В. В. РЕПЬЕВ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ
УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1967

Репьев В. В.

Р 41 Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1967.

276 с. с илл. 100 000 экз. 60 коп. в перепл.

В пособии рассматриваются вопросы преподавания алгебры в восьмилетней школе. Автор большое внимание уделяет повышению эффективности уроков, закреплению умений и навыков учеников. В книге рассматривается главным образом методика тех разделов алгебры, которые наиболее трудны для учеников.

$\frac{6-5}{169-67}$ 512(07)
р41

Проблемы методики преподавания алгебры в восьмилетней общеобразовательной трудовой политехнической школе рассматриваются в книге с учетом программ математики, утвержденных Министерством просвещения РСФСР в 1960 году. Весьма редкие отступления от программы алгебры в каждом случае мотивированы.

Автор широко использовал положительную практику преподавания алгебры в советской общеобразовательной школе, отраженные в методической и учебной литературе достижения последних лет в преподавании алгебры — педагогический опыт липецких и ростовских учителей, опыт преподавателей других школ, а также личный опыт работы в школе с учителями и студентами.

Автор старался подчеркнуть связь обучения алгебре с жизнью, с трудом, с коммунистическим строительством. Вместе с тем обращал внимание на необходимую связь с арифметикой, геометрией и другими учебными предметами.

Активизация обучения — одна из важнейших проблем, которые стоят перед школой и каждым учителем математики. В книге уделено внимание этой проблеме и даны соответствующие рекомендации (глава II). В частности, обращено внимание на организацию разнообразных видов самостоятельной работы школьников. Рекомендации по организации самостоятельной работы с элементами творчества *даны во многих главах, причем все рекомендации опираются на опыт лучших учителей.*

До сих пор в некоторых школах можно наблюдать нерациональное использование времени на уроке. В книге приведены рекомендации, позволяющие разумно использовать все 45 минут каждого урока и повысить эффективность обучения алгебре; приведены примерные планы уроков.

За последние три года содержание книги неоднократно обсуждалось многими учителями математики. Их высказывания и замечания автор использовал в работе над рукописью.

Книга делится на два раздела: I, «Некоторые общие вопросы методики алгебры восьмилетней школы», II, «Методический обзор тем курса алгебры». В раздел I включено пять глав, имеющих значение для всего курса алгебры восьмилетней школы или значительных частей его. В разделе II рассматриваются темы программ алгебры для VI—VIII классов.

Книга предназначена для учителей математики и студентов математических факультетов, готовящихся к педагогической деятельности.

Рукопись книги прочитана Г. П. Сенниковым, А. М. Пышкало, Е. Н. Обуховской, В. И. Нечаевым, Ю. И. Гольдбергом, К. С. Муравиным, Е. С. Березанской. Советы и критические замечания использованы при доработке рукописи. Искренне благодарю всех товарищей за просмотр рукописи.

Все пожелания и замечания о книге прошу направлять по адресу: Москва, И-18, 3-й проезд Марьиной рощи, издательство «Просвещение», редакция математики.

Автор

Август 1966 г.

г. Горький

РАЗДЕЛ I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ АЛГЕБРЫ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

ГЛАВА I

ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ, СВЯЗЬ ОБУЧЕНИЯ С ЖИЗНЬЮ

1. Из истории развития алгебры

Элементарная алгебра — одна из старейших ветвей математики. Она зародилась в древности при поисках общих способов решения задач более сильных, чем арифметические. Одно из отличий алгебры от арифметики состоит в том, что для решения задачи вводится неизвестное; выполняя над ним и данными, взятыми из условия задачи, определенные действия, предусмотренные задачей, получают выражение, которое можно приравнять к другому выражению; сформированное уравнение позволяет найти неизвестное [1].

Алгебраические методы зародились еще в древности.

В дошедших до нас древнеегипетских папирусах имеются задачи, при решении которых искомому давалось название «куча» и оно обозначалось соответствующим иероглифом.

Древние вавилоняне уже за 2000 лет до н. э. умели решать задачи, сводящиеся к системе линейных уравнений со многими неизвестными, к квадратным уравнениям и даже к частному виду кубического уравнения. Они, по-видимому, разработали словесные правила для решения уравнений и пользовались ими в конкретных случаях.

В древней Греции в III в. до н. э. геометрия достигла высокого развития. Доказательства стали главным средством установления геометрических фактов. Алгебраические предложения и задачи греки тоже обосновывали и решали геометрическими средствами. С помощью геометрических построений они решали задачи, равносильные квадратным уравнениям. Поэтому иногда сведения из алгебры, которыми располагали древние греки, называют геометрической алгеброй.

Диофант Александрийский (около III в. н. э.) в трактате

[1] См.: О. Ю. Шмидт, А. Г. Курош. Алгебра, статья в т. 2 БСЭ, изд. 2.

«Арифметика» решал уравнения 1-й и 2-й степени, рассматривал неопределенные уравнения. Он ввел краткие символические обозначения для неизвестных, простейших долей неизвестных и некоторых простейших степеней их.

В средние века математические знания древних унаследовали арабы и те народы, которые оказались в сфере их политического влияния.

В IX—XV вв. народы Средней Азии — узбеки, таджики — дали много видных математиков. Узбекский математик и астроном IX в. Мухаммед из Хорезма (Мухаммед ал-Хорезми) написал книги по арифметике и по алгебре. Это позволяет утверждать, что с этого времени алгебра стала самостоятельной ветвью математики. Вторую его книгу называли «Ал-джебр ва-л-мукабала». «Ал-джебр» (восстановление) — перенос отрицательных членов уравнения в другую часть его, а «мукабала» (противопоставление) — приведение подобных членов. От слова «ал-джебр» произошло и название «алгебра».

В XII в. итальянцы перенимают алгебру у народов Востока. В XVI в. им удалось решить уравнения 3-й и 4-й степени.

В конце XVI в. французский математик Ф. Виет (1540—1603) ввел буквы для обозначения известных величин. С этого времени алгебра перестала быть риторической. С введением символов стало возможным изучать не отдельные уравнения с числовыми коэффициентами, а целые классы уравнений или систем уравнений и находить способы их решения. Это имело большое значение для дальнейшего развития всей математики.

В XVIII и XIX вв. основными объектами исследования алгебры были рациональные функции, алгебраические уравнения, системы уравнений, в особенности линейных.

Введение буквенных обозначений облегчило изучение переменных величин и подготовило почву для создания аналитической геометрии. Один из творцов этой дисциплины — Р. Декарт (1596—1650) усовершенствовал и упорядочил символику, чем способствовал ее окончательному утверждению.

Введение в математику переменной величины сыграло первостепенную роль. Фридрих Энгельс говорит: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное* и *интегральное исчисление,* которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем» [1].

В свою очередь математический анализ обогащает алгебру новыми мощными средствами исследования. Таким образом,

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. ОГИЗ, 1948, стр. 208.

исторически две ветви математики — алгебра и анализ — находятся в тесной взаимной связи и обусловленности.

Развитие алгебры шло в тесной связи с развитием понятия числа.

Древние греки не признавали отрицательных чисел: они не умели дать им конкретное истолкование. Только у Диофанта можно найти в зачаточной форме отрицательные числа.

Смелый шаг в отношении введения отрицательных величин был сделан в X в. индийскими учеными, которые рассматривали их как денежный долг, а положительные числа — как наличные деньги.

Однако отрицательные числа не получили признания у народов Среднего Востока. До XVI в. не мирились с ними и европейские ученые. Природа отрицательных чисел стала достаточно понятной лишь после того, как Декарт применил их в построении аналитической геометрии. Здесь они были наглядно истолкованы при помощи направленных отрезков.

С иррациональными числами столкнулись еще древние греки при рассмотрении некоторых вопросов геометрии. Но они избежали иррациональных чисел, разработав в геометрической форме теорию пропорций и несоизмеримых отрезков. Математики Индии и Среднего Востока рассматривали иррациональные числа как числа нового класса. Арифметическая теория иррациональных чисел возникла лишь во второй половине XIX в.

Возникновение и развитие элементарной алгебры связано: 1) с расширением понятия о числе; 2) с введением буквенной символики, которая приводит к изучению тождественных преобразований; 3) с учением о решении уравнений и систем уравнений, что позволяет рационально решать разнообразные задачи, в том числе и практические; 4) с развитием понятия о переменной и функции.

Исторически изучение четырех основных проблем находится в тесной взаимозависимости и взаимообусловленности. Запросы практики служили основным толчком к постановке и рассмотрению этих проблем.

2. Задачи и содержание курса алгебры

Курс алгебры восьмилетней школы располагает более сильными, чем школьная арифметика, средствами и способами познания простейших пространственных форм и количественных отношений материального мира. Это дает возможность более полно познать эти формы и отношения. Значит, курс алгебры имеет общеобразовательное значение.

Вместе с тем основные разделы алгебры — учение о числе, тождественные преобразования, уравнения и их системы, учение о простейших элементарных функциях — имеют большое значение для изучения не только других математических предметов, но и основ других наук (физики, химии, астрономии), начал технических дисциплин (механики, машиноведения и др.); они имеют значение в различных отраслях производства (станкостроении, сельскохозяйственном машиностроении и др.). Изучение курса алгебры средней школы — одна из предпосылок познания законов природы.

Курс алгебры, вместе с другими математическими предметами, является необходимой составной частью политехнического обучения. При правильной организации трудовой подготовки в школе ученики используют алгебраические знания совместно со знаниями других математических предметов в различных видах учебной деятельности; тем самым они готовятся к применению математики в практике.

Общеобразовательное и политехническое значение алгебры, ее роль в производительном труде дают основание утверждать, что важнейшей задачей является прочное и сознательное усвоение начал алгебры, повышение уровня алгебраической подготовки учеников, приобретение ими умений и навыков использовать знания на практике и при изучении основ других наук.

В преподавании алгебры понятие о числе расширяется: вводятся отрицательные числа, формируется понятие множества рациональных чисел, изучаются арифметические действия над числами этого множества; следует добиться, чтобы ученики выполняли все действия верно, быстро и рационально. Дальнейшее расширение понятия о числе — введение иррациональных чисел и формирование понятия о множестве действительных чисел — программой восьмилетней школы не предусмотрено. При изучении квадратных радикалов восьмиклассники должны усвоить, что квадратный корень из любого положительного числа всегда можно вычислить с любой степенью точности.

Важно, чтобы ученики сознательно овладели буквенными обозначениями и тождественными преобразованиями рациональных выражений. Алгебраическая символика — разновидность скорописи. Ученики должны уметь переводить математические предложения с родного языка на язык алгебраических символов и с языка символов — на родной язык. Надо, чтобы они верно, сознательно и изящно выполняли тождественные преобразования. Буквенная символика и тождественные преобразования успешно применяются не только в математике, но и во многих других науках, технических дисциплинах и основных отраслях производства.

Программа алгебры восьмилетней школы ставит и следующую важную задачу: научить школьников решать уравнения первой степени с одним неизвестным, линейные системы с двумя неизвестными, квадратные уравнения и системы уравнений, сводящиеся к квадратному уравнению. Уравнения и системы рассматриваются преимущественно с числовыми коэффициентами. Хотя решение уравнений с буквенными коэффициентами ограничивается небольшим числом примеров, все же следует научить школьников в каждом равенстве, содержащем несколько переменных, видеть уравнение относительно любой из переменных и уметь в простейших случаях решать их. Это важно для приложений уравнений, например к решению задач по физике и химии.

Решение задач путем составления уравнений и систем уравнений является одним из приводных ремней, связывающих учение об уравнениях с решением практических задач. С точки зрения политехнического обучения особый интерес на уроках алгебры представляют доступные по содержанию задачи по механике и физике, а также задачи технического и производственного характера.

В курсе алгебры ученики знакомятся с важнейшим понятием современной математики — функцией, изучают некоторые простейшие функции. Одним из простейших средств изучения элементарных функций является построение их графиков в прямоугольных декартовых координатах. Графикам функций свойственна бо́льшая наглядность и широкое применение их даже за пределами математики. Преподавание ведется так, чтобы ученики приобрели умения и навыки не только строить графики функций, но и читать их, а по графикам выражать свойства функций и применять графики к решению уравнений и систем уравнений.

Итак, учение о числе и тождественные преобразования рациональных выражений, уравнения и функции служат основным содержанием курса алгебры восьмилетней школы.

Кроме того, в курсе алгебры ученики знакомятся с устройством и применением таблиц квадратов и кубов чисел. Таблицы используются и на уроках геометрии, физики, химии и др.

С начала обучения в VIII классе школьники приступают к овладению счетной линейкой. В объяснительной записке к программе по математике для восьмилетней школы указывается: «Вычисления посредством линейки должны прочно войти в обиход учащихся...»[1] Линейка используется не только на уроках алгебры, но и на уроках геометрии, физики, в практических делах школьников, если они связаны с вычислениями.

На протяжении всего курса преподавания алгебры обращается внимание на укрепление и развитие навыков в вычислениях, в особенности навыков в приближенных вычислениях. Возможности для этого имеются. Нахождение числовых значений выражений, действия над рациональными числами, решение уравнений и систем уравнений, разнообразные задачи, действия

[1] «Программы восьмилетней школы. Математика». Учпедгиз, 1966, стр. 15.

над квадратными радикалами — все это дает прекрасный материал для точных и приближенных вычислений.

Обучая алгебре, учитель должен целенаправленно воспитывать школьников.

Непосредственная и опосредствованная связь алгебры с материальным миром позволяет показать, что материя первична, а сознание вторично, и способствует формированию материалистического мировоззрения.

Каждая введенная буква — переменное, каждое алгебраическое выражение — функция входящих в него переменных. Изменения переменных и функций в некоторой мере отражают диалектику мира, его движения и готовят сознание школьников к диалектическому мышлению.

Изучение алгебраических понятий и их определений, отношений между ними, понимание сущности неполной индукции и ее недостаточности для обоснования алгебраических закономерностей, применение дедукции в доказательствах и при решении задач — все это способствует развитию логического мышления школьников.

Использование при обучении эвристических методов, наблюдений, экспериментов, неполной индукции, аналогии и заключения по аналогии, анализа и синтеза помогает развитию инициативы, находчивости, творческих сил школьников.

Критическое отношение ученика к суждениям, контроль за решением, овладение языком символов, развитие устной речи также имеют воспитательное значение.

Эффективность воспитания школьников зависит от общей культуры учителя. Глубокое понимание им политики КПСС, и в частности в области народного образования, высокий уровень философской подготовки, широкий математический кругозор, знание психологии детского возраста — необходимые условия высокой эффективности в воспитании и обучении подрастающего поколения.

3. О некоторых особенностях преподавания алгебры

Чтобы выявить особенности преподавания алгебры в восьмилетней школе, надо знать особенности общего и умственного развития учеников VI—VIII класса.

К изучению алгебры школьники приступают в возрасте 12—13 лет. Это переходный возраст от детства к раннему юношескому возрасту. По сравнению с младшими школьниками подростки отличаются быстрым ростом физических, умственных и волевых качеств. В переходный период головной мозг человека обогащается многими ассоциативными функциями, значительно повышается роль второй сигнальной системы. Постепенно происходит изменение мышления: в конкретно-наглядном содержании его, свойственном ребенку раннего школьного возраста, под влиянием обучения создаются предпосылки для образования понятий. Подросток начинает пользоваться рассуждениями для выяснения причинно-следственных зависимостей; появляется стремление пояснить, обосновать, доказать. К концу переходного периода роль абстрактного мышления значительно возрастает, а сам процесс улучшается.

Растут познавательные интересы. Подросток проявляет живой интерес к научно-популярной и популярно-технической литературе. Ему надо знать не только как устроена машина, но и как сделать модель ее. Вот почему подросток охотно участвует в разнообразных конструкторских кружках и любит физический труд.

Подросток стремится к деятельности: он строитель, конструктор, экспериментатор.

Получив бóльшую самостоятельность в семье, подросток имеет предпосылки для бóльшей самостоятельности в учении, в связях с окружающей общественной средой. Расширяются, становятся разнообразнее связи подростка с обществом: он — пионер, участвует в пионерской работе, посещает библиотеку, занимается в кружках, принимает участие в общественно полезном труде. Становится более полноценной жизнь и работа классного коллектива. У подростков формируются представления о личности; подросток чувствительно реагирует на оценку его личности со стороны коллектива.

При разумной требовательности в школе и семье у подростка развивается настойчивость, организованность, дисциплинированность.

Таков в самых общих чертах ученик в возрасте 12—15 лет.

Учитывая особенности умственного развития учащихся, особенно VI и VII классов, следует принять, что в преподавании алгебры значительную роль должен играть конкретно-индуктивный метод. Педагог, применяя этот метод, опирается на рассмотрение примеров (часто арифметических), частных случаев, задач с конкретным содержанием и ведет учащихся к обобщениям, к новым понятиям, правилам, алгоритмам.

Преподавание алгебры по сравнению с геометрией беднее наглядностью. Это объясняется сущностью тех понятий и отношений между ними, тех алгоритмов, с которыми приходится иметь дело в курсе алгебры. На самом деле, уже на первых уроках появляется число a. Это — не какое-то вполне определенное число, полученное в результате счета или измерения. Число a — любое число из некоторого множества чисел. Обозначение любого числа из определенного множества буквой a требует более высокой ступени абстракции, чем первые геометрические понятия: оно опирается на ранее сформированное понятие числа, тогда как первые геометрические понятия формируются на базе вещей и их отношений.

В курсе алгебры иной характер носит материал, привлекающийся для конкретизации вводимых понятий. Если в преподавании геометрии таким материалом служат предметы, модели, чертежи, то в курсе алгебры приходится опираться на примеры, сравнения с арифметическими понятиями и правилами, проводить аналогии между соответствующими арифметическими и алгебраическими понятиями и правилами, использовать неполную индукцию[1] не как обобщение опытных данных, наблюдений над явлениями действительного мира, а как обобщение задач, примеров, частных случаев. Таким образом, преподавание алгебры в значительной мере лишено непосредственной связи с материальным миром, оно опирается на опосредствованные связи — через арифметические понятия и правила.

Педагогу при обучении алгебре следует дорожить наглядностью, ибо ее применение ограничено содержанием курса. Необходимо использовать все возможности применить наглядность: изменения и зависимости величин, числовую ось, графики функций, геометрические иллюстрации при решении задач.

Если конкретно-индуктивный метод изложения алгебры имеет большое значение, особенно в VI и VII классах, то это не должно приводить к забвению дедуктивного метода.

При ознакомлении учеников с теоремами педагог нередко использует такой прием: рассматривает частные случаи, каждый из которых доказывает, а затем накопленный материал обобщает. Например, при изложении теоремы о возведении степени в степень ученики рассматривают и обосновывают случаи: $(a^3)^2$, $(c^4)^3$, $(m^2)^4$, а затем, опираясь на неполную индукцию, формулируют теорему: $(a^m)^n = a^{mn}$. При рассмотрении частных случаев пользуются дедукцией — применяют общее рассуждение.

Для повышения теоретического уровня обучения желательно, чтобы доказательства на примерах с последующими индуктивными обобщениями перерастали в общие доказательства. Например, рассмотрение примеров возведения степени в степень завершается изложением теоремы $(a^m)^n = a^{mn}$, где m и n — натуральные числа.

Примеры умножения степеней с одинаковыми основаниями заканчиваются доказательством теоремы $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, где m и n — натуральные числа.

В курсе алгебры восьмилетней школы дедукция в доказательствах и выводах применяется весьма неравномерно; например, при изучении тождественных преобразований многочленов

[1] *О неполной индукции можно прочитать в книге* В. В. Репьева «Общая методика математики» (Учпедгиз, 1958).

в VI классе она используется многократно, а при изучении уравнений, алгебраических дробей, координат и графиков функций в VII классе ее роль незначительна. Чтобы не порывать с применением дедукции и в некоторой мере сгладить в этом отношении особенности тем программы, целесообразно использовать задачи на доказательство. В одних случаях эти задачи подбирают из ранее изученных глав, в других — из содержания изучаемых тем. Например, при изучении уравнений в VII классе можно использовать задачи на доказательство тождеств. Это — полезное повторение темы о многочленах и хорошая подготовка к изучению разложения на множители. При изучении алгебраических дробей естественны задачи на доказательства законов сложения, умножения и других тождеств.

Целесообразно обучение вести так, чтобы ученики постепенно осознали, используется ли в данном конкретном случае индуктивное заключение, или же применяется дедукция (вывод, доказательство). Опыт показывает, что при правильном обучении этого можно достигнуть в начале VII класса.

При обучении алгебре и арифметике пользуются термином *правило*. Что разумеется под этим термином?

В каждом правиле указывается, какие операции и в какой последовательности надо выполнить, чтобы получить ответ для задачи рассматриваемого вида. Значит, термин *правило* употребляется в таком же смысле, как термин *алгоритм* (алгорифм). На самом деле алгоритмом принято называть совокупность математических операций, выполняемых в определенном порядке для решения задач данного вида. Можно говорить о правилах или алгоритмах извлечения квадратного корня из чисел, решения квадратного уравнения, умножения многочлена на многочлен.

Из множества правил можно выделить: а) определения, устанавливающие, как выполняется та или другая операция (например, умножение рациональных чисел выполняется по правилу-определению); б) формулировки законов арифметических действий (например, распределительного закона умножения относительно сложения); в) теоремы (например, об умножении многочленов, о квадрате суммы двух чисел). При обучении желательно эти виды правил называть соответственно определениями, законами, теоремами. При работе по принятому учебнику учитель может только частично приблизить терминологию к указанной.

Если теорема по педагогическим соображениям не доказывается, а поясняется примерами, то и в этом случае можно сохранить за ней название теоремы, причем следует указать, что она может быть доказана, но доказательство ввиду его сложности не приводится. Так, например, можно поступить при изучении первого и второго свойств уравнений.

4. Связь преподавания алгебры с жизнью

Связь обучения и воспитания в восьмилетней школе с жизнью, с практикой, с коммунистическим строительством обеспечивается учебными программами и осуществляется всей системой учебно-воспитательной работы. В преподавании алгебры этой связи содействуют специально составленные учебник и задачник. В этом отношении многое может и обязан сделать учитель математики.

В курсе алгебры по сравнению с арифметикой значительно расширяются и обогащаются возможности связи преподавания с практикой. Это обеспечивается прежде всего основным содержанием курса: расширенное понятие числа становится применимым к измерению более широкого класса величин, постепенно формирующееся понятие о функции имеет бо́льшую практическую ценность, учение об уравнениях и системах уравнений приложимо к решению практических задач, тождественные преобразования многочленов и дробных выражений имеют широкую опосредствованную связь с практикой.

Связи с жизнью способствует такое изложение, в котором вскрывается потребность общества в соответствующих знаниях. Например, формирование понятия о линейной функции полезно начать с конкретных задач (зависимость длины пружины от груза, остатка топлива на школьном дворе от времени при одинаковом дневном расходе и др.). В каждом случае уравнение связывает различные величины: различны допустимые значения аргумента, различны и коэффициенты. Вместе с тем уравнения имеют существенные сходства, которые дают возможность объединить их в один класс, для чего надо отвлечься от несущественного (видов величин, значений параметров, допустимых значений аргументов) и в результате прийти к уравнению

$$y=ax+b,$$

где x — любое рациональное число, $a\neq 0$. Такой же подход можно применить к введению других функций, например,

$$y=ax^2;\ y=ax^2+bx+c;\ y=x^3.$$

Абстрагирующий и обобщающий характер формирования алгебраических понятий вызывает потребность в соответствующих знаниях.

При умелом обучении абстрагирование способствует более мощной связи с жизнью. Отрыв от жизни получается тогда, когда не вскрываются приложения изучаемого, когда школьники не обучаются применению правил и не могут использовать их в конкретных случаях. Задача заключается в том, чтобы алгебраические абстракции и обобщения являлись источником более полного и широкого применения алгебры к практике.

Для введения в тему в отдельных случаях можно использовать экскурсии на целесообразно подобранные объекты. Например, в первые дни обучения в VIII классе полезно провести экскурсию в вычислительный центр или в проектное бюро. Такая экскурсия покажет, какие средства применяются для упрощения вычислений. В результате у школьников повышается интерес к счетной линейке, к применению таблиц, к графическим приемам определения значений одной величины по данным другой.

В некоторых случаях связь новой темы с практикой хорошо вскрывается в справках из истории математики. Например, исторические введения можно предпослать темам о прямоугольных координатах, о функциях, о счетной линейке.

Если понятие введено без привлечения материала из жизни, то полезно показать его приложения к практике. Введя, например, понятие о степени, целесообразно сообщить, как оно используется для легко обозримых записей чисел с большим числом нулей правее последней значащей цифры.

Громадное значение имеет развитие умений и навыков в использовании алгебраических знаний и методов решения задач в практике. Например, прямоугольные декартовы координаты широко применяются в некоторых видах геодезических работ — в эккерной съемке земельных участков, при накладке планов многоугольных участков по координатам вершин, при выполнении измерений и вычерчивании профилей разрезов частей земной поверхности. Полезно включить в педагогический процесс соответствующие упражнения и практические занятия.

В практике большое значение имеют вычислительные навыки, в частности приближенные расчеты. В курсе арифметики учениками сделаны только первые шаги в оперировании приближенными числами. При изучении алгебры полезно использовать все возможности для расширения и углубления умений и навыков в обращении с приближенными числами, в частности, в порядке упражнений учащиеся познакомятся с некоторыми приближенными формулами вычислений.

В практике широко применяются и устные вычисления. При изучении рациональных чисел, при определении числовых значений выражений и функций следует широко пользоваться как устными, так и письменными вычислениями. Надо уделять внимание *прикидке* — грубо приближенной оценке результатов одного или нескольких действий над числами: *прикидка* — важное звено в практике вычислений, в частности на счетной линейке.

Существенное значение во многих практических расчетах имеют простейшие вычислительные средства: таблицы, счетная линейка, графики.

Задачи с практическими сюжетами постепенно завоевывают место в педагогическом процессе. Чтобы тот или иной практический вопрос получил освещение в задачах, желательно предлагать учащимся небольшие группы задач на одну и ту же тему. Например, в производстве применяются гидравлические прессы, полезно предложить 1—2 задачи, при решении которых потребуется применить закон о передаче давления в жидкости, а затем 2—3 задачи на гидравлические прессы.

Надо учить по числам, взятым из практики; составлять задачи с практическим содержанием.

Полезно использовать в обучении методы и приемы расчетов, применяемые на производстве. Например, в практике для расчетов часто пользуются готовыми формулами, взятыми из справочника. Вычисления по готовым формулам надо практиковать и в школе; желательно, чтобы они были связаны с практическими делами.

Связь изучения алгебры с работой в мастерских, общественно полезным трудом, практикой осуществляется всем комплексом математических предметов. Например, подготовка и планирование цветников, питомников ягодного сада начинаются с экерной съемки и составления горизонтального плана земельного участка, причем используется метод прямоугольных координат. Вычисление площади участка, последующее составление проекта интересно с геометрической точки зрения. Перенос проекта в натуру вновь потребует приложения метода координат.

Счетная линейка и чертежи деталей будут использованы при выполнении калькуляционных расчетов, связанных с выполнением заказов в мастерских.

Итак, естественная связь преподавания алгебры с жизнью, трудом, коммунистическим строительством многообразна, и польза этой связи несомненна.

5. О связи преподавания алгебры с арифметикой и геометрией

Исторически развитие начал арифметики предшествует возникновению алгебры. Начатки алгебры зародились в арифметике: арифметика — предшествующая и материнская дисциплина по отношению к основам алгебры.

Такое же соотношение существует между школьной арифметикой и алгеброй в *восьмилетней школе: школьная арифметика* предшествует алгебре и содержит эмбрионы алгебраического материала (простейшие уравнения, буквенные обозначения).

При обучении алгебре педагогу нужно опираться на те знания, которыми овладели школьники при изучении арифметики.

В алгебре вводятся некоторые определения по аналогии с соответствующими определениями арифметики. Ярким примером служат определения четырех арифметических действий над алгебраическими дробями.

При формировании некоторых понятий в курсе алгебры (например, о степени, коэффициенте, простейшем общем знаменателе) используются арифметические примеры, которые конкретизируют понятия и позволяют перекинуть мост от известного к новому.

В арифметике изучаются четыре действия над неотрицательными рациональными числами. В алгебре понятие о числе обобщается. Аналогично и некоторые другие понятия алгебры являются обобщением и развитием соответствующих понятий арифметики.

Ведущим дидактическим методом установления закономерностей при изучении арифметики является неполная индукция. В алгебре также используется неполная индукция, вместе с тем по сравнению с арифметикой значительно возрастает и роль дедукции. Введение дедуктивного метода обусловлено тем, что при изучении арифметики дети узнали много фактов, на которые теперь можно опереться в доказательствах. Переход к использованию дедуктивного метода обусловлен и нарастающим умственным развитием учащихся.

В свою очередь обучение алгебре не может игнорировать совершенствования и углубления навыков в устных и письменных вычислениях, культуры умений и навыков в приближенных вычислениях.

В курсе алгебры при решении задач возможно уделить внимание выражению арифметических закономерностей в общем виде и даже применить дедукцию к доказательству таких закономерностей; например, школьники записывают натуральные двузначные и трехзначные числа в общем виде, доказывают теоремы о делимости трехзначных чисел на 9 и 3.

Связь преподавания алгебры с геометрией также значительна.

Некоторые вопросы алгебры включены в курс геометрии: таблица квадратов чисел, понятие об арифметическом квадратном корне из числа, таблица квадратных корней из чисел. Это сделано с целью подготовить учеников применять теорему Пифагора к решению простейших вычислительных задач.

В 1962/63 учебном году во многих школах г. Горького начало главы о тригонометрических функциях острого угла дополнили введением понятия о функции и аргументе.

Методы алгебры широко используются в курсе геометрии и в выражении закономерностей метрической геометрии формулами, в применении таблиц и счетной линейки к решению вычислительных геометрических задач и в решении задач с помощью уравнений и систем уравнений.

Вместе с тем при обучении алгебре используются геометрические интерпретации некоторых формул, задач на составление уравнений с геометрическими сюжетами (например, с применением теоремы Пифагора).

Связь школьных математических предметов особенно ярко проявляется при выполнении практических работ. Горизонтальная мензульная съемка земельного участка в форме многоугольника и последующее вычисление его площади — в основном геометрическая работа, но в ней используются счетная линейка и приближенные вычисления.

Школьная алгебра имеет межпредметные связи с некоторыми другими учебными дисциплинами — физикой, химией. Задачи с физическими сюжетами прочно обосновались в алгебраических задачниках. К сожалению, далеко не во всех школах учителя физики и химии в полной мере используют то, что дает школьникам алгебра; в частности, счетная линейка редко применяется на уроках физики и почти совершенно не применяется на уроках химии.

6. Некоторые книги для учителя

1) Для повышения квалификации учителя математики рекомендуется книга И. А. Гибша «Алгебра» [1]. В книгу включен материал, близкий к содержанию программы алгебры восьмилетней школы. В ней найдется все, что необходимо учителю для ожидаемого перехода на новые программы.

2) Во введении к книге И. А. Гибша «Методика обучения алгебре в VI классе восьмилетней школы» (Изд-во АПН РСФСР, 1963) изложены общие дидактические положения об обучении математике, и в частности алгебре. Красной нитью в книге проходит мысль о развитии активности и инициативы школьников, о самостоятельной работе их.

В трех главах этого пособия изложены содержание и методика обучения по темам VI класса. В них излагается материал, который автор считает необходимым сообщить ученикам, а в «Указаниях» к изложенному материалу приводятся методические обоснования и рекомендации. Автор старается придать обзорный характер изложению; например, он рассматривает три способа введения буквенных обозначений, два способа введения положительных и отрицательных чисел, два способа обучения сложению чисел.

В конце книги, в «Упражнениях», приведены примеры и задачи. Многие из них сопровождены решениями и указаниями, в которых автор показывает, как можно реализовать некоторые из дидактических рекомендаций, приведенных во введении.

Автор не всюду считается с программой алгебры восьмилетней школы. В главе «Алгебраические выражения» идет речь о возведении в степень, о таблицах квадратов и кубов чисел, об интерполировании, даже о построении параболы и кубической параболы (для первой четверти).

Автор, внимательно и любовно относясь к ученику, не всегда учитывает общее и умственное развитие шестиклассников. При рассмотрении рациональных чисел неоднократно встречается «вывод правила» (сложения), «вывод правила» (умножения). Правила сложения и умножения рациональных чисел вводятся с помощью определений. Очевидно, автор в термин «вывод» вкладывает иной смысл, чем тот, какой ему приписывают в математике и логике.

При изложении некоторых вопросов дано изобилие формулировок.

Несмотря на обзорный характер, в книге недостаточно полно использо-

[1] И. А. Гибш. Алгебра. Пособие для учителей IX—XI классов. Учпедгиз, 1960.

ваны достижения советской методики алгебры: он обходит, например, вопросы об алгебраических диктантах, о подготовительных занятиях к решению задач составлением уравнений, о положительном опыте лучших школ и учителей.

Книга И. А. Гибша содержит серьезный анализ процесса обучения алгебре, полезна, читается с интересом. Она побуждает углубиться в тот алгебраический материал, который излагается в VI классе.

3) Заслуживает внимания книга В. Л. Гончарова «Начальная алгебра»[1]. Автор книги — крупный ученый и методист. Книга построена на функциональном начале, содержит много полезных, иногда оригинальных методических советов. Изучение ее полезно, особенно в период предстоящей реформы математического образования.

4) В 1965 г. вышла из печати книга К. С. Барыбина «Методика преподавания алгебры»[2]. В ней рассматриваются вопросы обучения алгебре в восьмилетней школе. Не нарушая действующей ныне программы алгебры, автор старается учитывать тенденции предстоящей реформы обучения алгебре и вводит материал, не свойственный традиционным курсам. Так, например, появляется понятие множества, подмножества, рассматривается объединение множеств и другой материал, связанный с ними. Вводятся и методические новинки, например, дается представление о программированном обучении. Книга принесет пользу учителю, особенно молодому

5) Заслуживает серьезного внимания учителя книга П. М. Эрдниева «Методика упражнений по арифметике и алгебре» («Просвещение», 1965). В этой и других своих работах П. М. Эрдниев настойчиво рекомендует применять при обучении метод противопоставления: одновременно рассматривать взаимно противоположные понятия, прямые и обратные действия и операции, прямые и обратные теоремы, решение и составление задач, прямую и обратную функцию и т. д. Экспериментальные исследования П. М. Эрдниева показывают, что использование метода противопоставлений при обучении экономит учебное время и повышает качество математической подготовки школьников.

В первой части книги изложена методика математических упражнений и всесторонне рассмотрен метод противопоставлений. Во второй и третьей частях на большом и разнообразном материале показано применение этого метода при обучении арифметике и алгебре в восьмилетней школе. Особое внимание уделено составлению упражнений.

6) В 1964 г. вышел из печати «Сборник задач по алгебре» для VI—VIII классов К. С. Муравина и Е. Г. Крейдлина[3].

По замыслу авторов, пособие должно помочь учителю в его работе на уроках: оно, дополняя стабильный сборник, значительно расширяет набор задач и упражнений, которые могут быть использованы на уроке, для индивидуальных занятий и в кружковой работе.

7) О значении и роли вычислений в подготовке учеников к практической деятельности учитель найдет богатый материал и для подготовки к урокам, и для кружковых занятий в книге В. Г. Прочухаева «Вычисления и их роль в практической подготовке учащихся средней школы» (*Учпедгиз, 1961*).

---

[1] В. Л. Гончаров. Начальная алгебра, изд. 2. Изд-во АПН РСФСР, 1960.

[2] К. С. Барыбин. Методика преподавания алгебры. «Просвещение», 1965.

[3] К. С. Муравин, Е. Г. Крейдлин. Сборник задач по алгебре для VI—VIII классов. «Просвещение», 1964.

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ

1. Повышение эффективности обучения

Обучение математике, в том числе и алгебре, будет значительно эффективнее, если время, отведенное на изучение предмета, использовать наиболее целесообразно.

Для бережного расходования учебного времени полезно соблюдать некоторые правила. Одни из них — общие, другие касаются только обучения алгебре.

1) Время, отведенное учебным планом на уроки математики, в каждом классе необходимо использовать полностью.

Также полностью надо использовать время, отведенное на каждый урок, не допуская никаких укорачиваний урока. В частности, так называемый организационный момент в V и VI классах свести к минимуму, а в последующих классах совершенно ликвидировать. Об отсутствующих на уроке дежурный по классу сообщает педагогу рапортичкой.

Надо отказаться от трафаретных вопросов (например: «Что задано на дом?») и других ненужных замечаний, которые отдельные учителя допускают на уроках.

2) На уроках алгебры целесообразно шире использовать разнообразные виды устных занятий, позволяющие экономнее расходовать учебное время и увеличить число устных упражнений,— это способствует повышению качества обучения. Например, законы арифметических действий в главе «Рациональные числа» в основном изучаются в порядке устных занятий. Полезно использовать устные занятия при изучении действий над рациональными числами, при выполнении действий над одночленами, в решении несложных уравнений первой степени с одним неизвестным, при разложении на множители простейших многочленов, преобразовании квадратных радикалов и во многих других случаях.

3) К организации обучения предъявляется требование, чтобы каждый ученик с максимальной интенсивностью работал в течение всего урока. А для этого необходимо детально продумывать, как сообщить новый материал, другими словами, как преподнести *информацию*. Требуется продумывать, как тотчас же получить сведения о реакции ученика на эту информацию, т. е. предусмотреть *обратную связь* от ученика к учителю. Наличие этой связи даст возможность вносить коррективы в процесс обучения, *управлять* им.

Допустим, педагог знакомит учеников со следствиями первого свойства уравнений. Они получают информацию: любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, при этом получится уравнение, равносильное данному. Чтобы осуществить обратную связь, педагог сейчас же предлагает ученикам самостоятельно решить примеры:

$$5x - 7 = 4x + 8; \quad 10 - 9x = 5 - 10x; \quad 12 - 2x = -3x - 5.$$

Решение этих примеров покажет, какие коррективы нужно сделать в изложении материала. Так осуществляется управление педагогическим процессом. Аналогично будут изучены и другие следствия, а также следствия второго свойства.

Урок будет неполноценным, если учитель занимается с одним или с малым числом школьников, в то время как большинство бездействует.

4) Эффективность обучения зависит и от мелочей. К их числу относится заблаговременная подготовка классных досок. На половине каждой классной доски полезно разграфить масляной краской координатную сетку со стороной квадрата, равной 5 *см*. В курсе алгебры большое внимание уделяется методу координат, графическому выражению функциональной зависимости, графическому решению уравнений. Нанесенная на доске координатная сетка позволит экономить учебное время и более точно вычерчивать графики функций. Сетка окажется полезной и при изучении некоторых других учебных предметов (геометрии, физики).

Для рационального использования учебного времени в передовых школах Липецка классная доска готовится до начала урока: заблаговременно записывается материал для устных упражнений, самостоятельной работы, фронтальных занятий, очередное задание для домашней работы.

Во многих школах используются легкие переносные доски с координатной сеткой; например, в лучших ростовских школах применяются двусторонние складные портативные доски из линолеума.

5) Разнообразные заблаговременно сделанные и хорошо оформленные таблицы помогают рационализации уроков алгебры. Таблицы для устного счета при изучении рациональных чисел дают возможность быстро подавать материал для упражнений. Таблицы с графиками функций, изучаемых в курсе алгебры, позволяют демонстрировать более совершенные кривые, чем те, которые получаются на классной доске, и выполнять упражнения в чтении графиков. Таблицы, содержащие некоторые формулы, теоремы и правила, способствуют лучшему запоминанию материала. Полезны списки литературы для внеклассных занятий по алгебре и другим математическим предметам.

Вдумчиво работающий педагог найдет много возможностей экономить учебное время. Применение изготовленных школьниками лекал для вычерчивания графиков уже изученных функций (x^2, x^3, $2x^2$, $0{,}5x^2$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$) рационализирует графические приемы решения уравнений, систем уравнений и некоторых задач. Подготовительные упражнения к изучению отдельных трудных вопросов курса алгебры повышают восприятие материала учениками.

Повышению заинтересованности учащихся способствует демонстрация учебных кинофильмов и диафильмов, что также делает обучение более эффективным.

На уроках алгебры полезно показать фрагменты фильмов: прямоугольная система координат и простейшие графики, решение квадратного уравнения, графическое решение системы двух уравнений с двумя неизвестными. На внеклассных занятиях можно использовать фильмы: измерения на местности, счетная техника.

Использование кинофильмов в школе, далекой от кинобазы, встречает значительные трудности. Министерство просвещения РСФСР, областные отделы народного образования могут организовать передачу учебных фильмов по телевидению. Время таких передач должно быть согласовано с изучением соответствующих тем программы и заблаговременно сообщено школам.

2. Повышение сознательности учащихся в учебной работе

Некоторые школьники относятся безразлично к получению математического образования, и в частности к изучению алгебры. Такое равнодушие — результат неудовлетворительной воспитательной работы со стороны учителя математики, классного руководителя и школы в целом.

Перед каждым учителем математики и классным руководителем стоит задача привести в действие те резервы повышения эффективности обучения, которые зависят от ученика, от его учебной работы, и добиться, чтобы усилия каждого ученика стали более результативными.

Увлечение педагога математикой положительно влияет на повышение интереса школьников к предмету. Искренняя преданность учителя делу воспитания и обучения молодого поколения положительно влияет на учащихся, на их отношение к обучению вообще и к изучению алгебры в частности.

Доброжелательное отношение педагога к ученикам порождает их любовь к учителю и к предмету, который он преподает.

Беседы учителя с классом на темы «Почему в школе изучается алгебра», «Значение алгебры в коммунистическом строительстве» и др. улучшают отношение школьников к изучению этой учебной дисциплины.

При изложении отдельных разделов программы учитель в подходящих случаях должен подчеркнуть, что алгебраическая символика и методы дают возможность: 1) составлять формулы решения задач одного и того же вида; 2) выражать зависимости одних величин от других; 3) кратко, точно и достаточно ясно выражать закономерности многих явлений природы; 4) использовать более мощные по сравнению с арифметическими методы решения задач.

А все это имеет большое значение для практики и коммунистического строительства.

Уяснение связи алгебры с жизнью, с практикой естественно повышает интерес школьников к алгебре. В этом отношении особое значение имеют метод координат и графики функций, функциональные зависимости, тождественные преобразования, уравнения и их системы, счетная линейка и математические таблицы.

Внеклассные занятия по математике играют значительную роль в повышении сначала временной заинтересованности, затем в развитии устойчивого интереса к математике, переходящего в увлечение математической наукой.

Используя описанные и некоторые другие средства, педагог введет в действие те резервы повышения эффективности обучения, которые связаны с отношением ученика к учебной работе по математике, с повышением сознательности в изучении основ математики, в том числе и алгебры.

3. Самостоятельная работа учащихся

Самостоятельная работа характеризуется тем, что учащиеся получают устно или письменно задание выполнить индивидуально, реже малыми коллективами (парами), некоторую учебную работу. Задание в некоторых случаях сопровождается повторением некоторых правил, теорем и необходимыми инструктивными указаниями. В процессе выполнения работы учитель в нужных случаях консультирует учащихся, проверяет их достижения, корректирует приемы работы и в случае надобности организует взаимопомощь. Иногда самостоятельная работа по алгебре завершается итоговой беседой учителя с классом.

Самостоятельная работа учеников может иметь индуктивный характер в том случае, когда та или иная алгебраическая закономерность проверяется на примерах. Учителю следует избегать так называемой *короткой индукции*, когда заключение делается на основе разбора одного или двух примеров. Это ведет к поспешным, необоснованным заключениям.

Приведем иллюстрацию. В VII классе ученики познакомились со сложением алгебраических дробей. Возникает вопрос: применим ли к сложению дробей переместительный закон? Учащиеся получают задание — проверить, применим ли переместительный закон сложения для алгебраических дробей, на следующих примерах:

Первый ряд	Второй ряд
1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$;	1) $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$;
2) $\frac{c}{ab-ac}+\frac{1}{a}$;	2) $\frac{1}{c}+\frac{b}{ac-bc}$;
3) $\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$.	3) $\frac{1}{a-b}+\frac{b}{b^2-a^2}$.

В краткой итоговой беседе отмечают, что рассмотрено шесть примеров; оказалось, что переместительный закон сложения применим к сумме алгебраических дробей.

Таким же путем можно познакомить учеников с применением и других законов арифметики к алгебраическим дробям. Аналогичная самостоятельная работа позволяет показать, что законы арифметических действий применимы к действиям над рациональными числами, над многочленами, а также поможет индуктивно «открыть» теорему Виета и другие факты.

Важно обратить внимание на то, что индуктивное заключение — еще не доказательство: правило, полученное на основании рассмотрения отдельных примеров, должно быть доказано. Опыт показывает, что в начале обучения в VII классе ученики отличают заключение по неполной индукции от доказательства.

Ко второму виду самостоятельных работ отнесем работы, направленные на поиск вывода формулы, доказательства теоремы, решение задачи на доказательство. Здесь нужно проявить инициативу, иногда находчивость, элементы творчества.

Приведем пример. Решая приведенные квадратные уравнения с числовыми коэффициентами, ученики подметили свойства корней этого вида уравнений и сформулировали теорему. Чтобы решить, всегда ли верно это свойство, учитель дает задание:

1) *Доказать, что для уравнения* $x^2+px+q=0$; $x_1x_2=q$ и $x_1+x_2=-p$.

2) *Доказать, что теорема применима и к неполным квадратным уравнениям вида* $x^2+px=0$, $x^2+q=0$.

На выполнение задания отводится около 12—15 минут. Подводя итог, ученики воспроизводят доказательство, вспоминают формулировку теоремы, подтверждают ее применение и к неполным квадратным уравнениям.

Применяя такой вид самостоятельной работы, можно изучить умножение многочлена на одночлен, многие формулы умножения, теорему Виета для общего квадратного уравнения. Этот прием полезен и при доказательстве некоторых тождеств, например законов сложения для сумм алгебраических дробей, и в других случаях.

Интересна самостоятельная работа учеников с использованием учебника. Цели таких работ заключаются в том, чтобы ученики изучили доступные им алгебраические закономерности и получили умения и навыки работать с математической книгой.

В VI классе на уроках учебник используем так: а) правило, разъясненное на примерах и сформулированное школьниками, один из учеников громко читает по учебнику; особенно рекомендуем прочитывать более сложные правила, как, например, правила умножения и деления одночленов; б) предлагаем самостоятельно прочитать по учебнику параграф, содержание которого изложено на уроке; например, после изложения понятия о степени с натуральным показателем предлагаем прочитать соответствующий параграф учебника, запомнить определения.

В последующих классах учебник можно использовать для быстрого повторения правил, изученных ранее. Например, если учитель намерен провести самостоятельную работу по нахождению числовых значений алгебраических дробей, когда значения букв — приближенные числа, он организует кратковременную самостоятельную работу для повторения правил действий над приближенными числами по книге В. М. Брадиса «Четырехзначные математические таблицы».

При фронтальном решении задач иногда полезно предложить самостоятельно прочитать условие сложной задачи, а затем одному из учеников комментировать, как он понял задачу. Экспериментально установлено, что некоторые ученики не понимают содержания сложных задач, а потому и не могут решить их.

В VII и VIII классах ученики могут изучить самостоятельно доступный новый материал. Такая работа сопровождается последующей беседой и упражнениями. Можно, например, предложить самостоятельно ознакомиться со сложением дробей (§ 65), вычитанием дробей (§ 66), умножением (§ 67), делением (§ 68)[1]. Найдется и другой учебный материал, который школьники смогут успешно усвоить самостоятельно.

Самостоятельная работа учащихся по решению примеров и задач находит широкое использование в школах.

Применение каждой теоремы или формулы при выполнении упражнений обычно начинается с общеклассной фронтальной работы. Целесообразно показать правильный порядок записи и повторить, чтобы запомнить теоремы, формулы.

---

[1] А. Н. Барсуков. Алгебра. Учебник для VI—VIII классов. «Просвещение», 1966, стр. 134—137.

Когда ученики приобретут начальные умения и навыки, можно использовать выполнение упражнений с весьма краткими пояснениями — комментированное решение, как говорят учителя Липецкой области. Комментирует ученик по назначению педагога.

А следующий этап — самостоятельное решение задач или примеров по изучаемому разделу.

Особую ценность имеют задания, рассчитанные на использование инициативы и творческих усилий учащихся. Если самостоятельная работа этого вида сопровождается вычерчиванием графиков функций с использованием чертежных приборов, и в частности заблаговременно сделанных учащимися лекал, то она становится близкой к лабораторной работе. Такие занятия особенно интересуют учащихся.

Представляют интерес самостоятельные работы по составлению задач.

Простейшим видом является составление задачи, решение которой определено формулой. Например, составить задачу, решение которой сводится к формуле:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}.$$

В этом случае школьникам помогает аналогия с задачами, при решении которых составлялись формулы. Ясно, что для данной формулы можно составить несколько задач.

Наиболее полезно и в учебных и в воспитательных целях составление задач, связанных с трудовой деятельностью учеников или их общественно полезной работой. Например, в одной из школ учащиеся VII класса узнали, что за первое полугодие ученики V класса собрали 0,8 *т* металлического лома, VI класса — 1,2 *т*, VII класса — 1,6 *т* и VIII класса — 2,4 *т*. Предложено было составить задачи, которые решались бы путем составления уравнения. Школьники составили ряд удачных задач.

Замечено, что учащиеся с особым интересом решают задачи, составленные их товарищами. Для поощрения фамилии авторов сообщаются.

4. Проверка домашней работы, учет знаний и навыков

Несмотря на важность проверки выполнения домашнего задания и большое значение текущего учета знаний и навыков учащихся, педагогическая ценность этих видов деятельности учителя значительно меньше, чем других учебных занятий со школьниками, например: продуманного изложения нового материала, самостоятельной работы на уроке, практических занятий. Поэтому за последнее время в работе многих учителей наблюдается стремление сократить время, отводимое на проверку и учет знаний.

Какие приемы проверки выполнения домашней работы по алгебре можно рекомендовать?

1) Проверка учителем вне урока домашних тетрадей всех учащихся класса является полезным и вместе с тем трудным для учителя делом. Такие проверки особо важны в начале учебного года и тогда, когда ученики еще мало знакомы педагогу, а также после повторения той или иной главы перед ответственной письменной работой. Учитель, например, в VIII классе сообщил ученикам, как излагать решения задач на составление квадратного уравнения. В домашнюю работу включено изложение решения одной из задач. Целесообразно проверить, как ученики пишут объяснения к решению, а затем уже провести контрольную работу.

2) Выборочная проверка учителем вне урока домашних тетрадей позволяет усилить контроль над работой слабых или нерадивых школьников и вносить коррективы в их учебную деятельность. Конечно, этот вид проверки не оставляет без внимания работы успевающих учеников.

3) Если на очередном уроке намечена самостоятельная работа по решению задач, то учитель может использовать часть этого времени для беглой проверки домашней работы. Ученики, приступая к выполнению самостоятельной работы, открывают тетради с последней домашней работой и кладут их на парты для просмотра. Здесь прежде всего контролируется факт выполнения задания. Однако если домашняя работа состояла из построения графиков, упражнений, связанных с применением метода координат, графического решения уравнений или систем уравнений, графического решения задач, то беглый просмотр тетрадей дает возможность проверить и качество выполнения, вскрыть ошибки и недочеты и потребность их устранения.

4) В практике нередко применяется правило: ученик, вызванный для проверки знаний и навыков, предъявляет учителю домашнюю тетрадь. Такой прием следует рекомендовать.

5) Что делать, если значительная часть школьников не сумела решить задачу, например, путем составления уравнения? Предвидя возможность этого или получив информацию о таком положении, учитель составляет или подбирает задачу, аналогичную той, решение которой вызвало затруднения. Подобранная задача решается всеми учащимися фронтально или с краткими пояснениями (комментариями). А затем сообщается, что задача, вызвавшая затруднения, решается аналогично только что решенной; она вновь включается в очередное домашнее задание.

6) Формулировки определений, теорем и законов, которые учащиеся повторяли и заучивали, проверяются в связи с их приложениями при выполнении упражнений. В некоторых случаях

можно провести беседу по проверке устной домашней работы.

Чтобы сократить время, отводимое на учет знаний и навыков каждого школьника, следует вести учет его участия в работе на протяжении всего урока.

Если ученик VI класса самостоятельно вывел формулу куба разности двух чисел и правильно сформулировал теорему, если ученик VIII класса самостоятельно доказал теорему Виета для приведенного квадратного уравнения или самостоятельно решил задачу на доказательство, то каждый из них заслуживает поощрения в виде оценки.

В VI классе новые алгебраические теоремы излагались методом эвристической беседы. Ученик С. правильно и мотивированно отвечал на вопросы. Это свидетельствует о его успехах в изучении алгебры. Ученик С. заслуживает положительной отметки.

Если ученик VI класса внимательно прослушал вывод теоремы об умножении многочленов и правильно повторил его, если ученик VIII класса, прослушав вывод формулы корней квадратного уравнения, сумел повторить его, то такие ученики получат отметки.

Таким образом, изучение нового материала позволяет оценивать знания учащихся, их успехи в овладении курсом алгебры.

Для повышения эффективности обучения учитель предъявляет учащимся требование воспроизвести вывод или доказательство на последующих уроках. Организация этого вида устного учета нуждается в пояснениях. Ученики, вызванные для проверки к классной доске или на передние парты, получают задание, записанное на именных билетах, а остальные выполняют самостоятельную работу или в беседе с учителем восстанавливают в памяти материал, необходимый для последующего усвоения новых фактов. Если учитель найдет целесообразным, то подготовленные ответы учеников выслушивает весь класс, при этом другие учащиеся делают критические замечания о выводах или доказательствах; наиболее ценные и глубокие из этих замечаний также оцениваются. Если учитель найдет нецелесообразным привлекать к выслушиванию ответов весь класс, то класс продолжает самостоятельную работу, а учитель выслушивает ученика один.

Надо заметить, что некоторые учителя необоснованно ослабляют контроль за усвоением выводов и доказательств. Рассуждают примерно так: в VIII классе учащиеся по алгебре сдают письменный экзамен, содержание которого известно, устного экзамена нет; значит, надо готовить только к письменному экзамену, а на выводы и доказательства можно не обращать внимания. Такая позиция ошибочна: она вредно сказывается на развитии дедуктивного мышления школьников, снижает прочность знаний и оказывает плохую услугу тем учащимся, которые по окончании восьмилетней школы решат продолжать образование. Учет навыков осуществляется в течение всего урока. Фронтальное решение всем классом задач и примеров предназначено для выработки умений и навыков; однако если при решении, например, уравнений ученик VII класса хорошо справляется с отысканием общего знаменателя, грамотно производит преобразования, правильно отсеивает посторонний корень, то, естественно, такой ученик получит высокую оценку.

Если ученик успешно решает с краткими пояснениями сложный пример на тождественные преобразования алгебраических выражений или задачу с помощью составления уравнения, то это дает возможность оценить его учебные успехи.

