2) Отложив от точки M дугу MC_2, равную данной дуге AB, найдём, что $z=\smile C_2N$. 3) Отложив от точки M дугу MA_2, равную $\smile BC$, получим, что $x=\smile A_2N$. 4) Отложив от точки A на данной окружности в одну и другую сторону дугу x, получим точки B_1 и C_1 — две вершины искомого треугольника. 5) Отложив от точки C на данной окружности дугу z, получим третью вершину (A_1) искомого треугольника $A_1B_1C_1$.

155. *Дана окружность и на ней точки A, B, C. Вписать в эту окружность такой треугольник, чтобы его высоты при продолжении встречали окружность в точках A, B и C.*

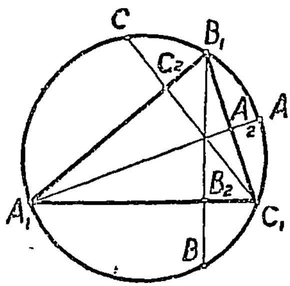


Рис. 219.

Анализ (рис. 219). Допустим, что построение выполнено и $\triangle A_1B_1C_1$ — искомый.

Обозначим буквами A_2, B_2, C_2 основания высот треугольника $A_1B_1C_1$, опущенных из вершин A_1, B_1 и C_1. Прежде всего заметим, что $\triangle A_1B_1A_2 \sim \triangle C_1C_2B_1$, так как они оба прямоугольные и имеют общий угол $A_1B_1C_1$. Отсюда следует, что $\angle B_1A_1A = \angle CC_1B_1$. Эти углы опираются на дуги CB_1 и AB_1, значит, $\smile CB_1 = \smile AB_1$. Аналогичными рассуждениями убедимся в том, что $\smile AC_1 = \smile BC_1$ и $\smile BA_1 = \smile CA_1$, т. е. вершины искомого треугольника делят пополам дуги окружности, заключённые между точками A, B и C.

Выполнив это деление и соединив середины дуг AC, AB и BC отрезками, получим искомый вписанный $\triangle A_1B_1C_1$.

156. *Дана окружность и на ней три точки: H, B и M, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.*

Анализ (рис. 220). Допустим, задача решена: $\triangle KLN$ — искомый. Точка B должна делить пополам ту дугу (KN), на которую опирается $\angle KLN$. Хорда (KN) — есть сторона треугольника, противолежащая этому углу. На основании свойства диаметра, проведённого через середину дуги, сторона треугольника, противолежащая рассматриваемому углу, должна быть перпендикулярна к диаметру BB_1 данной окружности и делиться им пополам. Но диаметр BB_1, перпендикулярный (неизвестной) стороне KN, параллелен высоте, опущенной из точки L на сторону KN. Следовательно, вершину угла получим, если проведём через точку H прямую HH', параллельную диаметру BB_1, которая пересечёт окружность в некоторой точке L. Соединив отрезком точку M и найденную вершину L искомого треугольника, получим линию медианы LM, которая пересечёт диаметр BB_1 в некоторой точке P. Если через точку P проведём в данном круге хорду KN, перпендикулярную диаметру BB_1, то получим искомый $\triangle KLN$.

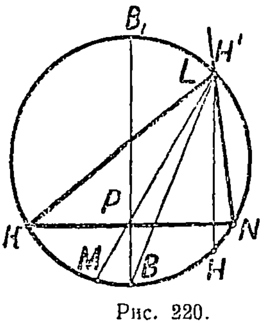


Рис. 220.

Построение. 1) Проводим прямую BB_1, проходящую через точку B и центр данного круга. 2) Из точки H проводим прямую HH', параллельную линии BB_1. Прямая HH' пересечёт окружность в некоторой точке L. 3) Соединяем точки L и M. Отрезок LM пересечёт прямую BB_1 в некоторой точке P. 4) В точке P восставим перпендикуляр к прямой BB_1. Он пересечёт окружность в некоторых точках K и N. Соединив отрезком точку L с точками K и N, получим искомый треугольник.

157. *На окружности даны две точки: A и B. Через эти точки провести две параллельные хорды, сумма (s) которых дана.*

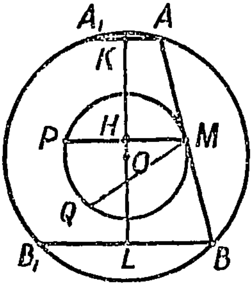


Рис. 221.

Построение (рис. 221). 1) Проводим хорду AB и находим её середину M. 2) Радиусом, равным OM, проводим вспомогательную окружность около точки O, как центра. 3) Из точки M, как центра, радиусом, равным $\frac{s}{2}$, описываем дугу до пересечения со вспомогательной окружностью в точках P и Q. 4) Соединяем точки M и P отрезком прямой. 5) Хорды, которые проведём через точки A и B параллельно MP или MQ, — искомые.

Доказательство. Так как $AA_1 \parallel BB_1$ и $MP \parallel BB_1$, то прямая KL, которая проходит через точку O и перпендикулярна к хорде MP меньшей окружности, будет перпендикулярна и к параллельным MP хордам AA_1 и BB_1 данной окружности и разделит эти хорды пополам:

$$AK = KA_1 \text{ и } BL = LB_1.$$

Если перегнём чертёж по прямой KL, то точки A, M, B совпадут соответственно с точками A_1, P, B_1.

Соединив точку A_1 с B_1, получим равнобедренную трапецию AA_1B_1B, для которой отрезок MP является средней линией, и, значит,

$$AA_1 + BB_1 = 2 \cdot MP = s.$$

Исследование. Обозначая буквою k расстояние от центра O данной окружности до хорды AB, мы можем результаты исследования представить в таком виде:

если $s > 4k$, задача невозможна;

если $s = 4k$, задача имеет одно решение, причём, четырёхугольник AA_1B_1B в этом случае будет прямоугольником;

если $s < 4k$, задача имеет два одинаковых решения.

158. *Данным радиусом (r) описать окружность, которая касалась бы данной прямой и данного круга (O, R).*

Анализ (рис. 221а). Так как искомая окружность радиуса r должна касаться прямой KL, то её центр находится в какой-либо точке двух прямых K_2L_2 и K_1L_1, параллельных прямой KL и отстоящих от неё на расстоянии r.

Искомая окружность радиуса r должна касаться данной окружности радиуса R. Следовательно, её центр должен находиться на концентрических вспомогательных окружностях, центры которых совпадают с точкой O, а радиусы равны $R+r$ и $R-r$.

Точки, в которых вспомогательные окружности пересекают прямые K_1L_1 и K_2L_2, являются центрами искомых окружностей.

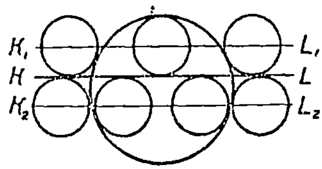


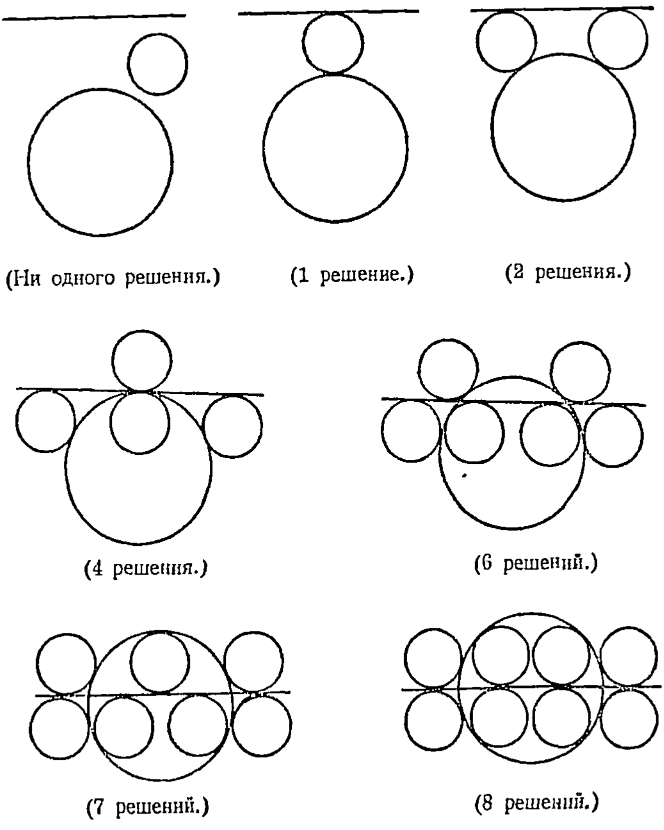
Рис. 221а.

Исследование. Если обозначим расстояние от центра данной окружности до данной прямой через d, то результат исследования можно представить в виде следующей таблички:

Характерные случаи		Значения d	Число решений	Число касаний: внешних	Число касаний: внутренних
I	$R > 2r$	1. $d > R+2r$	0	0	0
		2. $d = R+2r$	1	1	0
		3. $R < d < R+2r$	2	2	0
		4. $d = R$	4	3	1
		5. $R-2r < d < R$	6	4	2
		6. $d = R-2r$	7	4	3
		7. $0 \leqslant d < R-2r$	8	4	4
II	$R = 2r$	1. $d > 3r$	0	0	0
		2. $d = 3r$	1	1	0
		3. $2r < d < 3r$	2	2	0
		4. $d = 2r$	4	3	1
		5. $0 \leqslant d < 2r$	6	4	2
III	$R = r$	1. $d > 3r$	0	0	0
		2. $d = 3r$	1	1	0
		3. $r < d < 3r$	2	2	0
		4. $d = r$	3	3	0
		5. $0 < d < r$	4	4	0

Характерные случаи		Значения d	Число решений	Число касаний: внешних	Число касаний: внутренних
IV	$R<r$	1. $d>R+2r$	0	0	0
		2. $d=R+2r$	1	1	0
		3. $2r-R<d<R+2r$	2	2	0
		4. $d=2r-R$	3	2	1
		5. $R<d<2r-R$	4	2	2
		6. $d=R$	4	3	1
		7. $0\leqslant d<R$	4	4	0

Приведём пояснительные чертежи к тому случаю, когда $R>2r$:



(Ни одного решения.) (1 решение.) (2 решения.)

(4 решения.) (6 решений.)

(7 решений.) (8 решений.)

Рис. 222.

159. *Дан острый угол KOL и внутри него точка A. Построить такой треугольник наименьшего периметра, чтобы одна его вершина совпадала с данной точкой A, а две другие (B и C) лежали на сторонах угла KOL.*

Анализ (рис. 223). Возьмём на сторонах угла KOL какие-нибудь совершенно произвольные две точки K_1 и L_1 и рассмотрим периметр $\triangle AK_1L_1$.

Если построим точку A_1, симметричную A относительно OK, и точку A_2, симметричную A относительно OL, то, соединив точку A_1 с K_1 и A_2 с L_1, мы получим ломаную линию $A_1K_1L_1A_2$, состоящую из трёх отрезков, концы которой находятся в точках A_1 и A_2 и которая равна периметру $\triangle AK_1L_1$. Действительно, длина ломаной линии равна:

$$A_1K_1 + K_1L_1 + L_1A_2. \qquad (1)$$

Но $A_1K_1 = AK_1$ и $L_1A_2 = AL_1$, а потому выражению (1) можно придать такой вид:

$$AK_1 + K_1L_1 + AL_1. \qquad (2)$$

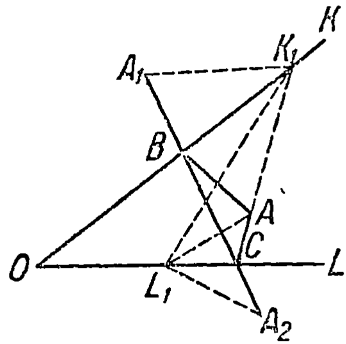


Рис. 223.

Сумма (2) и представляет собой периметр $\triangle AK_1L_1$.

Легко убедиться в том, что какие бы мы точки ни взяли на сторонах OK и OL, всё равно они вместе с точкой A образуют такой треугольник, периметр которого равен длине соответствующей ломаной линии, состоящей из трёх отрезков, концами которой являются те же точки A_1 и A_2.

А так как кратчайшее расстояние между двумя точками A_1 и A_2 есть прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки, то, значит, искомые точки B и C находятся на прямой A_1A_2. Отсюда ясно, как можно выполнить требуемое построение.

Построение. 1) Строим точку A_1, симметричную A относительно OK. 2) Строим точку A_2, симметричную A относительно OL. 3) Через точки A_1 и A_2 проводим прямую; она пересечёт стороны OK и OL в точках B и C, которые являются вершинами искомого $\triangle ABC$, имеющего наименьший периметр, равный отрезку A_1A_2.

160. *Дан ящик, который имеет форму прямого параллелепипеда с зеркальной поверхностью внутренней стороны боковых стенок, и в нём две точки A и B, одинаково удалённые от его дна. Какое направление надо дать лучу света, выходящему из точки A, чтобы он, отразившись от каждой из четырех зеркальных стенок ящика, прошёл через точку B?*

Анализ. Сделаем чертёж (рис. 224) в предположении, что задача решена, т. е., что луч, выходящий из точки A параллельно дну ящика, отразился последовательно от каждой из стенок ящика в точках C, D, E и F и прошёл через точку B.

Так как угол, под которым луч падает на плоское зеркало, равен углу, под которым он затем отражается, то, значит:

$$\angle KCA = \angle NCD. \quad (1)$$

$$\angle NDC = \angle MDE. \quad (2)$$

Падая на плоское зекало LM, луч отразится в точке E под тем же углом, под каким упадёт на это зеркало, значит:

$$\angle MED = \angle LEF. \quad (3)$$

Применяя эти рассуждения к лучу EF, падающему на зеркало KL, получим, что

$$\angle LFE = \angle BFK. \quad (4)$$

Если мы построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой KN, то получим равнобедренный $\triangle CAA_1$ и убедимся, что прямая KN является биссектрисой угла ACA_1, т. е.

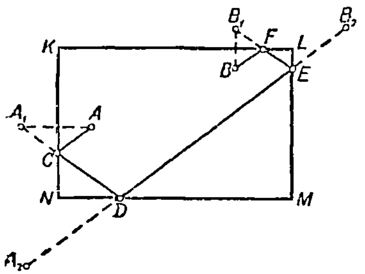


Рис. 224.

$$\angle KCA_1 = \angle KCA. \quad (5)$$

Из (1) и (5) следует, что $\angle KCA_1 = \angle NCD$. Принимая во внимание, что эти углы имеют общую вершину, а их стороны KC и CN образуют одну прямую KN и плоскости этих углов расположены по разные стороны этой прямой (KN), легко доказать, что отрезки A_1C и CD лежат на одной прямой, т. е. точка A_1 лежит на продолжении отрезка DC.

Построив точку A_2, симметричную точке A_1 относительно прямой MN, легко убедиться в том, что:

1) точка A_2 лежит на продолжении отрезка DE и

2) $AC \parallel DE$. (6)

Далее, построив точку B_1, симметричную точке B относительно KL, и точку B_2, симметричную точке B_1 относительно LM, мы убедимся, что точка B_2 лежит на продолжении отрезка DE и что $BF \parallel DE$. Итак, если мы построим точки A_2 и B_2, то прямая, проходящая через эти точки, совпадает с отрезком DE, и, значит, $AC \parallel A_2B_2$.

Отсюда вытекает решение задачи. Надо построить указанным приёмом точки A_2 и B_2, провести через эти точки прямую и затем лучу, выходящему из точки A, дать направление, параллельное прямой A_2B_2.

Построение. 1) Строим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой KN. 2) Строим точку A_2, симметричную точке A_1 относительно прямой MN. 3) Строим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой KL. 4) Строим точку B_1, симметричную точке B_1 относительно прямой LM. 5) Соединяем точки A_2 и B_2.

Для того чтобы луч, выходя из точки A и отразившись от всех зеркальных стенок ящика, попал в точку B, необходимо этот луч направить по прямой AC, параллельной прямой A_2B_2.

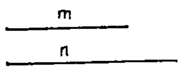
ГЛАВА ПЯТАЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ВОСЬМОГО КЛАССА.

161. *Через данную точку M провести прямую, которая отсекала бы на сторонах данного угла AOB два отрезка, пропорциональные двум данным отрезкам m и n.*

Построение (рис. 225). 1-й способ. 1) На луче OA от точки O отложим отрезок OK_1, равный m. 2) На луче OB от точки O отложим отрезок OL_1, равный n. 3) Через точку M проведём прямую MM_1, параллельную отрезку K_1L_1. Прямая MM_1 пересечёт стороны данного угла в точках A_1 и B_1 так, что

$$OA_1 : OB_1 = m : n.$$



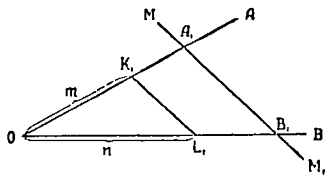


Рис. 225.

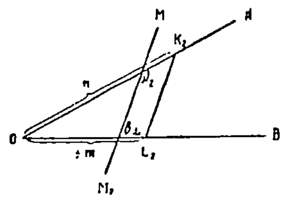


Рис. 225а.

2-й способ (рис. 225а). 1) На лучах OA и OB от точки O отложим отрезки OK_2 и OL_2, соответственно равные n и m. 2) Через точку M проводим прямую MM_2, параллельную отрезку K_2L_2. Прямая MM_2 пересечёт стороны угла AOB в некоторых точках A_2 и B_2 так, что

$$OA_2 : OB_2 = n : m.$$

Исследование. Задача имеет два решения (рис. 225, 225а), если каждая из прямых (MM_1 или MM_2) пересекает обе стороны угла.

Задача имеет одно решение (рис. 225б), если только одна из прямых (MM_1 или MM_2) пересекает стороны угла.

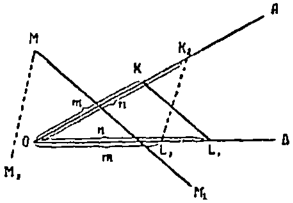


Рис. 225б.

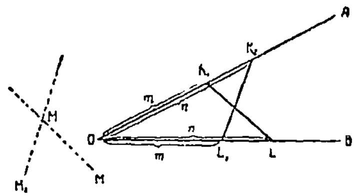


Рис. 225в.

Задача не имеет ни одного решения (рис. 225в), если ни одна из прямых (MM_1 или MM_2) не пересекает сторон данного угла.

162. *На сторонах данного угла AOB найти такие две точки P и Q, чтобы $OP:OQ=m:n$ и отрезок PQ равнялся бы данному отрезку b.*

Анализ (рис. 226). Допустим, что задача решена и точки P и Q—искомые.

Соединив точку P с Q отрезком прямой, получим $\triangle OPQ$.

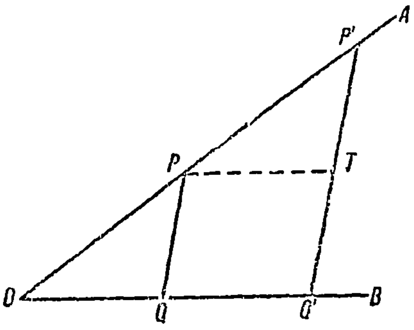


Рис. 226.

В этом треугольнике известны:

1) угол AOB,

2) отношение сторон $OP:OQ$ и

3) длина стороны PQ.

Мы сможем построить $\triangle OPQ$, если сначала построим подобный ему треугольник.

Построение. 1) На стороне OA от точки O откладываем отрезок OP', равный m. 2) На стороне OB от точки O отложим отрезок OQ', равный n. 3) Соединив точки P' и Q', получим треугольник $OP'Q'$, подобный искомому треугольнику OPQ. 4) На стороне $P'Q'$ от точки Q' отложим отрезок $Q'T$, равный данному отрезку b. 5) Из точки T проведём прямую, параллельную линии OB. Эта прямая пересечёт сторону AO в некоторой точке P. 6) Из точки P проводим прямую, параллельную линии $P'Q'$. Она пересечет сторону OB в некоторой точке Q.

PQ—искомый отрезок.

163. *В данном треугольнике ABC на стороне BC найти такую точку D, чтобы отношение отрезков $AD:DC$ было равно $m:n$.*

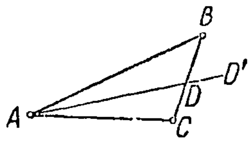


Рис. 227.

Анализ (рис. 227). Если построим треугольник $A_1D_1C_1$, подобный треугольнику ADC, то тем самым определим величину угла DAC, а, значит, и решим задачу

Построение. 1) Строим угол $A_1C_1B_1$, равный углу ACB 2) На стороне B_1C_1 от точки C_1 откладываем отрезок C_1D_1, равный отрезку n. 3) Из точки D_1, как из центра, радиусом, равным отрезку m, проводим дугу до пересечения со стороной C_1A_1 в точке A_2 и получаем: $\triangle A_2C_1D_1 \backsim \triangle ACD$. 4) В данном треугольнике ABC на стороне AC при точке A строим угол CAD', равный углу $D_1A_2C_1$.

Луч AD' пересечёт сторону BC в искомой точке D.

164. *Данный отрезок AB разделить точками C и D внутренне и внешне в отношении $m:n$.*

Анализ (рис. 228). По условию требуется на отрезке AB и на его продолжении найти такие точки C и D, чтобы имела место пропорция

$$AC:CB = AD:BD = m:n$$

Построение. 1) Через концы отрезка A и B в произвольном направлении проводим параллельные прямые AE и FG. 2) На прямой AE от точки A в направлении E откладываем отрезок AK, равный m. 3) На прямой FG от точки B в направлении G откладываем отрезок BL, равный n. 4) Проводим отрезок KL; он пересечет отрезок AB в некоторой точке C. Так как $\triangle ACK \backsim \triangle BCL$, то

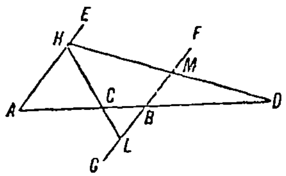


Рис 228.

$$AC:CB = AK:BL = m:n,$$

т. е.

$$AC:CB = m:n. \qquad (1)$$

5) На прямой FG в полуплоскости, где находится отрезок AK, откладываем от точки B отрезок BM, равный отрезку n. 6) Через точки K и M проводим прямую до пересечения с продолжением отрезка AB в некоторой точке D. Так как $\triangle AKD \backsim \triangle BMD$, то

$$AD:BD = AK:BM = m:n,$$

т. е.

$$AD:BD = m:n. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$AC:CB = AD:BD = m:n.$$

165. *Стороны угла ABC пересечены прямой DE. Построить отрезок, который концами своими лежит на сторонах этого угла, перпендикулярен к прямой DE и делится ею пополам.*

Построение (рис. 229). 1) Проводим такую прямую GH, которая пересекает стороны угла ABC и перпендикулярна к линии DE. 2) Обозначаем буквами K и L точки, в которых прямая GH пересечёт стороны угла ABC. 3) Определяем точку M, которая делит пополам отрезок KL. 4) Проводим прямую через точки B и M. 5) Эта прямая пересечёт прямую DE в некоторой точке O. 6) Через точку O проводим прямую $P'Q'$, перпендикулярную к прямой DE. 7) Прямая $P'Q'$ пересечёт стороны угла ABC в точках P и Q.

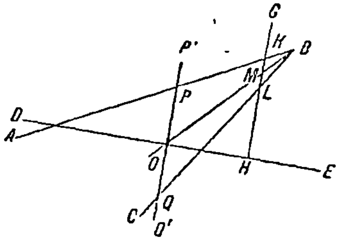


Рис. 229.

PQ — искомый отрезок.

Доказательство. Отрезок PQ удовлетворяет всем требованиям условия задачи: 1) его концы P и Q лежат на стороне угла ABC, 2) $PQ \perp DE$ (по построению), 3) $\frac{PO}{OQ} = \frac{KM}{ML}$ (по свойству гомотетии).

Но так как $KM = ML$ (по построению), то и $PO = OQ$.

166. *Построить треугольник, зная два его угла (α и β) и разность (d) противолежащих сторон.*

Анализ (рис. 230). Допустим, что задача решена и треугольник ABC — искомый. Из условия задачи вытекает, что в этом треугольнике:

1) $\angle BAC = \angle \alpha$,
2) $\angle ABC = \angle \beta$ и
3) $AC - BC = d$.

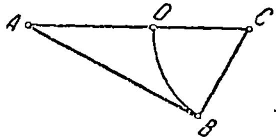


Рис. 230.

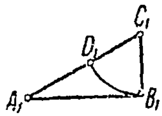


Рис. 230а.

Если на стороне AC от точки C отложим отрезок CD, равный BC, то получим отрезок AD, равный d.

Так как нам известны два угла искомого треугольника, то можно построить какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому. В треугольнике $A_1B_1C_1$ мы можем определить длину отрезка A_1D_1, который является сходственным отрезку AD треугольника ABC.

Так как $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то отношение их сходственных отрезков есть величина постоянная, а поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \ldots \tag{1}$$

Из (1) имеем:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}. \tag{2}$$

Три члена этой пропорции (AD, A_1B_1, A_1D_1) нам известны, а потому можно построением определить и величину неизвестного члена (AB).

После этого задача сводится к построению искомого треугольника по стороне (AB) и двум прилежащим углам.

Построение (рис. 230а). 1) Строим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому треугольнику. 2) Находим отрезок A_1D_1, сходственный с данным отрезком AD искомого треугольника. 3) Определяем ту сторону (AB) искомого треугольника, к которой прилежат данные углы α и β. 4) По найденной стороне (AB) и двум данным прилежащим углам строим искомый треугольник ABC.

Исходя из свойств гомотетии построение проще можно сделать так (рис. 231): 1) Строим произвольных размеров треугольник AB_1C_1, подобный искомому (по первому признаку подобия). 2) На стороне AC_1 от точки C_1 откладываем отрезок C_1D_1, равный B_1C_1, и получаем, что

$$AD_1 = AC_1 - B_1C_1.$$

3) Соединяем отрезком прямой точки B_1 и D_1. 4) На прямой AC_1 от точки A в направлении C_1 откладываем отрезок AD, равный данному отрезку d. 5) Через точку D параллельно B_1D_1 проводим прямую до пересечения со стороной AB_1 (или её продолжением) в некоторой точке B. 6) Через точку B параллельно B_1C_1 проводим прямую до пересечения со стороною AC_1 (или её продолжением) в некоторой точке C.

Треугольник ABC—искомый

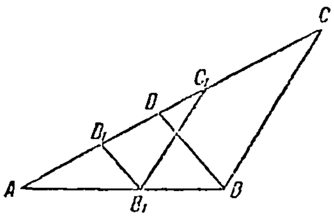


Рис. 231.

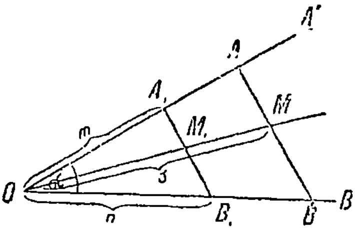


Рис. 232.

167. *Построить треугольник по углу* (α), *отношению сторон* ($m:n$), *между которыми находится этот угол, и медиане* (s) *третьей стороны.*

Построение (рис. 232). 1) Строим угол $A'OB'$, равный данному углу α. 2) На сторонах этого угла от точки O откладываем отрезки OA_1 и OB_1, соответственно равные отрезкам m и n. 3) Проводим отрезок A_1B_1 и находим середину M_1 его. 4) Из точки O проводим луч, проходящий через точку M_1. 5) От точки O в направлении M_1 откладываем отрезок OM, равный данному отрезку s. 6) Между сторонами угла $A'OB'$ проводим через точку M отрезок AB, параллельный отрезку A_1B_1.

Треугольник AOB—искомый.

168. Построить ромб по стороне (a) *и отношению* ($m:n$) *диагоналей.*

Построение (рис. 233). 1) Строим ромб $AB'C'D'$, диагоналями которого являются отрезки m и n. 2) Из точки A проводим луч, проходящий через точку C'. 3) Из точки A, как центра, радиусом, равным отрезку a, проводим дугу до пересечения со сторонами ромба AB' и AD' (или их продолжениями) в точках B и D. 4) Из точки B, как центра, радиусом, равным отрезку a, проводим дугу до пересечения с отрезком AC' или его продолжением в точке C. 5) Соединив отрезками прямой точку C с точками B и D, получим искомый ромб.

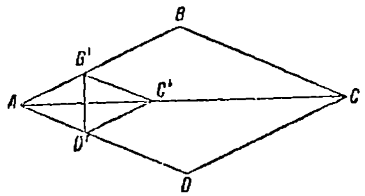


Рис. 233.

169. *Построить прямоугольный треугольник, зная, что его периметр равен MN, а отношение катетов равно $m:n$.*

Анализ. Искомый прямоугольный треугольник должен удовлетворять двум требованиям: 1) иметь отношение катетов, равное $m:n$, и 2) иметь периметр, равный данному отрезку MN. Временно отбросим второе требование и построим какой-нибудь прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий первому требованию.

Далее, чтобы удовлетворить обоим требованиям условия задачи, надо построить треугольник, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$, но имеющий периметр, равный данному отрезку.

Для построения такого треугольника достаточно знать отношение сходственных сторон этих фигур, которое, как известно, равно отношению их периметров.

В условии задачи дан периметр (MN) искомого треугольника. Периметр $\triangle A_1B_1C_1$ легко определить: он равен $A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1$. Поэтому, желая определить ту сторону (x) искомого треугольника, которая сходственна стороне B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, можем воспользоваться следующей пропорцией:

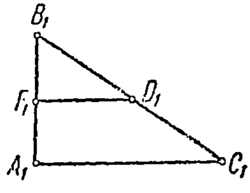


Рис. 234.

$$\frac{x}{B_1C_1}=\frac{MN}{A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1}.$$

Определив известным приёмом длину отрезка x, можем построить и искомый треугольник.

Построение (рис. 234). 1) Строим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, катеты которого (A_1C_1 и A_1B_1) равны отрезкам m и n или пропорциональны им. 2) Определяем отрезок M_1N_1, равный периметру треугольника $A_1B_1C_1$. 3) Гипотенузу x искомого треугольника определяем построением при помощи пропорции:

$$\frac{x}{B_1C_1}=\frac{MN}{M_1N_1},$$

три члена которой (MN, B_1C_1 и M_1N_1) нам известны. 4) На гипотенузе B_1C_1 (или на её продолжении) от точки B_1 отложим отрезок B_1D_1, равный найденному отрезку x. 5) Из точки D_1 проводим прямую, параллельную катету A_1C_1; она пересечёт прямую A_1B_1 в некоторой точке F_1.

Треугольник $B_1D_1F_1$ — искомый.

170. *Построить треугольник, зная его два угла (α и β) и радиус (R) описанной окружности.*

Анализ. 1-й способ. Допустим, что рисунок 235 представляет собою искомое решение, т. е. $AO=R$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$.

Если из точки O произвольным радиусом r опишем окружность и соединим отрезками точку O с вершинами треугольника ABC, то эти отрезки (радиусы) пересекут окружность радиуса r в некоторых точках A_1, B_1, C_1. Легко убедиться в том, что $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$. Из сказанного усматриваем возможность осуществить требуемое построение.

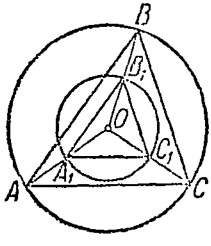


Рис. 235.

Построение (рис. 235). 1) Строим треугольник, имеющий внутренние углы α и β, и получаем $\triangle A_1B_1C_1$. 2) Около треугольника $A_1B_1C_1$ описываем окружность, центр которой окажется в некоторой точке O. 3) Около точки O, как центра, описываем окружность данным радиусом R. 4) Радиусы OA_1, OB_1, OC_1 или их продолжения пересекут окружность радиуса R в некоторых точках A, B и C.

Треугольник ABC — искомый.

Анализ. 2-й способ. Если даны два угла α и β треугольника, то легко определить третий угол γ этой фигуры:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

Допустим, что рисунок 236 представляет собою искомое решение. Соединив центр O окружности с вершинами треугольника ABC, получим

$$\angle AOC = 2\angle ABC = \angle 2\beta,$$
$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha.$$

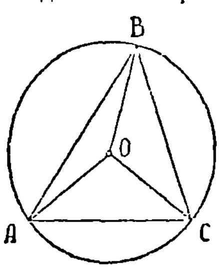


Рис. 236.

Из сказанного вытекает возможность построить искомый треугольник.

Построение. 1) Радиусом, равным R, описываем окружность и проводим произвольный радиус OC. 2) На отрезке OC при точке O строим угол COB, равный 2α. 3) На отрезке OC при точке C строим угол AOC, прилежащий углу BOC и равный 2β. 4) Стороны построенных углов пересекут окружность в некоторых точках A и B.

Треугольник ABC — искомый.

Исследование. Рассматриваемая задача имеет решение во всех тех случаях, когда

$$\alpha+\beta < 180^\circ.$$

171. *Построить треугольник, зная отношение* $(p:q)$ *высоты к основанию, угол* (α) *при вершине и медиану* (m) *боковой стороны.*

Анализ. Искомый треугольник должен удовлетворять следующим трём требованиям:

1) отношение высоты к основанию равно $p:q$,
2) угол при вершине равен α,
3) медиана боковой стороны равна m.

Временно отбросим ту часть условия задачи, в которой сказано, что медиана боковой стороны искомого треугольника равна m. Построим один из треугольников, удовлетворяющих первым двум требованиям условия задачи.

С этой целью примем за основание этого треугольника произвольной длины отрезок OC. На отрезке OC построим сегмент, вмещающий данный угол α. Затем для определения высоты (h) этого треугольника воспользуемся данным в условии задачи отношением высоты к основанию:

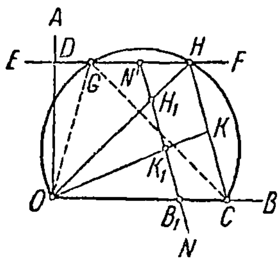


Рис. 237

$$h:OC=p:q.$$

Далее, если проведём прямую EF, которая параллельна основанию OC и отстоит от него на расстоянии h, то она пересечёт дугу построенного сегмента в некоторых точках G и H.

Соединив каждую из этих точек (G и H) с точками C и O, получим два треугольника CGO и CHO.

Каждый из этих треугольников удовлетворяет первым двум требованиям условия задачи и подобен искомому треугольнику.

Чтобы получить искомый треугольник, необходимо построить такой треугольник, который подобен одному из равных треугольников CHO и CGO, но имеет медиану боковой стороны, равную отрезку m. Это построение можем осуществить посредством следующих операций.

В треугольнике CHO строим медиану OK боковой стороны CH; на прямой OK откладываем отрезок OK_1, равный данной медиане m. Через точку K_1 проводим прямую NN', параллельную стороне CH.

Линия NN' пересечёт прямые OH и OB в некоторых точках H_1 и B_1.

Треугольник OB_1H_1—искомый.

Построение (рис. 237). 1) Строим прямой угол AOB. 2) На катете OA от точки O откладываем отрезок OD, равный отрезку p. 3) На стороне OB от вершины O откладываем отрезок OC, равный отрезку q. 4) Через точку D проводим прямую EF, параллельную OB. 5) На отрезке OC строим сегмент, вмещающий данный угол α. Дуга этого сегмента пересечёт прямую EF в некоторых точках G и H.

Соединив отрезками точку H с точками C и O, получим треугольник, подобный искомому. 6) Середину K стороны HC соединим отрезком с точкой O. Отрезок OK есть медиана, соответственная медиане искомого треугольника. 7) На прямой OK от точки O отложим отрезок OK_1, равный данной медиане искомого треугольника. 8) Через точку K_1 проведём прямую NN', параллельную HC. Прямая NN' пересечёт отрезок OH (или его продолжение) в некоторой точке H_1, а прямую OB в некоторой точке B_1.

Треугольник OH_1B_1—искомый.

Треугольник OH_1B_1 мы получили посредством определённых операций над треугольником CHO.

Если бы мы выполнили такие операции над треугольником CGO, построив медиану стороны OG, то получили бы другой искомый треугольник, равный треугольнику OH_1B_1

Исследование Возможность построить искомый треугольник и число решений зависит от конфигурации прямой EF и дуги OHC сегмента, построенного на отрезке OC и вмещающего данный угол α:

	Конфигурация прямой EF и дуги OHC	Число решений
I	Прямая EF находится вне сегмента OHC	0
II	Прямая EF касается дуги сегмента	1
III	Прямая EF пересекает дугу сегмента	2

В последнем (III) случае два решения получаются по следующей причине. Если прямая EF пересекает дугу (OHC) сегмента, то непременно в двух точках (G и H), причём боковые стороны каждого из равных треугольников OHC и OGC не одинаковы Пусть $\triangle OHC$ (рис. 237а) подобен искомому, причём отрезок CL является медианой большей из его боковых сторон.

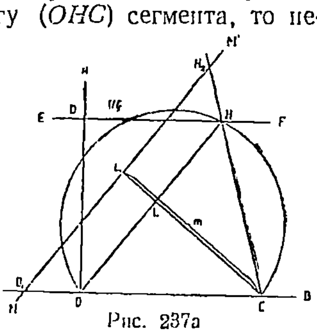


Рис. 237а

Если построим такой треугольник, который подобен треугольнику CHO и имеет медиану меньшей из боковых сторон, равную m, то получим $\triangle B_1H_1O$ (рис. 237).

Если же построим такой треугольник, который подобен треугольнику CHO и имеет медиану большей из боковых сторон, равную m, то получим $\triangle CH_2O_1$ (рис. 237а).

Треугольники B_1H_1O и CH_2O_1—искомые.

172. *Дан $\angle AOB$ и внутри его точка C. Найти на стороне OB точку (M), равноотстоящую от стороны OA (или от её продолжения, если $\angle AOB$ тупой) и от точки C.*

Анализ. Допустим, что рис. 238 представляет требуемое решение, т. е.

$$M_1N_1 \perp OA,$$
$$M_1N_1 = M_1C.$$

Можем сказать, что точка C отстоит от точки M_1 на расстоянии перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую AO.

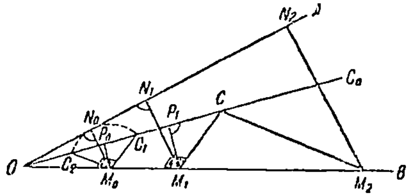


Рис. 238.

Проведём вспомогательную полупрямую OC_0, проходящую через точки O и C, и определим на ней такую точку (C_1), которая от точки M_0, произвольно взятой на прямой OB, отстоит на расстоянии, равном длине перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую AO.

Такую точку (C_1) находим следующим построением. Из точки M_0 опускаем на прямую AO перпендикуляр M_0N_0 и затем из точки M_1, как центра, радиусом, равным отрезку M_0N_0, проводим дугу до пересечения с лучом OC в точке C_1.

Ясно, что

$$M_0N_0 = M_0C_1. \qquad (1)$$

Рассматривая прямоугольные треугольники M_0N_0O и M_1N_1O, заметим, что они подобны, т. е.

$$\triangle M_0N_0O \backsim \triangle M_1N_1O. \qquad (2)$$

Из (2) имеем:

$$\frac{M_1N_1}{M_0N_0} = \frac{OM_1}{OM_0}. \qquad (3)$$

Так как

$$M_1N_1 = M_1C \text{ и } M_0N_0 = C_1M_0,$$

то пропорцию (3) перепишем так:

$$\frac{M_1C}{C_1M_0} = \frac{OM_1}{OM_0}. \qquad (4)$$

Если из точек M_0 и M_1 опустим на прямую OC перпендикуляры M_0P_0 и M_1P_1, то получим:

$$\frac{M_1P_1}{M_0P_0} = \frac{OM_1}{OM_0}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает, что

$$\frac{M_1C}{C_1M_0} = \frac{M_1P_1}{M_0P_0},$$

т. е. гипотенуза и катет одного треугольника (CM_1P_1) пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника ($C_1M_0P_0$), и, значит,

$$\triangle CM_1P_1 \backsim \triangle C_1M_0P_0,$$

откуда

$$\angle CM_1P_1 = \angle C_1M_0P_0. \qquad (6)$$

Далее,

$$\angle OM_0P_0 = \angle OM_1P_1, \qquad (7)$$

как соответственные, образованные параллельными прямыми и секущей.

Сложив почленно равенства (6) и (7), получим:

$$\angle OM_0P_0 + \angle C_1M_0P_0 = \angle OM_1P_1 + \angle CM_1P_1,$$

т. е.

$$\angle OM_0C_1 = \angle OM_1C,$$

и, значит,

$$M_1C \parallel M_0C_1.$$

Из сказанного можем сделать следующий вывод.

Если, взяв на прямой OB произвольную точку M_0, определим на линии OC точку C_1, которая отстоит от точки M_0 на расстоянии, равном длине перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую AO, и соединим точку C_1 с M_0, то отрезок C_1M_0 будет параллелен тому отрезку (CM_1), который соединяет данную точку C с искомою точкою M_1, отстоящей от прямой AO на расстоянии, равном CM_1.

Примечание. Когда из точки M_0, как из центра, радиусом, равным отрезку M_0N_0, проводим дугу, то она непременно пересечет луч OC в двух точках C_1 и C_2. Выше было указано, как найти ту искомую в задаче точку (M_1), которая определяется положением точки C_1. Аналогичными рассуждениями можно убедиться в том, что существует еще одна точка, которая удовлетворяет условию задачи и определяется положением C_2.

Построение (рис. 238). 1) Из вершины (O) данного угла AOB проводим луч, проходящий через точку C. 2) Из произвольной точки M_0 стороны OB опускаем перпендикуляр M_0N_0 на сторону AO. 3) Из точки M_0, как центра, радиусом, равным отрезку M_0N_0, проводим дугу до пересечения с прямой OC в точках C_1 и C_2.

4) Соединяем отрезком точки C_1 и M_0.

5) Из точки C проводим отрезок CM_1, параллельный отрезку C_1M_0, до встречи со стороной OB в некоторой точке M_1.

4) Соединяем отрезком точки C_2 и M_0.

5) Из точки C проводим отрезок CM_2, параллельный отрезку C_2M_0, до встречи со стороной OB в некоторой точке M_2.

Точки M_1 и M_2—искомые.

Исследование. Рассмотрим отдельно те случаи, когда данный угол AOB острый, прямой и тупой.

I. $\angle AOB < 90°$.

По условию точка C находится внутри данного $\angle AOB$; поэтому и вспомогательная полупрямая OC также будет находиться внутри этого угла. Какова бы ни была длина перпендикуляра M_0N_0, опущенного из произвольной точки M_0 стороны OB на сторону OA, окружность, описанная из точки M_0, как центра, радиусом, равным этому перпендикуляру, непременно пересечёт вспомогательную полупрямую OC в двух точках C_1 и C_2.

Выше было показано, как построить искомую точку (M_1), если считать, что точка C_1 является сходственной точке C. Если же примем, что точка C_2 есть сходственная точке C, то получим другую искомую точку (M_2).

Следовательно, рассматриваемая задача при $\angle AOB < 90^\circ$ всегда имеет два решения.

II. $\angle AOB = 90^\circ$.

В этом случае основанием перпендикуляра, опущенного из любой точки M_0 стороны OB на сторону AO, всегда будет точка O. Следовательно, при $\angle AOB = 90^\circ$ решение задачи сводится к тому, что надо на прямой OB найти такую точку, которая равноудалена от точки O и C.

Значит, при $\angle AOB = 90^\circ$ искомую точку можем определить следующим приёмом. Соединяем прямолинейным отрезком точки O и C, а затем через середину отрезка OC проводим перпендикулярную к нему прямую, которая пересечёт сторону OB в некоторой искомой точке, представляющей собою единственное решение рассматриваемой задачи.

III. $90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$.

Рассуждениями, аналогичными тем, какие были изложены в пунктах I и II приводимого исследования, можем убедиться в том, что при угле AOB тупом задача имеет:

два решения, если $\angle COB + \angle OM_0N_0 < 90^\circ$;

одно решение, если $\angle COB + \angle OM_0N_0 = 90^\circ$;

ни одного решения, если $\angle COB + \angle OM_0N_0 > 90^\circ$.

173. *Дан треугольник AOB и внутри его точка C. Найти на стороне OB точку (M), которая от точки C отстоит втрое дальше, чем от прямой AO.*

174. *Дан угол KOL и внутри его точка M. Провести через точку M прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, рассекался бы точкой M в данном отношении ($m:n$), считая от стороны OK.*

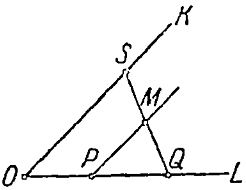


Рис. 259

Анализ. Допустим, что рис. 239 представляет собою решение рассматриваемой задачи, т. е.

$$SM : MQ = m : n.$$

Ясно, что для осуществления этого построения достаточно знать положение точки Q.

Попытаемся построить такой треугольник, в котором SM и MQ являлись бы теми частями его боковой стороны, на которые делит её прямая, параллельная стороне OK.

Для этого через точку M проведём прямую, параллельную стороне OK данного угла, и тем самым построим отрезок OP. Тогда по теореме пропорциональности отрезков получим:

$$OP:PQ=SM:MQ,$$

т. е.

$$OP:PQ=m:n.$$

Зная отрезок OP, можем посредством этой пропорции определить длину неизвестного отрезка PQ. Затем, если на прямой OL от точки P отложим отрезок, равный PQ, то и определим положение точки Q.

Построение (рис. 239). 1) Проводим через точку M прямую PM, которая параллельна OK и пересекает сторону OL угла в некоторой точке P. 2) На луче OL от точки P отложим такой отрезок PQ, чтобы $\frac{OP}{PQ}=\frac{m}{n}$.

Искомой прямой является та, которая проходит через точки M и Q.

175. *На окружности даны две точки A и B. Требуется найти на этой окружности такую точку, чтобы сумма её расстояний до точек A и B равнялась данному отрезку (p).*

Анализ. Хорда AB делит данную окружность на две дуги: $\smile ADB$ и $\smile AD_1B$ (рис. 240).

Сначала найдём положение искомой точки на дуге ADB.

Соединив любую точку (Q) дуги ADB с концами хорды AB, получим треугольник AQB, в котором угол AQB равен половине дуги AD_1B Обозначим этот угол буквою α:

$$\angle AQB=\alpha. \tag{1}$$

Если допустим, что точка Q является искомой, то, по условию, получим:

$$AQ+QB=p. \tag{2}$$

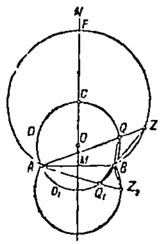


Рис. 240.

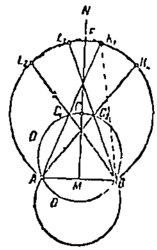


Рис. 240а

Опираясь только на уравнение (2), невозможно определить положение точки Q на дуге ADB. Поэтому, желая найти способ построения точки Q, попытаемся спрямить ломаную линию AQB. С этой целью на продолжении отрезка AQ отложим отрезок QZ, равный QB:

$$QZ=QB. \tag{3}$$

Точки Q и Z конструктивно связаны: зная положение одной, можем определить положение другой. Действительно, если найдём положение точки Z, то, соединив ее с точкою A, получим, что отрезок AZ пересечёт дугу ADB в искомой точке (Q).

Из (2) и (3) имеем:

$$AQ + QZ = p,$$

т. е.

$$AZ = p. \tag{4}$$

Чтобы связать точку Z с остальною частью чертежа, соединим её с точкою B.

Эта операция привела к тому, что на чертеже, содержащем один треугольник AQB, появились еще два треугольника: $\triangle AZB$ и $\triangle QZB$.

Если построим хотя один из этих треугольников, то тем самым найдём положение точки Z, а значит, и положение точки Q, конструктивно связанной с нею.

Рассматривая треугольник BQZ, заключаем на основании равенства (3), что он равнобедренный и, значит, в нём углы при основании равны:

$$\angle QZB = \angle QBZ. \tag{5}$$

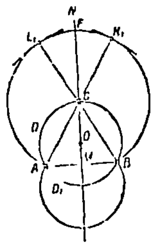


Рис. 240б.

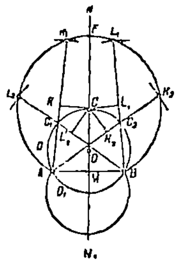


Рис 240в

Приняв во внимание, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных, можем написать такое равенство:

$$\angle AQB = \angle QZB + \angle QBZ. \tag{6}$$

Из (1), (5) и (6) получим:

$$\angle QZB = \angle QBZ = \frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Из равенства (4) вытекает, что точка Z отстоит от точки A на расстоянии, равном отрезку p, а равенство (7) показывает, что из точки Z отрезок AB виден под углом, равным $\frac{\alpha}{2}$.

Следовательно, если построим геометрическое место точек, удалённых от точки A на расстоянии, равном p, и геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом $\frac{\alpha}{2}$, то пересечение этих геометрических мест и будет представлять собою искомую точку Z.

Первое из этих геометрических мест есть окружность, описанная из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку p; второе геометрическое место точек представляет собою дугу сегмента, который построен на данном отрезке AB и вмещает угол, равный $\frac{\alpha}{2}$. Построив эти геометрические места, определим положение точки Z, а затем и положение искомой точки Q

Ясно, что таким же приёмом можно будет определить положение точек на дуге AD_1B.

Построение (рис. 240а). 1) Из середины M отрезка AB восставим перпендикуляр MN. Прямая MN пройдёт через середину C дуги ADB, стягиваемой хордой AB. 2) На отрезке MN от точки C, в сторону точки N, отложим отрезок CF, равный отрезку AC:

$$CF = AC.$$

3) Из точки C, как из центра, радиусом, равным AC, опишем дугу AFB. 4) Из точки A, как из центра, радиусом, равным отрезку p, опишем дугу, которая пересечёт дугу AFB в некоторых точках K_1 и K_2. 5) Проводим отрезки AK_1 и AK_2, они пересекут дугу ADB в некоторых точках C_1 и C_2.

Точки C_1 и C_2—искомые, так как $AC_1 + C_1B = p = AC_2 + C_2B$.

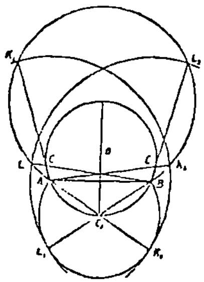


Рис 240г.

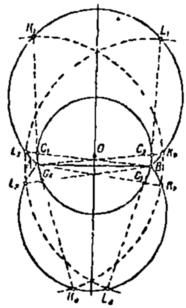


Рис. 240д.

Доказательство. Докажем, что точка C_1 является искомой. С этой целью соединим отрезком точку K_1 с точкою B. Сегмент AFB вмещает угол, равный $\frac{\alpha}{2}$, а потому в полученном треугольнике C_1K_1B угол AK_1B равен $\frac{\alpha}{2}$. Внешний угол AC_1B этого же треугольника, не смежный с углом C_1K_1B, равен α.

Отсюда следует, что

$$\angle C_1BK_1 = \frac{\alpha}{2},$$

и, значит, $\triangle C_1K_1B$—равнобедренный, а потому

$$C_1K_1 = C_1B. \qquad (8)$$

Так как, по построению,

$$AK_1 = p, \qquad (9)$$

причем

$$AK_1 = AC_1 + C_1K_1, \qquad (10)$$

то из (9) и (10) имеем:

$$AC_1 + C_1K_1 = p. \tag{11}$$

Наконец, из (8) и (11) получим:

$$AC_1 + C_1B = p,$$

что и требовалось доказать.

Совершенно такими же рассуждениями убеждаемся в том, что и точка C_2 является искомой.

Исследование. На решение рассматриваемой задачи влияют следующие величины: 1) длина отрезка AB, 2) длина отрезка p и 3) величины углов, вмещаемых сегментами ADB и AD_1B.

Сначала определим, сколько и при каких относительных размерах этих величин имеется искомых точек на дуге ADB.

Соединив любую точку C_1 дуги ADB с точками A и B, получим, что

$$AC_1 + C_1B > AB.$$

Отсюда вытекает, что задача имеет решение только в том случае, когда отрезок p больше отрезка AB:

$$p > AB. \tag{12}$$

С другой стороны, если отрезок p больше $2R$, т. е. больше диаметра окружности $AFB...$, то дуги, описываемые из точек A и B, не пересекут дуги AFB. Это значит, что при

$$p > 2R \tag{13}$$

задача не имеет решения.

Если (рис. 240б)

$$p = 2R, \tag{14}$$

то в этом случае дуги, описанные из точек A и B, как из центров, будут касаться дуги AFB в некоторых точках K_1 и L_1, причём отрезки AK_1 и BL_1, как диаметры, пройдут через центр C окружности $AFB...$, который является серединой дуги ADB. Точка C будет единственной искомой точкой, находящейся на дуге ADB.

Если (рис. 240в) $AB < p < 2R$, то две дуги, описанные из точек A и B, как из центров, радиусами, равными отрезку p, пересекут дугу AFB соответственно в некоторых точках K_1 и K_2, а также в точках L_1 и L_2.

Равные хорды AK_1, AK_2, BL_1, BL_2 равноудалены от центра C окружности $AFB...$, а потому перпендикуляры, опущенные из точки C на эти хорды, также равны между собою:

$$CK_1' = CK_2' = CL_1' = CL_2'. \tag{15}$$

Так как $\smile AC = \smile CB$, то

$$AC = CB.$$

Далее

$$\triangle CK_1'A = \triangle CL_1'B = \triangle CK_2'A = \triangle CL_2'B,$$

как прямоугольные треугольники, имеющие равные гипотенузы ($AC=BC$) и по равному катету.

Обозначим буквою C_1 точку пересечения отрезков AK_1 и BL_1.

В треугольнике AC_1B

$$\angle AC_1B + \angle C_1AB + \angle C_1BA = 2d \tag{16}$$

и

$$\angle AC_1B = 2d - (\angle C_1AB + \angle C_1BA). \tag{17}$$

Из чертежа видно, что

$$\left.\begin{aligned} &\angle C_1AB = \angle CAB + \angle C_1AC \\ \text{и} \quad &\angle C_1BA = \angle CBA - \angle C_1BC. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из (17) и (18) имеем:

$$\angle AC_1B = 2d - [\angle CAB + \angle C_1AC + \angle CBA - \angle C_1BC]. \tag{19}$$

Но

$$\angle C_1AC = \angle C_1BC$$

и потому равенство (19) принимает такой вид:

$$\angle AC_1B = 2d - (\angle CAB + \angle CBA). \tag{20}$$

И ясно, что в треугольнике ACB

$$\angle ACB = 2d - [\angle CAB + \angle CBA]. \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает, что

$$\angle ACB = \angle AC_1B,$$

и, следовательно, точка C_1 находится на дуге ADB, т. е. отрезки AK_1 и BL_1 пересекают дугу ADB в одной и той же точке.

Аналогичными рассуждениями можем убедиться, что отрезки AK_2 и BL_2 также пересекаются в некоторой точке C_2, лежащей на дуге ADB.

Как видим, если

$$AB < p < 2R,$$

то на дуге будут находиться две искомые точки.