Если при выполнении самостоятельной работы, например по графическому решению уравнений или систем уравнений, ученик хорошо справляется с задачей, то он также получает положительную отметку.

За последние годы в школах получил распространение так называемый *поурочный* балл, выставляемый нескольким ученикам в конце урока за совокупность ответов и других проявлений знаний, умений и навыков. Учитель в течение урока каждому из намеченных им учащихся ставит в записную книжку или тетрадку частные (не объявляемые) отметки отдельно за выполнение домашней работы, знания правил и иных теоретических вопросов, за навыки применять правила, а на основе нескольких таких отметок в конце урока объявляет поурочный балл.

В VI классе, например при изучении действий второй ступени над рациональными числами, учитель наблюдает работу четырех учащихся и делает отметки об их успехах в табличке:

Таблица 1

	Знание правил	Навыки в вычислениях	Запись выражений под диктовку	Домашняя работа	Поурочный балл
Иванов Петя	5	5	4	5	5
Павлова Шура					
Шмелева Катя					
Жуков Игорь					

В конце урока этим учащимся объявляется поурочный балл и кратко указываются недостатки в их знаниях и навыках.

Поурочный балл можно с пользой применять в VI—VII классах. Конечно, поурочный балл не может заменить устный опрос учащихся и письменные контрольные работы, он используется наряду с другими видами учета.

Таким образом, в распоряжении педагога имеется много возможностей вести тщательный устный учет знаний и навыков, требующий минимальной затраты учебного времени.

Весьма удобны кратковременные письменные контрольные работы по алгебре, рассчитанные на 15—20 минут. Они проводятся по узким вопросам во второй половине урока по билетам, содержащим 4 или 5 вариантов. Такие работы с успехом можно использовать для проверки усвоения действий первой ступени над рациональными числами, действий второй ступени над теми же числами, сложения и вычитания многочленов, умножения многочленов и во многих других случаях.

Знания и навыки в решении задач путем составления уравнений или систем в достаточно сложных тождественных преобразованиях, в решении дробных уравнений проверяются письменными контрольными работами, рассчитанными на один урок. В VIII классе во втором полугодии уместны 1—2 контрольные работы, рассчитанные на два урока. Такая работа является смотром готовности учащихся к выпускному экзамену.

5. Примеры планов уроков по алгебре

Чтобы конкретизировать хотя бы некоторые из приведенных положений о повышении эффективности обучения, приведем два плана уроков с небольшими пояснениями к ним.

1-й план. Тема урока: *Формула умножения.*

1) Алгебраический диктант и чтение выражений и формул:

1-е число — x, Написать:	2-е число — y После окончания диктанта будет записано:	
а) *сумма кубов двух данных чисел.*	x^3+y^3	(а)
б) *разность кубов чисел x и y;*	x^3-y^3	(б)
в) *неполный квадрат суммы двух чисел;*	x^3+xy+y^2	(в)
г) *произведение суммы двух чисел на неполный квадрат разности тех же чисел;*	$(x+y)(x^2-xy+y^2)$	(г)
д) *произведение разности чисел x и y на неполный квадрат их суммы меньше удвоенной суммы кубов тех же чисел.*	$(x-y)(x^2+xy+y^2)<2(x^3+y^3)$	(д)
		9 минут

Прочитать выражение (а), (в), (г).

Прочитать формулу (д), *выражение* (б).

Какое действие в выражении (г)?

Какой случай умножения?

Какое правило?

2) Выполнить действие самостоятельно (примеры записаны на переносной доске):

а) $(3+a^2)(9-3a^2+a^4)$;

б) $(x^8-x^4y+y^2)(x^4+y)$.

6 минут

3) Самостоятельный вывод формулы умножения $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

а) *Дано выражение* $(a+b)(a^2-ab+b^2)$. *Вывести формулу умножения и записать ее.*

б) *Сформулировать и записать теорему.*

(Задание для самостоятельной работы записано заблаговременно.)

7 минут

4) Решение примеров на применение формулы — фронтальная работа учителя с классом. (Условия примеров записаны до урока на переносной доске.)

а) $(a^2+2)(a^4-2a^2+4)$

Как читается формула умножения?

Сумма каких чисел дана в первой скобке?

Является ли второй сомножитель неполным квадратом разности тех же чисел?

Можно ли применить формулу для решения примера?

б) $(c^4+c^2)(c^8-c^6+c^4)$

в) $(1-2n^2+4n^4)(1+2n^2)$

Убедиться, что формула применима и в этом примере.

9 минут

5) Самостоятельная работа: *в следующих выражениях вместо знаков вопроса вставить такие одночлены, чтобы можно было применить выведенную на этом уроке формулу, и выполнить умножение:*

а) $(x^2+?)(?-3x^2+?)$;

б) $(m^6-?+16)(?+?)$;

в) $(?+100)(c^{16}-?+?)$.

Учитель просматривает и проверяет домашние работы.

7 минут

6) *Поменять местами части тождества*

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

и дать другую формулировку. (Беседа.)

Приложить новую формулу к разложению на множители:

а) a^3+27;

б) $64+b^3$;

в) $125n^3+m^6$.

(Выражения выписываются заблаговременно.)

6 минут

7) Домашняя работа: а) *вывести рассмотренную на уроке формулу умножения,* б) № 547, 548, 549_2, в) № $918_{1,2,3,4}$.

1 минута

2-й план. Тема: *Некоторые упражнения и применения метода координат.*

1) Фронтальная работа, беседа.

а) *Даны точки:* $A(2; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(4, -2)$.

Построить эти точки и точки, симметричные данным относительно оси ординат, и записать их координаты.

Какие особенности имеют координаты двух точек, если точки симметричны относительно оси ординат?

б) *Даны точки:* $A(3; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(-3; 1)$, $D(-5; -1)$, $E(5; -1)$, $F(3; 1)$. *Какие пары этих точек симметричны относительно оси ординат?*

Как сформулировать условие симметрии двух точек относительно оси ординат?

(Координаты точек выписываются до начала урока.)

12 минут

2) Самостоятельная работа.

а) *Даны точки* $A(4; 2)$, $B(3; -5)$, $C(-3; -4)$.

Построить эти точки и точки, симметричные данным относительно оси абсцисс.

Какие особенности координат двух точек, если эти точки симметричны относительно оси абсцисс?

б) *Даны точки* $A(-3; -3)$, $B(4; 5)$, $C(-2; 1)$, $D(-3; 3)$, $E(-2; -1)$, $F(4; -5)$. *Какие пары точек симметричны относительно оси абсцисс?*

Как сформулировать условие симметрии двух точек относительно оси абсцисс?

(Задание для самостоятельной работы записывается до начала урока.)

12 минут

3) Подготовка к самостоятельной работе — сообщение учителя, демонстрация плана горизонтальной эккерной съемки.

В практике очень часто составляют планы земельных участков по координатам вершин многоугольников. Координаты вершин или находят непосредственным измерением в натуре, или вычисляют по результатам других измерений.

Демонстрируется план земельного участка; обращается внимание на его оформление, на масштаб.

Задание. *Пусть земельный участок — пятиугольник; координаты его вершин:* $A(0;\ 0)$, $B(68;\ 42)$, $C(106;\ 0)$, $D(87;\ -59)$, $E(48;\ -41)$. *Координаты даны в метрах.*

Составить план земельного участка по координатам вершин в масштабе в 1 см 10 м. Положительное направление оси абсцисс на восток.

(Задание записано до урока.)

12 минут

Составление плана земельного участка — самостоятельная работа.

4) Дополнительный вопрос.

Найти длину стороны AB двумя способами (по плану и вычислением).

8 минут

5) Домашняя работа: а) *№ 1268*, б) *пользуясь координатами вершин, вычислить площадь земельного участка.*

1 минута

6. Внеклассные занятия по алгебре

Каждый учитель математики, добросовестно относящийся к педагогической деятельности, непременно ведет с учащимися внеклассную работу по математике.

Внеклассные занятия по алгебре способствуют усилению интереса к предмету, расширению кругозора учащихся. Они позволяют полнее, чем на уроках, вскрыть практическое значение предмета, ознакомить с историей дисциплины, содействовать развитию умений самостоятельно работать с математической литературой.

Учитель может использовать разнообразные формы внеклассных занятий, и в первую очередь математические кружки, подготовку к математическим олимпиадам, организацию внутришкольных олимпиад и участия в районных и областных олимпиадах, индивидуальную работу с наиболее одаренными учащимися.

6) *Поменять местами части тождества*

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

и дать другую формулировку. (Беседа.)

Приложить новую формулу к разложению на множители:

а) a^3+27;
б) $64+b^3$;
в) $125n^3+m^6$.

(Выражения выписываются заблаговременно.)

6 минут

7) Домашняя работа: а) *вывести рассмотренную на уроке формулу умножения,* б) № 547, 548, 549_2, в) № $918_{1,2,3,4}$.

1 минута

2-й план. Тема: *Некоторые упражнения и применения метода координат.*

1) Фронтальная работа, беседа.

а) *Даны точки:* $A(2; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(4, -2)$.

Построить эти точки и точки, симметричные данным относительно оси ординат, и записать их координаты.

Какие особенности имеют координаты двух точек, если точки симметричны относительно оси ординат?

б) *Даны точки:* $A(3; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(-3; 1)$, $D(-5; -1)$, $E(5; -1)$, $F(3; 1)$. *Какие пары этих точек симметричны относительно оси ординат?*

Как сформулировать условие симметрии двух точек относительно оси ординат?

(Координаты точек выписываются до начала урока.)

12 минут

2) Самостоятельная работа.

а) *Даны точки* $A(4; 2)$, $B(3; -5)$, $C(-3; -4)$.

Построить эти точки и точки, симметричные данным относительно оси абсцисс.

Какие особенности координат двух точек, если эти точки симметричны относительно оси абсцисс?

б) *Даны точки* $A(-3; -3)$, $B(4; 5)$, $C(-2; 1)$, $D(-3; 3)$, $E(-2; -1)$, $F(4; -5)$. *Какие пары точек симметричны относительно оси абсцисс?*

Как сформулировать условие симметрии двух точек относительно оси абсцисс?

(Задание для самостоятельной работы записывается до начала урока.)

12 минут

3) Подготовка к самостоятельной работе — сообщение учителя, демонстрация плана горизонтальной эккерной съемки.

В практике очень часто составляют планы земельных участков по координатам вершин многоугольников. Координаты вершин или находят непосредственным измерением в натуре, или вычисляют по результатам других измерений.

Демонстрируется план земельного участка; обращается внимание на его оформление, на масштаб.

Задание. *Пусть земельный участок — пятиугольник; координаты его вершин:* $A(0;\ 0)$, $B(68;\ 42)$, $C(106;\ 0)$, $D(87;\ -59)$, $E(48;\ -41)$. *Координаты даны в метрах.*

Составить план земельного участка по координатам вершин в масштабе в 1 *см* 10 *м. Положительное направление оси абсцисс на восток.*

(Задание записано до урока.)

12 минут

Составление плана земельного участка — самостоятельная работа.

4) Дополнительный вопрос.

Найти длину стороны AB двумя способами (по плану и вычислением).

8 минут

5) Домашняя работа: а) *№ 1268,* б) *пользуясь координатами вершин, вычислить площадь земельного участка.*

1 минута

6. Внеклассные занятия по алгебре

Каждый учитель математики, добросовестно относящийся к педагогической деятельности, непременно ведет с учащимися внеклассную работу по математике.

Внеклассные занятия по алгебре способствуют усилению интереса к предмету, расширению кругозора учащихся. Они позволяют полнее, чем на уроках, вскрыть практическое значение предмета, ознакомить с историей дисциплины, содействовать развитию умений самостоятельно работать с математической литературой.

Учитель может использовать разнообразные формы внеклассных занятий, и в первую очередь математические кружки, подготовку к математическим олимпиадам, организацию внутришкольных олимпиад и участия в районных и областных олимпиадах, индивидуальную работу с наиболее одаренными учащимися.

В кружках чаще всего ведутся занятия по всем математическим предметам, однако могут быть кружки, занимающиеся преимущественно алгебраическими вопросами.

Приведем возможную *тематику занятий по алгебре:*

1) История отрицательных чисел (VI класс).

2) Алгебра на службе приближенных вычислений (VI—VIII классы).

3) Различные способы доказательства тождеств, части которых — целые алгебраические выражения (VII класс).

4) Некоторые трудные случаи разложения на множители (VII—VIII классы).

5) Уравнения с буквенными коэффициентами (VII—VIII классы).

6) Задачи на составление уравнений с буквенными данными (VIII класс).

7) Решение систем уравнений способом замены неизвестных вида:

$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2, \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{2x+3y}+\frac{1}{3x-2y}=2, \\ \frac{2}{2x+3y}-\frac{3}{3x-2y}=-2{,}6 \end{cases} \text{(VII класс).}$$

8) Решение систем линейных уравнений с тремя неизвестными (VII—VIII классы).

9) Определители второго и третьего порядков и применение их к решению систем линейных уравнений (VII—VIII классы).

10) Применение метода прямоугольных декартовых координат в горизонтальной эккерной съемке земельного участка — серия практических работ на поверхности земли (VII класс).

11) Из истории метода координат (VII класс).

12) Решение доступных исторических задач составлением уравнений (VII—VIII классы).

13) История счетной линейки (VIII класс).

14) История квадратного уравнения (VIII класс).

15) История развития понятия о функции (VIII класс).

В занятиях кружка значительное место занимает решение занимательных задач, в частности по алгебре.

Вдумчивый учитель для занятий в кружке может избрать темы, сближающие школьную математику с современной математической наукой: элементы учения о множествах, начатки векторной алгебры, простейшие счетные машины. Каждая из таких тем потребует нескольких занятий.

Подготовка учащихся к участию в олимпиадах ведется и на уроках и на занятиях кружка. В этом отношении особого внимания заслуживают вопросы, решение которых требует инициативы, находчивости, элементов творчества.

Если ученик проявляет интерес к математике, находит остроумные и оригинальные способы решения задач, то такой учитель не только привлекает его к занятиям в математическом кружке, но и проводит с ним индивидуальные занятия, направленные на расширение математического кругозора, на развитие инициативы в решении учебных проблем.

ЛИТЕРАТУРА ПО ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЕ

М. Б. ГЕЛЬФАНД, В. С. ПАВЛОВИЧ.
Внеклассная работа по математике в восьмилетней школе. «Просвещение», 1965.

А. П. ПОДАШЕВ.
Вопросы внеклассной работы по математике в школе. Учпедгиз, 1962.

Б. А. КОРДЕМСКИЙ.
Очерки о математических задачах на смекалку. Учпедгиз, 1958.

Математическая смекалка. Физматгиз, 1963.

А. А. КОЛОСОВ.
Книга для внеклассного чтения по математике для учащихся VIII класса. Учпедгиз, 1958.

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН.
Занимательная алгебра. ГТИ, 1956.

Живая математика. Физматгиз, 1959.

В. М. БРАДИС, В. Л. МИНКОВСКИЙ, А. К. ХАРЧЕВА.
Ошибки в математических рассуждениях. Учпедгиз, 1959.

И. Я. ДЕПМАН.
Рассказы о решении задач. Детгиз, 1964.

П. Ю. ГЕРМАНОВИЧ.
Сборник задач по математике на сообразительность. Учпедгиз, 1960.

Математические викторины. Учпедгиз, 1959.

М. ГАРДНЕР.
Математические чудеса и тайны. «Наука», 1964.

В. ЛИТЦМАН.
Теорема Пифагора. Физматгиз, 1960.

ГЛАВА III

ПРОПЕДЕВТИЧЕСКОЕ ЗНАКОМСТВО С ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

1. Понятие функции

Мир — движущаяся материя. Движение — форма бытия материи. Виды движения разнообразны. Переменная величина есть отражение в нашем мозгу движения материи. Вместе с тем переменная является средством изучения многих видов движения материи в самом широком смысле этого слова.

Понятие о переменной величине порождено практикой. Вплотную подошли к этому понятию и к понятию бесконечно малой как частному случаю переменной уже древние греки, но они не использовали этих понятий при изучении математических проблем. Только создание к концу XVI в. удобной алгебраической символики дало возможность в следующем веке свободно изучать переменные.

Движение материи подчинено объективным закономерностям. В. И. Ленин учит: «Мир есть закономерное движение материи, и наше познание, будучи высшим продуктом природы, в состоянии только *отражать* эту закономерность» [1]. Как отражение объективной закономерности в математике создается понятие функции: «...понятия порядок, закономерность и т. п. могут быть выражены при известных условиях математически определенным функциональным соотношением!» [2]. Функция является сильным средством выражения и изучения многих законов материального мира.

Понятие функции возникло под влиянием практики. Развитие этого понятия имеет длинную историю. Конечно, конкретными функциональными зависимостями люди пользовались с древнейших времен: вавилонские математики применяли таблицы при решении уравнений, греческие геометры составляли таблицы хорд, каждая из которых содержит значения аргумента и соответствующие значения функций. Однако только в XVII столетии функция осознанно включается в математику в работах П. Ферма (1601—1665), Р. Декарта, И. Ньютона (1642—1727) и Г. Лейбница (1646—1716). В этот период понятие функции не имело четкого определения, было связано с графическими представлениями и носило наглядно геометрический характер.

В середине XVIII в. Л. Эйлер дал четкое определение функции. По Эйлеру, функция переменного — аналитическое выра-

---

[1] В. И. Ленин. Материализм и эмпириокритицизм. Политиздат. М., 1965, стр. 154.

[2] Там же, стр. 144.

жение, составленное из этого переменного и постоянных. Определение Эйлера — большой шаг вперед к изучению функций, оно не утратило своего значения и в наши дни. Однако вскоре обнаружилась его узость. Под определение Эйлера не подходят такие функции, которые задаются таблицами, а таблицы очень широко применяются в практике. Под него не подходят функции, которые задаются несколькими аналитическими выражениями, графически, описаниями.

Более широкое определение функции было дано в 1834 г. великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и несколько позднее — в 1837 г.— выдающимся немецким математиком Л. Дирихле (1805—1859). Определение Лобачевского — Дирихле можно сформулировать так: y есть функция переменной x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если всякому значению переменной x этого отрезка соответствует вполне определенное значение переменной y, при этом совершенно неважно, каким способом установлено соответствие. Определение Лобачевского — Дирихле применяется в несколько уточненной форме и в современных курсах математического анализа.

Каково же идейное содержание понятия о функции в наши дни? Современное учение о функции основывается на понятии множества. По содержанию понятие о функции совпадает с понятием соответствия. Пусть даны два любых множества $M=\{x\}$ и $N=\{y\}$ какой угодно мощности, составленные из каких угодно элементов x и y. Если каждому элементу x множества M соответствует некоторый вполне определенный элемент y множества N, то говорим, что имеем функцию на множестве M, и пишем $y=f(x)$[1].

Элементы x множества M называют значениями аргумента. Все данное множество M называют множеством значений аргумента или областью определения функции. Таким образом, чтобы задать функцию, необходимо установить множество значений аргумента и закон соответствия, по которому всякому значению аргумента отнесено некоторое вполне определенное значение функции, принадлежащее другому множеству элементов.

Современное понятие функции отличается большой общностью. В объем этого понятия входят и функции, закон соответствия которых определен одним аналитическим выражением, и функции, заданные несколькими аналитическими выражениями, таблицами, графиками, описаниями, и функции, заданные геометрическими преобразованиями, например осевой симметрией, подобным преобразованием.

При выражении и изучении законов природы в технике и

---

[1] См.: Н. Н. Лузин. Теория функции действительного переменного. Учпедгиз, 1948.

практической деятельности особое значение имеют числовые функции числового аргумента.

В школьном курсе математики, и в первую очередь в алгебре, учащиеся имеют дело с вещественными функциями от вещественного переменного.

В программе алгебры восьмилетней школы уделяется значительное внимание изучению некоторых элементарных функций. Поскольку учащиеся владеют только рациональными числами, то областью определения функций, рассматриваемых в восьмилетней школе, может служить или множество рациональных чисел, или его подмножества.

Множество — одно из важнейших понятий современной математики. Это понятие — основное (первичное): его нельзя определить через ближайшее родовое понятие и видовое отличие. Оно вводится путем рассмотрения примеров, путем абстракции.

В школьных курсах математики рассматривают большое число разнообразных множеств: натуральные числа, рациональные числа, многочлены, алгебраические дроби; каждое геометрическое место точек на плоскости, обладающих определенным свойством, также является примером множества. Такое положение обязывает ввести в школе понятие о множестве.

За последние годы экспериментально установлено, что понятие о множестве можно ввести в курсе арифметики и даже начальной арифметики. Опасения, проявляемые некоторыми учителями по отношению введения понятия «множество», не имеют оснований.

С точки зрения содержания ныне действующих программ алгебры восьмилетней школы достаточно познакомить школьников со следующими понятиями: множество, конечное и бесконечное множество, взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств. Если такого ознакомления не было сделано при изучении арифметики, то его можно осуществить в начале изучения алгебры в первой теме.

Наметим путь введения указанных понятий.

Все ученики VI класса нашей школы образуют множество: каждый ученик класса — элемент этого множества. Характерным признаком, объединяющим учеников в единое множество, служит то, что каждый из них — ученик VI класса нашей школы.

Все натуральные числа образуют множество, характерным признаком каждого элемента является то, что число — целое; оно может быть получено в результате счета предметов.

Учащиеся приведут примеры множеств. При рассмотрении множеств следует подчеркивать, что объединяет различные предметы в одно множество, что является характеристическим признаком предметов, отнесенных к рассматриваемому множеству.

Множество может состоять из очень немногих элементов. Например, множество однозначных простых чисел содержит элементы: 2, 3, 5, 7. Множество однозначных чисел, делящихся на 5, содержит только один элемент: 5.

Мы можем говорить о множестве учащихся, находящихся в данный момент в спортивном зале школы. В 5 часов утра это множество не содержало ни одного элемента: зал был заперт. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством. Множество спортсменов-шахматистов из учеников VI класса — пустое множество: в классе нет ни одного шахматиста.

Множество учащихся VI класса нашей школы — конечное, а множество натуральных чисел — бесконечное. Учащиеся приводят примеры конечных и бесконечных множеств.

Опираясь на примеры, полезно дать понятие о взаимно однозначном соответствии между элементами двух множеств. Все дома небольшого поселка, имеющего одну улицу, образуют множество. Номера домов составляют другое множество. Каждый дом имеет свой номер, каждому номеру соответствует один дом. Говорят, между элементами этих двух множеств имеется взаимно однозначное соответствие.

Вершины четырехугольника обозначены буквами A, B, C, D. Эти буквы составляют одно множество, вершины — другое. Между элементами этих двух множеств имеется взаимно однозначное соответствие.

Напишем последовательность натуральных чисел, а затем, удвоив каждое из них, напишем последовательность четных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$
$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$$

Между элементами этих двух множеств имеется взаимно однозначное соответствие.

Введение понятия о множестве позволяет пользоваться им; например, можно говорить о множестве рациональных чисел, о множестве допустимых значений аргумента, о множестве корней уравнения и т. д.

2. Функция в восьмилетней школе

Наблюдается, что до сих пор в практике преподавания некоторых учителей восьмилетней школы учение о функциональной зависимости недооценивается и не занимает должного места. Об этом свидетельствуют приемные экзамены в техникумы.

Являясь одним из важнейших понятий современной математики, понятие о функциональной зависимости должно стать одним из центральных понятий школьного курса алгебры восьмилетней школы.

Широкое и глубокое изучение функциональных зависимостей повышает научный уровень школьного курса алгебры.

Учение о функциональной зависимости представлено в программе алгебры восьмилетней школы достаточно полно. Учащиеся должны овладеть прямоугольными декартовыми координатами, уметь строить и читать графики эмпирических функций, подробно изучить линейную и квадратичную функции, а также обратно пропорциональную зависимость, ознакомиться на основе графических представлений с возрастанием и убыванием функций, наибольшими и наименьшими значениями, научиться графически решать уравнения и системы уравнений, изучить некоторые другие функции.

Изучению функциональной зависимости в программе посвящены две темы: «Координаты и простейшие графики» (VII класс), «Функции и графики» (VIII класс). Кроме того, с функциональными зависимостями приходится иметь дело при изучении рациональных чисел, систем уравнений первой степени с двумя неизвестными, квадратного корня и квадратных уравнений.

С методической точки зрения изучение зависимостей и всех вопросов, связанных с ними, можно разделить на два периода. Первый период начинается с V класса и продолжается до изучения темы «Функции и графики». В этот период не вводится определение функции и терминология, связанная с ней, но педагог на конкретном материале доступными средствами подготавливает введение понятия о функции, подчеркивает идею зависимости, применяет различные способы задания функций, дает графическое изображение конкретных зависимостей, графические приемы решения уравнений и систем уравнений. Цель этих занятий — подготовить учащихся к систематическому изучению функций, развивать мышление.

Второй период начинается с главы «Функции и графики»; его можно назвать периодом систематического изучения функциональных зависимостей. В этот период дают если не самое общее, то все же близкое к современному определению понятие функции, вводят соответствующую терминологию, накопленный ранее материал систематизируют и углубляют. Второй период продолжается и в старших классах средней школы.

3. Допустимые значения аргумента

Как отмечено, определение функции прежде всего требует установления области допустимых значений аргумента. Поэтому необходимо учить школьников сознательно подходить к вопросу, каковы допустимые значения буквы или букв, входящих в алгебраическое выражение. Конечно, при этом приходится обращать внимание и на значения выражений. Такого рода упражнения обычно начинают с изучения первой главы курса алгебры и к ним возвращаются неоднократно почти на протяжении всего периода изучения этого курса.

Установление допустимых значений играет и другую роль: оно, побуждая разуметь под a и b, x и y числа, предохраняет от формализма при использовании буквенных обозначений.

Каждое алгебраическое выражение, рассматриваемое вне связи с каким-либо конкретным вопросом, имеет естественную область допустимых значений входящих в него букв: это — множество тех значений буквы или букв, для которых оно сохраняет смысл, т. е. имеет числовое значение. Например, для выражения x^2+1 естественная область допустимых значений x — множество действительных чисел, для выражения $\frac{1}{x^2-1}$ — множество действительных чисел, кроме ± 1.

Однако в школе область допустимых значений ставят в зависимость от двух факторов: во-первых, от структуры выражения, во-вторых, от того числового запаса, которым располагают школьники. Например, в VI классе до введения отрицательных чисел для выражения $2x+1$ область допустимых значений x — множество неотрицательных рациональных чисел, с которым дети освоились в курсе арифметики, в том же классе после изучения отрицательных чисел — множество рациональных чисел, а в IX классе, после изучения иррациональных чисел,— множество действительных чисел. Наконец, еще позднее — множество комплексных чисел.

Если алгебраическое выражение получено в результате рассмотрения какого-либо конкретного вопроса, то область допустимых значений определяется и сущностью вопроса и числовым запасом, которым располагают дети. Для шестиклассника, познакомившегося с отрицательными числами, области допустимых значений x и y для выражения $10x+y$ — множество рациональных чисел. Но если это выражение обозначает положительное двузначное число, то область допустимых значений для x — целые числа от 1 до 9, для y — целые числа от 0 до 9.

При обучении необходимо систематически упражнять учащихся в выяснении области допустимых значений входящих в выражение букв, используя выражения, имеющие естественную область допустимых значений буквы, и такие выражения, для которых область допустимых значений буквы ограничена условиями задачи или вопроса.

В современных задачниках содержатся упражнения на определение области допустимых значений, но эти упражнения иногда сосредоточены в отдельных параграфах. Целесообразно такие упражнения распределить на многие уроки, их иногда можно выполнять устно.

Рассмотрим в этом отношении главу о рациональных числах.

Уже после того как будет введено понятие об отрицательном числе и изучены действия первой ступени, полезно поставить такие вопросы:

а) *Какие значения может принимать* x *в выражениях:* x, $x+5$, $7-x$?

б) *При всех ли значениях* a *выражение* $+a$ *положительное?*

в) *При всех ли значениях* b *выражение* $-b$ *отрицательное?*

г) *Может ли выражение* $x+y$ *быть отрицательным? равным нулю?*

д) *Выяснить, при каких значениях* c *выражение* $1+c$ *больше, меньше выражения* $1-c$, *равно выражению* $1-c$.

Отвечая на такие и аналогичные им вопросы, учащиеся или описывают состав того множества, которое образует допустимые значения буквы, или приводят примеры, поясняющие ответы.

Заканчивая изучение действий второй ступени, уместно предложить вопросы:

а) *При каких значениях* a *верна запись:* $a<2a$?

б) *Возможно ли такое неравенство:* $b>3b$?

в) *При всех ли значениях* c *выражение* $3c$ *больше выражения* $2c$?

г) *При каких значениях* a *будет:* $9a>-9a$; $9a=-9a$; $9a<-9a$?

д) *При каких значениях* a *выражение* $\frac{1}{a}$ *имеет положительное значение? отрицательное? не имеет числового смысла?*

е) *При каких значениях* c *выражение* $\frac{1}{c-1}$ *больше нуля? меньше нуля? не имеет числового смысла?*

Те вопросы, которые у школьников вызывают затруднения, надо поставить вновь на одном из ближайших уроков, изменив при этом форму вопроса и некоторые данные. Опыт говорит, что последний из приведенных вопросов вызывает затруднения. Поэтому на следующем уроке его полезно предложить в измененном виде вновь: при каких значениях c выражение $\frac{2}{c-3}$ имеет положительное значение? отрицательное значение? не имеет числового смысла?

После изучения возвышения в степень учитель ставит примерно такие вопросы:

а) *Какие значения может принимать* m *в выражении* m^2?

б) *При всех ли значениях* x *выражение* x^2 *положительно?*

в) *При всех ли значениях* x *выражение* $-x^4$ *имеет отрицательное значение?*

г) *При каких значениях y выражение $1+y^2$ принимает наименьшее значение?*

д) *Выяснить, при всех ли значениях z выражение $\frac{1}{z^2}$ имеет положительные значения.*

Упражнения на определения допустимых значений нужно выполнять и при повторении главы о рациональных числах.

Наряду с упражнениями, требующими выяснения естественной области значений аргумента, полезны упражнения, приводящие к выражениям, для которых область допустимых значений аргумента устанавливается вопросом или задачей.

а) *Написать выражение любого четного числа.*

Какие значения может принимать буква, входящая в выражение?

б) *Составить выражение любого нечетного числа. Какие значения принимает буква?*

в) *Составить выражение любого целого числа: делящегося без остатка на 5; которое при делении на 5 дает остаток 1; которое при делении на 7 дает остаток* 3.

Такого рода упражнения легко продолжить.

В другой раз преподаватель предложит упражнения:

а) *Написать два выражения, чтобы они обозначали два любых соседних (последовательных) натуральных числа; два четных числа; два нечетных числа.*

б) *Составить выражение дроби, числитель которой равен единице, а знаменатель: любое натуральное число; любое четное число; любое нечетное число.*

И каждое из упражнений сопровождается выяснением области допустимых значений входящей в него буквы..

В начале изучения алгебры решаются задачи арифметическими средствами, но с буквенными данными. Такие задачи также надо использовать для выяснения областей допустимых значений букв. Например, при решении задач: а) *На сколько изменится площадь квадрата со стороной* 10 *см, если все стороны уменьшить на a см?*; б) *на сколько изменится объем куба с ребром a см, если все ребра уменьшить на* 3 *см?* — целесообразно поставить вопрос, какие значения по смыслу задачи может принимать a.

В дальнейшем курсе алгебры имеются достаточные возможности для тренировки учащихся в выяснении областей допустимых значений букв, входящих в выражения, уравнения и задачи.

При изучении алгебраических дробей учитель ставит вопросы, при каких значениях букв выражения

$$\frac{7}{a-5};\quad \frac{1}{a^2-2a+1};\quad \frac{c}{4+4c+c^2}$$

не имеют числового смысла.

Выражения постепенно усложняются. Например, *какие значения может принимать x в следующих выражениях:*

$$\frac{2}{x^3-3x^2+3x-1};\quad \frac{c}{8+12x+6x^2+x^3};$$

$$\frac{1}{(x-1)\cdot(x-a)};\quad \frac{1}{x^2-ax-bx+ab}?$$

Решение линейных уравнений, в которых при неизвестном буквенные коэффициенты, также требует внимательного отношения к значениям параметров. Это относится даже к простейшим уравнениям. Вот два примера:

1) $ax=1+x$; $\qquad x(a-1)=1$.

Если $a\neq 1$, то $x=\frac{1}{a-1}$.

Если $a=1$, то уравнение не имеет решений.

2) $ax-a^2-2x+4=0$; $\qquad x(a-2)=a^2-4$.

Если $a\neq 2$, то $x=a+2$.

Если $a=2$, то решение — любое известное учащимся число.

Задачи с буквенными данными, решаемые путем составления уравнений, представляют интерес в отношении области допустимых значений букв. Чтобы не столкнуться сразу с огромными трудностями, целесообразно начинать с задач, в которых только один параметр, а затем постепенно увеличивать число параметров.

Рассмотрим задачу: *Произведение двух последовательных натуральных чисел на a меньше произведения двух следующих натуральных чисел. Определить эти числа.*

Обозначив наименьшее из четырех последовательных чисел x, составив уравнение и решив его, получим:

$$x=\frac{1}{4}(a-6).$$

По смыслу задачи a — натуральное число. Так как x тоже натуральное число, то $a>6$ и разность $a-6$ должна делиться нацело на 4.

Выпишем, начиная с меньшего, несколько значений a, удовлетворяющих этим требованиям: 10, 14, 18, 22.

Легко усмотреть, что

$$a=10+4n,$$

где n может принимать целые неотрицательные значения: 0, 1, 2, 3, ...

Вопрос о допустимых значениях параметров имеет значение при решении систем линейных уравнений с двумя неизвестными, при решении задач путем составления систем, когда среди данных имеются буквы.

При изучении квадратного корня также возможны упражнения на определение допустимых значений букв, входящих в алгебраическое выражение. На этом этапе обучения целесообразно ввести выражение: «область допустимых значений x». Теперь задание можно сформулировать так:

Найти область допустимых значений x для каждого выражения:

$$\sqrt{x};\ \sqrt{-x};\ \sqrt{x-1};\ \sqrt{1-x^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}};\ \frac{2}{\sqrt{1-x}};\ \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Учащиеся восьмилетней школы не имеют понятий об иррациональных и действительных числах, поэтому допустимые значения черпаются, как и ранее, из множества рациональных чисел.

4. Способы задания функции

В два первых месяца изучения алгебры в VI классе средством выражения функциональной зависимости служат алгебраические выражения и таблицы. Позднее ученики знакомятся с графическим способом выражения функциональной зависимости. Главу о рациональных числах заканчивают построением графиков. Программа рекомендует строить графики температуры, равномерного движения.

При первом знакомстве с графиками еще нет надобности в общем представлении о системе прямоугольных координат, пока не нужна и специальная терминология, связанная с этой системой. В каждом конкретном случае осям координат дают то наименование, которое свойственно задаче. Например, если в задаче идет речь об изменении пути при равномерном прямолинейном движении, то на осях делают надписи: «Время в часах», «Путь в километрах» или «Время в минутах», «Путь в метрах».

При графическом изображении функциональных зависимостей ставят такие цели: а) познакомить школьников со структурой графиков; б) научить строить графики по данным таблицам значений двух величин; в) научить правильно читать графики и, в частности, составлять по ним таблицы значений двух величин.

Для чтения графиков используют и тот материал, который имеется в задачнике, и специальные настенные таблицы. Материал для составления таблиц учитель при желании легко найдет в газетах и журналах. Желательно использовать местный материал, характеризующий работу колхоза, района, города.

Упражнения для построения графиков по данным таблицам значений двух величин и составления таблиц по данным графикам имеются в задачнике.

Чтобы первое знакомство с графическим изображением функциональных зависимостей не стало эпизодом, обреченным на забвение, в главах о тождественных преобразованиях полезно: а) применять графические иллюстрации при решении задач, б) предлагать учащимся составлять задачи по данным, взятым с графиков.

Во втором полугодии в VII классе при изучении темы «Координаты и простейшие графики» учащиеся обстоятельно знакомятся с декартовыми прямоугольными координатами, со специальной терминологией и пользуются координатами при изучении зависимостей:

$$y=ax;\ y=ax+b;\ y=\frac{a}{x}.$$

Начиная с этой темы координаты и графики становятся важным средством выражения и изучения зависимостей и применяются во всех последующих темах алгебры восьмилетней школы.

Параллельно с графическим изображением функциональных зависимостей идет изучение и применение таблиц. В первом полугодии в VII классе учащиеся знакомятся с таблицей квадратов чисел, с таблицей квадратных корней из чисел и применяют их при пользовании теоремой Пифагора в геометрии.

В VIII классе вводят таблицы тригонометрических функций, их применяют к решению прямоугольных треугольников. В конце этого года обучения ученики пользуются таблицей кубов чисел.

Таким образом, табличное выражение функциональной зависимости широко представлено в программе восьмилетней школы и находит применение при решении разнообразных задач.

С точки зрения развития полезно составлять с учащимися таблицы функциональной зависимости. Например, уместно составить таблицу квадратов натуральных чисел от 1 до 100. Эта работа предваряет изучение таблицы квадратов чисел. Она начинается в классе. Квадраты чисел до 20 находятся легко. Далее учитель обращает внимание учащихся на следующее: зная квадрат числа n, достаточно к нему прибавить $2n+1$, чтобы получить квадрат следующего натурального числа $n+1$. Например, $18^2=324$. Чтобы получить 19^2, надо найти сумму $324+$ $+2\cdot 18+1$. Такой прием составления таблицы обосновывается применением формулы квадрата суммы двух чисел. Работу по составлению таблицы учащиеся заканчивают дома; особенно легко ее выполнить, если пользоваться при сложении счетами.

Таблица может быть использована для возведения в квадрат и десятичных дробей с одной или двумя значащими цифрами. Чтобы найти квадраты чисел 1,8; 0,18, достаточно выписать из таблицы квадрат числа 18, т. е. 324, и уменьшить это число в первом случае в 100, во втором — в 10 000 раз.

Можно составить таблицу кубов натуральных чисел от 1 до 20. Такая таблица дает возможность находить точно кубы некоторых десятичных дробей. Например, $0{,}9^3 = 9^3 : 1000$; $1{,}8^3 = 18^3 : 1000$.

Составление таблиц и применение их в вычислениях является хорошей подготовкой к ознакомлению учащихся с таблицами квадратов, квадратных корней, кубов, кубических корней.

5. Числовые значения выражений

Определение числовых значений буквенных выражений представляет многосторонний интерес: такая работа всегда подчеркивает мысль, что буквенные компоненты выражения — это числа, принадлежащие той или иной совокупности; она полезна для развития устных и письменных вычислительных навыков. Если определение числовых значений сопровождается составлением таблиц, то это представляет интерес в отношении функциональной пропедевтики, так как развивает мысль, что буквы — переменные, что каждому допустимому значению буквы соответствует определенное значение выражения.

Вот почему при ознакомлении с буквенными обозначениями, при изучении рациональных чисел, многочленов, дробных выражений полезно, вычисляя значения буквенных выражений, практиковать табличную запись. Такая запись подчеркивает функциональную природу алгебраических выражений.

Конечно, не воспрещается практиковать определение только одного значения алгебраического выражения. Иногда это диктуется содержанием рассматриваемого вопроса, особыми целями решения задачи, а также экономией учебного времени. Например, в VII классе определение числового значения выражения по приближенным значениям входящих в него букв выполняют один раз, если оно преследует повторение правил приближенных вычислений.

После ознакомления учащихся с таблицами квадратов и квадратных корней при нахождении числовых значений целесообразно, где удобно, использовать таблицы. С помощью таблиц и правил приближенных вычислений в VIII классе учащиеся находят числовые значения, например, таких выражений:

$$x = 2ab\sin\alpha; \quad x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha - b\sin\beta,$$

если a, b, α и β даны.

Прекрасный материал для определения числовых значений содержит курс геометрии восьмилетней школы. Формулы площадей многоугольников и круга, площадей поверхностей тел и объемов дают богатый материал для определения числовых значений, для развития представлений о функциональных зависимостях.

Попутно отметим, что курс геометрии имеет немало иных примеров зависимостей одних величин от других. Если один из смежных углов увеличивается, то другой уменьшается; при этом каждому значению первого угла будет соответствовать определенное значение другого угла. С увеличением дуги, на которую опирается центральный угол, растет и этот угол, и наоборот. С уменьшением расстояния хорды от центра окружности длина хорды увеличивается.

Представления об изменяемости геометрических образов, о зависимости одних геометрических величин от других значительно выигрывают, если при обучении по возможности применяются подвижные модели.

Таким образом, правильное изучение геометрии вносит значительный вклад в развитие идеи функциональной зависимости. Важно, чтобы педагог помнил об этом и умело использовал геометрический материал на уроках алгебры.

После того как ученики познакомятся с методом координат, разумно предложить им упражнения по составлению таблицы значений данного алгебраического выражения (функции одной переменной), а затем потребовать построить соответствующий график. Конечно, для таких упражнений можно использовать простейшие функции — линейные, некоторые виды функций второй степени. При выполнении таких упражнений учащиеся постепенно приобретают навыки строить графики простейших алгебраических функций. Они имеют дело с тремя различными способами выражения функциональной зависимости: от функции, заданной простейшими аналитическими средствами, переходят к табличному выражению функциональной зависимости, а от него к графическому.

В заключение заметим, что некоторые учителя успешно вводят понятие о функции в VII классе в конце темы о координатах и простейших графиках. Этот факт показывает, что при разработке новых программ понятие о функции можно ввести значительно раньше, чем это сделано в действующих ныне программах.

ГЛАВА IV
МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЧТЕНИЮ ФОРМУЛ

1. Об одной трудности усвоения начал алгебры

Язык школьного курса алгебры содержит для учащихся много новых терминов, обозначающих понятия (например: *коэффициент, степень, уравнение)*, много новых глаголов для выражения операций (например: *возвести, извлечь)*, новые слова для выражения отношений (например: *тождественны, равносильны*). В этом курсе вводится большое количество символов (например: a^2, $\sqrt{b}$, $y=ax^3$), с которыми связаны понятия или отношения между ними, а значит, и термины. Все это накладывает значительный отпечаток на изложение содержания курса алгебры в школьных учебниках, на речь учителя.

Очень трудно приходится иногда молодому преподавателю алгебры. Он замечает, что многие учащиеся не усваивают материал, с трудом запоминают формулировки предложений, знания у них непрочны, при выполнении упражнений они часто допускают ошибки. Каковы же причины таких неудач? Что мешает глубокому и прочному усвоению курса?

Одной из существенных причин неудач является то, что ученики не овладевают особенностями математической речи преподавателя, учебников и задачников по алгебре.

Обычно учитель диктует алгебраические выражения так: «a куб плюс b куб», «x в четвертой степени минус три x в пятой степени». Когда ученику приходится прочитать выражение, то он, естественно, читает так, как диктует преподаватель. Однако формулировки алгебраических предложений содержат и такие выражения: *сумма кубов двух чисел, куб суммы двух чисел, неполный квадрат разности двух чисел*. Далеко не всякий учитель каждоурочно применяет такие выражения в преподавании алгебры. В силу этого они не усваиваются, не запоминаются, не входят в словарный фонд каждого шестиклассника, что является одной из существенных причин, мешающих плодотворному усвоению алгебры.

В свете учения академика И. П. Павлова о высшей нервной деятельности происходит следующее: в VI классе некоторые учителя математики почти или совсем не обращают внимания на обогащение и развитие второй сигнальной системы учащихся, не вырабатывают новых, необходимых для дальнейшего обучения алгебре условных рефлексов. Такие словесные сигналы, как, например, «разность квадратов двух чисел», «квадрат разности двух чисел», не вызывают правильной реакции коры больших полушарий головного мозга у многих учащихся. Ложные реакции нередко вызывают также символические сигналы, как, например $(a-b)^3$, a^3-b^3; ученики не могут их правильно прочитать, искажают и путают смысл. Непонимание необходимости обогатить вторую сигнальную систему каждого школьника новыми сигналами или пренебрежение работой над этим обогащением создают для многих учащихся трудности при изучении алгебры.

2. Как преодолевать трудность

Чтобы избежать описанных недостатков в обучении, преподаватель должен прежде всего строго выполнять одно общеметодическое правило: каждое новое понятие и термин, соответствующий ему, следует изучать особенно тщательно, добиваясь, чтобы они глубоко были усвоены каждым учеником. Соблюдение этого правила особенно важно в VI—VII классах, но и в последующих классах о нем забывать нельзя. Нужно добиться, чтобы понятие, связанное с термином, а иногда и с символом, сделалось прочным достоянием каждого ученика, чтобы каждый ученик правильно представлял себе содержание понятия, т. е. совокупность тех необходимых существенных признаков, которые свойственны ему, и объем понятия, т. е. точно знал, в каких случаях оно применимо, а в каких нет [1].

Рекомендуется в повседневной работе на уроках применять не только обычное чтение алгебраических выражений и формул, но и то, которым пользуются в формулировках теорем, т. е. в одних случаях педагог диктует или читает: «a куб плюс b куб», в других: «сумма кубов чисел a и b», в третьих: «сумма третьих степеней букв a и b» и т. д. Вместе с тем он предъявляет требование, чтобы учащиеся читали алгебраические выражения и формулы тем и другим способом: если ученик прочитал: «x квадрат минус x куб», то ставится вопрос: «Как иначе прочитать то же выражение?» В это время большую роль играют алгебраические диктанты, с помощью которых начальные алгебраические термины, специальные выражения и символы становятся такими сигналами, на которые каждый ученик реагирует правильно и быстро. Основные цели алгебраических диктантов заключаются в том, чтобы обогатить вторую сигнальную систему учащихся настолько, насколько это необходимо для основательного изучения школьного курса алгебры, развить у них новую серию условных рефлексов, полезных для этого изучения, обогатить речь новыми для них алгебраическими терминами и специальными выражениями, ввести эти термины и выражения в активный словарный запас.

[1] См.: В. В. Репьев. Общая методика преподавания математики. Учпедгиз, 1958.

Алгебраические диктанты целесообразно начинать с самого начала изучения алгебры. Ознакомление с буквенными обозначениями чисел включают в простейшие диктанты. Материал для диктантов имеется в некоторых задачниках. Например, Н. А. Шапошников и Н. К. Вальцов в самом начале своего задачника поместили более 50 номеров упражнений, которые могут служить материалом для диктантов[1]. В различных местах задачника П. А. Ларичева также имеется материал для алгебраических диктантов[2]. Однако задачники дают только материал для упражнений и не дают методики использования его на уроках. Это побуждает детально осветить вопрос.

Диктанты проводятся на уроках алгебры в VI и в начале VII класса в течение 6—8 минут, пока ученики не овладеют необходимыми навыками правильно записывать продиктованные выражения и безупречно читать их. Место диктанта на уроке может быть различное: с него можно начать урок, им можно закончить; диктант можно провести после проверки выполнения учащимися домашней работы, а если материал диктанта непосредственно связан с темой урока, то он найдет место и в середине урока.

Приведем примеры диктантов, располагая их по возрастающей трудности.

Учитель записывает на доске число a.

— Какие числовые значения может принимать a? a может принимать любые значения из множества известных нам чисел. Буду диктовать алгебраические выражения, а вы записывайте их в тетрадях. Выходить к доске без вызова, по порядку, начиная с первой парты. Пишите:

— Квадрат числа a.

— Удвоенное число a.

— Куб данного числа.

— Утроенное данное число.

— Удвоенный квадрат числа a.

— Частное данного числа на четыре.

— Удвоенный куб числа a.

На доске должно быть:

Число a

1) a^2;	3) a^3;	5) $2a^2$;	7) $2a^3$.
2) $2a$;	4) $3a$;	6) $\frac{a}{4}$;	

Далее преподаватель показывает одно из записанных выражений и предлагает ученику прочитать его примерно так, как

[1] См.: Н. А. Шапошников и Н. К. Вальцов. Сборник алгебраических задач, ч. I. Учпедгиз, 1947.

[2] См.: П. А. Ларичев. Сборник задач по алгебре, ч. I. «Просвещение», 1967.

оно было продиктовано. После опроса одного-двух учеников он показывает другое выражение. Если чтение какого-либо выражения затрудняет некоторых учеников, то к нему возвращаются вновь.

Диктант и последующее чтение записанных выражений проводятся энергично, живо. На все это затрачивается около 7 минут.

В содержание диктанта следующего урока включаются те выражения, запись и чтение которых вызвали затруднения в прошлый раз; выражения несколько усложняются.

На доске — число m.

— Пишите: Утроенный квадрат числа.

— Удвоенный куб числа.

— Сумма квадрата числа с этим удвоенным числом.

— Разность между кубом числа и утроенным данным числом.

— Четвертая степень числа.

— Найдите числовое значение последнего выражения, если $m=2$, $m=3$, $m=\frac{1}{2}$.

Затем проводится чтение записанных выражений. Ученики читают примерно так, как диктовал преподаватель.

Обучая чтению алгебраических выражений, преподаватель обращает внимание на то, что чтение начинается с последнего по порядку результата действия, и знакомит учеников со следующими определениями:

а) Выражение называется суммой, если последнее по порядку действие — сложение.

б) Выражение называется разностью, если последнее по порядку действие — вычитание.

в) Выражение называется произведением, если последнее по порядку действие — умножение.

г) Выражение называется частным, если последнее по порядку действие — деление.

д) Выражение называется степенью, если последнее по порядку действие — возведение в степень.

То или иное определение применяется к чтению заданного выражения; определение может быть уже неприменимо к выражению, полученному из заданного путем тождественных преобразований. Эти определения — ключи к полному чтению выражений. Если выражение является алгебраической суммой и читается по слагаемым, то определения применяются к чтению не всего выражения, а отдельных слагаемых. Например, выражение

$$(a+b)^3-\frac{a^2+b^2}{ab}+(a+b)b$$

читается так: «куб суммы чисел a и b, минус частное суммы квадратов этих чисел на произведение их, плюс произведение суммы чисел a и b на число b».

Постепенно содержание диктантов усложняется по линии увеличения числа букв, входящих в выражения, и главным образом по линии усложнения структуры выражений.

Преподаватель записывает на доске:

a	b
1-е число	2-е число

и диктует:

— Квадрат суммы двух чисел.

— Сумма квадратов двух чисел.

— Произведение первого числа на второе.

— Произведение суммы двух чисел на первое число.

— Произведение разности между первым и вторым числами на второе число.

— Удвоенное произведение первого числа на второе.

— Квадрат разности двух чисел.

— Разность квадратов этих чисел.

— Найдите числовые значения двух последних выражений, если: 1) $a=5$, $b=1$; 2) $a=12$, $b=4$; 3) $a=0{,}5$, $b=0{,}4$.

В последний период проведения алгебраических диктантов учитель диктует более сложные выражения почленно.

Приводим примеры:

x	y
1-е число	2-е число

— Буду диктовать почленно. Пишите:

— Квадрат первого числа... плюс утроенное произведение первого числа на второе... минус куб второго числа.

— Куб первого числа... минус произведение первого числа на квадрат второго... плюс удвоенный квадрат второго числа.

— Утроенное произведение квадрата первого числа на второе... плюс утроенное произведение квадратов первого и второго чисел... минус куб суммы двух чисел.

— Куб разности первого и второго чисел... плюс произведение суммы двух чисел на их разность... минус квадрат разности двух чисел.

a	b	c
1-е число	2-е число	3-е число

— Сумма квадратов трех чисел.

— Квадрат суммы трех чисел.

— Произведение суммы кубов первых двух чисел на сумму квадратов второго и третьего чисел.

— Частное суммы кубов трех чисел на удвоенное произведение тех же чисел.

— Частное куба суммы трех чисел на квадрат разности первого и второго чисел.

Материалом для диктантов могут служить и формулы. В таком случае педагог диктует одну часть, затем другую часть формулы. Приведем пример:

x	y	z
1-е число	2-е число	3-е число

Записать:

1) *Сумма квадратов первого и второго чисел равна утроенному кубу третьего числа.*

2) *Квадрат суммы трех чисел больше удвоенного произведения этих чисел.*

3) *Сумма квадратов трех чисел меньше утроенного куба первого числа.*

4) *Разность между удвоенным кубом первого числа и кубом второго числа больше или равна половине куба третьего числа.*

5) *Частное квадрата первого числа на сумму кубов второго и третьего чисел меньше или равно утроенному произведению квадратов второго и третьего чисел.*

Опыт показывает, что систематическое проведение диктантов помогает ученикам освоить терминологию, символику и многие алгебраические понятия.

3. Более сложные диктанты

Готовясь к изучению формул умножения, полезно проводить такие алгебраические диктанты, когда вместо отдельных чисел, каждое из которых обозначено одной буквой, даются более сложные выражения. Цель таких упражнений заключается в том, чтобы ученики правильно записывали под диктовку, и в том, чтобы они научились безошибочно выполнять преобразования и упрощения полученных выражений. В случае надобности можно использовать продиктованные выражения и для тренировки в чтении их; читать следует те выражения, которые непосредственно записаны под диктовку, а не те, которые получены после упрощения. Поясним это одним примером.

$3a^2$	$4a^3$
1-е выражение	2-е выражение

— Пишите: Сумма квадратов двух выражений. Упростить записанное.

— Утроенное произведение квадрата первого выражения на второе. Упростить.

— Учетверенное произведение первого выражения на квадрат второго.

— Произведение суммы двух выражений на их разность.

— Разность кубов двух выражений.

Перед изучением формул умножения некоторые учителя удачно практикуют такие упражнения: в таблице в первой ее строке записывают два числа, обозначенные буквами, и в символическом изображении те операции, какие надо выполнить над ними, а в двух левых столбцах под числами фиксируют те частные числовые и буквенные значения, которые принимают эти два числа. От учащихся требуется правильно заполнить остальные столбцы.

Вот два примера таких таблиц:

Таблица 2

a	b	a^2	ab	$2ab$	b^2
$3x$	2				
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}y$				
m^2	m^3				
$4n^3$	$3n^2$				
$0{,}5n^4$	$0{,}1n^8$				

Таблица 3

x	y	x^2	y^3	xy^2	x^2y
$2a$	1				
3	b^2				
$4a$	a^3				
m^2	m^4				
$\frac{1}{2}n$	n^5				

Основное значение работы с таблицами заключается в том, чтобы научить школьников под буквами a и b, x и y разуметь любые числа и выражения, правильно выполнять над ними те операции, которые входят как составные части в формулы умножения. Работа с заполнением таблиц дополняет ранее описанные устные диктанты, но не заменяет их, ибо не помогает уничтожить разрыв между словесным чтением выражений и формул и их записью в символах.

Согласно программе тождества

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

отнесены в VII класс с целью разгрузки курса VI класса. Алгоритма деления многочлена на многочлен нет в программах восьмилетней школы. Тождества рассматриваются как формулы умножения.

Приступая к изучению указанных преобразований, необходимо познакомить учащихся со смыслом выражений: *неполный квадрат разности двух чисел, неполный квадрат суммы двух чисел.*

Для усвоения новых алгебраических терминов нужно провести соответствующие диктанты. Разъяснив, какой смысл следует вкладывать в только что приведенные выражения, учитель диктует:

m	n
1-е число	2-е число

Записать:

1) *Квадрат суммы двух чисел.*
2) *Квадрат суммы двух чисел в развернутой форме.*
3) *Неполный квадрат суммы двух чисел.*
4) *Квадрат разности двух чисел в развернутой форме.*
5) *Неполный квадрат разности двух чисел.*

Затем ученики читают записанные выражения.

На следующем уроке аналогичные упражнения повторяются, при этом берутся два других выражения, например x^3 и $2x$.

4. Дополнительные замечания

Уяснив основные цели алгебраических диктантов и методику их проведения, преподаватель, пользуясь приведенными примерами, легко может составить достаточное количество упражнений и включить их в уроки.

Диктанты, проводимые с постепенно нарастающим темпом и втягивающие в работу всех учеников класса, вызывают заинтересованность и выполняются охотно, с подъемом.

Умение записывать под диктовку достаточно сложные алгебраические выражения, а также безупречно читать их свидетельствует о значительных достижениях ученика, об успешном усвоении курса алгебры. Учитель может ставить отметки за такие упражнения.

Некоторые преподаватели не решаются применять диктанты в своей практической работе или используют их далеко недостаточно, мотивируя это тем, что в VI классе мало уроков алгебры и не хочется тратить драгоценное время на диктанты. А ведь они займут в общей сложности около 3—4 уроков. Такой расход учебного времени с избытком будет возмещен в VI классе при изучении формул умножения, а успехи каждого ученика станут значительно лучше.

Прямые и опосредствованные результаты диктантов заключаются в том, что учащиеся легче и прочнее усваивают многие формулировки алгебраических теорем, в частности быстро и прекрасно овладевают формулировками теорем о формулах умножения и решают примеры, допуская значительно меньшее количество ошибок, легче и глубже усваивают главу о разложении алгебраических выражений на множители, особенно ту ее часть, где разложение опирается на формулы умножения. Это подготовляет лучшее усвоение тождественных преобразований алгебраических дробей, решение уравнений и систем уравнений. Положительное влияние диктантов сказывается и на изучении некоторых тем в VIII классе, например формул решений квадратных уравнений, решения некоторых видов задач путем составления уравнений и систем уравнений.

Чтобы показать, как велико значение алгебраических диктантов, приведем пример. В одной из школ г. Горького учитель давал урок на тему «Формула умножения $(a+b)^2$». На уроке присутствовали несколько преподавателей математики. Учащиеся легко установили формулу, повторили ее обоснование при других обозначениях чисел, самостоятельно и без ошибок дали словесную формулировку теоремы. Никто ни разу не затруднился и не ошибся. Довольно хорошо формулу применяли к решению примеров.

В процессе методического разбора урока выяснилось, что успешное проведение его обеспечено алгебраическими диктантами.

Многие учителя успешно применяют алгебраические диктанты в практической деятельности. Развитые выше методические положения и рекомендации оправданы практикой в ряде школ.

ГЛАВА V
ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Что затрудняет решение задач с помощью составления уравнений и как преодолеть эти затруднения

Наблюдения показывают, что составление уравнений по задаче вызывает затруднения у многих учащихся не только в восьмилетней, но и в средней школе.

Как и при решении многих методических вопросов, полезно уяснить и в этом разделе те трудности, которые возникают у школьников, наметить пути и способы их преодоления. Что же затрудняет школьников?

Решению задач путем составления уравнений предшествует обучение решению арифметических задач. Методы решения задач в арифметике отличны от методов решения задач в алгебре. Однако между теми и другими много общего. Решение задач в курсе арифметики является хорошей подготовкой к составлению уравнений. И нередко трудности, испытываемые при решении задач в алгебре, являются следствием того, что учащиеся имеют недостаточные навыки решения арифметических задач.

Значит, чтобы преодолеть некоторые затруднения в решении задач путем составления уравнений, следует поднять уровень умений и навыков в решении арифметических задач. Как улучшить эти умения и навыки? Детальный ответ на этот вопрос выходит за пределы нашей книги. Ограничимся некоторыми указаниями. Основным средством для приобретения умения решать задачи являются подготовительные упражнения. Целесообразно начинать их с первых уроков арифметики в V классе и продолжать заниматься ими в течение длительного периода. Общая цель таких упражнений заключается в последовательном и постепенном преодолении затруднений в решении различных видов арифметических задач, в целесообразном обогащении второй сигнальной системы новыми необходимыми сигналами, в развитии новых полезных условных рефлексов.

В процессе подготовительных упражнений полезно развивать навыки в составлении числовых выражений. Такие навыки в дальнейшем облегчат составление буквенных выражений и уравнений [1].

Иногда ученики не могут составить уравнение по условию задачи или получают неверное уравнение потому, что не пони-

---

[1] В. В. Репьев. Подготовительные упражнения к решению составных арифметических задач. Сб. ст. «В помощь школе», вып. II. Изд. Горьковского пединститута, 1959.

мают задачи, вкладывают ложный смысл в текст ее. Учителю приходится наблюдать, как некоторые учащиеся неправильно истолковывают выражения «больше в 2 раза» и «больше на 2», «меньше в 3 раза» и «меньше на 3». Наблюдаются случаи, когда некоторые учащиеся неверно понимают слова «одновременно», «позже», «раньше», «скорость» и др.

Значит, непонимание текста задачи или части его является одним из препятствий, мешающих решению задач путем составления уравнений.

Основным средством к устранению этого недостатка в знаниях учеников является система целесообразно подобранных упражнений, в результате выполнения которых указанные выше и подобные им выражения становятся надежными сигналами второй сигнальной системы каждого ученика, помогают им быстрее понимать задачу. Об этих упражнениях будет речь ниже.

В основе каждой математической задачи лежит одна, а чаще несколько функциональных зависимостей. Например, задача: *Поезд за три часа прошел 126 км. В какое время этот поезд пройдет 420 км, если будет идти с той же скоростью?* — основана на том, что путь, проходимый равномерно движущимся телом, пропорционален средней скорости и времени движения.

Знание функциональных зависимостей, лежащих в основе алгебраических задач, дает ключ к решению, незнание их является большим препятствием при составлении уравнений.

Чтобы преодолеть затруднения, вызываемые незнанием функциональных зависимостей, необходимо изучить эти зависимости. Может показаться, что число их очень велико и что все их охватить невозможно. Действительно, зависимостей много, но их использование ограничивается видом уравнений или систем, которые на определенном этапе обучения можно применить.

Для успешного решения задач необходимо добиться, чтобы ученики хорошо разбирались в тех функциональных зависимостях, которые лежат в основе конкретных задач. Значит, надо вести преподавание алгебры так, чтобы эти функциональные зависимости стали известны учащимся. Этого можно достичь также с помощью подготовительных упражнений.

Задача представляет собой ряд суждений на определенную тему, выраженных на родном языке учащихся. В процессе составления уравнения или системы их эти суждения переводят на язык алгебраических выражений. Этот перевод, по признанию методистов и учителей, составляет одну из значительных трудностей. Если учитель желает добиться, чтобы школьники хорошо составляли уравнения или системы уравнений, он должен научить их переводить суждения с родного языка на язык алгебраических символов и обратно.

Только многократные упражнения в подобных переводах позволяют рассчитывать на то, что ученики смогут быстро записывать задачи с помощью алгебраических символов, правильно истолковывать алгебраические выражения и читать их на родном языке. Такие переводы рекомендуется включать в подготовительные упражнения.

В методической литературе по алгебре встречаются мнения, что нельзя указать общий путь решения задач с помощью составления уравнений или их систем. Так, например, И. И. Чистяков утверждал, что «определенных правил для составления уравнения из условий задач нет», что «общего правила для составления уравнения, пригодного для всех случаев, дать невозможно»[1].

Такое положение, когда ни автор учебника, ни учитель не указывают общих правил составления уравнений по текстам задач и даже уверены, что таких приемов не существует, не может способствовать успешному развитию педагогического процесса в интересующем нас вопросе.

Однако классики математики — Ф. Виет, Р. Декарт, И. Ньютон — полагали, что имеется общий принцип, которым пользуются при решении задач составлением уравнений. Он заключается в следующем: выясняют, какие величины можно приравнять; затем вводят обозначение неизвестной; пользуясь данными и обозначением неизвестной, составляют выражения для приравниваемых величин; соединив их знаком равенства, получают уравнение.

Такие высказывания встречаются и в методической литературе.

Таким образом, общий метод решения задач путем составления уравнений существует. Таким методом является особая форма алгебраического анализа. Это положение развивается в главе IX.

2. Организация подготовительных упражнений

Подготовительные упражнения, независимо от их прямых целей, имеют большое значение при изучении основ алгебры: они интересны с точки зрения политехнического образования, являются сильным средством для развития мышления и мощным средством предупреждения формального усвоения материала. Неизбежная затрата времени на их выполнение вполне целесообразна и служит общему подъему математической культуры учеников. Израсходованное на выполнение упражнений время с избытком окупится, как только учащиеся приступят к изучению линейных уравнений и их систем. Подготовительные упражнения проводятся в VI и VII классах, а в случае надобности и в VIII классе.

Тематика подготовительных упражнений определяется функ-

[1] И. И. Чистяков. Методика алгебры. Учпедгиз, 1934.

циональными зависимостями, которые кладутся в основу задач. Основные темы упражнений таковы: разностное и кратное отношение чисел, зависимость между компонентами и результатами действий, изменение результатов действий при изменении компонентов, зависимость между ценой, количеством товара и стоимостью его, структура целого числа в десятичной системе счисления, структура обыкновенной дроби и изменение ее с изменением числителя и знаменателя, зависимость между путем, скоростью и временем при равномерном движении, зависимости, связанные с работой, наполнением бассейнов, некоторые метрические соотношения в геометрии. В подготовительные упражнения могут быть включены и другие темы, например расчеты шкивов, рычагов.

В основном упражнения группируются по темам. Работа над упражнениями каждой темы ведется до выработки прочных навыков. К наиболее трудным темам можно возвращаться несколько раз. В заключительной работе уместно использовать различные сюжеты.

Подготовительные упражнения можно начать уже при изложении рациональных чисел, включить их во многие уроки алгебры VI класса, чередуя с алгебраическими диктантами. Упражнения продолжаются в VII классе в первой четверти учебного года, а в случае надобности и дальше. В одних случаях упражнения могут быть непосредственно связаны с темой урока, например, когда урок отводят решению задач путем составления уравнений; в других случаях они не будут иметь непосредственной связи с темой урока. Им можно отвести первые минуты урока или отнести их на конец урока. Приведенные дальше подготовительные упражнения сгруппированы и распределены по занятиям, причем каждое занятие рассчитано на 6—8 минут.

При выполнении упражнений делаются краткие записи в форме таблиц на классной доске. Каждый ученик записывает их в тетради. Записи делаются под своеобразную диктовку, когда учитель читает задачу. Каждый раз учитель дает форму таблицы, которая заполняется.

При выполнении упражнения, как правило, не требуется упрощать полученные выражения и не обязательно решать составленные уравнения. На таких уроках целесообразно задавать дополнительные вопросы, требующие нахождения числового значения алгебраического выражения, установления допустимых значений букв, входящих в выражение. Обычно ответы на дополнительные вопросы не должны приводить к письменным вычислениям. Можно предложить классу решить полученное уравнение, если это решение выполняется устно.

Решение учеником достаточно сложных упражнений свидетельствует о его серьезных достижениях в изучении алгебры. Поэтому учитель имеет возможность оценить работу ученика

Подготовительные упражнения проводят в быстром темпе. Для выполнения каждой задачи вызывается отдельный ученик. Наблюдения показывают, что такая организация работы повышает у школьников интерес к занятиям.

Ниже приведены примерные разработки некоторых тем по отдельным занятиям.

3. Зависимость величины дроби от числителя и знаменателя

В некоторых задачах на составление уравнений используется структура обыкновенной дроби, идет речь о взаимно обратных числах и различных операциях над ними. Для уяснения зависимостей между компонентами этих величин полезны подготовительные упражнения.

1-е занятие. 1) *Числитель дроби равен p, а знаменатель на 2 единицы больше числителя. Написать дробь. Какие значения может принимать p?*

2) *Знаменатель дроби равен q, а числитель на 5 меньше знаменателя. Написать дробь. Какие значения может принимать q?*

3) *Записать дробь, если числитель ее на 1 меньше числа a, а знаменатель на 1 больше того же числа.*

4) *Найти выражение для дроби, если числитель ее на 2 больше числа b, а знаменатель в 2 раза больше того же числа.*

5) *Числитель дроби на 5 меньше квадрата числа a, знаменатель на 4 больше куба того же числа. Записать дробь.*

2-е занятие. Перед выполнением упражнений восстанавливается в памяти учащихся понятие о взаимно обратных числах.

1) *Дано выражение:* $\frac{8}{8-c}$. *При каких значениях c выражение имеет смысл? Написать дробь, обратную данной.*

2) *Числитель дроби равен 5, знаменатель на k больше числителя. Написать:* а) *эту дробь,* б) *обратную дробь.*

3) *Знаменатель дроби равен 20, числитель на m меньше знаменателя. Выразить сумму этой дроби и обратной ей.*

4) *Числитель дроби на a больше 10, знаменатель на a меньше 10. Найти разность между этой и обратной дробью.*

5) *Числитель дроби на a больше квадрата числа b, знаменатель на a меньше удвоенного числа b. Написать частное этой дроби на обратную ей.*

В процессе выполнения упражнений результаты записываются в таблице:

Таблица 4

Числитель	Знаменатель	Дробь	Обратная дробь	Результат действия

3-е занятие. 1) *Дана дробь* $\frac{x}{y}$. *Из нее получена другая дробь путем увеличения числителя на* 2. *Какая из дробей больше? На сколько больше?* $(x>0, y>0)$.

2) *Из дроби* $\frac{x}{y}$ *получена другая дробь путем увеличения знаменателя на* 1. *Какая из дробей меньше? На сколько меньше?* $(x>0, y>0)$.

3) *Дана дробь* $\frac{m}{n}$. *Другая дробь получена из данной путем увеличения числителя дроби на* 3 *и уменьшения знаменателя на* 4. *Какая из дробей больше? На сколько больше?* $(m>0, n>0)$.

4) *Числитель дроби на* 4 *меньше знаменателя. Написать:* а) *дробь,* б) *обратную дробь,* в) *сумму этих дробей.*

5) *Числитель дроби на* a *больше знаменателя. Написать сумму этой и обратной дроби.*

4-е занятие. 1) *Числитель дроби на* 2 *меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить на* 1, *то получится дробь, равная* $\frac{3}{4}$. *Составить уравнение.*

2) *Числитель дроби на* 1 *больше знаменателя. Сумма этой и обратной дроби равна* $2\frac{1}{12}$. *Написать уравнение.*

3) *Знаменатель дроби на* 2 *меньше числителя. Разность между этой и обратной дробью равна* 2,1. *Составить уравнение.*

4) *Знаменатель дроби на* 2 *больше числителя. Если каждый из членов дроби увеличить на* 5, *то получится дробь* $\frac{4}{5}$. *Составить уравнение.*

4. Натуральные двузначные и трехзначные числа

На составление уравнений встречаются задачи, в которых идет речь о двузначных и трехзначных числах десятичной системы и различных операциях над ними. Уместны следующие подготовительные упражнения.

1-е занятие. 1) *Напишите число, содержащее* 7 *десятков и* a *единиц.*

Если упражнение вызовет затруднение, то целесообразно поставить вопросы: а) *Сколько единиц содержит десяток?* б) *Сколько единиц в семи десятках?* в) *Сколько всего единиц в числе?* Аналогичные вопросы уместны и в других упражнениях, когда ученики встретят затруднения при записи чисел.

2) *Напишите число, состоящее из* a *десятков и* 5 *единиц.*

3) *Число содержит* a *десятков и* b *единиц. Как написать число?*

4) *Напишите число, имеющее z десятков. Какие числовые значения может принимать z?*

5) *Записать число, содержащее x десятков и y единиц. Какие значения может принимать y? x?*

2-е занятие. 1) *Напишите число, содержащее a сотен. Какие значения может принимать a?*

2) *Запишите число, имеющее a сотен и c единиц.*

3) *Число содержит x сотен и y десятков. Как записать число?*

4) *В числе x сотен, десятков и z единиц. Написать число.*

5) *Число содержит m десятков и n единиц. Написать число и сумму чисел, выраженных цифрами этого числа.*

6) *В числе m сотен, n десятков и p единиц. Записать число и сумму чисел, выраженных его цифрами.*

Результаты ученики записывают в таблицу:

Таблица 5

Число сотен	Число десятков	Число единиц	Число	Сумма цифр

3-е занятие. Возьмем какое-либо двузначное число, например 75. Переставим цифры его. Получим 57. Это число имеет обратный порядок цифр по сравнению с числом 75.

1) *Дано целое число $10a+b$. Сколько в нем десятков? Сколько единиц? Запишите число с обратным порядком цифр.*

2) *В числе c десятков, d единиц. Напишите это число. Напишите число с обратным порядком цифр.*

3) *Дано целое число $100m+10n+q$. Напишите число с обратным порядком цифр.*

4) *Число имеет x сотен и z единиц. Запишите:* а) *это число,* б) *число с обратным порядком цифр,* в) *сумму цифр этого числа.*

5) *Число содержит p сотен, q десятков, s единиц. Запишите:* а) *это число,* б) *число с обратным порядком цифр,* в) *сумму цифр числа.*

4-е занятие. 1) *В двузначном числе число десятков на 1 больше числа единиц. Отношение данного числа к сумме его цифр равно 6. Написать уравнение.*

2) *В двузначном числе число единиц на 4 больше числа десятков. Произведение данного числа на число с обратным порядком цифр равно 765. Составить уравнение.*

3) *В двузначном числе число десятков на два больше числа единиц. Сумма этого числа с числом, имеющим обратный порядок цифр, равна 44. Написать уравнение.*

4) *Разность между двузначным числом, у которого единиц*

на 1 меньше числа десятков, и числом с обратным порядком цифр равна 9. Написать уравнение.

Результаты записываем в таблице.

Таблица 6

Десятки	Единицы	Число	Число с обратным порядком цифр	Уравнение

5. Зависимость между работой, силой и временем

Среди задач на составление уравнений встречаются такие, в которых идет речь о зависимости работы от времени и от силы. К ним примыкают так называемые задачи о бассейнах. Уместны упражнения, подготовляющие решение этих задач.

1-е занятие. 1) *Рабочий может сделать 140 деталей за 7 ч. Сколько деталей может сделать рабочий за 3 ч? за t часов?*

2) *Рабочий может сделать несколько деталей за t часов. Какую часть работы он выполнит за 1 ч? за 3 ч? за k часов?*

3) *Комбайн может убрать поле за a часов. Какую часть поля он уберет за t часов? за $(t+3)$ часов? $(t<a,\ t+3<a)$.*

4) *Одним трактором можно вспахать поле за c дней, другим за $c+2$ дня. У какого трактора производительность работы выше и на сколько выше?*

2-е занятие. 1) *Бассейн для плавания наполняется за 10 ч. Какая часть бассейна наполнится за 1 ч? за q часов? $(q<10)$.*

2) *Наполненный бассейн может опорожниться за m часов. Какая часть бассейна опорожнится за 2 ч? за 30 мин? за q часов? $(q<m)$.*

3) *Одна машинистка может перепечатать рукопись за 10 дней, другая за 12. Какую часть рукописи они перепечатают, работая одновременно, за день? за t дней?*

4) *Одна машинистка может перепечатать рукопись за n дней, другой нужно для выполнения этой работы на 2 дня меньше. Какую часть рукописи они перепечатают, работая одновременно 2 дня? t дней?*

3-е занятие. 1) *С помощью одного крана можно выгрузить баржу за 7 дней, а с помощью другого за 10 дней. Какую часть баржи выгрузят оба крана, работая одновременно 2 дня? t дней?*

2) *С помощью одного крана можно выгрузить баржу за 12 дней, с помощью другого за 10 дней. В какое время будет выгружена баржа при одновременной работе обоих кранов?*

3) *Одна машинистка может перепечатать рукопись за n дней, другой нужно для этого на 2 дня больше. В какое время будет*

перепечатана рукопись, если обе машинистки будут работать одновременно?

4) *Аквариум можно наполнить водой через один кран за а мин, через другой за b мин. В какое время наполнится аквариум при одновременном действии обоих кранов?*

5) *Составить задачу, решение которой сводится к следующему выражению:*

$$\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}.$$

4-е занятие. 1) *Через один кран чан наполняется за 20 мин, через другой опоражнивается за 30 мин. Сколько воды прибудет в чане, если одновременно открыть оба крана на 5 мин? на t минут?*

2) *Через один кран чан наполняется в t минут, через другой кран наполненный чан опоражнивается на 5 мин дольше, чем через первый кран наполняется. В какое время пустой чан наполнится, если одновременно открыть оба крана?*

3) *Наполненный бассейн через одну трубу может опорожниться за t часов, через другую трубу пустой бассейн может наполниться в* $\frac{t}{2}$ *часов. В какое время наполненный бассейн опорожнится при одновременном действии обеих труб?*

4) *Составьте задачу, решение которой приводит к следующему выражению:*

$$\frac{1}{\frac{1}{e}-\frac{1}{f}}.$$

5-е занятие. Требуется составить уравнения для следующих задач:

1) *Один рабочий может выполнить некоторую работу в* 10 *дней. Два рабочих могут выполнить ту же работу в* 6 *дней. В какое время второй рабочий может выполнить ту же работу?*

2) *Машинистка может перепечатать рукопись за* 12 *ч. Две машинистки могут выполнить ту же работу за* 6 *ч* 40 *мин. В какое время вторая машинистка может перепечатать всю рукопись?*

3) *Первый кран наполняет аквариум за* 9 *мин, через второй кран аквариум опоражнивается. При одновременном действии обоих кранов пустой аквариум наполняется за* 35 *мин. В какое время второй кран может опорожнить наполненный аквариум?*

4) *Придумайте задачи, решение которых приводит к уравнению:*

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\right)\cdot 2{,}4=1.$$

6. Равномерное движение

Особое значение имеют упражнения, в которых идет речь о равномерном движении.

1-е занятие. 1) *Пионерский отряд идет со средней скоростью 3,5 км. Какой путь пройдет отряд за 4 ч? за t часов?*

2) *Связной на велосипеде проехал 25 км. С какой скоростью ехал связной, если он находился в пути 2,5 ч? t часов?*

3) *Связной на мотоцикле проехал 45 км. Сколько времени он находился в пути, если средняя скорость связного 60 км/ч? v километров в час?*

4) *Прочитать правила, выражаемые каждым из следующих равенств:*

$$\text{а) } s=vt, \qquad \text{б) } v=\frac{s}{t}, \qquad \text{в) } t=\frac{s}{v},$$

если s — путь, пройденный телом, t — время движения, v — скорость.

2-е занятие. 1) *Брат и сестра вышли одновременно из дома в противоположных направлениях. Брат идет со скоростью 68 м/мин, сестра 60 м/мин. Какое расстояние будет между ними через 3 мин? через t минут?*

2) *Брат и сестра вышли одновременно из дома в одном направлении. Брат идет со скоростью 70 м/мин, а сестра 60 м/мин. Какое расстояние будет между ними через 4 мин? через t минут?*

3) *Брат и сестра вышли из дома одновременно. Через 5 мин брат находился от дома на расстоянии s метров, а сестра — на расстоянии p метров ($s>p$). На сколько скорость движения брата превышает скорость движения сестры?*

4) *Одна моторная лодка, двигаясь со скоростью 12 км/ч, прошла s километров. Другая, двигаясь со скоростью 10 км/ч, прошла на 2 км больше, чем первая. Какая лодка находилась в пути дольше? на сколько дольше?*

5) *Придумать задачи, похожие на последнюю.*

3-е занятие. 1) *Расстояние между двумя городами равно a километрам. Из этих городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля, один со скоростью 40 км/ч, другой 50 км/ч. Через сколько часов автомобили встретятся?*

2) *Составить задачу, решение которой приводит к формуле:*

$$t=\frac{s}{500+700}.$$

3) *Из двух сел одновременно навстречу друг другу вышли две группы лыжников. Первая двигалась со скоростью v километров в час, скорость другой была на 2 км/ч больше, чем первой. Лыжники встретились через 1,5 ч. Найти расстояние между населенными пунктами.*

4) *Расстояние между двумя селениями равно 24 км. Из этих селений одновременно навстречу друг другу выехали велосипедисты с одинаковой скоростью. Составить уравнение для определения скорости велосипедистов, если они встретились через 40 мин. Решить уравнение устно.*

5) *Из двух штабов одновременно навстречу друг другу выехали связные, один на велосипеде, другой на мотоцикле. Связные встретились через 20 мин. Составить уравнение для определения скорости связного на велосипеде, если скорость мотоциклиста в 5 раз больше скорости велосипедиста, а расстояние между штабами 30 км.*

Результаты третьего занятия записываются в таблицу:

Таблица 7

Расстояние	Скорость 1-го	Скорость 2-го	Время	Выражение или уравнение

4-е занятие. 1) *Турист может пройти расстояние между двумя селениями за t часов. Какую часть расстояния он может пройти за 1 ч? за k часов? ($k<t$).*

2) *Один турист может пройти расстояние между двумя городами за a часов, другой за b часов. Туристы одновременно вышли из этих городов навстречу друг другу. На какую часть расстояния они сближаются за 1 ч? за t часов? Через сколько часов они встретятся?*

3) *Составить задачи, решение которых приводит к формуле:*

$$t=\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

4) *Поезд из А в В идет 7 ч. Другой поезд из В в А идет 5 ч. Через сколько часов после отправки поезда из В поезда встретятся, если поезд из В вышел на 2 ч позже, чем поезд из А?*

5) *Поезд из А в В идет t часов. Другой поезд из В в А идет q часов. Поезд из А вышел позже поезда из В на 2 ч. Через сколько часов после выхода поезда из А произойдет встреча?*

5-е занятие. 1) *Теплоход в стоячей воде имеет скорость v километров в час (собственная скорость). Скорость течения реки 4 км/ч. Какая скорость теплохода по течению реки? против течения? На сколько первая больше второй?*

2) *Теплоход по течению реки идет со скоростью c километров в час. Скорость течения реки 3 км/ч. Какова собственная скорость теплохода? Какова скорость против течения?*

3) *Спортсмен в стоячей воде плывет со скоростью v метров в минуту. Скорость течения реки q километров в час. Какое расстояние проплывет спортсмен по течению реки за 45 мин? против течения реки за 20 мин?*

4) *Пассажирский самолет в тихую погоду проходит расстояние между двумя аэродромами, равное a километрам, за 4 ч. Какое время потребуется самолету, чтобы пролететь тот же путь, если дует встречный ветер со скоростью c метров в секунду?*

Результаты 5-го занятия записываются в таблицу:

Таблица 8

Собственная скорость	Скорость по течению	Скорость против течения	Другие величины

6-е занятие. Учащиеся составляют уравнения.

1) *По Волге мимо пристани проплыл плот. Через 6 ч после этого от той же пристани отошел пароход вниз по Волге. Идя со средней скоростью 16 км/ч, пароход догнал плот через 2 ч после отхода от пристани. С какой скоростью плывет плот? Решить уравнение.*

2) *Из населенного пункта выехал грузовик со средней скоростью 30 км/ч. Спустя 1 ч из того же пункта и в том же направлении выехала «Победа» со скоростью 60 км/ ч. На каком расстоянии от населенного пункта «Победа» догонит грузовик?*

3) *Придумайте задачи, похожие на рассмотренные.*

4) *Два тела начали движение в одно и то же время из двух пунктов навстречу друг другу и встретились через 12 сек. Первое тело может пройти расстояние между пунктами за 0,5 мин. В какое время второе тело может пройти тот же путь?*

7. Заключение

Приведенные примеры подготовительных упражнений к решению задач путем составления уравнений или их систем при необходимости могут быть пополнены. Пополнение может идти по линии увеличения числа упражнений по темам, представленным в этой главе, а также по линии включения новых тем. Если преподаватель заметил, например, что учащиеся затрудняются в процентных расчетах, то целесообразно использовать упражнения на проценты. Иногда проводятся упражнения по темам, обусловленным применением того или другого физического закона,— расчеты, связанные с простейшими машинами, начатками калориметрии, оптики, электричества.

Многие педагоги широко используют в практике преподавания подготовительные упражнения описанного вида и добиваются хороших результатов в решении задач с помощью составления уравнений или их систем. По свидетельству педагога, применявшего подготовительные упражнения многие годы, ученики в период систематического изучения уравнений первой степени с одним неизвестным быстро овладевали решением задач. В порядке проверки значения подготовительных упражнений в письменную контрольную работу в VII классе он включал в каждый билет две задачи и как дополнительное задание давал третью задачу в двух вариантах. При решении третьей задачи требовалось только составить уравнение, так как не было времени закончить решение. Однако находились ученики, которые в течение урока успевали полностью решить три задачи. За правильное решение только одной задачи ставилась удовлетворительная оценка. Неудовлетворительных отметок, как правило, не было.

Подготовительные упражнения благотворно влияют на решение задач путем составления систем линейных уравнений и при решении задач на составление уравнений или систем уравнений в последующих классах.

В заключение заметим, что указанное использование подготовительных упражнений к изучению формул умножения и к решению задач с помощью составления уравнений служит примером того, как можно решать проблемы изложения такого материала, который обычно вызывает затруднения учащихся. Если педагог в своей практике устанавливает, что ученики усваивают некоторый материал с большим трудом, то, опираясь на свои наблюдения, следует тщательно проанализировать, что мешает усвоению. Затем на основе анализа разработать систему предварительных упражнений, позволяющих преодолеть трудности, провести подготовительные упражнения и проверить, какое влияние они оказали на усвоение материала. На основе такого эксперимента следует внести коррективы в систему упражнений. В этом заключается один из эффективных способов решения методических проблем.

РАЗДЕЛ II

МЕТОДИЧЕСКИЙ ОБЗОР ТЕМ КУРСА АЛГЕБРЫ

ГЛАВА VI
ВВЕДЕНИЕ В БУКВЕННУЮ СИМВОЛИКУ

1. Общий обзор темы

Первая тема программы алгебры называется «Алгебраические выражения»[1]. На ее изучение отводится примерно 12 часов. Тема содержит весьма небольшой материал: употребление букв для обозначения чисел, составление формул для решения задач, алгебраические выражения, буквенная запись законов арифметических действий, порядок действий и употребление скобок, числовое значение алгебраического выражения и составление таблиц числовых значений выражений. В теме нет понятий коэффициента и степени с натуральным показателем, как это было в предшествующих программах.

Объяснительная записка к программе указывает, что в процессе изучения арифметики, особенно заключительных тем ее, проводится подготовка к изучению начал алгебры: учащиеся знакомятся с буквенными обозначениями чисел, с простейшими числовыми и буквенными выражениями и формулами. Знакомство с буквенными обозначениями в курсе арифметики представляет интерес не только в отношении подготовки к изучению алгебры, но и с точки зрения обучения геометрии: уже в первых главах геометрии приходится длины отрезков обозначать буквами, выполнять действия над отрезками и записывать соответствующие выражения и формулы.

При правильном обучении ученики знакомятся со значительной частью содержания темы «Буквенные обозначения» еще до начала изучения алгебры. При изложении первой темы педагог систематизирует и углубляет материал, дает больше упражнений практического характера и, возможно, сэкономит несколько часов, чтобы использовать их при изучении более сложного материала.

Неумелый подход к введению буквенных обозначений таит

---

[1] Здесь и в дальнейшем имеются в виду «Программы восьмилетней школы по математике», утвержденные коллегией Министерства просвещения РСФСР в 1960 г.

опасность формального усвоения символики: ученик начинает оперировать буквами и не осознает, что под ними разумеются числа. Появляется недоумение, зачем потребовалась странная буквенная арифметика и зачем ее изучать.

Первые шаги ознакомления учащихся с буквенными обозначениями необходимо тщательно продумать; при этом следует наметить наиболее целесообразные методические подходы к вопросу, приложить все усилия к предотвращению формального усвоения материала.

История развития алгебры свидетельствует о том, что введение буквенной символики — трудный, сложный и длительный процесс. Если первые шаги в этом деле сделаны, вероятно, в III в. н. э. (Диофант из Александрии), то существенные достижения относятся ко второй половине XVI в. (Виет) и к первой половине XVII в. (Декарт). Потребовалось около тринадцати столетий, чтобы проблема получила удовлетворительное решение. В процессе развития алгебры буквы прежде всего использовали для обозначения неизвестных чисел, которые необходимо найти при заданных условиях. Это сравнительно нетрудный шаг: требованию задачи удовлетворяет определенное число, его временно и обозначают буквой. Что под буквой можно разуметь любое число некоторого множества чисел, является более трудным шагом: он требует высокой ступени абстракции. Этот шаг был сделан лишь во второй половине XVI столетия.

При обучении в школе прежде всего появляется обозначение буквой неизвестного числа, которое требуется найти. В начальной школе решаются задачи такого вида: *Определить* x, *если* $19+x=47$, *или* $12\cdot x=156$. Буквенное обозначение неизвестного числа усваивается постепенно без особых затруднений. Позднее буквой обозначают любое число из какого-либо известного учащимся множества чисел.

В учебной литературе по алгебре широко практикуется такой подход к введению буквенной символики: решают две-три арифметические задачи одного и того же вида, составляют числовые выражения, обращают внимание школьников на то, что рассуждения и строение числовых выражений совершенно одинаковы. Затем решают задачу такого же вида, но с буквенными данными. В результате получают первое буквенное выражение.

Далее рассматривают задачи еще 2—3 видов и составляют буквенные выражения.

Такой шаг к введению алгебраической символики нельзя признать лучшим: он требует длительных связанных между собою рассуждений, сложен, поглощает много учебного времени. Получаемые при решении задач буквенные выражения, как правило, не являются простейшими.

В методической литературе указываются и иные подходы к введению буквенных обозначений. В качестве первого шага рекомендуется применить буквенную символику для краткой записи законов арифметических действий — переместительных и сочетательных законов сложения и умножения, распределительного закона умножения относительно сложения [1].

Этот путь надо признать более приемлемым: он не требует длительных рассуждений, использует хорошо известный детям материал, демонстрирует значение буквенных обозначений для общей и краткой записи важных законов. Однако и здесь есть ряд отрицательных сторон: буквенные выражения получаются довольно сложными и входят в состав формул.

Встречается и такой подход к введению буквенных обозначений. Записи выражений четырех арифметических действий над числами служат исходным конкретным материалом, от них переходят к буквенным записям тех же действий. Такой подход к введению символики конкретен, прост, требует мало учебного времени, а поэтому наиболее приемлем.

Учитывая изложенные соображения, первые шаги в обозначении чисел буквами целесообразно осуществить по следующему плану: учащиеся знакомятся с буквенной записью суммы двух и трех слагаемых, применяют ее к выражению переместительного и сочетательного законов сложения; далее вводится запись разности двух чисел, произведения двух и трех чисел, общая запись переместительного, сочетательного и распределительного законов умножения; наконец, ученики знакомятся с записью частного. Попутно буквенные обозначения используются при решении задач. На первых уроках алгебры особенно часто следует отмечать, что под буквой разумеются числа определенного множества. Для закрепления школьникам предлагается назвать несколько значений, какие может принимать буква, тем или иным путем указать множество, которому принадлежат допустимые значения буквы.

2. Первые уроки алгебры

Естественно стремление педагога дать ученикам некоторое представление о том, какие проблемы рассматриваются в школьном курсе алгебры. Определить предмет алгебры нет возможности. Однако в беседе с классом можно указать на некоторые характерные вопросы, рассматриваемые в алгебре. Ее сопоставляют с курсом арифметики.

Вот примерное содержание такой беседы.

В арифметике мы изучали числа и действия над ними. При прохождении алгебры также будем изучать числа, познакомимся с новыми видами чисел, научимся выполнять действия над ними.

---

[1] И. И. Чистяков. Методика алгебры. ГУПИ, 1934.

При изучении арифметики иногда числа обозначали буквами, например: $x+5=12$, $x-7=20$. В курсе алгебры особенно широко применяется запись чисел буквами.

Ранее мы познакомились с величинами, с изменением величин, с зависимостью одних величин от других. В школьном курсе алгебры также уделяется значительное внимание изучению зависимости одних величин от других, причем эти зависимости выражаются более разнообразными способами, чем в арифметике. В арифметике уделялось большое внимание задачам. В курсе алгебры также решаются задачи. Мы познакомимся с новыми способами решения, более совершенными, чем арифметические.

В конце беседы полезно сообщить, что на фабриках и заводах, при строительстве электростанций и других сооружений, во многих областях практики алгебраические знания находят самое широкое применение. Вот почему в наших школах уделяется серьезное внимание изучению алгебры.

Введение обозначения буквой любого известного числа или любого числа некоторого множества должно опираться на конкретный арифметический материал. Занятия ведутся так, чтобы любой ученик всегда ясно представлял, что под буквами разумеются числа.

Учитель предупреждает, что нужно записывать выражения для сумм чисел; вычислять суммы не требуется.

Написать выражения для следующих сумм:

$$67 \text{ и } 39; \quad 2\frac{3}{5} \text{ и } 7\frac{5}{9}; \quad 0 \text{ и } 11{,}9.$$

Написать выражения для суммы двух чисел a и 9. *Под a можно разуметь любое известное нам число, например:* 18; 0; 0,75.

Написать выражение суммы чисел 7 *и b. Назвать несколько чисел, которые можно подставить в выражение вместо b.*

Записать суммы чисел a и b; x и y.

Какие числа можно подставить вместо x и y?

Под буквой можно разуметь любое число некоторого множества.

Таким же способом учитель знакомит с записью суммы трех слагаемых.

Теперь можно перейти к задачам, при решении которых получаются буквенные выражения.

1) *В классе* 19 *мальчиков и* 18 *девочек. Сколько учащихся в классе?*

2) *В классе a мальчиков и* 18 *девочек. Сколько учащихся в классе? Какие значения может принимать a?*

3) *В школе c мальчиков и d девочек. Сколько учащихся в школе? Какие значения могут принимать c и d?*

4) *Стороны треугольника равны a, b и c. Найти его периметр.*

Восстановив в памяти учащихся переместительный закон сложения и его формулировку, преподаватель показывает, как записать его кратко с помощью букв. Если обозначить первое слагаемое a, второе b, то получим:

$$a+b=b+a. \qquad (1)$$

Предлагает проверить равенство (1), когда 1) $a=31{,}4$; $b=9{,}85$; 2) $a=4\frac{5}{12}$; $b=\frac{7}{8}$; 3) $a=0$; $b=7$.

Обозначение чисел буквами дает возможность очень кратко записывать законы арифметических действий.

После повторения сочетательного закона сложения и его формулировки учитель показывает, что этот закон можно записать так:

$$a+(b+c)=(a+b)+c. \qquad (2)$$

Равенство (2) проверяют при заданных значениях a, b и c.

Так как на множестве чисел, известных учащимся, действие вычитания не всегда выполнимо, то при записях разностей следует обратить особое внимание на допустимые значения уменьшаемого и вычитаемого.

Учитель предлагает записать следующие разности: 100 и 77; 0,95 и 0,5; 9 и 0.

Запишите разность между числом a и числом 8. Приведите несколько чисел, которыми можно заменить a. Можно ли вместо a поставить 5? Какие числовые значения может принимать a, чтобы вычитание было выполнимо? ($a \geqslant 8$).

Запишите разность между числом 90 и числом b. Какие значения может принимать b, чтобы вычитание было выполнимо? ($b \leqslant 90$).

Запишите разность между числом c и числом d. Придумайте несколько пар чисел, которые можно подставить вместо c и d. Какие значения могут принимать c и d, чтобы вычитание было выполнимо? ($c \leqslant d$).

Мальчик имел a рублей. На покупку учебников он истратил b рублей. Сколько денег осталось у мальчика? Если a равно 1,5 руб., то какие значения может принимать b?

В классе m пионеров. Сколько учащихся не состоит в пионерской организации, если всего в классе n человек? Назовите несколько пар чисел, которые можно подставить вместо m и n. Какие числовые значения могут принимать m и n?

Такими же путями вводится буквенная запись произведения двух и трех сомножителей. При выполнении упражнений обращается внимание на два факта. Сомножитель, записанный цифрами, принято ставить на первом месте. Это достигается применением переместительного закона умножения. Знак умножения перед буквенным сомножителем принято опускать.

Буквенное выражение произведения используется для краткой записи переместительного и сочетательного законов умножения:

$$ab=ba; \tag{3}$$

$$a(bc)=(ab)c. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) проверяются для заданных чисел.

Особого внимания заслуживает распределительный закон умножения относительно сложения. Напомнить его можно путем двух различных решений одной и той же задачи. Пусть требуется решить задачу:

Основания двух прямоугольников равны 9 см и 6 см. Высота у них общая и равна 12 см. Найти выражение суммы площадей этих прямоугольников (рис. 1).

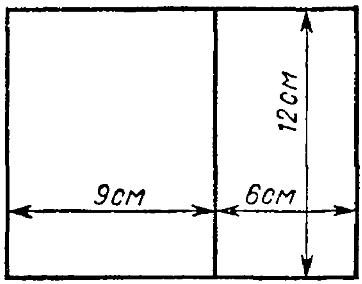


Рис. 1.

1-е решение:

1) $9+6$ (*см*);
2) $(9+6)\cdot 12$ (*кв. см*).

2-е решение:

1) $9\cdot 12$ (*кв. см*);
2) $6\cdot 12$ (*кв. см*);
3) $9\cdot 12+6\cdot 12$ (*кв. см*).

Итак, отвлекаясь от наименований, получаем:

$$(9+6)\cdot 12=9\cdot 12+6\cdot 12.$$

Вспоминается формулировка распределительного закона, а затем решается двумя способами следующая задача:

Основания двух прямоугольников равны a и b. Общая их высота равна c. Найти сумму площадей этих прямоугольников.

Решение задачи дает возможность записать распределительный закон так:

$$(a+b)c=ac+bc. \tag{5}$$

Равенство проверяется для различных значений букв.

Естественно вспомнить, как законы арифметики используются для упрощения устных и письменных вычислений. Вместе с тем ученики увидят примеры применения законов не только к двум или трем, а и к большему числу компонентов.

При буквенном изображении частного двух чисел обращается внимание на то, что частное можно записать двумя способами: $a:b$ и $\frac{a}{b}$ и что делитель не может принимать значение, равное 0.

3. Алгебраическое выражение и его числовое значение

В курсе арифметики учащиеся познакомились с понятием «арифметическое выражение», или «числовое выражение». На первых уроках алгебры это понятие расширяется: вводится понятие *алгебраическое выражение*, включающее в свой объем как вид арифметические выражения.

Приведя примеры выражений, преподаватель пояснит: алгебраическим выражением называется несколько чисел, соединенных знаками действий; числа могут изображаться и буквами; например, $a+5$, ab, $2 \cdot 0{,}8+0{,}6$ — примеры алгебраических выражений[1]. В выражение могут входить скобки, указывающие порядок действий, например: $(a+b)c$, $(a+b)(a-b)$. Выражение может содержать и одно число, например: m, $0{,}74$.

Алгебраическим выражением называется всякое число, обозначенное буквой или цифрами, а также несколько чисел, соединенных знаками действий (порядок действий может определяться и скобками)[2].

Учащиеся неоднократно записывали высказывания, что одно выражение равно другому. Примеры служат конкретным материалом для введения понятия о равенстве.

Высказывания о неравенстве выражений записываются с помощью знаков: $>$ (больше) и $<$ (меньше), например: $a+5>3$; $4<7+b$.

Чтобы избежать путаницы в чтении знаков $>$ и $<$, обращается внимание на то, что знак неравенства всегда обращен вершиной угла к меньшему выражению.

При введении понятия о допустимых значениях букв, входящих в выражения, вводятся знаки $\geqslant$ и $\leqslant$. Например, при рассмотрении вопроса, какое значение может принимать a в выражении $2a-10$, подмечается, что a может быть больше 5 или равно 5; при иных значениях a выражение не имеет смысла. Записывают: $a \geqslant 5$; читают: «a больше или равно 5». Вопрос, какие значения может принимать c в выражении $12-3c$, приведет к ответу: c меньше или равно 4. Записывают: $c \leqslant 4$.

Высказывания $a \geqslant 5$, $c \leqslant 4$ читают и так: «a не меньше 5», «c не больше 4». Однако ознакомление учащихся с таким чтением целесообразно отнести на более позднее время (в VIII классе).

Равенство или неравенство, выражающее зависимость между величинами, называется формулой. Например, равенства $ab=ba$, $N=2n+1$, $S=50t$ — формулы; первое из них выражает переместительный закон умножения, второе при целом n — любое нечетное число, третье — зависимость пути, пройденного поездом, от

---

[1] Имеются в виду арифметические действия.

[2] Разумеется, что множество чисел, входящих в выражение, конечно.

времени его движения при средней скорости 50 *км/ч*. Формула $pq = p_1q_1$ выражает закон рычага, если p и p_1 — силы, а q и q_1 — плечи рычага.

Учащиеся уже приобрели некоторый опыт в нахождении числовых значений буквенных выражений. Опираясь на опыт, следует ввести понятие о числовом значении алгебраического выражения. Термин «числовое значение» или просто «значение» выражения надо предпочесть распространенному в наши дни термину «числовая величина», потому что при изучении функций принято пользоваться термином «значение» функций.

С первых уроков алгебры уделяется большое внимание нахождению числовых значений алгебраических выражений. Это позволяет помнить, что в выражении под буквами разумеются числа того или иного множества. Упражнения по определению числовых значений алгебраических выражений предохраняют от формального пользования буквами. Буквам рекомендуется давать несколько значений. Это способствует подготовке взгляда на алгебраическое выражение как на один из видов функциональной зависимости. Заданные значения букв и найденные числовые значения выражения рекомендуется записывать в форме таблиц. Вместе с тем широко практикуются устные вычисления значений. Это позволяет увеличить число решаемых задач и способствует развитию навыков в устном счете. Пусть, например, требуется найти числовые значения выражения $12x+19$ при $x=0, \frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 9, 12, 18, 20$. Вычисления выполняются устно, а результаты записывают в таблице.

Таблица 9

x	0	$\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	9	12	18	20
$12x+19$	19	25	52	127	163	235	259

При определении числовых значений выражения $ab+3a$ учащиеся считают устно и заполняют таблицу 10.

Таблица 10

a	0	2	4	6	8	10
b	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
$ab+3a$						

Чтобы подчеркнуть мысль, что в алгебраическом выражении под буквами разумеются числа и что в зависимости от их значений меняется значение выражения, полезны упражнения следующего вида:

а) *Всегда ли* a *меньше* $a+5$?

б) *Всегда ли* $b+4$ *больше* 4?

в) *Может ли* $a+b$ *быть равно* b?

г) *Всегда ли* x *меньше* $3x$?

д) *Всегда ли* ab *больше* a?

Подобные упражнения распределяются на многие уроки, отводимые изучению алгебраических выражений, и постепенно, с развитием курса алгебры, усложняются.

Среди упражнений на нахождение числовых значений алгебраических выражений целесообразно предложить задачи с практическим содержанием и связанные с работой учащихся в мастерских. Такие задачи приведут к применению приближенных вычислений и к приближенному числовому значению выражения.

1) *Требуется склепать обруч, диаметр которого был бы равен* a *миллиметрам. Какой длины надо отрезать полосу, если на склепку надо затратить* b *миллиметров? Длина окружности больше длины диаметра приближенно в 3,14 раза.*

Вычислить числовое значение выражения, если $a \approx 168$ *мм,* $b \approx 10$ *мм.*

2) *Токарь при 8-часовом рабочем дне изготовлял в среднем по* m *деталей в день. При переходе на 7-часовой рабочий день токарь, улучшив работу, начал изготовлять по* $m+5$ *деталей в день. На сколько процентов повысилась производительность его труда?*

Вычислить, если $m \approx 100$.

3) *Составить выражение для решения задачи: найти* $p\%$ *числа* a.

Вычислить значение выражения, если $a \approx 724$ *и* $p = 12\%$.

4) *Найти число, если* $q\%$ *его равно* b.

Вычислить числовое значение выражения, если $b \approx 41{,}4$ *и* $q = 7{,}2$.

Работая над решением задач, целесообразно обратить внимание учащихся на роль получаемых выражений.

Алгебраические выражения кратко и ясно показывают общий способ решения всех задач определенного вида.

Алгебраическое выражение, составленное для решения общей задачи определенного вида, дает возможность решить всякую новую частную задачу такого же вида только при помощи одних вычислений. Когда на производстве приходится решать много задач одного и того же вида, часто пользуются общим решением — формулой.

Обращаем внимание на то, что для данного выражения можно подыскать много задач, решением которых служит это выражение.

Например, для $\frac{r}{v+w}$ можно дать задачу:

Два теплохода одновременно вышли навстречу друг другу из двух пристаней, отстоящих на r километров. Один теплоход идет со средней скоростью v километров в час, другой — w километров в час. Через сколько часов теплоходы встретятся?

Для того же выражения можно составить и другие задачи.

4. Порядок действий

В непосредственной связи с алгебраическим выражением и числовым значением его находится вопрос о порядке действий и применении скобок. Пока учащимся известно множество неотрицательных рациональных чисел и четыре действия над ними.

В вопрос о порядке действий не приходится вносить ничего существенно нового по сравнению с курсом арифметики. Дело сводится к повторению того, что известно учащимся, и, может быть, к некоторому уточнению первого правила.

В беседе целесообразно вспомнить понятия о прямых и обратных действиях, о действиях первой и второй ступени. Итоги беседы могут найти отражение в таблице:

Таблица 11

Действия	Первой ступени	Второй ступени
Прямые	Сложение	Умножение
Обратные	Вычитание	Деление

При решении примеров вспоминают правила о порядке действий.

1) В выражении (без скобок), где имеются действия только одной ступени, вычисления ведутся в порядке записи действий.

Это правило не всегда указывает наилучший порядок выполнения действий. Возможны отступления от него. Например, в выражениях

$$2\frac{5}{9}+1\frac{3}{4}+3\frac{4}{9}-\frac{1}{2}; \quad 1{,}25\cdot 3{,}14\cdot 8$$

целесообразно для упрощения производить вычисления не в порядке записи действий.

В алгебре первое правило не применяется в случае деления числа на произведение, например:

$$a:bcd. \qquad \text{(a)}$$

Если бы в делителе были записаны знаки умножения, то пришлось бы написать:

$$a:(b\cdot c\cdot d).$$

Поэтому выражение (а) следовало бы записать так:

$$a:(bcd).$$

Однако в правописании алгебраических выражений установилась следующая практика: при делении числа на произведение, в котором опущены знаки умножения, можно не заключать делитель в скобки, т. е. писать:

$$a:bcd.$$

Это ограничивает первое правило и устанавливает исключение из него. Об исключении можно сообщить учащимся и в рассматриваемой теме или же позднее — при изучении деления одночленов.

2) В выражении (без скобок), где имеются действия разных ступеней, сначала выполняются действия высшей, а затем низшей ступени. От этого правила иногда также можно отступать, однако отступления не дают возможности рационализировать вычисления. Если требуется отступить от порядка действий, предусмотренного правилом 2, и выполнить раньше действия низшей ступени, то применяют скобки.

3) В выражении со скобками сначала выполняют действия над числами, заключенными в малые скобки, затем в квадратные и т. д.

4) В выражении, где деление обозначено чертой, сначала выполняют действия с числами, расположенными над чертой, затем под чертой, и наконец производят деление. После введения понятия о степени, следует вернуться к вопросу о порядке действий.

Некоторые методисты рекомендуют в курсе алгебры отказаться от знака «:», как знака деления, и использовать для записи деления горизонтальную черту. Предложение заслуживает внимания: оно упрощает вопрос о порядке действий и избавит школьников от обычных недоразумений.

За последнее десятилетие интенсивно ведутся работы по изысканию путей целесообразной реформы школьной математики. В связи с этим было проведено много экспериментов в городских и сельских школах. На сегодня можно считать установленным, что начатки буквенных обозначений при умелом обучении доступны ученикам начальной школы. Это учтено в проекте программы (1967), а до введения его можно рекомендовать учителю смелее и шире использовать буквенные обозначения до начала изучения курса алгебры. Весь материал, содержащийся в рассматриваемой программной теме, можно успешно изучить в курсе арифметики, что позволит улучшить изучение всех математических предметов.

ГЛАВА VII

ИЗУЧЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Общий обзор темы

Множество рациональных чисел обладает интересными свойствами.

Действия сложения и вычитания, умножения и деления, кроме деления на нуль, всегда выполнимы. Это — свойство замкнутости по отношению к действиям первой и второй ступени.

В отношении любых двух рациональных чисел всегда можно указать, какое из них больше, какое меньше: множество рациональных чисел — упорядоченное.

Между любыми двумя рациональными числами всегда можно вставить число, которое больше одного и меньше другого из них, а значит, можно вставить и бесконечно много чисел. Это — свойство плотности. В практике она позволяет проводить измерения с любой степенью точности, поэтому множество рациональных чисел удовлетворяет потребностям практики в измерениях.

Множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности: оно недостаточно для изучения непрерывных процессов действительного мира. Значит, нельзя установить взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и множеством точек прямой: на оси имеются точки, которым нельзя поставить в соответствие ни одно рациональное число.

В главе I отмечено, что путь введения отрицательных чисел в науку тернист и длителен, что эти числа приняты были только в XVII в., после того как они нашли плодотворное применение в аналитической геометрии. Однако есть сведения, что задолго до введения в математике знаков «+» и «—», являющихся символами для обозначения действий, эти знаки употреблялись в торговой практике для обозначения прихода и расхода, прибыли и убытка, избытка и недостатка в весе. Практика породила положительные и отрицательные числа, которые применялись для выражения изменений (роста и уменьшения) конкретных величин. Не целесообразно ли и при введении отрицательных чисел в школе опираться на рассмотрение изменений реальных величин, на изучение их приращений в одном и другом направлениях?

Введение в школе отрицательных чисел — крупный и ответственный шаг. В курсе алгебры это — первое обобщение понятия числа. Чтобы облегчить усвоение материала, используют реальные величины и их изменения, а затем от них переходят к отвлеченным понятиям. При рассмотрении большинства вопросов этого раздела применяют неполную индукцию, дедуктивному методу отводят ограниченное место. В VI классе никаких строгих теорий рациональных чисел дать нельзя, но изложение должно быть свободным от ошибок научного характера.

Множество рациональных чисел нельзя противопоставлять «арифметическим» числам, изученным ранее (числам без знака). Числа, знакомые из курса арифметики, составляют подмножество множества рациональных чисел.