Из предыдущей части исследования вытекает, что в рассматриваемой задаче на дуге ADB могут быть либо две искомых точки, либо одна, либо ни одной.

Но для полного решения задачи необходимо определить искомые точки и на дуге AD_1B.

Задача может иметь следующее число решений: 1 (рис. 240б), 2 (рис. 240а и 240в), 3 (рис. 240г), 4 (рис. 240д) и 0.

176. *Найти в треугольнике ABC такую точку S, чтобы перпендикуляры (SA_0, SB_0, SC_0), опущенные из неё на стороны (BC, CA и AB) треугольника, находились в данном отношении $m:n:p$.*

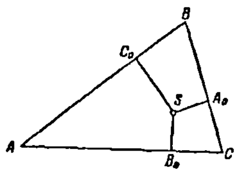


Рис. 241

Анализ. Допустим, что рис. 241 представляет собою искомое решение, т. е.

$$SA_0:SB_0:SC_0=m:n:p.$$

Так как

$$SA_0:SB_0=m:n,$$

то, значит, точка S находится на прямой, являющейся геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до сторон AC и BC данного угла BCA равно $m:n$

Далее, так как

$$SB_0:SC_0=n:p,$$

то, значит, точка S находится на прямой, представляющей собою геометрическое место точек, отношение расстояний которых до сторон AC и AB данного угла BAC равно $n:p$.

Построив известным приёмом эти прямые, определим и искомую точку S: она будет точкою пересечения этих прямых.

Построение (рис. 242). 1) Строим прямую C_1C_2, параллельную стороне AB и отстоящую от неё на расстоянии p. 2) Строим прямую B_1B_2, параллельную стороне AC и отстоящую от неё на расстоянии n. 3) Буквою K обозначаем точку пересечения прямых B_1B_2 и C_1C_2 (отношение расстояний точки K от прямых AC и AB очевидно равно $n:p$). 4) Через точки A и K проводим прямую AA', являющуюся геометрическим местом точек, расстояния которых от сторон AC и AB угла BAC имеют одно и то же отношение $n:p$. 5) Строим прямую A_1A_2, параллельную стороне BC и отстоящую от неё на расстоянии m. 6) Буквою L обозначаем точку пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 (отношение расстояний точки L от прямых BC и AC очевидно равно $m:n$). 7) Через точки C и L проводим прямую CC', являющуюся геометрическим местом точек, расстояния которых от сторон AC и BC угла BCA имеют одно и то же отношение $m:n$.

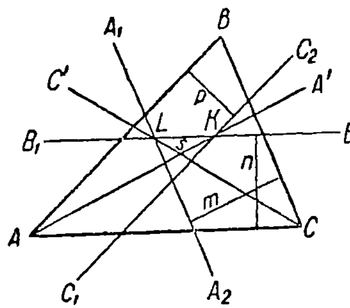


Рис. 242.

Пересечение (S) прямых AA' и CC' и является искомой точкой: если её расстояния от сторон BC, CA и AB обозначим соответственно через SA_0, SB_0 и SC_0, то окажется, что

$$SA_0 : SB_0 : SC_0 = m : n : p. \tag{1}$$

Доказательство. Точка S находится на прямой AA', а потому

$$SB_0 : SC_0 = n : p. \tag{2}$$

Но точка S находится также на прямой CC', и, значит,

$$SA_0 : SB_0 = m : n. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает равенство (1).

177. *Построить треугольник по углу* (α), *одной из сторон* (b), *прилежащих к нему, и по отношению* ($m : n$) *этой стороны к третьей стороне.*

Анализ. Дана сторона (b) искомого треугольника и тем самым две его вершины (рис. 243). Относительно третьей вершины можем сказать, что она находится на другой стороне угла α, построенного на отрезке AC при точке A, и отстоит от точки C на расстоянии, равном третьей стороне. Длину третьей стороны можем определить, потому что известно её отношение к данной стороне AC. Следовательно, легко построить и третью вершину искомого треугольника.

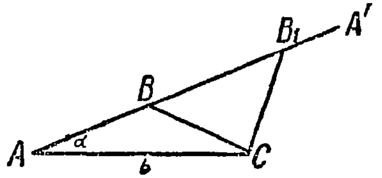


Рис. 243.

Построение (рис. 243). 1) Строим сторону AC, равную данному отрезку b. 2) На отрезке AC при точке A строим угол CAA', равный α. 3) Определяем третью сторону (x), основываясь на следующей пропорции, вытекающей из условия задачи: $AC : x = m : n$. 4) Из точки C, как из центра, проводим дугу радиусом, равным найденному отрезку x. Соединив отрезками с точкою C те точки B и B_1, в которых построенная дуга пересечёт прямую AA', получим искомые треугольники ABC и AB_1C.

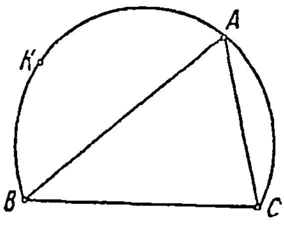


Рис. 244.

Исследование. Обозначая буквою d расстояние от точки C до прямой AA', результаты исследования можно представить в таком виде:

Если $x > d$, то задача имеет два решения;
„ $x = d$, „ „ „ одно решение;
„ $x < d$, „ „ не имеет ни одного решения.

178. *Построить треугольник по углу при вершине* (α), *основанию* (a) *и отношению* ($m : n$) *этого основания к одной из боковых сторон.*

Анализ (рис. 244). Так как дано основание (a) треугольника и отношение ($m : n$) этого основания к боковой стороне, то, прежде всего, определяем длину (AC, например) этой боковой стороны при помощи пропорции

$$a:AC=m:n.$$

Найдя длину боковой стороны, можем условие рассматриваемой задачи изложить так: построить треугольник по основанию, боковой стороне и углу при вершине.

Построив отрезок BC, равный данному основанию (a), мы будем знать положение двух вершин (B и C) искомого треугольника. Положение третьей вершины искомого треугольника определяем путём следующих рассуждений. По условию, в искомом треугольнике угол при вершине равен α, а потому третья вершина треугольника находится где-то на дуге BKC того сегмента, который построен на отрезке BC и вмещает данный угол α. Кроме того, так как боковая сторона AC нам известна, то третья вершина должна также находиться где-то на окружности (K_1), описанной из точки C, как из центра, и имеющей радиус, равный AC.

Пересечение дуги BKC сегмента с окружностью (K_1) и будет третьей вершиной искомого треугольника.

Построение. 1) Строим отрезок BC, равный основанию a. 2) На отрезке BC строим сегмент, вмещающий данный угол α. 3) Определяем длину одной из боковых сторон, например AC, при помощи пропорции $a:AC=m:n$. 4) Из точки C, как из центра, радиусом, равным AC, проводим дугу до пересечения с дугой BKC в точке A. 5) Соединив отрезками прямой точку A с точками B и C, получим искомый треугольник.

Исследование. Введём обозначения:

R—радиус дуги того сегмента, который построен на отрезке BC, равном a, и вмещает угол α.

b—сторона искомого треугольника, определяемая из пропорции:

$$m:n=a:b,$$

где m, n и a нам известны.

При таких обозначениях результаты исследования можно представить в виде следующей таблички.

	Значения α и b	Число решений
1	$\alpha<90°$, $b\leqslant a$	1
2	$\alpha<90°$, $2R>b>a$	2
3	$\alpha<90°$, $b=2R$	1
4	$\alpha<90°$, $b>2R$	0
5	$\alpha\geqslant 90°$, $b<a$	1
6	$\alpha\geqslant 90°$, $b\geqslant a$	0

179. *Построить треугольник по высоте (h), углу (γ) при вершине и отношению отрезков основания ($m:n$).*

Анализ. Искомый треугольник должен удовлетворять следующим трём требованиям: иметь 1) высоту, равную данному отрезку h; 2) угол при вершине, равный углу γ, и 3) отношение отрезков основания, равное $m:n$.

Временно отбросим первое требование и построим треугольник ABC, удовлетворяющий только второму и третьему требованиям условия. В полученном треугольнике проводим высоту CD. Нам остаётся теперь так изменить размеры $\triangle ABC$, чтобы высота нового треугольника равнялась бы отрезку h.

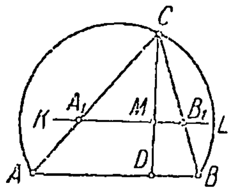


Рис. 245.

Построение (рис. 245). 1) Берём отрезок AB произвольной длины и делим его точкой D в данном отношении m к n. 2) На отрезке AB строим сегмент, вмещающий угол (γ). 3) К отрезку AB в точке D восставим перпендикуляр до пересечения с дугой сегмента в некоторой точке C. Соединив отрезком точку C с концами отрезка AB, получим треугольник, подобный искомому. 4) Чтобы получить требуемый в задаче треугольник, отложим на отрезке CD (или его продолжении) от точки C отрезок CM, равный h, и через точку M проведём прямую KL, параллельную AB. Обозначим буквами A_1 и B_1 точки пересечения линии KL со сторонами AC и BC.

Треугольник A_1B_1C является искомым.

180. *Построить треугольник, если дано его основание (c), угол при вершине (γ) и отношение основания к его медиане ($m:n$).*

181. *Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором расстояние между точкою пересечения медиан и точкою пересечения биссектрис равно данному отрезку m.*

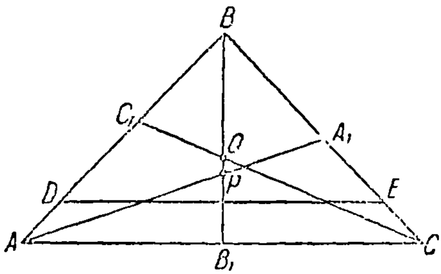


Рис. 246.

Анализ. Все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны. Построив один из таких треугольников, например $\triangle ABC$ (рис. 246), мы можем построить в нём тот отрезок (PQ), которому в искомом треугольнике соответствует сходственный отрезок, равный m.

Так как в двух подобных фигурах отношение сходственных линий есть величина постоянная, то длину катета (x) искомого треугольника можно определить из пропорции:

$$x:AB=m:PQ.$$

Определив построением катет (x) искомого равнобедренного прямоугольного треугольника, можно построить и всю эту фигуру.

Построение. Строим произвольного размера равнобедренный прямоугольный треугольник ABC.

В этом треугольнике определяем точку (P) пересечения медиан и точку (Q) пересечения биссектрис.

Длину (x) катета искомой фигуры находим построением, основываясь на следующей пропорции:

$$x : AB = m : PQ.$$

На прямых BA и BC откладываем отрезки BD и BE, порознь равные найденному отрезку x, и соединяем точки D и E.

$\triangle BDE$—искомый.

Доказательство. Правильность выполненного построения вытекает из того положения, что в двух подобных фигурах отношение сходственных отрезков есть величина постоянная.

Исследование. При данном m всегда можно построить искомый равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассматриваемая задача имеет одно решение.

182. *Построить равносторонний треугольник, зная, что радиус круга, описанного около него, больше радиуса круга, вписанного в него, на отрезок m.*

183. *Построить равнобедренную трапецию, зная, что её периметр равен данному отрезку d, а отношение боковой стороны к сумме верхнего и нижнего оснований равно $m:n$.*

184. *Построить треугольник по углу (α) при вершине, основанию (AB) и данной на основании точке (D), через которую проходит биссектриса угла при вершине.*

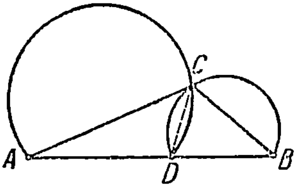


Рис. 247.

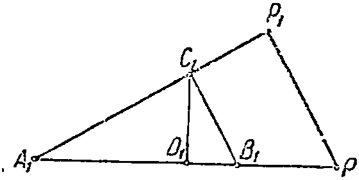


Рис. 248.

Построение (рис. 247). 1) Находим половину данного угла α. 2) На отрезках AD и DB строим сегменты, вмещающие углы, равные $\frac{\alpha}{2}$. 3) Точка C пересечения дуг этих сегментов является вершиной искомого треугольника. Соединив отрезками точку C с точками A и B, получим искомый треугольник.

184а. *Построить треугольник по двум углам (α и β) и сумме (s) или разности (d) основания и высоты.*

Анализ (рис. 248). Допустим, что даны два угла при основании и сумма основания и высоты.

Берём произвольный отрезок A_1B_1 и строим при его концах данные углы. Получим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому.

Опустив из точки C_1 перпендикуляр C_1D_1 на основание A_1B_1, мы тем самым узнаем высоту этого треугольника. Сложив эту высоту C_1D_1 с основанием A_1B_1, получим некоторый отрезок MN. Основание AB искомого треугольника так относится к основанию треугольника $A_1B_1C_1$, как s относится к MN:

$$AB:A_1B_1=s:MN.$$

Три члена этой пропорции (A_1B_1, s и MN) нам известны, а потому построением можем найти четвёртый её член AB.

Определив длину AB, откладываем на прямой A_1B_1 от точки A_1 отрезок A_1P, равный AB, и из точки P проводим прямую, параллельную B_1C_1, до пересечения со стороной A_1C_1 в некоторой точке P_1. Треугольник A_1PP_1 есть искомый.

Таким же приёмом решается задача, если даны два угла треугольника, прилежащие к основанию, разность основания и высоты.

Методом подобия решается бесчисленное множество аналогичных задач. Тем же приёмом, что и рассмотренная задача, можно решить любую задачу, в которой даны два угла искомого треугольника и какая угодно, но вполне определённая, алгебраическая сумма величин a, b, c, h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, b_a, b_b, b_c, r, R.

Примеры. Построить треугольник, если даны: 1) два угла и m_a, 2) два угла и m_a+m_b, 3) два угла и $a+b$, 4) два угла и $m_a+m_b+m_c$, 5) два угла и $a-c$, 6) два угла и $a+b-c$, 7) два угла и $R-r$, и т. п.

185. *Построить равнобедренный треугольник $B_1D_1E_1$ по углу (α) при вершине и сумме (s) основания с высотой.*

Построение (рис. 249). 1) Строим угол ABC, равный углу α. 2) Из вершины B этого угла, как из центра, произвольным радиусом R описываем дугу окружности, пересекающей стороны этого угла в некоторых точках D и E. 3) Соединив отрезком прямой точки D и E, получим треугольник BDE, подобный искомому треугольнику $B_1D_1E_1$. 4) Построив в $\triangle BDE$ высоту BF, определим, чему в этом треугольнике равна сумма (s) основания с высотой, т. е. найдём отрезок s, определяемый следующей формулой:

$$s=DE+BF.$$

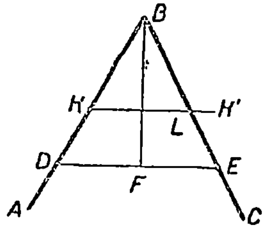


Рис. 249.

5) Далее, из пропорции $\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{s}{s_1}$ найдём величину B_1D_1. 6) Отложим на стороне BA отрезок BK, равный B_1D_1. 7) Из точки K проведём прямую KK', параллельную прямой DE, и обозначим буквой L точку пересечения прямых KK' и BC. Треугольник BKL является искомым.

186. *Построить прямоугольный равнобедренный треугольник, сумма медиан которого равна данному отрезку MN.*

Построение. 1) Строим произвольной величины равнобедренный прямоугольный $\triangle ABC$ и проводим в нём медианы AD, BE и CF. 2) Определяем отрезок (KL), равный сумме этих медиан. 3) Из пропорции $KL : MN = AC : A_1C_1$ известным построением находим отрезок A_1C_1. 4) На стороне AC от точки A откладываем отрезок AG, равный A_1C_1. 5) Из точки G проводим прямую GG', параллельную стороне BC. Буквой H обозначаем пересечение линии AB и GG'. $\triangle AGH$ — искомый.

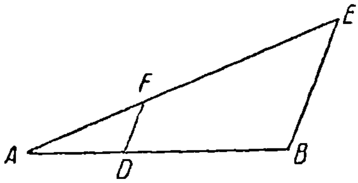


Рис. 250.

187. *Даны три отрезка: MN, a, b. Требуется отрезок MN разбить на два таких отрезка, отношение которых равно $a^2 : b^2$.*

Построение (рис. 250). 1) Известным приёмом строим два отрезка m и n, отношение которых равно $a^2 : b^2$. 2) Проводим произвольную прямую, отмечаем на ней какую-нибудь точку A и на этой прямой от точки A последовательно откладываем два прилежащих отрезка AD и DB, соответственно равные найденным отрезкам m и n. 3) Из точки A под произвольным углом проводим отрезок AE, равный MN:

$$AE = MN.$$

4) Соединяем отрезком точки B и E и проводим из точки D прямую, параллельную отрезку BE. Обозначив буквою F пересечение прямой DF с отрезком AE, получим искомые отрезки AF и FE, так как их сумма равна MN и $AF : FE = a^2 : b^2$.

188. *Даны три отрезка: m, n, p. Требуется отрезок p разбить на два таких отрезка, отношение которых равно $\sqrt{m} : \sqrt{n}$.*

189. *Построить треугольник, периметр которого равен данному отрезку MN, а стороны относятся, как площади трёх данных кругов.*

Указание. Ясно, что отношение сторон искомого треугольника следующее:

$$r_1^2 : r_2^2 : r_3^2. \qquad (1)$$

Разделив отрезок MN в данном отношении (1), получим стороны искомого треугольника, после чего легко будет построить и сам треугольник.

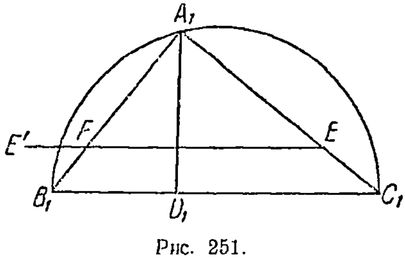


Рис. 251.

190. *Построить прямоугольный треугольник, зная, что его периметр равен MN, а отношение квадратов катетов равно $m : n$.*

Анализ. Квадраты катетов относятся между собой, как прилежащие отрезки гипотенузы, разделяемые соответствующей высотой. Поэтому, если построим такой прямоугольный треугольник, в котором прилежащие отрезки гипотенузы равны отрезкам m и n или пропорциональны им, то получим прямоугольный треугольник, подобный искомому.

Построение (рис. 251). 1) На произвольной прямой построим два прилежащих отрезка: B_1D_1, равный m, и D_1C_1, равный n. 2) На отрезке B_1C_1, как на диаметре, построим полуокружность. 3) В точке D_1 восставим перпендикуляр к диаметру B_1C_1; этот перпендикуляр пересечёт полуокружность в некоторой точке A_1. Соединив отрезком точку A_1 с концами диаметра B_1C_1, получим $\triangle A_1B_1C_1$, подобный искомому треугольнику ABC. 4) Определим отрезок M_1N_1, равный периметру построенного нами треугольника $A_1B_1C_1$:

$$M_1N_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1.$$

5) Из пропорции $M_1N_1 : MN = A_1C_1 : AC$ определяем построением отрезок AC. 6) На стороне A_1C_1 от точки A_1 отложим отрезок A_1E, равный AC. 7) Из точки E проводим прямую EE', параллельную стороне B_1C_1. Линия EE' пересечёт сторону A_1B_1 в некоторой точке F. Треугольник A_1EF — искомый.

191. *Построить треугольник ABC по следующим данным:*

1) $\angle A$, $\angle B$, m_c; 2) $\angle A$, $\angle B$, h_c;
3) $\angle A$, $\angle B$, h_b; 4) $\angle A$, $b:c$, m_b;
5) $\angle B$, a, $b:c$; 6) $\angle B$, $a:c$, r.

192. *Построить треугольник по радиусу (R) описанной окружности, стороне (a) и высоте (h), опущенной на другую сторону.*

Построение (рис. 252). 1) Описываем окружность радиуса R. 2) Из произвольной точки B построенной окружности, как из центра, радиусом, равным отрезку a, проводим дугу до пересечения с окружностью в точке C. 3) Из точки B, как из центра, радиусом, равным h, описываем окружность K_1. 4) Из точки C проводим касательные CT и CT_1 к окружности K_1. Эти касательные пересекут построенную окружность радиуса R в некоторых точках A и A_1.

Соединив отрезками прямой точки A, A_1 и C с точкой B, получим искомые треугольники ABC и A_1BC.

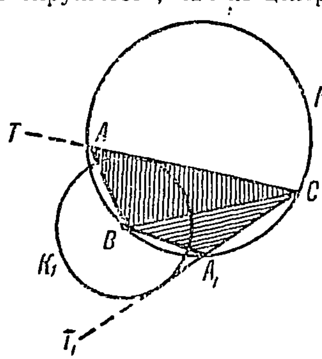


Рис. 252.

Исследование (рис. 252а, б, в). I. Задача имеет решение только в тех случаях, когда высота h искомого треугольника не больше данной его стороны a и в то же время сторона a не больше диаметра данной окружности.

Действительно, если $h > a$, то в этом случае из точки C невозможно будет провести касательные к вспомогательной окружности K_1; так как сторона a треугольника является хордой данной окружности, то ясно, что она (a) не может быть больше диаметра этой же окружности.

Из сказанного вытекает, что рассматриваемая задача имеет решение только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$h \leqslant a \leqslant 2R.$$

II. Если $a < 2R$ и $h = a$, то задача имеет одно решение, причём искомый треугольник будет прямоугольным (рис. 252а).

III. Если $a = 2R$ и $h < a$, то задача имеет одно решение, так как в этом случае искомые треугольники равны (рис. 252б).

IV. При решении задачи (в 4-й операции построения) приходится из точки C проводить касательные к окружности, описанной из точки B, как из центра, радиусом, равным отрезку h.

В том случае, когда $a < 2R$ и $h < a$, задача имеет одно решение, если одна из этих касательных лежит вне данной окружности (рис. 252в) и два решения, если обе эти касательные пересекают данную окружность в двух точках (рис. 252).

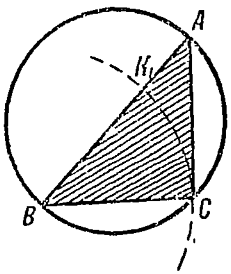


Рис. 252а.

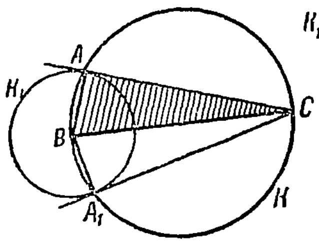


Рис. 252б.

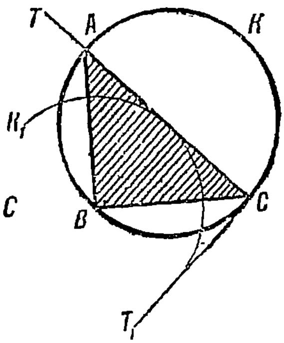


Рис. 252в.

193. *Вписать в данный круг треугольник, если даны основание* (a) *и отношение двух других сторон* ($m:n$).

Построение (рис. 253). 1) Строим в данном круге хорду AB, равную данному основанию искомого треугольника. 2) Соединив отрезками произвольную точку M окружности с точками A и B, мы узнаем, чему равен в искомом треугольнике угол (α) при вершине, противолежащей основанию AB. 3) Строим найденный угол (α) и от его вершины C' откладываем на его сторонах отрезок $C'A'$, равный m, и отрезок $C'B'$, равный n. Треугольник $A'B'C'$ подобен искомому треугольнику. 4) Построив на стороне AB при точке A угол, равный углу $B'A'C'$, получим положение той вершины M искомого треугольника, которая противолежит основанию AB.

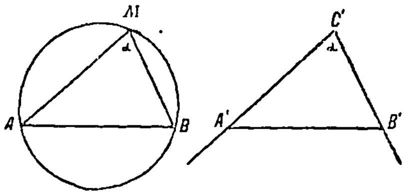


Рис. 253.

Треугольник ABM—искомый.

Исследование. Основание (a) искомого треугольника является хордой данного круга, а потому оно не должно быть больше диаметра. Вершина искомого треугольника может лежать как на дуге AMB, так и на дуге ANB.

Из сказанного вытекает, что в том случае, когда основание (a) искомого треугольника меньше диаметра, задача имеет два решения. Если же основание (a) искомого треугольника равно диаметру, то задача имеет одно решение, так как в этом случае два треугольника, удовлетворяющие условию задачи, равны.

194. *Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и медиана, проведённая к одной из неизвестных сторон.*

Анализ. Положим, что задача решена (рис. 254). На хорде AB, являющейся основанием, можно построить бесчисленное множество треугольников, вписанных в данный круг.

Если из точки A проведём медианы во всех этих вписанных треугольниках, то ясно, что концы этих медиан будут лежать на середине каждой из противолежащих сторон всех треугольников. А так как эти противоположные стороны в данном случае представляют собою не что иное, как хорды, выходящие из точки B, лежащей на данной окружности, то, значит, для всех таких вписанных треугольников геометрическое место концов медиан, выходящих из точки A, есть середины хорд, проведённых из точки B, т. е. окружность, которая имеет радиус вдвое меньший радиуса данной окружности и внутренне касается данной окружности в точке B.

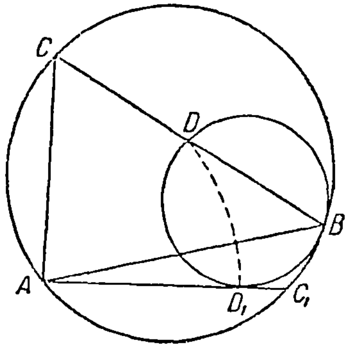


Рис. 254.

Построение. 1) Строим в данном круге хорду AB, равную данному основанию. 2) Строим вспомогательную окружность, которая внутренне касается данной окружности в точке B и имеет радиус вдвое меньший, чем данная окружность. 3) Из точки A, как из центра, радиусом, равным данной медиане, проводим дугу до пересечения со вспомогательной окружностью в точке D. 4) Через точки B и D проводим прямую, которая пересечёт данную окружность в некоторой точке C. Соединив отрезками точку C с точками A и B, получим треугольник ABC. Число возможных решений — 2, 1 и 0.

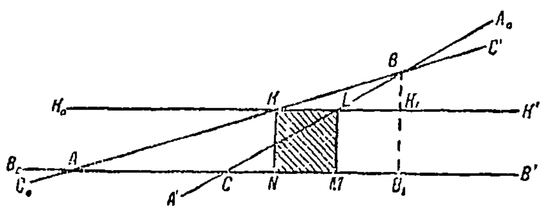


Рис. 255.

195. *Даны три попарно пересекающиеся прямые* (A_0A', B_0B' и C_0C'); *требуется построить квадрат, одна вершина которого находится на одной из данных прямых, другая—на другой, а две остальные вершины—на третьей прямой.*

Анализ. Точку пересечения данных прямых обозначим буквами A, B, C и допустим, что задача решена, причём $KLMN$ (рис. 255) представляет собою искомый квадрат.

Противоположные стороны квадрата параллельны, например $KL \parallel MN$, а отсюда следует, что

$$\triangle ABC \backsim \triangle KBL. \qquad (1)$$

В подобных фигурах отношение сторон равно отношению сходственных линий (высот, медиан и т. д.). Чтобы ввести в рассмотрение высоты этих треугольников (1), опустим из точки B перпендикуляр BB_1 на прямую B_0B' и обозначим буквою K_1 ту точку, в которой отрезок KL (или его продолжение) пересечёт отрезок BB_1.

Далее, обозначив буквою x длину сторон искомого квадрата, можем, в силу (1), написать следующую пропорцию:

$$\frac{AC}{KL}=\frac{BB_1}{BK_1}, \text{ т. е. } \frac{AC}{x}=\frac{BB_1}{BB_1-x}. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2) относительно x, получим

$$AC\cdot BB_1-AC\cdot x=BB_1\cdot x,$$

т. е.

$$AC\cdot BB_1=(AC+BB_1)\,x$$

и

$$x=\frac{AC\cdot BB_1}{AC+BB_1}. \qquad (3)$$

Определив длину отрезка x, можем построить искомый квадрат.

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый формулой (3). 2) Строим прямую K_0K', которая параллельна линии B_0B' и отстоит от неё на расстоянии, равном найденному отрезку x. Проведённая прямая пересечёт линии A_0A' и C_0C' в некоторых точках K и L. 3) Из точек K и L опускаем перпендикуляры KN и LM на прямую B_0B'.

$KLMN$—искомый квадрат.

Исследование. В том случае, когда надо выяснить, сколько различных по величине квадратов удовлетворяют условию задачи, результаты исследования можно представить в виде следующей таблички.

	Какой треугольник образуют данные прямые при пересечении	Число решений
а	Равносторонний	1
б	Равнобедренный	2
в	Прямоугольный	2
г	Разносторонний	3

196. *Построить четырехугольник, если даны его основание ($AB = a$), два прилежащих к нему угла ($\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$) и известно, что три остальные стороны равны между собою.*

Анализ (рис. 256). Если временно отбросим требование условия задачи, состоящее в том, что основание искомого четырёхугольника равно данному отрезку a, то задача станет неопределённой.

Действительно, можно вообразить бесчисленное множество четырёхугольников, подобных данному. Однако, построив какой-нибудь из этих четырёхугольников, сможем построить также искомый четырёхугольник, потому что знаем, чему равно его основание.

Построение четырёхугольника, подобного искомому, легко выполняется методом параллельного перенесения.

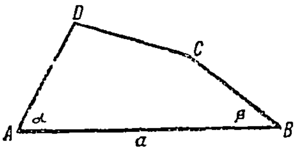


Рис. 256.

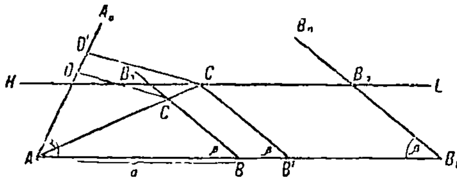


Рис 256а.

Построение (рис. 256а). 1) Строим произвольный отрезок $A'B_1$. 2) На этом отрезке при его точках A' и B_1 строим углы: $A_0A'B_1$, равный α, и B_0B_1A', равный β. 3) На лучах $A'A_0$ и B_1B_0 от точек A' и B_1 откладываем произвольной длины равные отрезки $A'D'$ и B_1B_2. 4) Через точку B_2 проводим прямую KL, параллельную линии $A'B_1$. Из точки D', как из центра, радиусом, равным отрезку $A'D'$, проводим дугу до пересечения с прямой KL в точке C'. 5) Из точки C' проводим прямую, параллельную линии B_1B_2. Проведённая линия пересечет отрезок $A'B_1$ в некоторой точке B'. Четырёхугольник $A'B'C'D'$ подобен искомому четырёхугольнику. 6) На прямой $A'B'$ в направлении к B_1 откладываем отрезок $A'B$, равный a. 7) Из точки B проводим луч BB_3, параллельный линии $B'C'$. 8) Проводим диагональ $A'C'$ вспомогательного четырёхугольника $A'B'C'D'$, которая пересечёт луч BB_3 в некоторой точке C. 9) Из точки C проводим прямую, которая параллельна отрезку $C'D'$. Проведенная линия пересечёт линию A_0A' в некоторой точке D.

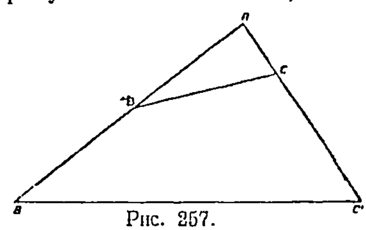


Рис. 257.

$A'BCD$—искомый четырёхугольник.

197. *Построить четырехугольник $ABCD$, если даны его основание ($AB = a$), два прилежащих к нему угла ($\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$) и отношение сторон $BC:CD:DA = m:n:p$,* где *m, n, p—данные отрезки.*

198. *Построить прямоугольный треугольник (ABC), если известна сумма гипотенузы с одним катетом ($BC+AB=m$) и сумма гипотенузы с другим катетом ($BC+AC=n$).*

Анализ. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 257) является искомым. Чтобы ввести в рассмотрение данные отрезки m и n, на продолжении сторон AB и AC от точек B и C отложим отрезки BB' и CC', порознь равные гипотенузе BC. По условию, $AB'=m$ и $AC'=n$. Следовательно, мы можем построить прямоугольный треугольник $AB'C'$ по двум катетам m и n.

Рассматривая четырёхугольник $B'BCC'$, видим, что его сторона $B'C'$ и два прилежащих к ней угла ($\angle B'$ и $\angle C'$) известны. Кроме того, остальные три стороны равны между собою:

$$B'B=BC=CC'.$$

Построив такой четырёхугольник способом, указанным в предыдущей задаче, определим длину гипотенузы BC; получим искомый треугольник ABC.

Построение. 1) Строим прямоугольный треугольник $AB'C'$, катетами которого являются данные отрезки m и n ($AB'=m$, $AC'=n$). 2) На гипотенузе $B'C'$ вспомогательного треугольника $AB'C'$ строим четырёхугольник $B'BCC'$, три остальные стороны которого равны ($B'B=BC=CC'$).

Треугольник ABC—искомый.

199. *Ломаную линию COD, состоящую из двух равных звеньев OC и OD, образующих тупой угол α, надо построить так, чтобы точки C и D находились соответственно на данных параллельных прямых AA' и BB', точка O—на данной секущей EF и отрезок OD был бы перпендикулярен к прямой BB'* (рис. 258).

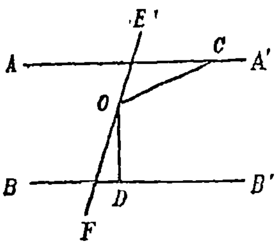


Рис. 258.

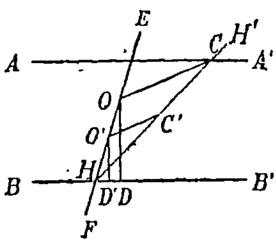


Рис. 258а.

Построение. 1) Из произвольной точки O' отрезка секущей, находящегося между данными параллельными сторонами, опустим перпендикуляр $O'D'$ на прямую BB'. 2) Из точки O' проводим отрезок $O'C'$, равный отрезку $O'D'$ и образующий с ним угол, равный данному углу α. 3) Из точки H, в которой прямая EF пересекает линию BB', проводим луч HH', проходящий через точку C'. Этот луч пересечёт прямую AA' в некоторой точке C. 4) Проводим отрезок OC_1, параллельный отрезку $O'C'$ (точка O лежит на прямой EF). 5) Из точки O опускаем перпендикуляр OD на прямую BB'.

COD — искомая ломаная линия.

200. *Зная, что отношение двух отрезков OC и OD равно $m:n$ и что угол COD равен данному углу α*, построить ломаную линию COD так, чтобы точки C и D находились соответственно на данных параллельных прямых AA' и BB', точка O — на данной секущей EF и отрезок OD образовал с прямой BB' данный угол β.*

Построение. 1) Из произвольной точки O' секущей EF проводим наклонную $O'D'$, которая образует с прямой BB' угол, равный β. 2) Из точки O' проводим отрезок $O'C'$, который образует с отрезком $O'D'$ угол, равный α, и удовлетворяет условию: $O'C':O'D' = m:n$. 3) Из точки H через точку C' проводим луч HH'. Этот луч пересечёт прямую AA' в некоторой точке C_1. 4) Проводим отрезок C_1O_1, параллельный отрезку $O'C'$ (точка O_1 лежит на прямой EF). 5) Из точки O_1 проводим отрезок, параллельный отрезку $O'D'$, до точки D_1, лежащей на прямой BB'.

$C_1O_1D_1$ — искомая ломаная линия.

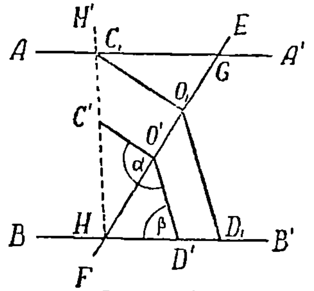


Рис. 258б.

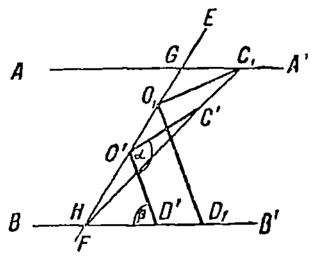


Рис. 258в.

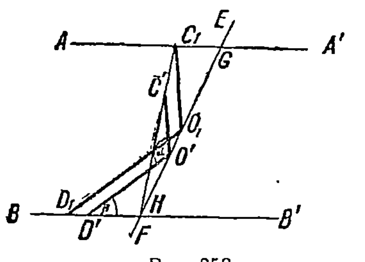


Рис. 258г.

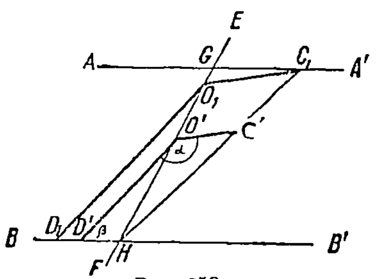


Рис. 258д.

201. *Построить равнобедренную трапецию по диагонали (e), углу (α) и отношению ($m:n$) боковой стороны к основанию.*

Построение (рис. 259). 1) Строим угол SAT, равный данному

---

* При одном и том же значении углов α и β построение может быть выполнено различно, как это видно из рисунков 258б, в, г, д.

углу α. 2) На сторонах угла от точки A отложим отрезки AB' и AD', соответственно равные отрезкам m и n. 3) Из точки B' проводим прямую $B'E'$, параллельную AT. 4) На отрезке AD' при точке D' строим угол $AD'H'$, равный углу α. 5) Прямые $B'E'$ и $D'H'$ пересекутся в некоторой точке C', получим трапецию $AB'C'D'$, подобную искомой. 6) Из точки A проводим луч, проходящий через точку C'. 7) На этом луче от точки A отложим отрезок AC, равный данному отрезку e. 8) Из точки C проводим отрезок, параллельный линии AT, до пересечения с лучом AS в некоторой точке B. 9) Из точки C проводим отрезок, параллельный $C'D'$, до пересечения с прямой AT в некоторой точке D.

$ABCD$ — искомая трапеция.

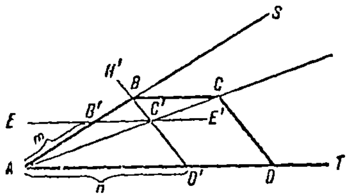


Рис. 259.

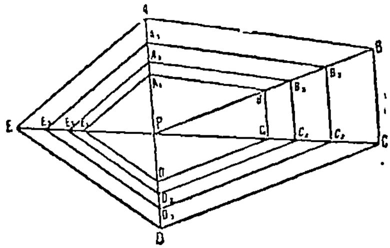


Рис. 260.

202. *Дан пятиугольник ABCDE и внутри его точка P. Приняв точку P за центр подобия, построить такие три пятиугольника, которые своими контурами рассекали бы площадь данного пятиугольника на четыре равные части.*

Анализ. Допустим, что рис. 260 представляет собою решение задачи, т. е.

$$\text{мн. } ABCDE \backsim \text{мн. } A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim \text{мн. } A_2B_2C_2D_2E_2 \backsim \text{мн. } A_3B_3C_3D_3E_3, \quad (1)$$

$$\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1 = \frac{1}{4} \text{ пл. } ABCDE,$$

$$\text{пл. } A_2B_2C_2D_2E_2 = \frac{2}{4} \text{ пл. } ABCDE,$$

$$\text{пл. } A_3B_3C_3D_3E_3 = \frac{3}{4} \text{ пл. } ABCDE. \quad (2)$$

Для построения искомых треугольников достаточно определить отрезки PA_1, PA_2 и PA_3.

Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных отрезков, а потому на основании (1) можем написать следующие пропорции:

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1}{\text{пл. } ABCDE} = \frac{PA_1^2}{PA^2},$$

$$\frac{\text{пл. } A_2B_2C_2D_2E_2}{\text{пл. } ABCDE} = \frac{PA_2^2}{PA^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\text{пл. } A_3B_3C_3D_3E_3}{\text{пл. } ABCDE} = \frac{PA_3^2}{PA^2}.$$

Из (2) и (3) имеем

$$\frac{PA_1^2}{PA^2}=\frac{1}{4},\quad \frac{PA_2^2}{PA^2}=\frac{1}{2},\quad \frac{PA_3^2}{PA^2}=\frac{3}{4},$$

откуда

$$PA_1^2=\frac{1}{4}PA^2,\ PA_2^2=\frac{1}{2}PA^2,\ PA_3^2=\frac{3}{4}PA^2,$$

и, значит,

$$\begin{aligned} PA_1&=\sqrt{\frac{PA}{4}\cdot PA},\\ PA_2&=\sqrt{\frac{PA}{2}\cdot PA},\\ PA_3&=\sqrt{3PA\cdot\frac{PA}{4}}. \end{aligned}\tag{4}$$

Определив отрезки PA_1, PA_2, PA_3, можем построить искомые пятиугольники.

Построение. 1) Отрезками прямой соединяем точку P с вершинами (A, B, C, D, E) данного пятиугольника. 2) Строим отрезки n_1, n_2, n_3, соответственно равные PA_1, PA_2 и PA_3 (как средние геометрические между двумя данными). 3) На отрезке PA от точки P откладываем три отрезка: 1) PA_1, равный n_1, 2) PA_2, равный n_2, и 3) PA_3, равный n_3. 4) Из точки A_1 проводим параллельно AB отрезок до встречи с отрезком PB в некоторой точке B_1; из точки B_1 проводим параллельно BC отрезок до встречи с отрезком PC в некоторой точке C_1, и т. д. Получим первый искомый пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$. 5) Точно так же строим остальные два искомых пятиугольника $A_2B_2C_2D_2E_2$ и $A_3B_3C_3D_3E_3$.

203. *В данный квадрат вписать прямоугольник, вершины которого лежат на четырёх сторонах квадрата и одна сторона в полтора раза больше другой.*

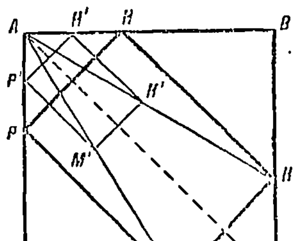


Рис. 261.

Построение (рис. 261). 1) Из точки A, как из центра, произвольным радиусом проводим дугу до пересечения со сторонами AB и AD данного квадрата в некоторых точках H' и P'. 2) Соединяем точки H' и P' отрезком прямой и на полученном отрезке $H'P'$ строим прямоугольник $H'K'M'P'$, в котором сторона $H'K'$ в 1,5 раза больше стороны $H'P'$. 3) Из точки A, как из центра подобия, проводим лучи, проходящие через точки K' и M'. Эти лучи пересекут стороны данного квадрата в точках K и M. 4) Из точек K и M проводим отрезки, параллельные отрезку $H'K'$, до встречи со сторонами квадрата AB и AD в некоторых точках H и P. 5) Соединив отрезками точки H и K, M и P, получим искомый прямоугольник.

204. *В данный ромб $ABCD$ вписать квадрат.*

Построение (рис. 262). 1) Проводим диагонали ромба, которые пересекутся в некоторой точке O, 2) Строим биссектрисы прямых углов AOB, BOC, COD, DOA. 3) Эти биссектрисы пересекут стороны ромба в некоторых точках K, L, M, N.

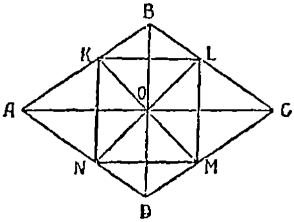


Рис. 262.

Квадрат $KLMN$—искомый.

205. *В каждый из углов данного равностороннего треугольника ABC вписать по одному кругу, из которых больший касается каждого из меньших равных кругов и имеет площадь, вдвое большую суммы их площадей.*

I. Анализ (рис. 263). По условию, площадь большего круга, вписанного в данный равносторонний треугольник, вдвое больше суммы площадей двух других равных между собою кругов, а потому, если обозначим радиус большего круга буквою R, а радиусы меньших кругов буквою r, то придём к такому равенству:

$$\pi R^2 = 2(\pi r^2 + \pi r^2),$$

т. е.

$$\pi R^2 = 4\pi r^2,$$

откуда находим, что

$$r = \frac{R}{2}.$$

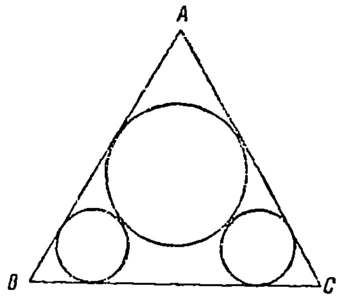


Рис. 263.

Значит, рассматриваемая задача приводится к следующей: в данный равносторонний треугольник вписать три круга, которые внешне касаются один другого и двух сторон треугольника, причём радиус большего круга вдвое больше радиуса каждого из двух остальных кругов.

Построение. (Применение метода подобия.) 1) Строим угол $A_0B'C_0$, равный $60°$, и вписываем в него круг произвольного радиуса R'. 2) Строим два круга, имеющие радиусы, равные $\frac{R'}{2}$, и касающиеся одной из сторон данного угла и построенного большого круга (радиуса R'). 3) К построенным меньшим кругам проводим касательную, которая не пересекает ни их линии центра, ни большого круга (радиуса R'). Эта касательная отсечёт от угла $A_0B'C_0$ равносторонний треугольник $A'B'C'$.

Ясно, что $\triangle A'B'C'$ со вписанными в него кругами представляет собою фигуру, подобную искомой фигуре построения. 4) Так как $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$, то при помощи пропорции

$$AB : A'B' = R : R',$$

три члена которой (AB, $A'B'$ и R') известны, построением определяем радиус R большого круга, вписанного в данный треугольник ABC. 5) Во внутренний угол A данного равностороннего треугольника ABC вписываем круг радиуса R. 6) Строим отрезок r, равный половине отрезка R. 7) Во внутренние углы (B и C) данного равностороннего треугольника ABC вписываем окружности радиуса r.

Построенные три круга являются искомыми.

II. Если применим алгебраический метод для решения рассматриваемой задачи, то найдём, что

$$R\cdot(1{,}5\sqrt{3}+\sqrt{2})=AB,$$

откуда

$$R:AB=1:(1{,}5\sqrt{3}+\sqrt{2}). \qquad (1)$$

Построение. 1) Строим отрезок R, определяемый пропорцией (1). 2) Во внутренний угол A данного треугольника ABC вписываем круг радиуса R. 3) Строим отрезок r, равный $\frac{R}{2}$. 4) Во внутренние углы B и C данного треугольника ABC вписываем круги радиуса r.

Эти три вписанных круга являются искомыми.

205а. *Решить предыдущую задачу (методом подобия) для того случая, когда данный треугольник является равнобедренным.*

206. *Дан равносторонний треугольник ABC* (рис. 264). *Построить прямолинейный отрезок (MN), который перпендикулярен к AC и имеет один конец M на стороне AB, чтобы имело место следующее равенство: $BM=AN$.*

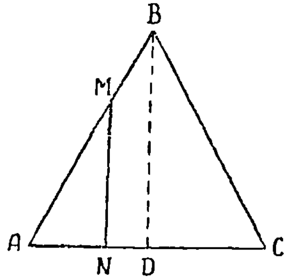


Рис. 264.

Анализ. Обозначим буквою a длину стороны данного треугольника ABC и опустим из вершины B перпендикуляр на основание AC.

Так как $MN \parallel BD$, то

$$\triangle AMN \backsim \triangle ABD,$$

и потому

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AD}. \qquad (1)$$

Если обозначим отрезок AN через x, то равенство (1) перепишем так:

$$\frac{a-x}{x}=\frac{a}{\frac{a}{2}},$$

или

$$\frac{a-x}{x}=2,$$

откуда

$$a-x=2x \text{ и } x=\frac{a}{3}. \qquad (2)$$

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый формулой (2). 2) На сторонах AB и AC от точек B и A отложим отрезки BM и AN, равные найденному отрезку x. 3) Соединяем отрезком точки M и N.

Отрезок MN — искомый

207. *В данный равносторонний треугольник* (ABC) *вписать другой равносторонний треугольник* ($A_1B_1C_1$), *вершины которого находились бы на сторонах данного, причём стороны одного были бы перпендикулярны к сторонам другого* (рис. 264а).

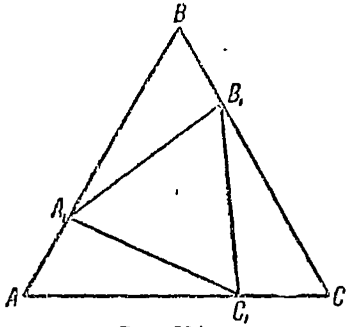


Рис. 264а.

Анализ. 1-й способ. Если мысленно обходя периметр треугольника, на его сторонах AB, BC и CA отложим от вершин A, B, C равные отрезки

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 \qquad (1)$$

и соединим отрезками точки A_1, B_1, C_1, то получим равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$.

Равенство сторон A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 следует из равенства треугольников A_1BB_1, B_1CC_1 и A_1AC_1.

Если станем изменять положение точек A_1, B_1, C_1 на сторонах данного треугольника ABC, то будет изменяться и угол α, образуемый сторонами A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 со сторонами AB, BC, CA.

Из сказанного вытекает, что и в том случае, когда угол α равен 90°, должно иметь место равенство (1).

Следовательно, рассматриваемая задача сводится к предыдущей.

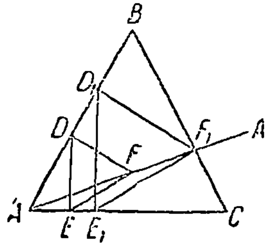


Рис. 264б.

2-й способ. 1) Из произвольной точки D (рис. 264б) стороны AB опустим перпендикуляр DE на сторону AC. 2) На отрезке DE строим равносторонний треугольник DEF. 3) Из точки A, как из центра подобия, проводим луч AA' через точку F, который пересечёт сторону BC в некоторой точке F_1. 4) Из точки F_1 опустим перпендикуляр F_1D_1 на сторону AB. 5) Из точки F_1, как из центра, радиусом, равным D_1F_1 засекаем точку E_1 на стороне AC. Соединим отрезком точки F_1 и E_1, D_1 и E_1.

Треугольник $F_1D_1E_1$ — искомый.

208. *Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы две вершины его лежали на основании треугольника, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника.*

Построение (рис. 265). 1) Из какой-нибудь точки D боковой стороны AB данного треугольника ABC опустим перпендикуляр DG на основание AC треугольника. 2) На прямой AC от точки G отложим отрезок GF, равный DG. 3) Из точек D и F, как из центров, опишем дуги радиусами, равными DG. Эти дуги пересекутся в некоторой точке E. D, E, F, G — вершины квадрата. 4) Выбирая точку A за центр подобия, через точки A и E проведём прямую до пересечения со стороной BC в некоторой точке H. H — есть одна из вершин искомого вписанного квадрата. 5) Опустив из точки H перпендикуляр HK на сторону AC, получим ещё одну вершину K того же квадрата. 6) Из точек K и H, как из центров, радиусами, равными HK, проводим дуги до пересечения в точках L и M со сторонами AC и AB. 7) Соединяем отрезками точку M с точками H и L.

$KLMH$ — искомый квадрат.

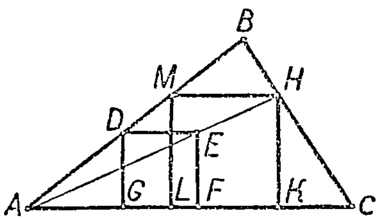


Рис. 265.

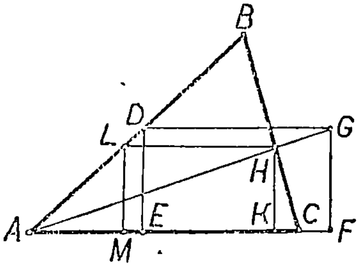


Рис. 266.

209. *В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого стороны относились бы, как $m:n$.*

Построение (рис. 266). 1) Из произвольной точки D, взятой на стороне AB, опускаем перпендикуляр DE на сторону AC. 2) На прямой AC от точки E откладываем отрезок EF, определяемый из следующей пропорции:

$$DE:EF = m:n,$$

три члена которой (DE, m, n) нам известны. 3) Чертим дуги: около точки D, как центра, радиусом, равным EF, и около точки F, как центра, радиусом, равным DE. Точку пересечения этих дуг обозначим буквою G. 4) Точка H, в которой прямая AG пересекает сторону BC, есть одна из вершин искомого вписанного прямоугольника. 5) Из точки H опускаем перпендикуляр HK на сторону AC. 6) Проводим до встречи со стороной AB отрезок HL, параллельный AC. 7) На прямой AC в направлении A откладываем отрезок KM, равный HL.

Прямоугольник $LHKM$ — искомый.

210. *Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы его две вершины лежали на хорде, а две другие — на дуге сегмента.*

Построение (рис. 267). 1) Находим точку M, являющуюся серединою хорды HP. 2) На прямой HP по одну и другую сторону от точки M откладываем какие-нибудь равные отрезки MA и MB. 3) На отрезке AB строим квадрат $ABCD$. 4) Соединяем отрезками точку M с точками C и D. Отрезки CM и DM пересекут дугу сегмента в некоторых точках C_1 и D_1. 5) Из точек C_1 и D_1 опускаем перпендикуляры C_1B_1 и D_1A_1 на отрезок HP. 6) Соединив отрезком точки C_1 и D_1, получим искомый квадрат $A_1B_1C_1D_1$.

211. *Дана трапеция $ABCD$* (рис. 268). *Требуется построить такую подобную ей трапецию, три стороны которой проходили бы через данные точки: K, M, P.*

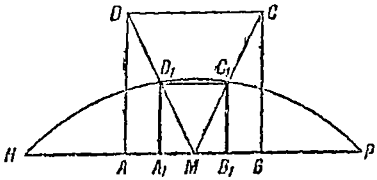


Рис 267

Построение. 1-й способ. 1) Через точку K проводим прямую K_1K_2, параллельную стороне AB. 2) Через точку P проводим прямую P_1P_2, параллельную стороне CD. 3) Через точку M проводим прямую M_1M_2, параллельную стороне BC. 4) Пересечение прямых K_1K_2 и M_1M_2 обозначим буквою B_1. 5) Пересечение прямых P_1P_2 и M_1M_2 обозначим буквою C_1. 6) Проведем две прямые, из которых первая проходит через точки B и B_1, а вторая—через точки C и C_1. 7) Точку O пересечения прямых BB_1 и CC_1 примем за центр гомотетии. 8) Прямая, проведённая через точки O и A, пересечёт линию K_1K_2 в точке A_1, сходственной точке A. 9) Прямая, проходящая через точки O и D, пересечёт прямую P_1P_2 в точке D_1, сходственной точке D. 10) Соединив отрезками точки A_1 и D_1, получим трапецию, подобную данной.

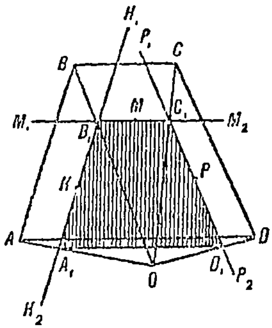


Рис. 268.