Соотношения равенства и неравенства между рациональными числами не могут быть получены путем доказательств. Эти соотношения вводятся путем определений, которые не должны противоречить ранее принятым понятиям о тех же соотношениях. При введении определений полезно показать ученикам их целесообразность на конкретных примерах и на геометрических образах.

Прямые действия первой и второй ступени над рациональными числами не могут быть логически обоснованы ранее известными предложениями. Сложение и умножение вводится по определениям, формулируемым так, чтобы они включали в себя ранее известные понятия об этих действиях. Для пояснения целесообразности определений полезно использовать соответствующие операции над конкретными значениями различных величин. Вычитание и деление определяются как действия, соответственно обратные сложению и умножению. Эти определения старые только по форме; они расширяют объемы понятий каждого из двух обратных действий.

При изучении рациональных чисел числовая ось имеет существенное значение. На ней рациональные числа истолковываются как направленные отрезки. С помощью числовой оси выясняется вопрос о неравенстве и равенстве рациональных чисел. На числовой оси можно показать целесообразность определений прямых действий.

Издавна в методической литературе для названия множества рациональных чисел утвердился термин «относительные числа». Может быть, у него есть преимущества перед другими названиями рассматриваемого класса чисел? Понятие «относительные числа» имеет бо́льший объем, чем понятие «рациональные числа», так как в него входят, кроме рациональных чисел, положительные и отрицательные иррациональные числа. В литературе отмечается, что термин «относительные числа» приводит к противопоставлению чисел этого множества тем числам, с которыми учащиеся имели дело в арифметике. Поэтому наметился отход от этого термина. Этот отход нашел официальное признание в программах математики средней школы 1955/56 учебного года.

На смену термину «относительные числа» в литературе и указанных программах пришел другой — «положительные и отрицательные числа». Но и он страдает недостатками: объем нового понятия не совпадает с объемом понятия «рациональные числа». В объем первого из них входят положительные и отрицательные иррациональные числа, но не входит число нуль, которому уделяется внимание при изучении рациональных чисел.

Заслуживает предпочтения термин «рациональные числа», нашедший признание в науке. Объем его точно соответствует тому множеству чисел, которое изучается в VI классе, следовательно, он удобнее. Но и против него выдвигаются возражения. Например, С. С. Бронштейн говорил: «Понятие рационального числа возникает после введения иррациональных чисел; и исторически и логически сначала появляется термин иррациональные числа и только после этого, для отличия от вновь введенных чисел, прежде известным присваивается название рациональных» [1].

Не будем возражать, что исторически это было так. Согласимся с тем, что при обучении полезно учитывать историю развития математики: история дает полезные для методики преподавания указания. Однако самые горячие сторонники генетического метода не требуют, чтобы обучение повторяло исторический ход развития науки. Почему же необходимо в рассматриваемом случае повторять ход истории развития понятия о числе? Ссылка на историю здесь явно несостоятельна.

Наши видные ученые П. С. Александров, А. Н. Колмогоров [2], А. Я. Хинчин [3] высказались за применение термина «рациональные числа». В. М. Брадис [4] занимает такую же позицию.

В программах восьмилетней школы и в названии соответствующей главы в учебнике и в тексте его используется термин «рациональные числа».

Многолетняя практика показывает, что введение термина «рациональные числа» и связанного с ним понятия не вызывает у школьников никаких затруднений и недоразумений.

2. Как ввести понятие о рациональном числе

В учебной и методической литературе используются в основном два различных способа введения понятия *отрицательного числа.*

Чаще всего исходят из рассмотрения величин, имеющих два противоположных направления. Рациональное число появляет-

[1] С. С. Бронштейн. Алгебра и ее преподавание в семилетней школе. Учпедгиз, 1946.

[2] П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Алгебра. Пособие для средних школ, ч. I. Учпедгиз, 1940.

[3] А. Я. Хинчин. Основные понятия математики и математические определения в средней школе. Учпедгиз, 1940.

[4] В. М. Брадис. Методика преподавания математики в средней школе. Учпедгиз, 1954.

ся на уроках как мера значения такой величины. Такой способ имеет то преимущество, что естественно устанавливает связь между рациональными числами и точками числовой оси.

Однако он накладывает двоякий смысл на знаки «+» и «—»: эти знаки продолжают оставаться знаками сложения и вычитания, но вместе с тем они становятся знаками отличия положительных и отрицательных чисел. Двоякий смысл этих знаков вызывает затруднения и в практике обучения часто неумело преодолевается.

В основе другого приема лежит следующее положение: увеличение величины на некоторое значение можно выразить положительным числом, уменьшение — отрицательным числом; если величина не растет и не уменьшается, то такое «изменение» ее можно охарактеризовать числом нуль. Другими словами, рациональное число является мерой изменения величины. Такой путь введения отрицательного числа мы находим в «Алгебре» П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова.

Введение рационального числа как меры изменения величины снимает вопрос о двояком смысле знаков «плюс» и «минус». На самом деле, каждое увеличение величины сопровождается прибавлением приращения к имеющемуся значению ее, а каждое уменьшение сопровождается отниманием из имеющегося значения некоторой части его. Это важно, ибо упрощает изложение главы.

Как уже отмечено, в практической деятельности людей положительные и отрицательные числа употребляются для характеристики изменений реальных величин: прирост выражали положительным числом, уменьшение — отрицательным. Такой путь введения отрицательного числа оправдывается и с генетической точки зрения.

Переход от истолкования рационального числа как меры изменения величины к истолкованию его как меры величины, имеющей два противоположных направления, совершается без особых затруднений. В результате у школьников устанавливается более широкое представление о рациональном числе: каждое такое число можно рассматривать и как меру изменения величины на определенное значение, и как меру значения величины.

Прежде чем познакомить учащихся с новым видом чисел, следует произвести краткий обзор тех чисел, которые уже изучались в курсе арифметики. Приведем примерный план беседы.

Для счета предметов используются натуральные числа. Число 0 употребляется для обозначения отсутствия предметов. Натуральное число может получиться и в результате измерения значения величины. Среди натуральных чисел нет самого большого: целых чисел бесконечно много. При измерении величин появляются дробные числа. Последние получаются и при делении, когда оно невыполнимо в целых числах.

С этими числами познакомились в курсе арифметики. На ближайших уроках алгебры познакомимся с новым видом чисел.

Далее, опираясь на примеры, полезно напомнить школьникам, что величины изменяются. Вертолет поднялся с аэродрома и набирает все бо́льшую и бо́льшую высоту. Высота — величина, она растет, увеличивается. Затем вертолет начал спускаться: высота уменьшается. Учащиеся приводят примеры изменения величин.

Стратостат в 6 *ч* находился на аэродроме, затем начал подниматься. Высота его над землей в разное время суток указана в таблице (см. 1-й и 2-й столбцы)[1]:

Таблица 12

Время суток, в *ч*	Высота стратостата над землей, в *км*	Промежуток времени, в *ч*	Как изменилась высота, в *км*	Изменение высоты, в *км*
6	0			
9	12	С 6 до 9	Увеличилась на 12	12
12	20	С 9 до 12	Увеличилась на 8	8
13	22	С 12 до 13	Увеличилась на 2	2
14	22	С 13 до 14	Не изменилась	0
15	20	С 14 до 15	Уменьшилась на 2	—2
18	0	С 15 до 18	Уменьшилась на 20	—20

Проследим, как в различные промежутки времени изменялась высота стратостата. Эти промежутки указаны в 3-м столбце, а соответствующие изменения высоты — в 4-м столбце. Изменения высоты не могут быть выражены только известными нам числами, приходится привлекать и слова, но из-за этого получаются неудобные записи. Постараемся переделать их в более краткие. Условимся увеличение высоты выражать числами, известными из арифметики; запишем в 5-м столбце: 12, 8, 2. Уменьшение высоты будем обозначать числами со знаком «минус»: —2, —20.

Так как положительное число выражает увеличение, то в обозначение его иногда включается знак «плюс». Пишут: +2, +12. Знак «плюс» напоминает, что величина растет. Таким образом, +12 и 12 обозначают одно и то же положительное число.

Каждому положительному числу, выражающему увеличение, соответствует свое отрицательное число, выражающее уменьше-

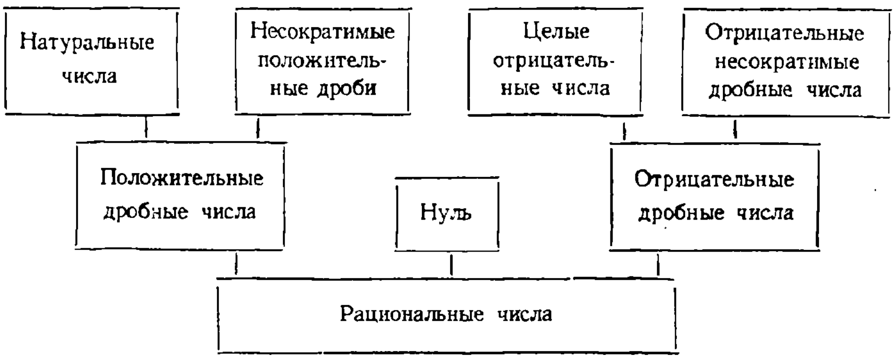
[1] Пример заимствован из указанной ранее книги П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, но числовой материал упрощен.

ние на столько же. С 12 до 13 *ч* стратостат поднялся на 2 *км*, с 14 до 15 *ч* он опустился на 2 *км*: числу +2 соответствует число —2. Числа +2 и —2 выражают изменение величины на одно и то же количество единиц, но в противоположных направлениях. Поэтому они называются противоположными.

Отрицательное число, противоположное натуральному числу, называется целым отрицательным числом. Учащиеся приведут примеры целых отрицательных чисел. Отрицательное число, противоположное дробному, называется дробным отрицательным числом. Приводятся примеры.

Итак, нам известны числа: натуральные (целые положительные), дробные положительные (несократимые обыкновенные дроби со знаменателем, не равным единице), число нуль, целые отрицательные числа, отрицательные несократимые дроби со знаменателем, не равным единице. Все эти числа называются рациональными. Они образуют множество рациональных чисел.

Следует учитывать, что множество рациональных чисел можно представить в виде такой схемы:



Теперь буквы *a*, *x* и другие обозначают любые рациональные числа, если только на область допустимых значений не наложены ограничения.

Дополнительно можно рассмотреть и другие примеры изменяющихся величин: например, приход и расход, увеличение и уменьшение температуры в течение суток. Подчеркиваются те же положения, какие отмечены в примере полета стратостата.

Обозначение отрицательного числа обязательно включает знак «минус», который говорит о том, что величина уменьшается на соответствующую часть ее.

3. Рациональное число как мера значения величины. Числовая ось

Рациональное число вошло в сознание учащихся как мера изменения величины.

Предстоит познакомить школьников с тем, что рациональное число можно рассматривать как меру значения величины, имеющей два противоположных направления.

Рассмотрим пример. Число $+8°$ по Цельсию обозначает увеличение любой температуры на $8°$. Значит, оно обозначает увеличение температуры и от $0°$. А в этом случае $+8°$ есть мера температуры. Число $-8°$ обозначает уменьшение любой температуры на $8°$. Значит, число $-8°$ обозначает уменьшение температуры от $0°$. В этом случае $-8°$ — мера температуры. Для лучшего усвоения учитель ставит вопрос:

Как можно истолковать числа: $+30°$, $-25°$, $-40°$?

В итоге отмечаем, что рациональное число можно понимать как меру величины, имеющей два противоположных направления.

При изучении арифметики школьники познакомились с числовым лучом. Вспоминаем, как было установлено соответствие между числами и отрезками (точками) на этом луче.

Нельзя ли по аналогичному правилу установить соответствие между рациональными числами и точками прямой?

Шкала термометра Цельсия — пример применения числовой оси в практике. Для демонстрации шкалы ее полезно изобразить на листке миллиметровой бумаги в крупном масштабе, а для индивидуальных занятий каждый учащийся начертит шкалу на клетчатой бумаге в масштабе 1° в 0,2 *см*.

Отвлекаясь от конкретного содержания примеров шкал, учащиеся знакомятся с числовой осью. После описанной подготовки этот вопрос не вызовет затруднений.

Полезно подчеркнуть, что числовая ось характеризуется указанием начальной точки, отметкой положительного направления и указанием отрезка, принятого за единицу.

Числовая ось играет важную роль в математике и ее приложениях, к ней неоднократно приходится обращаться и в школьном обучении. При первом знакомстве с числовой осью ей уделяется серьезное и достаточное внимание. Прежде всего надо научить безошибочно отмечать на ней точки, соответствующие заданным числам. Затем следует научить правильно определять число, соответствующее заданной точке оси. Это число, как правило, приближенное.

Полезно иметь демонстрационные линейки, на каждой из которых изображена числовая ось; желательно, чтобы масштабы были различные. Применение линеек рационализирует работу на уроке и экономит учебное время. Каждый учащийся делает из миллиметровой бумаги линейку с числовой осью для личного пользования.

Вместо слов «точка, соответствующая числу 0,7» говорят более кратко: «точка 0,7».

Среди упражнений следует рекомендовать и такие:

1) *Дается число, требуется назвать противоположное ему и отметить на оси точки, соответствующие этим числам.*

2) *Значение величины измеряется числом a, затем оно изменилось на b единиц; с помощью числовой оси выяснить полученный результат* ($a=10$, $b=3$; $a=12$, $b=-3$; $a=-5$, $b=2$).

Упражнения последнего вида подготовляют переход к сложению рациональных чисел.

4. Абсолютная величина числа. Упорядоченность множества рациональных чисел

Формирование понятия *абсолютная величина* числа полезно предварить тем, что при рассмотрении одних вопросов, связанных с рациональными числами, приходится учитывать направление отсчета значений величины, а при рассмотрении других нет надобности в таком учете. Последнее обстоятельство и служит мотивом введения понятия абсолютной величины числа[1].

Например, условились от некоторого пункта O прямолинейного участка шоссе направление вправо считать положительным, а влево — отрицательным. *Автомобиль «Победа» прошел от пункта O вправо* 13 *км* (+13), *а затем влево* 20 *км* (—20). *Найти, где находится автомобиль после этих двух пробегов.*

Для решения этой задачи необходимо учитывать направление движения. «Победа» окажется от пункта O на 7 *км* влево (—7).

При решении задачи: *«Победа» прошла* +13 *км, а затем* —20 *км; вычислить длину общего пробега «Победы»* — достаточно сложить два положительных числа 13 и 20. В этом случае вместо отрицательного числа — 20 берется противоположное ему положительное число 20. Решение таких задач и побуждает ввести понятие абсолютной величины числа.

Рассматриваемое понятие можно определить обычным способом, как это сделано в учебнике алгебры А. Н. Барсукова. Можно дать и геометрическое определение. Пусть отмечена точка на числовой оси. Расстояние этой точки от начала 0 называется абсолютной величиной числа, соответствующего этой точке. Абсолютная величина $|+5|$ равна расстоянию точки 5 от начала, т. е. +5; абсолютная величина $|-7|$ равна расстоя-

[1] Заслуживает предпочтения термин *модуль числа*: им пользуются в высшей математике, он отличается краткостью. Однако в школьных учебниках пользуются термином *абсолютная величина* числа, что побудило и нас сохранить последний термин.

нию точки —7 от начала, т. е. 7. Записывают $|+5|=+5$, $|-7|=+7$.

Геометрическое определение заслуживает предпочтения перед формально-логическим: оно отличается краткостью, связано с наглядными представлениями и геометрическим истолкованием рациональных чисел. Определение можно сформулировать и так: абсолютная величина числа, отличного от нуля, есть длина отрезка, образованного началом и точкой, изображающей число. Абсолютная величина числа 0 есть число 0.

Геометрическое определение абсолютной величины равносильно формально-логическому, при желании возможен переход к последнему. Разнообразные и удачные упражнения для усвоения нового понятия даны в стабильном задачнике.

В дальнейшем имеется в виду обычное расположение числовой оси. Рассматривается положительная полуось.

Пусть числу a соответствует точка A и числу b — точка B. Легко усмотреть следующее:

а) Если $a<b$, то A лежит влево от B.

б) Если $a>b$, то A лежит вправо от B.

в) Если $a=b$, то A и B совпадают.

Верны и обратные предложения:

а) Если A лежит влево от B, то $a<b$.

б) Если A лежит вправо от B, то $a>b$.

в) Если A и B совпадают, то $a=b$.

Школьники знакомятся с этими положениями на примерах.

Подмечается, что нуль меньше любого положительного числа и любое положительное число больше нуля. Приведенные предложения распространяются на всю числовую ось.

Точки, соответствующие отрицательным числам, лежат влево от точки, соответствующей нулю: любое отрицательное число меньше нуля, а нуль больше любого отрицательного числа.

Точки, соответствующие положительным числам, лежат вправо от точек, соответствующих отрицательным числам; любое положительное число больше любого отрицательного и любое отрицательное число меньше любого положительного.

Рассмотрим расположение точек, соответствующих двум отрицательным числам, например: (-7), (-3). Точка (-7) лежит влево от точки (-3): $-7<-3$ и $-3>-7$. Но абсолютная величина $|-7|$ больше абсолютной величины $|-3|$: $|-7|>|-3|$. Из двух отрицательных чисел то меньше, абсолютная величина которого больше, и то больше, абсолютная величина которого меньше.

Таким образом, числовая ось является хорошим средством, позволяющим дать соотношениям равенства и неравенства наглядное истолкование. Благодаря использованию числовой оси множество рациональных чисел предстанет перед учащимися как упорядоченное множество.

5. Сложение рациональных чисел

Когда возможно наметить совместно с учащимися план изучения темы или части ее, всегда целесообразно это сделать. В этом случае материал, подлежащий изучению, выступает в некоторой системе, повышается сознательность его изучения. По аналогии с арифметикой натуральных и дробных чисел в общих чертах уместно наметить вместе с учениками дальнейший план изучения рациональных чисел: предстоит научиться выполнять действия первой ступени и выяснить, верны ли законы сложения, затем — действия второй ступени и установить, верны ли законы умножения.

В методической и учебной литературе существуют различные подходы к сложению рациональных чисел.

За последние годы сделана попытка использовать принцип перманентности, приспособленный к пониманию шестиклассников. Надо установить правило сложения рациональных чисел так, чтобы: а) задачи, решаемые в арифметике сложением, решались тем же действием и в случае любых рациональных чисел, б) правило сложения положительных чисел, известное из арифметики, сохранилось и для сложения любых рациональных чисел, в) законы сложения, установленные для положительных чисел, сохранились для сложения любых рациональных чисел.

Так, например, пытается ввести правило сложения А. Н. Барсуков в учебнике алгебры для восьмилетней школы. По общей схеме такой способ изложения можно назвать формальным, хотя при его применении и опираются на задачи с конкретным содержанием.

Формальный способ введения правила сложения труден для шестиклассников: нужно длительное внимание развитию вопроса по намеченной схеме, логические тонкости усваиваются неполно и далеко не всеми учащимися. Учитель, ограниченный определенным временем, не решается повторить рассуждение, чтобы подчеркнуть выполнение поставленной задачи; значит, он фактически отказывается от того, чтобы учащиеся усвоили ход рассуждения. По-видимому, способ труден и для доступного изложения в учебнике: правило-определение сложения введено и названо правилом, а законы сложения еще не установлены, т. е. сам автор нарушает им же предложенную схему введения правила сложения.

По изложенным соображениям формальный путь введения определения сложения надо признать мало пригодным для первоначального изложения. Его можно использовать при обзорном повторении темы о рациональных числах в старших классах.

Сложение рациональных чисел можно ввести, выполняя сложение направленных отрезков (линейных векторов) на числовой прямой. Этот способ отличается большой наглядностью и простотой. Его можно назвать геометрическим. Методика его детально разработана В. Л. Гончаровым [1].

Требуется найти сумму $4+3$. Сначала на числовой оси находим точку 4, затем от нее *вправо* откладываем отрезок, равный 3, по оси читаем: «7».

Таким способом находятся еще две-три суммы.

Чтобы к числу a прибавить положительное число b, надо на числовой оси от точки, соответствующей числу a, отложить *вправо* отрезок, равный b; по оси читаем: «сумма $a+b$».

Пусть требуется найти сумму $4+(-3)$. На числовой оси от точки 4 отложим отрезок, равный 3, *влево*, получим $4+(-3)=$ $=1$.

Решаются примеры: $5+(-2)$, $10+(-12)$.

Чтобы к числу a прибавить отрицательное число $(-b)$, надо на числовой оси от точки, соответствующей числу a, отложить *влево* отрезок, равный b; по оси читается: «сумма $a+(-b)$»

Графическое сложение направленных отрезков можно использовать для проверки переместительного и сочетательного законов сложения и для введения определения сложения.

Полезно познакомить учащихся с выполнением сложения с помощью двух одинаковых равномерных шкал. Каждый учащийся на полоске миллиметровой бумаги размером примерно 22 *см*×2 *см* вычерчивает прямую, наносит точку, соответствующую нулю, в масштабе в 1 *см* единица строит числовую ось. Штрихи, соответствующие целым числам, располагаются по обе стороны оси, целые числа подписываются дважды — над осью и под ней. Разрезав полоску бумаги по оси, учащиеся получат две равномерные шкалы.

Чтобы вычислить, например, $(-7)+(+2)$, против штриха нижней шкалы, соответствующего -7, устанавливается штрих с нулем верхней шкалы; против штриха с числом $+2$ верхней шкалы находится штрих нижней шкалы, числовая отметка которого и является искомой суммой -5.

Аналогично выполняется сложение в других случаях. Можно предложить найти суммы: $(+7{,}5)+(-3{,}2)$, $(-5{,}4)+(-3{,}8)$ и др.

В VIII классе при изучении счетной линейки учащиеся вспомнят сложение чисел с помощью двух одинаковых равномерных шкал.

Для введения определения сложения нередко применяются задачи, назначение которых конкретизировать определение, показать практическую целесообразность его.

Рассмотрим задачу: *Вертолет находился над аэродромом на некоторой высоте. Затем высота вертолета изменилась на а мет-*

---

[1] В. Л. Гончаров. Начальная алгебра, изд. 2. Изд-во АПН РСФСР, 1960.

ров, а потом еще на b метров. На сколько изменилась высота вертолета?

Пусть $a=500$ *м* и $b=300$ *м* (рис. 2, *а*).

Высота вертолета в первый раз изменилась на 500 *м*. Во второй раз высота изменилась на 300 *м*, т. е. увеличилась еще на 300 *м*. Общее изменение высоты вертолета выразится так: $500+300=800$ (*м*), или $(+500)+(+300)=+800$ (*м*).

В этом случае имеем сложение положительных чисел: оно выполняется по правилам арифметики.

Будем решать задачу сложением при любых значениях a и b.

Пусть $a=-500$ *м* и $b=-300$ *м* (рис. 2, *б*).

Первоначально высота изменилась на —500 *м*, т. е. уменьшилась на 500 *м*. Затем изменилась на —300 *м*, т. е. еще уменьшилась на 300 *м*. В итоге высота уменьшилась на 800 *м*, т. е. изменилась на —800 *м*. Получаем: $(-500)+(-300)=-800$ (*м*).

Число 800 — сумма абсолютных величин слагаемых.

Чтобы найти сумму двух отрицательных чисел, следует сложить их абсолютные величины и перед полученным числом поставить знак «минус».

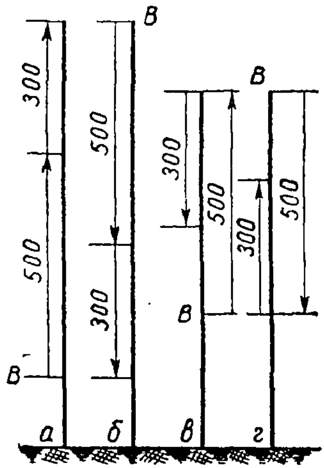


Рис. 2.

Получаем: чтобы найти сумму двух чисел с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные значения и перед полученным результатом поставить общий знак слагаемых.

Пусть $a=+500$ *м*, $b=-300$ *м* (рис. 2, *в*).

Высота изменилась на $+500$ *м*, т. е. увеличилась на 500 *м*, затем изменилась на —300 *м*, т. е. уменьшилась на 300 *м*. Общее изменение высоты равно $+200$ *м*. Имеем: $(+500)+(-300)=$ $=+200$ (*м*).

Аналогично рассматривается и следующий случай, когда $a=-500$ *м*, $b=300$ *м* (рис. 2, *г*).

Получаем: чтобы найти сумму двух чисел с разными знаками, надо из большего абсолютного значения вычесть меньшее и перед результатом поставить знак того слагаемого, абсолютное значение которого больше.

Продолжая рассматривать ту же задачу, дают a и b следующие значения: 1) $a=-500$ *м*, $b=+500$ *м*; 2) $a=-500$ *м*, $b=0$. Подмечаем, что: 1) сумма двух противоположных чисел равна нулю; 2) если одно слагаемое равно нулю, то сумма равна другому слагаемому.

Использование задачи для конкретизации определения сложения и демонстрации практической целесообразности его можно назвать традиционным изложением вопроса. Иногда на уроках приходится слышать: «из решения задачи следует первая часть правила», «выводится вторая часть правила». Такие выражения ошибочны: сложение вводится по определению, нельзя говорить о доказательстве или выводе.

Как бы ни было введено определение сложения, полезно использовать числовую ось для сложения направленных отрезков. При любых затруднениях и сомнениях ученик обращается к выполнению действия с помощью числовой оси.

При выполнении упражнений на сложение рекомендуется применять устный счет и письменные вычисления. При устных занятиях для быстрой подачи числового материала полезно использовать таблицу примерно следующего содержания:

Таблица 13

+1	—7	+7	+14	—14	—70	70
0	6	—9	—12	30	80	—24
—2	—5	10	—15	18	—60	—25
+3	4	—8	16	—20	40	27
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$-1\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$-2\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$	$2\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{10}$	$5\frac{3}{10}$	$1\frac{1}{6}$	$-2\frac{2}{3}$
+0,1	—0,3	0,5	—0,7	5,6	—0,02	0,36
—0,1	0,2	—0,6	1,8	—6,4	0,04	—0,48
1,2	—1,5	2,8	—3,2	8,1	—0,05	0,54

Учитель показывает на число —25 и на число 27 и говорит: «Прибавить!» Полученные ответы проверяются у 2—3 учащихся. Так решаются и следующие примеры. В другой раз учитель предлагает складывать те три числа, которые он последовательно показывает, и проверяет каждый раз полученные ответы у 2—3 учащихся. Таблицу можно использовать и так: найти сумму первых четырех чисел первой строки (учитель показывает); найти сумму первых четырех чисел четвертого столбца и т. д.

Эта таблица используется при изучении всех действий над рациональными числами. Она находит применение на 10—12 уроках.

Решая ряд примеров, замечают, что на сумму рациональных чисел распространяется действие переместительного и сочетательного законов сложения. Вспоминаются формулировки и символические записи законов.

Приведем несколько задач с практическим содержанием.

1) *Ученику предложили изготовить из жести два треугольника с заданными длинами сторон. Когда треугольники были готовы, измерили штангенциркулем длины их сторон. Оказались следующие погрешности:*

а) +0,8 *мм*, —0,2 *мм*, —0,3 *мм*;

б) —0,4 *мм*, +0,5 *мм*, —0,6 *мм*.

Вычислить погрешность периметра каждого треугольника.

2) *Месячные планы по привлечению вкладов от населения сберегательная касса выполняла в первом квартале так: в январе перевыполнила на* 2748 *руб., в феврале недовыполнила на* 890 *руб., в марте перевыполнила на* 1204 *руб. Как справилась сберегательная касса с выполнением квартального плана по привлечению вкладов?*

3) *Школьная мастерская получила заказ на выполнение столярных деталей. По плану часть заказа выполнялась в первые четыре месяца учебного года. Месячные планы сентября и октября не выполнены соответственно на* 25 *и* 16 *деталей, в ноябре и декабре перевыполнены на* 28 *и* 42 *детали. На сколько деталей мастерская перевыполнила четырехмесячный план?*

6. Вычитание рациональных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Форма определения — словесная формулировка — сохраняется та, которая известна из арифметики, однако понятие расширяется. По существу, это новое определение, включающее ранее известное.

Имеются попытки подойти к вычитанию из рассмотрения конкретных задач, сопровождать изложение истолкованием операций на числовой оси. Однако такие подходы нельзя принять: они усложняют изложение и требуют значительного времени.

Опыт многих учителей советской школы показывает, что изложение можно провести так: ученики повторяют определение вычитания, известное из арифметики, это определение распространяется на множество рациональных чисел, учитель дает примеры на вычитание, предусматривающие все возможные комбинации знаков уменьшаемого и вычитаемого; по определению, как показывает практика, учащиеся легко находят разности, а затем им показывают, как вычитание заменяется сложением.

Предложим, например, вычислить разности:

$$(+7)-(+5)= \quad ; \quad (-7)-(+5)= \quad ;$$
$$(+7)-(-5)= \quad ; \quad (-7)-(-5)= \quad .$$

Вычесть из числа +7 число +5 — значит найти такое число, которое при сложении с +5 дает число +7. Чему равна разность? Ученики обычно безошибочно указывают, что разность равна +2. Проверка по определению выполняется устно. Так решают и последующие примеры.

Чтобы учащиеся освоились с определением и его применением, можно рассмотреть еще ряд примеров, аналогичных приведенным.

Обращается внимание школьников на то, что разность можно получить не только на основании определения вычитания, но и другим способом: знак вычитания заменить знаком сложения и при этом изменить знак вычитаемого на противоположный. Проверим:

$$(+7)+(-5)= \quad ; \quad (-7)+(-5)= \quad ;$$
$$(+7)+(+5)= \quad ; \quad (-7)+(+5)= \quad .$$

Следовательно, можно записать:

$$(+7)-(+5)=(+7)+(-5); \; (-7)-(+5)=(-7)+(-5);$$
$$(+7)-(-5)=(+7)+(+5); \; (-7)-(-5)=(-7)+(+5).$$

Эти примеры приводят к следующему правилу: чтобы вычесть какое-либо число, можно прибавить число, противоположное вычитаемому.

Подобные рассуждения можно повторить еще на другой серии примеров, похожих на предыдущие.

Разность может получиться и меньше и больше уменьшаемого. Об этом свидетельствуют примеры.

В арифметике сложение всегда выполнимо, а вычитание не всегда. На множестве рациональных чисел сложение также всегда выполнимо, а так как вычитание сводится к сложению, то стало выполнимым и вычитание.

На основании правила вычитания разность двух чисел всегда можно заменить суммой, например:

$$9-4=9+(-4).$$

Поэтому запись 9—4 считают сокращенной записью суммы чисел 9 и —4.

Выражение $5-4-7=5+(-4)+(-7)$ можно рассматривать как сумму чисел 5, —4, —7.

Точно так же выражение $a-b-c+d$ можно представить как сумму:

$$a-b-c+d=a+(-b)+(-c)+d.$$

Совокупность чисел, соединенных знаками «плюс» и «минус», называют алгебраической суммой, а числа вместе с их знаками называют слагаемыми этой суммы.

Расширение понятия о сумме стирает границы между вычитанием и сложением.

В качестве итогов изучения действий первой ступени над рациональными числами следует научить шестиклассников безошибочно вычислять алгебраические суммы такого вида:

$$17-32;\ 4{,}7-12{,}65;$$

$$2-19-18+4;\ -2+1-4-10.$$

Примеры, аналогичные двум последним, дают возможность подчеркнуть, что переместительный и сочетательный законы применимы к алгебраической сумме. Расширенное понимание законов полезно отразить и в соответствующих формулировках:

1) Алгебраическая сумма не меняется от перестановки слагаемых.

2) Чтобы прибавить алгебраическую сумму, достаточно прибавить последовательно одно за другим каждое слагаемое.

Такая формулировка сочетательного закона освобождает от необходимости рассматривать прибавление суммы и разности.

На основании этих законов при вычислении алгебраических сумм находят сумму положительных слагаемых, сумму отрицательных слагаемых и окончательный результат.

При решении примеров вида

$$(-8)-(-5{,}1)+(-3{,}8)-(+2)+(+3{,}2)$$

следует научить рациональному оформлению выкладок. Прежде всего надо раскрыть скобки, а затем поступать, как только что сказано:

$$(-8)-(-5{,}1)+(-3{,}8)-(+2)+(+3{,}2)=$$
$$=-8+5{,}1-3{,}8-2+3{,}2=8{,}3-13{,}8=-5{,}5.$$

Такое решение должно стать прочным навыком каждого шестиклассника: оно используется при изучении многочленов.

Для дальнейшего полезно рассмотреть вычитание алгебраической суммы. Это делается на примерах.

Так как разность всегда можно заменить суммой, то нет необходимости рассматривать вычитание разности.

Среди задач целесообразно предложить и такие:

1) *Ученик измерил в треугольнике транспортиром углы и нашел, что сумма их равна* 179,5°. *В другом треугольнике сумма*

углов оказалась равной 181°. *Найти абсолютные погрешности каждого измерения, если сумма внутренних углов треугольника равна* 180°.

2) *Мастерская получила заказ на изготовление трех валов. Длина каждого вала должна равняться* 550 *мм. Когда заказ был выполнен, то длины валов оказались равными* 551 *мм*, 548,8 *мм и* 551,2 *мм. Найти абсолютную погрешность длины каждого вала.*

3) *Четырехкратное измерение стальной лентой отрезка прямой на поверхности земли дало следующие результаты: 1220,9 м;* 1221,6 *м;* 1219,8 *м;* 1220,3 *м. Найти абсолютные погрешности каждого измерения.*

Примечание. За истинное значение длины отрезка надо принять среднее арифметическое четырех измерений.

7. Умножение рациональных чисел

Между умножением и сложением рациональных чисел имеется сходство. Оно порождает сходство и в методике изложения.

В методической и учебной литературе предлагается несколько способов сообщения определения умножения.

Можно указать формальный способ: при установлении определения выдвигают требования, аналогичные тем, которые указаны для сложения. Затем вводят определение умножения и показывают, что оно не противоречит ранее установленному правилу, а содержит его как частный случай. Наконец, убеждаются, что известные законы применимы к произведениям любых рациональных чисел.

Такой способ изложения мало пригоден для первоначального сообщения по тем же мотивам, какие указаны при рассмотрении сложения.

Предложен догматический способ введения умножения [1]. Сущность его состоит в том, что формулируют определение умножения и поясняют примерами. В дальнейшем показывают практическую целесообразность введенного определения. Возражать против такого изложения нельзя. Оно согласуется с научной трактовкой вопроса, доступно для шестиклассников, а в итоге определение оправдывается практикой. Такой способ экономен в отношении времени.

Широко применяется традиционный для нашей школы способ введения определения умножения, при котором рассматриваются целесообразно подобранные задачи. В учебнике алгебры А. Н. Барсуков удачно использует для этой цели задачу:

---

[1] П. С. Александров и А. Н. Колмогоров Алгебра, ч. I. Учпедгиз, 1940; В. Л. Гончаров. Начальная алгебра. Изд-во АПН РСФСР, 1960.

Температура изменяется каждый час на a°. В настоящий момент термометр показывает 0°. Сколько градусов покажет термометр через t часов?

Можно использовать движение точки M по числовой оси. Если t — время движения, отсчитываемое от некоторого начального момента, v — скорость движения, x — число, соответствующее положению точки на оси, то получим формулу: $x=vt$ [1].

Необходимо установить, когда t принимает положительное значение, когда отрицательное значение, а также выяснить, что понимать под положительной скоростью и под отрицательной скоростью.

Интерпретация определения умножения с помощью движения требует много времени (около урока) и длительного напряжения внимания школьников.

Примеры на умножение рациональных чисел выполняются устно и письменно. При устном решении используется приведенная ранее таблица. Когда учащиеся запомнят определение умножения двух чисел, можно ввести правило знаков при умножении. Во избежание недоразумений его можно читать так: при умножении двух чисел с одинаковыми знаками получается положительное, а с разными — отрицательное произведение.

Решая примеры, ученики убеждаются, что ранее известные законы умножения применимы и к рациональным числам. Эти законы используются для упрощения вычислений.

Обращается внимание на расширенное толкование распределительного закона. Его теперь можно сформулировать так: чтобы умножить алгебраическую сумму на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и результаты сложить. Такая формулировка позволяет не рассматривать умножение разности на число.

Нет надобности излагать умножение числа на алгебраическую сумму:

$$m(a+b-c)=am+bm-cm,$$

так как произведение можно получить, применяя переместительный закон умножения и распределительный закон алгебраической суммы:

$$m(a+b-c)=(a+b-c)\,m=am+bm-cm.$$

Сочетательный закон умножения позволяет не рассматривать умножение на произведение.

Полезно отметить умножение произведения на число:

$$(abc)\,m=(am)\,bc=a\,(bm)\,c=ab\,(cm).$$

---

[1] Еще раз подчеркнем, что определение умножения рациональных чисел не выводится из приведенной формулы. Применение формулы только поясняет практическую целесообразность определения.

8. Деление рациональных чисел

Деление рациональных чисел определяют как действие, обратное умножению. Определение известно из арифметики, но в применении к рациональным числам оно значительно расширяет объем понятия; значит, это новое определение.

Изучение действия деления в основном аналогично изучению действия вычитания.

Сначала вводят определение. Вниманию класса предлагают примеры:

$$(+12):(+3)= \quad ; \qquad (+12):(-3)= \quad ;$$
$$(-12):(-3)= \quad ; \qquad (-12):(+3)= \quad .$$

Опираясь на определение, учащиеся легко находят частное для каждого случая и устно проверяют его умножением. Можно рассмотреть еще аналогичные серии примеров.

Следует обратить внимание на то, что деление на нуль невозможно; например, записи $\frac{3}{0}, \frac{-2}{0}$ не имеют числового смысла, так как произведение любого числа на нуль есть нуль, тогда как делимое отлично от нуля.

Запись $\frac{0}{0}$ или $0:0$ не является определенным числом, так как произведение любого числа на нуль равно нулю.

Сообщают правило знаков при делении.

При решении сложных примеров, в которых представлены действия первой и второй ступени, учащиеся вспоминают правила о порядке действий.

Опираясь на примеры, полезно сообщить:

1) Чтобы разделить алгебраическую сумму на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и результаты сложить.

2) Чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из сомножителей, оставив остальные без изменения.

3) Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить его последовательно на каждый сомножитель.

На свойства деления опираются при изучении действий над многочленами.

Среди задач целесообразно предложить и такие:

1) *Ученик измерил углы треугольника транспортиром и нашел, что сумма их равна* 180,5°. *Найти относительную погрешность измерения, если сумма внутренних углов треугольника равна* 180°.

2) *Ученику было поручено сделать деревянный прямоугольный параллелепипед с объемом* 1,8 *куб. дм. Когда вещь была сделана, ученик, измерив ребра параллелепипеда, нашел, что они равны* 14,9 *см,* 12,1 *см и* 10,1 *см. Найти относительную погрешность объема прямоугольного параллелепипеда, сделанного учеником.*

3) *Измерение отрезка рулеткой на поверхности земли дало следующие длины:* 425,6 *м;* 424,9 *м;* 425,1 *м. Найти относительные погрешности каждого измерения.*

9. Понятие о степени

Понятие о степени с натуральным показателем играет важную роль в курсе алгебры восьмилетней школы. Необходимо достигнуть того, чтобы ученики научились четко различать основание степени, показатель степени, степень и умели правильно выполнять вычисления. Поверхностное изучение понятия степени, недостаточное внимание к указанным терминам и связанным с ними понятиям ведет к путанице в использовании их, затрудняет в дальнейшем запоминание некоторых теорем, порождает ошибки.

Конкретным материалом для введения понятия о степени с натуральным показателем могут служить целесообразно подобранные задачи:

1) *Земельный участок имеет форму квадрата со стороной в* 70 *м. Найти площадь участка.*

Получим: 70 · 70 *кв. м.* Сомножители одинаковы.

Записываем: $70 \cdot 70$ *кв. м* $=70^2$ *кв. м.* Число 2 показывает, сколько раз 70 берется сомножителем.

Читаем: «70 во второй степени», или: «70 квадрат».

2) *Сколько кубических метров земли вынули при рытье погреба, имеющего форму куба с ребром* 2,8 *м?*

Получаем: $2{,}8 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}8$ *куб. м.* Имеем произведение трех одинаковых сомножителей. Его кратко записываем так: $2{,}8 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}8$ *куб. м.* $=2{,}8^3$ *куб. м.*

Число 3 показывает, сколько раз 2,8 взято сомножителем. Читаем: «2,8 в третьей степени», или: «2,8 куб».

Отвлекаясь от наименований, получаем: $a \cdot a \cdot a=a^3$. Читаем: «a в третьей степени».

Вводим понятия: *основание степени, показатель степени, степень.*

Целесообразно ввести следующее определение: возвести число в степень — значит взять его сомножителем столько раз, сколько единиц в показателе степени. Это определение заслуживает предпочтения перед другими: оно содержит в себе и определение и правило вычисления степени.

Для усвоения понятий, связанных со степенью, можно предлагать устные упражнения в такой форме: а) *Показатель степени 4, а основание* $\frac{1}{2}$; *вычислить степень;* б) *Определить степень, если основание 2, а показатель 5.*

Такие упражнения дают возможность быстро усвоить новую терминологию.

В качестве применения степени полезно показать принятую в науке краткую запись больших чисел. Например, миллион можно записать 10^6. Расстояние Земли от Солнца приблизительно равно 150 000 000 *км*, или $15 \cdot 10^7$ *км*. Масса Земли в тоннах выражается числом $6 \cdot 10^{21}$. Поверхность Земли равна $51 \cdot 10^7$ *кв. км*[1].

Приведенное определение степени пригодно для любого натурального показателя $n \geqslant 2$. Оно неприменимо к a^1. Понятие о первой степени числа вводится по определению. Целесообразность определения можно мотивировать, когда учащиеся познакомятся с правилом умножения степеней с равными основаниями. Чтобы это правило было пригодно в случаях $a \cdot a^3$, $x^4 \cdot x$, надо принять, что $a^1 = a$, $x^1 = x$.

Итак, a^1 называется первой степенью числа a и обозначает число a:

$$a^1 = a.$$

Учащиеся знакомятся с правилами знаков при возведении в степень чисел, при этом опираются на неполную индукцию: рассматривают серию примеров и формулируют на этом основании правила.

Первое знакомство со степенью целесообразно закончить изучением правила возведения приближенного числа во вторую и третью степень.

Можно предложить задачи:

1) *Найти площадь квадрата, сделанного из жести, если измерение показало, что сторона его равна:* а) 231 *мм*, б) 83,7 *мм*.

2) *Вычислить объем куба, сделанного из дерева, если ребро его равно:* а) 253 *мм*, б) 72,3 *мм*.

Выполняя вычисления по известным правилам, учащиеся устанавливают, что при возведении приближенного числа во вторую и третью степень в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в основании степени. Это правило не абсолютно верное: для квадрата числа наблюдается небольшой процент отклонений от него, а для куба числа этот процент увеличивается. Для последующих более высоких показателей степеней ввести аналогичное правило уже нецелесообразно.

---

[1] См.: Я. И. Перельман. Занимательная алгебра. Гостехиздат, 1956.

Примеры в определении числовых значений алгебраических выражений становятся разнообразнее и богаче по содержанию. Они решаются устно и письменно, в некоторых случаях составляются таблицы значений выражений.

Среди упражнений найдут место, например, и такие: *Найти числовое значение выражения*

$$\frac{a^2-b^3}{ab}, \text{ если } a\approx 4{,}72,\ b\approx 0{,}543.$$

Рациональные числа применяются в построении первых графиков. Этот вопрос рассмотрен в главе III.

10. Уравнения

Понятие *уравнение* формируется постепенно и длительное время.

В старших классах можно удовлетвориться таким определением: уравнением называется равенство двух функций, заданных совместно на общей части их областей определения[1].

Поясним примером. Функция $\frac{1}{x^2-4}$ определена на множестве действительных чисел, за исключением ± 2. Функция $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ определена на множестве действительных чисел, кроме тех, которые принадлежат отрезку $[-1;\ +1]$. Равенство этих функций дает уравнение:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \qquad (1)$$

При этом функции рассматриваются на общей части областей их определения: *x — любое действительное число, кроме* ± 2 и чисел отрезка $[-1;\ +1]$.

Одна из частей уравнения может быть числом. В таком случае эта часть рассматривается как функция, принимающая одно и то же значение при всех допустимых значениях аргументов.

Примитивные уравнения учащиеся решают в курсе начальной арифметики. За последние годы экспериментально доказано, что решение простых уравнений первой степени с одним неизвестным и задач с помощью составления уравнений возможно уже в III—IV классах. Ученики предпочитают пользоваться алгебраическим решением задач; арифметические способы у них отходят на второй план. Значит, учитель, в рамках ныне действующей программы, может в курсе арифметики уделить больше

[1] С. И. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры. «Советская наука», 1951; А. Н. Барсуков. Уравнения первой степени в средней школе. Учпедгиз, 1948.

внимания решению уравнений и использовать их в решении задач. Это даст возможность несколько сократить применение устаревших арифметических приемов решения задач и ввести более сильные алгебраические способы.

В VI классе в теме «Рациональные числа» уместно ввести то определение уравнения, какое дано в стабильном учебнике: оно допускает расширение и обобщение, открывающие возможность в дальнейшем ввести то определение, которое приведено ранее, или близкое к нему.

Так как учащиеся знают рациональные числа, то уравнения рассматриваются на множестве этих чисел.

Учащиеся знакомятся с понятиями и терминами: *части уравнения, левая часть, правая часть, члены уравнения, корень* или *решение*.

С понятием *уравнение* и сопутствующими понятиями можно познакомить шестиклассников следующим путем.

Рассмотрим равенства:

1) $x+2=11$; 3) $3a-1=2a+5$;
2) $8=2y-1$; 4) $c^2=4$.

Каждое из них содержит букву, значение которой не указано. Каждое из равенств может быть верным при одном значении буквы и неверным при другом значении. Подсчитайте, при каком значении x верно первое равенство, при каком значении y верно второе равенство. Третье равенство будет верно, когда $a=6$. Проверьте.

Если ставится задача узнать, при каком значении буквы равенство верно, то имеем дело с уравнением. Вместо «верно» говорят также «справедливо», «удовлетворяется». Буква, значение которой определяется, называется неизвестным, а значение неизвестного, при котором равенство становится справедливым, называется решением или корнем уравнения. В наших примерах $x=9$, $y=27$, $a=6$, $c=\pm 2$ — соответственно корни или решения уравнений.

Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что оно не имеет корней. Например, уравнение $x+1=x+2$ не имеет решений: нет такого числа, при котором левая часть равна правой. Вводятся другие понятия, связанные с уравнением: *части уравнения, члены уравнения*.

Для решения уравнений можно использовать зависимость между компонентами и результатами четырех действий.

При решении уравнения

$$3x+1=13$$

ученик рассуждает примерно так.

Неизвестное слагаемое ($3x$) равно сумме (13) без другого слагаемого (1) : $3x=12$.

Неизвестный сомножитель (x) равен произведению (12), деленному на другой сомножитель (3): $x=4$.

Проверка по данному уравнению подтверждает, что 4 — корень уравнения.

Наблюдения показывают, что ученик, основательно усвоивший арифметический способ решения, пытается пользоваться им и в VII классе, после изучения свойств уравнений и их следствий. Ему приходится переучиваться.

При решении уравнений можно опираться на свойства равенств. Такой способ рекомендует В. Л. Гончаров в книге «Начальная алгебра».

Решить уравнение

$$7x-10=-80. \tag{а}$$

Допустим, что корень существует. При подстановке этого корня получим верное равенство.

Прибавим к обеим частям по 10. Получим верное равенство

$$7x=10-80, \text{ или } 7x=-70. \tag{б}$$

Разделим обе части равенства (б) на 7. Получим $x=-10$. Допустив, что корень существует, получили $x=-10$.

Устная проверка по уравнению (а) показывает, что -10 — корень уравнения.

Решают еще 2—3 уравнения с рассуждениями, аналогичными приведенным, а затем переходят к решению с самыми краткими пояснениями.

При таком приеме решения ученику VII класса не приходится переучиваться.

Первое применение уравнений к решению задач нуждается в продуманной системе упражнений.

Первые задачи — это те же уравнения, только облеченные в словесную форму, например:

К неизвестному числу x прибавили 37 *и получили* 121. *Чему равно неизвестное число?*

От числа 231 *отняли неизвестное число y и получили* 89. *Найти неизвестное число.*

Работа в классе ведется так, что учащиеся пишут уравнения в то время, когда преподаватель читает задачу.

Затем даются задачи, близкие к только что указанным, но в них отсутствует обозначение неизвестного. Ученики вводят их сами, например:

К числу 5,9 *прибавили неизвестное число, получили* 11. *Найти неизвестное число.*

Число 17 *умножили на неизвестное число, получили* 204. *Чему равно неизвестное число?*

И в этом случае составляются уравнения одновременно с чтением задачи.

Наконец решаются простые задачи с конкретным содержанием, например:

Цена кисточки 12 коп. Сколько купили кисточек, если за них заплатили 96 коп.?

Площадь прямоугольника равна 156 кв. см, одна сторона его равна 12 см. Найти длину другой стороны.

Такие задачи могут решаться и без применения уравнений. Однако нужно требовать, чтобы учащиеся составляли уравнения; при этом для обозначения неизвестного рекомендуется применять различные буквы.

Приведем несколько задач:

1) *На твердое тело по прямой в противоположных направлениях действуют две силы, одна из которых равна —9,5 кГ. Сумма сил равна +2,8 кГ. Вычислить другую силу.*

2) *На твердое тело по прямой в противоположных направлениях действуют три силы, из которых две равны 7 кГ и 3 кГ. Вычислить третью силу, если сумма трех сил равна —5 кГ.*

3) *Ученице предложили в течение суток четыре раза измерить температуру воздуха и найти среднюю суточную температуру. Ученица представила табличку:*

Таблица 14

Часы	Температура, *град.*
0	—3
6	
12	+2
18	—1
Средняя температура	—2

Оказалось, что в табличке пропущена одна запись. Вычислить пропущенное число.

ГЛАВА VIII

ЦЕЛЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Общий обзор темы

В программе многочленам посвящены две темы: «Действия над целыми алгебраическими выражениями» и «Разложение многочленов на множители».

Многочлены можно рассматривать с точки зрения алгебраической или функциональной.

Если при изложении начальной алгебры встать на первую точку зрения, то курс получит алгебраическую направленность. При изучении, например, трехчлена второй степени можно дать понятие о трехчлене, разложить его, если возможно, на множители, применить разложение к тождественным преобразованиям алгебраических дробей.

Если при изложении начальной алгебры встать на вторую точку зрения, то будем иметь функциональную направленность курса. В этом случае при изучении трехчлена второй степени обращают внимание на то, что он является функцией аргумента, определяют промежутки возрастания и убывания, наибольшее или наименьшее значение функции, строят график, показывают приложения в практике.

Для начальной алгебры представляет интерес и та и другая направленность. Нельзя отказаться или недооценить ни одну из них: в одних случаях приходится сосредоточивать внимание учеников на алгебраической стороне вопроса, в других интерес представляет функциональная сторона. Это видно на примере трехчлена.

В двух указанных темах явно преобладает алгебраическая направленность.

В современной алгебре понятие многочлена обладает большой общностью; оно прежде всего зависит от множества, над которым рассматривается многочлен. Учителю восьмилетней школы необходимо помнить, что под многочленом разумеют следующее:

Пусть R — множество рациональных чисел; известно, что оно является полем. Многочленом n степени называют алгебраическое выражение вида:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \cdots\ +a_{n-1}x+a_n,$$

в котором коэффициенты $a_0,\ a_1, \ldots ,\ a_n$ принадлежат R, $a_0\neq 0$, n — натуральное число, x принимает значения из множества R.

Пусть $f(x)$ и $F(x)$ — два произвольных многочлена над R. Эти многочлены считают тождественно равными тогда, когда многочлен $f(x)$ состоит из тех же членов, что и многочлен $F(x)$. Многочлен равен нулю (нулевому элементу поля R) только тогда, когда все коэффициенты его равны нулю. Многочлен равен единице только тогда, когда все его коэффициенты, кроме a_n, равны нулю, а a_n равно единице.

Пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$F(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m.$$

Под суммой многочленов $f(x)+F(x)$ разумеется многочлен

$$d_0x^k+d_1x^{k-1}+\cdots+d_{k-1}x+d_k,$$

где k — наибольшее из чисел n и m, а $d_i=a_i+b_i$, причем если $n>m$, то следует принять: $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$, если $n<m$, то следует принять: $a_{n+1}=\cdots=a_m=0$.

Под произведением $f(x)\cdot F(x)$ разумеется многочлен

$$a_0b_0x^{n+m}+(a_0b_1+a_1b_0)x^{n+m-1}+\ldots+a_nb_m,$$

где $a_i=0$ при $i>n$ и $b_j=0$ при $j>m$.

Если множество всех многочленов обозначить $R(x)$, то, как известно, оно образует кольцо относительно сложения и умножения над множеством R.

В VI и VII классах учащиеся согласно программе имеют дело с многочленами описанного вида. В VIII классе учащиеся имеют дело преимущественно с такими же многочленами, однако существуют и многочлены, определенные на множестве действительных чисел.

Свойства кольца многочленов относительно сложения и умножения над полем R служат своеобразной программой для изучения многочленов в школе. В частности, ни стабильный учебник, ни задачник не уделяют внимания законам сложения и умножения, хотя они используются в тождественных преобразованиях.

Некоторые математики предлагают отказаться от рассмотрения действий первой ступени над многочленами и сосредоточить внимание учащихся на раскрытии скобок. Предложение мотивируется желанием сократить материал для запоминания. Согласиться с этим предложением нельзя: во-первых, по существу — разрушается понятие о кольце многочленов, во-вторых, по формальным мотивам — искажается характер программы.

При изучении действий над целыми алгебраическими выражениями необходимо добиться, чтобы школьники научились безошибочно, быстро и изящно выполнять тождественные преобразования, причем рекомендуется избегать громоздких и сложных преобразований, образовательная и практическая ценность которых невелика.

Полезно помнить о побочных задачах темы: ее изучение дает возможность расширить и углубить пользование алгебраической символикой, упражняться в решении линейных уравнений и задач с помощью уравнений, повторять действия над рациональными числами, ввести некоторые упрощенные приемы приближенных вычислений, подготовиться к разложению многочленов на множители, упражняться в устных вычислениях.

Тема содержит несложные, доступные для шестиклассников выводы, доказательства, ее изучение способствует развитию дедуктивного мышления. Решение задач на доказательство дает возможность усилить значение темы в этом отношении.

В программе восьмилетней школы нет деления на многочлен. Алгоритм деления столбиком выпадает, а вместе с тем исчезает необходимость изучать особые алгоритмы трех первых действий, используя запись столбиком. Некоторые методисты утверждают, что эти алгоритмы рационализируют тождественные преобразования. Так как в восьмилетней школе избегают громоздких тождественных преобразований, то рационализирующее значение этих алгоритмов весьма невелико.