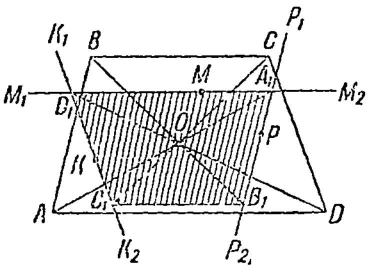


Рис. 268а.

2-й способ (рис. 268а). 1) Через точку K проводим прямую K_1K_2, параллельную стороне CD. 2) Через точку P проводим прямую P_1P_2, параллельную стороне AB. 3) Через точку M проводим прямую M_1M_2, параллельную стороне BC. 4) Пересечение прямых K_1K_2 и M_1M_2 обозначим буквою D_1; пересечение прямых P_1P_2 и M_1M_2 обозначим буквою A_1. 5) Соединяем отрезками вершины равных углов D_1 и D, а также A_1 и A. Эти линии пересекутся в некоторой точке O, которую примем за центр гомотетии. 6) Из точки B через точку O проводим луч до пересечения с линией P_1P_2 в некоторой точке B_1. 7) Из точки C через точку O проводим луч до пересечения с линией K_1K_2 в некоторой точке C_1. 8) Соединив точки B_1 и C_1, получим искомую трапецию $A_1B_1C_1D_1$.

3-й способ (рис. 268б). 1) Через точки K, M и P проводим прямые K_1K_2, M_1M_2 и P_1P_2, соответственно параллельные сторонам BC, AB и CD. 2) Точки пересечения прямой K_1K_2 с прямыми M_1M_2 и P_1P_2 обозначим соответственно буквами A_1 и D_1. 3) Через сходственные вершины A и A_1, а также через D и D_1 проводим прямые, которые пересекутся в некоторой точке O. 4) Приняв точку O за центр гомотетии, соединяем эту точку с вершинами B и C. Отрезки OB и OC пересекут прямые M_1M_2 и P_1P_2 соответственно в некоторых точках B_1 и C_1. 5) Соединив отрезком точки B_1 и C_1, получим искомую трапецию $A_1B_1C_1D_1$.

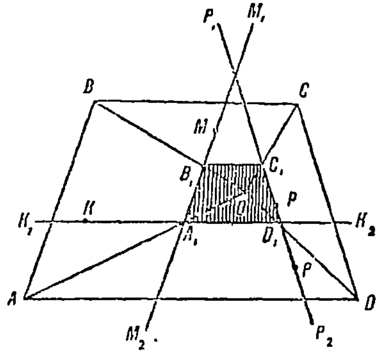


Рис. 268б.

Исследование. При построении трапеции, подобной данной трапеции $ABCD$, методом подобного преобразования возможны следующие случаи расположения прямых, проходящих через данные точки K, M, P:

I. $K_1K_2 \parallel AB$, $M_1M_2 \parallel BC$, $P_1P_2 \parallel CD$ (рис. 268).

II. $K_1K_2 \parallel AB$, $M_1M_2 \parallel CD$, $P_1P_2 \parallel BC$.

III. $K_1K_2 \parallel BC$, $M_1M_2 \parallel CD$, $P_1P_2 \parallel AB$.

IV. $K_1K_2 \parallel BC$, $M_1M_2 \parallel AB$, $P_1P_2 \parallel CD$ (рис. 268 б).

V. $K_1K_2 \parallel CD$, $M_1M_2 \parallel AB$, $P_1P_2 \parallel BC$.

VI. $K_1K_2 \parallel CD$, $M_1M_2 \parallel BC$, $P_1P_2 \parallel AB$ (рис. 268 а).

Таким образом, рассматриваемая задача может иметь не больше шести решений.

212. *Дана трапеция $ABCD$ и требуется построить подобную ей трапецию, у которой сторона, сходственная стороне BC, равна отрезку b.*

Построение (рис. 268в).

I. За центр гомотетии принимаем точку B.

1) На прямой BC от точки B в направлении C отложим отрезок BC_1, равный b. 2) Из точки B проводим луч, проходящий через точку D. 3) Из точки C_1 проводим отрезок, параллельный стороне CD до встречи с лучом BD в некоторой точке D_1. 4) Из точки D_1 проводим луч, параллельный стороне AD до пересечения со стороной AB или с её продолжением в некоторой точке A_1.

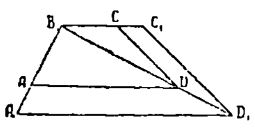


Рис. 268в.

$A_1BC_1D_1$ — искомая трапеция.

II. За центр гомотетии принимаем любую точку (O).

1) Проводим лучи OA, OB, OC, OD (рис. 268г). 2) В угол BOC вписываем отрезок B_1C_1, равный b и параллельный стороне BC. 3) Из точки C_1 проводим отрезок, параллельный отрезку CD, до встречи с лучом OD в некоторой точке D_1. 4) Аналогично предыдущему построению проводим $D_1A_1 \parallel DA$. 5) Соединяем отрезками прямой точки A_1 и B_1.

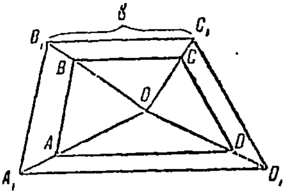


Рис. 268г.

Получим искомую трапецию $A_1B_1C_1D_1$.

213. *Построить сегмент с дугой 90° так, чтобы в него можно было вписать треугольник, вершина которого находится на дуге, основание равно основанию сегмента, угол при основании равен 30° и периметр равен данному отрезку M_1N_1.*

Анализ (рис. 269). Если построим такой сегмент, дуга которого равна 90°, и соответственно условию впишем в него треугольник $A_1B_1C_1$, один из углов которого равен 30°, то получим фигуру, подобную искомой. Затем из подобия фигур определим величину основания сегмента. Оно, очевидно, будет стороной квадрата, вписанного в тот круг, частью которого является искомый сегмент.

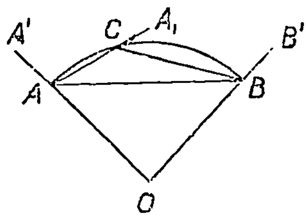


Рис. 269.

Построение. 1) Строим прямой угол $A'OB'$; из его вершины O, как из центра, произвольным радиусом чертим дугу AB, заключённую между сторонами этого угла, и соединяем отрезком точки A и B. Получим сегмент, дуга которого равна 90°. 2) На основании AB сегмента, при точке A, строим угол BAA_1, равный 30°. Сторона AA_1 пересечёт дугу сегмента в некоторой точке C. Соединив отрезком точки C и B, получим треугольник ABC. 3) Определяем длину MN периметра треугольника ABC ($AB+BC+CA=MN$). 4) Обозначая через A_1B_1 длину основания искомого сегмента, получим $MN:M_1N_1=AB:A_1B_1$, откуда известным построением найдём длину отрезка A_1B_1. 5) На отрезке A_1B_1, как на гипотенузе, строим равнобедренный прямоугольный $\triangle A_1B_1O_1$. 6) Из точки O_1, как центра, радиусом, равным O_1A_1, проводим дугу между точками A_1 и B_1.

Построенный сегмент—искомый.

214. *В окружности (O, R) даны два радиуса. Построить хорду, делящуюся этими радиусами на три равные части.*

Примечание. Если даны два радиуса, то, значит, дан и образуемый ими угол α.

Анализ. Допустим, что рисунок 270 представляет собою решение данной задачи, т. е. $CD=DE=EF$.

Ясно, что треугольник ODE—равнобедренный и имеет при вершине угол, равный α. Можно построить треугольник $O_1D_1E_1$, подобный треугольнику ODE. Затем, продолжив сторону D_1E_1 в одну и другую сторону и отложив на ней отрезки C_1D_1 и E_1F_1, порознь равные отрезку D_1E_1, из точки O_1, как из центра, радиусом, равным O_1C_1, опишем окружность. Получим чертёж, подобный тому, который должен представлять собою искомое решение.

Построение. 1) Строим какой-нибудь равнобедренный треугольник $O_1D_1E_1$, имеющий при вершине угол, равный α. 2) Продолжаем отрезок D_1E_1 в обе стороны и на его продолжениях откладываем отрезки D_1C_1 и E_1F_1, порознь равные отрезку D_1E_1. 3) Около точки O, как центра, радиусом, равным O_1C_1, описываем окружность и продолжаем отрезки O_1D_1 и O_1E_1 до пересечения с окружностью в некоторых точках A_1 и B_1. Мы получим чертёж, который во всех своих частях должен быть подобен чертежу, представляющему собою решение задачи. 4) Из центра O данной окружности проводим под произвольным углом полупрямую OL и на ней строим прилежащие отрезки OH и HK, соответственно равные отрезкам O_1E_1 и E_1B_1. 5) Соединив отрезком точки B и K, проводим через точку H отрезок, параллельный отрезку BK, до встречи с радиусом OB в некоторой точке E. 6) Из точки O, как центра, радиусом, равным OE, засекаем на радиусе OA точку D. Хорда CF, которая проходит через точки D и E,—искомая.

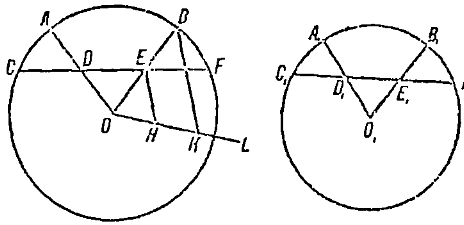


Рис. 270.

215. *Около данного квадрата $ABCD$ описать треугольник, подобный данному треугольнику KLM.*

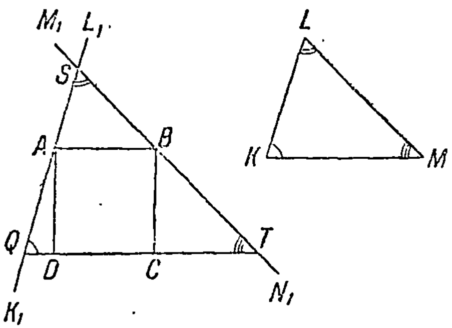


Рис. 271.

Построение (рис. 271). 1) Сторону квадрата DC продолжим в обе стороны. 2) Через точку A проводим прямую K_1L_1, образующую с прямой DC угол, равный углу LKM. 3) Через точку B проводим прямую, образующую с прямой DC угол, равный углу LMK.

Точки пересечения прямых DC, K_1L_1 и M_1N_1 обозначим буквами Q, S и T.

$\triangle\, QST$—искомый.

216. *В данный сектор OAB вписать квадрат, две вершины которого находятся на дуге данного сектора, а две другие — на радиусах, ограничивающих сектор* (рис. 272).

Решение. Превратим предложенную задачу в обратную: „Около квадрата описать сектор, подобный данному, причём так, чтобы дуга сектора прошла через две вершины квадрата, а радиусы, ограничивающие сектор, — через две другие вершины квадрата".

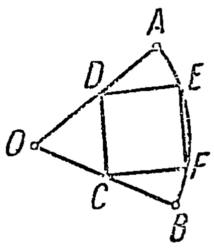


Рис. 272.

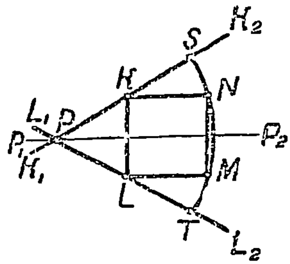


Рис. 273.

I. Построение (рис. 273). 1) Строим какой-нибудь квадрат $KLMN$. 2) Проводим прямую P_1P_2 через середины двух противоположных сторон квадрата KL и MN. 3) Через точку K проводим прямую K_1K_2, образующую с прямой P_1P_2 угол K_2PP_2, равный половине угла данного сектора, т. е.

$$\angle K_2PP_2 = \frac{\angle AOB}{2}.$$

4) Проводим прямую L_1L_2 через точки P и L. 5) Около точки P, как центра, радиусом, равным PN, чертим дугу ST между сторонами угла K_2PL_2. Обратная задача решена: сектор PST подобен данному сектору OAB и описан около квадрата.

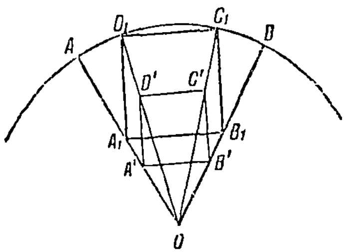


Рис. 274.

Чтобы перейти к решению прямой задачи, рассуждаем так: в каком отношении точка L рассекает радиус PT сектора PST, в таком же отношении вершина C квадрата, вписанного в сектор OAB, рассечёт сторону OB.

Отсюда ясно, как можно выполнить построение, требуемое в прямой задаче. 1) Сторону OB данного сектора делим в отношении $PL:LT$, т. е. находим такую точку C, чтобы $OC:CB = PL:LT$. 2) Из точки O, как центра, радиусом, равным отрезку OC, засекаем точку D на втором радиусе OA. 3) Соединив отрезком точки C и D, получим сторону квадрата, вписанного в сектор OAB. 4) На отрезке CD строим искомый квадрат $CDEF$.

II. Построение (рис. 274). 1) Из точки O, как центра, произвольным радиусом, который меньше отрезка AO, засекаем точки A' и B' на радиусах, ограничивающих сектор. 2) Соединяем точки A' и B' и на полученном отрезке $A'B'$ строим квадрат $A'B'C'D'$. 3) Из точки O, как центра, проводим лучи через точки C' и D'. Эти лучи пересекут дугу AB в некоторых точках C_1 и D_1. 4) Соединив отрезком точки C_1 и D_1, проводим отрезки: $C_1B_1 \parallel C'B'$ и $D_1A_1 \parallel D'A'$ до пересечения с радиусами OB и OA в точках B_1 и A_1. Соединяем отрезком точки A_1 и B_1.

Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$—искомый квадрат.

217. *Построить равнобедренную трапецию по двум основаниям (b и d) при условии, что в неё можно вписать окружность.*

Анализ. Допустим, что задача решена и чертёж 275 представляет собою искомую трапецию $ABCD$. Если буквами K, L, M, N обозначим точки, в которых стороны трапеции касаются круга, то получим, что

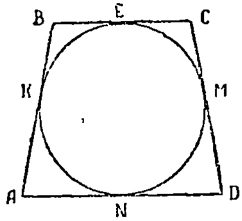


Рис 275.

$$AK = AN = \frac{AD}{2} = \frac{d}{2},$$

$$KB = BL = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2},$$

откуда

$$AB = AK + KB = \frac{b+d}{2}.$$

Следовательно, решение рассматриваемой задачи приводится к построению трапеции, четыре стороны которой нам известны (см. § 11, задача III):

$$AD = d,\ BC = b,$$

$$AB = CD = \frac{b+d}{2}.$$

218. *Дана окружность и на ней две точки A и B. Найти на этой окружности третью точку C, чтобы расстояния её от A и B находились в данном отношении ($m:n$).*

Анализ. 1-й способ. Допустим, что задача решена (рис. 276). Соединив точки A, B, C, получим треугольник ABC, в котором $AC:CB = m:n$. Согласно теореме, в некоторой точке D биссектриса угла ACB рассекает сторону AB в отношении $m:n$.

Но биссектриса угла ACB непременно проходит и через точку E, являющейся серединой дуги AKB, на которую опирается угол ACB.

Следовательно, прямая, проходящая через точки D и E, пересечёт окружность в искомой точке.

Построение. 1) Соединим отрезком точки A и B. 2) Найдём точку D, которая делит отрезок AB в отношении $m:n$. 3) Проведём через середину M отрезка AB прямую, перпендикулярную к этому отрезку. Этот перпендикуляр пересечёт дуги AKB и ALB в некоторых точках E и F. 4) Прямая, проходящая через точки E и D, пересечёт дугу BF в искомой точке C. 5) Прямая, проходящая через точки F и D, пересечёт дугу AKB в некоторой точке G, и, значит, $AG:GB = m:n$.

Точки C и G—искомые.

Итак, задача имеет два решения.

219. *Построить отрезок x, который относился бы к данному отрезку m, как $a^2:b^2$ (a и b—данные отрезки прямой).*

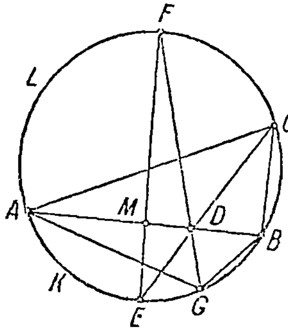


Рис. 276.

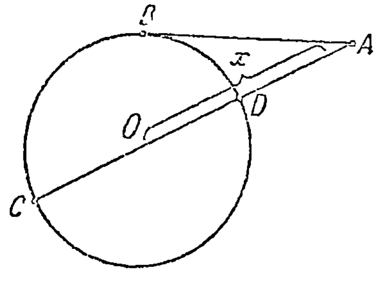


Рис. 277.

Анализ. Нам надо определить x из следующей пропорции:

$$x:m = a^2:b^2.$$

Можно этой пропорции придать такой вид: $b:a = a:\left(\frac{bx}{m}\right)$, а затем определить $\frac{bx}{m}$ известным построением, как четвёртую пропорциональную величину по трём данным.

Когда найдём, что $\frac{bx}{m}$ равняется некоторому отрезку s, т. е. $\frac{bx}{m} = s$, то сможем написать такую пропорцию:

$$b:s = m:x$$

и аналогичным построением определить x.

220. *Найти вне данного круга такую точку, чтобы касательная, проведённая из неё к этой окружности, была вдвое меньше секущей, проведённой из той же точки через центр.*

Анализ (рис. 277). Обозначим буквою x расстояние искомой точки от центра O окружности. Как известно,

$$AB^2 = DA \cdot AC, \qquad (1)$$

но

$$DA = x - r, \qquad (2)$$

$$AC = x + r, \qquad (3)$$

и, значит,

$$AB^2 = (x - r)(x + r) = x^2 - r^2 \text{ и } AB = \sqrt{x^2 - r^2}. \qquad (4)$$

Так как, по условию, $AC=2AB$, то из (3) и (4) имеем:

$$x+r=2\sqrt{x^2-r^2},$$

откуда

$$x^2+2rx+r^2=4x^2-4r^2$$

или

$$3x^2-2rx-5r^2=0.$$

Следовательно,

$$x=\frac{1}{3}(r\pm\sqrt{r^2+15r^2})=\frac{1}{3}(r\pm 4r),$$

т. е.

$$x_1=\frac{5}{3}r \tag{5}$$

и

$$x_2=-r. \tag{5'}$$

В данной задаче x не может быть отрицательной величиной, а потому второй корень (5′) отбрасываем.

Построение. Продолжим один из диаметров (CD) данной окружности и на нём отложим от точки D отрезок DA, равный

$$\frac{2}{3}r\left(DA=AO-OD=\frac{5}{3}r-r=\frac{2}{3}r\right). \tag{6}$$

Точка A — искомая.

Доказательство. $AC=x+r=\frac{5}{3}r+r$, т. е.

$$AC=\frac{8}{3}r. \tag{7}$$

Из (1), (6) и (7) находим:

$$AB=\sqrt{DA\cdot AC}=\sqrt{\frac{2}{3}r\cdot\frac{8}{3}r}=\frac{4}{3}r=\frac{AC}{2},$$

что и подтверждает правильность сделанного построения.

221. *Дана окружность* (O, R). *Требуется построить геометрическое место точек, которые относительно этой окружности являются внешними и имеют степень, равную* m^2.

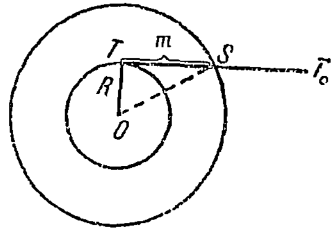


Рис. 278.

Анализ (рис. 278). По определению, степень точки, внешней относительно окружности, равна квадрату отрезка касательной, проведённой из этой точки к окружности. Поэтому, если из точки T, произвольно взятой на данной окружности, проведём касательную TT_0 и отложим на ней от точки T отрезок TS, равный m, то окажется, что точка S имеет относительно данной окружности степень m^2.

Если из точки O, как центра, радиусом, равным отрезку OS, опишем окружность, то она и представляет собою искомое геометрическое место точек.

Отрезок OS является гипотенузою прямоугольного треугольника OST, а потому

$$OS^2 = OT^2 + TS^2,$$

т. е.

$$OS^2 = R^2 + m^2$$

и

$$OS = \sqrt{R^2 + m^2}. \qquad (*)$$

Построение. 1. Строим отрезок x, определяемый формулой (*):

$$x = \sqrt{R^2 + m^2}.$$

2) Из точки O, как центра, радиусом, равным найденному отрезку x, описываем искомую окружность.

222. *Дана окружность* (O, R) *и требуется определить геометрическое место внутренних точек, степень которых относительно данной окружности (по абсолютной величине) равна* n^2.

Анализ (рис. 279). По определению, абсолютная величина степени точки P, находящейся внутри окружности, равна квадрату половины той хорды (AB), которая проходит через точку P и перпендикулярна к отрезку (PO), соединяющему точку P с центром окружности. Ясно, что расстояние (d) точки P от центра равно катету OP прямоугольного треугольника AOP, а именно:

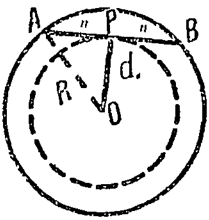


Рис. 279.

$$d = OP = \sqrt{AO^2 - AP^2},$$

т. е.

$$d = \sqrt{R^2 - n^2}. \qquad (1)$$

Построение. 1) Строим отрезок y, определяемый формулой (1):

$$y = \sqrt{R^2 - n^2}.$$

2) Из точки O, как центра, радиусом, равным найденному отрезку y, описываем окружность, которая и является искомым геометрическим местом точек.

Из формулы (1) видно, что задача не имеет решения лишь в том случае, когда $n > R$.

223. *Даны две точки* M *и* N. *Требуется так построить окружность радиуса* R, *чтобы эти точки были внешними относительно искомой окружности и степени их были равны соответственно* m^2 *и* n^2.

Анализ (рис. 280). Допустим, что чертёж представляет собою решение, причём точка O является центром искомой окружности.

Если из точек M и N проведём касательные MM_1 и NN_1 к искомой окружности и соединим её центр с точками M, M_1, N, N_1, то получим прямоугольные треугольники MM_1O и NN_1O, и, значит,

$$OM^2 = OM_1^2 + MM_1^2,$$

$$ON^2 = ON_1^2 + NN_1^2,$$

т. е.

$$OM^2 = R^2 + m^2$$

и

$$ON^2 = R^2 + n^2.$$

Отсюда имеем:

$$OM = \sqrt{R^2 + m^2}, \qquad (1)$$

$$ON = \sqrt{R^2 + n^2}. \qquad (2)$$

Зная, на каком расстоянии центр искомой окружности отстоит от каждой из данных точек M и N, можем определить положение этого центра.

Построение. 1) Строим отрезок OM, определяемый формулой (1). 2) Строим отрезок ON, определяемый формулой (2). 3) Из точки M, как центра, радиусом, равным найденному отрезку OM, описываем окружность K_1. 4) Из точки N, как центра, радиусом, равным найденному отрезку ON, описываем окружность K_2. 5) Обозначим буквами O_1 и O_2 точки пересечения окружностей K_1 и K_2. 6) Из точек O_1 и O_2, как центров, радиусами, равными R, описываем искомые окружности.

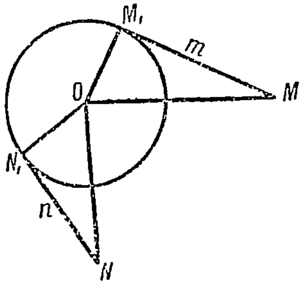


Рис. 280.

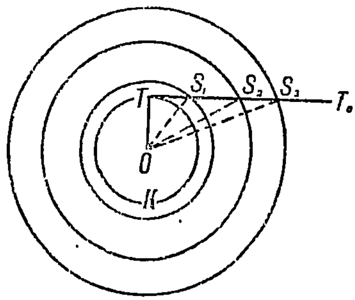


Рис. 281.

224. *Построить геометрическое место тех точек, степень которых относительно данной окружности (O, R) равна соответственно m^2, n^2 и p^2, где m, n, p — данные отрезки.*

Построение. 1) Из произвольной точки T (рис. 281) данной окружности K проводим луч TT_0, касающийся этой окружности. 2) На касательной TT_0 от точки T откладываем отрезки TS_1, TS_2, TS_3, соответственно равные отрезкам m, n, p. 3) Из точки O, как центра, радиусами, равными OS_1, OS_2 и OS_3, описываем окружности K_1, K_2, K_3, являющиеся искомыми геометрическими местами точек, степени которых относительно окружности соответственно равны m^2, n^2, p^2.

225. *Дана окружность (O, R) и требуется построить геометрическое место тех точек, которые являются внутренними и имеют степени, равные (по абсолютной величине) m^2, n^2, p^2.*

Построение. 1) В данной окружности проводим два взаимно перпендикулярных радиуса OA и OB (рис. 282). 2) На радиусе OA от точки O откладываем отрезки OM, ON, OP, соответственно равные отрезкам m, n, p. 3) Из точек M, N, P проводим лучи, параллельные радиусу OB. Эти лучи пересекут данную окружность в некоторых точках M_1, N_1, P_1. 4) Из точки O, как центра, радиусами, равными MM_1, NN_1, PP_1, описываем окружности K_1, K_2, K_3. Построенные три окружности (K_1, K_2, K_3) являются искомыми геометрическими местами внутренних точек, степени которых (по абсолютной величине) равны соответственно m^2, n^2, p^2.

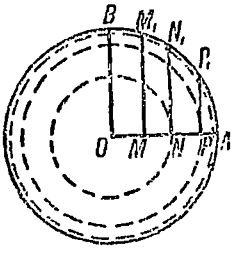


Рис. 282.

226. *Дана окружность (O, R) и пересекающая её прямая KL. Построить на прямой KL две точки: внешнюю относительно окружности, имеющую степень m^2, и внутреннюю, степень которой (по абсолютной величине) равна n^2.*

Примечание. На прямой KL всегда найдём две внешних точки, удовлетворяющие условию задачи. Что касается искомых внутренних точек, то их может быть две (рис. 283а), одна (рис. 283б) и ни одной (рис. 283в), если $n > R$.

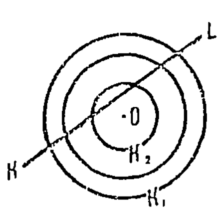


Рис. 283а.

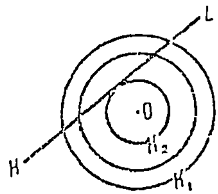


Рис. 283б.

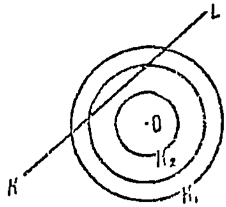


Рис. 283в.

227. *Даны две окружности (O_1, R_1) и (O_2, R_2). Требуется определить точку, которая является внешней для каждой из них, причём её степень относительно этих окружностей равна соответственно m^2 и n^2, где m и n — данные отрезки.*

Построение. 1) Строим окружность K_1, представляющую собою геометрическое место внешних точек, степень которых относительно окружности (O_1, R_1) равна m^2 (рис. 284). 2) Строим окружность K_2, которая является геометрическим местом внешних точек, имеющих относительно окружности (O_2, R_2) степень, равную n^2.

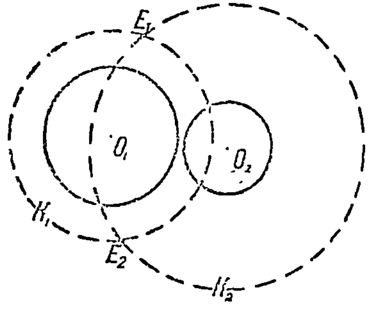


Рис. 284.

3) Определяем точки (E_1 и E_2) пересечения окружностей K_1 и K_2. E_1 и E_2—искомые точки.

Исследование.

Конфигурация окружностей K_1 и K_2	Число решений
Пересекаются	2
Касаются одна другой	1
Одна лежит вне другой (и не касается)	0

228. *Дана окружность* (O, R) *и требуется построить равносторонний треугольник* ABC, *в котором вершина* A *принадлежит данной окружности, вершины* B *и* C *являются соответственно внешней и внутренней точками, степень которых относительно данной окружности* m^2 *и* n^2.

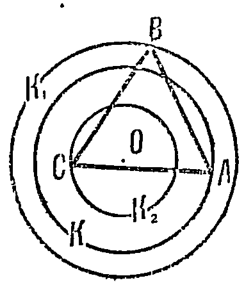


Рис. 285.

Построение (рис. 285). 1) Строим окружность K_1, являющуюся геометрическим местом точек, внешних относительно данной окружности и имеющих степень m^2. 2) Строим окружность K_2, являющуюся геометрическим местом точек, внутренних относительно данной окружности и имеющих степень, равную (по абсолютной величине) n^2. 3) Строим такой равносторонний треугольник ABC, одна вершина которого (A) находится на данной окружности, другая—на окружности K_1 и третья—на окружности K_2.

229. *В данном круге на хорде* DE, *как на основании, построить треугольник, площадь которого равна* s^2, *а третья вершина является внешней точкой, степень которой относительно данной окружности равна* n^2.

Построение (рис. 286). 1) Обозначив буквою h высоту искомого треугольника, получим:

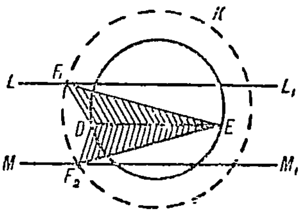


Рис. 286.

$$\frac{DE \cdot h}{2} = s^2$$

и, значит,

$$\frac{DE}{2} : s = s : h.$$

Строим отрезок h, определяемый этой пропорцией. 2) Проводим прямые LL_1 и MM_1, параллельные хорде DE и отстоящие от неё на расстоянии h. 3) Строим окружность K, представляющую собою геометрическое место точек, степень которых относительно данной окружности равна n^2. 4) Точки (F_1, F_2, . . .), в которых окружность K пересекает линии LL_1 и MM_1, соединяем с точками D и E.

Полученные треугольники являются искомыми.

Исследование. Если для краткости записи буквами h_1 и h_2 обозначим соответственно длины высот тех круговых сегментов, на которые круг K рассекается прямою, проходящей через точки D и E, и примем во внимание, что при определении числа искомых треугольников в данной задаче все равные треугольники, удовлетворяющие условию задачи, считаются одним решением, то результаты исследования можно представить такой табличкой.

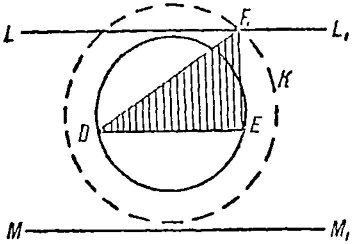


Рис. 287.

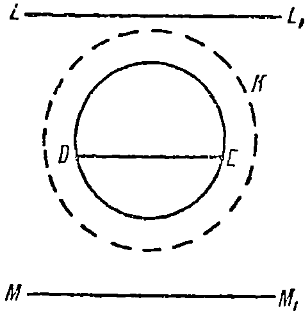


Рис 287а.

	Соотношение величин h, h_1, h_2	Сколько треугольников удовлетворяет условию задачи	Сколько решений имеет задача	Примечание
I	$h < h_1$, $h < h_2$	4	2	См. рис. 286
II	$h < h_1$, $h = h_2$	3	2	
III	$h_1 = h = h_2$	2	1	
IV	$h < h_1$, $h > h_2$	2	1	См. рис 287
V	$h > h_1$, $h = h_2$	1	1	
VI	$h > h_1$, $h > h_2$	0	0	См. рис. 287а

230. *В данном круге на хорде DE, как на основании, построить треугольник, площадь которого равна s^2, а вершина является внутренней точкой, степень которой относительно окружности (по абсолютной величине) равна m^2.*

Примечание. Ход решения такой же, как и в предыдущей задаче.

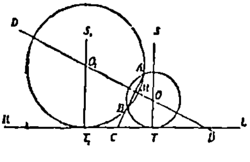


Рис. 288.

231. *Через две данные точки A и B* (рис. 288) *провести окружность, касающуюся данной прямой KL.*

Анализ. Искомая окружность должна пройти через точки A и B. Следовательно, центр этой окружности находится где-то на прямой DD', которая проходит через середину M

отрезка AB и перпендикулярна к этому отрезку. Для определения положения точки T, в которой искомая окружность касается прямой KL, поступаем следующим образом. Продолжаем отрезок AB до пересечения с прямой KL в некоторой точке C. По известной теореме имеем:

$$AC \cdot BC = CT^2.$$

Отрезок AC и BC легко определить, а затем известным построением можем найти и отрезок CT.

Узнав длину отрезка CT, отложим от точки C в направлении L отрезок CT; получим третью точку, через которую должна пройти искомая окружность.

Если длину отрезка CT отложим от точки C в направлении K, то получим некоторую точку T_1, также являющуюся третьей точкой другой окружности, которая проходит через точки A и B и касается прямой KL.

Построение. 1) Продолжим отрезок AB до пересечения с прямой KL в некоторой точке C. 2) Строим отрезок x, определяемый следующей формулой:

$$x^2 = AC \cdot BC.$$

3) На прямой KL по обе стороны от точки C откладываем отрезки CT и CT_1, порознь равные найденному отрезку x. 4) В точках T и T_1 восставим перпендикуляры TS и T_1S_1 к прямой KL. 5) Через середину M отрезка AB проведём прямую DD', перпендикулярную к AB. 6) Прямая DD' пересечёт прямые TS и T_1S_1 в некоторых точках O и O_1. 7) Из точки O_1, как центра, радиусом, равным отрезку OT, описываем окружность K. 8) Из точки O_1, как центра, радиусом, равным отрезку O_1T_1, описываем окружность K_1.

K и K_1 — искомые окружности.

Исследование.

	Конфигурация точек A, B и прямой KL	Число решений
I	Точки A и B лежат по одну сторону прямой KL: а) если $AB \parallel KL$ . . . . б) отрезок AB не параллелен прямой KL .	 1 2
II	Одна из точек (A или B) лежит на прямой KL	1
III	Обе точки (A и B) лежат на прямой KL . . .	0
IV	Точки A и B находятся по разные стороны прямой KL	0

232. *Через точку, данную вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя часть её от данной точки до окружности оказалась вдвое меньше той части, которая заключена внутри окружности.*

Анализ. Допустим, что AC (рис. 289) есть искомая секущая. В таком случае, согласно условию,

$$CB = 2 \cdot AB. \qquad (1)$$

Далее, если из точки A проведём касательную AD к данному кругу, то должно иметь место следующее равенство:

$$AC \cdot AB = AD^2. \qquad (2)$$

Если, ради краткости, введём обозначения: $AD = m$, $AB = x$, то, очевидно, получим, что

$$CB = 2x,$$

причём равенство (2) примет такой вид:

$$3x \cdot x = m^2. \qquad (3)$$

После того, как найдём отрезок m, отрезок x определим при помощи формулы (3):

$$x = \sqrt{\frac{m}{3} \cdot m}. \qquad (4)$$

Построение. 1) Находим отрезок m, являющийся касательной к данному кругу. 2) При помощи формулы (4) находим отрезок x, как среднюю пропорциональную между двумя величинами. 3) Строим отрезок MN, втрое больший отрезка x, т. е. $MN = 3x$. 4) Из точки A, как центра, радиусом, равным отрезку MN, засекаем на окружности точки C и C_1. 5) Соединяем точку A с точками C и C_1.

AC и AC_1 — искомые секущие.

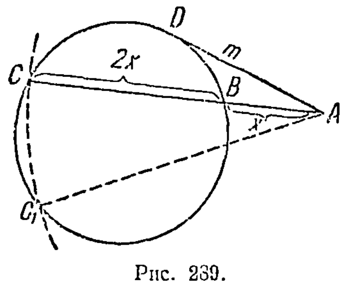


Рис. 289.

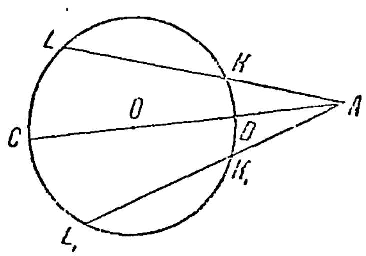


Рис. 290.

233. *Через данную вне круга точку A провести секущую так, чтобы отрезок её от точки A до второй точки пересечения с окружностью разделился бы этой окружностью в данном отношении $m:n$, считая от точки A.*

Анализ. Допустим, что задача решена: секущая AL удовлетворяет условию задачи (рис. 290). Проведём из точки A секущую AC, проходящую через центр O данного круга. Так как точка A нам дана, то, значит, нам известны отрезки AD и AC. Обозначим буквою x длину отрезка AK. Если из точки A, находящейся вне круга, проведём секущие, то произведение всей секущей на её внешнюю часть есть величина постоянная, а потому

$$x \cdot AL = AD \cdot AC. \qquad (1)$$

Из чертежа усматриваем, что $AL = x + LK$.

А так как, по условию, $x : LK = m : n$, т. е. $LK = \frac{nx}{m}$, то, значит, $AL = x + \frac{nx}{m} = \frac{x}{m} \cdot (m+n)$.

Поэтому равенство (1) примет такой вид:

$$x \cdot \frac{x}{m}(m+n) = AD \cdot AC, \text{ откуда } x = \sqrt{\frac{AD \cdot AC \cdot m}{m+n}}. \qquad (2)$$

Построение. 1) Исходя из формулы (2), известным построением определяем отрезок x. 2) Из точки A, как центра, радиусом, равным найденному отрезку x, проводим дугу до пересечения с окружностью в точках K и K_1. 3) Соединив отрезками точку A с точками K и K_1 и продолжив эти отрезки, получим искомые секущие.

234. *Построить прямую, которая проходит через данную точку M и делит площадь параллелограма в отношении $m:n$.*

Построение. 1) Соединяем отрезком середины двух противоположных сторон параллелограма. 2) Находим точку N, делящую этот отрезок в отношении $m:n$. 3) Проводим через точки M и N искомую прямую.

Определить число возможных решений.

234а. *Построить круг, равновеликий сумме трёх данных кругов.*

235. *В данный полукруг радиуса R вписать окружность, которая касалась бы его дуги и диаметра в данной точке P.*

Анализ. Точка P отстоит от центра O на известном расстоянии, которое обозначим через a.

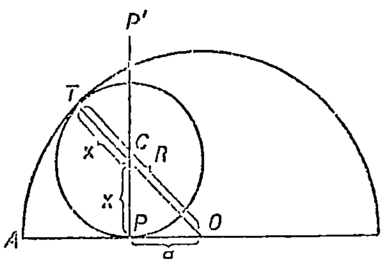


Рис. 291.

Так как искомая окружность касается дуги полукруга, то ясно, что точка касания T, центр C искомой окружности и центр O данного полукруга лежат на одной прямой. Обозначая буквой x радиус искомой окружности, имеем:

$$OC^2 = CP^2 + OP^2, \text{ т. е. } (R-x)^2 = x^2 + a^2,$$

откуда:

$$x = \frac{R^2 - a^2}{2R}. \qquad (1)$$

Построение. 1) По формуле (1) определим построением отрезок x. 2) В точке P восставим перпендикуляр PP'. 3) На прямой PP' от точки P отложим отрезок PC, равный найденному отрезку x. 4) Приняв точку C за центр, описываем искомую окружность радиусом, равным PC.

236. *Построить равносторонний треугольник так, чтобы три его вершины лежали соответственно на трёх данных параллельных прямых KK_1, LL_1 и MM_1, если известно, что расстояние между прямыми KK_1 и LL_1 равно m, а расстояние между прямыми LL_1 и MM_1 равно n и прямая LL_1 находится между прямыми KK_1 и MM_1. (Применить алгебраический метод решения.)*

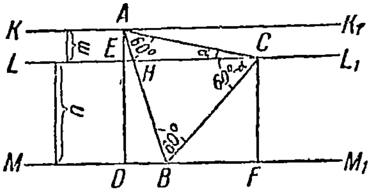


Рис. 292.

Анализ. Предполагая, что задача решена, делаем от руки соответствующий чертёж (рис. 292). Чтобы выполнить требуемое построение, достаточно найти либо длину стороны искомого треугольника, либо угол, который образует какая-нибудь сторона искомого треугольника с данными параллельными MM_1, KK_1 и LL_1.

Определим длину стороны x искомого равностороннего $\triangle ABC$. С этой целью опустим из вершин A и C перпендикуляры AD и CF на прямую MM_1 и точку пересечения линий AD с LL_1 обозначим буквой E.

Треугольники ACE, ABD и CFB — прямоугольные, а потому, применяя теорему Пифагора, можем написать следующие равенства:

$$x^2 = m^2 + EC^2, \tag{1}$$

$$x^2 = (m+n)^2 + DB^2, \tag{2}$$

$$x^2 = n^2 + BF^2. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) имеем:

$$EC = \sqrt{x^2 - m^2}, \quad DB = \sqrt{x^2 - (m+n)^2}, \quad BF = \sqrt{x^2 - n^2}.$$

Но

$$EC = DF = DB + BF,$$

и, значит,

$$\sqrt{x^2 - m^2} = \sqrt{x^2 - (m+n)^2} + \sqrt{x^2 - n^2}, \tag{4}$$

откуда получим:

$$3x^4 - 4(m^2 + mn + n^2)x^2 = 0. \tag{5}$$

Это уравнение (5) распадается на следующие два уравнения:

$$x^2 = 0 \tag{6}$$

и

$$3x^2 - 4(m^2 + mn + n^2) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) отбрасываем, как противоречащее условию задачи. Из уравнения (7) находим:

$$x = 2\sqrt{\frac{m^2 + mn + n^2}{3}}. \tag{8}$$

Построение. 1) Известным построением находим отрезок x, определяемый формулой (8). 2) Около какой-нибудь точки S любой из данных параллельных линий, как центра, радиусом, равным x, описываем дугу, которая пересечёт две другие параллельные прямые в точках, являющихся двумя другими вершинами искомого треугольника.

Приведём другой способ решения задачи.

Анализ. Допустим, что задача решена, причём $\triangle ABC$ — искомый.

Обозначим буквами E и H те точки, в которых прямая LL_1 пересекает перпендикуляр AD, опущенный из точки A на прямую MM_1, и сторону AB искомого треугольника.

Так как $EH \parallel MM_1$, то

$$\triangle ABD \sim \triangle AEH,$$

и, следовательно,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AH}{HB}.$$

Но

$$\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n},$$

а потому

$$\frac{AH}{HB} = \frac{m}{n}. \tag{9}$$

Пропорция (9) показывает, в каком отношении прямая LL_1 делит сторону AB искомого треугольника и даёт возможность определить угол ACH.

Действительно, если возьмём произвольных размеров равносторонний треугольник $A'B'C'$ и определим точку H', делящую сторону $A'B'$ в отношении $m:n$, то угол $A'C'H'$ будет равен углу ACH.

Определив угол ACH, легко построить искомый треугольник ABC.

Построение. 1) Строим произвольных размеров равносторонний треугольник $A'B'C'$. 2) Определяем точку H', делящую сторону $A'B'$ на части, отношение которых (считая от A к B) равно $m:n$. 3) Отрезком соединяем точку H' с точкою C' и получаем угол $A'C'H'$. 4) Из произвольной точки (C) прямой LL_1 проводим луч, образующий с линией LL_1 угол, равный найденному углу $A'C'H'$. 5) Построенный луч пересечёт прямую KK_1 в некоторой точке A. 6) Из точки C, как центра, радиусом, равным отрезку AC, проводим дугу, которая пересечёт прямую KK_1 в точках A и A_1, а прямую MM_1 — в некоторых точках B и B_1.

$\triangle ACB$ и $\triangle A_1CB_1$ — искомые.

Так как эти треугольники равны, то, значит, задача имеет одно решение.

237. *Решить предыдущую задачу, если в три данные параллельные прямые надо вписать треугольник, в котором отношение сторон $m:n:p$.*

238. *В параллелограме ABCD требуется провести параллельно стороне AB прямую EF, рассекающую его на два подобных между собою параллелограма.*

Анализ. Допустим, что рис. 293 представляет собою требуемое построение, т. е.

$$ABEF \backsim CDFE. \qquad (1)$$

Из (1) вытекает, что

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BE}{EF}. \qquad (2)$$

Обозначив отрезки AB, BC и BE соответственно буквами a, b, x, можем равенство (2) переписать так:

$$\frac{a}{b-x} = \frac{x}{a}. \qquad (3)$$

Из (3) получим:

$$x^2 - bx + a^2 = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} \qquad (4)$$

и

$$x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}. \qquad (5)$$

Построение. 1) Строим отрезок m, определяемый формулой $m = \sqrt{b^2 - 4a^2}$ и являющийся катетом прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна отрезку b, а другой катет равен удвоенному отрезку a. 2) Находим отрезок x_1, равный полусумме отрезков b и m. 3) Находим отрезок x_2, равный полуразности отрезков b и m. 4) На сторонах BC и AD откладываем от точки B и A отрезки BE и AF, равные найденному отрезку x_1. 5) Соединяем отрезком точки E и F и получаем два подобных параллелограма $ABEF$ и $CDFE$.

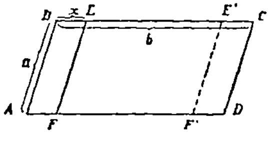


Рис. 293.

Примечание. Если на сторонах BC и AD от точек A и B отложим отрезок AF' и BE', порознь равные x_2, то получим ещё два подобных между собою параллелограма $ABE'F'$ и $CDF'E'$, причём параллелограм $ABE'F'$ равен параллелограму $CDFE$ и параллелограм $CDF'E'$ равен параллелограму $ABEF$.

Исследование. Одно решение всегда получим, если соединим отрезком середины противоположных сторон BC и AD, так как построенные таким образом параллелограмы будут равны.

Формулы (4) и (5) показывают, что в том случае, когда

$$\sqrt{b^2 - 4a^2} > 0,$$

задача имеет, кроме упомянутого, ещё два решения, а это возможно, если $b > 2a$.

Итак:

1) Если $b > 2a$, то задача имеет три решения.

2) Если $b \leqslant 2a$, то задача имеет одно решение.

239. *Построить треугольник ABC по следующим данным:*

1) $\angle A$, $\angle B$, $h_c + m_c = s$, 2) $\angle A$, $\angle B$, $2p$, 3) h_a, h_b, h_c.

240. *В данный квадрат ABCD вписать равносторонний треугольник, помещая одну из его вершин или в вершине квадрата или в середине какой либо стороны.*

I. Анализ. Допустим, что задача решена, причём вершина искомого треугольника лежит в вершине квадрата (рис. 294). Прямоугольные треугольники ABF и ADG равны по катету и гипотенузе. А отсюда следует, что

$$\angle BAF = \angle DAG.$$

Так как

$$\angle FAG = 60^\circ,$$

то

$$\angle BAF = \frac{1}{2}(90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ.$$

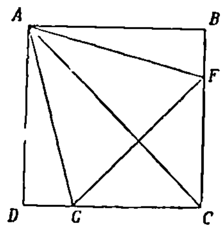


Рис. 294.

Построение. 1) Строим на стороне AB при точке A внутри данного квадрата угол, равный 15°, вторая сторона которого пересечёт сторону BC в некоторой точке F. AF есть сторона искомого вписанного равностороннего треугольника. 2) Из точки A (или F), как центра, радиусом, равным AF, засекаем точку G на стороне CD. Соединив отрезками точку G с точками A и F, получим искомый треугольник AFG.

II. Анализ. Допустим, равносторонний треугольник вписан в данный квадрат так, что одна из его вершин находится в середине какой-нибудь из сторон квадрата (рис. 295). Прямоугольные треугольники AKM и BKL равны по катету и гипотенузе, а потому

$$\angle AKM = \angle BKL.$$

Так как

$$\angle MKL = 60^\circ,$$

то и

$$\angle AKM = 60^\circ.$$

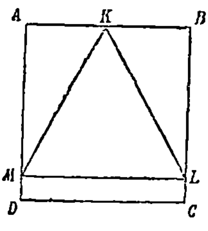


Рис. 295.

Построение. 1) Находим середину K отрезка AB. 2) На прямой AB, при точке K, строим внутри квадрата угол, равный 60°, вторая сторона которого пересечёт отрезок AD в некоторой точке M. Из точки K, как центра, радиусом, равным отрезку KM, засекаем точку L на стороне BC. 3) Соединяем отрезками точки K, L и M.

$\triangle KLM$ — искомый.

241. *В данный правильный пятиугольник $ABCDE$ вписать другой правильный пятиугольник $A'B'C'D'E'$ так, чтобы вершина A' находилась на стороне AB, вершина B' — на стороне BC и т. д., причём $\angle BA'B'$ равнялся бы данному углу α $(0 < \alpha \leqslant 36°)$.*

242. *По обе стороны отрезка AB построить сегменты, вмещающие углы в $n°$, а затем в образовавшуюся замкнутую кривую линию $AMBN$* (рис. 296) *вписать две равных окружности (K_1 и K_2), касающиеся одна другой и каждой из дуг AMB и ANB.*

Выполнить требуемое построение, приняв, что

$$n° = 90°. \qquad (1)$$

Анализ. Из (1) вытекает, что отрезок AB является стороною квадрата, вписанного в некоторый круг K.

Обозначая радиус этого круга буквою R, можем написать, что

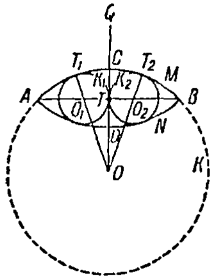


Рис. 296.

$$AB = R\sqrt{2}, \qquad (2)$$

откуда

$$R = \frac{AB}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Точка T касания кругов K_1 и K_2 является серединою отрезка AB. Через точку T проведём общую касательную CD к кругам K_1 и K_2. Отрезок T_1O_1, соединяющий точку T_1 внутреннего касания дуги AMB и окружности K_1, продолжим до пересечения с прямою CD в центре O окружности K, частью которой является дуга AMB.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OO_1T.

Катет OT есть апофема вписанного квадрата, стороны которого равны AB, и, значит,

$$OT = \frac{1}{2}AB, \qquad (4)$$

т. е.

$$OT = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}. \qquad (5)$$

Если буквою x обозначим радиус окружности K_1, то можем написать, что

$$O_1T = x \text{ и } OO_1 = R - x. \qquad (6)$$

По теореме Пифагора имеем:

$$OO_1^2 = OT^2 + O_1T^2,$$

т. е.

$$(R-x)^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2,$$

или

$$R^2 - 2Rx + x^2 = \frac{R^2}{2} + x^2,$$

откуда

$$\frac{R^2}{2} = 2Rx \text{ и } x = \frac{R}{4}. \qquad (7)$$

Из (3) и (7) вытекает, что

$$x=\frac{AB}{4\sqrt{2}}.$$

Построение. 1) Через середину T данного отрезка AB проводим прямую CD, перпендикулярную к этому отрезку. 2) На прямой CD от точки T отложим отрезок TO, равный отрезку AT. 3) Соединив точки A и O, получим радиус (R) той окружности (K), которой должна принадлежать дуга AMB. 4) Из точки O, как центра, радиусом, равным отрезку AO, чертим дугу AMB. 5) Из точки T, как центра, радиусом, равным отрезку TO, засекаем точку Q на луче TC. Точка Q является центром той окружности радиуса R, которой принадлежит дуга ANB. 6) Из точки Q, как центра, радиусом, равным отрезку AO, чертим дугу ANB. 7) Делим отрезок AO на четыре равные части. 8) Из точки T, как центра, радиусом, равным отрезку $\frac{R}{4}$, засекаем на отрезке AB точки O_1 и O_2. 9) Около точек O_1 и O_2, как центров, радиусом, равным отрезку $\frac{R}{4}$, описываем искомые окружности K_1 и K_2.

Решить предыдущую задачу для следующих значений n:

1) $n=120°$, 2) $n=60°$, 3) $n=30°$.

243. *Разделить треугольник прямыми, проходящими через его вершину, на три равновеликие части.*

Построение (рис. 297). Делим одну из сторон, например AC, на три равные части ($AD=DE=EC$) и точки деления D и E соединяем с вершиной B.

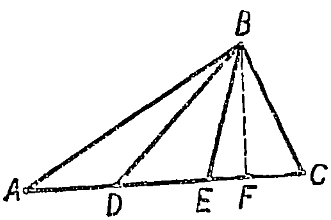


Рис. 297.

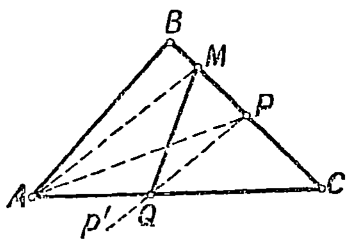


Рис. 298.

Доказательство. Треугольники BAD, BDE, BEC равновелики, так как имеют одинаковые основания и одну и ту же высоту BF.

Примечание. Полезно предложить учащимся на дом такую задачу: „Разделить треугольник прямыми, проходящими через его вершину, на три части, площади которых относятся, как $m:n:p$".

244. *Разделить треугольник на две равновеликие части прямой, проходящей через данную точку (M) его стороны.*

Анализ. Допустим, задача решена: MQ—искомая линия (рис. 298). Если разделим сторону BC пополам ($BP=PC$), то $\triangle ABP$ и $\triangle APC$ будут равновелики.

Соединив отрезком точку M с точкою A, можем написать, что

$$\text{пл. } \triangle ABP = \text{пл. } \triangle ABM + \text{пл. } \triangle AMP. \qquad (1)$$

Из точки P проведём прямую PP', параллельную линии AM. PP' пересечёт AC в некоторой точке Q. Соединив точки M и Q, получим $\triangle AMQ$, который равновелик $\triangle AMP$, так как они оба имеют одно основание AM и одинаковые высоты. Значит, равенство (1) можно переписать так:

$$\text{пл. } \triangle ABP = \text{пл. } \triangle ABM + \text{пл. } \triangle AMQ,$$

т. е.

$$\text{пл. } \triangle ABP = \text{пл. } ABMQ. \qquad (2)$$

Но так как

$$\text{пл. } \triangle ABP = \frac{1}{2} \text{ пл. } \triangle ABC,$$

то

$$\text{пл. } ABMQ = \frac{1}{2} \text{ пл. } \triangle ABC. \qquad (3)$$

Построение. 1) Находим точку P, делящую пополам отрезок BC. 2) Через точку P проводим прямую PP', параллельную отрезку AM. Линия PP' пересечёт сторону AC в некоторой точке Q. 3) Соединяем точки M и Q. Отрезок MQ рассекает данный треугольник на две равновеликие части.

245. *На стороне AB треугольника ABC взята точка P. Провести через точку P прямые, рассекающие этот треугольник на три равновеликие части.*

Построение (рис. 299). 1) Из точки B проведём прямую BB', которая параллельна отрезку CP и пересекает продолжение стороны AC в некоторой точке B'. 2) Соединив точки P и B', получим $\triangle AB'P$, равновеликий данному треугольнику ABC.