Другие полагают, что сложение столбиком приходится применять при решении систем линейных уравнений с двумя неизвестными. Однако эта операция над частями уравнений столь проста, что не требует предварительной подготовки.

В учебнике следовало бы изложение алгоритмов действий столбиком напечатать мелким шрифтом, как это сделано с другим необязательным материалом.

Представляет интерес понятие о расположенном относительно аргумента многочлене. Занимаясь тождественными преобразованиями, учащиеся постепенно приобретают умения и навыки располагать многочлены по степеням какой-либо буквы; такое расположение полезно — оно облегчает выполнение действий и уменьшает число ошибок. Понятие о расположенном многочлене вводят тогда, когда в этом появится потребность, его введение подготовлено. Попутно заметим, что полезно требовать, чтобы буквенные сомножители школьники записывали в алфавитном порядке.

Согласно программе изучение действий над многочленами сопровождается решением уравнений первой степени с одним неизвестным с числовыми коэффициентами и решением задач путем составления уравнений. Такая комбинация учебного материала позволяет изучение уравнений, начатое в предыдущей теме, не прерывать, а продолжать, с постепенным усложнением уравнений; кроме того, применение уравнений к решению задач способствует повышению качества умений и навыков в этом деле, а решение задач является одним из путей связи изучаемого материала с практикой и другими учебными дисциплинами.

Рекомендуется применять проверку правильности тождественных преобразований посредством подстановки числовых значений букв.

Вместе с тем укрепляется мысль, что с помощью подстановки числовых значений букв тождество доказать нельзя, но можно обнаружить его ошибочность.

Полезно практиковать подстановку в тождество вместо букв алгебраических выражений.

Пусть имеется тождество, содержащее одну букву. Если вместо этой буквы в обе части его подставить одно и то же выражение, то получится новое тождество. Если тождество содержит несколько букв и вместо них подставить соответственно данные выражения, то опять получится тождество. Эти положения полезно подчеркивать и подкреплять примерами: они служат одним из способов вывода новых тождеств и дают возможность сократить число формул, подлежащих запоминанию.

2. Одночлен и многочлен

Если все коэффициенты многочлена, кроме a_0, равны нулю, то многочлен принимает вид a_0x^n. Значит, одночлен — частный вид многочлена.

Как же определить одночлен и многочлен в школе?

Алгебраические выражения

$$7;\quad a;\quad 5-0{,}9;\quad ab;\quad \frac{a}{b};\quad 3a^3b;\quad a+b-c;\quad \frac{a^2+b^2}{2ab}$$

называются рациональными. Одни из них состоят из отдельных чисел, другие составлены из нескольких чисел с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.

Таким образом, алгебраическое выражение, состоящее из одного числа, или составленное из нескольких чисел с помощью действий первой, второй ступени и возведения в степень с натуральным показателем, называется рациональным.

Рассмотрим следующие рациональные выражения:

$$3{,}5;\quad x;\quad a^2+1;\quad \frac{5c}{4};\quad a(b+c);\quad (a+b)^2.$$

В них не входит деление на буквенное выражение. Такие выражения называют целыми. Значит, рациональное алгебраическое выражение называется целым, если в нем нет деления на буквенное выражение. Учащиеся приведут примеры целых выражений.

Выражения

$$\frac{a}{b};\quad \frac{1}{3c};\quad \frac{a+b}{a-b};\quad x+\frac{2}{x}$$

называются дробными: каждое из них содержит деление на буквенное выражение. Рациональное алгебраическое выражение называется дробным, если оно содержит деление на буквенное выражение.

Запишем целые выражения:

$$-3;\quad a;\quad -x;\quad 2a;\quad a^2x^3;\quad 0{,}2a^2b^3c^4, \qquad (1)$$

$$a+4;\ \frac{1}{2}b-1{,}5;\ a^2-b^2;\ -4x^3+3xy, \qquad (2)$$

$$a^2+2ab+b^2;\ -x^2+2x^3-3x^4. \qquad (3)$$

Целые рациональные алгебраические выражения строки (1) называются одночленами. Это — отдельные числа или произведение чисел, каждое из которых взято в определенной степени. В строке (2) — алгебраические суммы двух одночленов. Их называют двучленами. В строке (3) — алгебраические суммы трех одночленов. Их называют трехчленами.

Можно составить целые алгебраические выражения, представляющие алгебраические суммы четырех, пяти и большего числа одночленов.

Все целые выражения, записанные в (1), (2), (3) строках, называют многочленами.

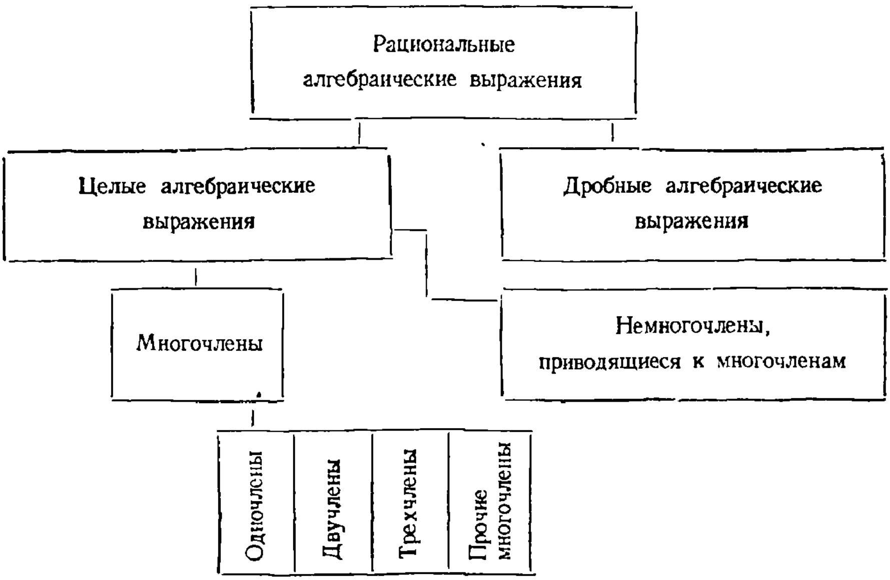
Целое рациональное алгебраическое выражение называется одночленом, если оно состоит из одного числа или представляет произведение нескольких чисел или их степеней.

Целое рациональное алгебраическое выражение называется многочленом, если оно состоит из одного или алгебраической суммы нескольких одночленов.

Среди целых рациональных алгебраических выражений имеются и такие, которые непосредственно нельзя назвать многочленами, но которые приводятся к виду многочленов, например:

$$a(b+c);\ (a+b)(a-b);\ 4a^3x-(a-x)^3.$$

Можно предложить следующую научно обоснованную классификацию рациональных алгебраических выражений:



Одночлен — частный вид многочлена. Это важно, так как в дальнейшем сложение и вычитание одночленов и многочленов можно рассматривать одновременно, совместно, что уменьшит число правил. Вместе с тем одночлен может быть выделен из класса многочленов и в нужных случаях может рассматриваться самостоятельно.

Предложенные определения и классификация доступны для учащихся и не могут вызвать возражений с педагогической точки зрения.

В дискуссии, проведенной журналом «Математика в школе» на тему «О терминологии и понятиях начальной математики», было единодушно признано, что полезно ввести понятие о нормальном (простейшем) виде одночлена [1].

Дело в том, что под определение одночлена подходят, например, такие выражения: $2 \cdot 3aba$, $5xyxy$. Они не имеют простейшего вида и на основании переместительного и сочетательного законов умножения приводятся к нормальному виду:

$$2 \cdot 3aba = 6a^2b; \quad 5xyxy = 5x^2y^2.$$

Поэтому при введении понятия одночлена необходимо сообщить и показать на примерах, каковы признаки одночлена нормального (простейшего) вида. Одночлен, содержащий несколько сомножителей: а) имеет только один числовой множитель, б) степень каждой буквы содержится сомножителем только один раз. К этому можно добавить, что буквенные сомножители располагаются в алфавитном порядке.

Полезны упражнения в приведении одночленов к нормальному (простейшему) виду. Они выполняются применением переместительного и сочетательного законов умножения:

$4 \cdot 2x$	$3aa$;
$2 \cdot 5xx$;	$5aba$;
$4 \cdot 0{,}5abab$;	$6xyyyx$.

В той же дискуссии единодушно признавалось, что полезно ввести понятие о нормальном (простейшем) виде многочлена.

Привести многочлен к нормальному виду значит: а) каждый член представить в нормальном виде; б) привести подобные члены; в) расположить многочлен по убывающим степеням аргумента (к этому школьников приучают постепенно).

После изучения приведения подобных членов уместны упражнения на приведение многочленов к нормальному виду.

3. Коэффициент

Понятие *коэффициент* имеет несколько значений: это — числовой множитель, входящий в буквенное выражение (например,

[1] См.: «Математика в школе», 1962, № 6; 1963, № 5—6.

в выражении $4ax^2$ коэффициент равен 4); это — известный множитель при какой-либо степени неизвестного (например, в уравнении $4xa^2+$ $+bx=0$ относительно x коэффициентами являются $4a$ и b); это — постоянный множитель при переменном (например, в выражениях $2\pi r$, πr^2 коэффициентами соответственно будут 2π и π). В уравнении $ax+b=0$ с неизвестным x коэффициентом первого члена служит a. Если же за неизвестное принять a, то коэффициентом первого члена будет x. Значит, коэффициент — понятие относительное. Свободный член уравнения также называют коэффициентом.

В VI классе учащиеся знакомятся с коэффициентом как с рациональным числовым множителем буквенного выражения. Прежде всего они вспоминают, что понимается под умножением на целое число. Краткая запись суммы одинаковых слагаемых приводит к понятию умножения на целое число, например:

$$5+5+5+5=5\cdot 4;\quad \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot 3.$$

Смысл умножения на целое число сохраняется, когда слагаемое обозначено буквой:

$$a+a+a+a=a\cdot 4=4a,$$

где a — любое известное учащимся число.

Целый числовой сомножитель буквенного выражения называется коэффициентом; его принято ставить на первом месте, что всегда можно сделать, пользуясь переместительным законом умножения.

Необходимо расширить понятие о целом коэффициенте, включив в его объем и единицу.

Из арифметики известно, что

$$7\cdot 1=7;\quad \frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5};\quad a\cdot 1=a.$$

Но можно записать и так:

$$a\cdot 1=1a.$$

Целесообразно принять, что

$$1a=a.$$

Единицу также называют коэффициентом. Значит, выражение a имеет коэффициент 1. Коэффициент 1 обычно не пишется.

Можно предложить:

а) *Назвать коэффициенты в выражениях*: $4x$; b; $2xy$; cd.

б) *Упростить записи следующих выражений*: $1\cdot a+2$; $1\cdot ab+$ $+1$; $5+1\cdot x$. Далее вспоминается, что разумеется под умножением на дробь. Умножить на дробь — значит найти дробь числа. Умножить a на $\frac{3}{4}$ — значит найти $\frac{3}{4}$ числа a:

$$a\cdot\frac{3}{4}=\frac{a\cdot 3}{4}=\frac{3a}{4}.$$

С другой стороны, $a \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} a$. Значит, $\frac{3}{4} a = \frac{3a}{4}$. Сомножитель $\frac{3}{4}$ — коэффициент.

Дробный числовой сомножитель буквенного выражения также называют коэффициентом и ставят в произведении на первом месте.

Если алгебраическое выражение имеет знак «минус», то можно считать, что оно имеет отрицательный коэффициент, например: $-3a^2 = (-3)\,a^2$.

В выражениях $-a$, $-ax^2$ коэффициент равен -1, так как

$$-a = (-1)\,a; \quad -ax^2 = (-1)\,ax^2.$$

Коэффициент -1 не пишется; в таком случае знак «минус» относится к буквенному сомножителю:

$$-1a = -a; \quad -1ab = -ab.$$

Можно привести доступные пониманию учащихся примеры использования понятия «коэффициент» в практике и науке.

Усадкой называется сокращение линейных размеров (и объема) материалов из-за потери влаги, уплотнения, затвердевания. Например, усадка бетона происходит при его затвердевании на воздухе. Коэффициент усадки обычного бетона при расчетах принимается равным 0,00015. Если построена бетонная стена длиной c метров, то после затвердевания длина стены окажется короче приближенно на $0{,}00015\,c$ метров.

Коэффициент линейного расширения железа при нагревании равен 0,000016. Значит, при нагревании куска железа длиной в 1 *см* на 1° С его длина увеличится приближенно на 0,000016 *см*. Если железный стержень при 0° имеет длину, равную d сантиметров, то при нагревании его на $t°$ длина увеличится на $0{,}000016dt$ сантиметров и станет равна $d + 0{,}000016dt$ сантиметров.

Коэффициент полезного действия паровых машин не превосходит 0,2, а для гидравлических прессов достигает 0,9.

Изложенные выше сведения о числовом коэффициенте на первых порах достаточны для учащихся VI класса. Когда появится надобность, понятие коэффициента без особых затруднений может быть расширено.

4. Приведение подобных членов. Понятие о тождестве

Успех приведения подобных членов многочлена зависит от навыков в подсчете алгебраических сумм рациональных чисел. Приступая к изучению приведения, целесообразно предложить ряд примеров на вычисление алгебраических сумм.

Написав несколько подобных одночленов, подмечают, что среди них имеются равные, имеются и такие, которые отличаются коэффициентами. Такие одночлены называют подобными. В другой строке представлены подобные и неподобные им одночлены; ученики подчеркивают подобные. После двух-трех таких упражнений предлагают определить, какие одночлены называются подобными.

Если подобные одночлены входят в состав многочлена, то их называют подобными членами.

Дан многочлен $10ab+3ab-7ab$. Все члены его подобны. По распределительному закону умножения алгебраической суммы можно записать:

$$10ab+3ab-7ab=(10+3-7)\,ab=6ab.$$

Многочлен, составленный из подобных членов, заменим одночленом. Замена алгебраической суммы нескольких подобных членов многочлена одним членом называется приведением подобных членов. Выполнив аналогично предыдущему еще примеры на приведение, учащиеся формулируют правило.

Между выполнением действий первой ступени над именованными числами одного и того же наименования и приведением подобных членов многочлена имеется аналогия, которую иногда рекомендуют использовать при изучении приведения подобных членов. Некоторые учителя пользуются этой аналогией. Однако такое истолкование приведения подобных членов искажает понятие одночлена: обращает буквенный сомножитель в наименование. Использовать такую аналогию не рекомендуется.

Если многочлен содержит подобные члены двух или более видов, то при приведении приходится опираться на переместительный и сочетательный законы алгебраической суммы.

Это показывается на примере:

$x^2+a^3-3a^3+1{,}5x^2-2{,}3a^3=$	По переместительному закону суммы.
$=x^2+1{,}5x^2+a^3-3a^3-2{,}3a^3=$	По сочетательному закону суммы.
$=(x^2+1{,}5x^2)+(a^3-3a^3-2{,}3a^3)=$ $=2{,}5x^2-4{,}3a^3.$	По правилу приведения подобных членов.

Применение переместительного и сочетательного законов показывается еще на одном-двух примерах. В дальнейшем выкладки оформляются так:

$$a^2-4xy+2x^2+xy-5x^2-1{,}5xy=a^4-4{,}5xy-3x^2.$$

Опираясь на приведение подобных членов и формулы, выражающие законы действий, целесообразно дать понятие о тождестве и тождественных преобразованиях: с ними приходится иметь дело при изучении всей главы о целых алгебраических выражениях, а также и в последующих главах.

Даны два выражения: $5x—3x$ и $2x$. Найдем их числовые значения при различных значениях x. Результаты запишем в таблицу:

Таблица 15

x	0	1	2	—1	—2	0,5	—0,5	1,2	—1,4
$5x—3x$ $2x$	0 0	2 2	4 4	—2 —2	—4 —4	1 1	—1 —1	2,4 2,4	—2,8 —2,8

При одном и том же значении x числовые значения обоих выражений оказываются всегда равными между собой. Это легко объяснить, так как

$$5x—3x=2x.$$

Выражения $5x—3x$ и $2x$ называют тождественными или тождественно равными. Известно, что выражения $a+b$ и $b+a$, ab и ba, $(a+b)c$ и $ac+bc$ соответственно тождественно равные. Учащиеся сформулируют определение: два выражения называются тождественно равными, если они имеют равные числовые значения при всех значениях входящих в них букв.

Такое определение достаточно для VI класса, где учащиеся имеют дело с целыми выражениями. В VII классе изучаются дробные тождественные выражения. В определение придется внести поправку: два выражения называются тождественно равными, если они принимают равные числовые значения при всех допустимых значениях входящих в них букв. Если педагог решил дать в VI классе определение в последней редакции, то его введение надо подготовить рассмотрением примеров такого вида:

$$1)\ \frac{x^2-x}{x} \text{ и } x-1;\quad 2)\ \frac{a^2-4}{a-2} \text{ и } a+2.$$

В первом из них первое выражение не имеет числового смысла при $x=0$, поэтому нуль исключается из допустимых значений. Во втором примере исключается из допустимых значений число 2.

Теперь вводится понятие тождества. Любая формула, выражающая закон действий, дает пример тождества. Равенства, получаемые в результате приведения подобных членов,— тождества.

Тождествами называют также верные равенства, записанные при помощи цифр: Например:

$$99+998=(100+1000)-1-2;\quad 49\cdot 11=49\cdot 10+49;$$
$$(-7)\cdot(+2)\cdot(-3)=42$$

суть тождества.

Таким образом, тождеством называется равенство, верное при любых (допустимых) значениях входящих в него букв; тождествами называются и все верные равенства, не содержащие букв.

Замена алгебраического выражения другим, тождественно равным ему, называется тождественным преобразованием. Приведение подобных членов, выполнение действий над рациональными числами — примеры тождественных преобразований.

5. Сложение и вычитание многочленов

1) Выяснение содержания понятия о сложении многочленов начинается с примеров. Одночлены — подмножество множества многочленов: нет надобности рассматривать отдельно сложение одночленов. Достаточно изучить сложение многочленов.

Даны многочлены: a^2-2a; -6. Их сумма записывается так:

$$(a^2-2a)+(-6).$$

Это выражение — алгебраическая сумма. Получаем:

$$(a^2-2a)+(-6)=a^2-2a-6. \tag{1}$$

Сумму многочленов $3x^3$, $-x^2+2$ записывают так:

$$3x^3+(-x^2+2).$$

Многочлен в скобках — алгебраическая сумма, а чтобы прибавить такую сумму, надо последовательно приписать каждое слагаемое с его знаком. Получаем:

$$3x^3+(-x^2+2)=3x^3-x^2+2. \tag{2}$$

Аналогично этим примерам рассматриваются и такие:

$$c^5+(-2c^4)+(+c^3);\ (2x^3-x^2)+(-2x^2+x).$$

Последний пример заканчивается приведением подобных членов.

Формулируется правило-определение: чтобы сложить многочлены, следует к первому из них приписать все члены остальных с их знаками; если в полученном выражении окажутся подобные члены, то их надо привести.

После выполнения нескольких примеров, пользуясь правилом, обращаем внимание учеников на то, что при сложении приходится опускать (раскрывать) скобки, перед каждой из которых стоит знак «плюс». Во всех случаях скобки со стоящим перед ними знаком «плюс» опускаются, а члены, стоящие в скобках, приписываются с их знаками.

В дальнейшем правило раскрытия скобок при сложении становится основным при решении примеров.

Полезно обратить внимание учеников на то, что переместительный и сочетательный законы распространяются на сложение многочленов.

Сделать это можно на примерах. Доказать тождества:

а) $(5c^3-c)+7c=7c+(5c^3-c)$;
б) $(2a^2-3)+(-4a+3)=(-4a+3)+(2a^2-3)$.

По неполной индукции делается заключение о верности переместительного закона.

Доказывая тождества:

а) $5x^3+[(2-x^3)+(2x^3-2)]=[5x^3+(2-x^3)]+(2x^3-2)$;
б) $y^4-y+[(y^3+2)+(y^2+y-2)]=[(y^4-y)+(y^3+2)]+(y^2+y-2)$,

учащиеся сделают заключение о сочетательном законе.

2) Восстановив в памяти учащихся понятие о противоположных числах, полезно ввести понятие о противоположных многочленах.

Многочлены:

$$+2a \text{ и } -2a;$$
$$a^3-1 \text{ и } -a^3+1;$$
$$-x^2+5x-6 \text{ и } x^2-5x+6,$$

стоящие в одной и той же строке, отличаются друг от друга только знаками соответствующих членов. Путем устного сложения легко убедиться, что суммы многочленов одной строки равны нулю. Аналогично противоположным числам, каждая пара таких многочленов называется взаимно противоположной. При одном и том же значении букв числовые значения двух противоположных многочленов — противоположные числа. Это проверяется на тех же примерах. Учащиеся легко приведут примеры взаимно противоположных многочленов.

Аналогично сложению многочленов излагается вычитание их. Целесообразно решить несколько примеров на вычитание рациональных чисел и вспомнить правило вычитания.

Рассматриваются примеры:

$$(+3b^4)-(+2b^3)-(-4b^2)=3b^4-2b^3+4b^2. \tag{4}$$

$$(c^5-4c^4)-(-c^3+2c^2-c)=c^5-4c^4+c^3-2c^2+c. \tag{5}$$

$$8m^7-(-m^6)-(+m^5)-(5m^4-m^3+m^2)=8m^7+m^6-m^5-5m^4+$$
$$+m^3-m^2. \tag{6}$$

При решении примера (4) рассуждают так: вычитание любого числа можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Для одночленов $+2b^3$ и $-4b^2$ противоположными будут соответственно $-2b^3$ и $+4b^2$. На этом основании получаем

$$3b^4-2b^3+4b^2.$$

Такие же рассуждения позволяют выполнить вычитание в примерах (5) и (6).

Получаем: чтобы вычесть многочлен, надо приписать к уменьшаемому все члены вычитаемого с противоположными знаками.

Опираясь на те же примеры, даем и правило раскрытия скобок при вычитании. Оно применяется к решению примеров.

Иногда в связи со сложением и вычитанием многочленов дают не только правила раскрытия скобок, но и правила заключения в скобки. Такой прием полезен — он подготавливает к рассмотрению некоторых способов разложения на множители.

6. Умножение многочленов

Умножение многочленов в методическом отношении детально разработано и удачно излагается во многих учебных руководствах по алгебре, в частности и в учебнике алгебры для восьмилетней школы А. Н. Барсукова. Нет надобности в детальном рассмотрении этого вопроса. Ограничимся некоторыми методическими указаниями.

При обосновании умножения одночленов приходится опираться на понятие степени, правило знаков при умножении рациональных чисел, правило умножения на произведение, переместительный и сочетательный законы умножения. Этот материал целесообразно повторить за 1—2 урока до изучения умножения степеней одного и того же основания.

Теорему об умножении степеней одного и того же основания полезно начать с рассмотрения примеров: $a^2 \cdot a^3$, $c^4 \cdot c^2$, $n^3 \cdot n^4$. Такие примеры помогают ученикам усвоить суть операции и сформулировать теорему, чтобы затем без затруднений понять известное общее доказательство.

Среди примеров на умножение степеней с одинаковыми основаниями найдут место и такие: $m \cdot m^5$, $n^7 \cdot n$. Они позволят напомнить, что $a^1=a$, и покажут целесообразность определения символа a^1, которое ранее было введено догматически.

При изучении умножения целесообразно обратить внимание на то, что переместительный, сочетательный и распределительный законы присущи действию умножения.

Верность законов подтверждается примерами.

Доказать тождества:

1) $(c^2-c-1)(c-1)=(c-1)(c^2-c-1)$;
2) $(a+1)[(a-1)(2a-1)]=[(a+1)(a-1)](2a-1)$;
3) $[2a+(a^2-1)](a^2-1)=2a(a^2-1)+(a^2-1)^2$.

Такого рода упражнения позволят показать, что перечисленные законы сохраняются для множества многочленов. Этими законами учащиеся пользуются в тождественных преобразованиях, например при разложении на множители.

При решении примеров на умножение многочленов полезно показать, что произведение целых чисел находится по правилу умножения многочлена на многочлен. Это можно сделать для двузначных и трехзначных чисел:

$$(10a+b)(10m+n);\ (100a+10b+c)(10m+n).$$

Для подготовки к обоснованию формул умножения решаются примеры:

$$(a+b)(a+b);\ (a+b)(a-b);\ (a-b)(a-b).$$

Произведение двух биномов можно применить к получению формулы упрощенного приближенного умножения чисел, близких к единице.

Числа, большие единицы и близкие к ней, можно обозначить так: $1+a$, $1+b$, где a и b сравнительно с единицей малые числа, например: $1{,}01=1+0{,}01$; $1{,}002=1+0{,}002$.

Найдем произведение

$$(1+a)(1+b)=1+a+b+ab.$$

Член ab по сравнению с другими членами многочлена очень мал. Если его отбросить, получим формулу

$$(1+a)(1+b)\approx 1+a+b, \tag{а}$$

позволяющую находить приближенные произведения чисел, близких к единице.

Пример: $1{,}01\cdot 1{,}02=(1+0{,}01)(1+0{,}02)\approx 1+0{,}01+0{,}02=1{,}03$.

Аналогично получаются формулы:

$$(1-a)(1-b)\approx 1-a-b. \tag{б}$$

$$(1+a)(1-b)\approx 1+a-b. \tag{в}$$

$$(1-a)(1+b)\approx 1-a+b. \tag{г}$$

7. Формулы умножения

После умножения многочленов было бы естественно перейти к изучению четвертого действия — деления. Однако возведение в натуральную степень — частный случай умножения. Целесообразно отступить от нормального порядка действий и заняться возведением в степень одночленов. Такое отступление надо разъяснить учащимся.

Возведение степени в степень и одночлена в степень не требует рассмотрения: действие усваивается без особых затруднений. Оно открывает возможность изучить формулы умножения

По программе формулы произведения суммы двух чисел на их разность, квадрата и куба двучлена излагаются в VI классе, а формулы

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

— в VII классе. Мотивом такого распределения формул по классам является стремление разгрузить программу VI класса.

Если педагог научил школьников правильно и быстро читать алгебраические выражения, то при изложении формул можно применить методы с активным их участием, вплоть до самостоятельного вывода и чтения формул.

Первую формулу:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (1)$$

полезно дать, используя эвристический метод. Перед учениками можно поставить вопросы: 1) *Какое действие?* 2) *Какой случай?* 3) *Как читается правило?*

Выполнив умножение и приведение подобных членов, ученики записывают равенство исходного и полученного выражений; они обычно легко и безошибочно читают теорему.

По предложению педагога учащиеся повторяют вывод первой формулы. При решении первых примеров разъясняется значение ее. Выкладки рекомендуется записывать так:

а) $(a^3+2a)(a^3-2a)=(a^3)^2-(2a)^2=a^6-4a^2$;
б) $(-3x-4y^2)(-3x+4y^2)=(-3x)^2-(4y^2)^2=9x^2-16y^4$.

Промежуточное выражение в выкладках облегчает применение формулы, помогает ученикам избежать ошибок и подготовляет применение таких же записей в дальнейшем изучении формул. В примере б) учащиеся должны увидеть произведение алгебраической суммы двух выражений на разность тех же выражений. Среди примеров найдут место и такие: $51\cdot 49$, $38\cdot 42$, $83\cdot 77$. Простейшие из них рекомендуется решать устно.

Учащиеся выведут вторую формулу и запишут правило самостоятельно. Задание записывается перед уроком на классной доске примерно в такой редакции:

1) *Вывести формулу умножения для* $(a+b)^2$.

2) *Записать правило.*

3) *Придумать три примера на применение формулы и решить их.*

В задании основные пункты 1) и 2), а пункт 3) рассчитан на учащихся, хорошо и быстро думающих и пишущих.

Разъяснив задание и ответив на возможные вопросы, преподаватель предоставляет на его выполнение 12—15 минут. Во время самостоятельной работы он консультирует учеников, проверяет записи, устраняет ошибки. Учащимся разрешается советоваться друг с другом, сличать результаты. Когда все учащиеся выполнят 1) и 2) пункты, самостоятельная работа заканчивается и подводятся итоги: вывод формулы повторяется с записью его на классной доске для $(m+n)^2$, читается теорема, решаются примеры.

Записи оформляются так:

а) $(a^2+3)^2=(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot 3+3^2=a^4+6a^2+9$;

б) $(2a^3+a^4)^2=(2a^3)^2+2\cdot 2\cdot a^3\cdot a^4+(a^4)^2=4a^6+4a^7+a^8$.

Опыт показывает, что описанная самостоятельная работа выполняется учениками с интересом и правильно.

Среди устных примеров предлагаются следующие:

$$21^2;\quad 42^2;\quad \left(30\frac{1}{2}\right)^2.$$

Полезно отметить, что при выводе формулы

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (2)$$

никакие ограничения на знаки a и b не накладываются: формула (2) верна и тогда, когда или a, или b, или одновременно a и b — отрицательные.

Третью формулу:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (3)$$

учащиеся выведут самостоятельно. Задание аналогично приведенному выше.

Учащиеся могут дать два различных вывода формулы (3): один — аналогичный выводу формулы (2), другой — путем замены в формуле (2) числа b на $-b$.

В устные занятия включаются такие примеры: 19^2, 48^2, $\left(59\frac{1}{2}\right)^2$.

Программа не содержит применения формул умножения к приближенному возведению во вторую и третью степень чисел, близких к единице. При благоприятных условиях педагог может ввести и этот материал в виде упражнений.

Число, немного большее единицы, можно записать так: $1+a$, где a в сравнении с единицей — малая положительная дробь.

В формуле

$$(1+a)^2=1+2a+a^2$$

a^2 по сравнению с двумя другими членами правой части — очень малое число. Отбросив его, получим приближенную формулу:

$$(1+a)^2\approx 1+2a. \qquad (а)$$

Например, $1,01^2=(1+0,01)^2\approx 1+2\cdot 0,01=1,02$.

Аналогично можно получить другую формулу для возведения в квадрат чисел, немного меньших единицы:

$$(1-a)^2\approx 1-2a. \qquad (б)$$

Например, $0,99^2=(1-0,01)^2\approx 1-2\cdot 0,01=0,98$.

В сборнике задач по алгебре П. А. Ларичева соответствующие примеры даны для VI класса, а в учебнике алгебры А. Н. Барсукова изучение этих формул отнесено на начало обучения в VIII классе.

При первоначальном знакомстве с формулами идет речь о возведении в квадрат чисел, близких к единице; однако они применяются и к другим числам, которые можно представить в виде суммы или разности круглого числа и числа, сравнительно малого с ним, например:

$$20,1^2=(20+0,1)^2\approx 404;$$
$$29,9^2=(30-0,1)^2\approx 894.$$

Здесь также применяются приближенные формулы:

$$(a\pm b)^2\approx a^2\pm 2ab,$$

где b по сравнению с a — малое число.

Формула куба суммы двух чисел излагается в эвристической беседе, а в хорошо подготовленном классе можно предложить вывести эту формулу самостоятельно. Целесообразно указать, что данное выражение можно записать так:

$$(a+b)^3=(a+b^2)(a+b).$$

После выполнения задания подводятся итоги и фронтально решаются примеры. Записи оформляются так:

а) $(4+x^2)^3=4^3+3\cdot 4^2\cdot x^2+3\cdot 4\cdot (x^2)^2+(x^2)^3=64+48x^2+12x^4+x^6$;

б) $(c^5+c^2)^3=(c^5)^3+3\cdot (c^5)^2\cdot c^2+3\cdot c^5\cdot (c^2)^2+(c^2)^3=c^{15}+3c^{12}+3c^9+c^6$.

Отмечается, что в формуле

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (4)$$

числа a и b могут быть как положительные, так и отрицательные.

Следующая формула:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad (5)$$

выводится в порядке самостоятельной работы учащихся.

Иногда рекомендуется давать геометрические истолкования простейшим формулам. Такое истолкование доступно, если в выражении $(a+b)^2$ члены бинома положительны. Не рекомендуем рассматривать различные возможные комбинации знаков у этих членов, так как истолкование становится громоздким, требующим затраты значительного времени.

Учитывая интересы дальнейшего обучения, полезно тренировать учащихся в словесном чтении формул, начиная с правой части. Это понадобится при разложении на множители.

Упражнения на применение формул умножения целесообразно давать в различных записях, среди которых найдут место и такие:

$$(4a^2-b^3)(4a^2-b^3);\ (1+x^2)^2(x^2+1);\ (c-1)(c-1)(c-1).$$

Не всегда учащиеся усматривают применимость формул. Формулы умножения (4) и (5) дают возможность получить приближенные формулы для возведения в куб чисел, близких к единице.

Обозначив число, немного большее единицы, $1+a$, где a — малая положительная дробь, можно по формуле (4) написать:

$$(1+a)^3=1+3a+3a^2+a^3.$$

Третий и четвертый члены правой части очень малы по сравнению с остальными. Отбросив их, получим приближенную формулу:

$$(1+a)^3\approx 1+3a. \qquad \text{(в)}$$

Например, $1{,}01^3=(1+0{,}01)^3\approx 1{,}03$.

Аналогично получается формула для возведения в куб чисел, немного меньших единицы:

$$(1-a)^3\approx 1-3a. \qquad \text{(г)}$$

Пример: $0{,}98^3=(1-0{,}02)^3\approx 0{,}94$.

Так как в формулах умножения под a и b разумеются и положительные и отрицательные числа, то формулы (3), (5) можно рассматривать как частные случаи соответственно формул (2) и (4). На этом основании сделано предложение ограничиться изучением только трех формул — (1), (2), (4). Осуществление этой рекомендации позволяет сократить число теорем для заучивания и вместе с тем укрепляет мысль, что под буквами разумеются любые числа из множества рациональных чисел, если только структура алгебраического выражения не накладывает ограничений на допустимые значения. Тогда по формуле квадрата алгебраической суммы можно решить примеры:

а) $(x^4-x^3)^2=(x^4)^2+2\cdot x^4(-x^3)+(-x^3)^2=x^8-2x^7+x^6$;

б) $(-x^2+x^5)^2=(-x^2)^2+2\cdot(-x^2)\cdot x^5+(x^5)^2=x^4-2x^7+x^{10}$.

По формуле куба суммы можно решить пример:

в) $(x^5-x^2)^3=(x^5)^3+3\cdot(x^5)^2\cdot(-x^2)+3x^5\cdot(-x^2)^2+(-x^2)^3=x^{15}-$
$-3x^{12}-3x^9-x^6$.

Согласно программе в восьмилетней школе изучается только деление на одночлен. Обучение делению степеней с одинаковыми основаниями и делению на одночлен хорошо разработано в учебных руководствах и не нуждается в детальном рассмотрении.

В конце учебного года при обзорном повторении полезно сопоставить действия и их свойства над рациональными числами и многочленами. По результатам такого сопоставления можно составить таблицу 16.

a, b, c — рациональные числа	A, B, C — многочлены
Действие сложения однозначно выполнимо	
$a+b$ — рациональное число	$A+B$ — многочлен
Переместительный закон сложения:	
$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
Сочетательный закон сложения:	
$a+(b+c)=(a+b)+c$ По данным числам a и b всегда можно найти такое число x, что $a+x=b$, или $x=b-a$	$A+(B+C)=(A+B)+C$ По данным многочленам A и B всегда можно найти такой многочлен X, что $A+X=B$, или $X=B-A$
Вычитание всегда выполнимо	
Действие умножения однозначно выполнимо	
ab — рациональное число	AB — многочлен
Переместительный закон умножения:	
$ab=ba$	$AB=BA$
Сочетательный закон умножения:	
$a(bc)=(ab)c$	$A(BC)=(AB)C$
Распределительный закон умножения относительно сложения:	
$(a+b)c=ac+bc$ По данным числам $a\neq0$ и b всегда можно найти число x такое, что $ax=b$, или $x=\frac{b}{a}$. Деление всегда выполнимо, кроме деления на 0.	$(A+B)C=AC+BC$ Деление многочленов не всегда выполнимо.

8. Задачи на доказательство

К задачам на доказательство близки задачи, связанные с тождественными преобразованиями. Рассматривая их, надо познакомить учащихся с основными приемами доказательства:

1) *Сумма двух нечетных чисел есть число четное. Доказать.*

Примеры, которые приведут учащиеся, покажут, что теорема — задача весьма правдоподобная, но нужно выполнить доказательство.

2) *Сумма четного и нечетного чисел есть число нечетное. Доказать.*

Вводится общая запись нечетного и четного чисел.

3) *Подставляя вместо букв числа, убедиться, что выражения* x^3+y^3 и $(x^2+y^2)(x+y)$ *не являются тождественно равными.*

Подстановка вместо букв числовых значений не может доказать тождественности выражений, но легко обнаруживает, что выражения нетождественные.

4) *Доказать, что выражения* $(a-b)^3$ и $(b-a)^3$ *не являются тождественно равными.*

5) *Доказать тождество:* $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

При доказательстве тождеств нередко одна часть преобразуется в другую.

Путем замены: а) *a на* $-a$, б) *b на* $-b$ *и* в) *c на* $-c$ *получить новые тождества.*

6) *Двузначное число, оканчивающееся цифрой* 5, *записывают так:* $10a+5$. *Какие значения принимает* a?

Доказать, что $(10a+5)^2=a(a+1)\cdot 100+25$.

Применить тождество для устных вычислений: 35^2, 55^2, 75^2.

7) *Доказать тождество* $\left(a+1\frac{1}{2}\right)^2=a(a+1)+\frac{1}{4}$. Применить это тождество для вычисления:

$$\left(10\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(12\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(15\frac{1}{2}\right)^2.$$

8) *Если* $10a+b$ *и* $10c+b$ — *двузначные числа, у которых сумма десятков равна* 10, *то* $(10a+b)(10c+b)=(ac+b)\cdot 100+b^2$. *Доказать.*

9) $10a+b$ и $10b+a$ — *двузначные числа, отличающиеся порядком цифр. Доказать, что* $(10a+b)(10b+a)=101ab+10(a^2+b^2)$.

Применить эту формулу для вычислений: $34\cdot 43$, $57\cdot 75$, $69\cdot 96$.

10) *Доказать тождество* $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$.

Иногда для доказательства преобразуют отдельно левую часть, и правую часть, пока не получат равные выражения.

11) *Доказать тождество* $(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$.

12) *Доказать тождество* $(a-b)^2=(b-a)^2$.

13) *Если* $10a+b$ и $10a+c$ — *двузначные числа, у которых* $b+c=10$, *то* $(10a+b)(10a+c)=(a^2+a)100+bc$.

Вычислить: $53\cdot 57$, $46\cdot 44$, $79\cdot 71$.

14) *Доказать, что сумма двузначного числа и числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на* 11.

15) *Сумма трех последовательных нечетных чисел делится на* 3. *Доказать.*

16. *Сумма трех последовательных четных чисел делится на* 6. *Доказать*[1].

---

[1] См.: И. В. Баранова, С. Е. Ляпин. Задачи на доказательство по алгебре. Учпедгиз, 1954. И. А. Гибш. Методика обучения алгебре в VI классе восьмилетней школы. Изд-во АПН РСФСР, 1963.

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

1. Уравнения

Первая тема курса алгебры VII класса — «Уравнения первой степени с одним неизвестным». Согласно программе тема начинается с понятий о тождестве и уравнении.

В восьмилетней школе по педагогическим соображениям целесообразно рассматривать понятия «тождества» и «уравнения» отдельно, в разное время и вне связи между собой. При изучении целых алгебраических выражений рассматривают тождественные преобразования. Естественно и понятие о тождестве ввести в этой главе. При изучении алгебраических дробей, если потребуется, можно возвратиться к этому понятию и уточнить его. Понятие об уравнении вводится также в VI классе в главе о рациональных числах. Приступая в VII классе к изучению специальной главы об уравнениях, целесообразно уточнить понятие «уравнение» и познакомить учеников с новыми видами уравнений, какие встретятся в курсе алгебры VII класса.

Систематическое изучение уравнений начинается до изучения разложения на множители и алгебраических дробей. Поэтому в рассматриваемой теме возможно только решение целых уравнений с числовыми коэффициентами. Уравнения с дробными членами отнесены к главе «Алгебраические дроби». Уравнения рассматриваются на множестве рациональных чисел.

К изучению главы об уравнениях первой степени с одним неизвестным учащиеся приступают, уже имея некоторые навыки в их решении и даже располагая некоторым опытом применения уравнений к решению задач. Основным методом установления свойств уравнений является неполная индукция. Никакие теории, опирающиеся на дедуктивный метод, использовать в VII классе нельзя: они мало доступны семиклассникам.

Прежде всего предстоит расширить понятие об уравнении, на конкретных примерах показать учащимся такие уравнения, с какими они ранее не встречались. Наметим план изложения.

Пример 1. Пусть дано уравнение:

$$2x+5=5x-4. \qquad (1)$$

Левая и правая часть его — алгебраические выражения. И в том и в другом выражении можно давать x любые рациональные значения. Составим таблицу значений выражений при различных значениях x:

Таблица 17

x	$2x+5$	$5x-4$	x	$2x+5$	$5x-4$
0	5	-4	2	9	6
$\frac{1}{2}$	6	$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	10	$8\frac{1}{2}$
1	7	1	3	11	11
$1\frac{1}{2}$	8	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	12	$13\frac{1}{2}$

Таблица показывает, что алгебраические выражения при одних и тех же значениях x принимают, вообще говоря, различные значения. Однако, когда $x=3$, оба выражения принимают равные значения. Значит, 3 — корень уравнения (1).

Пример 2. Рассмотрим уравнение:

$$x^2+1=(x+1)^2-2x. \tag{2}$$

Вновь имеем равенство двух выражений, содержащих обозначенное буквой неизвестное.

Если составить таблицу, аналогичную рассмотренной, то убедимся, что при любых значениях x левая часть равна правой. Значит, уравнение (2) имеет бесконечное множество решений: любое рациональное число является его корнем. Уравнение называется неопределенным.

Пример 3. Рассмотрим такое уравнение:

$$2x=2x+1. \tag{3}$$

При любом значении x значение правой части больше значения левой на 1. Уравнение не имеет решений. Оно называется противоречивым.

Пример 4. *Турист идет со скоростью 4 км в час. Какой путь он пройдет, если будет находиться в движении t часов?*

Если длину пути обозначить s, то получим: $s=4t$.

Отвлечемся от содержания задачи. Рассмотрим равенство:

$$s=4t. \tag{4}$$

Вновь имеем равенство двух алгебраических выражений. Составим таблицу:

Таблица 18

t	0	1	1,5	2	2,5	3	4
s	0	4	6	8	10	12	16

t принимает любые рациональные значения, каждому значению t соответствует определенное значение s. Равенство (4) — уравнение с двумя неизвестными, а пары чисел, стоящие в столбцах таблицы, — некоторые его решения. Уравнение (4) имеет бесконечное множество решений. Однако не всякая пара рациональных чисел является его решением. Каждому произвольно заданному значению t соответствует вполне определенное значение s.

Затем с учениками повторяют понятия о решении, о частях уравнения и членах его. По числу неизвестных выделяются уравнения с одним неизвестным, с двумя неизвестными.

2. Свойства уравнений

Введение понятия *равносильности уравнений* конкретизируется рассмотрением примеров равносильных и неравносильных уравнений. Приведем один из вариантов изложения этого материала.

Даны два уравнения:

$$x+5=7 \text{ и } 5x=10.$$

Учащиеся устно решают и убеждаются в том, что корень первого из них является корнем второго, и наоборот. Такие уравнения называются равносильными.

Рассматриваем еще два уравнения:

$$x-3=7, \quad x^2=16.$$

Устное решение покажет, что они имеют различные корни. Такие уравнения называются неравносильными. Преподаватель предлагает учащимся придумать по паре равносильных, затем по паре неравносильных уравнений. Из приведенных примеров ученики рассматривают несколько пар уравнений.

Затем они дают определение понятия о равносильных уравнениях: два уравнения называются равносильными, если каждое решение первого из них является решением второго и каждое решение второго является решением первого.

Для проверки предлагается выяснить, равносильны ли уравнения каждой из следующих пар:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 7x-1=34; & \text{б) } 15+2x=25; & \text{в) } 3x-1=-13; \\ \quad x^2-25=0; & \quad 3x-17=-2; & \quad 4x-2=147. \end{array}$$

При решении уравнения желательно делать такие преобразования, которые приводили бы к уравнению, равносильному данному. Поэтому важно знать, какие преобразования приводят к равносильному уравнению, а какие могут привести к уравнению неравносильному. С этой целью надо изучить свойства уравнений.

Первое свойство. Пусть дано уравнение:

$$2x-3=13.$$

Прибавим к обеим частям его любое число, например 7. Получим:

$$2x+4=20.$$

Найдем устно решения каждого из этих уравнений. Уравнения равносильны.

К обеим частям уравнения $x-a^2=5a^2$ прибавим по $-2a^2$. Получим: $x-3a^2=3a^2$. Решим каждое из них. Видим, что уравнения равносильны.

К обеим частям уравнения $3x=15-2x$ прибавим целое относительно x выражение $2x$. Получим $5x=15$. Это уравнение имеет корень, равный 3. Исходное уравнение имеет корень, также равный 3. Других корней оно не имеет: при $x=3$ обе части имеют равные значения; если x дать значения больше 3, то значение левой части увеличится, а правой уменьшится; если x дать значение меньше 3, то значение левой части уменьшится, а правой увеличится.

Можно использовать такую формулировку: если к обеим частям уравнения прибавить число или целое относительно неизвестного выражение, то получится уравнение, равносильное данному.

Так как вычитание сводится к прибавлению противоположного числа или выражения, то первое свойство имеет место и тогда, когда из обеих частей вычитается число или целое относительно x выражение.

Это свойство имеет следствия:

1) *Дано уравнение:* $5x-4=4x+5$. Неизвестные в обеих частях. Это затрудняет решение. Прибавим к обеим частям выражение $-4x+4$. Получим: $5x-4x=5+4$. Это уравнение равносильно первоначальному по первому свойству. Сравнивая полученное уравнение с данным, видим, что члены $4x$ и -4 перенесены из одной части в другую с противоположными знаками.

Рассматриваем еще один-два примера. Формулируем следствие: любой член уравнения можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком; при этом получается уравнение, равносильное данному.

Опираясь на это следствие, *решить уравнения*: $7x+11=$ $=6x-5$, $2(5x-2)=3(3x-1)$.

2) В обеих частях уравнения $x^2+2x+1=x^2+x$ имеются одинаковые члены. Прибавим к обеим частям по $-x^2$. Получим уравнение, по первому свойству равносильное данному: $2x+1=x$. Одинаковые члены уничтожены. Рассматриваем еще один-два примера и формулируем второе следствие: одинаковые члены в обеих частях уравнения можно взаимно уничтожить (вычеркнуть); при этом получится уравнение, равносильное данному.

Опираясь на следствие, *решить уравнения*: $x^2-x=(x-1)^2$, $4x^2-x=(2x-1)^2$.

Второе свойство. Обе части уравнения $2+x=7$ умножим на одно и то же число, например на 3. Получим: $6+3x=21$. Решая устно, убеждаемся, что уравнения равносильны.

Дано уравнение: $2ax-a=ax+a$, $a\neq 0$. Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{a}$. Получим: $2x-1=x+1$. Убеждаемся, что данное и полученное уравнения равносильны.

Однако при умножении обеих частей на нуль равносильность нарушается. Уравнения $2x+1=5$ и $(2x+1)\cdot 0=5\cdot 0$ неравносильные: первое имеет корень 2, а второе — бесконечное множество решений. При любом значении x левая и правая части второго уравнения равны между собой: каждая равна нулю.

При умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может получиться уравнение, не равносильное исходному. Например, уравнения $x=4$ и $x^2=4x$ неравносильные. Первое имеет решение 4, а второе имеет два решения: 4 и 0.

Получаем второе свойство: если обе части уравнения умножить на одно и то же число или выражение, не равное нулю и не содержащее неизвестного, то получится уравнение, равносильное данному. Деление всегда можно заменить умножением на обратное число или выражение. Значит, если обе части уравнения разделить на число или выражение, не равное нулю и не содержащее неизвестного, то получится уравнение, равносильное данному.

Из второго свойства получим следствия:

1) Все члены уравнения $5x+10=15x+20$ имеют общий множитель 5. Разделив обе части на 5, на основании второго свойства получим уравнение $x+2=3x+4$, равносильное данному.

Полезно рассмотреть еще уравнения, например такие:

$$14x-7=42-35x,\quad 4bx+b=3bx-b.$$

Получаем первое следствие: все члены уравнения можно разделить на одно и то же число или выражение, не равное нулю и не содержащее неизвестного; получается уравнение, равносильное данному.

2) Дано уравнение с дробными коэффициентами:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{x}{4}.$$

Умножив обе части на наименьший общий знаменатель, получим уравнение с целыми коэффициентами: $2x-4=x$. По второму свойству это уравнение равносильно данному.

Рассматриваем еще один-два примера. В результате имеем второе следствие: уравнение можно освободить от дробных коэффициентов; получится уравнение, равносильное данному.

Решить:

$$\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}x-1;\quad \frac{x}{3}-\frac{1}{5}=x-\frac{1}{3}.$$

3) Умножим обе части уравнения $-1-2x=-2+3x$ на -1, получим уравнение $1+2x=2-3x$, которое по второму свойству равносильно данному.

Получаем: перед всеми членами уравнения можно изменить знаки на противоположные; получится уравнение, равносильное данному.

3. О решении уравнений

А. Решение уравнений первой степени с одним неизвестным опирается на тождественные преобразования частей уравнения и учение о равносильности уравнений. Чтобы теоретические положения не оказались оторванными от практики решения, учащимся предлагается при решении делать ссылки на те свойства и следствия, которые применяются при преобразовании уравнения; при этом они дают соответствующие формулировки. Это способствует прочному усвоению свойств уравнений и их следствий. Только тогда, когда преподаватель убедится, что учащиеся сознательно применяют теоретические положения и правильно читают их, допускается решать уравнения без ссылок на эти положения.

Приступая к решению уравнений целых относительно неизвестного, следует сообщить примерный план решения. Решая, например, уравнение

$$\frac{3x-5}{4}+\frac{4-x}{2}=\frac{9-2x}{6},$$

подчеркивают отдельные этапы решения: 1) освобождаем уравнение от дробных коэффициентов путем умножения обеих частей на наименьший общий знаменатель; 2) раскрываем скобки, содержащие неизвестное; 3) переносим члены с неизвестным в левую, а известные — в правую часть; 4) приводим подобные члены; 5) делим обе части на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю или единице; 6) проверяем, является ли корнем число, полученное в результате решения.

Поскольку план решения примерный, то можно удовлетвориться тем, что ученики передают его содержание своими словами. При решении многих уравнений некоторые этапы приведенного плана могут выпадать. Не следует возражать, если ученик дает свое, более простое решение:

$$\frac{3}{4}x-1\frac{1}{3}=\frac{1}{4}x+2\frac{2}{3}. \qquad \frac{1}{2}x=4, \ x=8.$$

Значение левой части: $\frac{3}{4}\cdot 8-1\frac{1}{3}=4\frac{2}{3}$.

Значение правой части: $\frac{1}{4}\cdot 8+2\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

Ответ: 8.

Мало того, такие решения надо поощрять; они свидетельствуют об инициативе ученика.

Б. При фронтальной тренировке в классе уместно включить и такие уравнения, которые не имеют решений. Предлагается решить, например, следующее уравнение:

$$(2x+1)^2-4x^2=6+4x.$$

Учащиеся обычно немало дивятся тому, что в процессе решения исчезли члены, содержащие неизвестное, и тому, что получилось странное равенство: $0=5$.

Учитель обращает их внимание на то, что полученное в процессе решения уравнение $4x+1=6+4x$ противоречиво: при любом значении x значение левой части уравнения меньше значения правой части на 5. «Странный» результат свидетельствует о том, что уравнение не имеет решений. Заключение о противоречивости уравнения делается тогда, когда имеется уверенность в правильности решения.

На уроках рассматривается еще несколько противоречивых уравнений:

$$\text{а) } 9-\frac{x^2}{4}=1-x-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2; \quad \text{б) } \frac{5x-3}{6}+11=\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}.$$

Если решение на основе строгого соблюдения свойств уравнений привело к противоречивому равенству, то данное уравнение не имеет решений.

Полезно разобрать в классе задачи, которые не имеют решений и приведут к противоречивым уравнениям. Для примера возьмем две задачи: 1) *Найти сторону квадрата, если площадь его равна площади прямоугольника, основание которого на* 1 *больше, а высота на* 1 *меньше стороны квадрата.* 2) *Найти число, если квадрат этого числа меньше квадрата суммы искомого с числом* 2 *на учетверенное искомое число.*

В. Затем можно предложить уравнение, имеющее бесконечное множество решений. Пусть требуется решить следующее уравнение:

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{5}+\frac{x}{15}=\frac{2x-1}{5}.$$

При решении исчезают члены с неизвестными и получается очевидное равенство: $1=1$.

Убедившись, что выкладки верны и данное уравнение равносильно уравнению $x\cdot 1=x\cdot 1$, заключаем, что уравнение имеет бесконечное множество решений: любое число — корень уравнения. Имеем дело с неопределенным уравнением. Решаются другие неопределенные уравнения:

$$\text{а) } \frac{(3x-2)^2}{3}-3x^2=4\left(\frac{1}{3}-x\right); \quad \text{б) } x(x+1)-1=x+(x+1)(x-1).$$

Предлагается задача. *Найти дробь со знаменателем 8, если искомая дробь равна дроби, полученной из искомой путем прибавления к числителю половины числителя и к знаменателю половины знаменателя искомой дроби.*

Ученикам полезно упражняться в составлении уравнений первой степени с одним неизвестным. Предварительно на примерах разъясняется, как это делать.

Требуется составить уравнение, имеющее корень 5. Возьмем произвольное выражение первой степени с одной переменной, например: $2(2z-1)-3(4-3z)$. Его числовое значение при $z=5$ равно 51. Записываем уравнение:

$$2(2z-1)-3(4-3z)=51.$$

Решая его, учащиеся убедятся, что корень равен 5.

Можно составить сколько угодно уравнений первой степени с одним неизвестным, имеющих корень 5.

Полезно рассмотреть составление неопределенных и противоречивых уравнений.

Подберем такое выражение первой степени с одной переменной, при упрощении которого переменное исчезает, например: $3(1-2t)+$ $+2(3t-2)$. Числовое значение выражения при $t=-3$ равно -1. Напишем уравнение:

$$3(1-2t)+2(3t-2)=-1.$$

Решение покажет, что уравнение неопределенное.

Если то же выражение приравнять любому числу, кроме -1, то получим уравнение противоречивое; например, уравнение

$$3(1-2t)+2(3t-2)=10$$

противоречивое.

4. Об общем методе решения задач составлением уравнений

В методической литературе за последнюю четверть века в той или другой форме признается, что существует общий метод решения задач путем составления уравнений или систем уравнений. Однако наблюдаются различия в истолковании этого метода: одни считают, что его сущность заключается в расчленении задач на ряд простых, другие полагают его сущность в приравнивании двух различным способом выраженных величин, третьи — в обозначении неизвестного и в оперировании этим символом как известным для получения уравнения. Такие точки зрения правильно отмечают какую-либо одну сторону общего метода, но не вскрывают его полностью.

Как идет мыслительный процесс при решении задачи путем составления уравнения или системы уравнений?

Задачу преобразуют в уравнение или систему уравнений, при этом вводят обозначения неизвестного или неизвестных, находят выражения для вспомогательных величин, приравнивают двояко выраженные величины и получают уравнение или систему уравнений [1]. Это — первая вспомогательная задача, к которой сведена данная задача. Затем уравнение или систему последовательно преобразуют. Каждый шаг в таком преобразовании является переходом от одной вспомогательной задачи к другой, решение которой проще. Так поступают до тех пор, пока не подходят к задаче, решаемой непосредственно.

Исследование мыслительного процесса позволяет утверждать, что при решении задач путем составления уравнений или систем уравнений мы пользуемся анализом [2]. Этот анализ имеет некоторые особенности: используются обозначения для неизвестных, применяются уравнения или системы уравнений. Использование алгебраических символов, уравнений, систем уравнений делает анализ особо плодотворным и мощным. Как только основная задача заменена уравнением или системой уравнений, переходы к последующим вспомогательным задачам выполняются на основании приемов решения уравнений или систем уравнений — это делается почти автоматически. Можно утверждать, что при решении задач путем составления уравнений применяется одна из форм алгебраического анализа.

Эта форма алгебраического анализа объединяет в себе те существенные черты, которые различными авторами принимаются за общий метод решения задач. Действительно, решение задачи начинается с рассмотрения неизвестных на основе функциональных зависимостей, с введения обозначений для них.

Затем составляются алгебраические выражения для вспомогательных величин, при этом сложная задача расчленяется на более простые. Это расчленение является следующим этапом анализа. Далее составляется уравнение или система их; при этом приравниваются величины, выраженные по-разному. Но такое приравнивание величин только завершает подмену задачи первой вспомогательной задачей.

Приступая с учащимися к систематическому решению задач способом составления уравнений, уместно сообщить, что этот способ решения носит название алгебраического анализа. Пользуясь конкретными задачами, надо разъяснить характерные особенности алгебраического анализа. При обучении следует вскры-

---

[1] В последующих главах книги не рассматриваются вопросы, связанные с решением задач с помощью уравнений или систем уравнений. Поэтому в этой главе освещаются и такие вопросы, которые относятся к последующим главам курса алгебры восьмилетней школы.

[2] См.: В. В. Репьев. Общая методика преподавания математики. Учпедгиз, М., 1958.

вать в конкретной форме и достаточно популярно общие методы математики. Так поступаем и в этом случае.

Значение уравнений как средства решения задач осознавалось в далекие от наших дней времена, и вместе с тем раскрывались характерные черты связанной с этим особой формы алгебраического анализа. Уже в трудах среднеазиатских математиков XI в. осознается, что алгебра дает метод определения неизвестных, связывая их с известными с помощью уравнений. Например, таджикский математик и поэт Омар Хайям (XI в.) в трактате по алгебре говорит: «...алгебра есть научный метод. Ее предмет есть числа и величины, которые, будучи неизвестными, поставлены в такое соотношение с чем-нибудь известным, что их можно определить; алгебра определяет соотношения, соединяющие данные величины задачи с неизвестными». «Алгебраические решения получаются не иначе, как с помощью уравнений»[1].

Французский математик Ф. Виет главный свой труд по алгебре назвал «Искусство анализа» («Ars analytica»). Это говорит о том, что Виет хорошо осознавал значение алгебраической символики и уравнений для аналитического метода.

Р. Декарт применительно к аналитической геометрии дает прекрасное описание рассматриваемой формы алгебраического анализа: «...чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и искомые линии. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, заменить зависимость между ними так, чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это и приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому»[2]. Описанный Декартом метод применим не только к тем задачам, в которых идет речь о линиях, но к любым задачам, решаемым составлением уравнения. У Декарта описана одна из форм алгебраического анализа, а именно та, которая используется в школьном курсе алгебры при решении задач с помощью уравнений.

5. План решения задач составлением уравнений

Как уже отмечено ранее, простейшие задачи решаются составлением уравнения уже в VI классе. При изучении целых алгебраических выражений расширяются возможности применения уравнений и постепенно усложняются задачи. В последней четверти VI класса педагог, используя примерную задачу, знакомит учащихся с планом решения задачи путем составления уравнения с одним неизвестным.

---

[1] Цит. по кн. В. П. Шереметевский. Очерки по истории математики, 1940, стр. 69.

[2] Там же, 1940.

Этот план надо восстановить в памяти учащихся в начале VII года обучения, когда приступают к решению задач.

Задача 1. *Для учащихся класса куплено 40 тетрадей и 30 блокнотов. Цена блокнота на 12 коп. выше цены тетради. Вычислить цены тетради и блокнота, если за все заплатили 5 руб. 70 коп.*

Задача решается составлением уравнения. Какие же числа целесообразно приравнять? Наиболее естественно приравнять стоимость купленных вещей, выраженную двояким способом. Для правой части уравнения оставим число 5 руб. 70 коп. Это делает целенаправленным последующие рассуждения: левая часть уравнения также должна выражать стоимость купленного.

1) Обозначим цену тетради в копейках x. Запишем:

Цена тетради (в коп.): x.

Стоимость 40 тетрадей (в коп.): $40x$.

Цена блокнота (в коп.): $x+12$.

Стоимость 30 блокнотов (в коп.): $30(x+12)$.

Всего заплачено (в коп.): $40x+30(x+12)$.

2) Уравнение:

$$40x+30(x+12)=570.$$

3) Решение:

$$4x+3x+36=57;$$

$$7x=21, \quad x=3.$$

Проверка по уравнению. Значение левой части: $40\cdot 3+30\cdot(3+12)=570$. Значение правой части: 570.

Итак, 3 — корень уравнения. Следовательно, цена тетради 3 коп., цена блокнота $3+12=15$ (коп.).

4) Проверка по содержанию задачи:

$$3+12=15 \text{ (коп.)}; \quad 3\cdot 40=120 \text{ (коп.)};$$
$$15\cdot 30=450 \text{ (коп.)}; \quad 120+450=570 \text{ (коп.)}.$$

Корень уравнения является решением задачи.

5) Ответы: цена тетради 3 коп., цена блокнота 15 коп.

Итак, общий план решения задачи с помощью уравнений имеет следующие основные пункты:

1) Установить, какие числа (значения величин) целесообразно приравнять для составления уравнения: обозначить неизвестное (иногда вспомогательное неизвестное) какой-либо буквой и выразить через него значения других величин, необходимые для составления уравнения.

2) Составить уравнение.

3) Решить уравнение.

4) Проверить пригодность корня для задачи.

5) Написать ответ.

При решении задач план записывают на доске и в тетрадях кратко: 1) Что приравнять? Обозначения. 2) Уравнение. 3) Решение. 4) Проверка решения по задаче. 5) Ответ.

При составлении уравнения часто удобно для правой части оставлять одно из данных в условии чисел. В рассмотренной задаче для правой части оставлено число 5 руб. 70 коп. Это дало наиболее простой путь рассуждения и простое решение. Однако в той же задаче для правой части можно оставить любое другое число из данных.

Например, если для правой части сохранить число 12 коп., то получим следующее:

x — цена тетради (в коп.);

$40x$ — стоимость всех тетрадей (в коп.);

$570-40x$ — стоимость всех блокнотов (в коп.);

$\frac{570-40x}{30}$ — цена блокнота (в коп.);

$\frac{570-40x}{30}-x$ — на сколько блокнот дороже тетради.

Уравнение $\frac{570-40x}{30}-x=12$.

Если для правой части оставить число 30 (блокнотов), то получим уравнение:

$$\frac{570-40x}{x+12}=30.$$

Можно составить и четвертое уравнение, если для правой части его оставить число купленных тетрадей.

Как же истолковать возможность получения различных уравнений при решении одной и той же задачи?

При составлении уравнения одно из данных чисел сохраняется для правой части уравнения и вводится обозначение искомого. Пользуясь введенным обозначением и остальными данными, находим выражение, равное числу, оставленному для правой части. А такая задача является одной из обратных по отношению к данной. Сохранение для правой части уравнения различных из данных чисел приводит к различным обратным задачам. Для всякой достаточно сложной задачи можно получить несколько обратных, а значит, можно составить различные уравнения. Так как трудность решения различных обратных задач неодинакова, то и трудность составления уравнения различна и зависит от того, какое из данных сохранено для правой части уравнения. Из многих обратных задач целесообразно выбирать такую, решение которой известно лучше, ближе к расчетам, встречающимся в практике. Так сделано при решении задачи 1.

6. Некоторые методические рекомендации

Первые задачи на составление уравнений следует решать в классе фронтально, сопровождая их беседами эвристического характера. Такие беседы уместны и целесообразны в дальнейшем при первом решении задач нового вида.

После выработки первоначальных навыков в решении задач определенного вида можно использовать такой прием: учитель предлагает решить задачу, указывает ее номер; ученики самостоятельно начинают решение, а через 2—3 минуты учитель вызывает к доске одного из них для решения задачи. Такой прием дает возможность проявить инициативу и самостоятельность, и вместе с тем учащиеся, которых задача затрудняет, тут же выясняют для себя все непонятное.

Когда учитель убедится, что в решении задач того или другого вида создан достаточный навык, на уроке организуется индивидуальное самостоятельное решение задач. Умение решать задачи в значительной мере обеспечивается теми подготовительными упражнениями, которые ученики выполняли ранее и продолжают выполнять при изучении темы об уравнениях. Подготовительные упражнения позволяют значительно увеличить число задач, решаемых самостоятельно.

Задачи, не требующие сложных выкладок, полезно решать устно. Например, задачи: а) *Один острый угол прямоугольного треугольника больше другого на* 20°. *Вычислить каждый из острых углов;* б) *Углы треугольника относятся как* 1 : 2 : 3. *Вычислить каждый из углов* — могут быть решены устно в VI классе в четвертой четверти. При устном решении ученики сообщают, как составлялось уравнение, какое уравнение получилось, и ответы.

В первом пункте плана стоит вопрос: *«Что приравнять?»* Ответить на него в самом начале решения задачи очень важно.

Ответ придает всему рассуждению, связанному с введением обозначения неизвестного, с получением промежуточных выражений, целенаправленность.

При решении арифметических задач дети привыкают ставить вопросы. Вопросы можно использовать при устном объяснении решения алгебраических задач, а краткие ответы на вопросы следует записывать. Записи должны быть краткими и точными.

При письменном решении в VII—VIII классах удобна запись, подобная той, которая приведена при решении задачи 1. Такая запись служит объяснением решения. Для восьмилетней школы она достаточна. В VIII классе она легко может быть развита в краткое связное объяснение решения задачи.

Если решается задача с именованными числами, то учащиеся записывают наименования неизвестных и промежуточных выражений. Указание наименований в некоторой мере предохраняет от распространенной ошибки, когда ученики приравнивают значения величин с разными наименованиями и получают неверные уравнения. Полезно приучать школьников, чтобы при решении задачи величины одного и того же рода они выражали в одних и тех же единицах.

Кроме того, отсутствие наименований в обозначениях иногда, при решении сложных задач, затрудняет дать правильный ответ: пока ученик решает уравнение, он забывает, что обозначил x, и, найдя его, не знает, что он определил. Этого не произойдет, если учеников приучить ставить наименования.

При решении задач на движение, с геометрическим содержанием, на разностное и кратное отношение значительную помощь может оказать чертеж. Он вносит наглядность в соотношения между величинами и помогает составить уравнение. Поэтому полезно развивать навык иллюстрировать решение, где это возможно, чертежами.

Неизвестное полезно обозначать разными буквами, например неизвестную скорость уместно обозначить буквой v, время — t, путь — s, вес — p и т. д.

При решении задач путем составления уравнений или их систем прежде всего производят преобразование данной задачи в первую вспомогательную, выраженную уравнением или их системой. Уже это преобразование может привести к задаче, неравносильной данной. При решении уравнения или системы происходит последовательное преобразование первой вспомогательной задачи в ряд более простых задач. При этом может случиться, что полученная вспомогательная задача неравносильна предшествующей, а значит, и данной задаче. Последняя вспомогательная задача может содержать решения, посторонние по отношению к данной задаче. Если при решении уравнения или системы производились преобразования, которые могли привести к нарушению равносильности, то необходима проверка полученных решений по уравнению или системе уравнений. Замена задачи уравнением или системой уравнений также может привести к нарушению равносильности, поэтому необходима проверка и по условию задачи.

Полезно предложить учащимся такие задачи, при решении которых составленные уравнения неравносильны соответствующим задачам, например: а) *Всего в классе* 35 *учащихся, причем девочек на* 14 *больше, чем мальчиков. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?* б) *Построить треугольник с периметром в* 30 *см так, чтобы одна сторона на* 50% *была больше второй, а третья составляла* 25% *второй.*

При решении задачи б) проверку пригодности корня уравнения для задачи надо довести до построения треугольника.

7. Введение вспомогательного неизвестного

А. Длительный период времени ученики решают такие задачи, в которых требуется обозначать лишь одно из искомых чисел. В этом отношении у школьников вырабатывается довольно прочный навык. Однако имеется много задач, для решения которых в одних случаях полезно, а в других необходимо вводить обозначение не искомого числа, а некоторого вспомогательного неизвестного, вычисление которого обеспечивает решение задачи. Учитель разъясняет этот прием, пользуясь конкретными задачами.

Задача 2. *Вычислить углы четырехугольника ABCD, если* $\angle A : \angle B : \angle C$, *как* $3:4:7$, *а* $\angle D$ *на* $60°$ *меньше* $\angle C$.

Для правой части уравнения целесообразно взять сумму углов четырехугольника, т. е. 360°.

Обозначим x величину угла A. Тогда

$$\angle B=\frac{4x}{3},\ \angle C=\frac{7x}{3}\ \text{и}\ \angle D=\frac{7x}{3}-60°.$$

Находим сумму углов (в градусах):

$$x+\frac{4x}{3}+\frac{7x}{3}+\left(\frac{7x}{3}-60\right).$$

Получаем уравнение:

$$x+\frac{4x}{3}+\frac{7x}{3}+\left(\frac{7x}{3}-60\right)=360.$$

Однако при решении этой задачи рациональнее обозначить x величину не первого или какого-либо другого угла четырехугольника, а третью долю $\angle A$. Тогда и в градусной мере

$$\angle A=3x,\ \angle B=4x,\ \angle C=7x\ \text{и}\ \angle D=7x-60°.$$

Находим выражение для суммы углов четырехугольника (в градусах):

$$3x+4x+7x+(7x-60).$$

Получаем уравнение:

$$3x+4x+7x+(7x-60)=360.$$

При решении этой задачи выражение величины углов через вспомогательную величину — третью долю $\angle A$ — не является необходимым, но оно полезно, так как упрощает рассуждения, промежуточные выражения и уравнение.

К числу задач, при решении которых необходимо введение обозначений для некоторого вспомогательного неизвестного, относятся те, которые связаны со структурой целого числа в десятичной системе, со структурой обыкновенной дроби и некоторые другие.

При решении задачи: *если числитель неизвестной дроби увеличить на 3, а знаменатель уменьшить на 4, то получится дробь, равная* $\frac{1}{2}$. *Вычислить неизвестную дробь, если знаменатель ее равен* 24 — многие ученики пытаются ввести обозначение для неизвестной дроби. Здесь необходимо ввести обозначение для вспомогательного неизвестного — числителя дроби.

Б. Довольно долго ученики имеют дело с задачами, решение которых приводит к уравнению, где правая часть — одно из данных чисел. Школьники приобретают привычку составлять уравнения, оставляя для правой части одно из данных чисел. Необходимо показать, что многие задачи приводят к уравнениям, левая и правая часть которых — выражения, содержащие неизвестное. При решении таких задач равенство двух выражений устанавливается на основании условия задачи. Это условие может быть дано разнообразными способами.

Задача 3. *В двузначном числе число единиц на* 7 *меньше числа десятков. При делении этого числа на число с обратным порядком цифр получается частное* 3 *и остаток* 5. *Найти двузначное число.*

При первой встрече с такими задачами многие учащиеся склонны обозначить буквой искомое число. Для решения необходимо обозначить вспомогательное неизвестное — или число единиц или число десятков искомого числа.

В зависимости от того, что приравнивать, можно составить несколько уравнений для решения задачи. Чтобы избежать дробного уравнения, используем зависимость между компонентами деления: делимое равно произведению делителя на частное плюс остаток.

Обозначим число десятков неизвестного двузначного числа x. Тогда в разряде единиц этого числа будет $(x-7)$. Искомое двузначное число запишем так: $10x+(x-7)$. Число с обратным порядком цифр равно $10(x-7)+x$.

Составляем уравнение:

$$10x+(x-7)=[10(x-7)+x]\cdot 3+5. \qquad (1)$$

Решение уравнения:

$$11x-7=(11x-70)\cdot 3+5; \quad 11x-7=33x-210+5;$$
$$-22x=-198; \; x=9.$$

Убедившись в правильности решения уравнения (1), записываем число 92. Проверка по задаче подтверждает, что 92 — ответ на вопрос задачи.

Задача 4. *По окружности навстречу друг другу движутся две материальные точки. Первая точка проходит в секунду* 10 *см, а вторая* 8 *см. Через какой промежуток пути происходит их встреча, если длина окружности равна* 378 *см?*

Какие величины приравнивать для составления уравнения? Можно приравнять время движения первой и второй точек между двумя последовательными встречами.

Пусть длина меньшей дуги окружности между точками, соответствующими двум последовательным встречам, равна s *см*. Этот путь пройдет вторая точка. Первая точка пройдет путь, равный $(378 - s)$ *см*. Время движения этой точки между двумя последовательными встречами равно $\frac{378-s}{10}$ *сек*, а время движения второй точки равно $\frac{s}{8}$ *сек*.

Уравнение: $\frac{378-s}{10}=\frac{s}{8}$.

Решение: $378\cdot 4 - 4s = 5s;$

$$9s = 378\cdot 4;$$
$$s = 168.$$

Устная проверка показывает, что полученное число удовлетворяет требованию задачи.

Ответ. Точки встречаются через 168 *см*, считая по пути движения второй точки.

При решении этой задачи вопрос, какие величины приравнять при составлении уравнения, устанавливается по смыслу задачи.

8. Составление задач

Чтобы учащиеся возможно глубже и полнее поняли приемы решения задач составлением уравнений, рекомендуется обучать и составлению задач. Если при решении задачи мысль ученика отправляется от задачи и направлена к составлению уравнения, его решению, ответу и проверке, то при составлении задачи ход рассуждения имеет обратный порядок. Как показывают исследования П. М. Эрдниева [1], противопоставление двух таких процессов мышления весьма ценно для обучения, в частности и при решении задач алгебраическим способом.

При составлении задач используются разные приемы. Прежде всего применяется аналогия с задачами, ранее решенными. Так, на одном уроке после подготовительных упражнений в записи двузначных и трехзначных чисел была предложена и решена задача:

В двузначном числе число десятков на 7 больше числа единиц, частное этого числа на число с обратным порядком цифр равно 3 с остатком 11. Найти двузначное число.

Было решено еще две задачи этого же типа.

---

[1] См.: П. М. Эрдниев. Методика упражнений по арифметике и алгебре. «Просвещение», 1965.

Затем предложено каждому ученику составить задачу, похожую на решенную. Большинство с работой справилось хорошо. У некоторых учеников вызвали смущение задачи, решение которых привело к числовым тождествам: они не догадались, что задачи были неопределенные. Некоторые составили задачи с произведением искомого числа на число, содержащее обратный порядок цифр; решение таких задач оказалось непосильным — получились квадратные уравнения.

Второй прием заключается в том, что учитель предлагает составить задачу, решение которой приводило бы к написанному ранее уравнению. Например, составить задачу, решение которой выполняется с помощью уравнения:

$$z+(z+20)+(z-20)=180.$$

Далее следует познакомить школьников с третьим, общим приемом составления задач. Поясним примером.

Для елочных подарков ученикам начальной школы купили 12 кг пряников по 80 коп. и 8 кг конфет по 2 руб. за килограмм. Всего заплатили 25 руб. 60 коп.

В приведенной информации все известно; задачи нет.

Если допустить, что в приведенной информации цена пряников неизвестна, то ученики сформулируют задачу так:

Для подарков школьникам купили 12 кг пряников и 8 кг конфет и за все заплатили 25 руб. 60 коп. Узнать цену пряников, если цена килограмма конфет равна 2 руб.

Приведенная информация дает возможность составить еще не меньше трех задач на составление уравнений. Можно получить и несколько усложненных задач.

Материал для подобных информаций можно черпать из разных источников. Счет магазина, смета ремонта комнаты или квартиры, план квартиры — все это содержит материал, дающий возможность составлять задачи.

Опыт показывает, что учащиеся охотно составляют задачи, любят зачитывать их на уроке, интересуются решением своих задач. Конечно, нет возможности решить на уроке все задачи, составленные учащимися. Можно поступить так: учитель читает их дома, выбирает из них наиболее интересные и оригинальные и использует в работе на уроке. Вместе с тем он разбирает задачи неудачные, вскрывает их недостатки и указывает, как их исправить. Задачи, связанные с жизнью, практикой, трудовым обучением, следует особо поощрять.

Полезно показать ученикам, как получить задачу, вложив в данные соотношения между величинами другое конкретное содержание.

Дана задача. *Трое рабочих одинаковой квалификации за сдельную работу получили 73,6 руб. На выполнение работы первый рабочий затратил вдвое меньше дней, чем второй, и на 0,2* *больше, чем третий. Как распределить заработанные деньги между рабочими?*

Получаем задачу:

Число 736 *разделить на три части, чтобы первая составляла* 50% *второй и была на* 20% *больше третьей. На какие части разделится число?*

После изучения дробных уравнений и систем линейных уравнений особенно полезно показать, что задачи на движение, работу, о бассейнах родственны друг другу и могут быть сведены к одному из видов этих задач.

9. О решении задач составлением уравнений в последующих темах курса алгебры

Решение задач с помощью составления целых уравнений первой степени с одним неизвестным является первым шагом алгебраического способа решения задач. В дальнейшем учащиеся неоднократно возвращаются к этому способу решения задач. Границы использования этой формы алгебраического анализа раздвигаются.

Однако этот первый шаг, который делается в VII классе, является самым ответственным и решающим. Он в значительной мере обеспечивает успешную работу по решению задач в последующие периоды. В дальнейшем применяются те же рассмотренные выше приемы и способы, тот же общий план решения задач. Ограничимся лишь несколькими краткими замечаниями. Приобретение умений и навыков в решении задач обеспечивается подготовительными упражнениями к составлению уравнений. Это полезно учитывать и в дальнейшем. Если подготовительные упражнения перед решением задач с помощью уравнения первой степени с одним неизвестным не применялись, то учитель может ввести их перед решением задач путем применения системы линейных уравнений и перед решением задач с помощью квадратных уравнений и систем уравнений, сводящихся к квадратным. Методика подготовительных упражнений сохраняется, а содержание упражнений усложняется и обогащается введением некоторых новых функциональных зависимостей.

При решении задач путем применения системы двух линейных уравнений несколько видоизменяется план решения. Ученик должен установить, какие величины он намерен приравнивать, а таких приравниваний должно быть уже два. В плане появится система и ее решение. Кратко план можно представить так: 1) Что приравнять? Обозначения. 2) Система уравнений. 3) Решение системы. 4) Проверка решения. 5) Ответы.

Когда учащиеся приобретут умения и навыки в составлении систем уравнений с двумя неизвестными, не следует стеснять их в выборе способа решения задач, допускающих использование и одного уравнения и системы уравнений. Однако целесообразно поощрять решение задач с помощью системы: такое решение обычно рациональнее.

Решение задач применением квадратного уравнения не требует ничего нового. Несколько усложняется проверка решения по условию задачи: приходится проверять два корня. То же самое можно заметить и о решении задач с помощью систем уравнений, сводящихся к квадратному уравнению.

Рассмотренная форма алгебраического анализа находит широкое применение при решении геометрических задач. В работе некоторых учителей наблюдается оценка применения этого метода в геометрии: задача решается сложными арифметическими путями, вместо того чтобы решить ее изящным алгебраическим способом. Надо шире применять алгебраический анализ.

Полезно применять указанные приемы при решении физических и технических задач, содержание которых доступно пониманию учащихся.

ГЛАВА X
РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ НА МНОЖИТЕЛИ

1. Каковы трудности темы

Особенность темы «Разложение целых выражений на множители» в том, что она не содержит новых понятий, кроме понятий о способах разложения, не содержит новых теорем и доказательств, кроме выводов двух формул умножения.

В методической литературе отмечается, что разложение на множители усваивается многими учащимися с трудом. Такое мнение распространено и среди преподавателей.

Что же может затруднять учащихся при изучении разложения на множители?

Обычно отмечается, что изучение предыдущего материала о тождественных преобразованиях требовало от учащихся распознать действие, знать правило и верно применить его. Другое дело, когда приходится разлагать на множители: необходимо уяснить структуру выражения, проявить сообразительность и находчивость, инициативу и даже изобретательность. Нужны поиски путей решения, возможны неудачные попытки, от которых приходится отказываться, и подбирать новые способы, пока не будет достигнута цель. Операция разложения на множители требует не только знаний предшествующего материала, но и более высокого умственного и волевого развития ученика.

Чтобы применить для разложения на множители способ вынесения за скобки, необходимо отыскать «наивысший» общий делитель членов выражения: разложение считается законченным, если вынесен за скобки именно этот делитель и других способов применить нельзя. В простейших случаях установить его нетрудно, но встречаются и такие примеры, в которых отыскание делителя вызывает затруднения. Нет возможности использовать аналогию с наибольшим общим делителем из курса арифметики: это понятие не представлено в программах. Такое положение тормозит изучение способа вынесения за скобки.

Чтобы разложить на множители по формулам умножения, например, такие выражения:

$$a^8+22a^4+121;$$
$$x^6+15x^4+75x^2+125,$$

ученик должен узнать, квадратами каких выражений являются a^8 и 121, кубами каких выражений являются x^6 и 125, а затем убедиться, что средние члены удовлетворяют тем требованиям, которые накладывает соответствующая формула. Ответы на вопросы, квадратом или кубом какого выражения являются данные, равносильны извлечению соответственно квадратного или кубического корней.

Это обстоятельство учитывалось авторами дореволюционных учебных руководств и задачников по алгебре: в них вслед за понятием о степени с натуральным показателем вводилось понятие о квадратном и кубическом корнях и предлагались примеры на извлечение корней по соображению на основе определения. Учащиеся в некоторой мере подготавливались к применению формул умножения.

В нашей школе понятие о степени с натуральным показателем вводится в VI классе, понятие о квадратном корне из числа отнесено в курс геометрии VII класса, о кубическом корне — в последнюю четверть VIII класса. Такое изучение корней не содействует усвоению разложения на множители по формулам умножения. Такая ситуация ставит учащихся в затруднительное положение, которое порой не осознает и преподаватель.

Иногда при изучении материала учитель видит только излагаемую тему и «не видит» последующих тем, а поэтому не ведет подготовку к их изучению, в частности не готовит к разложению на множители. Так преподаватель невольно ставит своих учеников и себя перед большими трудностями, которых могло бы не оказаться, если бы он был более дальновидным.

Наконец, препятствием в усвоении разложения на множители является слабое знание некоторыми учащимися курса алгебры VI класса и недостаточные навыки в тождественных преобразованиях. Только этим можно объяснить распространенные ошибки со знаками $[-ab^2-ab+a=-a(b^2-b+1)]$ и пропуск единицы при делении многочлена на общий множитель $[ab^2-ab-a=$ $=a(b^2-b)]$. И разве не от этого зависит «слепота» в применении формул умножения?

Рассмотрение указанных выше причин дает возможность наметить основные меры по преодолению трудностей, связанных с изучением разложения на множители, и повысить качество изучения этой, а значит, и некоторых последующих тем.

В VI классе нельзя довольствоваться трафаретным применением изучаемых определений, законов и теорем, но надо всемерно развивать сообразительность и инициативу учащихся. В частности, этому способствует решение посильных задач на доказательство: следует решить не только те задачи, которые имеются в стабильном задачнике, но и пополнить их из других источников.

Уже в VI классе полезно предлагать ученикам упражнения, связанные с изучаемым материалом и подготовляющие к изучению разложения на множители. В процессе изучения темы о разложении на множители необходимо умело и своевременно повторять материал, который обеспечивает усвоение различных способов разложения.

Целесообразно ввести предварительные упражнения, позволяющие преодолеть некоторые трудности при разложении на множители. Тематика и содержание таких упражнений приведены ниже.

2. Предварительные занятия

Приступая к изложению главы о разложении на множители, педагог разъясняет цели этой главы. В беседе учащиеся вспоминают, в каких случаях в арифметике приходится разлагать целые числа на множители; учитель сообщает, что в VII классе предстоит изучить алгебраические дроби, которые уже встречались ранее, например:

$$\frac{ax}{b};\ \frac{m+n}{2p};\ \frac{5m}{n+p};\ \frac{ax+b}{ax-b}.$$

В частности, предстоит научиться сокращать дроби, приводить их к общему знаменателю, складывать и вычитать. Все эти операции и действия над дробями требуют разложения целых выражений на множители. Имеются и другие вопросы, когда необходимо или полезно разлагать целые выражения на множители. Пусть, например, требуется найти числовое значение выражения

$$a^2-b^2 \text{ при } a=573 \text{ и } b=427.$$

Приходится возводить в квадрат 573 и 427 и затем выполнять вычитание. Вычисления упростятся, если вспомнить, каким тождественно равным выражением можно заменить a^2-b^2:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Числовое значение правой части формулы в этом случае легко находится в уме. Таким образом, представление выражения в виде произведения иногда позволяет избежать громоздких вычислений и заменить их более простыми.

В VI классе приходилось неоднократно целые выражения представлять в виде произведения целых же выражений. Ученики вспоминают, как представить в виде произведения выражения:

$$a^2-1;\ a^2+2a+1;\ a^2-2ab+b^2.$$

Преобразование целых выражений в произведения целых же выражений называется разложением на множители.

Предварительно целесообразно расширить сведения о делителях целого числа.

Число 20 можно представить в виде произведения $4 \cdot 5$. Числа 4 и 5 называют делителями числа 20. В арифметике рассматривают только положительные делители.

В алгебре приходится рассматривать и положительные и отрицательные делители числа, например: $20=(-4)\cdot(-5)$.

Полезно предложить устные упражнения.

Записать числа — 20, +21, —56 *в виде произведения двух целых сомножителей.*

Опираясь на приведенные примеры, полезно подметить, что если целое число a имеет делитель b, то a имеет делитель и $-b$.

В курсе арифметики не дается понятия о наибольшем общем делителе нескольких чисел, а оно полезно и с ним следует познакомить учеников в курсе алгебры. Напомнив понятие об общем делителе чисел, можно предложить примеры:

Найти все общие делители каждой пары чисел и подчеркнуть наибольший из них: а) 4 *и* 6; б) —10 *и* 5; в) —6 *и* 9.

Найти все общие делители каждой тройки чисел и отметить наибольший из них: а) 6, —3 *и* 9; б) —4, 12 *и* —8.

На основании примеров учащиеся сформулируют определение наибольшего общего делителя нескольких чисел.

Затем целесообразно познакомить учащихся с общими делителями нескольких одночленов и подвести к понятию наивысшего общего делителя.

Между наибольшим общим делителем в арифметике и наивысшим общим делителем нескольких целых алгебраических выражений имеется сходство, но есть и существенное различие. Наибольший общий делитель чисел — действительно наибольший из делителей; вместе с тем он является наименьшим общим кратным делителей этих чисел. О наивысшем общем делителе выражений нельзя говорить, что он наибольший, но он всегда делится на каждый из делителей.

Наивысшим общим делителем нескольких алгебраических выражений называется тот из общих делителей данных выражений, который делится на любой общий делитель их. Это разъясняется на примерах.

Предлагается выписать все общие делители для выражений $8a^3b^3$, $12a^2b^4c$.

Среди выписанных подчеркнем делитель $4a^2b^3$. Он будет наивысшим: он делится на каждый общий делитель этих выражений. Как он получается? Прежде всего находится наибольший общий делитель коэффициентов; затем приписывается буква a с наименьшим показателем, встречающимся в одночленах; далее приписывается буква b, также с наименьшим показателем.

Для вынесения наивысшего множителя за скобки требуется, чтобы учащиеся быстро в уме находили эти множители. При выполнении устных упражнений следует предложить найти наивысшие делители одночленов:

а) a^2x и $2a^2y$; б) $-3mn^3$ и mn^2; в) $9a^2b$ и $15ab^2$,
г) $10x^3y^2, -15x^2y^3, 20xy^4$.

На предварительных занятиях можно выполнить разложение одночленов на множители. Иногда этот вопрос совершенно не рассматривается. Однако таким разложением приходится пользоваться в некоторых преобразованиях и при выполнении действий первой ступени над дробями.

Вопрос о разложении на множители одночленов можно ставить так:

1) *Дан одночлен* $6m^3n^4$. *Представить его в виде произведения двух сомножителей, один из которых равен* $2mn^2$.

2) *Выражение* — $18x^2y^5$ *представить в виде произведения двух одночленов, один из которых равен:* а) — $3xy$, б) $6x^2y^3$.

Обращается внимание на такие примеры, в которых по крайней мере один из сомножителей имеет знак «минус».

Примеры можно предлагать в такой записи:

$$100ab^4c^6 = 25b^2c^2 \cdot ?;$$
$$-70p^2q^3 = 7p^2q \cdot ?.$$

Учащиеся уже неоднократно встречались с алгебраическими дробями; поэтому не будет нарушением системы курса, если педагог покажет на нескольких примерах сокращение дробей с одночленными числителями и знаменателями.

После восстановления в памяти основного свойства арифметических дробей сообщается, что оно применимо и к алгебраическим дробям. Его можно выразить формулой:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Если формулу записать так:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

то можно сказать, что числитель и знаменатель дроби сокращены на общий делитель m.

Предлагается выполнить сокращение дробей:

$$\frac{3a}{3b}; \quad \frac{7c}{8c}; \quad \frac{6a}{9a}; \quad \frac{n}{n^3}; \quad \frac{15m^2}{20m^5}.$$

Сокращение можно выполнить путем деления числителя и знаменателя на наивысший общий делитель.

Сократить дроби:

$$\frac{21a^2b^3}{14a^3b^2}; \quad \frac{51x^4y^5}{34x^2y^3}; \quad \frac{40m^3n^2p}{56mn^2p^3}.$$

3. Вынесение за скобки общего множителя

Предварительные занятия в значительной степени обеспечивают успешное изучение вынесения за скобки общего множителя.

Первый шаг в этом вопросе можно осуществить, опираясь на распределительный закон умножения.

Имеем:

$$(a-b+c)\cdot m=am-bm+cm.$$

Формулу можно записать так:

$$am-bm+cm=m(a-b+c).$$

Теперь в левой части равенства — многочлен, в правой — произведение одночлена на многочлен. Многочлен разложен на множители, причем сомножитель в скобках можно получить делением многочлена $am-bm+cm$ на одночлен m. Говорят, что общий множитель m членов многочлена вынесен за скобки, а разложение называют вынесением общего множителя за скобки.

Первый шаг можно сделать и иначе. Выполняется деление многочлена на одночлен, например:

$$(9a^3x-6a^2x^2+18ax^3):3ax.$$

Как выразить делимое через делитель и частное? Получается:

$$9a^3x-6a^2x^2+18ax^3=3ax(3a^2-2ax+6x^2).$$

Последнее равенство можно рассматривать как разложение многочлена на множители.

В строгой системе выполняется значительное количество упражнений и фронтально и в порядке самостоятельной работы учащихся. При фронтальных занятиях подчеркивается, что для разложения многочлена на множители вынесением за скобки следует: 1) найти наивысший общий делитель всех членов многочлена и взять его сомножителем; 2) определить другой сомножитель делением многочлена на первый сомножитель; 3) проверить правильность разложения путем умножения.

Примеры решаются в следующей системе:

1) Вынесение из двучленов множителя: а) выраженного цифрами, б) обозначенного буквой, в) равного или противоположного одному из членов многочлена, например:

$$ab-b=b(a-1);\ 5-10x^2=5(1-2x^2);$$

г) состоящего из коэффициента и буквенного делителя; д) являющегося степенью; е) состоящего из коэффициента и степеней нескольких букв.

2) Вынесение из двучлена множителя — со знаком «плюс» и со знаком «минус», например:

$$4a^2b^3-6a^3b^2=2a^2b^2(2b-3a);$$

$$4a^2b^3-6a^3b^2=-2a^2b^2(-2b+3a)=-2a^2b^2(3a-2b).$$

3) Вынесение множителя из трехчлена.

4) Вынесение двучленного множителя из целого выражения без перемены знаков, например:

$$(a+2)x-(a+2)y=(a+2)(x-y).$$

5) Вынесение многочленного множителя из целого выражения с переменой знаков у некоторых слагаемых, например:

$$(b-3)x-(3-b)y=(b-3)x+(b-3)y=(b-3)(x+y).$$

6) Одновременное вынесение за скобки и одночлена и многочлена, например:

$$15a^2b^3c(x-y)-20a^3b^2(x-y)+25a^4b(y-x)=$$
$$=5a^2b(x-y)(3b^2c-4ab-5a^2).$$

Прежде чем приступить к вынесению множителя, равного или противоположного одному из членов многочлена, целесообразно на примерах напомнить, что частное равных выражений равно 1 [например, $7:7=1$; $(-2x^3):(-2x^3)=1$] и что частное от деления выражения на противоположное ему равно -1 [например, $(-7):7=-1$; $3x^2:(-3x^2)=-1$].

Кроме того, опираясь на примеры, необходимо отметить, что при делении многочлена на одночлен всегда получается многочлен, имеющий столько же членов, сколько их содержит делимое. Это указание в известной мере предупреждает ошибки при разложении выражений вида:

$$2ax+2a;\ 15x^2y^2-5x^2y;\ -3m^2+6m^2n-9m^2n^2,$$

состоящие в том, что в многочленном сомножителе теряется слагаемое 1 или -1.

Из системы упражнений иногда опускается пункт 2. Этого не следует делать: вынесение множителя со знаком «минус» подготовит учащихся к лучшему усвоению вынесения многочленного множителя, когда требуется менять знаки на противоположные в одном из многочленов.

Полезно составлять с учениками целые выражения, удовлетворяющие определенным требованиям в отношении разложения на множители, например:

1) *Придумать двучлен, в разложении которого на множители был бы сомножитель:* а) $c-d$; б) $5c-3d$; в) m^2+1.

2) *К выражению a^2b прибавить одночлен, чтобы полученный двучлен имел множитель:* а) $b+c$; б) $b-c$; в) $b+1$; г) $b-1$.

3) *К одночлену $4am$ прибавить такой одночлен, чтобы полученное выражение имело множитель:* а) $4a$; б) $2a$; в) $2m+1$; г) $4m-1$.

4) *К одночлену ax^2 прибавить такой двучлен, чтобы полученный трехчлен имел множитель:* а) a; б) x^2+x+1; в) x^2-x+1.

5) *К выражению $a(m^2+n^2)$ прибавить такое выражение, чтобы многочлен имел множитель:* а) m^2+n^2, б) $a+b$; в) $a+1$; г) $a-1$.

Полезны задачи на доказательство.

Доказать, что:

1) *сумма любого натурального числа с его квадратом есть число четное;*

2) *сумма куба натурального числа с квадратом этого числа есть число четное;*

3) *сумма любого четного числа и квадрата этого числа делится нацело на ближайшее последующее число;*

4) *квадрат любого нечетного числа, кроме единицы, без единицы есть число, делящееся на 4;*

5) *квадрат любого двузначного числа без квадрата единиц его есть число:* а) *четное,* б) *делящееся нацело на удвоенное число десятков этого двузначного числа;*

6) *сумма двух двузначных чисел, имеющих взаимно обратный порядок цифр, делится на* 11.

4. Разложение на множители группировкой

Изучение разложения на множители способом группировки также требует тщательно продуманной системы упражнений.

1) Наиболее простыми примерами являются те, в которых из четырех членов многочлена два уже объединены и остается сгруппировать два других, причем их общий множитель выносится со знаком «плюс», например:

$$ax+2x+(a+2)y;\ m(3x-y)+3nx-ny.$$

2) Далее следуют примеры, аналогичные предыдущим, но решение которых требует вынесения общего множителя двух членов со знаком «минус», например:

$$a(m^2+n^2)-bm^2-bn^2;\ -mx^2-my^2+n(x^2+y^2).$$

3) При переходе к группировке членов четырехчлена решаются примеры вида:

$$mx+bx+my+by;\ 2am+2an-3bm-3bn.$$

На этих примерах надо показать ученикам, что удачную группировку можно выполнить двумя способами. При самостоятельном решении примеров школьники встретятся с группировками, не дающими желательных результатов.

4) Среди примеров надо подобрать такие, у которых после группировки и вынесения многочленного множителя в скобках окажется сумма со слагаемым $+1$ или -1, например:

$$ax-4bx+a-4b;\ -5m-n+5mx+nx.$$

5) Целесообразно решить несколько примеров на разложение шестичленов, например:

$$ax+by-ay-by+az+bz;$$
$$ax-x+ay-y-az+z.$$

Полезно показать, что можно группировать их по два или по три члена.

6) Затем ученики решают примеры с применением вынесения общего множителя из всех членов и последующей группировки.

Например:

$$anx + any - bnx - bny;$$
$$5an^2x - 5an^2y - 5bn^2x + 5bn^2y.$$

7) В заключение предлагаются упражнения, в которых некоторые или все члены сгруппированы, но не так, как нужно для разложения, например:

$$a^3 + a(b^2 - ac) - b^2c;$$
$$a(ab + 2n) + a(2b + an).$$

Для более глубокого усвоения способа группировки и повышения активности учащихся целесообразно, одновременно с решением задач в приведенной системе, предлагать упражнения на составление или дополнение выражений. Приведем несколько примеров таких упражнений:

1) *В следующие выражения вставить недостающие члены так, чтобы оказалось возможным разложить многочлен на множители способом группировки:*

а) $xy + 2y - 3x - ?$; б) $? + 5m - 2m^2 - 10$; в) $a^2 - ? + 2a - 2$.

2) *Написать четырехчлен, разлагающийся на множители способом группировки, чтобы одним из сомножителей было выражение*: а) $a^2 + b^2$; б) $m^2 - 2n$.

3) К *выражению* $a^2 + an$ *прибавить двучлен, чтобы полученный многочлен имел множитель*: а) $a + n$; б) $a + 1$; в) $a - 1$.

5. Разложение на множители с помощью формул умножения

За несколько уроков (2—3) до начала разложения по формулам умножения полезно приступить к выполнению подготовительных упражнений.

Приведем примеры таких упражнений:

1) *Какое число возведено в квадрат, если получилось*: 36, 64, 121, 169?

2) *Найти основание второй степени, если степень равна*: $\frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{4}{49}, \frac{1}{144}$.

3) *Квадрат неизвестного числа равен*: 0,01; 0,25; 0,81; 1,21. *Найти это число.*

4) *Какое выражение возведено в квадрат, если получилось*: a^4, x^6, $9b^2$, $64y^8z^4$?

При этом обращается внимание на то, что на каждый вопрос можно дать два ответа.

5) *Какое число возведено в куб, если получилось*: 1, 64, —125, 1000?

6) *Определить основание третьей степени, если степень равна:* $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{8}{125}$, $-\frac{64}{1000}$.

7) *Найти основание третьей степени, если степень равна:* 0,001; —0,027; 0,216.

8) *Какое выражение возведено в куб, если степень равна:* c^6, $-x^9$, $8a^3$, $-64z^{12}$?

9) *Представить каждую из данных степеней в виде степени в степени:* a^4, c^6, x^8, y^{12}.

10) *Представить каждый из одночленов в виде степени другого одночлена:* $9a^2$, $4b^4c^6$, $0{,}25x^8y^6z^4$, $8m^3n^2$, $27a^3b^6c^9$.

Подбор примеров, аналогичных приведенным, легко продолжить и несколько усложнить. Решения ведутся в порядке устных занятий и распределяются примерно на три урока. После разложения на множители по соответствующей формуле целесообразно рассмотреть деление по формулам умножения.

Общий план изучения разложения по формулам тот же, в каком излагались формулы.

В качестве примера разложения разности квадратов приведем беседу с учениками.

Как читается первая формула умножения?

Запишем ее:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Раньше мы уже видели, что формулу иногда применяют, переходя от правой части к левой. Запишем ее в таком виде:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b). \qquad (1)$$

Левая часть формулы (1) — двучлен, правая — произведение двучленов. Значит, разность квадратов двух чисел или выражений разложена на множители.

Как прочитать формулу (1) в виде правила?

Разность квадратов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их разность.

Научимся применять формулу (1) к разложению на множители двучленов, когда они представляют разность квадратов. Рассмотрим выражение $9a^4-b^6$.

Надо установить, является ли двучлен разностью квадратов. Какое выражение следует возвести в квадрат, чтобы получить $9a^4$, b^6? Можно записать:

$$9a^4-b^6=(3a^2)^2-(b^3)^2.$$

Теперь нетрудно разложить это выражение по формуле (1). На первых порах запись оформляется так:

$$9a^4-b^6=(3a^2)^2-(b^3)^2=(3a^2+b^3)(3a^2-b^3).$$

При решении примеров на разложение по формуле (1) следует предлагать упражнения, дающие возможность глубже вдуматься в структуру формулы и ее компонентов. Приведем примеры.

Написать недостающие члены в разложении на множители:

а) $9m^6 - ? = (? + 5)(? - 5)$;
б) $? - b^4 = (2a - ?)(2a + ?)$.

Во время устных упражнений учащиеся придумывают двучлены, разлагающиеся на множители по формуле (1). Обращается внимание на применение разложения для упрощения выражений:

$$56^2 - 44^2;\ 0{,}72^2 - 0{,}28^2;\ 9{,}4^2 - 7{,}8^2.$$

Простейшие из этих примеров решаются устно. Такой прием вычисления найдет применение в геометрии — при вычислении на основании теоремы Пифагора катета по гипотенузе и другому катету. Следует показать, что формула (1) может быть использована для деления:

$$(25x^2 - y^4):(5x + y^2);$$
$$\left(\frac{1}{9}a^4 - 4b^2\right):\left(\frac{1}{3}a^2 - 2b\right).$$

Полезно поставить и такой вопрос:

На какие двучлены делятся выражения:

$$49m^4 - 36n^2;\ 16m^4n^2 - \frac{1}{9};\ \frac{4}{25} - 81a^2b^6?$$

Особое внимание приходится уделить разложению разности квадратов, когда основаниями их служат двучлены.

Наиболее простые из примеров — те, в которых только первый квадрат имеет основанием двучлен:

$$(2a+1)^2 - a^2;\ (3x - 2y)^2 - 16x^2.$$

Затем переходим к примерам, когда только второй квадрат имеет основанием двучлен:

$$c^2 - (1 - 2c)^2;\ 4n^2 - (3n + 2m)^2.$$

Чтобы избежать ошибок в знаках и приведении подобных членов, выкладки оформляются так:

$$9a^2 - (2a - 3b)^2 = [3a + (2a - 3b)]\cdot[3a - (2a - 3b)] =$$
$$= (3a + 2a - 3b)(3a - 2a + 3b) = (5a - 3b)(a + 3b).$$

Далее следуют такие примеры:

$$(2 + 3a)^2 - (2 - a)^2;\ (2m - n)^2 - (3m - 2n)^2.$$

В заключение предлагаем примеры, решение которых требует и вынесения за скобки и разложения по формуле (1):

$$25a^2b - 9bc^2;\ 5c(c - 2)^2 - 5c^3;\ 12n^5 - 3n(n^2 - 1).$$

Аналогично идет изучение разложения на множители с применением других формул умножения. Ограничимся немногими замечаниями.

Вторую формулу:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad (2)$$

учащиеся прочитают примерно так: сумма квадратов двух чисел и удвоенного произведения их равна квадрату суммы этих чисел.

Аналогично читается формула

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2. \qquad (3)$$

Обращается внимание на то, что правую часть тождества (3) можно записать двояко, так как всегда $(a-b)^2=(b-a)^2$. Двойная запись пригодится в дальнейшем.

Среди других примеров предлагаются и такие:

1) *Написать недостающие члены в разложении многочлена на множители:*

а) $9m^2+?+?=(?+7)^2$;

б) $1-6x^2+?=(?-?)^2$;

в) $81a^6-?+4b^4=(?-?)^2$.

2) *Вставить недостающие члены, чтобы получилось выражение квадрата двучлена в развернутом виде:*

а) $?+a^4+a^8$;

б) $49-?+4x^4$;

в) $a^4-2a^5+?$.

Формулу

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \qquad (4)$$

учащиеся читают так: четырехчлен, представляющий куб первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа, равен кубу суммы этих чисел.

Аналогично читается и формула

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3. \qquad (5)$$

Возможность двояко записать правую часть формулы (3) может привести к неверной аналогии, что и правую часть формулы (5) можно записать двояко. Ошибку предупреждают разъяснением, что $(a-b)^3 \neq (b-a)^3$, если $a \neq b$.

Предлагают упражнения:

1) *Написать недостающие члены в тождествах:*

а) $a^6+?+?+8=(?+?)^3$;

б) $8x^3-36x^2y+?-?=(?-?)^3$;

в) $?-?+?-64y^3=(x^2-?)^3$.

2) *В выражение вставить недостающие члены так, чтобы получилось развернутое выражение куба двучлена:*

а) $c^9+?+12c^3+?$;

б) $?-54n^2+?-8n^6$;

в) $x^{12}+?+?+8x^3$.

Если учащиеся хорошо читают выражения, то формулы умножения:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3; \qquad (6)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \qquad (7)$$

они изучают в классе в порядке самостоятельной работы. Предварительно полезно вспомнить, как называется каждое из выражений:

$$a^2-ab+b^2; \ a^2+ab+b^2.$$

Для самостоятельной работы даем задание:

1) *Вывести формулу умножения для выражения*

$$(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

2) *Записать правило для полученной формулы.*

3) *Придумать два примера на применение формулы и решить их.*

Аналогичное задание даем для получения формулы (7).

Важно, чтобы каждый учащийся выполнил 1 и 2 пункты задания.

Если подготовка учащихся не отличается высоким уровнем, то формулы (6) и (7) излагают в форме эвристической беседы или путем самостоятельной работы над учебником.

Применение формул (6) и (7) для умножения не вызывает затруднений.

Из формул (6) и (7) учащиеся получат:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{ и } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

и прочитают: 1) сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат их разности; 2) разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат их суммы.

Применение формул к разложению на множители сопровождается примерами:

а) $x^6+?=(?+1)(?-?+?)$;
б) $(?-c^6)=(2-?)(?+?+?)$;
в) $?-?=(?-?)(9a^2+?+4b^4)$.

6. О применении различных способов разложения на множители

Каждый из основных способов разложения на множители — вынесение за скобки, группировка, применение формул — первоначально рассматривали отдельно. Однако в процессе их изучения предлагали задачи, для решения которых сочетали вынесение за скобки и группировку, а также вынесение за скобки и применение формул, причем разложение начинали вынесением за скобки. Учащиеся видели, что вынесение за скобки используется в процессе применения других способов разложения, в частности при группировке.

Таким образом, учащиеся уже подготовлены, чтобы сформулировать *положение: если члены многочлена или иные слагаемые целого выражения имеют общий делитель, то прежде всего надо вынести его за скобки, а затем, если возможно, применить другие способы разложения.* Учащиеся не заучивают это положение, они могут передавать его своими словами, но надо, чтобы каждый ученик применял его.

Рассматривая различные способы разложения на множители и опираясь на конкретные примеры, целесообразно выделить еще некоторые положения, рационализирующие работу по разложению.

Если данное выражение или выражение, оставшееся в скобках,— двучлен, то выясняем, нельзя ли применить формулы разности квадратов, или суммы кубов, или разности кубов. Найдя такую формулу, следует ее использовать для разложения.

Если данное выражение или выражение, оставшееся в скобках,— трехчлен, то выясняем возможность применить одну из формул квадрата двучлена.

Если данное выражение или выражение, оставшееся в скобках,— четырехчлен, то выясняем возможность применить одну из формул куба двучлена.

Если к данному или оставшемуся в скобках четырехчлену нельзя применить формулы куба двучлена, то надо попытаться использовать способ группировки.

При выполнении упражнений приведенные положения становятся руководством к действию.

Указанные рекомендации не являются обязательными правилами: возможны отступления от них. Если, например, ученик не заметил применимости к многочлену $x^6+6x^4+12x^2+8$ одной из формул, то он может воспользоваться способом группировки:

$$x^6+6x^4+12x^2+8=(x^2+2)(x^4-2x^2+4)+6x^2(x^2+2)=$$
$$=(x^2+2)(x^4+4x^2+4)=(x^2+2)^3.$$

В этом случае способ группировки по сравнению с применением формулы приводит к более сложным выкладкам и не является рациональным, однако цель достигнута.

При обзорном повторении целесообразно обратить внимание школьников еще раз на то, что при разложении группировкой можно объединить члены двумя способами. В некоторых случаях можно применить различные способы разложения:

а) $(x+1)^3+(x-1)^3=(x+1+x-1)[(x+1)^2-(x+1)(x-1)+$
$+(x-1)^2]=2x(x^2+3);$

б) $(x+1)^3+(x-1)^3=x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1=$
$=2x^3+6x=2x(x^2+3).$

Разложение на множители, особенно когда применяется несколько способов, требует от учащихся исканий, сообразительности и инициативы. Вместе с тем упражнения в разложении способствуют развитию мышления и творческих усилий. Интересны и ценны те задачи, при решении которых приходится применять способы разложения на множители, не предусмотренные программой. Их следует рекомендовать для включения в план работы математического кружка учащихся VII и VIII классов. Для занятий кружка педагог найдет богатый и систематизированный материал в книге С. С. Бронштейна «Алгебра и ее преподавание в семилетней школе»[1].

---

[1] См. также:

а) А. Н. Барсуков. Разложение алгебраических выражений на множители. «Математика в школе», 1938, № 4.

б) П. М. Эрднеев. Об изучении тождественных преобразований в VI—VII классах. «Математика в школе», 1960, № 1.

в) С. С. Бронштейн. Алгебра и ее преподавание в семилетней школе. Учпедгиз, 1946.

ГЛАВА XI

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

1. Общий обзор темы

Так как семиклассникам известно множество рациональных чисел, то алгебраические дроби рассматриваются над полем рациональных чисел R. Пусть f и F — два многочлена над полем R. Отношение $\frac{f}{F}$ называется алгебраической дробью над полем R. Допустимыми значениями аргументов являются те, при которых $F \neq 0$.