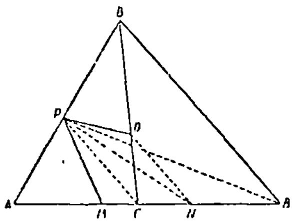


Рис. 299.

$$\text{Пл. } \triangle AB'P = \text{пл. } \triangle ABC. \qquad (1)$$

3) Делим на три равные части основание AB' треугольника $AB'P$:

$$AM = MN = NB', \qquad (2)$$

причём точка N в рассматриваемом нами случае оказалась вне треугольника ABC. 4) Соединяем отрезком точку M с точкою P и получаем треугольник AMP, площадь которого равна одной трети площади треугольника $AB'P$, а значит (1)

$$\text{пл. } \triangle AMP = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC. \qquad (3)$$

5) Из точки N проводим отрезок NQ, параллельный отрезку CP, до встречи со стороной BC в некоторой точке Q. Соединив отрезком точки P и Q, получим четырёхугольник $PMCQ$, равновеликий треугольнику MPN.

Но так как

$$\text{пл. } \triangle MPN = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC,$$

то

$$\text{пл. } PMCQ = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC \tag{4}$$

и

$$\text{пл. } \triangle PQB = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC. \tag{5}$$

Доказательство. I. Правильность равенства (3) очевидна.

II. Также очевидно, что

$$\text{пл. } \triangle MPN = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle AB'P,$$

т. е. (1)

$$\text{пл. } \triangle MPN = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC. \tag{6}$$

Из чертежа усматриваем, что

$$\text{пл. } \triangle MPN = \text{пл. } \triangle PMC + \text{пл. } \triangle PCN. \tag{7}$$

Далее имеем:

$$\text{пл. } \triangle PCN = \text{пл. } \triangle PCQ, \tag{8}$$

потому что эти треугольники имеют общее основание CP и одинаковые высоты (т. к. $NQ \parallel CP$).

Из (7) и (8) вытекает, что

$$\text{пл. } \triangle MPN = \text{пл. } \triangle PMC + \text{пл. } \triangle PCQ,$$

т. е. (6)

$$\frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC = \text{пл. } \triangle PMC + \text{пл. } \triangle PCQ. \tag{9}$$

Из чертежа видим, что треугольники, стоящие в правой части равенства (9), образуют четырёхугольник $PMCQ$, а потому

$$\frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC = \text{пл. } \triangle PMCQ, \tag{10}$$

что подтверждает правильность равенства (4).

III. Пл. $\triangle PQB =$ пл. $\triangle ABC -$ пл. $\triangle AMP -$ пл. $PMCQ$, откуда, в силу (3) и (10), получим

$$\text{пл. } \triangle PQB = \text{пл. } \triangle ABC - \frac{1}{3} \text{пл. } \triangle ABC - \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC,$$

т. е.

$$\text{пл. } \triangle PQB = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC,$$

что и подтверждает правильность равенства (5).

246. *Через точку S, находящуюся на стороне AB данного треугольника, провести отрезки, рассекающие его площадь на четыре равновеликие части.*

247. *Дан четырёхугольник ABCD и на одной из его сторон (например, на AB) точка P. Провести через точку P прямую, рассекающую данный четырехугольник на две равновеликие фигуры.*

Построение (рис. 300). 1) Соединяем отрезком точки C и D с точкою P. 2) Из точки B проводим отрезок BB', параллельный отрезку CP, до встречи с продолжением стороны CD в некоторой точке B'. 3) Из точки A проводим отрезок AA', параллельный отрезку DP, до встречи с продолжением стороны CD в некоторой точке A'. 4) Соединив отрезками точку P с точками A' и B', получим $\triangle A'PB'$, равновеликий четырёхугольнику $ABCD$. 5) Находим середину M отрезка $A'B'$ и проводим медиану PM треугольника $A'PB'$.

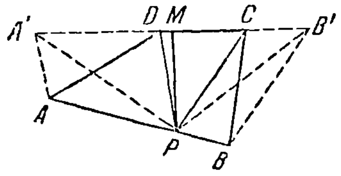


Рис 300.

Отрезок PM — искомый:

$$\text{пл. } ADMP = \text{пл. } BCMP.$$

Доказательство. I. Так как, по построению, $A'M = MB'$, то

$$\text{пл. } \triangle A'MP = \text{пл. } \triangle B'MP. \qquad (1)$$

$BB' \parallel CP$, а потому

$$\text{пл. } \triangle BCP = \text{пл. } \triangle B'CP. \qquad (2)$$

Прибавив почленно к равенству (2) тождество

$$\text{пл. } \triangle CMP = \text{пл. } \triangle CMP,$$

получим:

$$\text{пл. } \triangle BCP + \text{пл. } \triangle CMP = \text{пл. } \triangle B'CP + \text{пл. } \triangle CMP,$$

т. е.

$$\text{пл. } BCMP = \text{пл.} \triangle B'MP. \qquad (3)$$

II. $AA' \parallel DP$, а потому

$$\text{пл. } \triangle ADP = \text{пл. } \triangle A'DP. \qquad (4)$$

Прибавив по ленно к равенству (4) тождество

$$\text{пл. } \triangle DMP = \text{пл. } \triangle DMP,$$

получим:

$$\text{пл. } \triangle ADP + \text{пл. } \triangle DMP = \text{пл. } \triangle A'DP + \text{пл. } \triangle DMP,$$

т. е.

$$\text{пл. } ADMP = \text{пл. } \triangle A'MP. \qquad (5)$$

III. В силу равенсгва (1), правые части равенства (3) и (5) равны, а потому левые части этих равенств должны быть также равны, а именно:

$$\text{пл. } BCMP = \text{пл. } ADMP,$$

что и требовалось доказать.

248. *Отрезками, выходящими из точки P, лежащей на стороне BC данного четырёхугольника $ABCD$, разделить его площадь на три части, которые относятся, как $2:\sqrt{3}:\sqrt{2}$.*

249. *Найти внутри треугольника ABC такую точку, чтобы отрезки, соединяющие ее с вершинами треугольника, делили его на три равновеликие части.*

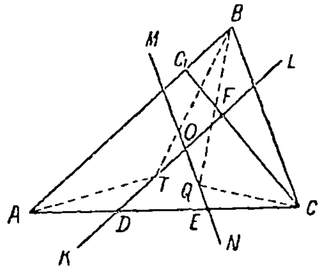


Рис. 301.

Построение (рис. 301). 1) Делим сторону AC на три равные части ($AD = DE = EC$); проводим через точку D прямую KL, параллельную AB, а через точку E проводим прямую MN, параллельную BC.

Точка (O) пересечения прямых KL и MN есть искомая точка.

Доказательство. Прямая KL пересекает высоту CC_1, опущенную на сторону AB, в некоторой точке F, причём $C_1F = \frac{CC_1}{3}$. Отсюда следует, что, соединив отрезками любую точку T прямой KL с точками A и B, мы получим треугольник ABT, площадь которого равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC.

$$\text{Пл. } \triangle ABT = \frac{AB \cdot C_1F}{2} = \frac{AB \cdot CC_1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot CC_1}{2} = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC.$$

Точно так же любая точка Q прямой MN, будучи соединена отрезками с точками B и C, образует треугольник QBC, площадь которого равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC. Ясно, что на пересечении прямых KL и MN находится точка O, соединив которую отрезками с точками A, B и C, получим равенства:

$$\text{пл. } \triangle ABO = \frac{\text{пл. } \triangle ABC}{3}$$

и

$$\text{пл. } \triangle BCO = \frac{\text{пл. } \triangle ABC}{3},$$

а следовательно,

$$\text{пл. } \triangle ACO = \text{ пл. } \triangle ABC - \text{ пл. } \triangle ABO - \text{ пл. } \triangle BCO = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC.$$

250. *Найти внутри треугольника такую точку, чтобы прямые, соединяющие её с вершинами треугольника, делили его на три части в отношении $2:3:4$ (или вообще $m:n:p$).*

Анализ. Допустим, что задача решена, причём точка S является искомой (рис. 302). В таком случае:

$$\text{пл. } \triangle ASB = \frac{2}{2+3+4} \text{ пл. } \triangle ABC = \frac{2}{9} \text{ пл. } \triangle ABC, \tag{1}$$

$$\text{пл. } \triangle BSC = \frac{3}{2+3+4} \text{ пл. } \triangle ABC = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC, \tag{2}$$

$$\text{пл. } \triangle CSA = \frac{4}{2+3+4} \text{ пл. } \triangle ABC = \frac{4}{9} \text{ пл. } \triangle ABC. \tag{3}$$

Так как треугольник ASB и треугольник ABC имеют одно и то же основание AB, то, значит, высота SS_1 треугольника ASB должна составлять $\frac{2}{9}$ высоты CC_1 треугольника ABC. Поэтому, если мы на стороне BC отложим от вершины B отрезок BB_2, равный $\frac{2}{9}$ BC, и затем через точку B_2 проведём линию B_2B_3, параллельную AB, то точка S должна будет находиться где-то на отрезке B_2B_3.

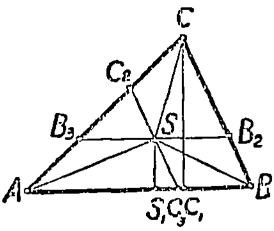


Рис. 302.

Далее, для выполнения равенства (2), надо, чтобы точка S находилась на прямой C_2C_3, параллельной стороне BC и проходящей через точку C_2, которая отсекает от стороны AC отрезок CC_2, равный одной трети стороны AC.

А если точка S должна лежать как на прямой B_2B_3, так и на прямой C_2C_3, то, значит, она является точкой пересечения этих линий.

Что касается третьего равенства, то оно само собой выполняется, когда выполнены равенства (1) и (2), в чём нетрудно убедиться приёмом, применённым в предыдущей задаче.

251. *Разделить площадь данного треугольника ABC пополам прямой, перпендикулярной основанию (AC).*

Анализ (рис. 303). Допустим, что DE является искомым отрезком прямой, т. е. $DE \perp AC$ и отсекает $\triangle ADE$, площадь которого равна половине площади данного треугольника ABC:

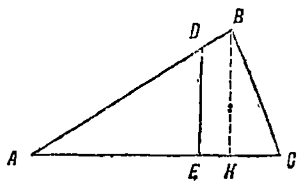


Рис. 303.

$$\frac{\text{пл. } \triangle ADE}{\text{пл. } \triangle ABC} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Треугольники ADE и ABC имеют общий угол A, а потому площади их относятся как произведения сторон, заключающих этот угол, т. е.

$$\frac{\text{пл. } \triangle ADE}{\text{пл. } \triangle ABC} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$\frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Опустив из точки B перпендикуляр BK на сторону AC, получим

$$\triangle ADE \backsim \triangle ABK,$$

откуда

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AK}. \tag{4}$$

Подставив в (3) значение дроби $\frac{AD}{AB}$, взятое из (4), найдём, что

$$\frac{AE^2}{AC\cdot AK}=\frac{1}{2},$$

т. е.

$$AE^2=\frac{AC\cdot AK}{2},$$

и, следовательно,

$$AE=\sqrt{\frac{AC\cdot AK}{2}}. \tag{5}$$

Построение (рис. 304). 1) На отрезке AC, как на диаметре, строим полуокружность. 2) Из точки B опускаем на основание AC перпендикуляр BK. 3) Из середины M отрезка AK восставим к нему перпендикуляр, который пересечёт полуокружность в некоторой точке L. 4) Соединив отрезками точку L с точками A и C, получим прямоугольный $\triangle ACL$, в котором

$$AL^2=AC\cdot AM,$$

или

$$AL=\sqrt{\frac{AC\cdot AK}{2}}.$$

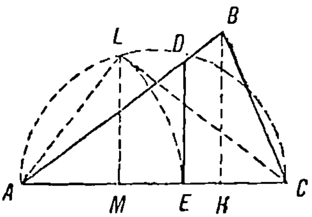


Рис. 304.

5) Из точки A, как центра, радиусом, равным AL, засекаем точку E на стороне AC. 6) В точке E восставим перпендикуляр к стороне AC, который пересечёт сторону AB в некоторой точке D.

Отрезок DE—искомый, так как он рассекает площадь треугольника ABC на две равновеликие части.

252. *Прямыми, выходящими из вершины* (A) *параллелограма $ABCD$, разделить его площадь на пять равновеликих частей.*

253. *Прямыми, параллельными диагонали параллелограма $ABCD$, разделить его площадь на три равновеликие части.*

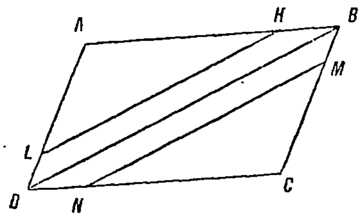


Рис. 305.

Анализ. Допустим, что задача решена (рис. 305): $KL\parallel BD$ и площадь $\triangle AKL$ равна одной трети площади параллелограма $ABCD$.

Для решения задачи достаточно определить длину отрезка AK, который является стороною треугольника AKL.

Из того, что $KL\parallel BD$, вытекает:

$$\triangle AKL \backsim \triangle ABD.$$

Площади подобных фигур относятся как квадраты их сходственных отрезков, а потому

$$\frac{\text{пл. } \triangle AKL}{\text{пл. } \triangle ABD}=\frac{AK^2}{AB^2}. \qquad (1)$$

Поскольку отрезок AB нам известен, то отрезок AK определим, если будем знать, чему равно отношение $\frac{\text{пл. } \triangle AKL}{\text{пл. } \triangle ABD}$.

Так как

$$\text{пл. } \triangle AKL=\frac{1}{3}\text{ пл. } ABCD$$

и

$$\text{пл. } \triangle ABD=\frac{1}{2}\text{ пл. } ABCD,$$

то

$$\frac{\text{пл. } \triangle AKL}{\text{пл. } \triangle ABD}=\frac{\frac{1}{3}\text{пл. } ABCD}{\frac{1}{2}\text{пл. } ABCD},$$

откуда

$$\frac{\text{пл. } \triangle AKL}{\text{пл. } \triangle ABD}=\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем:

$$\frac{AK^2}{AB^2}=\frac{2}{3},$$

откуда

$$AK^2=\frac{2}{3}AB^2,$$

т. е.

$$AK=\sqrt{2AB\cdot\frac{AB}{3}}. \qquad (3)$$

Построение. 1) Строим отрезок m, равный $2AB$. 2) Строим отрезок n, равный $\frac{AB}{3}$. 3) Строим отрезок p, определяемый формулой $p=\sqrt{m\cdot n}$. 4) На стороне AB данного параллелограма от точки A откладываем отрезок AK, равный найденному отрезку p. 5) Из точки K проводим внутри данного параллелограма отрезок KL, параллельный диагонали BD. 6) На стороне CD от точки D откладываем отрезок DN, равный KB. 7) Из точки N проводим внутри данного параллелограма отрезок NM, параллельный диагонали BD.

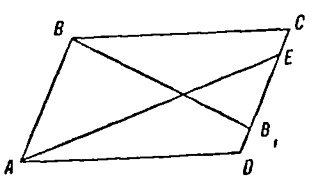


Рис. 306.

KL и MN—искомые линии; они параллельны диагонали BD и делят данный параллелограм на три равновеликие части.

254. *Прямою, выходящею из точки A, разделить площадь данного параллелограма $ABCD$ на две части, находящиеся в среднем и крайнем отношении* (рис. 306).

Анализ. Если требуется отрезком, выходящим из точки A, разделить площадь параллелограма в отношении $m:n$, причём $m > n$, то ясно, что искомый отрезок AE пересечёт сторону CD в некоторой точке E.

Площадь параллелограма $ABCD = CD \cdot BB_1$, а пл. $\triangle ADE = \frac{DE \cdot BB_1}{2}$ ($BB_1 \perp CD$).

По условию,

$$\text{пл. } \triangle ADE = \frac{n}{m+n} \text{ пл. } ABCD,$$

и потому

$$\frac{DE \cdot BB_1}{2} = \frac{n}{m+n} \cdot CD \cdot BB_1,$$

откуда

$$DE = \frac{2n}{m+n} \cdot CD. \qquad (1)$$

Следовательно, отложив на стороне CD от точки D отрезок, равный DE (1), разделим площадь параллелограма в данном отношении.

Так как нам надо разделить площадь данного параллелограма в среднем и крайнем отношении, то прежде всего определяем два отрезка, которые находятся в этом отношении, после чего легко решить рассматриваемую задачу.

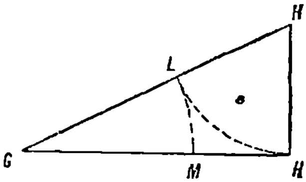


Рис. 307.

Построение (рис. 307). 1) Строим прямоугольный треугольник GHK, в котором один катет GH вдвое больше другого катета HK. 2) Из точки K, как центра, радиусом, равным HK, засекаем точку L на гипотенузе GK. 3) Из точки G, как центра, радиусом, равным GL, засекаем точку M на катете GH.

Точка M делит отрезок GH в среднем и крайнем отношении.

Следовательно, в рассматриваемой задаче требуется прямою, выходящею из точки A (рис. 306), разделить площадь данного параллелограма на части в отношении

$$GM : MH,$$

где

$$GM > MH.$$

4) Строим отрезок x, определяемый следующей формулой:

$$x = \frac{2 \cdot MH}{GM + MH} \cdot CD,$$

т. е.

$$x = \frac{2MH}{GH} \cdot CD,$$

или

$$x : CD = 2MH : GH.$$

5) На стороне CD от точки D откладываем отрезок DE, равный найденному отрезку x. 6) Соединяем отрезком точки A и E.

Отрезок AE — искомый: он делит площадь параллелограма в среднем и крайнем отношении.

255. *Превратить данный треугольник в равновеликий ему квадрат.*

256. *Превратить данный треугольник в равновеликий ему равносторонний треугольник.*

257. *Превратить данный четырехугольник в равновеликий ему равнобедренный прямоугольный треугольник.*

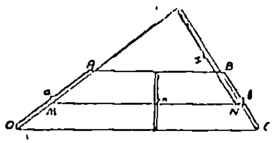


Рис. 308.

258. *Разделить трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.*

Анализ (рис. 308). Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в некоторой точке S. Искомую линию обозначим через MN, а отрезок SN буквою x.

Из чертежа ясно, что для определения MN необходимо найти величину SN.

Из подобия треугольников имеем:

$$\begin{aligned} &\text{пл. } \triangle SCD : \text{пл. } \triangle SAB = SC^2 : SB^2, \\ &\text{пл. } \triangle SMN : \text{пл. } \triangle SAB = SN^2 : SB^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Нам надо, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\text{пл. } ABNM = \text{пл. } MNCD.$$

Но

$$\text{пл. } ABNM = \text{пл. } \triangle SMN - \text{пл. } \triangle SAB$$

и

$$\text{пл. } MNCD = \text{пл. } \triangle SCD - \text{пл. } \triangle SMN,$$

т. е.,

$$\text{пл. } \triangle SMN - \text{пл. } \triangle SAB = \text{пл. } \triangle SCD - \text{пл. } \triangle SMN$$

или

$$2\,\text{пл. } \triangle SMN = \text{пл. } \triangle SAB + \text{пл. } \triangle SCD.$$

Разделив последнее равенство на пл. $\triangle SAB$, получим:

$$2 \cdot \frac{\text{пл } \triangle SMN}{\text{пл. } \triangle SAB} = 1 + \frac{\text{пл. } \triangle SCD}{\text{пл. } \triangle SAB}. \tag{2}$$

Приняв во внимание равенство (1), можно равенство (2) преобразовать так:

$$2 \cdot \frac{SN^2}{SB^2} = 1 + \frac{SC^2}{SB^2},$$

откуда:

$$2SN^2 = SB^2 + SC^2. \tag{3}$$

Отрезки SB и SC нам известны. Принимая их за катеты, определим гипотенузу, обозначив её через PQ:

$$PQ^2 = SB^2 + SC^2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) имеем:

$$2SN^2 = PQ^2, \tag{4}$$

или

$$SN^2 = PQ \cdot \frac{PQ}{2},$$

и, значит,

$$SN = \sqrt{PQ \cdot \frac{PQ}{2}}.$$

При помощи этой формулы известным построением определим отрезок SN.

Затем на стороне SC от точки S откладываем найденный отрезок SN и через точку N проводим прямую MN, параллельную основанию CD.

Линия MN—искомая.

259. *Прямыми, параллельными основанию данной трапеции, разделить её площадь на три равновеликие части.*

260. *Данный прямоугольник преобразовать в другой равновеликий ему прямоугольник с данным основанием* (MN).

Анализ (рис. 309). Пусть отрезки AB и AD являются сторонами данного прямоугольника, а отрезок MN представляет собою данное основание искомого равновеликого прямоугольника. Требуется найти высоту (x) этого прямоугольника.

Согласно условию задачи должно иметь место такое равенство:

$$AB \cdot AD = MN \cdot x. \tag{1}$$

Равенство (1) можно преобразовать в пропорцию:

$$MN : AB = AD : x$$

и известным построением легко найти отрезок x, как четвёртую пропорциональную величину по трём данным.

Зная основание (MN) и высоту (x), легко построить прямоугольник, равновеликий данному.

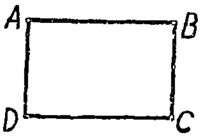


Рис. 309.

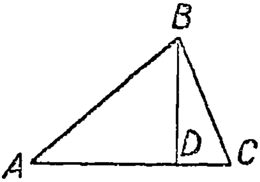


Рис. 310.

Рис. 311.

261. *Построить треугольник, подобный одному* (ABC) *и равновеликий другому* (KLM) *из двух данных треугольников* (рис. 310 и 311).

Анализ. Пусть $A_1B_1C_1$—искомый треугольник с основанием A_1C_1 и высотой B_1D_1. Из подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC составляем пропорцию:

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1D_1}{BD}. \tag{1}$$

Обозначим неизвестные отношения пропорции (1) буквой x, т. е.

$$\frac{A_1C_1}{AC}=x$$

и

$$\frac{B_1D_1}{BD}=x. \qquad (2)$$

Из равенств (2) следует, что

$$A_1C_1=AC\cdot x \text{ и } B_1D_1=BD\cdot x. \qquad (3)$$

Воспользуемся теперь второй частью условия.

Искомый треугольник $A_1B_1C_1$ должен быть равновеликим треугольнику KLM, имеющему основание KM и высоту LN.

Согласно этому

$$\text{пл. } \triangle A_1B_1C_1=\text{пл. } \triangle KLM,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}A_1C_1\cdot B_1D_1=\frac{1}{2}KM\cdot LN$$

или

$$\frac{1}{2}AC\cdot x\cdot BD\cdot x=\frac{1}{2}KM\cdot LN. \qquad (4)$$

Из (4) следует:

$$x^2=\frac{KM\cdot LN}{AC\cdot BD} \text{ и } x=\sqrt{\frac{KM\cdot LN}{AC\cdot BD}}.$$

Значит, сторона A_1C_1 искомого треугольника, соответствующая стороне AC, определяется равенством:

$$A_1C_1=AC\cdot x,$$

т. е.

$$A_1C_1=AC\cdot\sqrt{\frac{KM\cdot LN}{AC\cdot BD}},$$

откуда находим:

$$A_1C_1=\sqrt{\frac{KM\cdot LN\cdot AC}{BD}}. \qquad (5)$$

Построение. 1) Основываясь на формуле (5), строим отрезок A_1C_1. 2) На стороне AC данного $\triangle ABC$ от точки A откладываем отрезок A_1C_1 (точка C_1 может оказаться и на продолжении AC). Через точку C_1 проводим прямую C_1B_1, параллельную стороне BC. Прямая C_1B_1 пересекает сторону AB или её продолжение в некоторой точке B_1.

$\triangle A_1B_1C_1$ — искомый.

262. *Данный четырёхугольник превратить в равновеликий треугольник, стороны которого относятся, как 2:3:4.*

263. *Данный треугольник ABC превратить в равновеликий ему параллелограм с отношением сторон 3:2 и углом α.*

264. *Построить квадрат, равновеликий $\frac{2}{3}$ данного квадрата.*

Анализ (рис. 312). Пусть AB есть отрезок, равный стороне данного квадрата. Обозначим буквою x сторону искомого квадрата. Согласно условию должно иметь место следующее равенство:

$$x^2 = \frac{2}{3}AB^2,$$

откуда

$$x = \sqrt{2AB \cdot \frac{AB}{3}}.$$

Исходя из этой формулы, находим x известным построением, как среднюю пропорциональную величину между двумя данными $2AB$ и $\frac{AB}{3}$.

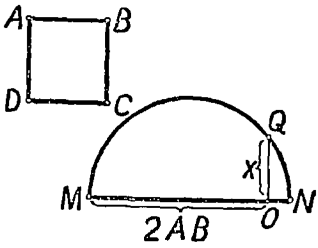


Рис. 312.

265. *Данный треугольник преобразовать в равновеликий равносторонний треугольник* (посредством приложения алгебры к геометрии).

Анализ (рис. 313). Пусть отрезки a и h представляют основание и высоту данного треугольника. Тогда площадь треугольника будет равна $\frac{ah}{2}$. Обозначив буквою x сторону равновеликого ему равностороннего треугольника, площадь которого равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, по условию имеем:

$$\frac{ah}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4},$$

откуда

$$x^2 = \frac{2ah}{\sqrt{3}},$$

т. е.

$$x = \sqrt{\frac{2ah}{\sqrt{3}}}.$$

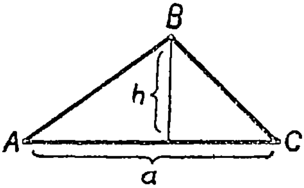


Рис. 313.

Определив x, легко построить искомый равносторонний треугольник.

266. *Дан квадрат, сторона которого равна a; требуется построить равновеликий ему ромб, один из углов которого равен α.*

Анализ. Площадь искомого ромба нам дана (a^2), поэтому для решения задачи достаточно сначала построить какой-нибудь ромб, подобный искомому.

Построение (рис. 314). 1) Строим угол AOB, равный α. На его сторонах от точки O откладываем произвольные, но равные отрезки: OC и OD. Из точек C и D, как центров, радиусами, равными OC, проводим дуги, которые пересекутся в некоторой точке E. Четырёхугольник $CEDO$ — ромб, подобный искомому. 2) Площадь построенного нами ромба $CEDO$ относится к площади (a^2) искомого,

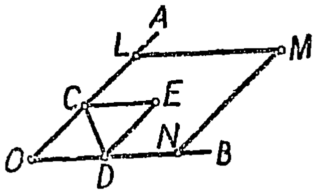


Рис. 314.

как квадраты сходственных сторон, т. е.

$$\frac{CD \cdot OE}{2} : a^2 = OC^2 : x^2, \qquad (1)$$

где x обозначает длину стороны искомого ромба.

Из (1) получим:

$$x^2 = \frac{2a^2 \cdot OC^2}{CD \cdot OE},$$

т. е.

$$x = \frac{\sqrt{2}a \cdot OC}{\sqrt{CD \cdot OE}},$$

после чего известным построением найдём, что искомый отрезок x равен некоторому отрезку FG. 3) Из точки O, как центра, радиусом, равным FG, на сторонах угла AOB засекаем точки L и N. 4) Из точек L и N, как из центров, радиусами, равными FG, проводим дуги, которые пересекутся в некоторой точке M.

$LMNO$ — искомый ромб.

267. *Даны два прилежащих отрезка AP и PB и две окружности (O, R) и (Q, r), пересекающиеся в точках K и K_1. Требуется через точку K провести прямую, которая пересекает эти окружности в таких точках A' и B', что отношение хорд $A'K:KB'$ равно отношению двух данных прилежащих отрезков, т. е.*

$$A'K : KB' = AP : PB. \qquad (1)$$

Анализ (рис. 315). Допустим, что задача решена и прямая $A'B'$ является искомой, т. е. выполняется требование (1).

Если из центров O и Q этих окружностей опустим перпендикуляры OO' и QQ' на прямую $A'B'$, то получим:

$$A'O' = O'K \text{ и } KQ' = Q'B',$$

т. е.

$$A'K = 2O'K \text{ и } KB' = 2KQ'. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$O'K : KQ' = AP : PB. \qquad (3)$$

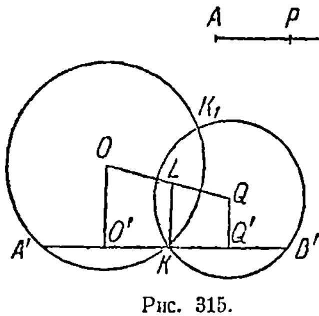


Рис. 315.

Если внутри трапеции $OQQ'O'$ через точку K проведём отрезок KL параллельно OO', то получим, что

$$OL : LQ = O'K : KQ'. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) найдём:

$$OL : LQ = AP : PB. \qquad (5)$$

Положение точек O и Q нам известно, а значит, известен и отрезок OQ линии центров.

Положение точки L на отрезке OQ мы можем определить на основании пропорции (5).

Отрезок KL параллелен OO' и, значит, перпендикулярен к прямой $A'B'$.

Следовательно, построив отрезок KL, мы сможем построить и искомую прямую $A'B'$, проходящую через точку K.

Построение. 1) Соединяем отрезком центры O и Q данных окружностей. 2) Определяем на отрезке OQ ту точку L, которая рассекает этот отрезок в данном отношении (5). 3) Соединяем отрезком точки K и L. 4) Через точку K проводим прямую $A'B'$, перпендикулярную к отрезку KL.

268. *В данный* $\triangle ABC$ *вписать треугольник, подобный данному* $\triangle KLM$ *так, чтобы одна из его вершин* (K) *лежала в точке* P *основания* AB (рис. 316).

Рассмотрим задачу, обратную данной: „Описать около данного $\triangle KLM$ такой $\triangle A'B'C'$, который подобен треугольнику ABC, причём его сторона $A'B'$ проходит через точку K и делится ею в отношении $AP:PB$".

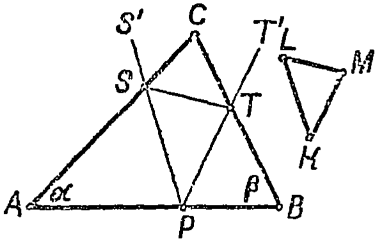


Рис. 316.

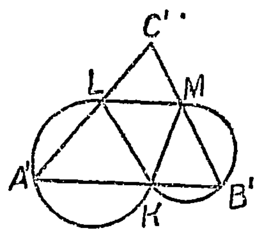


Рис. 317.

Анализ. Допустим, что чертёж (рис. 317) представляет собою решение обратной задачи.

Из точки A' отрезок KL виден под углом α. Геометрическим местом таких точек является дуга сегмента, который построен на отрезке KL и вмещает угол α. Аналогичное замечание можем сделать о положении точки B': она находится на дуге сегмента, построенного на отрезке KM и вмещающего угол β. Нам надо через точку K провести такую прямую, чтобы $A'K:KB' = AP:PB$. Это построение мы можем выполнить. Затем, проведя через точки M и B' прямую до пересечения в некоторой точке C' с прямой, проходящей через точки L и A', получим $\triangle A'C'B'$, представляющий собой решение обратной задачи.

Чтобы получить решение прямой задачи, достаточно на стороне AB, при точке P, построить угол APS', равный углу $A'KL$, и угол BPT', равный углу $B'KM$, а затем соединить отрезком прямой точки S и T, в которых прямые PS' и PT' пересекают стороны AC и BC. Действительно, $\triangle PST$—искомый: он подобен треугольнику KLM, вписан в $\triangle ABC$ и имеет одну из вершин в точке P.

269. *В данный полукруг вписать четырёхугольник, который подобен данному четырёхугольнику и имеет две вершины на диаметре этого полукруга.*

270. *Построить треугольник, подобный данному треугольнику ABC* (рис. 318), *так, чтобы его вершины лежали на трёх данных концентрических окружностях* K_1, K_2 *и* K_3 (рис. 319).

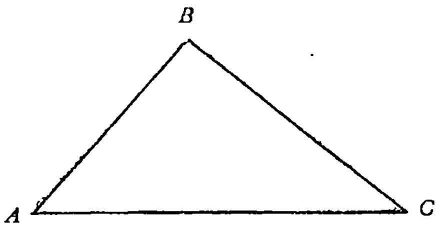


Рис. 318.

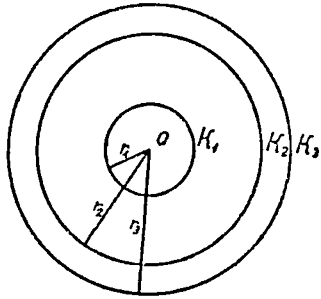


Рис. 319.

Эту задачу заменяем обратной: „Через вершины данного треугольника ABC провести три концентрические окружности, радиусы которых находятся в таком же отношении, как и радиусы (r_1, r_2 и r_3) трёх данных концентрических окружностей K_1, K_2 и K_3".

Для решения обратной задачи достаточно найти такую точку Q в плоскости треугольника ABC, чтобы выполнялись соотношения:

$$AQ:BQ:CQ=r_1:r_2:r_3. \qquad (1)$$

Соотношения (1) можно заменить следующими двумя равенствами:

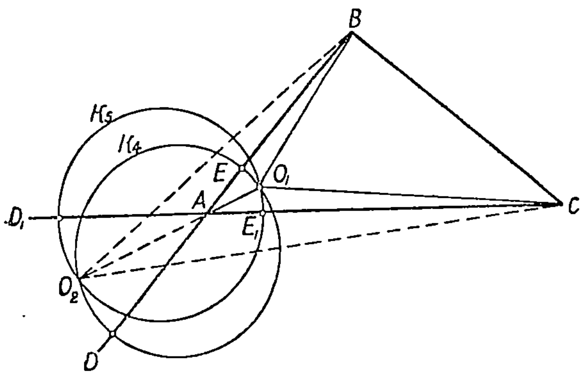


Рис. 320.

$$AQ:BQ=r_1:r_2, \qquad (2)$$

$$AQ:CQ=r_1:r_3. \qquad (3)$$

Существует бесчисленное множество точек (Q), удовлетворяющих равенству (2), и вся совокупность таких точек представляет собою окружность с диаметром, равным отрезку DE (рис. 320), который лежит на одной прямой с отрезком AB, причём точки D и E определяются из соотношений:

$$AE:BE=r_1:r_2, \qquad (4)$$

$$AD:BD=r_1:r_2. \qquad (5)$$

Используя производную пропорцию, из (4) найдём, что

$$\frac{AE}{AE+BE}=\frac{r_1}{r_1+r_2}.$$

Затем, поскольку $AE+BE=AB$, получим:

$$AE=\frac{AB\cdot r_1}{r_1+r_2}. \tag{6}$$

Из чертежа усматриваем, что $BD=AD+AB$, а потому равенство (5) можно переписать так:

$$AD:(AD+AB)=r_1:r_2,$$

т. е.

$$AD\cdot r_2=AD\cdot r_1+AB\cdot r_1,$$

или

$$AD(r_2-r_1)=AB\cdot r_1,$$

и, значит,

$$AD=\frac{AB\cdot r_1}{r_2-r_1}. \tag{7}$$

Определив отрезки AE (6) и AD (7), можем на отрезке DE, как на диаметре, построить окружность K_4. Чтобы найти геометрическое место точек, расстояния которых от точек A и C удовлетворяли бы равенству (3), очевидно, надо на прямой, проходящей через точки A и C, найти такие две точки D_1 и E_1, чтобы выполнялись условия:

$$AE_1:CE_1=r_1:r_3$$

и

$$AD_1:CD_1=r_1:r_3.$$

Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, посредством которых были выведены формулы (6) и (7), получим:

$$AE_1=\frac{AC\cdot r_1}{r_1+r_3}, \tag{8}$$

$$AD_1=\frac{AC\cdot r_1}{r_3-r_1}. \tag{9}$$

Определив построением отрезки AE_1 (8) и AD_1 (9), можем найти положение точек D_1 и E_1, а затем на отрезке D_1E_1, как на диаметре, построить окружность K_5.

При рассматриваемых нами данных (r_1, r_2, r_3, AB, BC и CA) окружности K_4 и K_5 пересекаются в двух точках O_1 и O_2. Точка O_1 лежит на окружности K_4, а потому

$$AO_1:BO_1=r_1:r_2. \tag{10}$$

Но точка O_1 лежит также на окружности K_5 и, следовательно,

$$AO_1:CO_1=r_1:r_3. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает, что выполняется условие (1). Поэтому, описав из точки O_1 окружности радиусами, равными O_1A, O_1B и O_1C, получим построение, требуемое в обратной задаче.

Решив обратную задачу, можем выполнить построение, требуемое в предложенной задаче. Действительно, если соединим точку O_1 с точками A, B, C, то получим углы: $\angle AO_1B$, $\angle BO_1C$, $\angle CO_1A$, которые должны быть равны тем центральным углам, какие получим, если в данные концентрические окружности K_1, K_2, K_3 (рис. 319) впишем искомый треугольник, подобный $\triangle ABC$. Приняв это во внимание, из центра O трёх данных концентрических окружностей проводим произвольный луч OA_0 и обозначаем буквою A_1 точку, в которой этот луч пересечёт окружность K_1. На луче OA_0 при точке O построим угол A_0OB_0, равный углу AO_1B. Обозначим буквою B_1 точку, в которой луч OB_0 пересечёт окружность K_2.

Далее, на луче OB_0 при точке O строим угол B_0OC_0 так, чтобы угол A_0OC_0 оказался равным углу AO_1C, и обозначаем буквою C_1 точку, в которой луч OC_0 пересекает окружность K_3. Соединив точки A_1, B_1 и C_1, получим искомый треугольник. Действительно, $\triangle A_1B_1C \backsim \triangle ABC$ и его вершины лежат на данных концентрических окружностях K_1, K_2 и K_3.

Для получения другого треугольника, удовлетворяющего условию предложенной задачи, необходимо выполнить следующие операции:

1) Соединить отрезками точку O_2 с точками A, B и C.

2) Провести из центра O данных концентрических окружностей луч OA'.

3) На луче OA' при точке O построить угол $A'OB'$, равный углу AO_2B.

4) На луче OB' при точке O так построить угол $B'OC'$, равный углу BO_2C, чтобы $A'OC'$ оказался равным углу AO_2C.

5) Точки, в которых лучи OA', OB' и OC' пересекут соответственно окружности K_1, K_2 и K_3, обозначим какими-нибудь буквами, например A_2, B_2, C_2.

$\triangle A_2B_2C_2$ представит собою второе решение рассматриваемой задачи.

271. *В противоположные углы данного параллелограма вписать два равных круга, касающиеся один другого в некоторой точке O.*

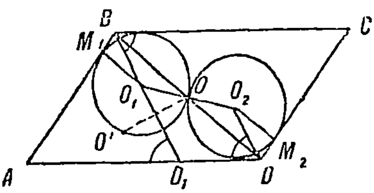


Рис. 321.

Анализ. Допустим, что чертёж 321 представляет решение задачи.

Заметим прежде всего, что центры искомых кругов O_1 и O_2 и точка их касания O лежат на одной прямой O_1O_2. Кроме того, точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисах противоположных углов параллелограма, так как круги должны быть вписаны в эти углы (B и D).

Биссектрисы противоположных углов параллелограма параллельны. Действительно,

$$\angle ABC = \angle ADC,$$

как противоположные углы параллелограма, а потому

$$\angle ABO_1 = \angle CBO_1 = \angle CDO_2 = \angle ADO_2. \qquad (1)$$

Если продолжим биссектрису BO_1 до пересечения с прямой AD в некоторой точке D_1, то получим, что

$$\angle CBD_1 = \angle BD_1A, \qquad (2)$$

как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD_1.

Из (1) и (2) вытекает, что

$$\angle BD_1A = \angle ADO_2. \qquad (3)$$

Равенство (3) показывает, что при пересечении двух прямых O_2D и BD_1 линией AD соответственные углы равны, а потому $DO_2 \parallel D_1B$, т. е.

$$DO_2 \parallel BO_1. \qquad (4)$$

Если из точек O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1M_1 и O_2M_2 на стороны AB и CD, то получим прямоугольные треугольники BM_1O_1 и DM_2O_2, которые равны по катету ($O_1M_1 = O_2M_2$) и противолежащему углу ($\angle O_1BM_1 = \angle O_2DM_2$).

Так как $\triangle BM_1O_1 = \triangle DM_2O_2$, то равны и их гипотенузы:

$$BO_1 = DO_2. \qquad (5)$$

Теперь рассмотрим треугольники BO_1O и DO_2O.

У этих треугольников: 1) $\angle BO_1O = \angle DO_2O$, как накрестлежащие при параллельных BO_1 и DO_2 и секущей O_1O_2, 2) $O_1O = O_2O$, как радиусы равных кругов, и 3) $BO_1 = DO_2$.

Следовательно, на основании 1-го признака равенства,

$$\triangle BO_1O = \triangle DO_2O. \qquad (6)$$

Из равенства треугольников BO_1O и DO_2O вытекает, что

$$\angle O_1OB = \angle O_2OD. \qquad (7)$$

Так как эти углы лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 и равны, то они вертикальные.

Следовательно, отрезки BO и OD лежат на одной прямой и составляют диагональ параллелограма (BD).

Поскольку $BO = OD$ (6), то точка O лежит на пересечении диагоналей параллелограма.

Построение. 1) Определяем точку O пересечения диагоналей параллелограма. 2) Проводим биссектрису BD_1 угла ABC. 3) Определяем центр O_1 той окружности K, которая проходит через точку O и касается сторон угла ABC. 4) На прямой O_1O откладываем отрезок OO_2, равный отрезку OO_1 и расположенный с ним по разные стороны от точки O. 5) Из точек O_1 и O_2, как центров, радиусами, равными отрезку OO_1, описываем искомые окружности.

Примечание. Задача может иметь два, одно и ни одного решения.

272. *Дано квадратное уравнение* $x^2-px-q^2=0$, *причём* $p>0$, *и требуется построить его корни:*

$$x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}, \qquad (1)$$

$$x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}. \qquad (2)$$

Построение. 1) Строим прямоугольный треугольник ABC (рис. 322) по двум катетам

$$AC=\frac{p}{2} \text{ и } BC=q. \qquad (3)$$

Получим, что

$$AB=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}. \qquad (4)$$

2) Из точки A, как центра, радиусом, равным отрезку AB, проводим полуокружность, концы которой лежат на продолжениях отрезка AC.

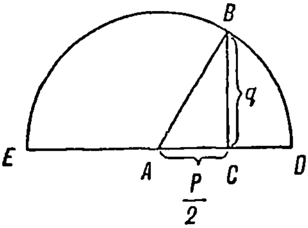


Рис. 322.

3) По построению,

$$CE=AC+AE=AC+AB,$$

откуда в силу (3) и (4), получим:

$$CE=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2},$$

т. е. отрезок CE является одним из корней (1) рассматриваемого квадратного уравнения. 4) Для получения второго корня (2) этого же уравнения надо из отрезка $\frac{p}{2}$ вычесть отрезок $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}$, т. е. выполнить следующую операцию: $AC-AD$.

Ясно, что отрезок CD представляет собою абсолютную величину второго корня данного квадратного уравнения.

273. *Дано уравнение* $x^2+px-q^2=0$ ($p>0$) *и требуется построить его корни:*

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}, \qquad (1)$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}. \qquad (2)$$

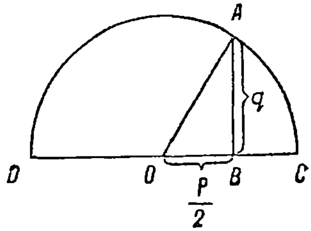


Рис. 323.

Построение. 1) Строим прямоугольный треугольник ABO (рис. 323) по двум катетам

$$OB=\frac{p}{2} \text{ и } AB=q \qquad (3)$$

и находим значение гипотенузы:

$$AO=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}. \tag{4}$$

2) Из точки O, как центра, радиусом, равным AO, проводим полуокружность до пересечения с продолжением отрезка OB в точках D и C. 3) Из чертежа видим, что

$$BC=OC-OB=AO-OB,$$

откуда, в силу (4) и (3), получим:

$$BC=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}-\frac{p}{2}. \tag{5}$$

4) Далее имеем:

$$BD=DO+OB=AO+OB,$$

т. е. (4) и (5)

$$BD=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}+\frac{p}{2}. \tag{6}$$

Сопоставляя (1) и (2) с (5) и (6), видим, что отрезок BC есть один из корней (1) уравнения, а отрезок BD есть абсолютное значение другого корня (2), который меньше нуля.

274. *Дано квадратное уравнение $x^2-px+q^2=0$ $(p>0)$ и требуется построить его корни, т. е. отрезки x_1 и x_2, определяемые следующими формулами:*

$$x_1=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}, \tag{1}$$

$$x_2=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}. \tag{2}$$

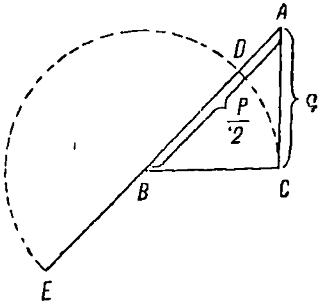


Рис. 324.

Построение. Строим прямоугольный треугольник ABC (рис. 324), гипотенузою AB которого является отрезок $\frac{p}{2}$, а катетом AC—отрезок q. Тогда найдём другой катет BC:

$$BC=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}.$$

Из точки B, как центра, радиусом, равным отрезку BC, засекаем точки D и E на отрезке AB и на его продолжении.

Из чертежа видим, что

$$AD=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}$$

и

$$AE=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2},$$

т. е. отрезки AD и AE являются корнями (1) и (2) уравнения.

Построить корни уравнения возможно только в том случае, если

$$\frac{p}{2} \geqslant q.$$

275. *Построить корни уравнения* $x^2+px+q^2=0$ $(p>0)$, *т. е. отрезки* x_1 *и* x_2, *определяемые следующими формулами:*

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}, \tag{1}$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}. \tag{2}$$

Примечание. Формулам (1) и (2) можно придать такой вид:

$$x_1=-\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}\right), \tag{3}$$

$$x_2=-\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}\right). \tag{4}$$

Ясно, что оба корня данного уравнения — отрицательные величины и построить можно лишь отрезки, равные абсолютным значениям корней.

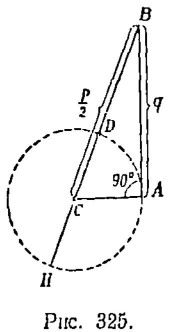


Рис. 325.

Построение. 1) Строим прямоугольный треугольник ABC (рис. 325) по гипотенузе $BC=\frac{p}{2}$, катету $AB=q$, и получаем значение другого катета:

$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}.$$

2) На гипотенузе BC от точки C отложим отрезок CD, равный AC, получим:

$$BD=BC-AC=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}. \tag{5}$$

3) Если на продолжении гипотенузы BC от точки C отложим отрезок CH, равный AC, то получим:

$$BH=BC+CH=BC+AC=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}. \tag{6}$$

Сопоставляя (3) с (5) и (4) с (6) видим, что отрезки BD и BH представляют собою абсолютные значения корней уравнения.

Построение возможно, если $\frac{p}{2}\geqslant q$.

276. *По данному периметру $2p$ построить прямоугольник, равновеликий данному квадрату.*

Анализ. Допустим, что задача решена и $ABCD$ есть искомый прямоугольник (рис. 326).

В таком случае, по условию,

$$AB+BC+CD+DA=2p. \qquad (1)$$

Но

$$CD=AB$$

и

$$AD=BC, \qquad (2)$$

а потому равенству (1) можем придать такой вид:

$$2(AB+BC)=2p,$$

значит,

$$AB+BC=p. \qquad (3)$$

Кроме того, по условию,

$$AB\cdot BC=k^2, \qquad (4)$$

где k — сторона данного квадрата.

Итак, задача сводится к следующей: по сумме (3) и произведению (4) отрезков найти эти отрезки.

Построение. 1) Строим отрезок KM, равный p. 2) На отрезке KM, как на диаметре, строим полуокружность. 3) Проводим прямую $K'M'$, которая параллельна диаметру KM и отстоит от него на расстоянии k.

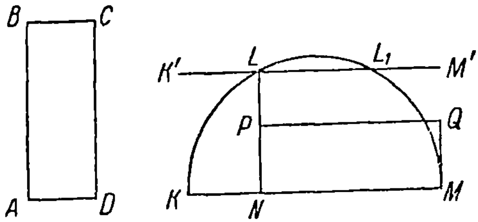


Рис. 326.

Допустим, что L является точкой, в которой прямая $K'M'$ пересекает построенную полуокружность.

4) Из точки L опускаем перпендикуляр LN на диаметр KM. 5) На отрезке LN от точки N отложим отрезок NP, равный KN. 6) Проводим дуги: из точки P, как из центра, радиусом, равным MN, а из точки M — радиусом, равным NP. Допустим, что Q является точкой пересечения этих дуг. 7) Соединяем отрезками точку Q с точками M и P.

$MNPQ$ — искомый прямоугольник.

Доказательство. По построению, диаметр KM равен p:

$$KM=p. \qquad (1)$$

Соединив отрезками точку L с точками K и M, получим прямоугольный треугольник KLM.

Отрезок LN есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, и, значит, его квадрат равен произведению отрезков гипотенузы KN и NM.

По построению, $LN=k$, следовательно,

$$KN\cdot NM=k^2. \tag{2}$$

Из чертежа видно, что

$$KN+NM=KM,$$

откуда, в силу (1), получим:

$$KN+NM=p. \tag{3}$$

Так как $PN=KN$ по построению, то левая часть равенства (3) представляет собой полупериметр прямоугольника $MNPQ$, а, значит, полный периметр этого прямоугольника равен $2p$. Прямоугольник $MNPQ$ удовлетворяет всем требованиям условия задачи, а потому он является искомым.

Исследование. Прямая $K'M'$ может пересечь построенную нами полуокружность только в том случае, если отрезок k меньше её радиуса:

$$k<\frac{KM}{2}, \text{ т. е. } k<\frac{p}{2}.$$

Значит, если $0<k<\frac{p}{2}$, то задача имеет решение.

Если $k=\frac{p}{2}$, то и в этом случае задача имеет решение: искомой фигурой будет квадрат, сторона которого равна $\frac{p}{2}$, т. е. k.

Итак, задача имеет решение, если $k\leqslant\frac{p}{2}$.

277. *Построить треугольник, зная три его высоты* (h_a, h_b, h_c),

278. *Прямыми, выходящими из вершины параллелограма, разделить его площадь на три части, отношение которых* $m:n:p$.

279. *Из точки* P, *находящейся на стороне* AB *данного треугольника* ABC, *провести отрезки, делящие его площадь на четыре части, пропорциональные отрезкам* $m:n:p:q$.

280. *Внутри данного треугольника* ABC *требуется провести отрезок, который делит пополам и площадь и периметр этого треугольника.*

Анализ. Допустим, что HK (рис. 327) является искомым отрезком. В этом случае, по условию,

$$BH+BK=\frac{1}{2}(AB+BC+AC) \tag{1}$$

и

$$\text{пл. } \triangle HBK=\frac{1}{2}\text{ пл. } \triangle ABC. \tag{2}$$

Для краткости введём обозначения:

$2p$ — периметр данного треугольника,

a — сторона BC,

c — сторона AB,

x_1 — BH,

x_2 — BK. (3)

Тогда равенство (1) приобретёт такой вид:

$$x_1 + x_2 = p. \tag{4}$$

Разделим сторону BC пополам и середину её (точку D) соединим отрезком с точкой A. Тогда площадь $\triangle ABD$ будет равна половине площади $\triangle ABC$:

$$\text{пл. } \triangle ABD = \frac{1}{2} \text{ пл. } \triangle ABC. \tag{5}$$

Приняв во внимание, что $\triangle ABD$ и $\triangle HBK$ имеют общий угол B и что площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих этот угол, можем написать такую пропорцию:

$$\frac{\text{пл. } \triangle HBK}{\text{пл. } \triangle ABD} = \frac{BH \cdot BK}{AB \cdot BD}.$$

Отсюда, на основании равенства (2) и (5), получим:

$$\frac{BH \cdot BK}{AB \cdot BD} = 1, \text{ или } BH \cdot BK = AB \cdot BD. \tag{6}$$

В силу принятых обозначений (3), равенство (6) примет такой вид:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{ac}{2}. \tag{7}$$

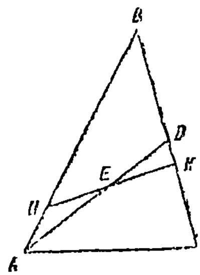


Рис. 327.

Из (4) и (7) вытекает, что x_1 и x_2 являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$x^2 - px + \frac{ac}{2} = 0.$$

Как строятся корни такого уравнения, мы уже знаем. Построив отрезки x_1 и x_2, откладываем от точки B на стороне BA отрезок BH, равный найденному отрезку x_1, а на стороне BC — отрезок BK, равный отрезку x_2. Соединив точки H и K, получаем искомый отрезок HK.

*281. *В данный квадрат EHKM* (рис. 328) *вписать параллелограм (ABCD), площадь которого в n раз меньше площади квадрата, а отношение диагонали квадрата к одной из диагоналей параллелограма (AC) равно q:p.*

Анализ. Допустим, что рис. 328 представляет собою решение рассматриваемой задачи. Легко убедиться в том, что диагонали квадрата и диагонали искомого параллелограма пересекаются в одной точке.

Те данные, которые имеются в условии задачи, позволяют определить длину одной из диагоналей параллелограма и его площадь.

Действительно,

$$AC:EK=p:q \qquad (1)$$

и

$$\text{пл. } ABCD=\frac{EH^2}{n}. \qquad (2)$$

В пропорции (1) нам известны три члена EK, p и q, а потому можем найти длину отрезка AC.

Если из точки O, как из центра, радиусом, равным половине найденного отрезка AC, проведём дугу до пересечения со стороною HE в точке A, а затем из этой точки проведём отрезок через точку O до встречи со стороною KM в некоторой точке C, то диагональ AC искомого параллелограма будет построена.

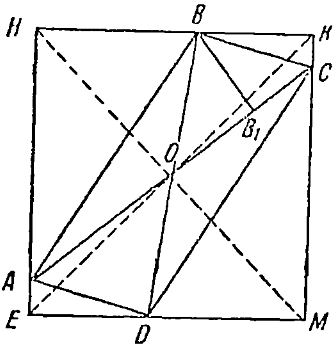


Рис. 328.

Из (2) вытекает, что

$$\text{пл. } \triangle ABC=\frac{1}{2}\text{ пл. } ABCD=\frac{EH^2}{2n}. \qquad (3)$$

Определив площадь треугольника ABC и длину его основания (AC), можно найти длину перпендикуляра BB_1, опущенного из его вершины B на отрезок AC.

Действительно,

$$\text{пл. } \triangle ABC=\frac{AC\cdot BB_1}{2}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$\frac{AC\cdot BB_1}{2}=\frac{EH^2}{2n}.$$

Преобразуем последнее равенство в пропорцию:

$$BB_1:EH=\frac{EH}{n}:AC. \qquad (5)$$

Далее можем построить точку B, так как знаем, что она находится на отрезке HK и отстоит от прямой AC на расстоянии BB_1.

Наконец, соединив отрезками точку B с концами отрезка AC, получим $\triangle ABC$, после чего легко закончить построение искомого параллелограма.

282. *Построить угол x, определяемый следующей формулой:*

$$\cos x=\frac{(a-b)t}{2ab}, \qquad (1)$$

где a, b, t — данные отрезки, причём $0<\frac{(a-b)t}{2ab}<1$.

Построение. 1) Строим отрезок m, определяемый формулой:

$$m=a-b,$$

и получаем:

$$\cos x = \frac{mt}{2ab} \qquad (2)$$

2) Формуле (2) придаём такой вид:

$$\frac{a \cos x}{t} = \frac{m}{2b},$$

откуда, введя обозначения

$$n = a \cos x, \qquad (3)$$

получим:

$$\frac{n}{t} = \frac{m}{2b}. \qquad (4)$$

Строим отрезок n, определяемый пропорцией (4).

3) Из (3) вытекает, что

$$\cos x = \frac{n}{a}.$$

Построив прямоугольный треугольник MNP, в котором катет MN равен n, а гипотенуза NP равна a, получим:

$$\angle MNP = x.$$

283. *Построить $\triangle ABC$, если даны две его стороны ($BC = a$ и $AC = b$) и длина отрезка биссектрисы ($CT = t$) внешнего угла, образуемого меньшею стороною (AC) и продолжением большей (BC).*

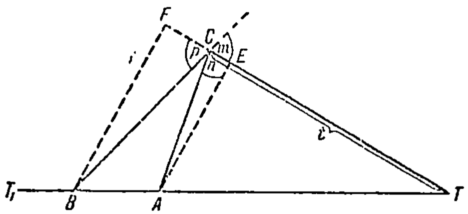


Рис. 329.

Анализ. Пусть рис. 329 представляет собою искомый $\triangle ABC$. Если из точек A и B опустим перпендикуляры AE и BF на отрезок CT (или на его продолжение), то получим четыре прямоугольных треугольника: AET, BFT, ACE и BCF.

Прямоугольные треугольники AET и BFT имеют общий острый угол ATC, а потому,

$$\triangle BFT \backsim \triangle AET. \qquad (1)$$

По условию,

$$\angle m = \angle n$$

и, кроме того,

$$\angle m = \angle p,$$

как вертикальные; значит,

$$\angle n = \angle p$$

и, следовательно, прямоугольные треугольники ACE и BCF подобны:

$$\triangle BCF \backsim \triangle ACE. \qquad (2)$$

Введём обозначения:

$$CF = x,$$
$$CE = y. \tag{3}$$

Из (2) имеем:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

и, значит,

$$y = \frac{b}{a} \cdot x. \tag{4}$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$\frac{FT}{ET} = \frac{BF}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}. \tag{5}$$

Так как (см. рис. 329)

$$\left.\begin{aligned} FT &= t + x \\ \text{и} \qquad ET &= t - y, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то из (5) и (6) получим:

$$\frac{t+x}{t-y} = \frac{a}{b}.$$

Если в это равенство вместо y подставим его значение, взятое из (4), то придём к такому равенству:

$$\frac{t+x}{t-\frac{bx}{a}} = \frac{a}{b},$$

т. е.

$$(t+x)\,b = at - bx,$$

откуда

$$x = \frac{(a-b)\,t}{2b}. \tag{7}$$

Из (4) и (7) имеем:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \frac{(a-b)\,t}{2b},$$

т. е.

$$y = \frac{(a-b)\,t}{2a}. \tag{8}$$

Построение. 1) Строим отрезок CT, равный данному отрезку t. 2) Строим отрезок y, определяемый формулою (8). 3) На отрезке CT от точки C откладываем отрезок CE, равный найденному отрезку y. 4) Приняв CE за катет, строим на нём прямоугольный треугольник ACE, гипотенузою (AC) которого является данный отрезок b. 5) Из точки T через точку A проводим луч TT'. 6) Из точки C, как центра, радиусом, равным данному отрезку a, засекаем на луче AT' точку B.

Соединив отрезком точки B и C, получим искомый треугольник ABC.

Рассматриваемую задачу можно свести к построению треугольника по трём сторонам. С этой целью достаточно по данным значениям a, b, t определить длину стороны AB.

Согласно чертежу

$$AB = BT - AT. \qquad (9)$$

Поэтому сначала определяем BT и AT.

В прямоугольном треугольнике BCF

$$BF^2 = a^2 - x^2. \qquad (10)$$

В прямоугольном треугольнике ACE

$$AE^2 = b^2 - y^2. \qquad (11)$$

В прямоугольном треугольнике BFT

$$BT^2 = BF^2 + FT^2. \qquad (12)$$

Приняв во внимание (6) и (10), можем равенству (12) придать такой вид:

$$BT^2 = a^2 - x^2 + (t + x)^2,$$

т. е.

$$BT^2 = a^2 - x^2 + t^2 + 2tx + x^2,$$

или

$$BT^2 = a^2 + t^2 + 2tx. \qquad (13)$$

Подставив в (13) значение x, взятое из (7), получим:

$$BT^2 = a^2 + t^2 + 2t \cdot \frac{(a-b)\,t}{2b} = a^2 + t^2 + t^2\left(\frac{a-b}{b}\right),$$

откуда

$$BT^2 = a^2 + t^2\left(1 + \frac{a-b}{b}\right),$$

т. е.

$$BT^2 = a^2 + \frac{at^2}{b}$$

и

$$BT = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{t^2}{ab}\right)} = a\sqrt{1 + \frac{t^2}{ab}}. \qquad (14)$$

В прямоугольном треугольнике AET

$$AT^2 = AE^2 + ET^2. \qquad (15)$$

Подставив в правую часть этого равенства, вместо AE и ET, их значения, взятые из (11) и (6), получим:

$$AT^2 = b^2 - y^2 + (t - y)^2,$$

т. е.

$$AT^2 = b^2 - y^2 + t^2 - 2ty + y^2,$$

или

$$AT^2 = b^2 + t^2 - 2ty. \qquad (16)$$

Подставив в (16) значение y, взятое из (8), получим:

$$AT^2 = b^2 + t^2 - 2t\frac{(a-b)\,t}{2a} = b^2 + t^2 - \frac{t^2(a-b)}{a} = b^2 + t^2\left(1 - \frac{a-b}{a}\right) = b^2 + \frac{bt^2}{a},$$

откуда

$$AT=\sqrt{b^2+\frac{b}{a}t^2}=\sqrt{b^2\left(1+\frac{t^2}{ab}\right)},$$

т. е.

$$AT=b\sqrt{1+\frac{t^2}{ab}}. \qquad (17)$$

Подставив в (9) найденные значения BT из (14) и AT из (17), получим:

$$AB=a\sqrt{1+\frac{t^2}{ab}}-b\sqrt{1+\frac{t^2}{ab}},$$

т. е.

$$AB=(a-b)\sqrt{1+\frac{t^2}{ab}}. \qquad (18)$$

После этого можем построить $\triangle ABC$ по трём сторонам: a, b и AB (18). Обозначая буквою c третью сторону (AB) искомого треугольника, получим из (18):

$$c=(a-b)\sqrt{1+\frac{t^2}{ab}}. \qquad (19)$$

Построение.

Порядок операций	Какой отрезок строим	Какой формулой определяется этот отрезок	Что получаем в результате выполненного построения
1	p	$p=a-b$	$c=p\sqrt{1+\frac{t^2}{ab}}$
2	q	$q=\sqrt{ab}$	$c=p\sqrt{1+\frac{t^2}{q^2}}=\frac{p}{q}\sqrt{q^2+t^2}$
3	u	$u=\sqrt{q^2+t^2}$	$c=\frac{pu}{q}$
4	c	$c=\frac{pu}{q}$	Отрезок c
5	Строим треугольник, стороны которого равны a, b, c		Искомый треугольник

283а. *Решить предыдущую задачу посредством применения тригонометрии.*

Анализ. Допустим, что рис. 330 изображает искомый треугольник ABC. С ним конструктивно связан $\triangle ACT$, в котором нам известны две стороны: b и t. Чтобы построить этот треугольник, достаточно определить величину угла ACT.

Введём обозначения:

$$\angle ACT=x,$$
$$\angle ABC=\beta.$$

По условию,

$$\angle ACT = \angle B'CT,$$

а потому

$$\angle B'CT = x.$$

Опустим из точки C перпендикуляр CC_1 на отрезок AB (или на его продолжение).

Рассматривая чертёж, видим, что

$$\angle ACB = 180° - 2x, \tag{1}$$

$$\angle CAC_1 = \beta + 180° - 2x, \tag{2}$$

$$\angle CTC_1 = 180° - (x + \angle CAC_1) = 180° - (x + \beta + 180° - 2x),$$

т. е.

$$\angle CTC_1 = x - \beta. \tag{3}$$

В прямоугольном треугольнике BCC_1:

$$CC_1 = a \cdot \sin\beta. \tag{4}$$

В прямоугольном треугольнике ACC_1:

$$CC_1 = b \cdot \sin \angle CAC_1.$$

Подставив в эту формулу значение угла CAC_1, взятое из (2), получим:

$$CC_1 = b \cdot \sin(180° + \beta - 2x),$$

или

$$CC_1 = -b \cdot \sin(\beta - 2x),$$

т. е.

$$CC_1 = b \cdot \sin(2x - \beta). \tag{5}$$

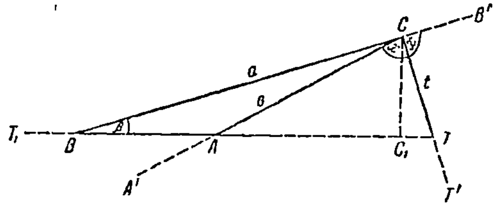


Рис. 330.

В прямоугольном треугольнике CC_1T:

$$CC_1 = t \cdot \sin \angle CTC_1.$$

Подставив в эту формулу значение угла CTC_1, взятое из (3), получим:

$$CC_1 = t \cdot \sin(x - \beta). \tag{6}$$

Из (4) и (6) имеем

$$a \cdot \sin\beta = t \cdot \sin(x - \beta). \tag{7}$$

Из (4) и (5) получим:

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin(2x - \beta). \tag{8}$$

Равенствам (7) и (8) можно придать такой вид:

$$a \cdot \sin\beta = t \cdot \sin x \cos\beta - t \cdot \cos x \cdot \sin\beta,$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin 2x \cos\beta - b \cdot \cos 2x \cdot \sin\beta. \tag{9}$$

Желая исключить из уравнений (9) угол β, можем сначала придать им такой вид:

$$(a + t \cdot \cos x)\sin\beta = t \cdot \sin x \cos\beta, \tag{10}$$

$$(a + b \cdot \cos 2x)\sin\beta = b \cdot \sin 2x \cos\beta. \tag{11}$$

Затем, разделив почленно (10) на (11), получим:

$$\frac{a+t\cdot\cos x}{a+b\cdot\cos 2x}=\frac{t}{2b\cdot\cos x}. \tag{12}$$

Так как

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

то равенство (12) принимает такой вид:

$$\frac{a+t\cdot\cos x}{a+2b\cdot\cos^2 x - b}=\frac{t}{2b\cdot\cos x},$$

откуда

$$2ab\cos x + 2bt\cos^2 x = at + 2bt\cos^2 x - bt,$$

т. е.

$$2ab\cos x = (a-b)\,t,$$

и, значит,

$$\cos x = \frac{(a-b)\,t}{2ab}. \tag{13}$$

Формула (13) даёт возможность определить угол x, после чего легко построить $\triangle ACT$ и $\triangle ABC$.

Построение. 1) Строим угол x, определяемый формулой (13). Найденный угол x обозначим так: $\angle A'CT'$. 2) На сторонах CA' и CT' угла $A'CT'$ от точки C отложим отрезки CA и CT, соответственно равные b и t. 3) Из точки T через точку A проведём луч TT_1. 4) Из точки C, как центра, радиусом, равным a, засекаем на луче AT_1 точку B. 5) Соединив отрезком точки B и C, получим искомый треугольник ABC.

Исследование. Внешний угол треугольника меньше $180°$, т. е. $2x < 180°$ и, значит, $x < 90°$.

Следовательно,

$$0 < \cos x < 1. \tag{14}$$

Из (13) и (14) вытекает, что

$$\frac{(a-b)\,t}{2ab} < 1. \tag{15}$$

Такова (15) должна быть зависимость между отрезками a, b и t, чтобы задача имела решение.

Неравенству (15) можно придать такой вид:

$$t < \frac{2ab}{a-b}. \tag{16}$$

284. *Построить треугольник* (ABC, рис. 331) *по двум сторонам* ($BC=a$ *и* $AC=b$) *и биссектрисе* ($CD=s$) *образуемого ими угла* (ACB).

I. Решим задачу посредством основных построений.

Анализ. Пусть ABC—искомый треугольник. Не имея возможности построить его непосредственно, попробуем получить такой треугольник, который можно было бы построить по данным элементам и который был бы конструктивно связан с искомым треугольником.

С этой целью из точки B проводим отрезок, параллельный биссектрисе CD до встречи с продолжением стороны AC в некоторой точке H.

Из этого вытекает, что

$$\triangle ABH \backsim \triangle ADC,$$

и, значит,

$$\frac{HB}{CD} = \frac{AH}{AC}. \qquad (1)$$

Так как, по условию,

$$\angle ACD = \angle BCD$$

и (по построению)

$$BH \parallel CD,$$

то

$$BC = CH = a,$$

откуда

$$AH = AC + CH = b + a.$$

Но

$$CD = s,$$

и, значит, пропорция (1) примет следующий вид:

$$\frac{HB}{s} = \frac{a+b}{b},$$

откуда

$$HB = \frac{(a+b)s}{b} = \frac{as}{b} + s. \qquad (2)$$

Отрезок HB, определяемый формулой (2), можно построить; тогда окажется, что в треугольнике BCH, конструктивно связанном с искомым треугольником ABC, нам известны все три стороны.

Построив $\triangle BCH$, можем построить и искомый $\triangle ABC$.

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый следующей формулой:

$$x = \frac{as}{b} + s.$$

2) Строим треугольник BCH по трём сторонам:

$BC = a$, $CH = a$ и $HB = x$.

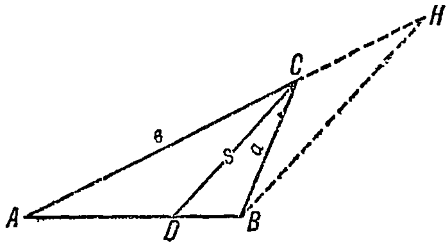


Рис. 331.

3) На продолжении отрезка CH от точки C откладываем отрезок CA, равный данному отрезку b. 4) Соединяем точки A и B отрезком прямой.

$\triangle ABC$—искомый.

Исследование. Чтобы построить искомый треугольник ABC, надо предварительно построить вспомогательный треугольник BCH, конструктивно связанный с треугольником ABC.

Если окажется невозможным построить $\triangle BCH$, то, значит, нет и $\triangle ABC$, т. е. задача не имеет решения. Построить же треугольник BCH можно в том случае, когда сумма любых двух его сторон больше третьей.

Стороны треугольника BCH таковы:

$$a, \ a, \ \frac{as}{b}+s.$$

Значит, для построения вспомогательного треугольника BCH должны иметь место следующие неравенства:

$$a+a > \frac{as}{b}+s, \text{ т. е. } 2a > \frac{(a+b)\cdot s}{b} \qquad (1)$$

и

$$a+\frac{as}{b}+s > a, \text{ т. е. } \frac{as}{b}+s > 0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) ничего не даёт, потому что выражение $\frac{as}{b}+s$ никогда не равно нулю. А из (1) получаем:

$$s < \frac{2ab}{a+b}. \qquad (3)$$

Итак, чтобы рассматриваемая задача имела решение, необходимо чтобы выполнялось неравенство (3).

II. Решим эту же задачу алгебраическим методом.

Анализ. Допустим, что задача решена и $\triangle ABC$ (рис. 332) является искомым. Для определённости положим, что $a > b$.

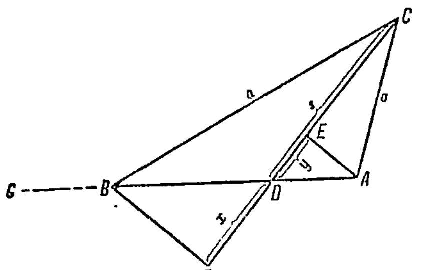


Рис. 332.

По условию, CD—биссектриса $\angle ACB$, а потому $\angle ACD = \angle BCD$. Опустив из точек A и B перпендикуляры AE и BF на отрезок CD и на его продолжение, получим две пары подобных прямоугольных треугольников:

$$\triangle ACE \backsim \triangle BCF \qquad (1)$$

и

$$\triangle ADE \backsim \triangle BDF. \qquad (2)$$

Прямоугольные треугольники (1) и (2) конструктивно связаны с искомым треугольником ABC. Построив один из этих прямоугольных треугольников, легко построить искомый. Выясним, нельзя ли построить $\triangle ACE$.

Гипотенуза (b) этого треугольника нам известна, а потому для его построения надо определить либо один из его катетов, либо один из острых углов, либо другую какую-нибудь величину, дающую возможность построить $\triangle ACE$. Попробуем определить катет CE.

Из чертежа видим, что

$$CE = s - DE$$

и

$$CF = s + DF. \tag{3}$$

Введём обозначения:

$$DF = x, \ DE = y. \tag{4}$$

В силу (4), равенства (3) примут следующий вид:

$$CE = s - y, \tag{5}$$

$$CF = s + x. \tag{6}$$

Из (1) вытекает, что

$$\frac{BC}{CF} = \frac{AC}{CE}, \text{ т. е. } \frac{a}{s+x} = \frac{b}{s-y}. \tag{7}$$

Из (2) имеем:

$$\frac{DF}{DE} = \frac{BD}{AD}, \text{ т. е. } \frac{x}{y} = \frac{BD}{AD}. \tag{8}$$

Но, по условию, CD есть биссектриса угла ACB, а потому

$$\frac{BD}{AD} = \frac{a}{b}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получим:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$y = \frac{bx}{a}. \tag{10}$$

Если в равенстве (7) заменим y его значением, взятым из (10), то придём к такой пропорции:

$$\frac{a}{s+x} = \frac{b}{s - \frac{b}{a}x},$$

откуда найдём, что

$$x = \frac{(a-b)s}{2b}, \tag{11}$$

т. е. (4)

$$DF = \frac{(a-b)s}{2b}. \tag{12}$$

Из (10) и (11) вытекает, что

$$y = \frac{(a-b)s}{2a}, \tag{13}$$

т. е. (4)

$$DE = \frac{(a-b)s}{2a}. \tag{14}$$

Формулы (11) и (13) дают возможность определить CE (5) и CF (6):

$$CF = s + \frac{(a-b)s}{2b}, \text{ откуда } CF = \frac{(a+b)s}{2b}; \tag{15}$$

$$CE = s - \frac{(a-b)s}{2a}, \text{ откуда } CE = \frac{(a+b)s}{2a}. \tag{16}$$

Отрезки a, b, s нам известны, а потому можем определить отрезок CE, а затем построить $\triangle ACE$ и $\triangle ABC$.

Построение. 1) Строим отрезок CE, определяемый формулой (16). 2) На отрезке CD от точки C отложим найденный отрезок CE. 3) Строим прямоугольный треугольник ACE по катету CE и гипотенузе b. 4) Из точки A через точку D проведём луч AG. 5) Из точки C, как центра, радиусом, равным отрезку a, проводим дугу до пересечения с лучом DG в точке B. 6) Соединив отрезком точки B и C, получим искомый $\triangle ABC$.

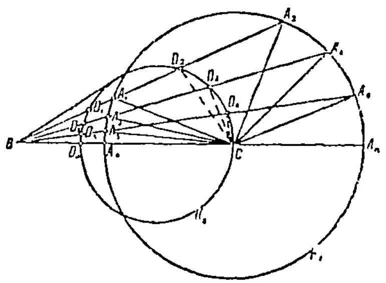


Рис. 333.

Примечание. Главным звеном изложенного решения является определение длины отрезка CE (16), но можно было бы, вместо CE, определить отрезок CF (15), а затем построить $\triangle BCF$ и $\triangle ABC$.

Исследование. Выясним, какова должна быть зависимость между размерами отрезков a, b, s, чтобы рассматриваемая задача имела решение.

Если, построив отрезок BC, равный a (рис. 333), опишем из точки C, как центра, окружность K_1 радиусом, равным b, то, соединив любую точку этой окружности с точками C и B отрезками прямой, получим все те треугольники:

$$\triangle BCA_1,\ \triangle BCA_2,\ \ldots, \tag{17}$$

которые имеют две стороны, порознь равные отрезкам a и b. Поэтому, если данная длина биссектрисы s такова, что возможно построить треугольник, удовлетворяющий условию задачи, то он должен находиться среди этого бесчисленного множества треугольников (17).

В треугольниках (17) точки D_1, D_2, D_3, ... (18) биссектрис CD_1, CD_2, CD_3, ... углов BCA_1, BCA_2, BCA_3, ... (19) делят отрезки BA_1, BA_2, BA_3, ... (20) в отношении $a:b$.

Геометрическим местом точек, делящих в данном отношении расстояния между данною точкою и точками данной окружности, является окружность, определённым образом построенная.

Значит, точки D_1, D_2, D_3, ... образуют окружность, и мы можем построить её следующим образом.

Из точки B проведём луч через точку C, являющуюся центром окружности K_1. Этот луч пересечёт окружность K_1 в некоторых точках A_0 и A_n.

На этом луче (BA_n) построим отрезок, концы которого делят в отношении $a:b$ как отрезок BA_0, так и отрезок BA_n.

Ту точку, которая делит отрезок BA_0 в данном отношении ($a:b$), обозначим буквою D_0:

$$BD_0:D_0A_0=a:b \tag{21}$$

и примем во внимание, что точка C делит отрезок BA_n в том же отношении $(a:b)$:

$$BC:CA_n = a:b,$$

так как, по построению,

$$BC = a \text{ и } CA = b. \tag{22}$$

Построив на отрезке D_0C, как на диаметре, окружность K_2, можем сказать, что, соединив любую точку этой окружности с точкою C, получим хорды, являющиеся биссектрисами углов (19) BCA_1, BCA_2, BCA_3, ...

Длина хорды не может быть равной нулю и больше диаметра, а потому в треугольниках (17) BCA_1, BCA_2, ... длина s любой из биссектрис

$$CD_1,\ CD_2,\ CD_3,\ \ldots \tag{23}$$

углов (19) BCA_1, BCA_2, BCA_3, ... должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$0 < s \leqslant D_0C. \tag{24}$$

Определим длину отрезка D_0C.

Из чертежа видим, что

$$D_0C = D_0A_0 + A_0C. \tag{25}$$

Отрезок D_0A_0 находим посредством следующих действий.

$$BA_0 = BC - A_0C. \tag{26}$$

Так как

$$BC = a$$

и

$$A_0C = b, \tag{27}$$

то, значит,

$$BA_0 = a - b. \tag{28}$$

Приняв во внимание, что отрезок BA_0 точкою D_0 делится (21) в отношении $a:b$, составляя производную пропорцию, получим:

$$\frac{BD_0 + D_0A_0}{D_0A_0} = \frac{a+b}{b}; \quad \text{или} \quad \frac{BA_0}{D_0A_0} = \frac{a+b}{b},$$

откуда следует:

$$D_0A_0 = \frac{(a-b)\cdot b}{a+b}. \tag{29}$$

Подставив в (25) значения D_0A_0 и A_0C, взятые из (29) и (27), получим:

$$D_0C = \frac{(a-b)\,b}{a+b} + b,$$

откуда

$$D_0C = \frac{2ab}{a+b}. \tag{30}$$

В силу (30), неравенства (24) примут такой вид:

$$0 < s \leqslant \frac{2ab}{a+b}. \tag{31}$$

При

$$s = \frac{2ab}{a+b} \tag{32}$$

три точки A, B, C лежат на одной прямой, и, следовательно, в этом случае (32) треугольника (ABC) нет.

Значит, неравенства (31) надо переписать так:

$$0 < s < \frac{2ab}{a+b}. \tag{33}$$

Биссектриса s всегда представляет собою положительную величину, а потому два неравенства (33), определяющие s, можно заменить одним:

$$s < \frac{2ab}{a+b}. \tag{34}$$

Неравенство (34) показывает, какова должна быть зависимость между отрезками a, b, s, чтобы рассматриваемая задача имела решение.

Из этого неравенства вытекают следующие порознь равносильные ему неравенства:

$$a > \frac{bs}{2b-s}$$

и

$$b > \frac{as}{2a-s}. \tag{35}$$

Примечание. Рассматриваемую задачу можно свести к построению треугольника по трём сторонам. Для этого достаточно по данным значениям a, b, s определить длину стороны AB.

Из чертежа (рис. 332) видим, что

$$AB = AD + BD, \tag{36}$$

а потому определим отрезки AD и BD.

В прямоугольном треугольнике BCF:

$$BF^2 = a^2 - CF^2.$$

Подставив в это равенство значение CF, взятое из (15), получим:

$$BF^2 = a^2 - \frac{(a+b)^2 s^2}{4b^2}. \tag{37}$$

В прямоугольном треугольнике BDF:

$$BD^2 = BF^2 + DF^2.$$

Этому равенству, в силу (37) и (12), можно придать такой вид:

$$BD^2 = \left[a^2 - \frac{(a+b)^2 s^2}{4b^2}\right] + \frac{(a-b)^2 s^2}{4b^2},$$

откуда

$$BD^2 = a^2 - \frac{as^2}{b}. \tag{38}$$

Из (1) имеем:

$$AE^2 : BF^2 = b^2 : a^2,$$

и, значит,

$$AE^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot BF^2.$$

Подставив в это равенство значение BF^2, взятое из (37), получим:

$$AE^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 - \frac{(a+b)^2 s^2}{4b^2}\right],$$

т. е.

$$AE^2 = b^2 - \frac{(a+b)^2 s^2}{4a^2}. \tag{39}$$

В прямоугольном треугольнике ADE:

$$AD^2 = AE^2 + DE^2.$$

Отсюда, в силу (39) и (14), получим:

$$AD^2 = \left[b^2 - \frac{(a+b)^2 s^2}{4a^2}\right] + \frac{(a-b)^2 s^2}{4a^2},$$

т. е.

$$AD^2 = b^2 - \frac{bs^2}{a}. \tag{40}$$

Из (38) и (40) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} BD &= \sqrt{a^2 - \frac{as^2}{b}} = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{s^2}{ab}\right)} = a\sqrt{1 - \frac{s^2}{ab}} \\ \text{и} \qquad AD &= \sqrt{b^2 - \frac{bs^2}{a}} = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{s^2}{ab}\right)} = b\sqrt{1 - \frac{s^2}{ab}}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Наконец, из (36) и (41) получаем:

$$AB = AD + BD = (a+b)\sqrt{1 - \frac{s^2}{ab}}. \tag{42}$$

Обозначая буквою c третью сторону (AB) искомого треугольника, получим из (42):

$$c = (a+b)\sqrt{1 - \frac{s^2}{ab}}. \tag{43}$$

Построение.

Порядок операций	Какой отрезок строим	Какой формулой определяется этот отрезок	Что получаем в результате выполненного построения
1	p	$p=a+b$	$c=p\sqrt{1-\frac{s^2}{ab}}$
2	q	$q=\sqrt{ab}$	$c=p\sqrt{1-\frac{s^2}{q^2}}$, т. е. $c=\frac{p}{q}\sqrt{q^2-s^2}$
3	t	$t=\sqrt{q^2-s^2}$	$c=\frac{pt}{q}$
4	c	$c=\frac{pt}{q}$	Отрезок c
5	Строим треугольник, стороны которого представляют собою известные нам отрезки a, b, c		Искомый треугольник

III. Решим эту же задачу методом геометрических мест.

Анализ. Допустим, что рис. 334 изображает искомый треугольник ABC. По условию, этот треугольник должен удовлетворять следующим четырём требованиям:

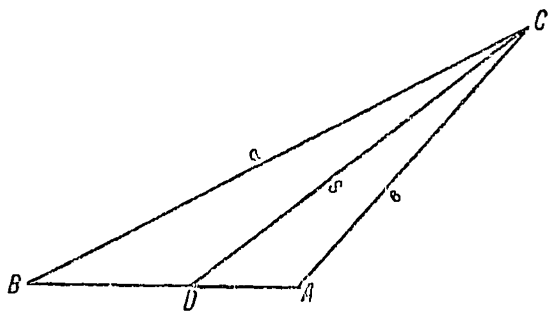


Рис. 334.

1) одна из его сторон (BC) равна a;

2) другая его сторона (AC) равна b;

3) отрезок CD, проведённый из вершины C внутри треугольника, делит третью сторону треугольника в отношении $a:b$;

4) этот отрезок CD равен s.

Если построим отрезок BC, равный a (рис. 334а), и соединим любую точку плоскости с точками B и C отрезками прямой, то получим треугольник, удовлетворяющий первому требованию условия задачи. Таких треугольников бесчисленное множество.

Из них можем выделить те, которые удовлетворяют первым двум требованиям условия задачи.

Действительно, геометрическим местом третьей вершины A таких треугольников будет окружность K_1, описанная из точки C, как центра, радиусом, равным b.

Обозначим буквами A_0 и A_n те точки, в которых окружность K_1 пересекает отрезок BC и его продолжение (рис. 334б).

Соединив отрезками точки B и C со всеми точками A_1, A_2, A_3, ... окружности K_1, получим бесчисленное множество треугольников:

$$BA_1C,\ BA_2C,\ BA_3C,\ \ldots, \qquad (1)$$

удовлетворяющих первым двум требованиям условия задачи.

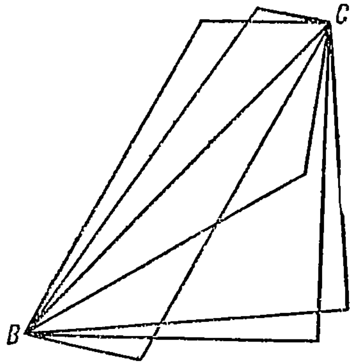


Рис. 334а.

Положение двух вершин (B и C) искомого треугольника нам известно. Остаётся уточнить, какая же из точек окружности K_1 является третьей вершиной (A) искомого треугольника.

Рассматривая чертёж, видим, что $\triangle BCD$ конструктивно связан с искомым треугольником ABC, а именно: определив точку D, легко построить и треугольник ABC. Действительно, зная положение точки D, достаточно будет из точки B провести луч через точку D: он пересечёт окружность K_1 в искомой точке A.

Точка D находится среди тех точек D_1, D_2, D_3, ..., которые делят соответственно стороны

$$BA_1,\ BA_2,\ BA_3,\ \ldots \qquad (2)$$

треугольников (1) BA_1C, BA_2C, BA_3C, ... в отношении $a:b$.

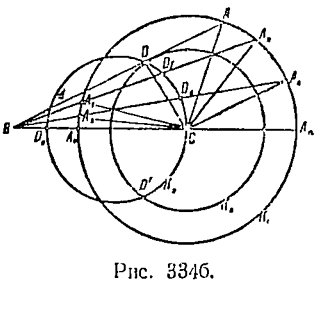


Рис. 334б.

Но каждый из отрезков (2) BA_1, BA_2, BA_3, ... представляет собою расстояние от точки B до некоторой точки окружности K_1, и, значит, точки D_1, D_2, D_3, ... образуют геометрическое место тех точек, которые делят расстояние от точки B до любой точки окружности K_1 в отношении $a:b$.

Как известно, такое геометрическое место точек есть окружность K_2, диаметром которой является отрезок D_0C, лежащий на отрезке BC, причём положение точки D_0 определяется следующей пропорцией:

$$BD_0:D_0A_0 = a:b.$$

Итак, удовлетворяя третьему требованию условия задачи, получим точку D, находящуюся на окружности K_2.

Согласно четвёртому требованию условия задачи точка D должна отстоять от точки C на расстоянии, равном s, и, значит, находиться где-то на окружности K_3, описанной из точки C радиусом, равным s.

Учитывая, что искомая точка D должна находиться как на окружности K_2, так и на окружности K_3, приходим к выводу, что точки пересечения этих окружностей являются возможными положениями точки D.

Построение. 1) Строим отрезок BC, равный a. 2) Из точки C, как из центра, радиусом, равным отрезку b, описываем окружность K_1. 3) Строим окружность K_2, представляющую собой геометрическое место точек, делящих в отношении $a:b$ расстояния от точки B до окружности K_1. 4) Из точки C, как из центра, радиусом, равным s, описываем окружность K_3. Окружности K_2 и K_3 пересекутся в некоторых точках D и D'. 5) Из точки B через точку D проводим полупрямую, которая пересечёт окружность K_1 в некоторой точке A. 6) Соединив точки B и C с точкою A отрезками прямой, получим искомый $\triangle ABC$.

IV. Наконец, задачу можно решить также применением методов подобия и геометрических мест.

Анализ. Пусть рис. 334 представляет собой искомый треугольник.

Точку C можем рассматривать как одну из точек того геометрического места точек, отношение расстояний которых до B и D равно $a:s$. Равным образом можем C считать одной из точек того геометрического места точек, расстояния которых от D и A относятся, как $s:b$.

Наконец, можем принять, что точка C принадлежит геометрическому месту таких точек, расстояния которых от точек B и A относятся, как $a:b$.

Так как построить эти геометрические места сразу невозможно, потому что неизвестны отрезки BD и DA, то построим произвольной величины треугольник $A'B'C'$, который удовлетворял бы следующим двум требованиям (рис. 335):

1) $C'D'$ есть отрезок биссектрисы угла $A'C'B'$, заключённый внутри треугольника $A'B'C'$;

2) $B'C':D'C':A'C'=a:s:b$.

С этой целью прежде всего возьмём произвольной длины отрезок $A'B'$ и точкою D' разделим его в отношении $a:b$. После этого можем считать, что точка C' является одной из точек каждого из следующих трёх геометрических мест:

1) геометрического места точек, расстояния которых до точек B' и A' относятся, как $a:b$;

2) геометрического места точек, расстояния которых до точек B' и D' относятся, как $a:s$;

3) геометрического места точек, расстояния которых до точек D' и A' относятся, как $s:b$.

Эти три геометрических места будут пересекаться в двух точках, симметричных относительно прямой $A'B'$.

Если построить два каких нибудь из этих трёх геометрических мест, то получим, что любую из двух точек, в которых они пересекаются, можно принять за вершину C' искомого вспомогательного треугольника $A'B'C'$.

Соединив точку C' с точками A' и B' отрезками прямой, получим $\triangle A'B'C'$. Если в этом треугольнике на прямой $C'B'$ в направлении B' отложим отрезок $C'B$, равный отрезку a, и затем проведём через точку B прямую, параллельную отрезку $A'B'$, то она пересечёт отрезок $C'A'$ (или его продолжение) в некоторой точке A.

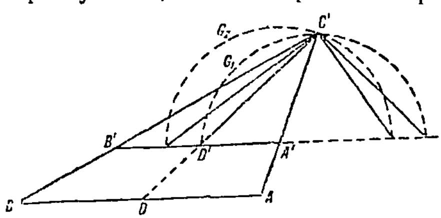


Рис. 335.

Полученный треугольник ABC' — искомый, так как он удовлетворяет условию задачи.

Построение (рис. 335). 1) Строим произвольной длины отрезок $B'A'$ и точкою D' делим его в отношении $a:b$. 2) Строим геометрическое место точек (G_1), расстояния которых до точек B' и A' относятся, как $a:b$. 3) Строим геометрическое место точек (G_2), расстояния которых до точек B' и D' относятся, как $a:s$. Пересечением линий G_1 и G_2 будет некоторая точка C'. 4) Соединив отрезками точку C' с точками B' и A', получим $\triangle A'B'C'$. 5) От точки C' на прямой $C'B'$ (в направлении B') отложим отрезок $C'B$, равный отрезку a. 6) Из точки B проводим прямую, параллельную стороне $B'A'$. Проведённая линия пересечёт отрезок $C'A'$ (или его продолжение) в некоторой точке A.

$\triangle ABC'$ — искомый.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ДЕВЯТОГО КЛАССА.

285. *По данной стороне построить правильный восьмиугольник.*

Анализ (рис. 336). Сумма внешних углов восьмиугольника равна 360°. Значит, каждый внешний угол правильного восьмиугольника равен $360°:8=45°$, а внутренний угол равен 135°.

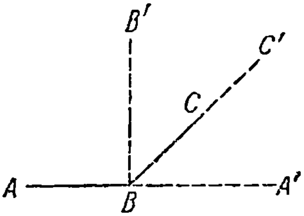


Рис. 336.

Построение. 1) Строим отрезок AB, равный данной стороне правильного восьмиугольника. 2) Продолжим отрезок AB в точке B и восставим к нему перпендикуляр BB'. 3) Проведём биссектрису BC' полученного прямого угла $B'BA'$. Ясно, что $\angle A'BC'=45°$, а $\angle ABC'=135°$. 4) На полупрямой BC' от точки B отложим отрезок BC, равный AB.

Подобным же образом можем построить и остальные стороны искомого восьмиугольника. При выполнении этого упражнения возможны упрощения.

286. *Срезать от данного квадрата ABCD углы так, чтобы образовался правильный восьмиугольник.*

Анализ. Предположим, что задача решена и получился правильный восьмиугольник $MNPQRSTU$ (рис. 337). Соединив отрезками вершины правильного восьмиугольника с центром O квадрата, разобьём его на равные равнобедренные треугольники с углами при вершине по 45°.

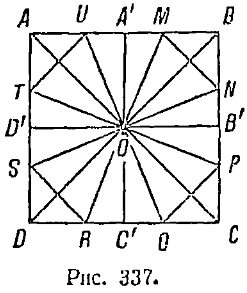


Рис. 337.

Опустив из точки O перпендикуляры на стороны правильного восьмиугольника, заметим, что его вершины лежат на биссектрисах углов, образованных диагоналями (AC и BD) квадрата и прямыми ($A'C'$ и $B'D'$), соединяющими середины его противоположных сторон. Кроме того, искомые вершины восьмиугольника должны находиться на сторонах данного квадрата.

Построение (рис. 337). 1) Проводим в данном квадрате диагонали AC и BD и точку пересечения обозначаем буквой O. 2) Строим биссектрису OA' угла AOB и биссектрису OM угла $A'OB$ (точки A' и M лежат на стороне квадрата). 3) Около точек A, B, C и D, как центров, описываем дуги радиусами, равными MB, до пересечения со сторонами квадрата в точках M, N, P, Q, R, S, T, U. Восьмиугольник $MNPQRSTU$ — искомый.

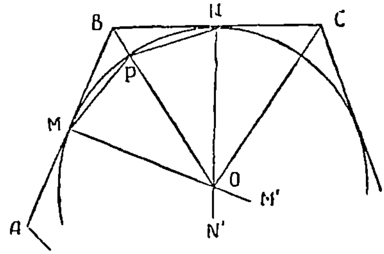


Рис. 338.

287. *Около окружности описан какой-нибудь правильный n-угольник. Пользуясь им, вписать в эту окружность правильный многоугольник, имеющий вдвое больше сторон, чем описанный.*

Анализ. Допустим, что около окружности описан правильный n-угольник (рис. 338). Из середины M и N отрезков AB и BC, являющихся сторонами правильного n-угольника, восставим перпендикуляры MM' и NN'. Они пересекутся в центре O окружности, вписанной в данный n-угольник. Отрезок, соединяющий точки B и O, пересечёт эту окружность в некоторой точке P. Хорда PN является стороной правильного многоугольника, имеющего $2n$ сторон и вписанного в данную окружность. Последовательно откладывая на данной окружности хорды, равные PN, получим искомую фигуру.

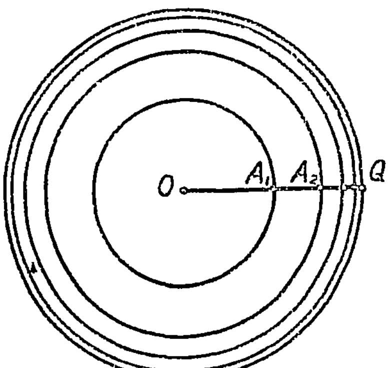


Рис 339.

288. *Концентрическими окружностями разделить площадь круга на 2, 3 ... равновеликих части.*

Анализ (рис. 339). Положим, что надо разделить площадь круга на n равновеликих частей. Проведём какой-нибудь радиус OQ. Он пересечёт искомые окружности в некоторых точках A_1, A_2, A_3, ...A_{n-1}.

По условию,

$$\pi . OA_1^2 = \frac{1}{n} \pi . OQ^2,$$

откуда найдём, что

$$OA_1 = \frac{OQ}{\sqrt{n}}.$$

Далее, по условию,

$$\pi . OA_2^2 = \frac{2}{n} \pi . OQ^2,$$

откуда найдём, что

$$OA_2 = OQ \sqrt{\frac{2}{n}},$$

и вообще

$$OA_m = OQ \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Отрезки OA_1, OA_2... находим известным построением.

289. *В данный треугольник вписать прямоугольник с данной площадью m^2.*

Анализ (рис. 340). Допустим, что основание и высота данного треугольника равны a и h. Если обозначим основание искомого прямоугольника буквой x, то высота его будет равна $\frac{m^2}{x}$.

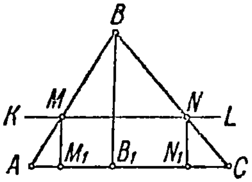


Рис. 340.

Так как $\triangle ABC \backsim \triangle BMN$, то $a : x = h : \left(h - \frac{m^2}{x}\right)$, откуда найдём, что

$$x = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - \frac{4am^2}{h}}\right). \quad (1)$$

Построение. 1) Построим отрезок x, определяемый формулой (1), и допустим, что он равен отрезку n. 2) Проведём прямую KL параллельно стороне AC так, чтобы часть её, расположенная внутри треугольника, была равна n ($MN = n$). 3) Из точек M и N, в которых прямая KL пересечёт стороны AB и BC, опустим перпендикуляры MM_1 и NN_1 на сторону AC.

MNN_1M_1—искомый прямоугольник.

Такая задача может иметь следующее число решений: 6, 4, 3, 2, 1 и 0.

290. *Данный круговой сектор AOB радиуса R надо дугами A_1B_1 и A_2B_2 двух окружностей, имеющих центр в точке O, разделить на три равновеликие части.*

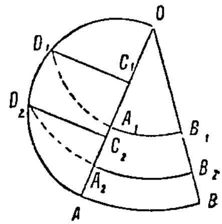


Рис. 341.

Анализ. Если допустим, что рис. 341 представляет собою решение, то

$$\text{пл. } OA_1B_1 : \text{пл. } OA_2B_2 : \text{пл. } OAB = 1:2:3.$$

Но площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных линий, а потому

$$OA_1^2 : OA_2^2 : OA^2 = 1:2:3.$$

Обозначая буквами x и y соответственно радиусы дуг A_1B_1 и A_2B_2, получим:

$$x^2 : y^2 : R^2 = 1:2:3.$$

Следовательно,

$$x^2=\frac{R^2}{3} \text{ и } y^2=\frac{2R^2}{3},$$

откуда

$$x=\frac{R}{\sqrt{3}} \text{ и } y=R\sqrt{\frac{2}{3}},$$

т. е.

$$OA_1=\frac{R}{\sqrt{3}} \text{ и } OA_2=R\sqrt{\frac{2}{3}},$$

или

$$OA_1=\sqrt{\frac{R}{3}\cdot R}$$

и

$$OA_2=\sqrt{\frac{2R}{3}\cdot R} \qquad (2)$$

Построение. 1) Делим радиус OA на три равные части:

$$OC_1=C_1C_2=C_2A=\frac{R}{3}.$$

1) На отрезке OA, как на диаметре, строим полуокружность. 3) Из точки C_1 и C_2 восставляем перпендикуляры к отрезку OA, которые пересекут полуокружность в некоторых точках D_1 и D_2. 4) Из точки O, как центра, радиусом, равным OD_1, засекаем на отрезке OA точку A_1. 5) Из точки O, как центра, радиусом, равным OD_2, засекаем на отрезке OA точку A_2. 6) Из точки O, как центра, радиусами, равными OD_1 и OD_2, проводим дуги A_1B_1 и A_2B_2. Эти дуги разделят площадь данного сектора на три равные части.

Доказательство. Соединив отрезками прямой точку D_1 с точками A и O, получим прямоугольный треугольник, в котором

$$OD_1^2=AO\cdot OC_1,$$

или

$$OD_1^2=R\cdot\frac{R}{3},$$

и, следовательно,

$$OD_1=\sqrt{R\cdot\frac{R}{3}}. \qquad (3)$$

Так же доказывается, что

$$OD_2=\sqrt{R\cdot\frac{2}{3}R}. \qquad (4)$$

Как видим, отрезки OD_1 и OD_2 соответственно равны радиусам (1) и (2) тех концентрических окружностей, которые рассекают площадь данного сектора на три равновеликие части.

291. *Построить прямую, проходящую через две данные точки (A и B) пространства.*

Построение (рис. 342). 1) Отмечаем в пространстве произвольную точку C. 2) Через точки A, B и C проводим плоскость P. 3) В плоскости P проводим прямую KL, проходящую через точки A и B.

KL — искомая прямая.

Исследование. Так как через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость P, а в плоскости P через данные две точки можно провести единственную прямую, то задача имеет одно решение.

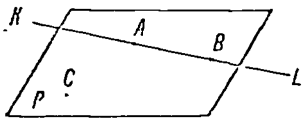


Рис. 342.

292. *Найти точку (D), делящую пополам расстояние между двумя данными точками A и B пространства.*

Построение. 1) Проводим плоскость P через две данные точки A и B (см. предыдущее упражнение). 2) В плоскости P проводим отрезок AB. 3) Известным приёмом строим точку D, делящую пополам отрезок AB.

Точка D — искомая.

293. *Даны в пространстве прямая KL и вне её точка A. Построить точку, симметричную данной точке A относительно прямой KL.*

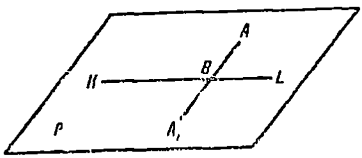


Рис. 343.

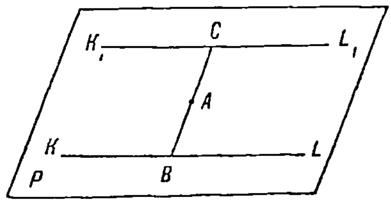


Рис. 344.

Построение (рис. 343). 1) Через точку A и прямую KL проводим плоскость P. 2) Из точки A в плоскости P опускаем перпендикуляр AB на прямую KL. 3) На продолжении отрезка AB от точки B отложим отрезок BA_1, равный отрезку AB. Точка A_1 — искомая.

294. *Даны в пространстве прямая KL и вне её точка A. Построить прямую, симметричную прямой KL относительно точки A.*

Построение (344). 1) Через точку A и прямую KL проводим плоскость P. 2) В плоскости P из точки A опускаем перпендикуляр AB на прямую KL. 3) Продолжаем отрезок AB за точку A и на его продолжении откладываем отрезок AC, равный AB. 4) Через точку C проводим прямую K_1L_1, параллельную KL.

K_1L_1 — искомая прямая.

295. *Из точки A, лежащей вне данной прямой BC, опустить перпендикуляр на эту прямую.*

Построение (рис. 345). 1) Через точку A и прямую BC проводим плоскость P.

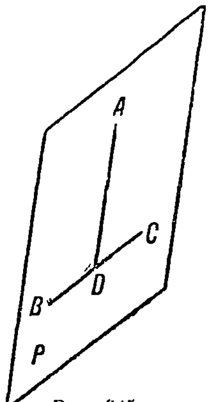


Рис. 345.

2) В плоскости P из точки A опускаем перпендикуляр AD на прямую BC.

Отрезок AD—искомый перпендикуляр.

296. *Даны в пространстве прямая AB и вне её точка C. Требуется провести через точку C прямую, параллельную прямой AB.*

Построение (рис. 346). 1) Через точку C и прямую AB проведём плоскость P. 2) В плоскости P проведём прямую A_1B_1, параллельную AB.

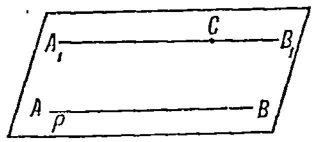


Рис. 346.

Прямая A_1B_1 является искомой.

297. *Найти точку пересечения данной прямой AB с данной плоскостью P.*

Построение (рис. 347). 1) Отмечаем на плоскости P произвольную точку C. 2) Через точку C и прямую AB проводим плоскость P_1. 3) Плоскость P_1 пересечёт плоскость P по некоторой прямой CD. 4) В плоскости P_1 прямая AB пересечёт плоскость P в некоторой точке E, лежащей на линии пересечения плоскостей P и P_1.

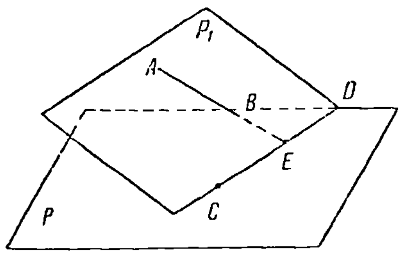


Рис. 347.

Точка E является искомой.

В том случае, когда прямые AB и CD окажутся параллельными, рассматриваемая задача не имеет решения.

298. *Даны две параллельные плоскости P и Q, точка A на плоскости P и две точки B и C на плоскости Q. Построить прямую, по которой плоскость, проходящая через точки A, B и C, пересекает данную плоскость P* (рис. 348).

Построение. 1) Проводим прямую, проходящую через точки B и C. 2) Проводим через точку A прямую AA', параллельную прямой BC.

Прямая AA' является искомой.

299. *Даны в пространстве две скрещивающиеся прямые CD и EH, а вне их точка M. Построить прямую, которая проходила бы через точку M и пересекала прямые CD и EH.*

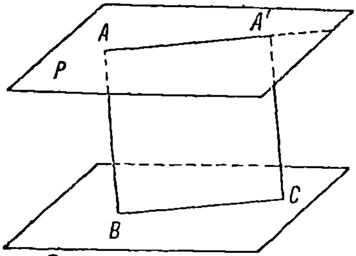


Рис. 348.

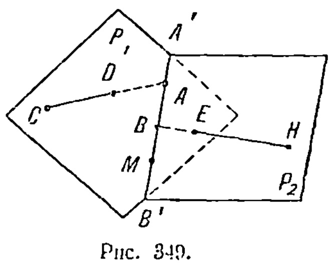


Рис. 349.

Построение (рис. 349). 1) Строим плоскость P_1, проходящую через точку M и прямую CD. 2) Строим плоскость P_2, проходящую через точку M и прямую EH. 3) По построению точка M лежит как на плоскости P_1, так и на плоскости P_2, а потому эти плоскости пересекаются по некоторой прямой $A'B'$, проходящей через точку M.

Прямая $A'B'$—искомая: она находится в каждой из плоскостей P_1 и P_2 и в некоторых точках A и B пересекает прямые CD и EH, лежащие в этих плоскостях.

300. *Через данную точку M провести прямую, параллельную данной плоскости P и пересекающую данную прямую AB.*

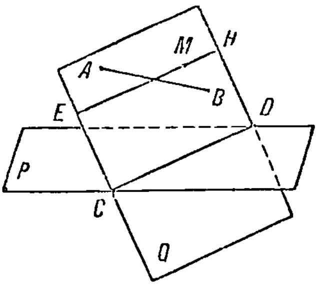


Рис. 350.

Построение (рис. 350). 1) Через точку M и прямую AB проводим плоскость Q. 2) Строим прямую CD, которая является пересечением плоскостей P и Q. 3) В плоскости Q через точку M проведём прямую EH, параллельную линии CD.

EH—искомая прямая; она параллельна плоскости P и пересекает данную прямую AB.

301. *Дана плоскость P, на ней треугольник ABC и точка O вне плоскости. Приняв точку O за центр симметрии, построить треугольник, симметричный данному.*

Построение (рис. 351). 1) Точки A, B и C соединяем отрезками с точкой O и на продолжении этих отрезков от точки O откладываем отрезки OA_1, OB_1 и OC_1, соответственно равные отрезкам AO, BO и CO.

2) Через точки A_1, B_1 и C_1 проводим плоскость P_1. 4) В плоскости P_1 соединяем прямолинейными отрезками точки A_1, B_1, C_1.

$\triangle A_1B_1C_1$—искомый.

302. *Через точку A, расположенную вне данной плоскости P, провести прямую, параллельную данной плоскости.*

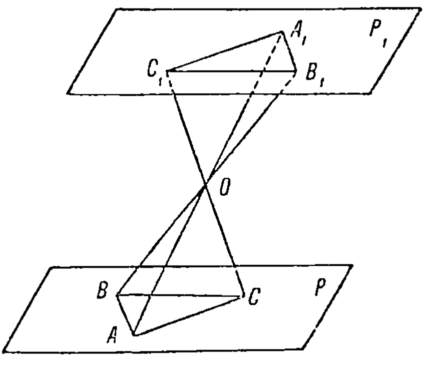


Рис. 351.

Построение (рис. 352). 1) На плоскости P проводим произвольную прямую KL. 2) Через точку A и прямую KL проводим плоскость P_1. 3) В плоскости P_1 через точку A проводим прямую A_1B_1, параллельную прямой KL.

Задача неопределённая: через точку A можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных плоскости P. Все эти прямые будут лежать в плоскости, которая параллельна плоскости P.

303. *Даны в пространстве плоскость P, прямая AB и две точки (C и D) на этой прямой. Требуется через точки C и D провести плоскости, параллельные данной плоскости P.*

Построение (рис. 353). 1) Через прямую AB проводим две произвольные плоскости P_1 и P_2. 2) Плоскости P_1 и P_2 пересекут плоскость P по двум прямым EE_1 и EE_2. 3) В плоскости P_1 через точки C и D про-

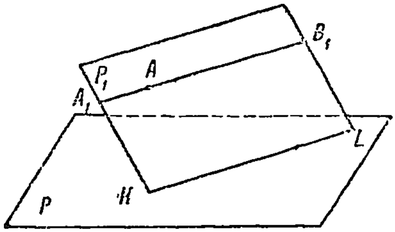


Рис. 352.

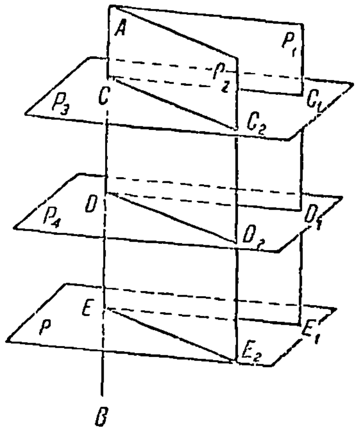


Рис. 353.

водим прямые CC_1 и DD_1, параллельные прямой (EE_1). 4) В плоскости P_2 через точки C и D проводим прямые CC_2 и DD_2, параллельные прямой (EE_2). 5) Через прямые CC_1 и CC_2 проводим плоскость P_3. 6) Через прямые DD_1 и DD_2 проводим плоскость P_4.