Многочлен можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем, равным единице. Множество алгебраических дробей содержит в себе и множество рациональных чисел.

Равенство алгебраических дробей, действия сложения и умножения вводятся путем определений.

Две алгебраические дроби $\frac{f}{F}$ и $\frac{f_1}{F_1}$ равны $\left(\frac{f}{F}=\frac{f_1}{F_1}\right)$ в том и только в том случае, если $fF_1 = f_1F$.

Сложение и умножение определяются соответственно так:

$$\frac{f}{F}+\frac{f_1}{F_1}=\frac{fF_1+f_1F}{FF_1};\quad \frac{f}{F}\cdot\frac{f_1}{F_1}=\frac{ff_1}{FF_1}.$$

Сложение и умножение алгебраических дробей подчиняются всем законам арифметических действий.

Вычитание и деление дробей определяются как действия, соответственно обратные сложению и умножению. Обратные действия всегда выполнимы, кроме деления на нуль.

Множество алгебраических дробей над R является полем относительно сложения и умножения.

Приведенные соображения полезно учитывать в преподавании; в частности, не следует пытаться доказывать правила сложения и умножения. Целесообразно обратить внимание на законы прямых действий.

В методической литературе были предложения о формально-логическом изложении в школе главы об алгебраических дробях[1]. Мотивировалось это тем, что учащиеся уже знают рациональные числа, а преобразования алгебраических дробей — развитие операций над дробями.

Возрастные особенности учащихся восьмилетней школы воспрещают использовать формально-логическое изложение главы. Ведущая роль должна принадлежать конкретно-индуктивному методу.

---

[1] С. С. Бронштейн. Методика алгебры. Учпедгиз, 1935; Его же. Алгебра и ее преподавание в семилетней школе. Учпедгиз, 1946.

Исходным конкретным материалом служат операции над обыкновенными дробями и над рациональными числами.

Хотя конкретно-индуктивный метод при изучении алгебраических дробей является ведущим, это не должно приводить к пренебрежению дедукцией: ее надо использовать всюду, где возможно. Даже полезно усилить эти возможности путем включения задач на доказательство.

Объяснительная записка к программе указывает, что преобразования с алгебраическими дробями выполняются в несложных случаях, поэтому примеры, требующие громоздких выкладок, исключаются.

В объяснительной записке рекомендуется «приводить выражения к виду, наиболее удобному для решения каждой конкретной задачи».

В тему «Алгебраические дроби» включен вопрос о решении уравнений с числовыми коэффициентами, содержащих неизвестное в знаменателе, сводящихся к уравнениям первой степени с одним неизвестным. Вновь ученики встретятся с равносильностью уравнений и познакомятся со случаями нарушения равносильности. Возможность использовать дробные уравнения расширяет набор задач, которые можно предложить школьникам.

Согласно программе учащиеся впервые знакомятся с уравнениями, содержащими параметры. Выработка навыков в решении уравнений с параметрами не обязательна. Однако знакомство с ними открывает возможность решать уравнения и задачи с параметрами на занятиях математических кружков.

2. Первые уроки

Используя целесообразно подобранные примеры, следует восстановить в памяти учащихся понятие о дробном рациональном алгебраическом выражении, затем из множества таких выражений выделить алгебраические дроби и ввести определение для этого понятия.

В арифметике выражения такого вида, как

$$\frac{4-\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}}; \qquad \frac{5}{7\frac{1}{2}+3\frac{4}{5}},$$

называют дробными арифметическими выражениями, а арифметической дробью называют только такое выражение, числитель и знаменатель которого — натуральные числа.

Аналогично из дробных рациональных выражений выделяют алгебраические дроби.

Рассмотрим следующие дробные рациональные выражения:

$$\frac{2a}{3b};\quad \frac{5m+3}{2m-4};\quad \frac{x^2+5x+6}{x+3}. \tag{1}$$

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}-a};\qquad \frac{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}}{\frac{xy}{x^2+y^2}}. \tag{2}$$

В строке (1) записаны такие выражения, в которых числители и знаменатели — многочлены (в частности, и одночлены). Числители и знаменатели дробных выражений строки (2) — также дробные выражения. В отличие от выражений строки (2), выражения строки (1) называются алгебраическими дробями. По предложению педагога учащиеся запишут еще несколько алгебраических дробей и сформулируют определение: алгебраической дробью называется рациональное алгебраическое выражение, числитель и знаменатель которого — многочлены. Числитель и знаменатель алгебраической дроби называются членами ее.

Так как деление на нуль невозможно, то допустимыми значениями букв являются только те, которые не обращают знаменатель в нуль. В строке (1) в первом примере $b \neq 0$, во втором $m \neq 2$, в третьем $x \neq -3$. Чтобы избежать излишне частых оговорок о допустимых значениях букв, входящих в алгебраическую дробь, целесообразно принять, что знаменатель алгебраической дроби всегда отличен от нуля.

В арифметике целое число можно рассматривать как дробь со знаменателем, равным единице. Аналогично в алгебре: всякий многочлен можно рассматривать как алгебраическую дробь со знаменателем, равным единице. Это положение следует отметить и пояснить примерами: оно пригодится при изучении действий над алгебраическими дробями.

В множество алгебраических дробей включаются дробные рациональные числа, например $\frac{3}{4}$, $\frac{-2}{7}$, $\frac{5}{-3}$. Так как любое целое рациональное число можно представить в виде дроби со знаменателем 1, то целые рациональные числа также принадлежат множеству алгебраических дробей, т. е. они являются частным случаем алгебраической дроби.

Полезно сообщить о происхождении алгебраических дробей. Когда деление одного многочлена на другой невыполнимо, то частное обычно записывают в виде алгебраической дроби, например:

$$2m^2:5a^3=\frac{2m^2}{5a^3};\quad (x^2-1):(x^2+x+1)=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}.$$

Деление одного целого алгебраического выражения на другое, после преобразования числителя и знаменателя, также дает алгебраическую дробь:

$$\frac{(2m+1)(2m-1)}{(n-2)^2}=\frac{4m^2-1}{n^2-4n+4}.$$

Если радиус барабана ворота равен r, длина рукоятки равна R, усилие, приложенное к рукоятке, равно P, то подъемная сила Q, без учета сил трения, выражается так:

$$Q=\frac{PR}{r}.$$

Высота трапеции

$$h=\frac{2S}{a+b},$$

где S — площадь трапеции, a и b — длины ее оснований.

В правой части равенств имеем алгебраические дроби.

План изучения алгебраических дробей целесообразно наметить с учащимися по аналогии с планом изучения арифметических дробей, а именно: основное свойство алгебраической дроби и его применение, действия первой ступени, действия второй ступени, возведение алгебраической дроби в степень.

Приступая к изложению основного свойства, педагог поставит и обсудит с учениками вопросы: 1) В чем заключается основное свойство дробей, изученное в арифметике? 2) Как читается правило? 3) Применимо ли основное свойство к дробям, числители и знаменатели которых целые отрицательные числа?

Основное свойство верно для любых алгебраических дробей.

Дана алгебраическая дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — многочлены (в частности, и одночлены), и многочлен m (в частности, и одночлен). Умножая числитель и знаменатель дроби на m, получим дробь, тождественно равную данной:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}. \quad (3)$$

Допустимы лишь те значения букв, при которых знаменатели b и m не равны нулю.

Убедимся, что при одних и тех же значениях букв числовые значения дробей, стоящих в одной и той же строчке, равны:

1) $\frac{x+1}{x-1}$ и $\frac{(x+1)\cdot 2x}{(x-1)\cdot 2x}$ при: а) $x=3$, б) $x=-3$;

2) $\frac{2a}{a^2+1}$ и $\frac{2a(a+1)}{(a^2+1)(a+1)}$ при: а) $a=1$, б) $a=-2$.

Перепишем тождество (3) так:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b} \quad (m \neq 0). \tag{4}$$

Учащиеся сформулируют основное свойство, охватывающее тождества (3) и (4).

Каждую алгебраическую дробь можно освободить от дробных коэффициентов в числителе и знаменателе. Это — первое применение основного свойства. Например, умножив числитель и знаменатель дроби

$$\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{6}y^2}{\frac{7}{8}x^2-y^2}$$

на наименьшее общее кратное знаменателей всех ее коэффициентов, т. е. на 24, получим дробь, тождественно равную данной:

$$\frac{6x^2+20y^2}{21x^2-24y^2}.$$

Такое упрощение можно выполнить и тогда, когда числитель и знаменатель — целые выражения, отличные от многочленов:

$$\frac{\frac{1}{2}(a^2+ab)-\frac{3}{4}a^2}{\frac{3}{4}(ab-b^2)+ab}=\frac{2(a^2+ab)-3a^2}{3(ab-b^2)+4ab}=\frac{2ab-a^2}{7ab-3b^2}.$$

Основное свойство распространяется и на любые дробные рациональные выражения, например:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{\frac{2}{a}-b}=\frac{a^2b+a}{2b-ab^2}.$$

При разнообразных операциях над алгебраическими дробями большое значение имеет правильное и рациональное изменение знаков перед членами дроби и перед дробью. Этот вопрос вызывает затруднения учащихся и довольно часто сопровождается ошибками, а иногда неумение распорядиться знаками влечет нерациональные выкладки. Вот почему уже на этом этапе обучения следует добиться прочных навыков в изменении знаков у дроби.

На основании основного свойства числитель и знаменатель можно умножить на -1:

$$\frac{3}{5}=\frac{-3}{-5}, \quad \frac{-2}{7}=\frac{2}{-7}, \quad \frac{9}{-5}=\frac{-9}{5}, \quad \frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}.$$

В верности этих тождеств можно убедиться и непосредственной проверкой.

Чтобы предупредить ошибки учащихся, не следует торопиться с переходом к перемене знаков без мотивировки. На первых порах полезно записывать умножение членов дроби на -1. Это позволяет избежать, в частности, известной ошибки, состоящей в том, что у всех членов знаки меняются на противоположные, кроме первого. Рекомендуется писать так:

$$\frac{-x^2+2x-1}{3x-1}=\frac{(-x^2+2x-1)\cdot(-1)}{(3x-1)\cdot(-1)}=\frac{x^2-2x+1}{-3x+1}.$$

Следует выполнить с учащимися достаточное количество упражнений на одновременную перемену знаков в членах дроби.

Показать, что следующие дроби тождественно равны:

а) $\frac{-x}{y}$ и $\frac{x}{-y}$; б) $\frac{-a}{-a+b}$ и $\frac{a}{a-b}$; в) $\frac{-x^2+2x-1}{x-1}$ и $\frac{x^2-2x+1}{1-x}$.

Следующие дроби заменить тождественно равными, чтобы члены знаменателей изменили знаки на противоположные:

$$\frac{a}{-b};\quad \frac{y}{-x+1};\quad \frac{-m}{m-1};\quad \frac{x-x^2}{-x^2+x-1}.$$

Сокращение дробей — новое применение основного свойства алгебраических дробей. Сокращение дробей с одночленными числителями и знаменателями не требует много времени. Оно уже встречалось школьникам. Основное внимание следует уделить дробям с многочленными числителями и знаменателями. Упражнения планируют примерно в том же порядке, в каком рассматривались различные случаи разложения на множители.

Известна распространенная ошибка учащихся, заключающаяся в «сокращении» отдельных слагаемых членов дроби. В практике преподавания и методической литературе указаны способы, позволяющие избежать такой ошибки. Они сводятся к следующему: 1) на первых порах сокращение обязательно проверяется умножением членов полученной дроби на сокращенный множитель; 2) если по крайней мере один из членов дроби содержит два или более слагаемых, то для сокращения обязательно разложение членов дроби на множители; 3) практикуются обсуждения вопроса, можно ли сократить данную дробь[1]. Такие приемы в значительной мере страхуют от ошибок.

Большое значение имеет одновременное изменение знаков на противоположные перед дробью и перед одним членом ее.

[1] «Методика преподавания математики», под ред. С. Е. Ляпина. Учпедгиз, 1955.

По правилу деления рациональных чисел имеем:

$$\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5},\quad \frac{3}{-4}=-\frac{3}{4};\quad -\frac{-5}{4}=\frac{5}{4};\quad -\frac{2}{-7}=\frac{2}{7}.$$

Из этого следует, что величина дроби не меняется, если изменить знак одного из членов дроби и перед дробью на противоположный. Правило распространяется на все алгебраические дроби. Для приобретения умений и навыков выполняется достаточное количество упражнений, аналогичных следующим.

Заменить дроби тождественно равными, изменив знаки знаменателей на противоположные и не меняя знаки числителей:

$$\frac{m}{-n};\quad \frac{x}{-x-y};\quad \frac{a}{a-1};\quad \frac{x^2}{-x^2-5x+6}.$$

Изменяя знаки числителей на противоположные и не меняя их в знаменателях, преобразовать дроби в тождественно равные:

$$\frac{-2a}{b};\quad \frac{-m-n}{m};\quad \frac{2x^2-1}{1+x^2};\quad \frac{-m^2+2m-1}{m+1}.$$

В каждой паре преобразовать одну из дробей так, чтобы знаменатели оказались равными:

а) $\frac{2}{-7}$, $\frac{3}{7}$; б) $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{-a}$; в) $\frac{1}{a+b}$, $\frac{a}{-a-b}$;

г) $\frac{1}{m-n}$, $\frac{2}{n-m}$.

Программа по алгебре предусматривает введение символа a^{-n}. Этот символ нельзя истолковать как степень в том понимании, какое установлено ранее: нет смысла говорить, что число a берется сомножителем отрицательное число раз. Для введения символа необходимо новое определение. В VII классе не следует мотивировать целесообразность определения.

В учебнике алгебры А. Н. Барсукова использован удачный подход к введению понятия степени с целым отрицательным показателем.

Напоминается принятое в практике краткое обозначение больших чисел с помощью степени числа 10. Сообщается, что для краткой записи малых чисел в виде степени 10 приняты обозначения:

$$\frac{1}{10}=10^{-1};\quad \frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2};\quad \frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}=10^{-3};\quad \frac{1}{10^n}=10^{-n}.$$

Такие же обозначения применяются и при других основаниях степени, например:

$$\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}=2^{-6};\quad \frac{1}{625}=\frac{1}{5^4}=5^{-4}.$$

Если число a отлично от нуля и n — натуральное число, то

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Чтобы определение запомнилось, решают примеры:

1) *Вычислить:* 5^{-2}; 2^{-3}; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; $(0,2)^{-5}$.

2) *Следующие дроби заменить выражениями с отрицательными показателями:*

$$\frac{1}{3^4};\quad \frac{3}{10^3};\quad \frac{7}{100000};\quad \frac{1}{a^7}.$$

Диаметр молекулы воды приближенно равен $3\cdot10^{-8}$ *см*, а объем этой молекулы приближенно равен $29{,}7\cdot10^{-24}$ *куб. см*. Как показывают измерения, линейные размеры молекул других веществ имеют такой же порядок величины, как молекула воды. Радиус электрона приближенно равен 10^{-13} *см*.

Для измерения очень малых отрезков применяется особая единица длины — ангстрем, равная одной стомиллионной доле сантиметра: 1 ангстрем $=10^{-8}$ *см*. Ангстрем находит применение в оптике при измерении длин световых волн, в физике атома и атомного ядра.

Понятие о степени с нулевым показателем также вводится по определению: если число $a\neq0$, то $a^0=1$. Иначе: всякое число, не равное нулю, в нулевой степени принимается равным единице.

При изложении начальных сведений об алгебраических дробях можно предложить простейшие задачи на доказательство.

1) *Доказать, что дробь:*

а) $\frac{2x+2y}{9x+9y}$ *при любых допустимых значениях* x *и* y *равна* $\frac{2}{9}$;

б) $\frac{ax+ay-az}{bx+by-bz}$ *при любых допустимых значениях* x, y, z *равна* $\frac{a}{b}$.

2) *Доказать следующие тождества:*

а) $a^n\cdot a^{-n}=1$, если $a\neq0$; б) $\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{1}{(y-x)^2}$, *если* $x\neq y$;

в) $\frac{1}{(x-y)^3}=-\frac{1}{(y-x)^3}$, *если* $x\neq y$;

г) $\frac{1}{(a-b)(c-d)}=\frac{1}{(b-a)(d-c)}$, *если* $a\neq b$, $c\neq d$.

3. Действия первой ступени над алгебраическими дробями

Действия первой ступени целесообразно изучать одновременно: вычитание свести к сложению и изучать параллельно, при этом количество правил можно уменьшить.

С помощью ряда примеров восстанавливаем в памяти учащихся, как выполняются действия первой ступени над арифметическими дробями с одинаковыми знаменателями.

Можно предложить задачи:

1) *Для учеников VII класса куплены: a тетрадей в клетку, b в линейку и c для рисования. Сколько получил тетрадей ученик, если тетради каждого вида были распределены поровну между всеми, а учеников было m человек?*

Два различные решения приводят к выражениям, которые можно соединить знаком равенства:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}.$$

Имеем сложение алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

2) *Периметры двух одноименных равносторонних многоугольников равны p см и q см $(p>q)$. На сколько сторона одного многоугольника больше стороны другого, если каждый из них имеет n сторон?*

И в этом случае два различных решения приведут к двум тождественно равным выражениям:

$$\frac{p}{n}-\frac{q}{n}=\frac{p-q}{n}.$$

Имеем вычитание двух дробей с равными знаменателями.

Деление многочлена на одночлен можно записать в символической форме так:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Переставив части этого равенства, получим:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Чтобы выполнить сложение или вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями, надо произвести соответствующие действия над их числителями и результат разделить на общий знаменатель.

Материал для упражнений имеется в задачниках. Среди примеров найдут место и такие, знаменатели которых — противоположные выражения:

$$\frac{a}{2m}+\frac{b}{-2m};\quad \frac{a}{m-n}-\frac{b}{-m+n};\quad \frac{2x+y}{3x-y}+\frac{x-2y}{y-3x}.$$

Термин *наименьший общий знаменатель* иногда из курса арифметики переносят в курс алгебры. Среди общих кратных, например двух целых алгебраических выражений, нельзя указать наименьшее. Поэтому использование этого термина для алгебраических дробей надо признать неудачным.

Рекомендуется ввести термин *простейший общий знаменатель.* Такое название объяснимо: простейший общий знаменатель — тот из общих знаменателей, который имеет наименьшее количество буквенных сомножителей и отличается наиболее простой структурой.

Можно не давать формального определения, а на нескольких примерах выяснить, как найти такой знаменатель.

Требуется привести к общему знаменателю следующие дроби:

$$\frac{x}{8a^2b^5}; \quad \frac{y}{6a^3b^2c^4}.$$

Надо найти такой знаменатель, который делился бы на каждый из данных и был простейшим. Коэффициент общего знаменателя должен делиться на 8 и 6. Такому требованию удовлетворяет наименьшее общее кратное чисел 8 и 6, т. е. 24.

Общий знаменатель должен делиться на a^2 и a^3, на b^5 и b^2, на c^4. Значит, он должен содержать множители a^3, b^5, c^4.

Итак, общий знаменатель равен $24a^3b^5c^4$. Можно было получить сколько угодно других общих знаменателей, например: $24a^4b^7c^4$, $24a^5b^6c^7$; каждый из них также делится на данные знаменатели, но $24a^3b^5c^4$ — простейший общий знаменатель.

Ученики решают еще несколько примеров на приведение дробей с одночленными знаменателями к простейшему общему знаменателю. Затем формулируют правило отыскания простейшего общего знаменателя.

На нескольких примерах выясняем, как найти простейший общий знаменатель, когда знаменатели данных дробей двучлены, трехчлены и т. д.

Чтобы привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{3}{8a^2-8} \text{ и } \frac{1}{20a^3-60a^2+60a-20},$$

разложим их знаменатели на множители:

$$8a^2-8=8(a+1)(a-1);$$

$$20a^3-60a^2+60a-20=20(a-1)^3.$$

В состав общего знаменателя включим наименьшее общее кратное коэффициентов 8 и 20, т. е. 40. Чтобы искомый знаменатель делился на данные, в него надо включить $(a+1)$ и $(a-1)^3$. Эти множители имеют наивысшие степени из тех, в каких они входят в знаменатели. Получаем: $40(a+1)(a-1)^3$.

С такими же рассуждениями выполняем решение еще 2—3 примеров. В результате формулируем правило. Общее правило для сложения и вычитания можно дать в таком виде: чтобы выполнить сложение или вычитание алгебраических дробей, надо привести их к простейшему общему знаменателю, выполнить соответствующие действия над числителями и результат разделить на общий знаменатель.

Полезны задачи такого вида: *найти числовое значение алгебраического выражения*

$$\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2},$$

если $a=0{,}3$.

Целесообразно выполнить действия, а затем найти числовое значение.

При сложении (вычитании) целого выражения и алгебраической дроби целое можно представить как дробь со знаменателем 1.

Иногда полезно из алгебраической дроби исключать целое. Например, требуется найти числовое значение выражения

$$\frac{4a^2+b^2}{2a-b},$$

если а) $a=193$, $b=6$; б) $a=198$, $b=3$.

Для упрощения вычислений целесообразно исключить целое:

$$\frac{4a^2+b^2}{2a-b}=\frac{4a^2-b^2+2b^2}{2a-b}=2a+b+\frac{2b^2}{2a-b},$$

а затем уже находить числовое значение.

Среди задач на доказательство можно предложить такие:

а) *Если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

б) *Если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

в) *Сумма алгебраических дробей обладает переместительным свойством.*

г) *Сумма алгебраических дробей обладает сочетательным свойством.*

Приведем выкладки доказательства теоремы г):

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}=\frac{adf+(bcf+bde)}{bdf}=$$

$$=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf+bde}{bdf}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

4. Другие действия над дробями

Действия второй ступени над алгебраическими дробями целесообразно рассматривать без резкого их разграничения, почти параллельно.

Приступая к умножению, следует повторить с учащимися все правила умножения обыкновенных дробей и напомнить, что общим правилом является умножение дроби на дробь. Общее правило применимо к умножению любых рациональных чисел, при этом учитываются знаки.

Общее правило умножения рациональных чисел распространяется и на умножение алгебраических дробей. Если сомножитель — целое выражение, то оно рассматривается как дробь со знаменателем 1.

Аналогично излагают материал и при изучении деления дробей. Общее правило деления целесообразно сформулировать так: чтобы разделить алгебраическую дробь на дробь, надо делимое умножить на дробь, обратную делителю. Если делимое или делитель — целые выражения, то они рассматриваются как дроби со знаменателем 1.

Набор упражнений в стабильном сборнике задач по алгебре обеспечивает ученикам приобретение ими необходимых навыков.

При решении примеров обращается внимание учащихся на упрощение дробных выражений, числитель и знаменатель которых — алгебраические дроби или приводимы к ним, например:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}; \tag{1}$$

$$\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}; \tag{2}$$

$$\frac{x+\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x-y}-x}. \tag{3}$$

Некоторые ученики, решая такие примеры, сначала выполняют действия в делимом, затем — в делителе, и, наконец, производят деление одной дроби на другую. Иногда преподаватели одобряют такое решение.

Чтобы упростить дробное выражение (1), достаточно умножить делимое и делитель на простейший общий знаменатель дробей, находящихся в числителе и знаменателе, т. е. на ab

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Такое решение лучше описанного ранее: оно проще и требует меньше выкладок.

Преобразуя дробное выражение (2), делимое и делитель умножаем на $(a+b)(a-b)$. Для выражения (3) таким множителем служит $(x-y)$.

Для обоснования теоремы о возведении алгебраической дроби в степень с натуральным показателем можно опереться на примеры:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3, \quad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^4; \quad \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2.$$

В результате учащиеся сформулируют теорему, а затем полезно дать доказательство.

Когда учащиеся изучали формулы умножения, они применяли их только к целым выражениям. Теперь имеются возможности применить их к дробным выражениям:

$$\left(\frac{1}{a^3}+b^2\right)\left(\frac{1}{a^3}-b^2\right); \quad \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2; \quad \left(\frac{1}{3x^2}-x^3\right)^3.$$

Каждый из приведенных примеров можно решить двумя способами: 1) непосредственно применить соответствующую формулу, затем выполнить сложение и вычитание; 2) выполнить действия в скобках, затем произвести умножение или возведение в степень. Если сравнить выкладки двух решений одного и того же примера, то можно убедиться, что они незначительно отличаются друг от друга. Второе решение заслуживает некоторого предпочтения, если поставлена задача получить в результате алгебраическую дробь.

Представляют интерес следующие задачи на доказательство:

а) *Произведение алгебраических дробей обладает переместительным свойством.*

б) *Произведение алгебраических дробей обладает сочетательным свойством.*

в) *К алгебраическим дробям применим распределительный закон умножения.*

г) *Если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$.

д) *Если* $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}$, то $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{b_1+b_2+b_3+b_4}=\frac{a_1}{b_1}$.

е) *Если* $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$, то $\frac{a_1^2}{b_1^2}=\frac{a_2^2}{b_2^2}=\frac{a_3^2}{b_3^2}$.

5. Уравнения с дробными членами

В содержание темы «Алгебраические дроби» включен следующий материал об уравнениях: «Решение уравнений с числовыми коэффициентами, содержащих неизвестное в знаменателе. Примеры решения уравнений первой степени с буквенными коэффициентами».

В дальнейшем ради краткости уравнения, содержащие деление на выражение с неизвестным, будем называть дробными уравнениями.

Приступая к решению дробных уравнений первой степени с одним неизвестным, целесообразно повторить понятия о равносильных и неравносильных уравнениях, свойства уравнений и их следствия. Используя примеры, следует обратить особое внимание на то, что при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, возможно получить уравнение, неравносильное исходному.

Пример 1. $x-5=0$. Умножив обе части его на $x-4$, получим уравнение $(x-5)(x-4)=0$. Исходное уравнение имеет единственный корень: $x=5$. А полученное уравнение имеет два корня: $x_1=5$, $x_2=4$. Второй из них для исходного уравнения посторонний.

Пример 2. $(x-1)(x-2)=0$. Уравнение имеет два корня: 1 и 2. Если разделить обе части данного уравнения на $x-2$ (иначе: умножить на $\frac{1}{x-2}$), то получим уравнение $x-1=0$, неравносильное данному: оно имеет только один корень: 1. Значит, в нашем примере при делении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, получилось уравнение, неравносильное данному.

Пример 3. $\frac{1}{x-1}+1=2$.

Умножим обе части уравнения на $x-1$. Получим: $1+x-1=2x-2$. Это уравнение имеет корень $x=2$. Убеждаемся, что 2 — корень исходного уравнения. Данное уравнение и полученное равносильны.

При умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может получиться уравнение и равносильное и неравносильное данному.

Если к дробному уравнению применить план решения уравнений первой степени с одним неизвестным, то при умножении обеих частей на общий знаменатель, содержащий неизвестное, может получиться уравнение, имеющее корни, которые не являются корнями данного уравнения. Значит, надо принять правило: при решении дробных уравнений необходимо найденные числа проверить путем подстановки их вместо неизвестного в уравнение и таким путем отобрать корни, отбросив посторонние решения.

Первые дробные уравнения следует подобрать так, чтобы решение их подтверждало положение, что в одних случаях появляются посторонние корни, в других этого не происходит. Решение первых уравнений должно подтвердить мысль о необходимости проверки полученных решений по уравнению.

Приведем несколько примеров с решениями:

1) $$1-\frac{x+5}{5-x}=\frac{10}{x-5};$$

$$1+\frac{x+5}{x-5}=\frac{10}{x-5};$$

$$x-5+x+5=10;$$

$$x=5.$$

Если в данное уравнение вместо x подставить 5, то обе части уравнения теряют числовой смысл. Значит, 5 не является решением данного уравнения: 5 — посторонний корень. Он появился в результате умножения обеих частей уравнения на $x-5$. Данное уравнение не имеет корней.

$$2)\quad \frac{2}{2x+1}-\frac{1}{1-2x}=\frac{1}{4x^2-1};$$

$$\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{4x^2-1};$$

$$4x-2+2x+1=1;$$

$$6x=2;\qquad x=\frac{1}{3}.$$

Числовые значения левой и правой частей данного уравнения при $x=\frac{1}{3}$ равны $-1\frac{4}{9}$. Значит, $\frac{1}{3}$ — корень уравнения. Умножение обеих частей уравнения на $4x^2-1$ не вызвало появления посторонних корней.

Для самостоятельной работы можно предложить уравнения:

$$\text{а)}\ \frac{2}{x-3}+1=\frac{1}{3-x};\quad \text{б)}\ 2-\frac{1}{1-2x}=\frac{1}{2x-1}$$

Из испытываемых чисел посторонними корнями оказываются те, которые при подстановке в знаменатели членов уравнения вместо x обращают хотя бы один из них в нуль. На это целесообразно обратить внимание школьников.

6. Уравнения с параметрами

Уравнение, содержащее по крайней мере один параметр[1], в школьной алгебре обычно называют уравнением с буквенными коэффициентами.

Для уравнений с числовыми коэффициентами корнями, если они существуют, служат числа. При решении уравнений с буквенными коэффициентами учащиеся встречаются с более общим понятием корня: теперь корень — алгебраическое выражение, содержащее буквы. Корень — выражение, указывающее зависимость неизвестного от параметров. Оно дает возможность находить частные значения неизвестного при соответствующих частных значениях параметров.

В уравнении с параметрами первой степени с одним неизвестным имеются по крайней мере две буквы: одна — неизвестное, другая

---

[1] Буквенные коэффициенты уравнения называют параметрами. Этот термин по своей краткости удобен. Учащимся его можно не давать.

или другие — параметры. В силу этого надо указывать, какая буква принимается за неизвестное.

При решении первых уравнений с буквенными коэффициентами обращают внимание на указанные особенности уравнений и их корней. Если, например, дано уравнение $ax=b^2$, то его можно решать относительно любой из трех букв, входящих в него. Решим это уравнение относительно x при условии, что $a \neq 0$, $x=\frac{b^2}{a}$.

Обращаем внимание на то, что корень — буквенное выражение, зависящее от входящих в уравнение букв. Если $a=3$ и $b=8$, то $x=\frac{64}{3}$ служит корнем уравнения $3x=8^2$. Если $a=-2$ и $b=-5$, то $x=\frac{25}{-2}$; корень уравнения: $-2x=(-5)^2$. Корень содержит решения всех частных уравнений, которые получаются при замене a и b соответствующими числами.

Уравнения могут содержать один, два и более параметров. При обучении прежде всего надо использовать уравнения с одним параметром, а затем, по мере возможности, с двумя-тремя параметрами.

С решением уравнений с буквенными коэффициентами связан вопрос об исследовании корней в зависимости от значений параметров, от соотношений между параметрами.

Так как исследование уравнений первой степени с одним неизвестным тесно связано с решением буквенных уравнений, то в VII классе нет надобности рассматривать исследование отдельно: оно сливается с решением уравнений с параметрами. Включение в решение уравнений элементов исследования осуществляют постепенно, и в этом отношении делаются только первые шаги. В дальнейшем при решении задач эти шаги закрепляют.

1) Прежде всего по уравнению можно подметить, какие значения параметра исключаются.

Например, при решении относительно x уравнения

$$\frac{2x-3}{a-3}=1-\frac{x}{3-a} \qquad (1)$$

a может принимать любые рациональные значения, кроме 3.

При полученном корне делается указание, какое значение a исключено: $x=a$ $(a \neq 3)$.

2) Затем некоторые значения параметра приходится исключить в процессе решения. Например, при решении относительно x уравнения

$$x-1=\frac{4x-5}{c+2}$$

отмечается, что $c \neq -2$.

В процессе решения приходим к уравнению

$$x(c-2)=c-3.$$

Получаем:

а) $x=\frac{c-3}{c-2}$, если $c \neq 2$ и $c \neq -2$;

б) нет решения, если $c=2$.

3) Учащиеся продолжают подмечать по уравнению, какие числа не могут быть корнями. При решении относительно x уравнения

$$b+\frac{b+4}{x-1}=\frac{2x+b^2}{x-1}$$

отмечается, что $x \neq 1$.

Приходим к уравнению

$$(b-2)x=b^2-4.$$

При $b \neq 2$ получаем $x=b+2$. Так как $x \neq 1$, то $b \neq -1$. При $b=2$ уравнение имеет бесконечное множество решений: x — любое рациональное число, кроме 1.

4) В некоторых случаях можно поставить вопросы, при каких значениях параметра корень: а) равен нулю, б) положительный, в) отрицательный.

Например, решив уравнение

$$\frac{x+1}{a-2}=1+\frac{2-x}{a-2}$$

относительно x и получив корень $x=\frac{a-1}{2}$, где $a \neq 2$, учащиеся отмечают, что при $a=1$ корень равен 0, при $a>1$, кроме 2, корень положительный, при $a<1$ корень отрицательный.

Вопросы исследования уравнений найдут приложения в решении задач с помощью уравнений.

ГЛАВА XII

СИСТЕМА КООРДИНАТ И ГРАФИКИ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

1. Общий обзор темы

При изучении рассматриваемой темы учащиеся впервые знакомятся с понятиями и терминами, связанными с системой прямоугольных координат. Надо, чтобы семиклассники свободно, быстро ориентировались на координатной плоскости: это необходимое условие успешного изучения многих последующих вопросов курса алгебры.

Ознакомление с методом координат естественно сопроводить яркими приложениями. Как уже отмечалось ранее, одним из приложений является применение координат в горизонтальной съемке земельных участков, в составлении планов таких участков по координатам вершин.

Метод координат находит применение в изучении простейших функциональных зависимостей:

$$y=ax; \quad (1)$$

$$y=ax+b; \quad (2)$$

$$y=\frac{a}{x}. \quad (3)$$

При первой встрече с каждой из указанных функций рекомендуется рассмотреть целесообразно подобранные задачи, имеющие практическое значение. Отвлекаясь от частных видов величин и параметров задач, вводят соответствующие функции числового аргумента.

Программа не требует введения в этой теме понятия о функции. Используется термин *зависимость*, хорошо передающий функциональную связь между переменными. Некоторые учителя успешно вводят в конце этой темы понятия *переменной* и *постоянной*, *функции* и *аргумента*. Допустимые значения аргументов берут из множества рациональных чисел.

Функции и их графики обычно изучают методом неполной индукции: от примеров — к обобщениям. Так, устанавливают, что графики функций (1) и (2) — прямые, индуктивно выясняют значение их параметров.

Изучая функции и их графики, ученики систематически упражняются в чтении графиков. При этом они используют и те графики, которые строят сами, и «немые» графики, т. е. такие, на которых не указано соответствующее уравнение, но отмечен масштаб.

Полезно использовать упражнения следующих видов:

а) *Дана абсцисса точки графика. Найти соответствующую ординату.*

б) *Дана ордината точки графика. Найти соответствующую абсциссу.*

в) *На графике указана точка. Каковы ее координаты?*

г) *Абсциссы точек растут в указанном промежутке. Как при этом изменяются ординаты точек графика?*

Для демонстрации графиков линейных функций полезно иметь координатную доску. Кусок гладкой фанеры или линолеума в форме квадрата со стороной 1 *м* прикрепляют к легкой рамке. На этой доске помещают миллиметровую бумагу, на которой изображают координатные оси с соответствующими числовыми отметками. За единицу масштаба принимается дециметр. По краю бумаги в рамку вбиваются шпильки (гвозди без головок). Часть шпильки — около 2 *мм* — остается над поверхностью доски. Шпилька вбивается и в начало координат. Для изображения прямых используется тонкая резиновая нить с петлями на концах.

Координатная доска дает возможность демонстрировать немые графики линейных функций. Если доска сделана хорошо, нить достаточно тонка, то можно отсчитывать координаты точек с точностью до 0,02 *дм*.

Одновременно с построением и чтением графиков зависимостей ведется работа в другом направлении. Равенства (1), (2) и (3) можно рассматривать как уравнения относительно x и y. Каждая пара значений букв этих равенств вместе с тем является решением соответствующего уравнения. Это дает возможность сделать заключение, что каждое из рассматриваемых уравнений имеет бесконечное множество решений.

Особое внимание обращается на то, что координаты любой точки, взятые с чертежа графика, являются решением соответствующего уравнения. Это положение лежит в основе графического решения систем уравнений. Как правило, координаты, прочитанные по чертежу, дают приближенные значения неизвестных, что необходимо учитывать при проверке решения по уравнениям: правая и левая части могут оказаться приближенно равными.

Во избежание недоразумений учителю необходимо иметь в виду, что множество решений линейного уравнения в области рациональных чисел и множество точек соответствующей прямой имеют различную мощность — первое имеет меньшую мощность, чем второе: в первом множестве нет иррациональных решений, а второе содержит точки, координаты которых — одна или обе — могут быть иррациональными числами. Практически координаты точки по графику берутся приближенно и всегда выражаются рациональными числами.

2. Координаты точки

Для восстановления в памяти учеников того, что они изучали о графиках ранее, целесообразно решить хотя бы две задачи:

а) *Дана таблица наблюдений за температурой воздуха в течение декады марта. Требуется начертить график изменения температуры.*

б) *Дан график изменения температуры в течение суток. Определить по графику самую низкую и самую высокую температуру за сутки, в какое время температура понижалась, в какое повышалась.*

Учитель сообщит: «Мы находимся в начале улицы Октябрьской. К нам обращаются с вопросом: «Где находится кинотеатр «Спутник»? Отвечаем: «Достаточно пройти три квартала от начала улицы Октябрьской». К нам обратились с другим вопросом: «Как найти Театр юного зрителя?» Мы сообщаем: «Надо пройти от начала улицы Октябрьской два квартала и повернуть направо на улицу М. Горького и пройти по ней четыре квартала».

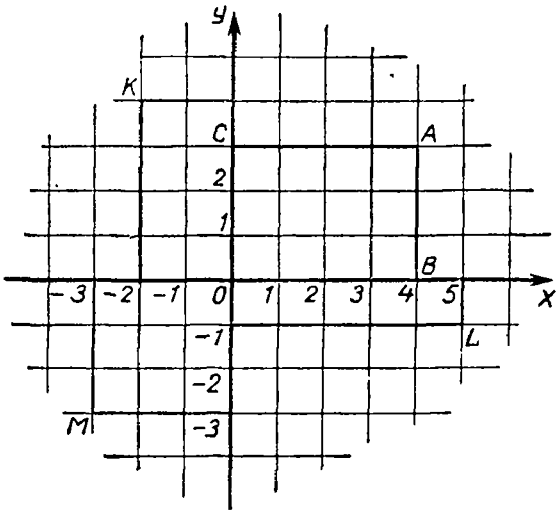


Рис. 3.

И в том и другом случае мы сообщили своеобразный адрес, которого достаточно, чтобы найти театр. Такими «адресами» определяется и положение точек на числовой прямой и на плоскости.

Изобразим на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY (рис. 3). Прямая OX — ось с началом в точке O, с положительным направлением слева направо и единичным отрезком, равным 1 *см*. Прямая OY — также ось с началом в той же точке O, с положительным направлением снизу вверх и единичным отрезком, равным 1 *см*.

С помощью двух осей и единичного отрезка для каждой точки плоскости можно указать ее «адрес». Отметим точку A. Проведем через нее перпендикуляры AC к оси OY и AB к оси OX. Найдем по осям расстояния точек B и C от точки O: $OB=4$, $OC=3$ (в сантиметрах).

Так как $ABOC$ — прямоугольник, то $CA=OB=4$ и $OC=AB=3$. Пара этих чисел и есть «адрес» точки A. Он записывается так: A (4; 3), причем на первом месте в скобках записывается число, отсчитываемое по оси OX, а на втором месте — число, отсчитываемое по оси OY.

Пусть точка A нанесена карандашом (мелом). Сотрем ее. Зная «адрес», легко восстановить точку. Это можно сделать тремя способами: пусть учащиеся подумают, как это сделать.

Аналогично составляются «адреса» точек K, L, M. Даны «адреса» точек D (1; —5), E (—2; 5), F (0; 6). Указать положение точек на плоскости (построить точки в системе координат).

Такой способ указывать и находить «адреса» точек на плоскости широко применяется и в науке и в практике. Поэтому целесообразно ввести понятия, связанные с этим способом. OX и OY — *оси координат*, первая — *ось абсцисс*, вторая — *ось ординат*, а точка их пересечения — *начало координат*[1]. Взятые вместе оси координат называют *системой координат*, а плоскость с системой координат называют *координатной плоскостью*. Числа, определяющие положение точки на координатной плоскости, называют *координатами точки* A $(x; y)$, первое число называют *абсциссой*, второе — *ординатой*.

В дальнейшем, в процессе выполнения упражнений, сообщается учащимся принятая нумерация квадрантов координатной плоскости, на которые она делится осями координат; нумерация полезна при изучении функций и их графиков.

Применение системы координат к изучению математических вопросов называется методом координат.

Чтобы понятия и связанные с ними термины запомнились, чтобы прочно усвоить порядок записи координат и их использование при построении точек, рекомендуем выполнить достаточное количество упражнений. Программа предусматривает два вида упражнений:

а) *Заданы оси координат и изображены точки, в том числе и такие, которые принадлежат осям. Требуется найти и записать координаты точек.*

б) *Точки заданы координатами. Требуется нанести их на чертеж.*

Учащиеся выполняют упражнения на миллиметровой, в крайнем случае на клетчатой бумаге.

Полезно показать первый фрагмент учебного фильма «Прямоугольная система координат и простейшие графики».

Учащиеся увидят все, связанное с первыми шагами в овладении прямоугольной системой координат. Демонстрация введет их

---

[1] Абсцисса — от лат. *abscissus* — «отрезанный», ордината — от лат. *ordinatus* — «расположенный в порядке». Координаты — от лат. *co* (*cum*) — приставка, означающая — «совместно», и *ordinatus* — «упорядоченный, определенный». Терминология введена Лейбницем, Эйлером, Лежандром.

в круг новых вопросов, которыми предстоит заняться на ближайших уроках. Ученики познакомятся и с некоторыми приложениями метода координат, в частности с работой барографа, автоматически фиксирующего изменение атмосферного давления.

Необходимо добиться, чтобы учащиеся безошибочно читали координаты точки, заданной на координатной плоскости, и строили точки по их координатам. Учитывая, что при изучении функций и их графиков в восьмилетней школе приходится пользоваться преобразованием фигур (осевой и центральной симметрией, параллельным переносом), желательно упражнения связать с этими преобразованиями и подметить ряд закономерностей.

1) Учащиеся получают задачу:

На координатной плоскости даны точки A (1; 2), B (3; 1), C (—5; 3), D (4; —4). *Построить точки, симметричные данным относительно оси ординат. Сравнить абсциссы и ординаты каждой пары симметричных точек. Сделать вывод.*

Две точки, симметричные относительно оси ординат, имеют равные ординаты и противоположные абсциссы.

Предлагается другая задача:

На координатной плоскости построены точки M (—5; 2), N (3; 4), P (—3; 4), Q (5; 2). *Выяснить, какие из этих точек попарно симметричны относительно оси ординат.*

Школьники подметят: две точки, имеющие равные ординаты и противоположные абсциссы, симметричны относительно оси ординат.

Эти заключения можно объединить в одной формулировке: две точки симметричны относительно оси ординат в том и только в том случае, когда ординаты их равны, а абсциссы — противоположные числа.

2) Выполняя упражнения в построении точек, симметричных относительно оси абсцисс, и выясняя, симметричны ли данные точки относительно той же оси, ученики находят: две точки, симметричные относительно оси абсцисс, имеют равные абсциссы и противоположные ординаты; две точки, имеющие равные абсциссы и противоположные ординаты, симметричны относительно оси абсцисс.

3) Аналогично ученики получат необходимое и достаточное условия симметрии точек относительно начала координат: две точки, симметричные относительно начала координат, имеют соответственно противоположные координаты; две точки, имеющие соответственно противоположные координаты, симметричны относительно начала координат.

4) При благоприятных условиях можно познакомить школьников с необходимым и достаточным условиями симметрии точек относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Предлагается решить задачу:

На координатной плоскости дана точка A (2; 4). *Построить точку, симметричную* A *относительно биссектрисы I и III координатных углов, и найти ее координаты. Какими особенностями обладают координаты этих точек?*

Решить аналогичную задачу относительно точки C (—3; 2).

Школьники подмечают: если точки A_1 $(x_1; y_1)$ и A_2 $(x_2; y_2)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, то $x_1=y_2$ и $y_1=x_2$.

Ученики решают задачу:

Даны точки A (1; 2), B (—3, 2), C (—3; 4), D (2; 1), E (2; —3), F (4; —3). *Выбрать из них такие пары, которые симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.*

Затем формулируют: если координаты точек A $(x_1; y_1)$ и A_2 $(x_2; y_2)$ таковы, что $x_1=y_2$ и $y_1=x_2$, то точки A_1 и A_2 симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

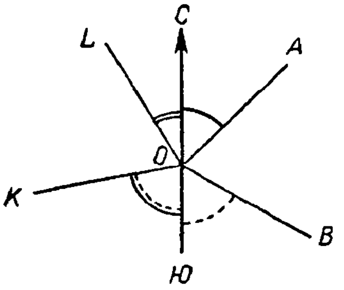


Рис. 4.

Прямоугольные декартовы координаты находят разнообразные применения в топографии и ее приложениях во многих областях народного хозяйства. При выполнении топографических работ приходится решать многие частные задачи: определять румб луча, заданного началом и точкой на луче, находить расстояние между двумя точками по их координатам, вычислять площадь многоугольника по координатам вершин. Простейшие из этих задач целесообразно использовать на уроках алгебры. Румбом луча называется острый угол между меридианом (магнитным), проходящим через начало луча, и лучом (горизонтальным).

На рисунке 4 изображен магнитный меридиан *ЮС*. Луч *OA* имеет направление на северо-восток, острый угол между магнитным меридианом и лучом *OA* равен 45°; румб этого луча — *СВ* : 45°. Аналогично: румб луча *OB* — *ЮВ* : 60°, румб *OK* — *ЮЗ* : 80°, румб *OL*—*СЗ* : 30°.

Допустим, что положительное направление оси ординат совпадает с направлением меридиана на север. Начало луча — точка O (0; 0), луч проходит через точку A (3; 4,5). С помощью транспортира найти румб луча *OA*.

1) *Найти румбы лучей, проходящих через начало координат и точки:* а) B (4; —2,3), б) C (—2; —3,8), в) D (—5,2; —6).

2) *Начало луча — точка* K (3; 2). *Найти румб луча, если луч проходит через точку:* а) L (5; 7), б) M (2; 1), в) N (—1; —1).

3) *Дана точка* A (5; 8). *Найти координаты середины отрезка OA.*

4) *Найти координаты середины отрезка ВС, если известны координаты его концов:* а) *В* (2; 2), *С* (6; 4), б) *В* (—2; 2), *С* (4; 6).

5) *Дана точка М* (6; 8). *Найти длину отрезка ОМ.*

Если одна или обе координаты точки отрицательны, то для применения теоремы Пифагора надо взять абсолютные значения координат.

Можно предложить и такую задачу:

Найти длину отрезка АВ, если даны координаты его концов А (6; 2), *В* (5; 10).

Конечно, при решении задач 3—6 никаких общих формул не дается. Каждое из них выполняется по соображению, причем предварительно строят данные точки.

Для измерения координат точек, отмеченных на топографических картах или планах, а также для нанесения на карты и планы точек, соответствующих каким-либо объектам местности, применяется весьма простой прибор — координатомéр. Он делается из прозрачного материала. Его устройство легко уяснить по чертежу (рис. 5).

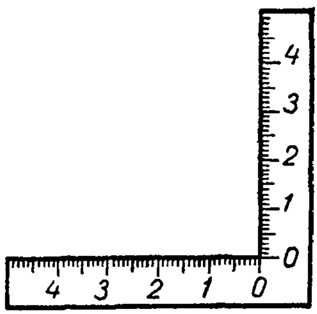


Рис. 5.

Одним из практических применений метода координат является составление планов земельных участков многоугольной формы, если известны координаты их вершин. Например, можно предложить следующую задачу:

Контур земельного участка — многоугольник; координаты его вершин — А (0; 0), *В* (34,2; 52,0), *С* (62,8; 84,1), *D* (106,0; —43,0), *Е* (45,9; —68,0); *координаты даны в метрах. Составить план земельного участка в масштабе в* 1 *см*—10 *м.*

Весной, при повторении темы о координатах и графиках, педагог организует практическую работу на местности — горизонтальную эккерную съемку многоугольного земельного участка. Такая работа представляет значительный интерес для курсов алгебры и геометрии. Вычисление площади многоугольника по результатам измерений в натуре дает довольно высокую степень точности.

Если съемку производить хорошо проверенным эккером, тщательно выполнить измерения в натуре рулеткой, аккуратно составить план и вычислить площадь по результатам измерений в натуре, то план эккерной съемки не уступает аналогичным планам, составленным специалистами.

Хорошо, если эккерная съемка будет связана с общественно полезной работой класса в весенний период, например с планировкой и разбивкой цветника перед школой, с планировкой части пришкольного земельного участка, с разбивкой колхозного фруктового сада или огорода.

В математическом кружке учащиеся познакомятся с более сложными способами эккерной съемки, когда применяется несколько систем координат (способ треугольника, способ обхода участка и др.).

3. Функция $y=ax$

Рассматриваем с учениками следующие или подобные приведенным задачи:

1) *Основание прямоугольника равно 2 см, его высота равна h см. Составить выражение для площади прямоугольника.*

Обозначив площадь S, получим:

$$S=2h. \tag{а}$$

Давая h различные значения, легко показать, что значение площади изменяется с изменением высоты. Целесообразно обсудить вопросы: а) *Какие величины называются прямо пропорциональными?* б) *Как убедиться, что площадь и высота прямоугольника — величины прямо пропорциональные?* б) *Какие значения может принимать h?*

2) *Средняя скорость крылатого судна «Ракета», курсирующего по Волге, равна 65 км/ч. Какой путь пройдет «Ракета» за t часов?*

Получим:

$$s=65t, \tag{б}$$

гдо s — путь в километрах.

Сберегательная касса выплачивает 2% годовых по бессрочным вкладам. Сколько процентных денег выплатит сберегательная касса за год по вкладу в n рублей?

Обозначив p процентные деньги, получим:

$$p=0{,}02n. \tag{в}$$

Каждая из задач приводит к равенству, выражающему зависимость одной величины от другой: площади прямоугольника от высоты его (*а*), пути, пройденного «Ракетой», от времени движения (*б*), процентных денег от вклада (*в*). Несмотря на разнообразие величин эти равенства похожи одно на другое: в каждом из них буквами обозначены величины прямо пропорциональные. Ученики составят еще несколько задач, в которые входят две прямо пропорциональные величины и решение которых приводит к равенствам, аналогичным рассмотренным.

Если отвлечься от величин, входящих в равенства (а), (б) и (в), если отвлечься от частных значений коэффициентов правых частей, то можно в общем виде записать зависимость:

$$y=ax, \tag{1}$$

где a — коэффициент, принимающий в конкретных задачах разные значения, а x и y переменные: x может принимать любое значение из множества рациональных чисел, а значения y зависят от значений x. Надо изучить эту зависимость.

Детально рассматриваем пример $y=2x$: составляем таблицу значений x и y, строим соответствующие точки на координатной плоскости, с помощью линейки ученики убеждаются, что построенные точки лежат на прямой, проходящей через начало координат. Эту прямую называют графиком зависимости $y=2x$.

Но на равенство $y=2x$ можно смотреть и как на уравнение. В этом уравнении два неизвестных, каждое из них в первой степени. Оно называется уравнением первой степени с двумя неизвестными. Каждая пара чисел в любой строке таблицы является решением уравнения, что легко проверить путем подстановки в уравнение вместо x и y соответственно чисел любой строки таблицы. Уравнение имеет бесконечное множество решений.

Обратимся к графику зависимости $y=2x$. Каждая точка прямой имеет координаты, удовлетворяющие уравнению $y=2x$, т. е. эта пара чисел является решением уравнения.

И график показывает, что уравнение имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти хотя бы одно из них, надо взять точку прямой и найти ее координаты.

В таком же плане рассматриваются уравнения:

$$y=0{,}5x, \quad y=-3x, \quad y=-\frac{1}{3}x.$$

Накопленные учащимися наблюдения дают возможность сделать заключения, что рассматриваемого вида уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений, что график соответствующего уравнения есть прямая, проходящая через начало координат. Положение прямой определяется двумя точками; поэтому для построения графика достаточно вычислить координаты двух точек, одной из которых может быть начало координат. В целях контроля над вычислениями и построением каждый раз будем находить координаты и третьей точки. Эти соображения применяются к построению графиков следующих уравнений: $y=2{,}5x$, $y=-x$, $y=-0{,}5x$.

Выполняются упражнения в чтении графиков.

Перед учащимися координатная доска или прикрепленный к классной доске лист миллиметровой бумаги. На доске с помощью резиновой нити показываем прямую, проходящую через начало. Уравнение прямой не указано (немой график); масштаб указан. Ученики отвечают на следующие вопросы:

а) *Абсцисса точки, лежащей на прямой, равна* 3. *Найти по чертежу ординату этой точки.*

б) *Ордината точки прямой равна* 2. *Найти абсциссу этой точки.*

в) *Отметим на прямой точку K. Найти ее координаты.*

г) *Принадлежит ли точка M* (2; 3) *прямой, изображенной на чертеже? (Устанавливается построением точки.)*

Такого рода упражнения повторяются на следующем уроке, при этом вниманию учащихся предлагается чертеж с иным направлением прямой и с другим масштабом.

Эти упражнения находят естественное продолжение, когда учащиеся знакомятся с некоторыми применениями функции (1) и ее графика.

Составить график для перевода значений температуры, определенной по шкале Реомюра, на шкалу Цельсия. Известно, что 100° C соответствует 80° R. Значит, 1° R соответствует $\frac{5^\circ}{4}$ C, а x° R соответствует $\frac{5}{4}x^\circ$ C. Обозначив полученное выражение y, находим зависимость:

$$y=\frac{5}{4}x. \tag{2}$$

Показывается, как с помощью этой зависимости найти значение температуры по Цельсию, если известно значение температуры по Реомюру. Решается и обратная задача.

При каждом переводе значения температуры приходится вычислять. Чтобы избежать этого, нужно построить график зависимости.

График освобождает от вычислений, но в перевод значений температуры вносятся погрешности, зависящие от погрешностей при построении графика, отсчете абсцисс и ординат. На производстве, когда допустима небольшая точность, графические приемы определения значений величин применяются часто: они повышают производительность труда.

Одному английскому дюйму соответствует приближенно 2,54 *см*. Можно предложить построить график для перевода значений длины, выраженной в дюймах, в сантиметры и для обратного перевода. Используя график, определить: 1) *длины деталей в миллиметрах, если они выражены в дюймах;* 2) *длины деталей в дюймах, если они выражены в миллиметрах.* Для аналогичных упражнений можно использовать соотношение: 1 морская миля $\approx$ $\approx 1{,}852$ *км*.