Плоскости P_3 и P_4—искомые.

304. *Через данную точку A, лежащую вне данной плоскости P, провести плоскость, параллельную плоскости P.*

Построение (рис. 354). 1) На плоскости P проводим две произвольно взятые пересекающиеся прямые BC и BD. 2) Через точку A и прямую BC проводим плоскость P_1. 3) В плоскости P_1 через точку A проводим прямую AC_1, параллельную прямой BC. 4) Через точку A и прямую BD проводим плоскость P_2. 5) В плоскости P_2 через точку A проводим прямую AD_1, параллельную прямой BD. 6) Через пересекающиеся прямые AC_1 и AD_1 проводим искомую плоскость P_3.

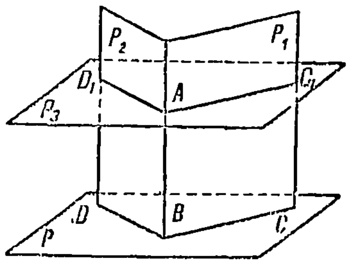


Рис. 354

305. *Построить прямую, которая пересекает две данные прямые AB и CD и параллельна данной плоскости M.*

Построение (рис. 355). 1) Через произвольную точку E прямой AB проводим плоскость M', параллельную плоскости M. 2) Плоскость M' пересечёт прямую CD в некоторой точке F. 3) Прямая KL, проходящая через точки E и F,—искомая.

Доказательство. Любая прямая, лежащая в плоскости M', параллельной плоскости M, параллельна плоскости M, а, значит, и прямая EF также параллельна плоскости M. Но прямая EF пересекает прямую AB в точке E и прямую CD в точке F; следовательно, прямая EF удовлетворяет всем требованиям, поставленным в условии задачи.

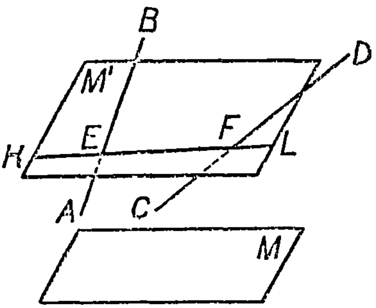


Рис. 355.

Исследование. Задача неопределённая. Она имеет бесчисленное множество решений, причём можно различить следующие случаи.

Если ни одна из данных прямых (AB и CD) не параллельна данной плоскости (M), то каждое из бесчисленного множества решений находится в особой плоскости, параллельной плоскости M.

Если же одна из данных прямых (AB или CD) параллельна данной плоскости (M), то все прямые искомого множества лежат в одной плоскости и проходят через одну и ту же точку. Например, если $CD \parallel$ пл. M, то все искомые прямые находятся в одной плоскости M', проходящей через CD и параллельной плоскости M, и пересекаются в той точке (E), в которой прямая AB пересекает плоскость M'.

306. *Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Требуется провести через прямую AB плоскость, параллельную прямой CD.*

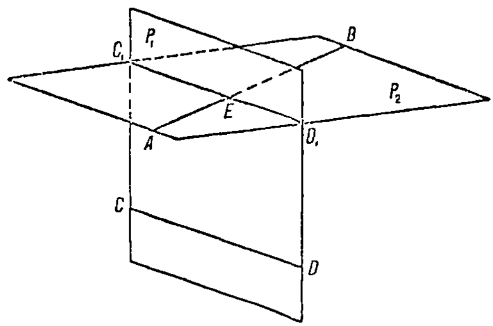


Рис. 356.

Построение (рис. 356). 1) Через произвольную точку E прямой AB и прямую CD проводим плоскость P_1. 2) В плоскости P_1 через точку E проводим прямую C_1D_1, параллельную линии CD. 3) Через пересекающиеся прямые AB и C_1D_1 проводим искомую плоскость P_2.

307. *Через данную точку E провести плоскость, параллельную данным скрещивающимся прямым AB и CD.*

Построение (рис. 357). 1) Через прямую AB и точку E проводим плоскость P_1. 2) В плоскости P_1 через точку E проводим прямую A_1B_1, параллельную линии AB. 3) Через прямую CD и точку

E проводим плоскость P_2. 4) В плоскости P_2 через точку E проводим прямую C_1D_1, параллельную линии CD. 5) Через прямые A_1B_1 и C_1D_1, пересекающиеся в точке E, проводим искомую плоскость P.

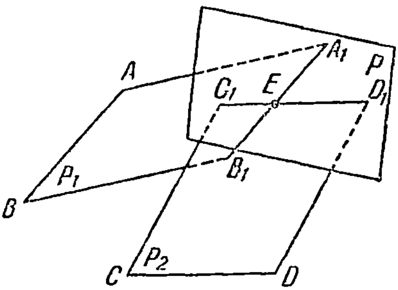


Рис. 357.

308. *Построить прямую AB, пересекающую две данные прямые A_1B_1 и A_2B_2 и параллельную данной прямой A_0B_0.*

Анализ (рис. 358). По условию, искомая прямая AB пересекает прямую A_1B_1, а потому обе эти линии находятся в некоторой плоскости (S_1). Но, по условию, искомая прямая AB должна быть также параллельна прямой A_0B_0, что возможно только в том случае, если плоскость S_1 параллельна прямой A_0B_0.

Таким образом, искомая прямая AB находится на такой плоскости S_1, которая проходит через прямую A_1B_1 и в то же время параллельна прямой A_0B_0.

Аналогичными рассуждениями придём к выводу, что искомая прямая AB находится и на некоторой плоскости S_2, которая проходит через прямую A_2B_2 и в то же время параллельна прямой A_0B_0.

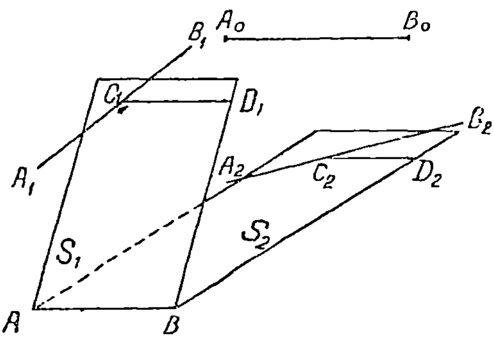


Рис 358.

Отсюда приходим к выводу, что искомая прямая лежит на обеих плоскостях S_1 и S_2, т. е. является их пересечением.

Построение. 1) Через произвольную точку C_1 прямой A_1B_1 проводим прямую C_1D_1, параллельную A_0B_0. 2) Через пересекающиеся прямые A_1B_1 и C_1D_1 проводим плоскость S_1. 3) Через произвольную точку C_2 прямой A_2B_2 проводим прямую S_2D_2, параллельную прямой A_0B_0. 4) Через пересекающиеся прямые A_2B_2 и C_2D_2 проводим плоскость S_2. 5) Плоскости S_1 и S_2 пересекутся по искомой прямой AB.

Доказательство. Прямая A_0B_0 параллельна прямой C_1D_1, лежащей на плоскости S_1, а потому $S_1 \parallel A_0B_0$. Аналогичными рассуждениями придём к выводу, что и $S_2 \parallel A_0B_0$. Так как, по построению, плоскости S_1 и S_2 порознь параллельны прямой A_0B_0, то эти плоскости могут пересечься только по некоторой прямой AB, параллельной A_0B_0.

Прямые C_1D_1 и AB параллельны и лежат в одной плоскости S_1. Так как прямая A_1B_1, находящаяся в той же плоскости, пересекает прямую C_1D_1, то она пересекает и прямую AB в некоторой точке P_1.

Аналогичными рассуждениями найдём, что прямые AB и A_2B_2 пересекаются в некоторой точке P_2.

Так как прямая AB параллельна A_0B_0 и пересекает прямые A_1B_1 и A_2B_2 (в точках P_1 и P_2), то, значит, она удовлетворяет всем требованиям рассматриваемой задачи, т. е. является искомой.

Исследование. Если станем выяснять, при каких конфигурациях и сколько решений имеет рассматриваемая задача, то результаты этих исследований можно представить в виде следующей таблицы:

<table>
<tr><th colspan="4">Конфигурации</th><th>Число решений</th></tr>
<tr><td rowspan="5">A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются и, следовательно, находятся в некоторой плоскости S</td><td rowspan="2">A_0B_0 лежит в плоскости S</td><td>$A_0B_0 \parallel A_1B_1$</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_0B_0 пересекает A_1B_1 и A_2B_2</td><td></td><td>∞</td></tr>
<tr><td>A_0B_0 пересекает плоскость S в точке, не совпадающей с точкой пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2.</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_0B_0 \parallel S$</td><td>$A_0B_0 \parallel A_1B_1$</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>Как A_0B_0 и A_1B_1, так и A_0B_0 и A_2B_2 — скрещивающиеся прямые</td><td></td><td>∞</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$A_1B_1 \parallel A_2B_2$ и, следовательно, находятся в некоторой плоскости S</td><td rowspan="2">A_0B_0 лежит в плоскости S</td><td>$A_0B_0 \parallel A_1B_1$</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_0B_0 пересекает A_1B_1</td><td></td><td>∞</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A_0B_0 \parallel S$</td><td>$A_0B_0 \parallel A_1B_1$</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_0B_0 и A_1B_1 — скрещивающиеся прямые</td><td></td><td>∞</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A_1B_1 и A_2B_2 — скрещивающиеся прямые</td><td rowspan="3">A_0B_0 пересекает A_1B_1 и, следовательно, эти прямые находятся в некоторой плоскости S_1</td><td rowspan="2">A_0B_0 и A_2B_2 — скрещивающиеся прямые</td><td>$A_2B_2 \parallel S_1$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_2B_2 пересекает S_1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A_0B_0 и A_2B_2 пересекаются</td><td></td><td>0</td></tr>
</table>

Конфигурации				Число решений
A_1B_1 и A_2B_2 — скрещивающиеся прямые	Как A_0B_0 и A_1B_1, так и A_0B_0 и A_2B_2 — скрещивающиеся прямые	A_1B_1 параллельна плоскости S_2, которая проходит через A_2B_2 и параллельна A_0B_0		0
		A_1B_1 пересекает плоскость S_2, которая проходит через A_2B_2 и параллельна A_0B_0		1
	$A_0B_0 \parallel A_1B_1$			0

Из этой таблицы усматриваем следующее:

а) Задача имеет бесконечное число решений в том случае, когда A_1B_1 и A_2B_2 принадлежат некоторой плоскости S, причём ни A_1B_1, ни A_2B_2 не параллельны A_0B_0, а прямая A_0B_0 либо находится в плоскости S, либо параллельна этой плоскости.

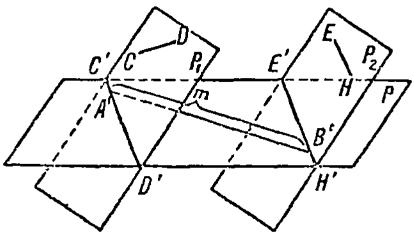


Рис. 359.

б) Задача имеет одно решение, если прямая A_1B_1 (или A_2B_2) пересекает плоскость S_2 (или S_1), которая проходит через прямую A_0B_0 и какую-нибудь точку прямой A_2B_2 (или A_1B_1).

в) При всех иных конфигурациях прямых A_1B_1, A_2B_2 и A_0B_0 задача не имеет решения.

309. *Даны две параллельные плоскости P_1 и P_2 и на них соответственно прямые CD и EH. Построить отрезок данной длины m, параллельный данной плоскости P, концы которого лежат на прямой CD и EH.*

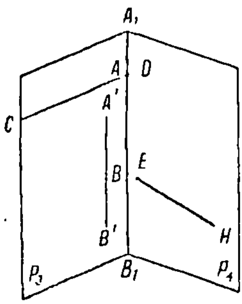


Рис. 360.

Построение (рис. 359). 1) Строим прямые $C'D'$ и $E'H'$, по которым плоскости P_1 и P_2 пересекают плоскость P. 2) Между параллельными прямыми $C'D'$ и $E'H'$ строим отрезок $A'B'$ данной длины m, концы которого лежат на прямых $C'D'$ и $E'H'$.

Теперь остаётся отрезок $A'B'$ переместить параллельно самому себе, так, чтобы его концы оказались на прямых CD и EH.

С этой целью выполним следующие операции (рис. 360). 3) Через прямую CD проводим плоскость P_3, параллельную отрезку $A'B'$.

4) Через прямую EH проводим плоскость P_4, параллельную отрезку $A'B'$. 5) Плоскости P_3 и P_4 пересекутся по некоторой прямой A_1B_1. 6) Прямые CD и EH пересекут прямую A_1B_1 в некоторых точках A и B. Отрезок AB—искомый.

Доказательство. По построению $A_1B_1 \parallel A'B'$, причём отрезок AB лежит на прямой A_1B_1, а потому $AB \parallel A'B'$.

Поскольку отрезок $A'B'$ лежит в плоскости P (рис. 359),

$$AB \parallel \text{пл. } P. \tag{1}$$

Отрезки $A'B'$ и AB параллельны и являются вписанными в параллельные плоскости P_1 и P_2; значит, $AB = A'B'$. Но, по построению, $A'B' = m$, следовательно,

$$AB = m. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что AB—искомый отрезок.

310. *Дана плоскость P и две прямые CD и EH в пространстве* (рис. 361). *Построить отрезок, который параллелен плоскости P, имеет данную длину m и концы которого лежат на прямых CD и EH.*

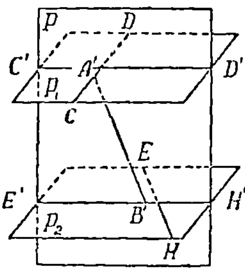


Рис. 361.

Построение. 1) Через прямую CD проводим плоскость P_1, параллельную прямой EH. 2) Через прямую EH проводим плоскость P_2, параллельную прямой CD. 3) Плоскость P пересечёт параллельные плоскости P_1 и P_2 по параллельным прямым $C'D'$ и $E'H'$. 4) Между параллельными прямыми $C'D'$ и $E'H'$ строим отрезок $A'B'$, равный данному отрезку m, концы которого лежат на этих прямых.

Теперь приёмом, указанным в предыдущей задаче, остаётся отрезок A_1B_1 перенести параллельно самому себе так, чтобы его концы оказались на прямых CD и EH.

311. *Дана прямая AB в пространстве и на ней точка C. Построить плоскость, которая проходит через точку C и перпендикулярна к прямой AB.*

Построение (рис. 362). 1) Через прямую AB проведём произвольную плоскость P_1. 2) В плоскости P_1, из точки C, восставим перпендикуляр CD к прямой AB. 3) Через прямую AB проведём какую-нибудь плоскость P_2, не совпадающую с плоскостью P_1. 4) В плоскости P_2 из точки C восставим перпендикуляр CE к прямой AB. 5) Через прямые CD и CE, пересекающиеся в точке C, проводим плоскость P.

P—искомая плоскость.

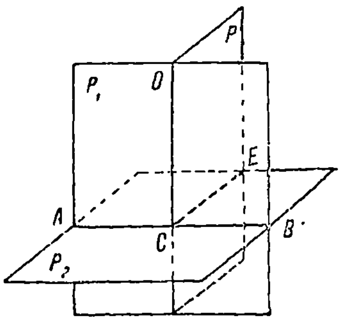


Рис. 362.

312. *Через данную точку A в пространстве провести плоскость, перпендикулярную данной прямой CD.*

Построение (рис. 363). 1) Через точку A и прямую CD проводим плоскость P_1. 2) В плоскости P_1 из точки A опускаем перпендикуляр AD_1 на прямую CD. 3) Через прямую CD проводим произвольную плоскость P_2. 4) В плоскости P_2 из точки D_1 восставим перпендикуляр D_1A_2 к прямой CD. 5) Через пересекающиеся прямые AD_1 и D_1A_2 проводим плоскость P.

Плоскость P перпендикулярна к прямой CD.

Примечание. Если точка A лежит на прямой CD, то рассматриваемая задача приводится к предыдущей.

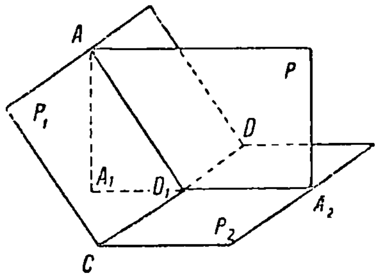


Рис. 363.

313. *Даны плоскость P с отмеченной на ней точкой M, и прямая AB, не лежащая в этой плоскости. Требуется на плоскости P через точку M провести прямую, перпендикулярную к данной линии AB.*

Построение (рис. 364). 1) Через точку M проводим плоскость Q, перпендикулярную к прямой AB. 2) Плоскость P и Q пересекутся по искомой прямой CD.

Доказательство. Так как плоскость Q перпендикулярна к прямой AB, то любая прямая, проведённая на плоскости Q, будет перпендикулярна к AB. Прямая CD, будучи линией пересечения плоскостей P и Q, лежит на каждой из этих плоскостей и является искомой.

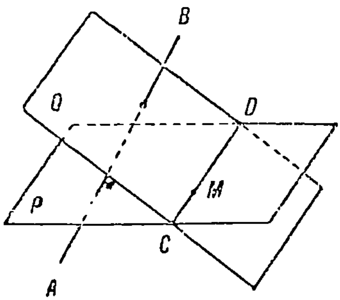


Рис. 364.

314. *Даны в пространстве две параллельные AB и CD и перпендикулярная к ним прямая EF. Провести через прямые AB и CD такие плоскости, параллельные одна другой, чтобы часть прямой EF, заключённая между ними, равнялась данному отрезку l.*

Построение (рис. 365). 1) Через прямую EF проводим плоскость P, перпендикулярную к прямым AB и CD. Плоскость P пересечёт эти прямые соответственно в точках K и L. 2) В плоскости P через точку K проводим прямую MN, параллельную линии EF. 3) На прямой MN по обе стороны точки K откладываем отрезки KS и TK, порознь равные данному отрезку l. 4) Через точку S и прямую CD проводим плоскость P_1. Прямая EF пересечёт эту плоскость в некоторой точке V. 5) Через прямую AB проводим плоскость P_2, параллельную плоскости P_1. Прямая EF

пересечёт плоскость P_2 в некоторой точке U. 6) Через точку T и прямую CD проводим плоскость P_3. Прямая EF пересечёт эту плоскость в некоторой точке V_1. 7) Через прямую AB проводим плоскость P_4, параллельную плоскости P_3. Прямая EF пересечёт плоскость P_4 в некоторой точке U_1.

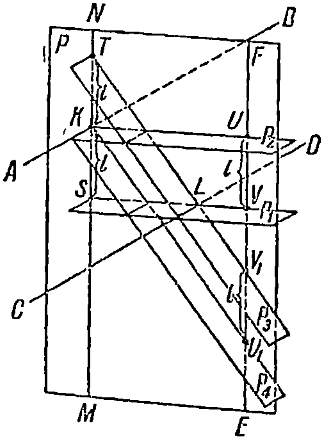


Рис. 365.

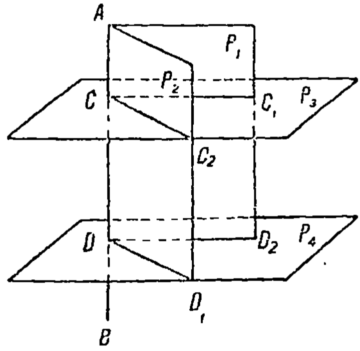


Рис. 366.

Параллельные плоскости P_1 и P_2, а также параллельные плоскости P_3 и P_4 являются искомыми потому, что

$$UV = U_1V_1 = l.$$

315. *Даны в пространстве прямая AB и вне её две точки C_1 и D_1. Требуется через эти точки провести плоскости, перпендикулярные к линии AB.*

Построение (рис. 366). 1) Через прямую AB и точку C_1 проводим плоскость P_1. 2) Через прямую AB и точку D_1 проводим плоскость P_2. 3) Из точек C_1 и D_1 опускаем перпендикуляры C_1C и D_1D на прямую AB. 4) В плоскости P_1 из точки D восставим перпендикуляр DD_2 к прямой AB. 5) В плоскости P_2 из точки C восставим перпендикуляр CC_2 к прямой AB. 6) Через прямые C_1C и CC_2 проводим плоскость P_3. 7) Через прямые D_1D и DD_2 проводим плоскость P_4.

Плоскости P_3 и P_4 — искомые.

316. *Найти геометрическое место точек, одинаково отстоящих от двух данных точек A и B в пространстве.*

317. *Через данную точку A провести плоскость, которая параллельна данной прямой BC и отстоит от этой линии на расстоянии m.*

Построение (рис. 367). 1) Через точку A проведём плоскость P_1, перпендикулярную к прямой BC. Прямая BC пересечёт плоскость P_1 в некоторой точке O. 2) В плоскости P_1 около точки O, как центра, описываем окружность радиусом, равным m. 3) Из точки A проводим касательные AE и AH к окружности (O, m). 4) Через прямые AE и AH проводим плоскости P_2 и P_3, параллельные прямой BC.

Плоскости P_2 и P_3—искомые.

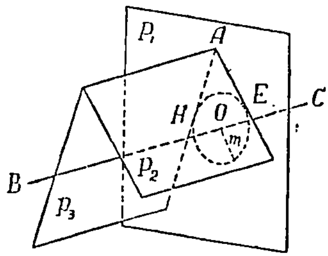


Рис. 367.

318. *Даны в пространстве прямая AB и вне её точка C. Провести через точку C две плоскости, параллельные прямой AB и отстоящие от этой прямой на расстоянии m и n.*

Построение. 1) Через точку C проводим плоскость P, перпендикулярную прямой AB. 2) Прямая AB пересечёт плоскость P в некоторой точке D. 3) В плоскости P через точку C проводим прямые CM_1 и CM_2, отстоящие от точки D на расстоянии m (см. предыдущую задачу). 4) В плоскости P через точку C проводим прямые CN_1 и CN_2, отстоящие от точки D на расстоянии n (см. предыдущую задачу). 5) Через прямую CM_1 проводим плоскость P_1, параллельную прямой AB. 6) Точно так же через каждую из прямых CM_2, CN_1 и CN_2 проводим соответственно плоскости P_2, P_3, P_4, параллельные прямой AB.

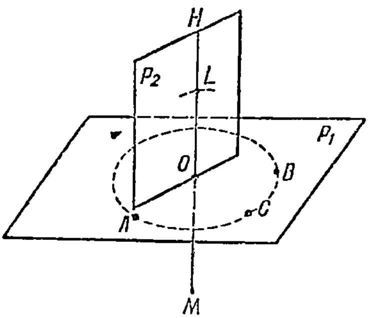


Рис. 368.

Плоскости P_1, P_2, P_3 и P_4 являются искомыми.

319. *Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Построить точку, отстоящую на расстоянии l от каждой из этих точек.*

Построение (рис. 368). 1) Проведём плоскость P_1 через три данные точки A, B, C. 2) В плоскости P_1 определим центр (O) круга, проходящего через три данные точки A, B, C. 3) Через точку O проведём прямую HK, перпендикулярную к плоскости P_1. 4) Через точку A и прямую HK проведём плоскость P_2. 5) В плоскости P_2 из точки A, как из центра, радиусом, равным l, засекаем точки L и M на прямой HK.

Точки L и M—искомые.

320. *Даны две параллельные плоскости P_1 и P_2. Требуется построить плоскость, которая параллельна им и отстоит от них на равном расстоянии* (рис. 369).

Построение. 1) Через произвольную точку A_1 плоскости P_1 проведём прямую A_1A_2, перпендикулярную плоскости P_2. Эта прямая пересечёт плоскость P_2 в некоторой точке A_2. 2) Находим середину C отрезка A_1A_2. 3) Через точку C проводим плоскость P, параллельную плоскости P_1 (или P_2).

P — искомая плоскость.

321. *Через данную точку P провести прямую, перпендикулярную к двум данным скрещивающимся прямым AB и CD* (рис. 370).

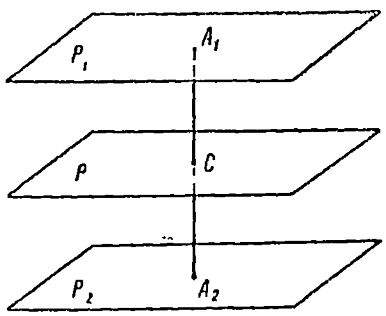


Рис. 369.

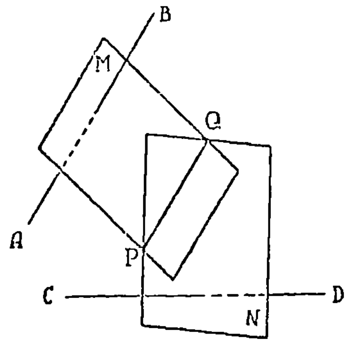


Рис. 370.

Построение. 1) Через точку P проводим плоскость M, перпендикулярную к прямой AB. (Любая прямая, проведённая на плоскости M, перпендикулярна к прямой AB.) 2) Через точку P проводим плоскость N, перпендикулярную к прямой CD. (Любая прямая, проведённая на плоскости N, перпендикулярна к прямой CD). 3) Прямая PQ, по которой пересекаются плоскости M и N, является искомой прямой.

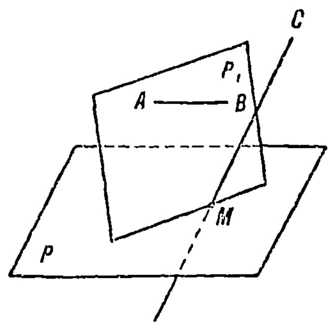


Рис. 371.

322. *Построить прямую, равноудалённую от трёх данных параллельных прямых K_1L_1, K_2L_2, K_3L_3, не лежащих в одной плоскости.*

Построение. 1) Строим плоскость P, перпендикулярную к прямой K_1L_1. Эта плоскость будет перпендикулярна также к прямым K_2L_2 и K_3L_3 и пересечёт данные параллельные прямые в некоторых точках M_1, M_2, M_3. 2) В плоскости P определяем центр O описанной около треугольника $M_1M_2M_3$ окружности. 3) Через точку O проводим прямую KL, перпендикулярную к плоскости P.

Прямая KL — искомая.

323. *Даны плоскость P и две скрещивающиеся прямые AB и CD. Определить плоскость, которая проходит через прямую AB и через точку пересечения прямой CD с плоскостью P.*

Построение (рис. 371). 1) Определяем точку (M) пересечения плоскости P и прямой CD. 2) Через найденную точку M и прямую AB проводим искомую плоскость P_1.

324. *Через данную точку A в пространстве провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости P.*

Построение (рис. 372). 1) Проводим на плоскости P произвольную прямую BC. 2) Через точку A и прямую BC проводим плоскость P_1. 3) В плоскости P_1 из точки A опускаем перпендикуляр AA_1 на прямую BC. 4) На плоскости P в точке A_1 восставим перпендикуляр A_1A_2 к прямой BC. 5) Через пересекающиеся прямые AA_1 и A_1A_2 проводим плоскость Q. 6) В плоскости Q из точки A опускаем перпендикуляр AD на прямую A_1A_2.

Прямая AD является искомой: она перпендикулярна к плоскости P.

Примечание. Если точка A лежит на плоскости P, то прямую BC проводим на плоскости P через точку A. Затем через прямую BC проводим произвольную плоскость, пересекающуюся с плоскостью P. Остальные операции те же.

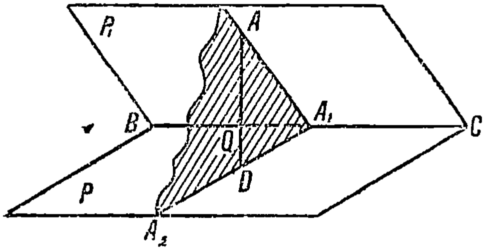


Рис. 372.

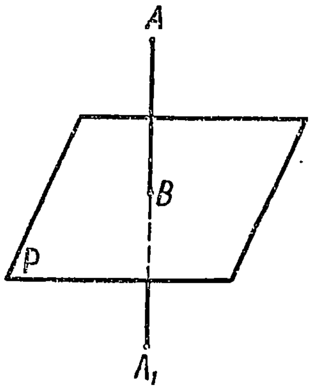


Рис. 373.

325. *Построить точку, симметричную данной точке A относительно данной плоскости P.*

Построение (рис. 373). Из точки A опускаем перпендикуляр AB на плоскость P. 2) На продолжении отрезка AB от точки B отложим отрезок BA_1, равный AB.

Точка A_1 — искомая.

326. *Через данную прямую AB провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости M.*

Построение (рис. 374). 1) Из произвольной точки K прямой AB опускаем перпендикуляр KL на данную плоскость M. 2) Плоскость N, проходящая через две пересекающиеся прямые AB и KL, является искомой.

Исследование. Если прямая AB не перпендикулярна к плоскости M, то задача имеет одно решение.

Если прямая AB перпендикулярна к плоскости M, то задача имеет бесчисленное множество решений.

327. *Построить какую-нибудь прямую, пересекающую три данных прямых AB, CD и EF.*

Построение (рис. 375). 1) Отмечаем на прямой AB произвольную точку P. 2) Через точку P и прямую CD проводим плоскость M. 3) Определяем точку K, в которой плоскость M пересекает прямую EF. 4) В плоскости M через точки P и K проводим прямую.

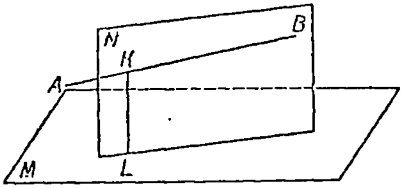


Рис. 374.

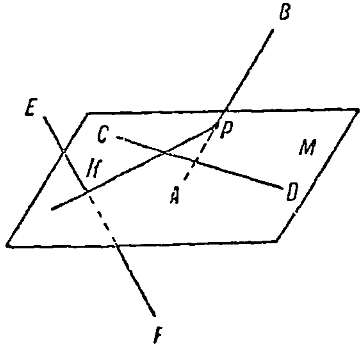


Рис. 375.

Прямая PK—искомая. Она пересекает прямые AB, EF и лежащую в плоскости M прямую CD.

Доказательство. Прямая PK: 1) пересекает AB, так как проходит через точку P, лежащую на прямой AB; 2) пересекает CD, так как лежит в той же плоскости, что и прямая CD, и 3) пересекает EF, так как точка K лежит на этой прямой.

Исследование.

№№ п/п	Конфигурация трёх данных прямых AB, CD и EF	Число решений	Что является одним из бесчисленного множества решений
1	$AB \parallel CD \parallel EF$, причём эти три прямые не находятся в одной плоскости	0	— —
2	AB, CD и EF находятся в одной плоскости	∞	Прямая, которая находится в плоскости S и не параллельна ни одной из данных прямых
3	$AB \parallel CD$ и, значит, принадлежат некоторой плоскости S, а прямая EF параллельна этой плоскости	0	— —

№№ п/п	Конфигурация трёх данных прямых AB, CD и EF	Число решений	Что является одним из бесчисленного множества решений
4	$AB \parallel CD$ и, значит, принадлежат некоторой плоскости S, причём прямая EF пересекает плоскость в некоторой точке P	∞	Прямая, которая находится в плоскости S и проходит через точку P
5	Никакие две из трёх данных прямых AB, CD и EF не являются параллельными линиями	∞	Прямая определяется тем построением, которое дано в задаче (рис. 375).
6	AB и CD не параллельны и находятся в одной плоскости S, а прямая EF параллельна этой плоскости	∞	Прямая, проходящая через точку пересечения AB и CD и любую точку прямой EF
7	AB и CD находятся в одной плоскости S и пересекаются в точке P, а прямая EF пересекает плоскость S в точке Q	∞	а) Прямая, которая проходит через точку P и любую точку прямой EF б) Прямая, которая расположена в плоскости S и проходит через точку Q
8	AB и CD пересекаются в точке P, а AB и EF пересекаются в точке Q	∞	а) Прямая, которая проходит через точку P и любую точку прямой EF б) Прямая, которая проходит через точку Q и любую точку прямой CD
9	AB, CD и EF не лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке P	∞	Прямая, проходящая через точку P

328. *Построить плоскость, симметричную данной плоскости P относительно данной точки A.*

Построение (рис. 376). 1) Из точки A на плоскость P опустим перпендикуляр AB. 2) Продолжаем отрезок AB за точку A и откладываем на этом продолжении от точки A отрезок AC, равный AB.

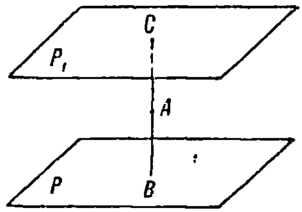


Рис. 376.

Через точку C проводим плоскость P_1, параллельную плоскости P.

Плоскость P_1 — искомая.

329. *Дана плоскость P, на ней окружность K и вне плоскости точка A. Построить в пространстве окружность, симметричную данной относительно точки A.*

Построение (рис. 377). 1) Строим плоскость P_1, симметричную данной плоскости относительно точки A. 2) Определяем в плоскости P_1 точку O', которая относительно точки A симметрична центру O данной окружности. 3) В плоскости P_1 из точки O' описываем окружность K', равную данной.

Окружность K'—искомая, так как она симметрична окружности K относительно точки A.

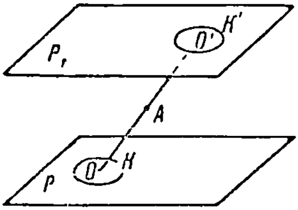


Рис. 377.

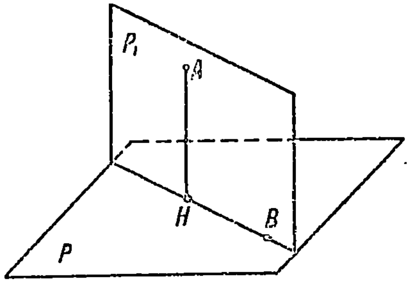


Рис. 378.

330. *Дана плоскость P, на ней точка B и вне плоскости точка A. Провести через точки A и B плоскость, перпендикулярную к плоскости P.*

Построение (рис. 378). 1) Из точки A опускаем перпендикуляр AH на плоскость P. 2) Через точку B и прямую AH проводим искомую плоскость P_1.

Исследование. Если точка B не совпадает с точкою H, то задача имеет одно решение.

Если точка B совпадает с точкою H, то задача имеет бесчисленное множество решений.

331. *Дана плоскость P и по разные её стороны две точки A и B. Провести через эти точки плоскость, перпендикулярную к плоскости P.*

Указание. Это упражнение выполняется точно так же, как и предыдущее (рис. 379).

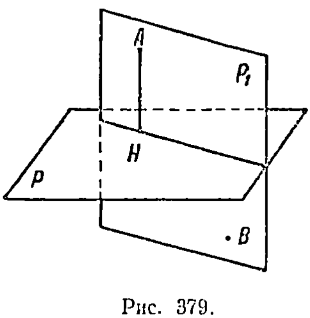


Рис. 379.

Исследование. Если точка B не лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость P, то задача имеет одно решение, в противном же случае задача имеет неограниченное множество решений.

332. *Дана плоскость P и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на плоскости P такую точку M, чтобы сумма $AM+$ $+MB$ была наименьшей.*

Построение (рис. 380). 1) Строим точку B', симметричную точке B относительно плоскости P. 2) Через точки A, B и B' проводим плоскость Q. 3) Плоскости P и Q будут взаимно перпендикулярны и пересекутся по некоторой прямой CD. 4) В плоскости Q через точки A и B' проводим прямую. 5) Прямая AB' пересечёт прямую CD в искомой точке M.

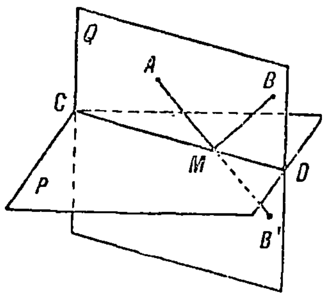


Рис. 380.

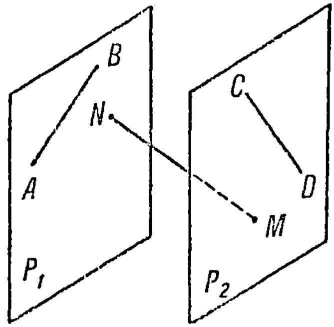


Рис. 381.

333. *Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Требуется построить отрезок, представляющий кратчайшее расстояние между данными прямыми.*

Построение (рис. 381). 1) Через прямую AB проводим плоскость P_1, параллельную CD. 2) Через прямую CD проводим плоскость P_2, параллельную AB. 3) Из произвольной точки N плоскости P_1 опускаем перпендикуляр на плоскость P_2 до встречи с ней в точке M. NM — искомый отрезок.

334. *Даны две пересекающиеся плоскости P и Q и между ними точка A. Найти на плоскости P такую точку B, а на плоскости Q точку C, чтобы сумма отрезков $AB+BC+CA$ была наименьшей.*

Решим эту задачу для того случая, когда точка A находится внутри острого двугранного угла, образуемого плоскостями P и Q.

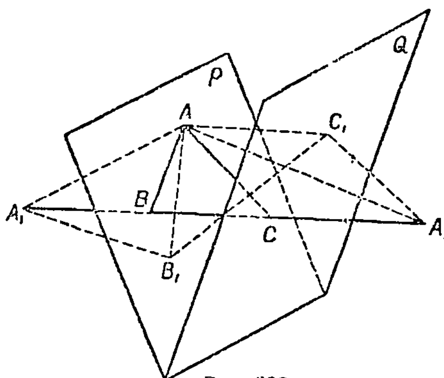


Рис. 382.

Анализ (рис. 382). Возьмём на плоскости P точку B_1, а на плоскости Q — точку C_1. Периметр треугольника AB_1C_1 равен

$$AB_1+B_1C_1+C_1A. \qquad (1)$$

Не имея возможности непосредственно выяснить, при каком положении точек B_1 и C_1 эта сумма (1) отрезков будет наименьшей, пробуем заменить её равной ей суммой.

С этой целью строим точку A_1, симметричную точке A относительно плоскости P, и точку A_2, симметричную A относительно плоскости Q.

Так как две точки, симметричные относительно какой-либо плоскости, равноудалены от любой точки этой же плоскости, то

$$AB_1 = A_1B_1. \tag{2}$$

$$AC_1 = C_1A_2. \tag{3}$$

Если тождество

$$B_1C_1 = B_1C_1$$

сложим почленно с равенствами (2) и (3), то получим:

$$AB_1 + B_1C_1 + AC_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2. \tag{4}$$

Мы желаем, чтобы сумма (1) была наименьшей. Равенство (4) показывает, что это случится тогда, когда сумма

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2 \tag{5}$$

примет наименьшее значение.

Ломаная линия (5) $A_1B_1C_1A_2$, проведённая между двумя точками A_1 и A_2, очевидно, будет иметь наименьшую длину в том случае, когда сумма составляющих её отрезков равна отрезку A_1A_2. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли, соединив точку A_1 с A_2 прямолинейным отрезком, принять за искомые точки (B и C) те точки, в которых этот отрезок (A_1A_2) пересечёт плоскости P и Q.

Мы принимаем, что плоскости P и Q образуют острый угол, внутри которого находится данная точка A. Легко убедиться, что в этом случае отрезок A_1A_2 непременно пересечёт каждую из граней угла. Из сказанного ясно, как определить положение точек B и C, чтобы периметр треугольника ABC, равный $AB+BC+CA$, имел наименьшее значение из всех возможных.

Построение. 1) Строим точку A_1, симметричную точке A относительно плоскости P. 2) Строим точку A_2, симметричную точке A относительно плоскости Q. 3) Соединим точку A_1 с A_2 прямолинейным отрезком A_1A_2; он пересечёт данные плоскости в искомых точках B и C.

Исследование. 1) Задача не имеет решения, если плоскости P и Q образуют прямой угол, потому что в этом случае при любом положении точки A прямая A_1A_2 проходит через ребро данного двугранного угла, и, следовательно, искомые точки B и C сливаются в одну.

2) Задача не имеет решения и тогда, когда точка A находится внутри тупого двугранного угла, потому что в этом случае отрезок A_1A_2 не пересекает граней этого угла.

3) Задача имеет решение лишь в том случае, когда точка A находится внутри острого двугранного угла, образуемого плоскостями P и Q, и не лежит ни на одной из его граней.

335. *Даны плоскость P и две скрещивающиеся прямые AB и CD* (рис. 383). *Требуется через точку пересечения плоскости P и прямой AB провести плоскость, перпендикулярную к CD.*

Построение. 1) Определяем точку пересечения плоскости P и прямой AB. 2) Через найденную точку проводим искомую плоскость, перпендикулярную к прямой CD.

336. *Дана плоскость M и прямая AB, параллельная этой плоскости. Через прямую AB провести плоскость, пересекающую плоскость M под данным углом.*

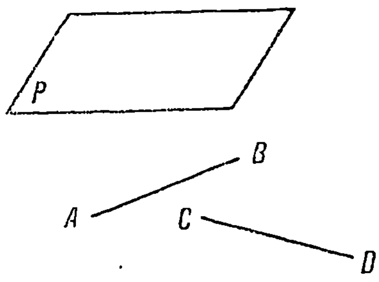


Рис. 383.

Построение (рис. 384). 1) Через произвольную точку P прямой AB проводим плоскость L, перпендикулярную к прямой AB. Плоскость L пересечёт данную плоскость M по некоторой прямой CD. 2) Из точки P проводим в плоскости L прямую PE, пересекающую линию CD под данным углом (α). 3) Через прямые AB и PE, пересекающиеся в точке P, проводим искомую плоскость S.

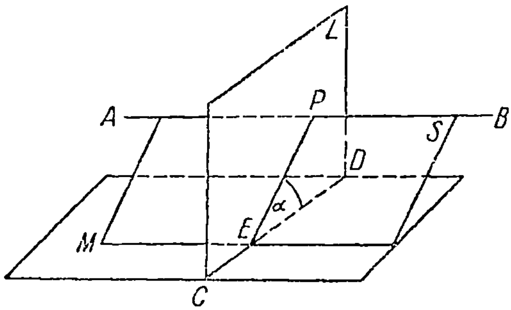


Рис. 384.

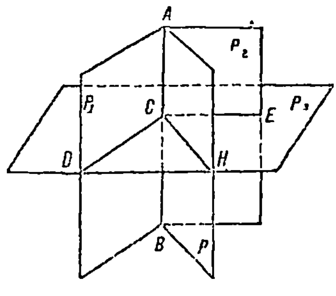


Рис. 385.

337. *Построить биссекторную плоскость двугранного угла, образуемого полуплоскостями P_1 и P_2.*

Построение (рис. 385). 1) На прямой AB, являющейся ребром данного двугранного угла, берём произвольную точку C. 2) В плоскости P_1 проводим через точку C прямую CD, перпендикулярную к прямой AB. 3) В плоскости P_2 проводим через точку C прямую CE, перпендикулярную к прямой AB. 4) Через две пересекающиеся прямые CD и CE проводим плоскость P_3. 5) В плоскости P_3 проводим биссектрису CH угла DCE. 6) Через две пересекающиеся прямые AB и CH проводим биссекторную плоскость P данного двугранного угла.

338. *Через данную точку E провести плоскость, составляющую равные углы с гранями данного двугранного угла $ABCD$.*

Построение (рис. 386). 1) Проводим плоскость P_1, делящую данный двугранный угол пополам. 2) Из точки E опускаем перпендикуляр EH на биссекторную плоскость P_1. 3) Из точки H плоскости P_1 опускаем перпендикуляр HK на ребро BC двугранного угла. 4) В плоскости P_1 из точки H восставим перпендикуляр HL к прямой HK. 5) Через пересекающиеся прямые EH и HL проводим искомую плоскость P_2.

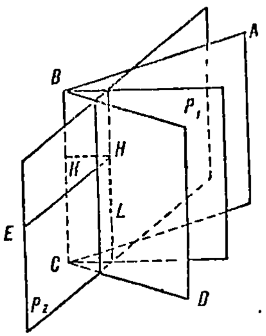


Рис. 386.

339. *Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от двух пересекающихся плоскостей P и Q.*

340. *Данный двугранный угол $ABCD$ разделить плоскостью в отношении $3:5$.*

Построение (рис. 387). 1) Через произвольно взятую точку E на ребре BC проводим перпендикулярную к нему плоскость P_1. Она пересечёт грани угла по прямым EH и EK. 2) В плоскости P_1 делим линейный угол HEK на 8 равных частей и проводим луч EL, делящий этот угол в отношении $3:5$. 3) Через две пересекающиеся прямые BC и EL проводим плоскость P_2. Она делит данный двугранный угол в отношении $3:5$.

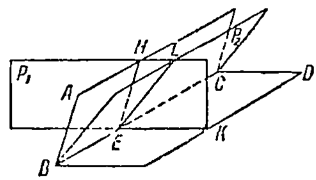


Рис. 387.

341. *Найти геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от двух пересекающихся прямых AB и A_1B_1.*

342. *Дана плоскость P и вне её две пересекающиеся прямые AB и A_1B_1. Построить на данной плоскости прямую, каждая точка которой равноудалена от прямых AB и A_1B_1.*

Построение (рис. 388). 1) Через прямые AB и A_1B_1 проводим плоскость P_1. 2) В плоскости P_1 строим биссектральные прямые CD и C_1D_1 углов, образуемых прямыми AB и A_1B_1. 3) Через прямую CD проводим плоскость P_2, перпендикулярную к плоскости P_1. 4) Плоскости P и P_2 пересекутся по некоторой прямой EH. 5) Через прямую C_1D_1 проводим плоскость P_3, перпендикулярную к плоскости P_1. 6) Плоскости P и P_3 пересекутся по некоторой прямой E_1H_1.

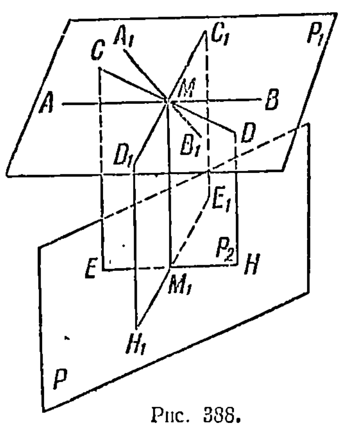


Рис. 388.

Прямые EH и E_1H_1 — искомые.

343. *Даны в пространстве три прямые AB, A_1B_1 и A_2B_2, из которых две последние пересекаются. Найти на прямой AB точки, одинаково отстоящие от каждой из линий A_1B_1 и A_2B_2.*

Построение. 1) Через прямые A_1B_1 и A_2B_2 проводим плоскость P. 2) В плоскости P строим биссектральные прямые C_1D_1 и C_2D_2 углов, образуемых прямыми A_1B_1 и A_2B_2. 3) Через прямые C_1D_1 и C_2D_2 проводим плоскости P_1 и P_2, перпендикулярные к плоскости P. 4) Определяем точки E и H, в которых прямая AB пересекает плоскости P_1 и P_2.

E и H—искомые точки.

344. *Построить точку, равноудалённую от четырёх данных точек A, B, C и D, не лежащих в одной плоскости.*

Построение. 1) Находим середины M_1, M_2 и M_3 отрезков AB, BC и CD. 2) Через точки M_1, M_2 и M_3 проводим плоскости P_1, P_2 и P_3, соответственно перпендикулярные к отрезкам AB, BC и CD. 3) Определяем прямую EH, по которой пересекаются плоскости P_1 и P_2. 4) Определяем точку T пересечения прямой EH и плоскости P_3.

T—искомая точка.

345. *Даны: угол α, плоскость P, на ней прямая AB и вне плоскости точка C. Требуется через точку C провести прямую, которая параллельна плоскости P и образует с прямою AB угол α.*

Построение (рис. 389). 1) В плоскости P, на прямой AB, при произвольной точке D строим угол ADE, равный α. 2) Через точку C и прямую DE проводим плоскость P_1. 3) В плоскости P_1 через точку C проводим прямую D_1E_1, параллельную DE.

Прямая D_1E_1—искомая.

Если $\alpha \neq 90°$, то задача имеет два решения.

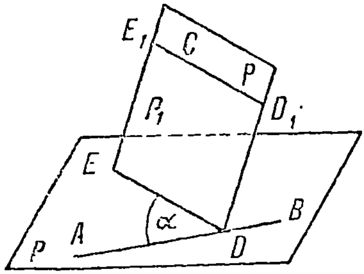


Рис. 389.

346. *Дан трёхгранный угол $ABCD$ и требуется построить луч, который находится внутри этого угла и представляет собою геометрическое место точек, равноудалённых от граней.*

Построение. 1) Проводим биссекторную плоскость P_1 двугранного угла $DABC$. 2) Проводим биссекторную плоскость P_2 двугранного угла $BADC$. 3) Пересечение плоскостей P_1 и P_2 внутри данного трёхгранного угла представляет собою искомый луч AA'.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ДЕСЯТОГО КЛАССА.

347. *Семиугольную призму превратить в такую равновеликую ей призму, которая имеет ту же высоту (h), но квадратное основание.*

Построение. 1) Семиугольник, являющийся основанием призмы, превращаем в квадрат $ABCD$. 2) В точках A, B, C, D восставим перпендикуляры (AA', BB', CC' и DD') к плоскости $ABCD$. 3) На полупрямых AA', BB', CC' отложим отрезки AA_1, BB_1, CC_1, равные высоте h данной призмы. 4) Через точки A_1, B_1, C_1 проведём плоскость P; она пересечёт полупрямую DD' в некоторой точке D_1. 5) В плоскости P последовательно соединяем точки A_1, B_1, C_1, D_1 и получаем верхнее основание искомой призмы.

6) Через отрезки AB и A_1B_1 проводим плоскость P_1,
,, ,, BC и B_1C_1 ,, ,, P_2,
,, ,, CD и C_1D_1 ,, ,, P_3,
,, ,, AD и A_1D_1 ,, ,, P_4.

7) Плоскости P_1, P_2, P_3 и P_4, пересекаясь одна с другой и с плоскостями оснований, образуют искомую призму.

348. *В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ дана точка D_1 на стороне A_1C_1 основания. Провести через эту точку плоскость, которая параллельна боковым рёбрам призмы и делит её на две равновеликие призмы.*

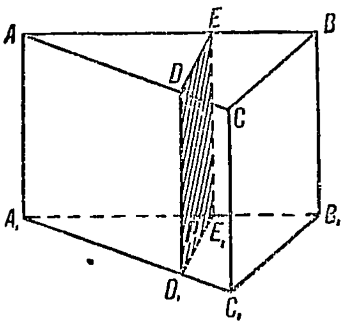


Рис 390.

Построение (рис. 390). 1) В треугольнике $A_1B_1C_1$ через точку D_1 проводим отрезок D_1E_1, делящий площадь треугольника $A_1B_1C_1$ на две равные части. 2) В плоскости A_1B_1BA через точку E_1 проводим прямую EE_1, параллельную боковому ребру призмы AA_1. 3) Через отрезок D_1E_1 и прямую EE_1 проводим искомую плоскость

P, параллельную боковому ребру данной призмы и рассекающую её на две равновеликие призмы.

349. *Прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ требуется рассечь на две равновеликие призмы плоскостью, перпендикулярной к ребру AB.*

Построение (рис. 391). 1) Строим отрезок DE, который перпендикулярен к прямой AB и делит треугольник ABC на две равновеликие части. 2) В плоскости ABB_1A_1 через точку D проводим прямую DD_1, параллельную ребру призмы AA_1. 3) Через отрезок DE и прямую DD_1 проводим плоскость P, параллельную ребру AA_1.

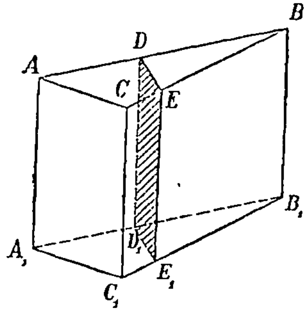


Рис. 391.

Плоскость P—искомая.

350. *Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ и требуется построить плоскость, которая проходит через сторону (AB) основания и делит призму на две равновеликие части.*

Анализ (рис. 392). Плоскость, проведённая через отрезок AB и точку C_1, отсечёт пирамиду, основанием которой является $\triangle ABC$, а высота равна высоте данной призмы, и, следовательно, объём этой пирамиды C_1ABC представит собою лишь одну треть объёма данной призмы.

Отсюда вытекает, что секущая плоскость должна пересекать $\triangle A_1B_1C_1$ по некоторому отрезку A_2B_2.

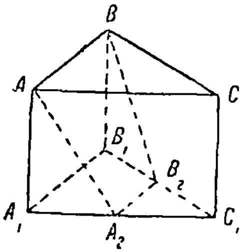


Рис. 392.

На основании свойства линии пересечения двух плоскостей, из которых одна проходит через прямую, параллельную другой плоскости, следует, что $A_2B_2 \parallel AB$. Следовательно, искомая секущая плоскость разобъёт данную призму на два тела, из которых одно представляет собою усечённую пирамиду

$$ABCA_2B_2C_1. \qquad (1)$$

Объём каждого из этих двух тел должен, по условию, равняться половине объёма данной призмы.

Положение секущей плоскости, проходящей через сторону AB, будет вполне определено, если найдём положение точки A_2 (или B_2).

Поэтому попытаемся определить длину отрезка A_2C_1, исходя из того, что объём усечённой пирамиды (1) должен равняться половине объёма данной призмы.

Прежде всего заметим, что

$$A_2B_2 \parallel AB \parallel A_1B_1,$$

а потому

$$\triangle A_2B_2C_1 \backsim \triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC,$$

и, следовательно,

$$\frac{\text{пл. } \triangle A_2B_2C_1}{\text{пл. } \triangle ABC} = \frac{A_2C_1^2}{AC^2}. \qquad (2)$$

Далее, если введём обозначения:

$$\text{пл. } \triangle ABC = s$$

и

$$\text{пл. } \triangle A_2B_2C_1 = s_1,$$

то

$$\text{объём } ABCA_2B_2C_1 = \frac{AA_1}{3}(s + \sqrt{ss_1} + s_1),$$

$$\text{объём } ABCA_1B_1C_1 = s \cdot AA_1. \qquad (3)$$

Так как, по условию, объём отсекаемой пирамиды должен быть вдвое меньше объёма призмы, то из (3) имеем:

$$\frac{AA_1}{3}(s + \sqrt{ss_1} + s_1) = \frac{AA_1 \cdot s}{2},$$

откуда

$$2s + 2\sqrt{ss_1} + 2s_1 = 3s,$$

т. е.

$$2s_1 + 2\sqrt{s_1} \cdot \sqrt{s} - s = 0. \qquad (4)$$

Величина s нам известна, а величину s_1 можем определить из уравнения (4):

$$\sqrt{s_1} = \frac{-\sqrt{s} \pm \sqrt{s + 2s}}{2}.$$

Отбрасывая отрицательный корень, как не соответствующий содержанию задачи, получим:

$$\sqrt{s_1} = \frac{-\sqrt{s} + \sqrt{3s}}{2},$$

т. е.

$$\sqrt{s_1} = \frac{\sqrt{s}\,(\sqrt{3} - 1)}{2},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

т. е.

$$\frac{\sqrt{\text{пл. } \triangle A_2B_2C_1}}{\sqrt{\text{пл. } \triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \qquad (5)$$

или

$$\sqrt{\frac{\text{пл. } \triangle A_2B_2C_1}{\text{пл. } \triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \qquad (6)$$

Из (2) и (6) получим:

$$\frac{A_2C_1}{AC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \qquad (7)$$

Итак, объём отсекаемой пирамиды (1) будет равен половине объёма данной призмы, если длина отрезка A_2C_1 будет удовлетворять равенству (7). Три члена пропорции (7) нам известны, а потому можем определить длину отрезка A_2C_1, после чего легко будет построить искомую плоскость.

Построение. 1) Строим отрезок x, определяемый пропорцией (7):

$$\frac{x}{AC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

2) На стороне A_1C_1 основания данной призмы от точки C_1 откладываем отрезок A_2C_1, равный найденному отрезку x. 3) Через сторону основания AB и точку A_2 проводим плоскость P.

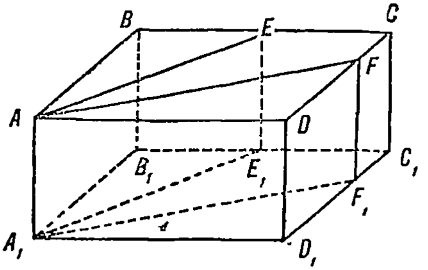


Рис. 393.

Плоскость P—искомая: она рассекает данную призму на две равновеликих части.

351. *Двумя плоскостями, проходящими через ребро AA_1 данного параллелепипеда, разделить его на три призмы, объёмы которых относятся, как $3:5:7$.*

Анализ (рис. 393). Плоскости, проходящие через ребро AA_1, могут рассечь данный параллелепипед на призмы, имеющие такую же высоту, как и параллелепипед. Поэтому секущие плоскости, проведённые через ребро AA_1, должны проходить через те прямые, которые разбивают площадь основания ($ABCD$) параллелепипеда в требуемом отношении.

Следовательно, для решения задачи необходимо построить те отрезки, которые, выходя из точки A, делят площадь параллелограма $ABCD$ в отношении $3:5:7$ (рис. 394), т. е.

пл. $\triangle ABE$: пл. $AECF$: пл. $\triangle ADF = 3:5:7$.

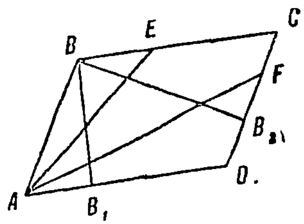


Рис. 394.

Так как $\triangle ABE$ имеет ту же высоту (BB_1), что и параллелограм $ABCD$, то можем написать такие равенства:

$$\text{пл. } \triangle ABE=\frac{BE\cdot BB_1}{2} \qquad (1)$$

и

$$\text{пл. } ABCD=BC\cdot BB_1. \qquad (2)$$

По условию, пл. $\triangle ABE=\frac{3}{3+5+7}$ пл. $ABCD$, т. е.

$$\text{пл. } \triangle ABE=\frac{1}{5}\text{ пл. } ABCD. \qquad (3)$$

Подставив в (3) выражения пл. $\triangle ABE$ и пл. $ABCD$, получим:

$$\frac{BE\cdot BB_1}{2}=\frac{1}{5}\cdot BC\cdot BB_1,$$

откуда находим, что

$$BE=\frac{2}{5}BC.$$

Итак, чтобы отрезок AE отсекал одну пятую площади параллелограма (3), необходимо, чтобы отрезок BE равнялся двум пятым отрезка BC.

Аналогичными рассуждениями найдём, что для решения задачи необходимо, чтобы

$$\text{пл. } \triangle AFD=\frac{7}{15}\text{ пл. } ABCD,$$

т. е.

$$\frac{DF\cdot BB_2}{2}=\frac{7}{15}CD\cdot BB_2,$$

откуда

$$DF=\frac{14}{15}CD.$$

Построение. 1) На ребре BC от точки B отложим отрезок BE, равный $\frac{2}{5}BC$. 2) На ребре CD от точки D отложим отрезок DF, равный $\frac{14}{15}CD$. 3) Через точку E и ребро AA_1 проводим плоскость P_1. 4) Через точку F и ребро AA_1 проводим плоскость P_2.

P_1 и P_2 — искомые плоскости.

352. *В пространстве даны четыре точки A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Построить плоскость, равноудалённую от каждой из этих точек.*

Анализ. Плоскость, которая проходит через середины трёх рёбер тетраэдра, выходящих из одной вершины, равноудалена от этой вершины и от противолежащей ей грани. Это даёт возможность решить рассматриваемую задачу.

Построение. 1) Соединив прямолинейными отрезками каждую пару данных точек A, B, C, D, получим тетраэдр $ABCD$. 2) Известным построением найдём середины рёбер тетраэдра, которые обозначим буквами

$$K,\ L,\ M,\ N,\ P,\ Q. \qquad (1)$$

3) Через каждые произвольно взятые три точки (1) проведём плоскость. Таких плоскостей окажется четыре: P_A, P_B, P_C, P_D.

Плоскость P_A проходит через середину ребра AB, AC, AD;
,, P_B ,, ,, ,, ,, BC, BD, AB;
,, P_C ,, ,, ,, ,, BC, CD, AC;
,, P_D ,, ,, ,, ,, AD, BD, CD.

Плоскости P_1, P_2, P_3, P_4 — искомые.

353. *Данную n-угольную пирамиду превратить в такую равновеликую ей пирамиду, которая имеет то же основание и высоту, но одно из её рёбер перпендикулярно к основанию.*

Построение. 1) В одной из вершин (A) основания данной пирамиды восставим перпендикуляр AA' к плоскости основания. 2) На полупрямой AA' от точки A отложим отрезок AS, равный высоте h

данной пирамиды. 3) Через точку S и каждую из сторон (AB, BC, CD...) основания $ABCDE$... проведём плоскости P_1, P_2, P_3, ...

Получим новую пирамиду, основание и высота которой те же, что и у данной, а боковые грани образованы пересечением построенных плоскостей (P_1, P_2, ...).

354. *Данную пятиугольную пирамиду превратить в равновеликую ей треугольную пирамиду, имеющую ту же высоту.*

Построение. 1) Пятиугольник, являющийся основанием пирамиды, превращаем в треугольник ABC, который принимаем за основание искомой пирамиды и помещаем в плоскости основания данной пирамиды. 2) Через вершину S данной пирамиды и стороны треугольника ABC проводим плоскости.

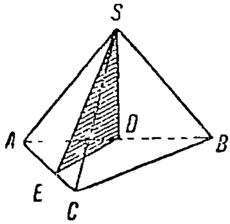


Рис. 395.

Пирамида $SABC$—искомая.

Задача имеет бесчисленное множество решений.

355. *Дана треугольная пирамида $SABC$ и на стороне AB основания точка D. Построить плоскость, которая проходит через вершину S и точку D и рассекает её на две пирамиды, объемы которых относятся, как $m:n$.*

Построение (рис. 395). 1) В плоскости основания через точку D проводим отрезок DE, делящий площадь треугольника ABC в отношении $m:n$. 2) Через точку S и отрезок DE проводим искомую плоскость P.

356. *Около данной правильной четырехугольной пирамиды описать другую правильную четырёхугольную пирамиду так, чтобы их объёмы относились, как 25:36.*

Анализ. Так как высоты данной и и описанной пирамид (рис. 396) одинаковы, то, значит, площадь основания ($A_1B_1C_1D_1$) описанной пирамиды должна относиться к площади основания данной пирамиды ($ABCD$), как 36:25.

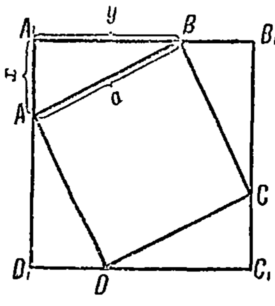


Рис 396.

Обозначая отрезки AB, AA_1 и A_1B соответственно буквами a, x и y, получим, что

$$A_1B_1 = x + y$$

и

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Кроме того, по условию, должна иметь место следующая пропорция:

$$(x+y)^2 : a^2 = 36:25,$$

откуда получим:

$$(x+y)^2 = \frac{36}{25} \cdot a^2,$$

т. е.

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{36}{25} a^2, \qquad (2)$$

и, кроме того,

$$x+y=\frac{6}{5}a. \tag{3}$$

Почленно вычитая (1) из (2), получим:

$$2xy=\frac{11}{25}a^2 \text{ и } xy=\frac{11}{50}a^2. \tag{4}$$

Из уравнения (3) и (4) видим, что x и y являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$z^2-\frac{6}{5}az+\frac{11}{50}a^2=0,$$

т. е.

$$50z^2-60az+11a^2=0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$z=\frac{30a\pm\sqrt{900a^2-550a^2}}{50}=\frac{30a\pm5a\sqrt{14a}}{50}=\frac{(6\pm\sqrt{14})a}{10},$$

т. е.

$$y=z_1=\frac{(6+\sqrt{14})a}{10} \tag{5}$$

и

$$x=z_2=\frac{6-\sqrt{14}}{10}a. \tag{6}$$

Построение. 1) На стороне AB основания данной пирамиды, как на диаметре, строим полуокружность K. 2) Строим отрезок x, определяемый формулой (6). 3) Из точки A, как из центра, радиусом, равным $\frac{a(6-\sqrt{14})}{10}$, описываем дугу K_1, которая пересечёт полуокружность K в некоторой точке A_1. 4) Из точки A_1 через точки A и B проводим отрезки A_1B_1 и A_1D_1, порознь равные отрезку (3) $\frac{6}{5}a$. 5) Из точки D_1 проводим луч через точку D. 6) Из точки B_1 проводим луч через точку C. 7) Лучи D_1D и B_1C пересекутся в некоторой точке C_1.

$A_1B_1C_1D_1$ — основание искомой пирамиды.

8) Через вершину пирамиды и стороны основания (A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1) проводим плоскости.

Эти плоскости, пересекаясь, образуют искомую пирамиду.

357. *Даны две плоскости P и Q, пересекающиеся по прямой AB, точка C на плоскости P и две точки D и E на плоскости Q. Построить прямую, по которой плоскость P пересекается с плоскостью, проходящею через точки C, D и E* (рис. 397).

Анализ. Плоскость, проходящую через точки C, D и E, обозначим буквою S. Точки D и E, по условию, принадлежат плоскости Q. Кроме того, эти же точки принадлежат и плоскости S, потому что она проходит через них. Следовательно, прямая DE является линией пересечения плоскостей Q и S. Построив прямую DE, можно найти точку (F), в которой эта линия пересечёт прямую AB. Все точки прямой DE лежат на плоскости S, а потому и точка F лежит на этой же плоскости. А так как, по условию, плоскость S проходит через точку C, то, значит, прямая CF должна лежать на плоскости S. Точки C и F находятся на плоскости P, а потому и вся прямая CF находится на этой плоскости. Значит, CF принадлежит как плоскости S, так и плоскости P и поэтому является искомой линией пересечения плоскостей P и S.

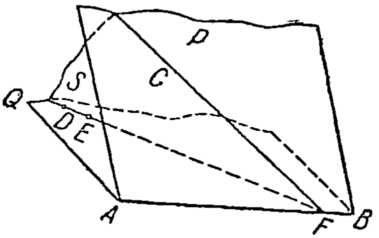


Рис. 397.

Построение. 1) Определяем точку F, в которой прямая AB пересекается с прямой, проведённой через точки D и E. 2) Проводим прямую через точки C и F.

Прямая CF — искомая.

Доказательство. Правильность построения вытекает из рассуждений, приведённых в анализе этой задачи.

Исследование. 1) Решая эту задачу, мы сделали предположение, что прямая DE не параллельна прямой AB, и получили вполне определённый ответ. 2) Если точка E находится на прямой AB, а две другие точки (C и D) лежат соответственно в плоскостях P и Q, то для получения искомого пересечения плоскостей P и S достаточно провести прямую через точки C и E. 3) Если точки C, D и E лежат на одной прямой, то задача имеет одно решение (когда все эти точки лежат на прямой AB) или бесчисленное множество решений (когда на прямой AB лежит только точка C). 4) Если точки D и E лежат на прямой AB, а точка C вне этой прямой, то задача не имеет решения, так как в этом случае плоскость S совпадает с плоскостью P, потому что обе они проходят через одни и те же три точки D, E и C. 5) Если DE параллельна AB, то и плоскость S будет параллельна прямой AB. В этом случае требуемое в задаче построение получим, когда проведём через точку C прямую, параллельную прямой AB или DE.

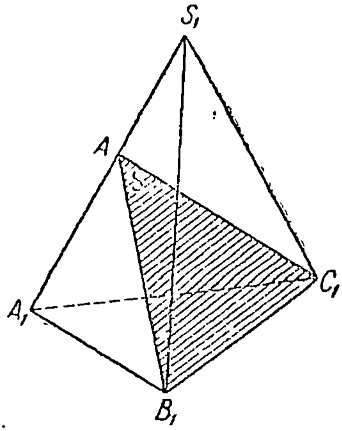


Рис. 398.

358. *Дана треугольная пирамида $S_1A_1B_1C_1$ и точка A на ребре S_1A_1. Построить фигуру, по которой плоскость S, проходящая через точки A, B_1 и C_1, пересекает эту пирамиду* (рис. 398).

Анализ. Секущая плоскость S проходит через точки A и B_1, а потому отрезок AB_1 лежит на плоскости S. Точки A и B_1 находятся также на грани $S_1A_1B_1$, и, значит, весь отрезок AB_1 находится на этой грани. Грань $S_1A_1B_1$ не совпадает с плоскостью S, причём отрезок AB_1 принадлежит обеим этим плоскостям и, следовательно, является пересечением грани $S_1A_1B_1$ с плоскостью S. Аналогичными рассуждениями придём к выводу, что отрезки AC_1 и B_1C_1 также являются сторонами фигуры сечения.

Построение. Отрезками прямой соединяем точку A с точками B_1 и C_1. Треугольник AB_1C_1 является искомой фигурой сечения.

359. *Дана треугольная призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ и три точки A, B и C на её боковых рёбрах A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Через эти точки проведена плоскость S. Построить фигуру, по которой плоскость S пересекает данную призму.*

Примечание. При решении этой задачи надо применить те же рассуждения, посредством которых была решена предыдущая задача.

Построение. Соединяем последовательно точки A, B и C отрезками прямой. Полученный треугольник ABC представляет собою искомую фигуру сечения.

360. *Дан куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ и точка A на ребре A_2D_2. Определить фигуру, по которой плоскость, проходящая через точки A, A_1 и C_1, пересекает данный куб* (рис. 399).

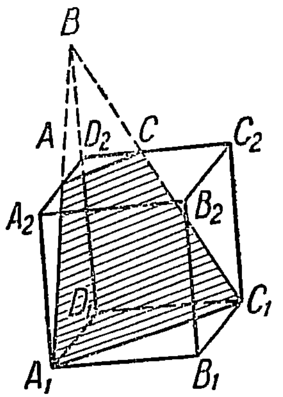


Рис. 399.

Построение. 1) Соединяем отрезком точки A_1 и C_1. 2) Из точки A проводим отрезок, параллельный диагонали A_1C_1 до встречи с ребром C_2D_2 в некоторой точке C. 3) Отрезками прямой соединяем точку A с A_1, а точку C с C_1. Равнобочная трапеция ACC_1A_1 представляет искомую фигуру сечения.

Доказать, что предыдущую задачу можно решить посредством следующих операций:

Построение. 1) Продолжаем отрезки A_1A и D_1D_2 до пересечения в некоторой точке B. 2) Проводим через точки B и C_1 прямую, которая пересечёт ребро C_2D_2 в некоторой точке C.

Равнобочная трапеция ACC_1A_1 — искомая фигура сечения.

361. *Дан куб. Требуется построить такую секущую плоскость, чтобы сечение представляло собою:*

а) *квадрат,*

б) *равносторонний треугольник,*

в) *правильный шестиугольник.*

Построения. а) Любая плоскость, которая пересекает куб и параллельна его грани. б) Любая плоскость, которая пересекает куб и параллельна плоскости, проходящей через концы трёх рёбер, исходящих из одной вершины. в) Плоскость, которая проходит через середины рёбер A_1A_2, A_2D_2 и C_2D_2, — одна из искомых.

362. *Дан куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ и точка A на ребре C_1C_2. Построить фигуру, по которой плоскость (S), проходящая через точки A, B_1 и D_2, пересекает данный куб* (рис. 400).

Анализ. По условию, секущая плоскость (S) проходит через точки A и D_2, а потому отрезок AD_2 есть пересечение плоскости S с гранью $C_1C_2D_2D_1$. По аналогичной причине отрезок AB_1 является пересечением плоскости S с гранью $B_1B_2C_2C_1$. Грань $A_1A_2D_2D_1$, параллельную грани $B_1B_2C_2C_1$, плоскость S должна пересечь по линии D_2D, которая параллельна AB_1 и проходит через точку D_2. Следовательно, проведя через точку D_2 прямую, параллельную AB_1, получим отрезок D_2D, являющийся пересечением плоскости S с гранью $A_1A_2D_2D_1$. По той же причине отрезок DB_1 будет параллелен отрезку AD_2.

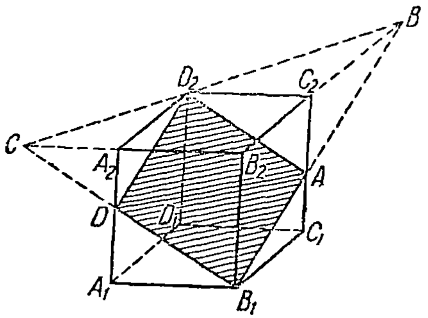


Рис. 400.

Построение. 1) Отрезками прямой соединяем точку A с точками B_1 и D_2. 2) Из точки D_2 проводим отрезок, параллельный прямой AB_1 до встречи с отрезком A_1A_2 в некоторой точке D. 3) Соединив отрезком точку D с B_1, получим параллелограм AD_2DB_1, представляющий собою искомую фигуру сечения.

Доказать, что эту задачу можно решить посредством следующих операций:

Построение. 1) Определяем точку (B) пересечения прямых B_1A и B_2C_2. 2) Строим точку (C) пересечения прямых BD_2 и B_2A_2. 3) Находим точку (D) пересечения прямых CB_1 и A_1A_2.

Параллелограм AD_2DB_1 — искомая фигура сечения.

363. *Даны: 1) треугольная пирамида $SA_1B_1C_1$, 2) точки A, B и C на рёбрах SA_1, SB_1, SC_1 и 3) точка D на основании $A_1B_1C_1$. Определить в треугольнике ABC ту точку, в которой его пересекает прямая SD* (рис. 401).

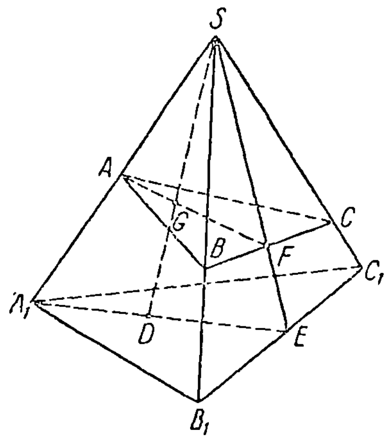


Рис. 401.

Построение. 1) Соединив последовательно точки A, B и C отрезками прямой, получим треугольник ABC. 2) Определим точку E, в которой прямая A_1D пересекает сторону B_1C_1. 3) Соединим точки S и E. Отрезок SE пересечёт BC

в некоторой точке F. 4) В $\triangle A_1SE$ проводим отрезки AF и SD, которые пересекутся в искомой точке G.

364. *Дана прямая треугольная призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ и три точки A, B, C, расположенные соответственно на рёбрах A_2C_2, A_1A_2 и B_1C_1. Определить фигуру, по которой плоскость, проходящая через точки A, B, C, пересекает данную призму* (рис. 402).

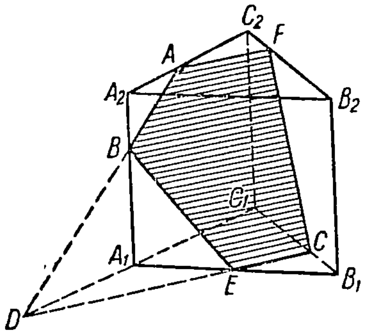


Рис. 402.

Построение. 1) Определяем точку (D) пересечения прямых AB и A_1C_1. 2) Определяем точку (E) пересечения прямых DC и A_1B_1. 3) Через точку A проводим прямую (AF), параллельную EC. 4) Отрезками прямой соединяем точку C с F, а точку B с E.

Пятиугольник $ABECF$—искомое сечение.

365. *Прямая четырёхугольная призма $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ пересечена плоскостью S, проходящей через данные точки A, B, C, лежащие соответственно на рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и D_1D_2. Построить фигуру сечения* (рис. 403).

Построение. 1) Через точки A и B проводим прямую до пересечения с продолжением рёбер D_1A_1 и D_1C_1 в некоторых точках D и E. 2) Через точки C и D проводим прямую, которая пересечёт ребро A_1A_2 в некоторой точке F. 3) Через точки C и E проводим прямую, которая пересечёт ребро C_1C_2 в некоторой точке G. 4) Соединяем отрезками прямой точку A с F, а точку B с G. Пятиугольник $AFCGB$—искомая фигура сечения.

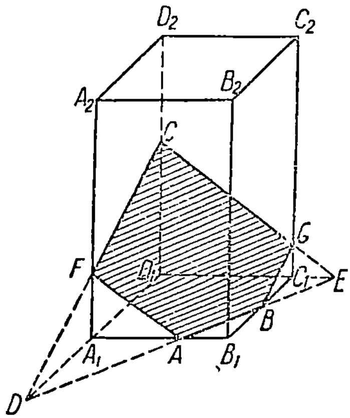


Рис. 403.

Доказательство. Через точки A и B, лежащие в плоскости $A_1B_1C_1D_1$, проходит секущая плоскость S, следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой AB.

Любая точка прямой AB принадлежит секущей плоскости S, и, значит, принадлежат этой плоскости и точки D и E, в которых AB пересекает продолжение рёбер D_1A_1 и D_1C_1.

Точки C и D принадлежат плоскости S и плоскости $A_1A_2D_2D_1$, а потому эти плоскости пересекаются по прямой CD.

Линия CD пересекает ребро A_1A_2 в некоторой точке F, следовательно, плоскость S пересекает грань $A_1A_2D_2D_1$ по отрезку CF.

Точки C и E принадлежат плоскости S и грани $C_1C_2D_2D_1$, значит, эти плоскости пересекаются *по прямой* CE.

Прямая CE пересекает ребро C_1C_2 в точке G, и, следовательно, плоскость S пересекает грань $C_1C_2D_2D_1$ по отрезку CG.

366. *На трёх рёбрах куба* (A_1A_2, C_2D_2 *и* B_1C_1), *из которых никакие два не лежат на одной грани его, взяты соответственно три точки* A, B, C. *Построить сечение куба плоскостью, проходящей через эти три точки* (рис. 404).

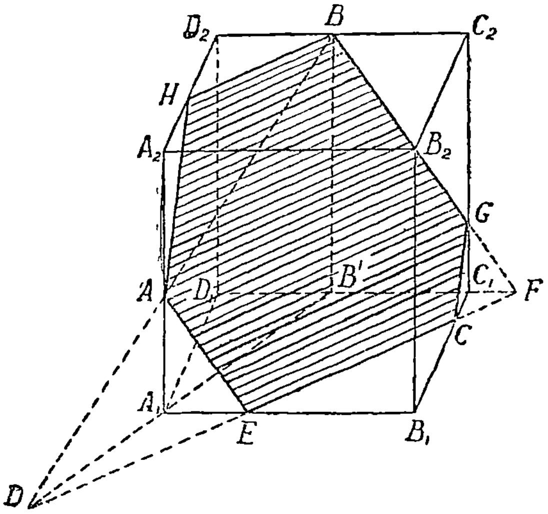


Рис. 404.

Построение. 1) Проводим прямую AB. 2) Находим проекцию B' точки B на ребро C_1D_1. 3) Проводим прямую A_1B'. Она является проекцией прямой AB на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. 4) Прямая AB и её проекция A_1B' при продолжении пересекутся в некоторой точке D. 5) Через точки D и C проводим прямую, которая пересечёт ребро A_1B_1 в некоторой точке E, а продолжение ребра D_1C_1—в некоторой точке F. 6) Проводим прямую через точки B и F; эта линия пересечёт ребро C_1C_2 в некоторой точке G. 7) Из точки B (на грани $A_2B_2C_2D_2$) проводим отрезок HB, параллельный CE до встречи с отрезком A_2D_2 в некоторой точке H. 8) Отрезками прямой соединяем точку A с H, а точку C с G. Шестиугольник $AHBGCE$—искомая фигура сечения.

367. *На данной цилиндрической поверхности S найти точку, которая отстоит на кратчайшем расстоянии от данной точки A, находящейся вне пространства, ограниченного поверхностью S.*

Построение (рис. 405). 1) Через точку A и ось OO' данной цилиндрической поверхности проводим плоскость P. 2) Плоскость P пересечёт данную цилиндрическую поверхность по двум параллельным прямым. Ту из этих прямых, которая в плоскости P проходит между осью OO' и точкой A, обозначим через BB'. 3) В плоскости P из точки A опускаем перпендикуляр AC на прямую BB'.

Точка C — искомая, так как отрезок AC является кратчайшим расстоянием от данной цилиндрической поверхности S до точки A.

368. *На боковой поверхности цилиндра дана точка P. Построить плоскость, которая проходит через точку P и является касательной к этой поверхности* (рис. 406).

Построение. 1) Проводим плоскость S через ось OO' данного цилиндра и точку P. Эта плоскость пересечёт боковую поверхность цилиндра по некоторой прямой AA'. 2) Строим плоскость T, которая проходит через прямую AA' и перпендикулярна к плоскости S.

T — искомая плоскость.

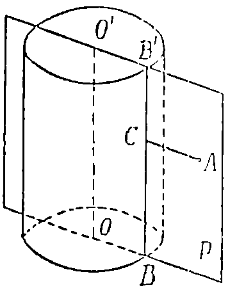


Рис. 405.

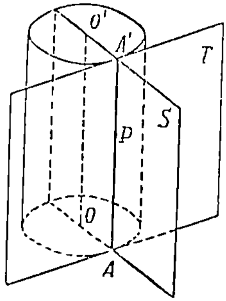


Рис. 406.

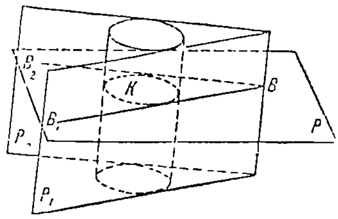


Рис. 407.

369. *Дан цилиндр и вне его точка B. Построить плоскость, которая проходит через точку B и касается боковой поверхности этого цилиндра.*

Построение (рис. 407). 1) Через точку B проводим плоскость P, перпендикулярную к оси цилиндра. 2) Плоскость P пересечёт боковую поверхность цилиндра по некоторой окружности K. 3) В плоскости P из точки B проводим касательные BB_1 и BB_2 к окружности K. 4) Через прямую BB_1 проводим плоскость P_1, перпендикулярную к плоскости P. 5) Через прямую BB_2 проводим плоскость P_2, перпендикулярную к плоскости P.

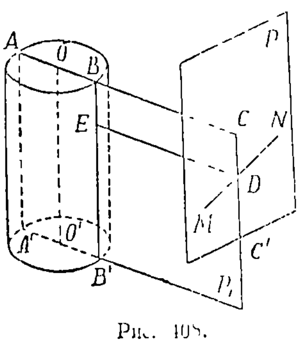


Рис. 408.

Плоскости P_1 и P_2 — искомые: каждая из них проходит через точку B и касается боковой поверхности данного цилиндра.

370. *Дана цилиндрическая поверхность и вне её прямая MN. Определить на этой поверхности ту точку, которая отстоит от данной прямой на кратчайшем расстоянии.*

Построение (рис. 408). 1) Через данную прямую MN проводим плоскость P, параллельную оси данного цилиндра. 2) Через ось OO' цилиндра проводим плоскость P_1, перпендикулярную к плоскости P. 3) Плоскость P_1 пересечет цилиндрическую поверхность по прямым AA' и BB', а плоскость P — по некоторой прямой CC'. 4) В плоскости P прямые MN и CC' пересекутся в некоторой точке D. 5) В плоскости P_1 из точки D опускаем перпендикуляр DE на ту из прямых AA' и BB', которая проходит между точкою D и осью OO' цилиндрической поверхности.

Точка E искомая: она принадлежит цилиндрической поверхности и находится на кратчайшем расстоянии от прямой MN.

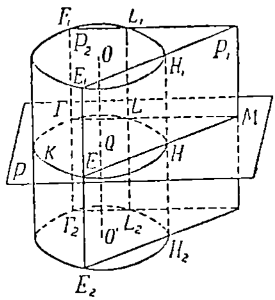


Рис. 409.

371. *Дан цилиндр и вне его точка M. Зная высоту (h) цилиндра и радиус (R) его основания, провести через точку M плоскость, пересекающую данный цилиндр по прямоугольнику, площадь которого равна mh.*

Построение. 1) Через точку M проводим плоскость P, перпендикулярную к оси OO' цилиндра (рис. 409). Эта плоскость пересечёт боковую поверхность цилиндра по окружности K, а ось цилиндра — в некоторой точке Q. 2) Строим равнобедренный $\triangle ABC$, боковые стороны которого порознь равны R, а основание (AC) равно отрезку m (рис. 409а). 3) Из точки B, как центра, радиусом, равным отрезку MQ, засекаем точку D на продолжении стороны AC. 4) В плоскости P из точки M, как центра, радиусом, равным отрезку AD (или CD), засекаем точки E и F (или L и H) на окружности K (рис. 409). 5) Через точки M и E проводим плоскость P_1, параллельную оси цилиндра OO'. 6) Через точки M и F проводим плоскость P_2, параллельную оси цилиндра OO'.

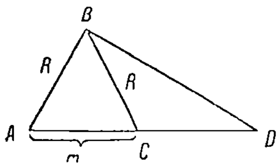


Рис. 409а.

Плоскости P_1 и P_2 — искомые, так как пересекают данный цилиндр по прямоугольникам, площади которых порознь равны mh.

372. *Дан двугранный угол $ABCA'$ и внутри его точка M. Вписать в этот угол круговую цилиндрическую поверхность, одна из образующих которых проходит через точку M.*

Построение (рис. 410). 1) Через точку M проводим плоскость P, перпендикулярную к ребру BC двугранного угла. Она пересечёт грани данного угла по прямым DE и DF. 2) В линейный угол EDF вписываем окружность, проходящую через точку M. Таких окружностей будет две: K_1 и K_2. 3) Через произвольную точку

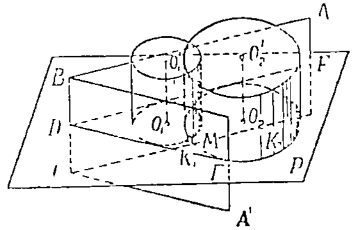


Рис. 410

окружности K_1 проводим прямую, параллельную ребру двугранного угла BC, затем перемещаем эту прямую параллельно самой себе так, чтобы она прошла через все точки окружности K_1, и получим некоторую цилиндрическую поверхность S_1, поперечным сечением которой является окружность K_1. 4) Аналогичным образом получим цилиндрическую поверхность S_2, поперечным сечением которой является окружность K_2.

S_1 и S_2—искомые цилиндрические поверхности.

373. *На боковой поверхности конуса дана точка A. Построить плоскость, которая касается боковой поверхности конуса и проходит через точку A.*

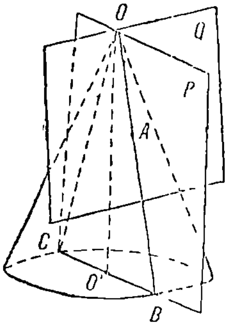


Рис. 411

Построение (рис. 411). 1) Через точку A и ось OO' конуса проводим плоскость P. 2) Плоскость P пересечёт коническую поверхность по двум образующим OB и OC. 3) Через ту образующую, на которой лежит точка A, проводим плоскость Q, перпендикулярную к плоскости P.

Площадь Q—искомая.

374. *Дан конус и вне его точка P. Построить плоскость, которая проходит через точку P и касается боковой поверхности этого конуса.*

Построение. 1) Через точку P проводим плоскость S, которая перпендикулярна к оси конуса. Плоскость S пересечёт боковую поверхность конуса по некоторой окружности K. 2) Через точку P проводим две прямые, каждая из которых касается окружности K. Обозначим точки касания буквами A и B. 3) Из вершины C конуса проводим образующие его, проходящие соответственно через точки A и B. 4) Проводим плоскость Q через точку P и прямую CA. 5) Проводим плоскость E через точку P и прямую CB.

Q и E—искомые плоскости.

375. *Дан конус и требуется построить отрезок данной длины m, который проходит через ось конуса, образует с нею данный угол α и имеет концы на боковой поверхности конуса* (рис. 412).

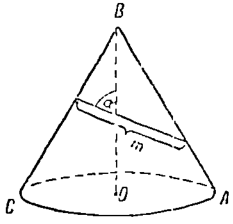


Рис. 412.

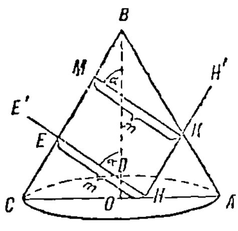


Рис. 413.

Построение (рис. 413). 1) Проводим плоскость P через ось конуса и диаметр AC его основания. Плоскость P пересечёт данный конус по образующим AB и BC. 2) В плоскости P при произвольной точке D высоты BO строим угол BDE', равный данному углу α. Прямая DE' пересечёт образующую BC в некоторой точке E. 3) В плоскости P на прямой DE внутри конуса откладываем отрезок EH, равный данному отрезку m.

Чтобы закончить построение, надо, оставляя один конец (E) отрезка EH скользить по прямой BC, перемещать этот отрезок в плоскости P параллельно самому себе до тех пор, пока точка H не совпадёт с некоторою точкою (K) образующей AB.

Такое перемещение отрезка EH можем выполнить следующим образом.

4) В плоскости P через точку H проводим прямую HH', параллельную образующей BC. Проведённая прямая пересечёт образующую AB в некоторой точке K. 5) На прямой BC от точки E отложим отрезок EM, равный HK. 6) Соединив точки K и M, получим искомый отрезок KM.

Задача имеет бесчисленное множество одинаковых решений.

376. *Найти центр шаровой поверхности, которая имеет радиус, равный R, и проходит через три данные точки A, B и C.*

Построение (рис. 414). 1) Проводим плоскость P через три данные точки A, B, C. 2) В плоскости P определяем центр O окружности, проходящей через данные точки A, B, C. 3) Через точку O проводим прямую EE', перпендикулярную плоскости P. 4) Через прямую EE' и точку A проводим плоскость Q. 5) В плоскости Q из точки A, как центра, радиусом, равным R, описываем окружность S, которая пересечёт прямую EE' в двух точках O_1 и O_2.

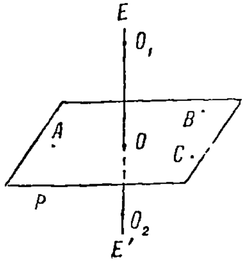


Рис. 414.

O_1 и O_2—искомые центры двух шаровых поверхностей радиуса R, проходящих через точки A, B и C.

Исследование. а) если радиус (R) указанной шаровой поверхности равен радиусу (r) окружности, то задача имеет одно решение;

б) если $R > r$, то задача имеет два решения;

в) если $R < r$, то задача не имеет ни одного решения.

377. *Около данного тетраэдра описать шаровую поверхность.*

Указание. Так как вершины тетраэдра представляют собою четыре точки, через которые должна пройти искомая шаровая поверхность, то данная задача решается так же, как и задача № 341.

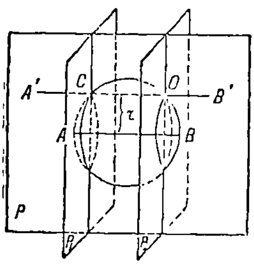


Рис. 415.

378. *Построить плоскость, которая пересекла бы данный шар (O, R) по кругу радиуса r.*

Построение (рис. 415). 1) Через центр O данного шара проводим плоскость P. 2) Плоскость P пересечёт шаровую поверхность по окружности K большого круга. 3) В плоскости P проводим диаметр AB окружности K. 4) В плоскости P проводим прямую $A'B'$, которая параллельна линии AB и отстоит от неё на расстоянии r. 5) Прямая $A'B'$ пересечёт окружность K в некоторых точках C и D. 6) Проводим через точку C плоскость P_1, перпендикулярную к диаметру AB. 7) Проводим через точку D плоскость P_2, перпендикулярную к диаметру AB.

Плоскости P_1 и P_2 — искомые.

379. *На поверхности шара, имеющего центр в точке O, дана дуга AB некоторой окружности. Разделить эту дугу пополам окружностью большого круга.*

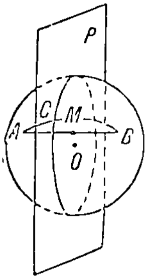


Рис. 416

Построение (рис. 416). 1) Соединим отрезком точки A и B. 2) Построим плоскость P, которая проходит через середину M отрезка AB и перпендикулярна к нему. Плоскость P — искомая: она пересекает поверхность шара по окружности большого круга и в некоторой точке C делит дугу AB пополам.

380. *Дан шар (O, R) и вне его точка A. Найти кратчайшее расстояние между данною точкою A и поверхностью данного шара.*

Построение. 1) Проводим произвольную плоскость P через данную точку A и центр O данного шара. 2) Плоскость P пересечёт поверхность шара по некоторой окружности K большого круга. 3) В плоскости P соединяем точки O и A отрезком прямой. 4) Отрезок AO пересечёт окружность K в некоторой точке B.

Отрезок AB есть искомое кратчайшее расстояние между точкою A и поверхностью шара (O, R).

381. *На поверхности шара (O, R) дана точка P. Построить прямую, которая касается этого шара в точке P.*

Построение. 1) Отрезком прямой соединяем центр O данного шара с точкой P. 2) Через точку P проводим плоскость S, перпендикулярную к радиусу OP. Любая прямая, проведённая на плоскости S через точку P, будет касательной к поверхности шара.

382. *Дан шар (O, R) и вне его прямая AB. Через прямую AB провести плоскость, касательную к шару.*

Построение. 1) Через центр O шара проведём плоскость S, перпендикулярную к прямой AB. Плоскость S пересечёт прямую AB в некоторой точке C, а поверхность шара — по окружности (K) радиуса R. 2) Из точки C проведём две касательные к окружности K. Точки касания обозначим буквами D и E. 3) Проведём через прямые AB и CD плоскость M. 4) Проведём через прямые AB и CE плоскость N.

Плоскости M и N — искомые.

382а. *Найти центр шаровой поверхности радиуса R, касающейся трёх данных плоскостей A, B и C.*

Построение. Для каждой из данных плоскостей строим две параллельные ей плоскости, отстоящие от неё на расстоянии R. Таких плоскостей будет шесть: A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Центром искомой шаровой поверхности окажутся те точки, в которых будет пересекаться каждая из следующих восьми троек плоскостей:

1) A_1, B_1, C_1. 2) A_1, B_1, C_2. 3) A_1, B_2, C_1. 4) A_1, B_2, C_2.
5) A_2, B_1, C_1. 6) A_2, B_1, C_2. 7) A_2, B_2, C_1. 8) A_2, B_2, C_2.

Исследование. В зависимости от конфигурации данных плоскостей A, B, C задача может иметь следующее число решений. ∞, 8 и 0.

383. *Построить шаровую поверхность радиуса R, которая касается данной плоскости P в данной её точке C.*

Построение (рис. 417). 1) Через точку C проводим прямую C_1C_2, перпендикулярную к плоскости P. 2) На прямой C_1C_2 по обе стороны от точки C откладываем отрезки CO и CO', порознь равные R. 3) Строим искомые шаровые поверхности с центрами в точках O и O_1 и радиусами, равными R.

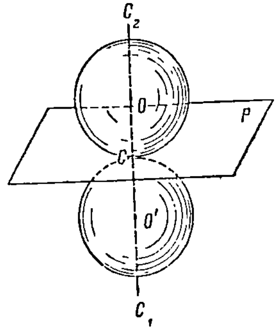


Рис. 417.

Рассматриваемая задача имеет два решения.

384. *Через точку P, данную на поверхности шара, требуется провести хорду, которая имеет длину m и параллельна данной плоскости S.*

Построение. 1) Через точку P проводим плоскость T, которая параллельна плоскости S. Плоскость T пересечёт поверхность шара по некоторой окружности K. 2) В плоскости T из точки P, как из центра, радиусом, равным m, засекаем на окружности K точки M и N. 3) Отрезками прямой соединяем точку P с точками M и N. Отрезки PM и PN — искомые хорды.

Исследование. Задача не имеет решении в следующих случаях:

1) если отрезок m больше диаметра окружности K;

2) если плоскость T не пересекает шаровую поверхность, а лишь касается её (в точке P).

Задача имеет одно решение, если отрезок m равен диаметру окружности K.

Задача имеет два решения, если отрезок m меньше диаметра окружности K.

385. *В пространстве даны две точки A и B. Построить геометрическое место таких точек, чтобы квадраты их расстояний до данных точек A и B относились бы, как $m:n$.*

Построение. 1) Через точки A и B проводим произвольную плоскость P. 2) В плоскости P строим ту окружность K, которая принадлежит искомому геометрическому месту точек. 3) Вращением окружности K вокруг её произвольного диаметра получаем шаровую поверхность — искомое геометрическое место точек.

386. *В пространстве даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Построить геометрическое место точек, расстояния которых до точек A, B и C относятся, как $m:n:p$.*

Построение. 1) Строим шаровую поверхность S, расстояние от точек которой до двух данных точек A и B относится, как $m:n$.

2) Строим шаровую поверхность S, расстояние от точек которой до двух данных точек B и C относится, как $n:p$. Определяем окружность K, по которой пересекаются шаровые поверхности S и S_1.

Окружность K — искомое геометрическое место точек.

387. *Даны в пространстве три точки A, B, C. Построить геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A и B равна m^2, а до точек B и C — n^2.*

Построение. 1) Через точки A и B проводим произвольную плоскость P_1. 2) В плоскости P_1 строим геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A и B равна m^2, и получаем некоторую окружность $K_1(O_1, R_1)$. 3) Через точки B и C проводим произвольную плоскость P_2. 4) В плоскости P_2 строим геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до точек B и C равна n^2, и получаем некоторую окружность $K_2(O_2, R_2)$. 5) Вращением окружностей K_1 и K_2 вокруг своих произвольных диаметров получим шаровые поверхности (O_1, R_1) и (O_2, R_2).

Окружность K, по которой пересекаются шаровые поверхности (O_1, R_1) и (O_2, R_2), представляет собою искомое геометрическое место точек.

388. *В данный конус вписать шар.*

Построение. 1) Проводим плоскость через ось конуса; полученное сечение представит собою равнобедренный треугольник. 2) Определяем центр (O) и радиус (r) круга, вписанного в этот треугольник. 3) Вращением круга (O, r) вокруг его произвольного диаметра получим искомый шар, вписанный в данный конус.

389. *В данный шар радиуса R вписать цилиндр, высота которого относится к диаметру основания, как $4:3$.*

Анализ. Если проведём плоскость через ось цилиндра, то она пересечёт шар по большому кругу, а цилиндр — по вписанному в этот круг прямоугольнику $ABCD$, диагональю которого является отрезок AC. Обозначая высоту цилиндра буквою x, можем написать, что диаметр основания цилиндра равен $0{,}75x$.

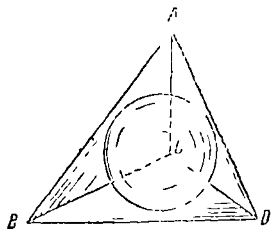


Рис. 418

По теореме Пифагора имеем:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, т. е. $(2R)^2 = x^2 + (0{,}75x)^2$,

откуда получим, что $x = 1{,}6R$.

Построение. 1) Из произвольной точки данного шара A проводим хорду AB, равную $1{,}6R$. 2) В точках A и B строим плоскости, перпендикулярные к хорде AB. Эти плоскости пересекут шар по кругам, являющимся основаниями искомого цилиндра.

390. *В данный тетраэдр $ABCD$ вписать шар* (рис. 418).

Построение. 1) Проводим в данном тетраэдре биссекторные плоскости P_1, P_2 и P_3 двугранных углов, образуемых соответственно следующими гранями: а) ACD и BCD, б) ABC и BCD и в) ABD и BCD.

2) Плоскости P_1 и P_2 пересекутся по некоторой прямой EE'. 3) Прямая EE' пересечет плоскость P_3 в некоторой точке O. 4) Из точки O опускаем перпендикуляр на какую-нибудь грань тетраэдра до встречи с нею в точке H. 5) Точка O — центр искомого шара, отрезок OH — его радиус. 6) Зная положение центра шара и длину его радиуса, можно построить шар, вписанный в данный тетраэдр.

391. *Дана шаровая поверхность (O, R) и вне её точка M. Определить геометрическое место центров сечений этой поверхности плоскостями, проходящими через точку M.*

Анализ. Проведём через точку M (рис. 419) какую-нибудь произвольную плоскость P, пересекающую данную шаровую поверхность. Сечение представит собою круг. Обозначим буквой O_1 центр сечения и соединим отрезками точки M, O и O_1

$$OO_1 \perp MO_1,$$

а потому треугольник MOO_1 — прямоугольный, причём его гипотенузой является отрезок OM.

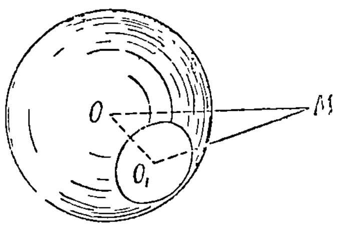


Рис. 419.

Так как плоскость P нами была взята совершенно произвольно, то, центр любого сечения плоскостью, проходящей через точку M, будет вершиною прямого угла того треугольника, гипотенузою которого является отрезок OM.

Отсюда вытекает, что центры сечений находятся на шаровой поверхности, диаметром которой является отрезок OM. А так как центры сечений не могут находиться вне данной шаровой поверхности, то приходим к выводу, что геометрическим местом искомых центров сечений является часть шаровой поверхности диаметра OM, заключенная в данной шаровой поверхности (O, R).

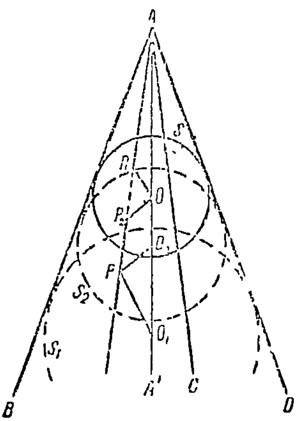


Рис. 420.

392. *Дан трехгранный угол $ABCD$ и внутри его точка P. Вписать в этот угол такую шаровую поверхность, которая проходит через точку P* (рис. 420).

Построение. 1) Строим биссекторные плоскости тех двугранных углов, ребрами которых являются линии AB и AC. Эти плоскости пересекутся по прямой AA', все точки которой равноудалены от граней трехгранного угла $ABCD$. 2) Из произвольной точки O луча AA' опускаем перпендикуляр на какую-нибудь из граней данного трехгранного угла, а затем из точки O, как центра, радиусом, равным длине опущенного перпендикуляра, описываем шаровую поверхность S. 3) Из точки A через точку P проводим луч, который пересечет шаровую поверхность S в некоторых точках P_1 и P_2. 4) В плоскости, проходящей через лучи AA' и AP, прямолинейными отрезками P_1O и P_2O соединяем точки P_1 и P_2 с точкою O. 5) В той же плоскости из точки P проводим прямые, соответственно параллельные отрезкам P_1O и P_2O. Проведённые прямые пересекут луч AA' в некоторых точках O_1 и O_2. 6) Из точки O_1, как центра, радиусом, равным отрезку PO_1, описываем шаровую поверхность S_1. 7) Из точки O_2, как центра, радиусом, равным отрезку PO_2, описываем шаровую поверхность S_2.

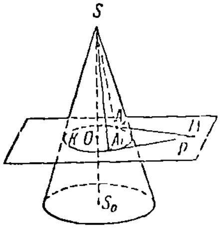


Рис. 421.

Шаровые поверхности S_1 и S_2 — искомые.

393. *Дан конус и вне его точка M. Построить плоскость, которая проходит через точку M и касается боковой поверхности конуса* (рис. 421).

Построение. 1) Через точку M проводим плоскость P, перпендикулярную оси (SS_0) конуса. Плоскость P пересечет ось (SS_0) конуса в точке O, а боковую поверхность конуса — по некоторой окружности K. 2) В плоскости P из точки M проводим касательные A_1M и A_2M к окружности K. 3) Строим плоскость P_1, проходящую через прямые A_1S и A_1M. 4) Строим плоскость P_2, проходящую через прямые A_2S и A_2M_2.

Плоскости P_1 и P_2 — искомые.

394. *Даны два шара и вне их точка M. Построить плоскость, которая проходит через точку M и касается обеих шаровых поверхностей.*

Примечание. Характерные конфигурации двух данных шаров и касательной к ним плоскости могут быть таковы: либо оба шара находятся по одну сторону касательной к ним плоскости, либо касательная плоскость проходит между ними.

I

Анализ. Выясним сначала, как можно построить такую плоскость, относительно которой данные шары расположены по одну её сторону (рис. 422).

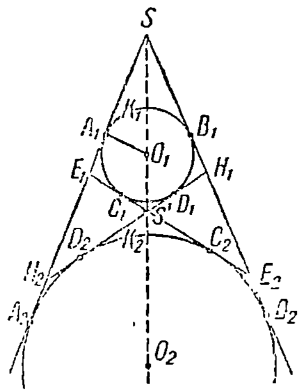


Рис. 422.

Через линию центров (O_1O_2) проводим произвольную плоскость P, которая, допустим, совпадает с плоскостью чертежа.

Плоскость P пересечёт шаровые поверхности по окружностям K_1 и K_2.

В плоскости P строим внешние касательные (A_1A_2 и B_1B_2) к окружностям K_1 и K_2.

Если построим плоскость P_1, которая перпендикулярна к плоскости P и проходит через касательную A_1A_2, то эта плоскость P_1 будет иметь с поверхностью шара (O_1, R_1) только одну общую точку A_1, а с поверхностью шара (O_2, R_2) только одну общую точку A_2, т. е. будет плоскостью, которая касается каждого из данных шаров, причём оба они находятся *по одну её сторону.*

Вращая прямые A_1A_2 и B_1B_2 вокруг линии (O_1O_2) центров, получим такую боковую поверхность (F) усечённого конуса, для которой отрезки A_1A_2 и B_1B_2 являются образующими.

Любая плоскость, касательная к поверхности F, будет являться плоскостью, касательной к обоим данным шарам.

Выясним свойство плоскостей, касающихся двух данных шаров. С этой целью продолжим касательные A_1A_2 и B_1B_2 до их пересечения. Нетрудно понять, что точка пересечения (S) этих линий непременно будет лежать на продолжении линии центров.

Следовательно, когда окружность K_1 и K_2 с линиями SA_2 и SB_2 будем вращать вокруг линии центров O_1O_2, то окажется, что линии SA_1 и SB_2 будут образующими боковой поверхности конуса, в которой вписаны данные шары.

Так как любая плоскость, касательная к двум данным шарам, является в то же время касательной к боковой поверхности конуса, описанной около этих шаров, и все образующие боковой поверхности конуса сходятся в точке S, то каждая плоскость, касательная к двум данным шарам, находящимся по одну её сторону, проходит через вершину S того конуса, который можно описать около этих шаров.

Выше было указано, как определяется положение вершины (S) конуса, описанного около двух данных шаров, и как можно найти направления его образующих (SA_2, SB_2), а потому рассматриваемая задача приводится к предыдущей.

Построение. 1) Через линию центров (O_1O_2) проводим произвольную плоскость P, которая пересечёт шаровые поверхности по окружностям K_1 и K_2. 2) Строим внешние касательные к окружностям K_1 и K_2 и продолжаем эти прямые до пересечения в некоторой точке S. 3) Через точку M проводим плоскость P_1, перпендикулярную к оси (SO_2) конуса. Эта плоскость пересечёт боковую поверхность конуса по окружности K_3. 4) Из точки M проводим касательные C_1M и C_2M к окружности K_3.

(C_1 и C_2 обозначают точки касания.)

5) Через прямые SC_1 и C_1M проводим плоскость P_2. 6) Через прямые SC_2 и C_2M проводим плоскость P_3.

Плоскости P_2 и P_3 — искомые.

Исследование. Если касательную SA_1, неограниченно продолженную в обе стороны, будем вращать вокруг линии центров (O_1O_2), то при $R_1 \neq R_2$ и $O_1O_2 > |R_1 - R_2|$ получим некоторую коническую поверхность F_1, а при $R_1 = R_2$ и $O_1O_2 > O$ получим некоторую цилиндрическую поверхность F.

Число плоскостей, которые так касаются данных шаров, что оба они находятся по одну сторону каждой из них, следующим образом зависит от положения точки M.

	Положение точки M	Число решений
I	Точка M находится в пространстве, ограниченном поверхностью F_1 или F.	0
II	Точка M лежит на поверхности F_1 или F.	1
III	Точка M расположена вне пространства, ограниченного поверхностью F_1 или F.	2
IV	Точка M совпадает с точкою S конической поверхности F_1.	Бесконечное множество

Примечание. Если два данных шара имеют внутреннее касание в некоторой точке S_0, то вместо конической поверхности получим плоскость P_0, которая будет проходить через точку S_0, касаясь в ней обоих шаров. В этом случае задача имеет решение только тогда, когда точка M находится в плоскости P_0.

II

Анализ. Рассмотрим теперь тот случай, когда искомая касательная плоскость проходит между данными шарами.

Проведём к окружностям K_1 и K_2 внутренние касательные C_1C_2 и D_1D_2, где отрезки C_1, C_2, D_1, D_2 обозначают точки касания. Проведённые касательные пересекутся в точке S', а продолжения отрезков C_1C_2 и D_1D_2 пересекут внешние касательные (SA_2 и SB_2) соответственно в точках E_1, E_2 и H_1, H_2.

Если отрезок E_1E_2, неограниченно продолженный в обе стороны, будем вращать вокруг линии центров, то получим некоторую коническую поверхность F_2, все образующие которой проходят через точку S'.

Любая плоскость, которая проходит через образующую этой конической поверхности и в то же время перпендикулярна к плоскости, проведённой через эту образующую и линию центров, является искомой касательной плоскостью, проходящей между данными шарами.

Вместе с тем ясно, что все плоскости, которые касательны к двум данным шарам и лежат между этими шарами, проходят через точку S'. Например, если через касательные C_1C_2 и D_1D_2 проведём плоскости, перпендикулярные к чертежу, то каждая из этих двух плоскостей будет касательной к данным шарам.

Построение. 1) Через точку M и линию центров (O_1O_2) проводим плоскость, которая пересечёт шаровые поверхности по некоторым окружностям K_1 и K_2. 2) Строим внутренние касательные к окружностям K_1 и K_2. Задача может иметь единственное решение, но только в том случае, если точка M окажется лежащей на какой-то из этих двух касательных или на их продолжениях.

Исследование. Число плоскостей, которые касаются обоих данных шаров и проходят между ними, следующим образом зависит от положения точки M.

	Положение точки M	Число решений
I	Точка M совпадает с точкою S' конической поверхности F_2.	Бесконечное множество
II	Точка M лежит на поверхности F_2.	1
III	Точка M не находится на поверхности F_2.	0

Примечание. 1. Если два данные шара имеют внешнее касание, то вместо поверхности F_2 получим некоторую плоскость P_0', и задача будет иметь решение только в тех случаях, когда точка M находится в этой плоскости (P_0').

2. Если поверхности двух данных шаров взаимно пересекаются (т. е. $R_1 + R_2 > O_1O_2 > |R_1 - R_2|$), то не существует касательной плоскости, относительно которой эти шары расположены по разные стороны.

395. *Построить касательную плоскость к двум подобным конусам, имеющим параллельные оси.*

Построение. I случай (рис. 423). Через точку H, являющуюся вершиной конуса C, проводим (см. упр. № 393) две касательные плоскости к конусу C_1; они будут касательными и к конусу C.

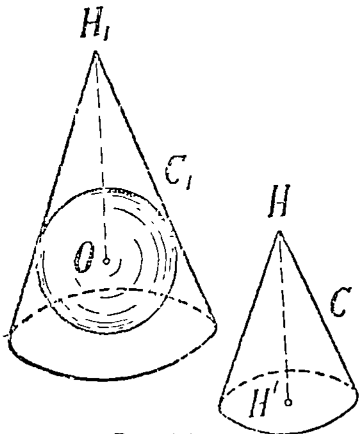


Рис. 423

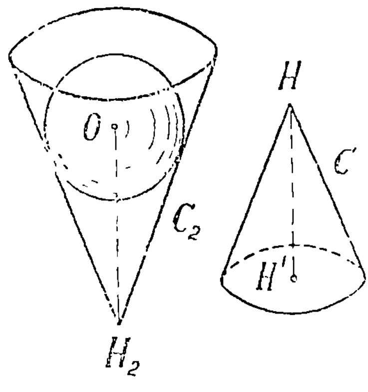


Рис. 423а.

II случай (рис. 423а). Через точку H проводим (см. упр. № 393) две касательные плоскости к конусу C_2; они будут касательными и к конусу C.

Доказать правильность построения и произвести исследование.

395а. *Построить плоскость, которая касалась бы данного шара, имеющего центр в точке O, и боковой поверхности конуса C, осью которого является HH'.*

Построение. 1. Определяем положение вершин H_1 и H_2 двух конусов, которые подобны конусу C и описаны около шара O так, что $H_1O \parallel H'H'$ и $H_2O \parallel HH'$.

2. Строим четыре плоскости, касательные к конусу C (см. упр. 395), из которых две проходят через точку H_1 и две через точку H_2.

Эти плоскости — искомые: они касаются и шаровой поверхности.

Доказать правильность построения и произвести исследование.

396. *Построить плоскость, которая касается трёх данных шаров* (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3).

Анализ. Решение этой задачи можно привести к решению предыдущей.

С этой целью опишем конус около второго и третьего шара и будем искать плоскости, которые касаются этого конуса и первого шара.

Каждая такая плоскость удовлетворяет условию задачи, потому что, касаясь боковой поверхности конуса, она касается тех шаров, около которых описана эта коническая поверхность.

Так как в рассматриваемой задаче можно построить три таких конических поверхности, каждая из которых была бы описана около двух из трех данных шаров, то ясно, что данная задача распадается на следующие три вспомогательные:

1) Найти плоскости, которые касаются 1-го шара и конуса, описанного около 2-го и 3-го шаров;

2) Найти плоскости, которые касаются 2-го шара и конуса, описанного около 3-го и 1-го шаров;

3) Найти плоскости, которые касаются 3-го шара и конуса, описанного около 1-го и 2-го шаров.

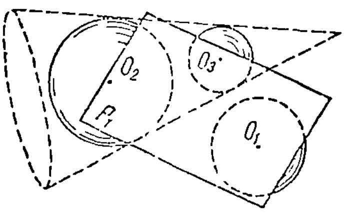


Рис. 424.

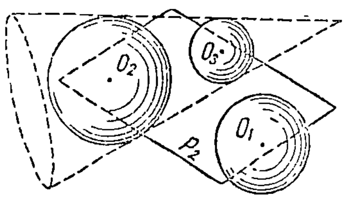


Рис. 424а.

Условию первой вспомогательной задачи, ничем не отличающейся от предыдущей, удовлетворяют четыре плоскости P_1, P_2, P_3, P_4. Две из них, P_1 (рис. 424) и P_2 (рис. 424а), таковы, что все данные шары расположены по одну сторону каждой из них, а две другие, P_3 (рис. 424б) и P_4 (рис. 424в), таковы, что по одну сторону каждой из них находится первый шар, а по другую — второй и третий.

Так как при решении каждой из трёх вспомогательных задач, во-первых, найдём по две таких касательных плоскости, относительно которых два шара находятся по одну сторону, а один — по другую, и, во-вторых, определим две таких касательных плоскости, что все данные шары находятся в двугранном угле, образованном этими плоскостями, то, значит, при некоторой [1]) конфигурации шаров рассматриваемая задача имеет восемь решений (см. рис. 424, 424а, ...):

$$P_1 \text{ и } P_2;\ P_3 \text{ и } P_4;\ P_5 \text{ и } P_6;\ P_7 \text{ и } P_8. \qquad (1)$$

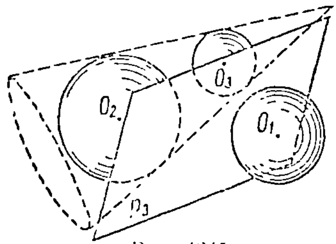


Рис. 424б.

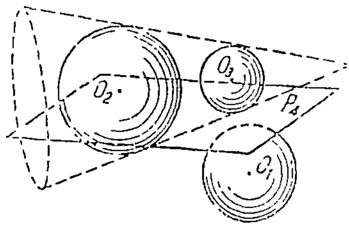


Рис. 424в.

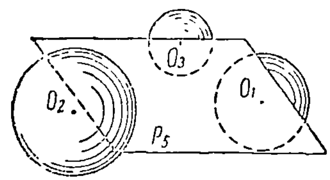


Рис. 424г.

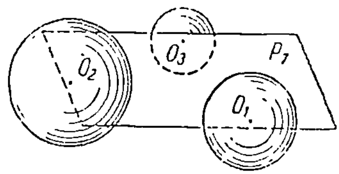


Рис. 424д.

Переходя к отысканию способов построения искомых плоскостей (1), будем предполагать, что

$$R_1 > R_2 > R_3, \qquad (2)$$

а шары, имеющие такие радиусы (2), будем обозначать соответственно цифрами I, II, III.

Плоскость P_1 должна быть такой касательной к трём данным шарам, чтобы они находились по одну сторону её.

Если построим какую-либо прямую A_1B_1, лежащую на плоскости P_1, то приёмом, предложенным в задаче № 382, можно будет построить и плоскость P_1.

Естественнее всего искать прямую A_1B_1 как линию пересечения плоскости P_1 с плоскостью P, проходящей через центры данных шаров.

Если точки касания плоскости P_1 с тремя дан-

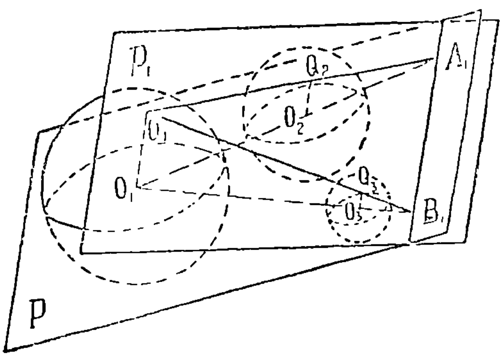


Рис. 425.

[1]) О том, что собою представляет такая конфигурация, будет сказано в исследовании.

ными шарами обозначим буквами Q_1, Q_2, Q_3 (см. рис. 425), то получим, что

$$O_1Q_1 \perp P_1, \quad O_2Q_2 \perp P_1 \text{ и } O_3Q_3 \perp P_1.$$

Далее, если через отрезки O_1Q_1 и O_2Q_2 проведем плоскость и на ней построим две прямые: одну, проходящую через точки Q_1 и Q_2, а другую — через точки O_1 и O_2, то эти прямые пересекутся в некоторой точке A_1.

Так как точки Q_1 и Q_2 лежат на касательной плоскости P_1, то и все точки прямой, проходящей через точки Q_1 и Q_2, лежат на плоскости P_1.

Отсюда вытекает, что точка A_1 лежит на плоскости P_1. Но эта же точка лежит и на прямой O_1O_2, проведенной на плоскости P. Следовательно, точка A_1 лежит на пересечении плоскостей P и P_1.

Рассматривая прямоугольные треугольники $O_1Q_1A_1$ и $O_2Q_2A_1$, видим, что они подобны:

$$\triangle O_1Q_1A_1 \backsim \triangle O_2Q_2A_1. \qquad (3)$$

Так как нам известны отрезки O_1Q_1, O_2Q_2 и O_1O_2, то из (3) находим, что

$$O_2A_1 = \frac{O_2Q_2 \cdot O_1O_2}{O_1Q_1 - O_2Q_2}. \qquad (4)$$

При помощи формулы (4) можем определить длину отрезка O_2A_1.

Если на продолжении отрезка O_1O_2 от точки O_2 отложим найденный отрезок O_2A_1, то и получим точку A_1, лежащую на пересечении плоскостей P_1 и P.

Этим же приемом можем определить положение точки B_1, которая является точкой пересечения продолженных отрезков O_1O_3 и Q_1Q_3 и, следовательно, лежит на пересечении плоскостей P_1 и P.

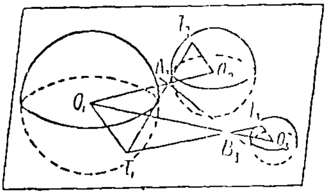


Рис. 425а

Так как обе точки A_1 и B_1 лежат на пересечении плоскостей P_1 и P, то, значит, и прямая A_1B_1 лежит на искомой касательной плоскости P_1.

Как видим, построение плоскости P_1 приводится к задаче № 382.

Плоскость P_3, касающаяся трёх данных шаров, так расположена, что шар I находится по одну сторону её, а шары II и III — по другую.

Обозначая буквами T_1, T_2, T_3 точки касания (см. рис. 425а), получим:

$$O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3.$$

Точки, в которых отрезок O_1O_2 пересекает отрезок T_1T_2, а отрезок O_1O_3 — пересекает отрезок T_1T_3, обозначим соответственно буквами A_3 и B_3.

Рассуждениями, аналогичными тем, какие были приведены при нахождении способа построения плоскости P_1, легко убедиться в том, что точки A_3 и B_3 лежат на той прямой, по которой плоскость Γ_3 пересекает плоскость P.

Положение точек A_3 и B_3 легко определить, если принять во внимание, что

$$\triangle O_1T_1A_3 \backsim \triangle O_2T_2A_3$$

и

$$\triangle O_1T_1B_3 \backsim \triangle O_3T_3B_3,$$

и, значит:

$$O_1A_3 : A_3O_2 = O_1T_1 : O_2T_2 = R_1 : R_2$$

и

$$O_1B_3 : B_3O_3 = R_1 : R_3. \tag{5}$$

Построив точки A_3 и B_3, получим, что прямая A_3B_3 находится на касательной плоскости Γ_3. Как видим, построение плоскости P_3 также приводится к задаче № 382.

Построение плоскости P_1.

1) Через центры O_1, O_2, O_3 данных шаров проводим плоскость P.

2) Находим отрезок m, определяемый по формуле (4):

$$m = \frac{O_2Q_2 \cdot O_1O_2}{O_1Q_1 - O_2Q_2}. \tag{6}$$

3) На продолжении отрезка O_1O_2 от точки O_2 откладываем отрезок O_2A_1, равный найденному отрезку m (6).

4) Находим отрезок n, определяемый по формуле:

$$n = \frac{O_3Q_3 \cdot O_1O_3}{O_1Q_1 - O_3Q_3}. \tag{7}$$

5) На продолжении отрезка O_1O_3 от точки O_3 откладываем отрезок O_3B_1, равный найденному отрезку n (7).

6) Через точки A_1 и B_1 проводим прямую.

7) Строим плоскость (см. задачу № 382), которая проходит через найденную прямую A_1B_1 и касается какого-либо из трёх данных шаров.

При выполнении этой (7-й) операции получим две плоскости P_1 и P_2, которые симметричны относительно плоскости P и являются искомыми.

Построение плоскости P_3.

1) Через центры O_1, O_2, O_3 данных шаров проводим плоскость P.

2) При помощи равенств (5) определяем положение точек A_3 и B_3.

3) Через точки A_3 и B_3 проводим прямую.

4) Строим плоскость, которая проходит через прямую A_3B_3 и касается какого-нибудь из данных шаров.

При выполнении этой (4-ой) операции получим две плоскости P_3 и P_4, которые симметричны относительно плоскости P и являются искомыми.

Искомые плоскости P_5, P_6, P_7, P_8 строятся тем же приемом, что и плоскость P_3.

Исследование.

1. Число решений, какие может иметь рассматриваемая задача, зависит от конфигурации данных шаров и от относительной величины их радиусов.

Ключом к исследованию данной задачи является конфигурация окружностей, которые получаются при пересечении шаровых поверхностей плоскостью Γ, проходящей через их центры.

Эта плоскость проходит через рёбра двугранных углов, образуемых каждой парой искомых плоскостей (1), и делит эти углы пополам.

2. Рассматриваемая задача имеет восемь решений, если данные три шара расположены так, что между каждым из них и двумя остальными можно провести две параллельные плоскости, которые не пересекают этих шаров и не совпадают одна с другой (см. прилагаемую таблицу).

Касательная плоскость		Какие шары проходят по одну сторону этой касательной плоскости	Какие шары проходят по другую сторону этой касательной плоскости
Обозначение	№ рисунка		
P_1, P_2	124, 124а	I, II, III	—
P_3, P_4	124б, 124в	I	II и III
P_5, P_6	124г	II	I и III
P_7, P_8	124д	III	I и II

3. Нет такой конфигурации трёх шаров, при которой рассматриваемая задача могла бы иметь конечное число решений, превышающее восемь.

4. Рассматриваемая задача может иметь следующее число решений:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \infty, \qquad (8)$$

что можно подтвердить следующими примерами (рис. 126).

На рисунках 126 даны некоторые характерные случаи пересечения трёх данных шаровых поверхностей плоскостью, проходящей через их центры, причём пунктиром обозначены линии, по которым эта плоскость пересекает те из искомых плоскостей, которые перпендикулярны к ней.

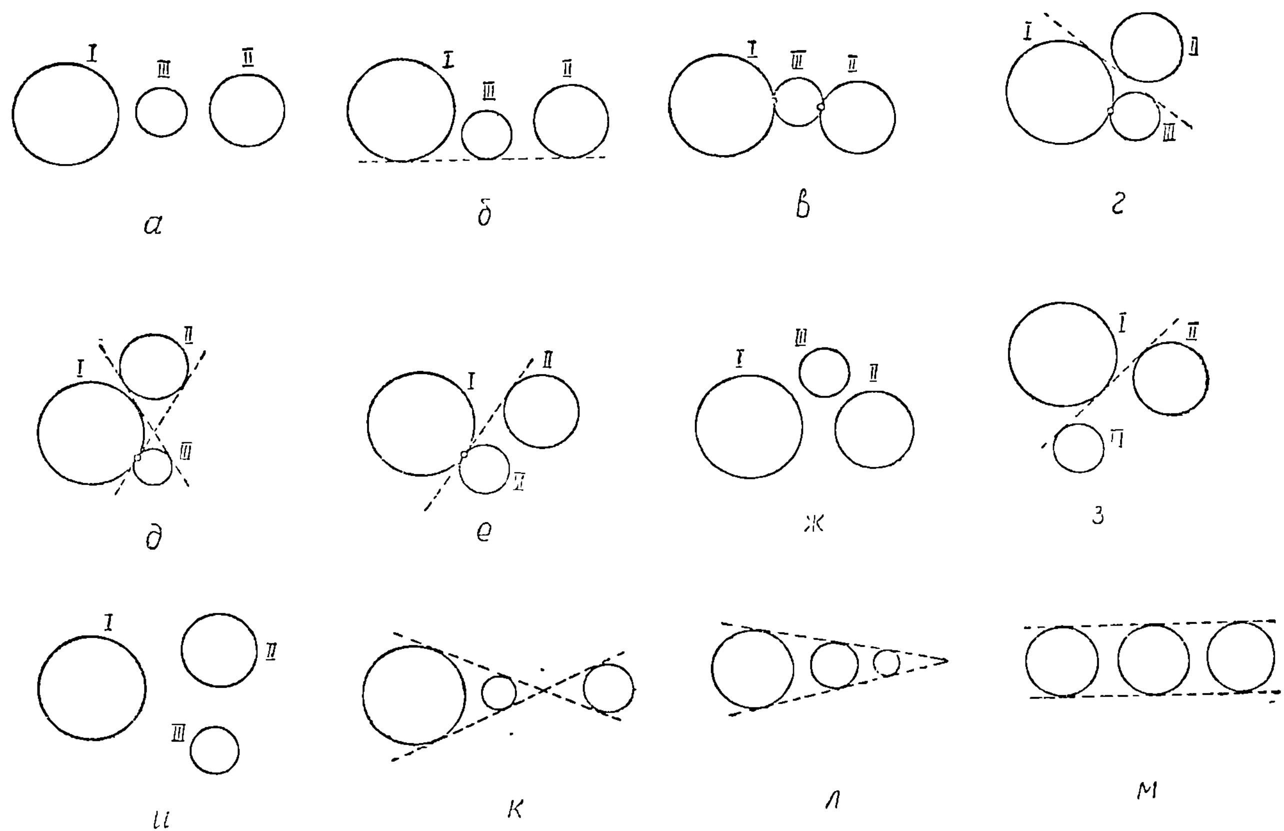


Рис. 12[illegible].

Поясним некоторые из этих чертежей:

а) Рис. 426а. Центры трёх шаров находятся на одной прямой, причём около этих шаров невозможно описать ни конической, ни цилиндрической поверхности.

б) Рис. 426б. Три шара находятся по одну сторону касательной к ним плоскости, причём точки касания лежат на одной прямой.

в) Рис. 426в. Один из шаров касается двух остальных.

. . . .

к) и л) Около трёх данных шаров можно описать коническую поверхность.

м) Около трёх данных шаров можно описать цилиндрическую поверхность.

Вдумчиво рассматривая эти рисунки и учитывая приведённое выше решение задачи, можно составить отчётливое представление о том, сколько и каких решений имеет задача в каждом отдельном случае.

Выводы будут таковы:

Рис. 426	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м
Число решений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	∞	∞	∞
Что является решением	—	P_1	P_1, P_2	P_1, P_2, P	P_1, P_2, P_7, P_7	P_1, P_2, P_4, P_5, P_6	P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6	P_1, P_2, P_3, P_5, P_6, P_7, P_8	P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8	[1]	[1]	[2]

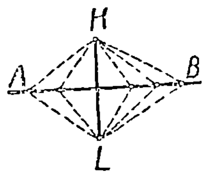
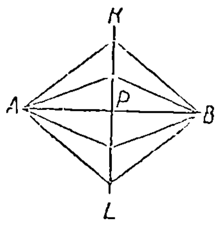
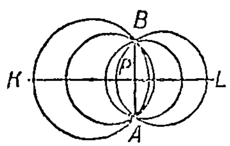
[1]) Любая из плоскостей, касающаяся конической поверхности, описанной около трёх данных шаров.

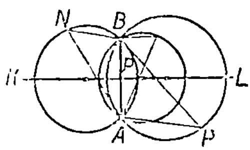
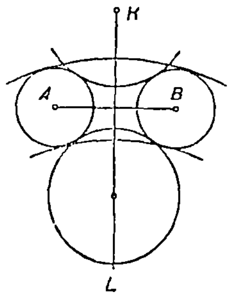
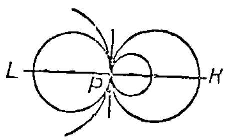
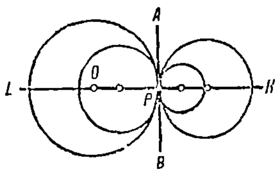
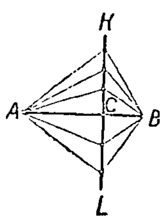
[2]) Любая из плоскостей, касающаяся цилиндрической поверхности, описанной около трёх данных шаров.

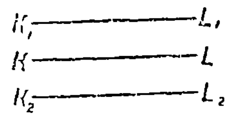
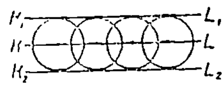
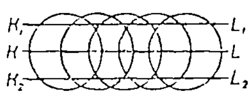
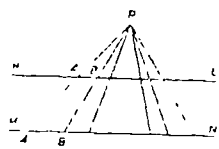
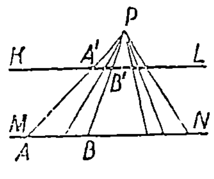
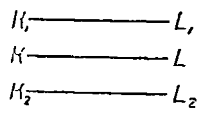
В приведённых примерах не были рассмотрены случаи, когда данные шары находятся один внутри другого или их поверхности пересекаются. Но любознательный читатель, внимательно исследуя и такие конфигурации трёх шаров, убедится в том, что данная задача не может иметь такого числа решений, которое не входило бы в приведённый выше перечень (8).

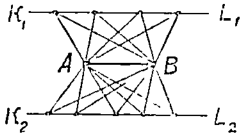
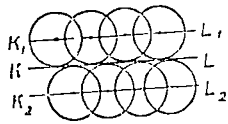
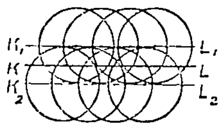
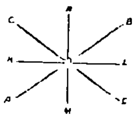
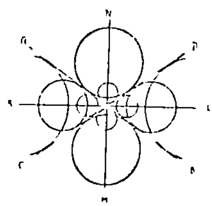
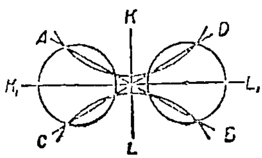
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ.

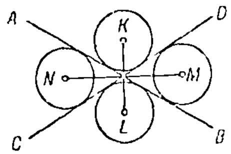
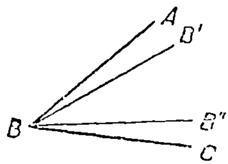
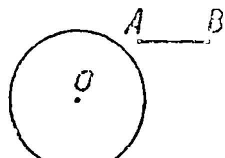
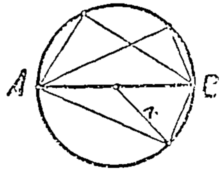
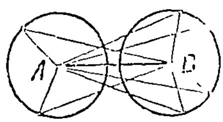
Прямая.

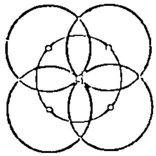
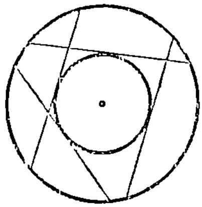
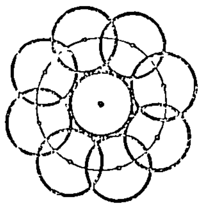
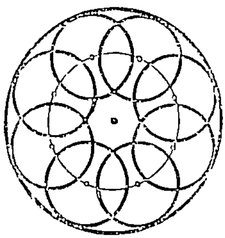
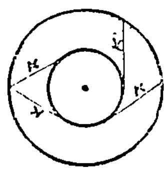
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
1	Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек (K и L).	Прямая (AB), которая перпендикулярна к отрезку KL и проходит через его середину.	
2	Геометрическое место вершин равнобедренных треугольников с общим основанием (AB).	Прямая (KL), которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину.	
3	Геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки (A и B).	Прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.	

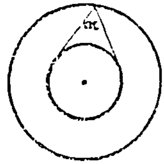
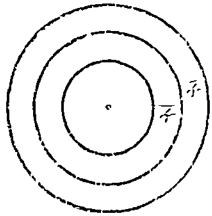
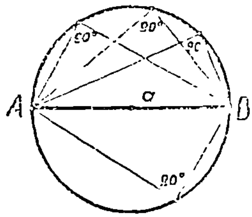
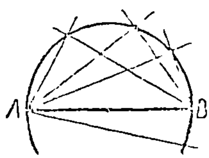
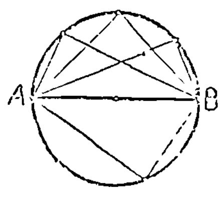
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
4	Геометрическое место центров окружностей, описанных около всех треугольников с общим основанием (AB)	Прямая (KL), которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину.	
5	Геометрическое место центров окружностей, имеющих внешнее или внутреннее касание с двумя равными окружностями, центры которых находятся в точках A и B.	Прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.	
6	Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке (P).	Прямая (KL), которая проходит через данную точку P и перпендикулярна к данной прямой.	
7	Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной точке (P)	Прямая (KL), проходящая через центр (O) данной окружности и данную на ней точку (P).	
8	Геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная (p^2).	Прямая, которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через лежащую на нем точку (C), определяемую следующим равенством: $AC = \frac{AB^2 + p^2}{2\,AB}$.	

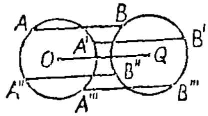
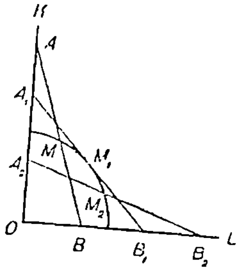
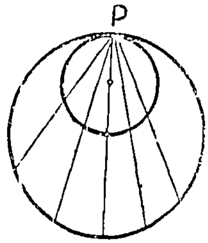
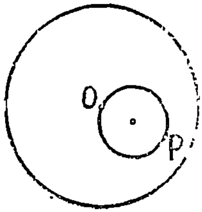
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
9	Геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных прямых.	Прямая, которая параллельна данным прямым и отстоит от них на одинаковом расстоянии.	
10	Геометрическое место центров окружностей, касающихся двух параллельных прямых.	Прямая, которая параллельна данным прямым и отстоит от них на одинаковом расстоянии.	
11	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (R), отсекающих на двух данных параллельных прямых равные хорды.	Прямая, параллельная данным прямым и отстоящая от них на одинаковом расстоянии.	
12	Геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку (P) со всеми точками данной прямой (MN).	Прямая, которая параллельна данной прямой и проходит через середину одного из указанных отрезков.	
13	Геометрическое место точек, делящих в данном отношении $m : n$ все наклонные, проведённые из данной точки (P) к данной прямой.	Прямая, которая параллельна данной прямой и делит одну из указанных наклонных в данном отношении	
14	Геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой (KL) на данном расстоянии (d).	Две параллельные прямые, каждая из которых отстоит от данной прямой KL на расстоянии d.	

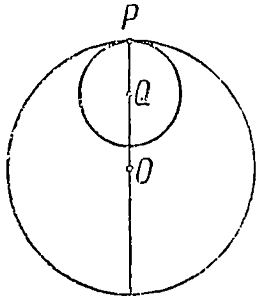
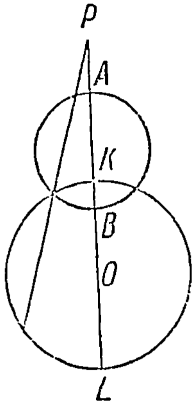
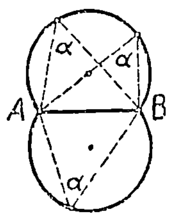
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
15	Геометрическое место вершин треугольников, имеющих данное основание (a) и данную высоту (h).	Две прямые, параллельные основанию a и отстоящие от него на расстоянии h.	
16	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (R), касающихся данной прямой.	Две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от нее на расстоянии R.	
17	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (R), отсекающих на данной прямой (KL) хорды данной длины (c).	Две прямые, параллельные данной прямой и отстоящие от нее на расстоянии $\sqrt{R^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$.	
18	Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных пересекающихся прямых (AB и CD).	Две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых делит пополам вертикальные углы, образуемые данными пересекающимися прямыми.	
19	Геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных пересекающихся прямых.		
20	Геометрическое место центров окружностей, отсекающих на каждой из двух данных пересекающихся прямых хорды, равные данному отрезку.	Биссектральные прямые (KL и K_1L_1) вертикальных углов, образуемых этими прямыми.	

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
21	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса R, отсекающих на двух данных пересекающихся прямых равные хорды	Два отрезка (KL и MN), совпадающие с биссектрисами углов, образуемых данными прямыми.	
22	Геометрическое место точек, расстояния которых от сторон (AB и BC) данного угла (ABC) имеют одно и то же отношение $m : n$.	Два луча, каждый из которых проходит через вершину данного угла и одну из точек, расстояния которых от сторон угла относятся, как $m : n$.	
		Окружность.	
23	Геометрическое место точек, отстоящих от данной точки (O) на данном расстоянии (AB).	Окружность, центр которой находится в точке O, а радиус равен отрезку AB	
24	Геометрическое место вершин треугольников, которые имеют общее основание (AB) и у которых медиана, проведенная к основанию, равна данному отрезку (k).	Окружность, радиус которой равен k, а центром является середина стороны AB.	
25	Геометрическое место вершин треугольников, которые имеют общее основание, равное отрезку (AB), и боковую сторону, равную отрезку (k).	Две одинаковые окружности, центры которых находятся в точках A и B, а радиус их равен отрезку k.	

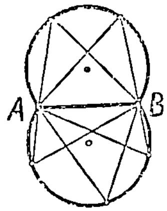
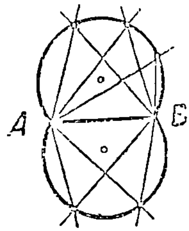
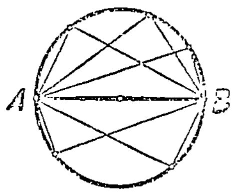
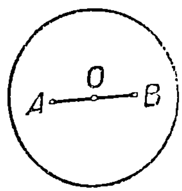
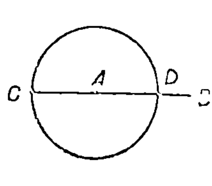
№№ п/п	О совокупности каких точек идёт речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
26	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (R), проходящих через данную точку (P)	Окружность, центр которой находится в точке P, а радиус равен R.	
27	Геометрическое место середин хорд данной окружности (радиуса R), равных данному отрезку (k).	Окружность, которая концентрична данной и имеет радиус, равный $\sqrt{R^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2}$.	
28	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (r), имеющих с данной окружностью (радиуса R) внешнее касание	Окружность, которая концентрична данной и имеет радиус, равный $R+r$.	
29	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (r), имеющих с данной окружностью (радиуса R) внутреннее касание.	Окружность, которая концентрична данной и имеет радиус, равный $R-r$.	
30	Геометрическое место точек, из которых касательные к данной окружности (радиуса r) равны данному отрезку (k).	Окружность, которая концентрична данной и имеет радиус, равный $\sqrt{r^2+k^2}$.	

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
31	Геометрическое место точек, из которых каждая обладает тем свойством, что касательные, проведенные из нее к данной окружности (радиуса R), образуют угол (α).	Окружность, которая концентрична с окружностью радиуса R и имеет радиус, равный гипотенузе треугольника, построенного по катету (R) и противолежащему углу $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.	
32	Геометрическое место точек, отстоящих от данной окружности (радиуса R) на расстоянии, равном данному отрезку (k).	Две окружности, которые концентричны с данной, причем одна имеет радиус, равный $R+k$, а другая $R-k$.	
33	Геометрическое место точек, из которых данный отрезок (a) виден под прямым углом.	Окружность, диаметром которой является данный отрезок (a).	
34	Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки (A) на прямые, проходящие через другую данную точку (B).	Окружность, диаметром которой является отрезок AB.	
35	Геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой.	Окружность, построенная на данной гипотенузе, как на диаметре.	

№№ п/п	О совокупности каких точек идёт речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
36	Геометрическое место точек, которое описывает один конец отрезка (*AB*), движущегося параллельно самому себе так, что другой его конец скользит по данной окружности	Окружность, которая равна данной. Линия центров этих окружностей равна *AB*.	
37	Геометрическое место точек, описываемое серединой (*M*) отрезка (*AB*), концы которого скользят по сторонам прямого угла	Четверть окружности, диаметр которой равен отрезку *AB*, а центр находится в вершине прямого угла.	
38	Геометрическое место середин всех хорд, проходящих через данную точку (*P*) на окружности.	Окружность, которая имеет диаметр вдвое меньший, чем данная, и внутренне касается ее в точке *P*.	
39	Геометрическое место середин хорд, проведенных через данную точку (*P*) внутри окружности.	Окружность, диаметром которой является отрезок, соединяющий данную точку (*P*) с центром (*O*) данной окружности.	

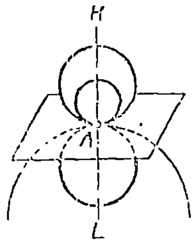
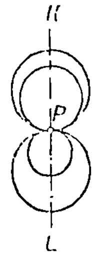
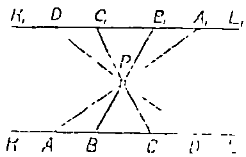
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
40	Геометрическое место точек, делящих в одном и том же отношении $(m:n)$ все хорды, проходящие через данную точку (P) окружности.	Окружность, которая имеет диаметр, равный $\frac{m}{m+n}$ диаметра данной окружности, и внутренне касается ее в точке P $(m < n)$	
41	Геометрическое место точек, делящих в данном отношении $(m:n)$ все отрезки, соединяющие точки окружности с данной точкой (P), лежащей внутри или вне круга.	Окружность. Если через данную точку P и центр O данного круга проведем прямую, пересекающую окружность в точках K и L и определим те точки A и B, которые делят отрезки PK и PL в данном отношении $(m:n)$, то отрезок AB окажется диаметром искомой окружности *).	
42	Геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α.	Дуги двух симметричных сегментов, которые построены на отрезке AB и вмещают углы, равные данному	

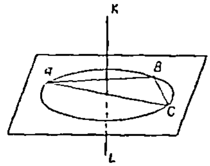
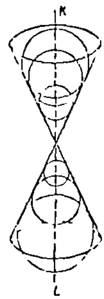
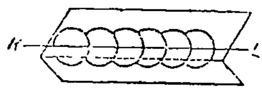
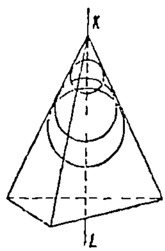
*) На чертеже изображён тот случай, когда точка P находится вне данного круга.

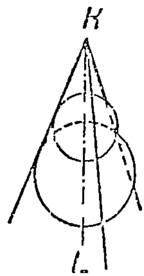
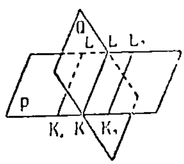
№№ п/п	О совокупности каких точек идёт речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
43	Геометрическое место вершин треугольников, у которых общее основание AB и угол, противолежащий основанию, равен данному углу.	Дуги двух симметричных сегментов, которые построены на отрезке AB и вмещают углы, равные данному.	
44	Геометрическое место точек, в которых пересекаются под данным углом все прямые, проходящие через каждую из двух данных точек A и B.	Дуги двух симметричных сегментов, которые построены на отрезке AB и вмещают углы, равные данному.	
45	Геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная AB	Окружность, диаметр которой равен отрезку AB.	
46	Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B есть постоянная величина ($2m^2$).	Окружность, центром которой является середина отрезка AB, а радиус определяется по формуле $R=\sqrt{m^2-l^2}$, где $2l = AB$.	
47	Геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B относятся, как $m:n$.	Окружность, построенная на диаметре CD, который лежит на прямой AB, причем точки C и D делят отрезок AB (внутренне и внешне) в отношении $m:n$.	

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ.

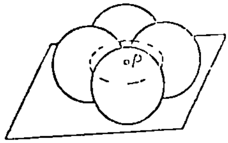
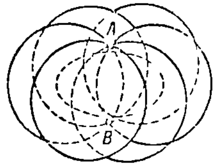
Прямая.

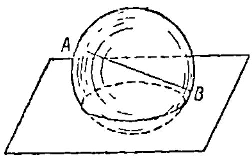
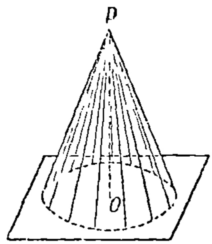
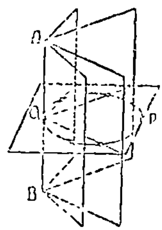
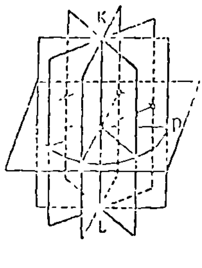
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
48	Геометрическое место центров шаровых поверхностей, касающихся данной плоскости в данной на ней точке (A).	Прямая, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через данную на ней точку (A).	
49	Геометрическое место центров шаровых поверхностей, касающихся данного шара в данной на нем точке (P).	Прямая, проходящая через точку (P) и центр данного шара.	
50	Геометрическое место точек, симметричных точкам данной прямой (KL) относительно данной точки (P).	Прямая, которая параллельна данной и проходит через одну из точек, симметричных точкам данной прямой относительно точки (P).	

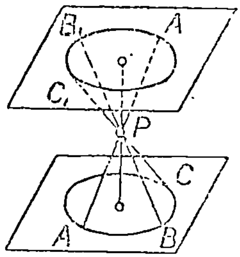
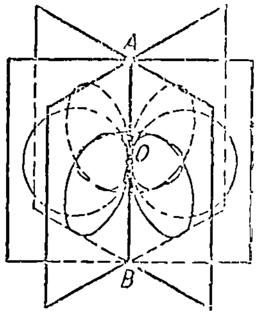
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
51	Геометрическое место точек, равноотстоящих от трех данных точек A, B и C, не лежащих на одной прямой	Прямая (KL), перпендикулярная к плоскости $\triangle ABC$ и проходящая через центр (O) окружности, на которой лежат данные точки.	
52	Геометрическое место центров шаровых поверхностей, которые касаются всех образующих данной конической поверхности	Прямая (KL), являющаяся осью данной конической поверхности	
53	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (R), которые касаются граней данного двугранного угла	Прямая, которая отстоит от каждой из граней на расстоянии R и, следовательно, параллельна ребру данного двугранного угла	
54	Геометрическое место центров шаровых поверхностей, которые касаются граней данного трехгранного угла.	Луч (KL), который проходит через вершину данного трехгранного угла и является линией пересечения биссектральных полуплоскостей его двугранных углов.	

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
55	Геометрическое место центров шаровых поверхностей, которые касаются граней данного трехгранного угла.	Луч, который проходит через вершину данного трехгранного угла и является линией пересечения полуплоскостей, проходящих через биссектрисы его плоских углов и перпендикулярных к соответствующим его граням	
56	Геометрическое место точек, лежащих в одной из данных двух пересекающихся плоскостей и стоящих на данном расстоянии a от другой данной плоскости	Две параллельные прямые, которые лежат в одной данной плоскости, параллельны другой данной плоскости и удалены от нее на расстояние a	

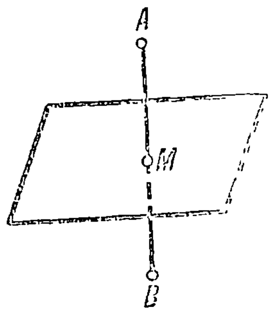
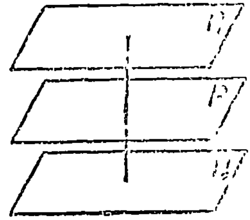
Окружность.

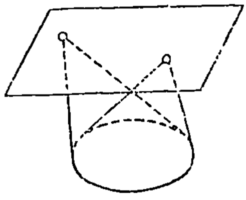
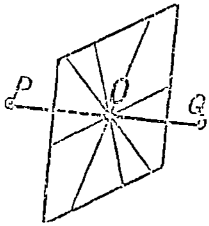
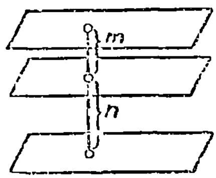
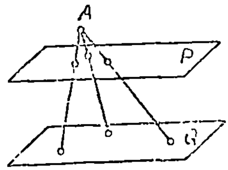
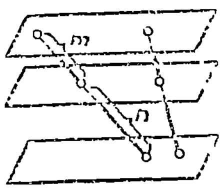
57	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (R), которые проходят через данную точку P и касаются данной плоскости	Окружность, получающаяся от пересечения шаровой поверхности с центром в точке P и радиуса R с плоскостью, параллельной данной и удаленной от нее на расстояние R.	
58	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (R), которые проходят через две данные точки (A и B).	Окружность, которая лежит в плоскости, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину, центр этой окружности совпадает с серединой отрезка AB и радиус равен $\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$	

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
59	Геометрическое место точек данной плоскости, из которых данный отрезок AB виден под данным углом.	Окружность, представляющая сечение данной плоскости с шаровой поверхностью, диаметром которой является отрезок AB.	
60	Геометрическое место оснований равных наклонных, проведённых к данной плоскости из данной точки P, находящейся вне этой плоскости.	Окружность, лежащая в данной плоскости, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на данную плоскость.	
61	Геометрическое место оснований перпендикуляров, которые опущены из данной точки P, лежащей вне данной прямой AB, на все плоскости, проходящие через эту прямую.	Окружность, плоскость которой перпендикулярна к данной прямой и диаметром которой является перпендикуляр, опущенный из точки P на прямую AB.	
62	Геометрическое место точек, симметричных данной точке (P) относительно всех плоскостей, проходящих через данную прямую (KL).	Окружность, которая лежит в плоскости, перпендикулярной прямой KL, проходит через точку P и имеет радиус, равный расстоянию от P до KL.	

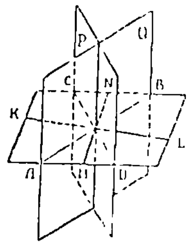
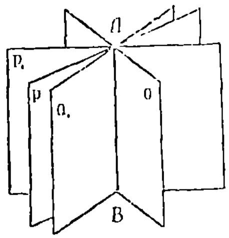
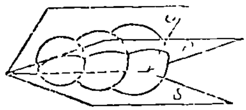
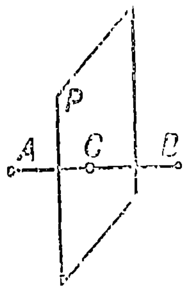
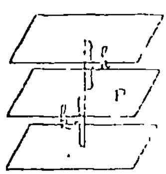
№№ п/п	О совокупности каких точек идёт речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
63	Геометрическое место точек, которые симметричны точкам окружности, лежащей в данной плоскости, относительно данной точки (P).	Окружность, которая находится в плоскости, параллельной данной плоскости, причём точка P делит пополам расстояние между этими плоскостями. Центры указанных окружностей симметричны относительно точки P, а радиусы равны.	
64	Геометрическое место центров окружностей данного радиуса (R), которые лежат в плоскостях, проходящих через данную прямую (AB) и касаются этой прямой в данной на ней точке (O).	Окружность, центр которой находится в точке O, а радиус равен R, причём плоскость окружности перпендикулярна к прямой AB.	

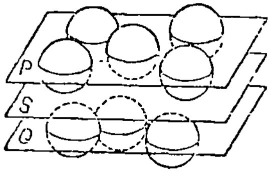
Плоскость.

65	Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек (A) и (B).	Плоскость, которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину.	
66	Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных плоскостей.	Плоскость, которая параллельна данным плоскостям и делит пополам расстояние между ними.	

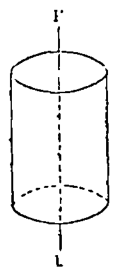
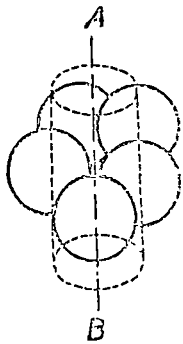
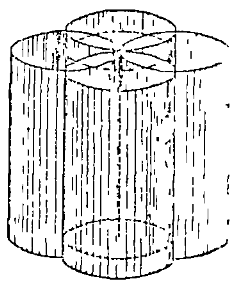
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
67	Геометрическое место вершин равновеликих конусов данной высоты, имеющих одно и то же основание и расположенных по одну сторону плоскости основания.	Плоскость, которая проходит через вершину одного из таких конусов и параллельна его основанию.	
68	Геометрическое место осей симметрии двух данных точек P и Q.	Плоскость, которая перпендикулярна к отрезку PQ и делит его пополам.	
69	Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных параллельных плоскостей равно $m : n$.	Две плоскости, каждая из которых параллельна данным плоскостям и проходит через одну из точек, делящих расстояние между ними в отношении $m : n$.	
70	Геометрическое место точек, делящих в отношении $m : n$ все отрезки, соединяющие точки данной плоскости Q с данной точкой A вне ее.	Плоскость P, которая параллельна данной и проходит через точку, делящую один из указанных отрезков в отношении $m : n$.	
71	Геометрическое место точек, делящих в данном отношении $m : n$ любой отрезок, концы которого лежат на двух данных параллельных плоскостях.	Две плоскости, каждая из которых параллельна данным плоскостям и проходит через одну из точек, делящих один из указанных отрезков в отношении $m : n$.[1]	

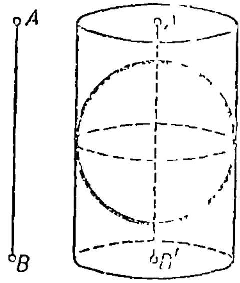
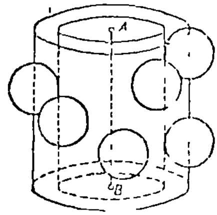
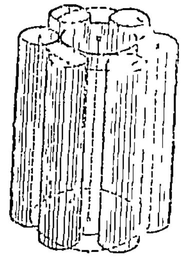
[1] На чертеже показана только одна плоскость.

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертёж
72	Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся в пространстве прямых KL и MN.	Две плоскости P и Q, которые перпендикулярны к той плоскости S, в которой лежат прямые KL и MN, и проходят через биссектрисы углов, образуемых этими прямыми	
73	Геометрическое место точек, отстоящих на равном расстоянии от каждой из двух данных плоскостей P и Q, пересекающихся по прямой AB	Две плоскости P_1 и Q_1, которые проходят через прямую AB и делят пополам двугранные углы, образуемые данными плоскостями.	
74	Геометрическое место центров шаровых поверхностей, касающихся сторон данного двугранного угла	Полуплоскость, которая проходит через ребро данного двугранного угла и делит этот угол пополам	
75	Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B равняется квадрату данного отрезка m.	Плоскость, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через лежащую на нем точку C, положение которой определяется следующим равенством: $AC^2 - CB^2 = m^2$.	
76	Геометрическое место точек, отстоящих от данной плоскости P на данном расстоянии (h).	Две плоскости, параллельные данной и отстоящие от нее на расстоянии h	

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
77	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (R), которые касаются данной плоскости (S).	Две плоскости, которые параллельны данной и отстоят от нее на расстоянии R	

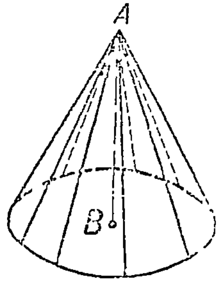
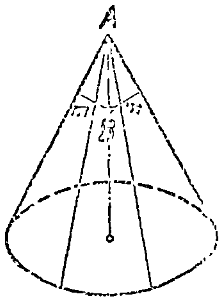
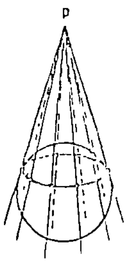
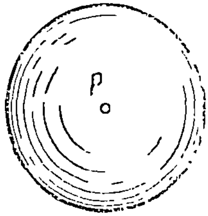
Цилиндрическая поверхность.

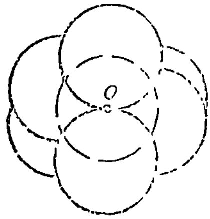
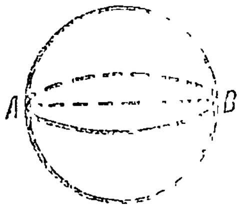
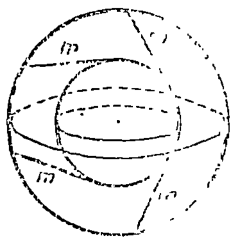
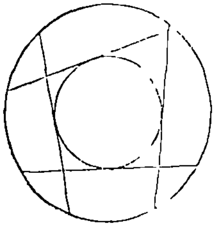
78	Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на данном расстоянии a	Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая, а образующая удалена от нее на расстоянии a.	
79	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (R), касающихся данной прямой (AB).	Цилиндрическая поверхность, осью которой является прямая AB, а радиус равен R.	
80	Геометрическое место осей таких цилиндров данного радиуса (R), одна из образующих которых совпадает с данной прямой	Цилиндрическая поверхность, радиус которой равен R, а осью является данная прямая.	

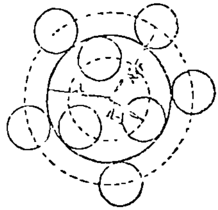
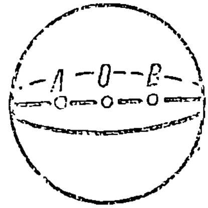
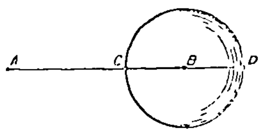
№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собою геометрическое место таких точек	Чертеж
81	Геометрическое место прямых, которые параллельны данной прямой и касаются данной шаровой поверхности.	Цилиндрическая поверхность, которая касается данной шаровой поверхности и имеет ось, параллельную данной прямой.	
82	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (r), которые касаются боковой поверхности данного цилиндра радиуса (R).	Две цилиндрические поверхности, которые имеют общую ось с данным цилиндром, причем радиусы их равны: $R + r$ (при внешнем касании) и $R - r$ (при внутреннем касании) [1]).	
83	Геометрическое место осей цилиндров данного радиуса (r), которые внешне или внутренне касаются данного цилиндра (R).	То же самое [2]).	

[1]) На чертеже изображён только тот цилиндр, который является геометрическим местом точек центров шаров, имеющих внешнее касание с данным цилиндром.

[2]) На чертеже изображены только цилиндры, внешне касающиеся данного цилиндра.

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
	Коническая поверхность.		
84	Геометрическое место полупрямых, которые образуют с данною прямою AB данный угол α и выходят из данной на ней точки A	Коническая поверхность, вершиною которой служит точка A, осью — данная прямая, а образующими служат данные полупрямые	
85	Геометрическое место полупрямых, которые выходят из данной точки A и отстоят от данной точки B на данном расстоянии m	Коническая поверхность, вершиною которой является точка A, осью служит прямая, проходящая через точки A и B, а образующие удалены от точки B на расстояние m.	
86	Геометрическое место полупрямых, которые выходят из данной точки P, лежащей вне данного шара, и касаются его поверхности.	Коническая поверхность, вершина которой лежит в данной точке P, ось проходит через центр данного шара, а образующие касаются его поверхности.	
	Шаровая поверхность.		
87	Геометрическое место точек, удаленных от данной точки P на расстояние m.	Шаровая поверхность, радиус которой равен m, а центр находится в точке P.	

№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
88	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (r), проходящих через данную точку (O).	Шаровая поверхность, радиус которой равен r, а центр находится в точке O.	
89	Геометрическое место точек, из которых данный отрезок (AB) виден под прямым углом.	Шаровая поверхность, диаметром которой является данный отрезок AB.	
90	Геометрическое место точек, из которых касательные к данной шаровой поверхности (радиуса r) имеют данную длину (m).	Шаровая поверхность, центр которой совпадает с центром данного шара, а радиус равен $\sqrt{r^2+m^2}$	
91	Геометрическое место середин хорд данной длины l, проведённых в данном шаре, радиус которого равен r, а центр находится в точке O.	Шаровая поверхность, центр которой находится в точке O, а радиус равен $\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$.	

№№ п/п	О совокупности каких точек идет речь	Что представляет собой геометрическое место таких точек	Чертеж
92	Геометрическое место центров шаровых поверхностей данного радиуса (r), которые касаются данного шара радиуса R	Две шаровые поверхности, центры которых совпадают с центром данной шаровой поверхности, а радиусы равны: $R+r$ (при внешнем касании) и $R-r$ (при внутреннем касании).	
93	Геометрическое место точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть данная постоянная величина ($2m^2$)	Шаровая поверхность, центр которой находится в точке O, делящей пополам отрезок AB, а радиус равен $\sqrt{m^2-l^2}$, где $2l = AB$.	
94	Геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек A и B относятся, как $m:n$, причём $m \neq n$.	Поверхность шара, построенного на диаметре CD, который лежит на прямой AB, причём точки C и D делят отрезок AB внутренне и внешне в отношении $m:n$.	

Этот перечень геометрических мест учитель может использовать в качестве упражнений при устном решении вопросов о геометрических местах.

Вопросам этим можно придавать следующую форму.

А. При изучении планиметрии:

а) Что представляет собою геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек A и B?

б) Назовите геометрическое место вершин равновеликих треугольников, имеющих общее основание.

в) Укажите геометрическое место точек, отстоящих от данной окружности на данном расстоянии, и т. п.

В. При изучении стереометрии:

а) Назвать геометрическое место точек, равноудаленных от вершин данного треугольника ABC.

б) Определить геометрическое место касательных, проведённых из данной точки к данной шаровой поверхности.

в) Как называется совокупность точек на данной плоскости, из которых данный отрезок, лежащий вне этой плоскости, виден под прямым углом, и т. п.

Проделывая такого рода упражнения и убеждаясь в том, что один и тот же геометрический образ является выражением различных геометрических мест точек, ученик не только хорошо усваивает геометрию, но постепенно приходит к выводу, что чем подробнее человек изучает какой-нибудь предмет или явление, тем больше он открывает в нем различные свойства и качества, тем глубже познаёт его.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Глава первая

Общие сведения к решению задач на построение.

Глава вторая

Методика решения геометрических задач на построение в школе.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Глава третья.

Глава четвертая.

Глава пятая.

Глава шестая.

Глава седьмая.

Приложение.

Редактор *В. П. Соломович*
Техредактор *А. И. Сосинович*
Корректор *Л. [illegible]. Калиновская*

АТ 03061. Сдано в набор 17/V 1957 г. Подписано к печати 9/IV 1958 г.
Бумага $60 \times 92^1/_{16}$. Бум. лист. 13,75. Печ. лист. 27,5. Уч.-изд. лист. 26,2[illegible].
Тираж 8 000 экз. Зак. 2185. Цена 8 руб. 10 коп.

Госттипография им. Каролис Пожела, Каунас, ул. Пушкина, 11.