Просмотр второго фрагмента (график прямо пропорциональной зависимости) учебного кинофильма «Прямоугольная система координат и простейшие графики» послужит обзором изучения зависимости $y=ax$ и позволит выяснить влияние коэффициента пропорциональности на положение прямой на координатной плоскости.

Демонстрация третьего фрагмента (график линейной функции) из того же кинофильма послужит введением в следующий раздел темы — о линейной функции и ее графике.

4. Функция $y=ax+b$

Предлагаем ученикам рассмотреть несколько задач.

1) *Пружина имеет длину* 12 *см. При нагрузке в* 1 *кГ длина пружины увеличивается на* 0,5 *см. Какова длина пружины при нагрузке в x килограммов?*

Если искомую длину пружины обозначить y, то получим:

$$y=0{,}5x+12. \tag{а}$$

По смыслу задачи x может принимать неотрицательные значения; кроме того, удлинение пружины пропорционально силе только для небольших нагрузок, не превышающих примерно 10 *кГ*. Значит, в равенстве (а) x может принимать значения от 0 до 10 *кГ*. Давая x различные допустимые значения, показываем, что длина пружины зависит от значения x.

Уместно обратить внимание на то, что между x и y нет прямой пропорциональности.

2) *Автомобиль находится в пункте T на расстоянии* 5 *км от пункта A; затем он начал двигаться по лучу AT, удаляясь от A. На каком расстоянии он будет находиться через t минут, если его средняя скорость равна* 1,5 *км в минуту?*

Обозначив искомое расстояние s, найдем:

$$s=1{,}5t+5. \tag{б}$$

Равенство устанавливает зависимость расстояния s от времени движения t.

3) *На* 1 *января школа имела* 75 *куб. м дров; средний ежедневный расход топлива составляет* 0,8 *куб. м. Сколько останется дров через t дней?*

Решение приведет к зависимости:

$$y=-0{,}8t+75. \tag{в}$$

Отвлекаясь от величин, входящих в (а), (б), (в), и от частных значений коэффициентов правых частей, можно записать зависимость:

$$y=ax+b, \tag{3}$$

где a — коэффициент, принимающий в конкретных задачах различные значения, b — свободный член, также принимающий разнообразные значения, а x и y — переменные: x может принимать любые значения из множества рациональных чисел, а значение y зависит от значения x.

Дальнейший план работы аналогичен плану изучения зависимости (1), рассматриваем, например,

$$y=2x+3. \tag{4}$$

Составляем таблицу значений x и соответствующих значений y, подчеркиваем зависимость y от x, по координатам строим точки, отмечаем, что таких точек можно построить как угодно много, прикладываем к точкам ребро линейки и устанавливаем, что все они принадлежат прямой — графику зависимости (4).

На равенство (4) можно смотреть как на уравнение первой степени с двумя неизвестными. Каждая пара чисел в любой строке таблицы является решением уравнения (4). Это уравнение имеет бесконечное множество решений.

Каждая точка графика имеет координаты, удовлетворяющие равенству (4), т. е. эта пара чисел — решение уравнения. И график показывает, что уравнение (4) имеет бесконечное множество решений.

В том же плане рассматриваются еще несколько функций, например, $y=0{,}5x-2$; $y=-x+1$.

В результате изучения частных видов линейной функции делаются обобщения: графики таких зависимостей — прямые, каждое уравнение этого вида — первой степени с двумя неизвестными — имеет бесчисленное множество решений, координаты каждой точки графика являются решением уравнения.

Затем переходим от построения графика по многим точкам к построению его по двум точкам, а третью точку используем для контроля.

Полезно выработать навык строить график по отрезкам на осях. Если, например, в зависимости $y=2x+4$ дать x значение 0, от $y=4$, т. е. y равен свободному члену. Точка с координатами (0; 4) лежит на оси ординат. Прямая пересекает эту ось в точке (0; 4). Поэтому свободный член называют начальной ординатой. Если $y=0$, то из $0=2x+4$ получим $x=-2$. Точка $(-2; 0)$ лежит на оси абсцисс. Положение прямой определяется этими точками. Для контроля находим координаты третьей точки и убеждаемся, что она принадлежит той же прямой.

Полезно учить читать график по немому чертежу. Наряду с вопросами, аналогичными указанным ранее, уместно поставить и такие:

а) *Абсцисса x изменяется от* 0 *до* 4. *Как изменяется y?*

б) *Ордината y изменяется от* —1 *до* 3. *Как изменяется x?*

в) *Каково значение начальной ординаты?*

5. Функция $y=\frac{a}{x}$

Знакомство учащихся с функцией $y=\frac{a}{x}$ начинается с практических задач и примеров.

1) *Расстояние между двумя городами равно* 440 *км. Поезд проходит этот путь за t часов. Какова средняя скорость поезда?*

Обозначим среднюю скорость v километров в час. Получим:

$$v=\frac{440}{t}. \tag{a}$$

Показываем, что v зависит от t, что v обратно пропорционально t. Таким образом, равенство (а) показывает зависимость средней скорости от времени движения поезда.

2) *На заводах часто пользуются сжатым воздухом или другим газом. Газ сжимается под давлением, причем объем сжимаемого газа уменьшается с увеличением давления. Связь между объемом и давлением устанавливается приближенно законом Бойля — Мариотта: произведение объема (v) газа на давление (p) — величина постоянная (c):*

$$vp=c,$$

или

$$v=\frac{c}{p}. \tag{б}$$

Величины v и p обратно пропорциональны.

3) *Площадь прямоугольника равна 24 кв. см, основание его равно a сантиметрам. Определить высоту прямоугольника.*

Получим:

$$h=\frac{24}{a}, \tag{в}$$

где h — искомая высота.

Каждое из равенств (а), (б), (в) выражает обратно пропорциональную зависимость между двумя величинами; каждое равенство устанавливает зависимость одной величины от другой. Коэффициенты в правых частях этих уравнений — различные числа (значения величин). Если отвлечься от частных значений коэффициентов и обозначить коэффициент правой части a, и если отвлечься от величин, связываемых каждым уравнением, то получим следующую зависимость:

$$y=\frac{a}{x}, \tag{5}$$

где x принимает любые значения из множества рациональных чисел (кроме 0).

Детально рассматриваем пример этой зависимости:

$$y=\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Составляем таблицу значений x и y:

Таблица 19

x	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4

Если при изучении ранее рассмотренных функций значения x могли выбирать учащиеся, то для построения графика зависимости (6) целесообразно дать значения аргумента с расчетом, чтобы положение графика определилось с достаточной полнотой. Можно было бы при значениях аргумента поставить двойные знаки и получить соответствующие значения y с двойными знаками. Это потребовало бы разъяснений соответствия между знаками. В дальнейшем двойные знаки приводят некоторых учеников к ошибкам: в VII классе двойными знаками пользоваться нецелесообразно.

Рассматривая каждую пару чисел, стоящих в одном столбце, как координаты точки, учащиеся, пользуясь масштабом в 1 *см* единица, на отдельных листках бумаги выполняют построение точек. Давая x иные значения и вычисляя соответствующие значения y, можно получить как угодно много координат точек и построить соответствующие точки. Все точки принадлежат кривой линии, которая называется гипе́рболой. Зависимость (6) называют уравнением гиперболы [1].

Обращаем внимание учащихся, что гипербола состоит из двух ветвей, одна из них расположена в первой, другая в третьей четверти.

Для каждой точки одной ветви можно найти симметричную относительно начала координат точку другой ветви: например, точке (2; 0,5) первой ветви симметрична точка (—2; —0,5) второй ветви. Значит, ветви гиперболы симметричны относительно начала координат.

Затем выясняем, имеет ли гипербола оси симметрии.

Если построить биссектрису углов первой и третьей четвертей, перегнуть фигуру по полученной прямой, то путем просмотра на свет убеждаемся, что эта прямая — ось симметрии гиперболы. Устанавливаем, что биссектрисы углов второй и четвертой четвертей дают вторую ось симметрии гиперболы.

Для выяснения влияния параметра a на график функции надо построить графики, например, таких зависимостей:

$$y=\frac{4}{x};\quad y=\frac{8}{x}.$$

Особо рассматриваем случай с отрицательным значением параметра a, например $y=-\frac{1}{x}$. Строим график, подмечаем особенности его расположения относительно осей координат по сравнению с графиком зависимости (6).

Изучение функции $y=\frac{a}{x}$ сопровождается упражнениями в чтении чертежей. К классной доске прикрепляем лист чертежной

[1] Гипе́рбола — от греч. ὑπερβολή — «избыток, преувеличение».

бумаги, на котором изображена гипербола в прямоугольной системе координат. Уравнение ее неизвестно (немой график).

а) *Абсцисса точки гиперболы равна* — 4. *Найти по графику соответствующую ординату. Каковы координаты точки, симметричной найденной относительно начала координат? Показать, что она принадлежит гиперболе.*

б) *Найти абсциссу точки гиперболы, если ордината ее равна* — 2. *Указать точку гиперболы, симметричную найденной относительно начала координат.*

в) *На гиперболе дана точка А. Найти ее координаты.*

г) *Абсцисса изменяется от* 1 *до* 4. *Как изменяется в этом промежутке ордината?*

д) *Выяснить, лежит ли точка К* (2; —3) *на гиперболе.*

В беседах полезно указать на приложения гиперболы в практике.

В явлениях природы, в человеческой деятельности часто встречаются обратно пропорциональные зависимости между двумя величинами. Гипербола может служить графиком любой такой зависимости.

Астрономы всесторонне изучают строение космоса. Среди тел солнечной системы много комет. Оказалось, что вблизи Солнца многие кометы движутся по орбитам, близким к гиперболам. Этой кривой широко пользуются в астрономии.

Гипербола используется и в строительном деле. Фермы мостов для большей прочности делают так, что воображаемое продольное сечение их вертикальной плоскостью — кривая линия, близка к гиперболе (часть ветви гиперболы).

Изучение функции $xy=a$ полезно заключить показом четвертого фрагмента (обратно пропорциональная зависимость величин) фильма «Прямоугольная система координат и простейшие графики».

6. Из истории метода координат. Некоторые приложения этого метода

Метод координат широко используется во многих науках и в разнообразных областях практики.

Исторически первыми вошли в употребление системы небесных и географических координат. Описание некоторых систем небесных координат имеется уже в трудах древних греков — знаменитого геометра Евклида (около 300 г. до н. э.), выдающегося астронома Птолемея (II в. н. э.) и др.

Географические координаты — широта и долгота — дают возможность определять положение точки на поверхности Земли. Они вошли в употребление также в глубокой древности. И небесные и географические координаты имеют исключительно большое значение для мореплавания, за последние 50 лет — для аэронавтики, а теперь и для начинающей свое развитие космонавтики.

Широкое применение географических координат стимулировало перенесение координатного метода на плоскость. Французский математик и физик Н. Орéм во второй половине XIV в. осуществил одну из первых попыток использовать прямолинейную систему координат на плоскости для построения графиков функциональных зависимостей; он сохранил терминологию, свойственную географическим координатам,— долготой и широтой называл то, что в наше время называют соответственно абсциссой и ординатой.

Систематически начинают применяться координаты на плоскости в первой половине XVII в. Французский математик П. Ферма́ владел методом координат уже около 1625 г. Французский философ и математик Р. Декарт в сочинении «Геометрия» вскрыл с большой глубиной значение метода координат для геометрии: он показал, что этот метод сводит проблемы геометрии к проблемам алгебры и алгебраические факты при некоторых условиях можно истолковать геометрически. Декарт создал аналитическую геометрию. Он пользовался косоугольными координатами с одинаковыми масштабами по осям.

Эта система координат и получила название декартовых координат; частным случаем ее является прямоугольная декартова система координат.

Использование метода координат было обусловлено быстрым развитием в XVII в. математического естествознания, астрономии и созданием механики, которая явилась основой техники. В свою очередь сформировавшаяся аналитическая и несколько позднее дифференциальная геометрия открыли возможности приложить метод координат в механике (аналитическая механика) и в других технических дисциплинах.

Широкое применение имеют прямоугольные координаты на плоскости, когда масштабы взаимно перпендикулярных осей одинаковы.

На топографических картах наносится координатная сетка, предназначенная для определения координат точек земной поверхности, а также для нанесения на карту точек местности по их координатам. Например, на топографической карте в масштабе 1 : 10 000 расстояние между координатными линиями делается в 10 *см*, что соответствует стороне квадрата на местности в 1 *км*.

Принцип прямоугольных координат применяется в устройстве некоторых машин, например в координатно-расточных металлорежущих станках, предназначенных для особо точной обработки отверстий, пазов и других поверхностей различных деталей. Такие станки позволяют точность диаметров отверстий и взаимное расположение их центров доводить до 0,005 *мм*.

В теории и практике находят широкое применение аффинные координаты. Если на плоскости выбрать начало координат O, две оси OX и OY и произвольные масштабы, то для точки A плоскости получим аффинные координаты. Частным случаем аффинных координат являются прямоугольные аффинные координаты.

При обучении применяются прямоугольные декартовы координаты. Когда учащиеся знакомятся с координатами точки на плоскости, когда они изучают графики простейших функций с числовыми аргументами, когда применяют графики функций к решению уравнений или систем уравнений, они пользуются прямоугольными декартовыми координатами.

Если же приходится строить графики функций, связывающих разнородные величины, например время и путь, количество товара и стоимость, температуру и длину, то в таких случаях, применяя аффинную прямоугольную систему координат, основания масштабов двух осей берут различные. При обучении термин «аффинные координаты» не используется, но педагогу полезно знать, что аффинные координаты, в частности, применяются в прикладных вопросах. Графики эмпирических функций часто строятся в аффинных прямоугольных координатах.

ГЛАВА XIII

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. План изучения темы

Традиционный для нашей школы план изучения систем линейных уравнений с двумя неизвестными таков: вводим понятие о *линейном уравнении с двумя неизвестными* и на 2—3 примерах показываем, что такое уравнение имеет бесконечное множество решений; затем вводим понятие о *системе линейных уравнений с двумя неизвестными* и последовательно изучаем решения способом сложения, способом подстановки, даем графическое истолкование решения и решаем задачи составлением систем.

Этот традиционный план имеет недостатки. Нередко учащиеся смутно представляют, что линейное уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений; некоторые из них утверждают, что такое уравнение решить нельзя. Овладев способом сложения, ученики недоумевают, почему необходимо изучать решение способом подстановки, который им кажется более сложным. Графическое истолкование решения системы уравнений им кажется еще более сложным и ненужным.

Основной недостаток традиционного плана заключается в том, что функциональная природа уравнений почти, а иногда совершенно выпадает.

Рассматриваемую тему целесообразно излагать в иной последовательности. При изучении предыдущей темы учащиеся на примерах познакомились с тем, что некоторые виды уравнений первой степени с двумя неизвестными ($y=ax$, $y=ax+b$) всегда имеют графиками прямые линии, что каждое из них имеет бесконечное множество решений. Теперь они на примерах знакомятся с уравнением $ax+by=c$, устанавливают, что графики таких уравнений — прямые линии, узнают, что каждое уравнение имеет бесконечное множество решений. Затем вводим понятие о системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, и учащиеся приобретают навыки в их решении графическим способом. Далее изучаем решение систем линейных уравнений способом подстановки; переход к нему в некоторой мере подготовлен. Наконец, системы линейных уравнений решаем способом сложения.

Такое расположение материала имеет то основное преимущество, что уравнение рассматривается в функциональном аспекте. Занимаясь построением графиков, ученики на многих примерах познают, что каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений; это прочно запечатлевается в их сознании. Умение строить графики уравнений превращается в навык. Переход к графическому решению систем совершается естественно; ученики лишаются оснований браковать такое решение. Графическое решение систем уравнений дает наглядное истолкование вопроса о числе решений: перед школьниками пройдут системы с одним решением, с бесконечным множеством решений и не имеющие решений. В процессе изучения линейной функции и графического решения систем уравнений ученики приобретают навыки выражать одно неизвестное через другое, а это подготовляет изучение решения систем способом подстановки, и усвоение этого способа не вызывает затруднений.

Такой план применяется некоторыми учителями в школах и получил положительную оценку.

2. Уравнение $ax+by=c$

Подготовка к знакомству с уравнением первой степени с двумя неизвестными велась уже при изучении предыдущей темы «Координаты и простейшие графики». В обзорной беседе нужные сведения восстанавливаются в памяти учащихся.

Если делимое x, делитель y, частное 5 *и остаток* 2, *то как выразить связь между этими числами?*

Получаем:

$$x=5y+2, \text{ или } x-5y=2. \qquad \text{(а)}$$

Если из двузначного числа, содержащего x десятков и y единиц, вычесть число с обратным порядком цифр, то получится 36. *Составить уравнение.*

Получаем:

$$10x+y-(10y+x)=36, \text{ или } x-y=4. \qquad \text{(б)}$$

И в том и другом случае получено уравнение первой степени с двумя неизвестными.

Отвлекаясь от частных значений коэффициентов при неизвестных и свободных членов, можно записать следующее уравнение:

$$ax+by=c, \qquad (1)$$

где x и y — неизвестные, a и b — коэффициенты и c — свободный член. Теперь x можно давать любые значения из множества рациональных чисел. Каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными можно свести к уравнению вида (1). Уравнение (1) называют нормальным (каноническим) видом уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Затем приводят в систему понятия, связанные с линейным уравнением с двумя неизвестными.

Уравнение вида

$$ax+by=c,$$

где x и y — неизвестные, а a, b, c — данные числа, называется уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Решить одно уравнение с двумя неизвестными — значит найти такое значение x и значение y, которые удовлетворяли бы уравнению.

Пару чисел, удовлетворяющих уравнению с двумя неизвестными, называют его решением. Поясняем это на примерах.

Два уравнения с двумя неизвестными называют равносильными, если все решения первого являются решениями второго, и наоборот — все решения второго являются решениями первого.

Свойства уравнений о равносильности и их следствия относятся к любому уравнению, значит, и к линейному уравнению с двумя неизвестными. Эти свойства и следствия полезно повторить.

В дальнейшем преимущественно рассматривают уравнения с числовыми коэффициентами, в которых a и b отличны от нуля; однако будут встречаться и такие уравнения, в которых один из коэффициентов при неизвестных равен нулю, например: $2x+0\cdot y=1$, или $0\cdot x-y=5$.

В VII классе нет полного исследования решений систем уравнений первой степени с двумя неизвестными. Поэтому в дальнейшем не нужно рассматривать уравнение вида $0\cdot x+0\cdot y=c$. Такое уравнение противоречиво, если c отлично от нуля, и удовлетворяется любой парой чисел, если $c=0$.

Рассмотрим уравнение

$$4x-2y=1. \tag{2}$$

Оно — пример уравнения первой степени с двумя неизвестными. Временно допустим, что x — известное число, и выразим y через x:

$$y=2x-0{,}5. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно уравнению (2), так как при определении y через x выполнены только такие операции над частями уравнения (2), которые не нарушают равносильности.

Если в уравнении (3) дать x произвольное значение, например 1, то для y получим вполне определенное значение 1,5; в этом случае 1 и 1,5 — решение уравнения (3), а значит, и равносильного ему уравнения (2). Таким образом, можно получить сколько угодно решений уравнения (2).

Значение x выбирается произвольно, значение же y определяется выбранным значением x по правилу, диктуемому правой частью уравнения (3).

Итак, уравнение (2) имеет бесконечное множество решений. Однако не всякая пара чисел служит решением этого уравнения.

Уравнение (3) знакомо ученикам, его график — прямая. Значит, и уравнение (2) имеет графиком ту же прямую. Строим график уравнения (3). Так как уравнение (3) определяет зависимость y от x, то и уравнение (2) определяет ту же зависимость.

Каждая точка графика имеет координаты, удовлетворяющие уравнению (3), а значит, и равносильному ему уравнению (2). Координаты точек плоскости, не принадлежащих прямой, не являются решениями. Значит, пары, координат всех точек прямой дают все решения уравнения (2); других решений оно не имеет.

Таким же путем строим графики уравнений:

$$6x+3y=2; \quad -2x+5y=3.$$

Вдумчивые ученики иногда задают вопрос, можно ли выразить x через y. Такое преобразование не меняет графика, и поэтому можно разрешить сделать в виде эксперимента такое упражнение. На примерах учащиеся усваивают, что уравнение вида (1) имеет графиком прямую, что координаты каждой точки графика служат решением уравнения и что таких решений бесконечное множество.

Далее обращаем внимание учеников на то, что если свободный член уравнения рассматриваемого вида не равен нулю, то построение графика можно выполнить непосредственно по данному уравнению. Рассмотрим, например уравнение

$$3x+2y=6. \tag{4}$$

Для построения графика надо найти координаты двух точек. Найдем координаты точек пересечения графика с осями координат. Чтобы найти координаты точки пересечения с осью ординат, надо x дать значение, равное нулю; получим $y=3$. Прямая пересекается с осью ординат в точке (0; 3). Чтобы найти координаты точки пересечения с осью абсцисс, следует дать y значение, равное нулю; получим $x=2$. Прямая пересекает ось абсцисс в точке (2; 0). Строим точки (0; 3), (2; 0). Они определят положение графика на плоскости. Для контроля можно вычислить координаты третьей точки и убедиться, что она принадлежит графику. Вычисление координат точек пересечения графика с осями и контрольной точки учащиеся фиксируют в таблице:

Таблица 20

x	y
0	3
2	0
1	1,5

Если свободный член уравнения равен нулю, например:

$$5x-2y=0, \tag{5}$$

то описанный прием построения графика уже неприменим.

В таком случае уравнение (5) можно заменить равносильным уравнением

$$y=2{,}5x. \tag{6}$$

А это — знакомое учащимся уравнение, график которого они умеют строить.

Учащиеся тренируются в построении графиков по данным уравнениям и в чтении графиков, как описано в предыдущей главе.

В заключение полезно обратить внимание на уравнения, в которых один из коэффициентов при неизвестных равен нулю.

Рассмотрим, например, уравнение:

$$2x+0\cdot y=4, \text{ или } 2x=4. \tag{7}$$

Если y давать значения 1; 2; 0; —1; —2 и т. д., то x принимает одно и то же значение, равное 2. Построив точки с координатами (2; 1), (2; 2), (2; 0), (2; —1), (2; —2), учащиеся увидят, что точки принадлежат прямой, параллельной оси y и удаленной от нее вправо на 2 единицы. Координаты любой точки прямой удовлетворяют уравнению (7). Значит, график уравнения (7) — прямая, параллельная оси y и отстоящая от нее на 2 единицы вправо.

Аналогично показываем, что уравнению $-2x+0\cdot y=6$, или $-2x=6$, соответствует прямая, параллельная оси y и удаленная от нее влево на 3 единицы. Уравнению $2x+0\cdot y=0$, или $x=0$, соответствует ось ординат.

Далее рассмотрим уравнение:

$$0\cdot x+3y=9, \text{ или } 3y=9. \tag{8}$$

Давая x любые произвольные значения, учащиеся находят, что каждому значению x соответствует одно и то же значение y, равное 3. Построив по вычисленным координатам точки, подмечают, что они принадлежат прямой, параллельной оси x и отстоящей от нее на 3 единицы кверху. Координаты любой точки прямой являются решением уравнения (8). Значит, графиком уравнения (8) служит прямая, параллельная оси x и отстоящая от нее на 3 единицы кверху.

Аналогично показываем, что уравнение $0\cdot x-2y=8$, или $-2y=8$, соответствует прямая, параллельная оси x и отстоящая от нее на 4 единицы книзу; что уравнению $0\cdot x+y=0$, или $y=0$, соответствует ось абсцисс.

В заключительной беседе педагог подчеркивает, что каждому уравнению первой степени с двумя неизвестными, в которых хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, соответствует график — прямая линия, что координаты любой точки графика служат решением соответствующего уравнения, что каждое такое уравнение имеет бесконечное множество решений.

3. Графическое решение систем уравнений

Даны два уравнения первой степени с двумя неизвестными, например:

$$\begin{cases} 2x - y = 5, & (1) \\ x + 2y = 10. & (2) \end{cases}$$

Уравнения имеют одни и те же неизвестные. Требуется найти такие пары значений x и y, которые одновременно были бы решениями обоих уравнений.

Два уравнения, имеющие одни и те же неизвестные, называются системой уравнений. Значения неизвестных, являющиеся одновременно решением каждого уравнения системы, называются решением системы.

Таким образом, поставленную задачу можно сформулировать так: решить систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

На одном чертеже в одном и том же масштабе построим графики каждого уравнения системы:

Таблица 21

$2x-y=5$

x	y
0	−5
2,5	0
1	−3

$x+2y=10$

x	y
0	5
10	0
2	4

Вычислив координаты двух точек каждой прямой, а также координаты контрольных точек, учащиеся строят прямые, соответствующие уравнениям (рис. 6).

Координаты любой точки графика уравнения (1) являются решением этого уравнения. Точно так же координаты любой точки графика уравнения (2) служат решением второго уравнения. Следовательно, координаты общей точки графиков двух уравнений дадут

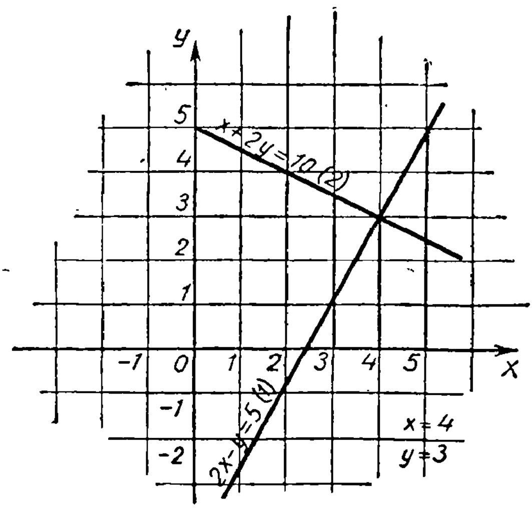


Рис. 6.

решение системы. Обозначим общую точку буквой A. Ее координаты: $x=4$, $y=3$. Подставляя их в каждое уравнение системы, убеждаемся, что они действительно являются решением системы уравнений. Итак, $x=4$, $y=3$.

Так как графики имеют только одну общую точку, то система уравнений имеет только одно решение.

Графическим способом, в порядке самостоятельной работы, учащиеся решают еще несколько систем уравнений, решения которых выражаются целыми числами:

$$\begin{cases}3x-2y+14=0,\\2x+3y-8=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}4x+3y=-18,\\3x-2y=-5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-3y-11=0,\\2x+2y-8=0.\end{cases}$$

Решая фронтально с классом, например, систему:

$$\begin{cases}2x+3y=1,\\4x+\ y=9,\end{cases}$$

педагог обращает внимание на то, что графический способ приводит к приближенному значению неизвестных. В таком случае проверка решения путем подстановки значений неизвестных в уравнения системы дает приближенные равенства, что, естественно, затрудняет проверку и делает ее не вполне надежной.

По этому поводу уместно привести некоторые соображения.

Точность определения неизвестных зависит от масштаба, в котором чертят графики, от бумаги и чертежных приборов. При прочих равных условиях более крупный масштаб в некоторых границах дает возможность получить более высокую точность. Выполнение графиков на миллиметровой бумаге повышает точность. Хорошие чертежные приборы, тщательно очиненный карандаш дают возможность повысить точность неизвестных. Например, при вычерчивании графиков на миллиметровой бумаге в масштабе единица в 1 *дм* хорошими чертежными приборами можно найти неизвестные с точностью до $\pm 0{,}02$, а при решении системы на той же бумаге в масштабе единица в 1 *см* неизвестные можно найти с точностью до $\pm 0{,}2$. Точность решения зависит от решающего, от его искусства в черчении: аккуратное выполнение чертежа улучшает точность, небрежность и торопливость понижают ее.

Промежутки между значениями x, которые используются при построении графиков, не должны быть слишком малыми; целесообразно выбирать их так, чтобы точки, по которым вычерчивается прямая, находились одна от другой не ближе 5 *см*.

Точность решения зависит и от особенностей уравнений, от взаимного расположения графиков, от расположения точки пересечения прямых по отношению к началу координат. Лучшие результаты получаются, если прямые пересекаются под углом, близким к 90°. Менее точные результаты будут, если прямые пересекаются под углом меньше 30°. Если точка пересечения прямых находится недалеко от начала координат, точность определения неизвестных будет выше; если же она удалена от начала на значительное расстояние, точность будет ниже.

Приведенные соображения помогают правильно подбирать системы для графического решения школьниками.

Решение задач с помощью составления системы уравнений отличается от решения задач путем составления одного уравнения только тем, что вводятся два неизвестных и двукратно приравниваются значения величин. Проведенные ранее подготовительные упражнения к составлению уравнений оказывают положительное влияние и при решении задач с помощью систем. Нет надобности откладывать задачи на конец темы; целесообразно использовать их после изучения каждого способа решения систем.

В частности, можно предложить задачи для решения графическим способом.

1) *Два сообщающихся цилиндрических сосуда расположены так, что их высоты вертикальны. Сосуды наполнены водой и закрыты поршнями. Поперечное сечение одного сосуда равно* 625 *кв. см, а другого* 100 *кв. см. На поршни положены два груза, общий вес которых* 72,5 *кГ. Вычислить нагрузку на каждый поршень, если они находятся на одном уровне.*

2) *В гидравлическом прессе давление на поршень насоса в* 10 *кГ вызывает давление поршня рабочего цилиндра, равное* 210 *кГ. Определить площади поршней гидравлического пресса, если площадь поршня рабочего цилиндра на* 1000 *кв. мм больше площади поршня насоса.*

3) *Латунь состоит из меди и цинка и имеет удельный вес* $8{,}5\,\frac{\textit{г}}{\textit{см}^3}$. *Удельный вес меди равен* $8{,}9\,\frac{\textit{г}}{\textit{см}^3}$, *а цинка* $7{,}1\,\frac{\textit{г}}{\textit{см}^3}$. *Сколько надо взять для сплава меди и сколько цинка, чтобы получить* 10 *кГ латуни?*

4. Особые случаи решения линейных систем

Накапливаемый учащимися опыт графического решения приводит к выводу, что система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет одно решение. Программа требует познакомить учащихся с различными возможностями в отношении числа решений. Это делается при решении задач и примеров.

Предлагается задача:

В первый раз купили 7 *кг картофеля и* 5 *кг свеклы и заплатили* 1 *руб.* 6 *коп. Во второй раз купили* 3,5 *кг картофеля и* 2,5 *кг свеклы и заплатили* 58 *коп. Узнать цену килограмма картофеля и килограмма свеклы.*

Учащиеся получат систему:

$$\begin{cases}7x+5y=106,\\3{,}5x+2{,}5y=58.\end{cases}\tag{1}$$

Выполняя уже привычный план графического решения, они наталкиваются на интересный случай: графики уравнений — прямые — оказываются параллельными. Значит, не существует точки пересечения прямых. Говорят: система не имеет решений.

Сопоставляя уравнения систем, можно усмотреть, что они несовместны. Если обе части первого уравнения умножить на 5, а второго на 10, то получим систему:

$$\begin{cases}35x+25y=530,\\35x+25y=580.\end{cases}$$

Левые части уравнений равны, а правые неравны. Поэтому систему (1) называют противоречивой. Признак такой системы: уравнения можно преобразовать так, что левые части будут равные, а правые различные.

Чтобы избежать «короткой» индукции, полезно рассмотреть графические решения еще двух систем:

$$\begin{cases}2x+y=3,\\4x+2y=-3;\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-y=3,\\3x-1{,}5y=1.\end{cases}$$

Учащимся предлагается придумать системы, не имеющие решений.

С неопределенной системой учащиеся знакомятся примерно на такой задаче: *Купили* 3 *кг яблок и* 2 *кг груш и заплатили* 4 *руб.* 40 *коп. Во второй раз купили по той же цене* 1,5 *кг яблок и* 1 *кг груш и заплатили* 2 *руб.* 20 *коп. Узнать цену килограмма яблок и килограмма груш.*

Учащиеся получат систему:

$$\begin{cases}3x+2y=440,\\1{,}5x+\ y=220.\end{cases}\tag{2}$$

При графическом решении они вновь наталкиваются на интересный случай: прямые, соответствующие уравнениям системы, сливаются. Какое же заключение можно сделать о решении системы? Система имеет бесконечное множество решений: координаты любой точки двух слившихся прямых являются решением системы, ибо они — решения каждого из данных уравнений. Систему называют неопределенной.

Задача также неопределенная, хотя ее неопределенность значительно ограничивается допустимыми значениями цен на фрукты.

Если обе части второго уравнения системы (2) умножить на 2, то получим систему, содержащую одинаковые уравнения.

Это положение проверяем еще раз на системах:

$$\begin{cases} 2x+2y=3, \\ 3x+3y=4{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x+y+2=0, \\ 0{,}3x-0{,}1y-0{,}2=0. \end{cases}$$

Признак неопределенной системы: уравнения можно преобразовать так, что они окажутся одинаковыми.

Учащимся предлагают придумать системы, имеющие бесконечное множество решений.

На уроках и в домашней работе ученики тренируются в графическом решении систем, причем им предлагают системы и с одним решением, и не имеющие решений, и с бесконечно большим количеством их.

В итоговой беседе с учащимися педагог подчеркивает, что системе двух уравнений первой степени с двумя неизвестными соответствуют две прямые. Из геометрии известно, что две прямые на плоскости или имеют только одну общую точку (пересекаются), или не имеют ни одной общей точки (параллельны), или имеют бесчисленное число общих точек (сливаются). Иных случаев расположения двух прямых на плоскости не существует. Значит, система двух линейных уравнений с двумя неизвестными может или иметь одно решение (определенная система), или не иметь решений (противоречивая система), или иметь бесконечное множество решений (неопределенная система). Иных случаев в решении рассматриваемых систем не существует.

Можно указать и признаки каждого вида.

Если система двух линейных уравнений с двумя неизвестными: а) противоречивая, то уравнения можно преобразовать так, что их левые части равны, а правые не равны; б) неопределенная, то уравнения можно преобразовать так, что их левые части равны и правые равны; в) определенная, то уравнения не допускают указанных преобразований.

Верны и обратные предложения.

Если систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: а) можно преобразовать так, что левые части уравнений равны, а правые не равны, то система противоречивая; б) можно преобразовать так, что уравнения окажутся одинаковыми, то система неопределенная. Если система не допускает указанных преобразований, то она определенная.

5. Решение систем способом подстановки

При построении графиков линейных уравнений учащимся приходилось выражать одно неизвестное уравнение через другое. Они приобрели некоторые навыки в таких операциях. Это создает благоприятные условия для перехода к решению систем уравнений способом подстановки. После графического решения уместно перейти к этому способу.

Если, по наблюдениям педагога, эти навыки недостаточны, то следует выполнить несколько упражнений в выражении одного неизвестного через другое, причем полезно отмечать, что преобразование приводит к уравнению, равносильному данному, ибо сводится к переносу членов уравнения из одной части его в другую и к делению обеих частей на число, отличное от нуля.

Иногда преподаватель по разным мотивам не вводит способа подстановки. Это ошибка: способ подстановки является более общим по сравнению со способом сложения, ибо применяется к более широкому классу систем уравнений. Кроме того, некоторые системы уравнений решаются способом подстановки проще. Например, для решения систем:

$$\begin{cases}(a^2+b^2)x-aby=a^2-b^2,\\ y=2x;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x}{a^2-1}+\dfrac{ay}{a+1}=\dfrac{2}{a},\\ \dfrac{x}{a-1}=\dfrac{y}{a}\end{cases}$$

удобно применить способ подстановки.

Если уравнения системы даны в нормальном виде, то при графическом решении не выполняют преобразования уравнений, т. е. не применяют выводных систем. А поэтому отпадает надобность рассматривать равносильность систем.

При решении способом подстановки приходится из данной системы получать выводную, что приводит к необходимости выяснять равносильность начальной и конечной систем.

Дедуктивная теория равносильности систем недоступна учащимся VII класса. Однако показать на примерах, что способ подстановки приводит к системе, равносильной исходной, возможно.

Выясняем на примерах, какие системы равносильны, приводим примеры и равносильных и неравносильных систем. Две системы уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй и каждое решение второй — решением первой. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases}2x+5y=9,\\ 3x+2y=8.\end{cases} \qquad (1)$$

По известным признакам она не может быть ни противоречивой, ни неопределенной. Система определенная и имеет единственное решение.

Выразим из первого уравнения x через y:

$$x=\frac{1}{2}(9-5y).$$

Подставим во второе уравнение вместо x полученное выражение:

$$\frac{3}{2}(9-5y)+2y=8.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(9-5y), \\ \frac{3}{2}(9-5y)+2y=8. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) легко решается. Второе уравнение содержит только одно неизвестное; находим его: $y=1$. Подставляя полученное значение y в первое уравнение системы (2), определим x: $y=2$. Очевидно, что $x=2$ и $y=1$ является решением системы (2); это решение единственное, так как второе уравнение дает возможность определить единственное значение для y.

Путем подстановки в систему (1) убеждаемся, что $x=2$, $y=1$ есть решение системы (1). Так как эта система определенная, то других решений она не имеет. Системы (1) и (2) равносильны.

Способ подстановки дал возможность заменить систему (1) равносильной ей системой (2). Он приводит к системе, равносильной данной, если данная не имеет дробных уравнений. Это положение надо подтвердить еще на двух-трех системах; обращаем внимание на то, что для подстановки можно определять любое неизвестное из любого уравнения. В практике решения систем обычно выбирают то уравнение, из которого неизвестное выражается через другое наиболее просто.

В процессе тренировки в решении систем подстановкой полезно приучить школьников предварительно выяснять, какое уравнение выбрать для выражения неизвестного через другое, какое неизвестное выражать через другое.

6. Решение систем способом сложения

Приступая к решению систем способом сложения, надо обратить внимание учащихся на то, что операции, которые выполняются над уравнением данной системы, приводят к равносильной выводной системе.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y=10, \\ 4x-3y=-7. \end{cases} \qquad (1)$$

Не решая систему, можно усмотреть, что она определенная, значит, имеет только одно решение.

Заметив, что коэффициенты членов с y — противоположные числа, сложим уравнения по частям. Это приводит к исключению y. Получим:

$$6x=3, \text{ или } 2x=1.$$

Запишем новую систему, включив в нее полученное уравнение и одно из уравнений, например второе, системы (1):

$$\begin{cases} 2x=1, \\ 4x-3y=-7. \end{cases} \qquad (2)$$

Убедимся, что системы (1) и (2) равносильны.

Первое уравнение системы (2) содержит только одно неизвестное. Находим его: $x=0,5$. Подставив во второе уравнение системы (2) вместо x число 0,5, получим уравнение, позволяющее найти y; $y=3$. Полученное решение $x=0,5$, $y=3$ является единственным решением системы (2), так как первое уравнение не может дать других решений, кроме $x=0,5$.

Путем подстановки в уравнения системы (1) убеждаемся, что $x=0,5$ и $y=3$ — решение системы. Других решений она не имеет.

Системы (1) и (2) равносильны.

Чтобы исключить y, уравнения системы (2) были по частям сложены. Поэтому такое решение называется способом сложения.

Рассмотрим еще систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x+3y=-3, \\ 2x+2y=-1. \end{cases} \qquad (3)$$

По установленным признакам отметим, что она имеет только одно решение.

В уравнениях коэффициенты членов с y не являются противоположными числами: непосредственное сложение не позволяет исключить y. Чтобы воспользоваться способом сложения, надо предварительно сделать коэффициенты y противоположными числами. Умножим обе части первого уравнения на 2, а второго на —3 и полученные уравнения сложим по частям:

$$\left\{ \begin{array}{r} 8x+6y=-6 \\ -6x-6y=3 \\ \hline 2x=-3 \end{array} \right.$$

Образуем систему из полученного уравнения и одного из уравнений, например первого, системы (3):

$$\begin{cases} 2x=-3, \\ 4x+3y=-3. \end{cases} \qquad (4)$$

Аналогично предыдущему показываем, что системы (3) и (4) равносильны.

На третьем примере системы полезно показать, что можно и рациональнее исключить x и что объединение полученного уравнения с любым уравнением исходной системы приводит к системе, равносильной данной.

Рассмотренные примеры дают возможность сделать индуктивное заключение, что при решении способом сложения данная и получаемая (выводная) системы равносильны.

Опыт показывает, что количество ошибок при самостоятельной работе учащихся в решении систем уменьшается, если для исключения неизвестного пользоваться получением противоположных коэффициентов. Это объясняется тем, что учащимся не приходится применять вычитание частей одного уравнения из соответствующих частей другого: при вычитании иногда вкрадываются ошибки.

При тренировке в решении систем учащимся даются и противоречивые и неопределенные системы. Приведем несколько задач, при решении которых встречаются и те и другие системы.

1) *Два брата работали на заводе. Когда первый проработал a недель, а второй b недель, они вместе заработали m руб. Когда на тех же условиях первый проработал c недель, а второй d недель, их общий заработок был равен n руб. Сколько рублей зарабатывал каждый из них в неделю?*

Решить задачу при следующих значениях букв:

а) $a=2{,}5$, $b=1{,}5$, $m=185$, $c=4$, $d=2$, $n=280$;

б) $a=2$, $b=3$, $m=220$, $c=3$, $d=4{,}5$, $n=300$.

2) *В бак проведены две трубы. Если открыть первую трубу на t минут, а вторую на q минут, то в бак вольется m ведер. Если открыть первую на t_1 минут, вторую на q_1 минут, то в бак вольется m_1 ведер. Сколько ведер в минуту вливает в бак каждая труба?*

Решить задачу при следующих значениях букв:

а) $t=10$, $q=7$, $m=45$, $t_1=6$, $q_1=5$, $m_1=23$;

б) $t=2{,}5$, $q=2$, $m=19$, $t_1=1$, $q_1=0{,}8$, $m_1=7{,}6$.

3) *Из опыта найдено, что слиток из серебра и меди весом в 19,4 кГ выталкивается водой с силой 2,0 кГ. Определить, сколько в слитке серебра и сколько меди, если удельный вес серебра 10,5, а меди 8,9?*

Полезны упражнения в составлении систем уравнений, удовлетворяющих определенным требованиям, например: *составить определенную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, чтобы она имела решение $x=4$, $y=-7$; составить неопределенную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, одно из которых $3x-2y=1$.*

Еще более полезно составлять задачи, решение которых требует применения линейных систем.

Заметив, что коэффициенты членов с y — противоположные числа, сложим уравнения по частям. Это приводит к исключению y. Получим:

$$6x=3, \text{ или } 2x=1.$$

Запишем новую систему, включив в нее полученное уравнение и одно из уравнений, например второе, системы (1):

$$\begin{cases} 2x=1, \\ 4x-3y=-7. \end{cases} \qquad (2)$$

Убедимся, что системы (1) и (2) равносильны.

Первое уравнение системы (2) содержит только одно неизвестное. Находим его: $x=0,5$. Подставив во второе уравнение системы (2) вместо x число 0,5, получим уравнение, позволяющее найти y; $y=3$. Полученное решение $x=0,5$, $y=3$ является единственным решением системы (2), так как первое уравнение не может дать других решений, кроме $x=0,5$.

Путем подстановки в уравнения системы (1) убеждаемся, что $x=0,5$ и $y=3$ — решение системы. Других решений она не имеет. Системы (1) и (2) равносильны.

Чтобы исключить y, уравнения системы (2) были по частям сложены. Поэтому такое решение называется способом сложения.

Рассмотрим еще систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x+3y=-3, \\ 2x+2y=-1. \end{cases} \qquad (3)$$

По установленным признакам отметим, что она имеет только одно решение.

В уравнениях коэффициенты членов с y не являются противоположными числами: непосредственное сложение не позволяет исключить y. Чтобы воспользоваться способом сложения, надо предварительно сделать коэффициенты y противоположными числами. Умножим обе части первого уравнения на 2, а второго на —3 и полученные уравнения сложим по частям:

$$\left\{\begin{array}{r} 8x+6y=-6 \\ -6x-6y=3 \\ \hline 2x=-3 \end{array}\right.$$

Образуем систему из полученного уравнения и одного из уравнений, например первого, системы (3):

$$\begin{cases} 2x=-3, \\ 4x+3y=-3. \end{cases} \qquad (4)$$

Аналогично предыдущему показываем, что системы (3) и (4) равносильны.

На третьем примере системы полезно показать, что можно и рациональнее исключить x и что объединение полученного уравнения с любым уравнением исходной системы приводит к системе, равносильной данной.

Рассмотренные примеры дают возможность сделать индуктивное заключение, что при решении способом сложения данная и получаемая (выводная) системы равносильны.

Опыт показывает, что количество ошибок при самостоятельной работе учащихся в решении систем уменьшается, если для исключения неизвестного пользоваться получением противоположных коэффициентов. Это объясняется тем, что учащимся не приходится применять вычитание частей одного уравнения из соответствующих частей другого: при вычитании иногда вкрадываются ошибки.

При тренировке в решении систем учащимся даются и противоречивые и неопределенные системы. Приведем несколько задач, при решении которых встречаются и те и другие системы.

1) *Два брата работали на заводе. Когда первый проработал a недель, а второй b недель, они вместе заработали m руб. Когда на тех же условиях первый проработал c недель, а второй d недель, их общий заработок был равен n руб. Сколько рублей зарабатывал каждый из них в неделю?*

Решить задачу при следующих значениях букв:

а) $a=2{,}5$, $b=1{,}5$, $m=185$, $c=4$, $d=2$, $n=280$;

б) $a=2$, $b=3$, $m=220$, $c=3$, $d=4{,}5$, $n=300$.

2) *В бак проведены две трубы. Если открыть первую трубу на t минут, а вторую на q минут, то в бак вольется m ведер. Если открыть первую на t_1 минут, вторую на q_1 минут, то в бак вольется m_1 ведер. Сколько ведер в минуту вливает в бак каждая труба?*

Решить задачу при следующих значениях букв:

а) $t=10$, $q=7$, $m=45$, $t_1=6$, $q_1=5$, $m_1=23$;

б) $t=2{,}5$, $q=2$, $m=19$, $t_1=1$, $q_1=0{,}8$, $m_1=7{,}6$.

3) *Из опыта найдено, что слиток из серебра и меди весом в 19,4 кГ выталкивается водой с силой 2,0 кГ. Определить, сколько в слитке серебра и сколько меди, если удельный вес серебра 10,5, а меди 8,9?*

Полезны упражнения в составлении систем уравнений, удовлетворяющих определенным требованиям, например: *составить определенную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, чтобы она имела решение $x=4$, $y=-7$; составить неопределенную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, одно из которых $3x-2y=1$.*

Еще более полезно составлять задачи, решение которых требует применения линейных систем:

ГЛАВА XIV
СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА В VIII КЛАССЕ

1. Некоторые рекомендации. Первые уроки

В нашей общеобразовательной школе в VIII классе введено преподавание вычислений на счетной (логарифмической) линейке.

Без знания теории устройства и без повседневного применения линейки нельзя основательно овладеть линейкой. Каждый учитель, начинающий работу в VIII классе, должен предварительно хорошо изучить линейку и безупречно пользоваться ею [1].

Преподавателю рекомендуется сделать счетную линейку настольным пособием, к которому он прибегает всякий раз, когда проводит какие-либо вычисления. Линейка облегчает труд учителя, рационализирует его работу и при подготовке к урокам, и при проверке тетрадей, и на уроках. Вместе с тем применение линейки учителем послужит хорошим примером для восьмиклассников, обеспечит регулярное использование этого пособия в их учебной работе.

В VIII классе учащиеся изучают и используют не только счетную линейку, но и другие средства, облегчающие и упрощающие вычисления: таблицы квадратов, квадратных корней, кубов, натуральных значений тригонометрических функций. Естественно стремление преподавателя показать применение различных вычислительных средств в практике. В первые дни обучения в VIII классе полезно организовать и провести экскурсию в проектное или счетное бюро завода, в проектное или другое учреждение, где достаточно широко применяются вычислительные средства.

Цель экскурсии — познакомить школьников с простейшими средствами вычислений: а) счетной линейкой, б) арифмометром, в) различными таблицами, г) простейшими номограммами и д) если возможно, с современными малыми вычислительными машинами и с применением их в производстве. Одновременно можно познакомить школьников с ролью чертежа в проектировании, основными этапами проектирования, оформлением расчетов.

Такие экскурсии повышают интерес к вычислительным средствам и к математике вообще. При подведении итогов школьники

---

[1] См.: Д. Ю. Панов. Счетная линейка, изд. 14. Физматгиз, 1960; В. М. Брадис. Средства и способы элементарных вычислений. Учпедгиз, 1954; К. И. Кабанова. Счетная логарифмическая линейка в школе. Учпедгиз, 1958; К. А. Семендяев. Счетная линейка, изд. 8, стереотипное, ГТТИ, 1957.

обычно выражают желание постичь тайны замечательной счетной линейки, научиться работать на арифмометре. Педагог сообщит ученикам, что первая задача — научиться пользоваться счетной линейкой, а в дальнейшем они познакомятся с рядом таблиц и научатся применять их, а желающие могут заниматься в математическом кружке, где изучат арифмометр и могут познакомиться с простейшими номограммами.

Большинство учащихся обязаны приобрести нормальные (25 *см*) линейки. Но и в школе должно быть достаточное число нормальных счетных линеек, чтобы обеспечить работу учеников одного класса.

Крайне желательно иметь в школе 2—3 демонстрационные счетные линейки. Длина такой линейки бывает от 1 до 2 *м*. Такая линейка, расположенная у классной доски, облегчает работу преподавателя на уроке.

В литературе о логарифмической линейке рекомендуется прежде всего познакомить школьников со сложением и вычитанием чисел с помощью двух равномерных шкал. Этот методический прием безусловно следует применять.

С изготовлением равномерных шкал и работой с ними ученики познакомились еще в VI классе при изучении рациональных чисел.

Обращаем внимание восьмиклассников на то, что те же шкалы можно использовать для выполнения действий первой ступени с двузначными, трехзначными целыми числами и с десятичными дробями, меньшими единицы. Для этого надо изменить масштаб. Если принять, например, что единице соответствует 1 *мм* шкалы, то подписанные на шкале штрихи будут соответствовать десяткам. Если принять, что единице соответствует 1 *дм*, то подписанные штрихи будут соответствовать десятым. С помощью шкал можно выполнить, например, такие действия: $49+37$; $0,48+0,36$.

В практике применяются двойные шкалы. Целесообразно познакомить учащихся хотя бы с одной из таких шкал, например с двойной шкалой температуры Цельсия и Реомюра, позволяющей переводить показания температуры по Цельсию в показания по Реомюру и обратно.

Такую шкалу каждый ученик легко изготовит на полоске миллиметровой бумаги длиной 22 *см* и шириной 2 *см*. По средней линии отмечается отрезок, равный 20 *см*. Слева по отрезку в масштабе 10° в 2 *см* наносятся метки, соответствующие шкале °C. По тому же отрезку справа в масштабе 10° в 2,5 *см* наносятся метки, соответствующие шкале °R. Двойная шкала готова.

Если температура воздуха равна 18° R, то по двойной шкале легко найти температуру воздуха по °C: она равна 22,5°. Если известно значение температуры по °C, то без вычислений находится соответствующее значение температуры по °R.

Рассматриваемая двойная шкала позволяет избежать многократных умножений на постоянный множитель: при переводе температуры, отсчитанной по шкале °R, на шкалу °C — на множитель $\frac{5}{4}$, при обратном переводе — на множитель $\frac{4}{5}$.

Можно построить и иные равномерные двойные шкалы, например для перевода длин, выраженных в сантиметрах, в соответствующие длины в дюймах и наоборот.

При изучении счетной линейки в VIII классе теоретическая подготовка учеников не позволяет опираться на понятие логарифма и десятичные логарифмы, на логарифмическую функцию и уравнения шкал. Встает методическая проблема, как познакомить восьмиклассников с основными шкалами линейки и их использованием.

В литературе встречается догматический способ ознакомления с линейкой: учащиеся не посвящаются в математическую суть различных шкал и их взаимосвязей, им сообщают только правила-предписания, как надо поступать при выполнении действий.

При обучении в школе следует избегать догматического способа изложения устройства счетной линейки и вычислений на ней.

В литературе описываются и другие способы изучения линейки: в некоторой мере разъясняется построение основной шкалы и частично мотивируется применение основных шкал, причем используются подходящие аналогии, описания. Этот путь заслуживает предпочтения: он дает возможность осмыслить устройство основной шкалы, проливает свет на алгоритм умножения и деления, обеспечивает более прочные навыки. Однако надо признать, что в VIII классе избежать элементов догматизма довольно трудно.

Как же познакомить учащихся с неравномерной шкалой умножения?

Составим таблицу значений степеней числа 2:

Таблица 22

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

На средней линии полоски миллиметровой бумаги длиной 12 *см* и шириной 2 *см* учащиеся отметят отрезок в 10 *см*, нанесут метки через каждый сантиметр, подпишут против них сверху и снизу соответствующие степени числа 2 и разрежут полоску по средней линии. Получатся две одинаковые шкалы. Как видно по написанным числам, шкалы — неравномерные. Шкалы неполные: их можно продолжить и вправо и влево, а при некотором расширении понятия о степени было бы возможно нанести и промежуточные метки.

Такие шкалы дают возможность находить произведения некоторых чисел. Например, $32 \cdot 16$ найдем так: против метки с числом 32 нижней шкалы установим метку с числом 1 верхней шкалы, на верхней шкале найдем метку с числом 16 и против нее на нижней шкале прочитаем искомое произведение.

Следует объяснить, почему так получается:

$$32 \cdot 16 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9 = 512.$$

Прибавляя к отрезку нижней шкалы отрезок верхней, мы выполняем сложение показателей степеней: $5+4$. А так как на шкалах записаны степени, то против метки нижней шкалы, соответствующей сумме показателей степеней, читаем произведение чисел. Таким образом, с помощью рассматриваемых шкал умножение чисел сводится к сложению отрезков. Это положение учащиеся должны хорошо понять.

Те же шкалы позволяют выполнить деление некоторых чисел, например $1024 : 64$. Против метки с числом 1024 нижней шкалы установим метку с числом 64 верхней шкалы; против метки с числом 1 верхней шкалы прочитаем на нижней шкале частное.

Учащиеся объяснят, почему так получается:

$$1024 : 64 = 2^{10} : 2^6 = 2^{10-6} = 2^4 = 16.$$

Значит, деление чисел заменяется вычитанием отрезков. Для построения шкал использовано основание степени 2. Можно построить аналогичные шкалы с иными основаниями степени, например 3, 5 и, особенно важно, с основанием 10.

Так как такие шкалы дают возможность находить произведения чисел, то их можно назвать шкалами умножения; часто их называют логарифмическими шкалами.

При выполнении действий с помощью счетной линейки в одних случаях непосредственно находится искомый результат, в других — только значащие цифры числа. Чтобы по значащим цифрам найти искомое число, надо определить положение знака дробности (запятой). С этой целью применяются два способа: а) грубо приближенная оценка результата действия — прикидка, б) правила о знаках дробности, основанные на понятии порядка десятичного числа.

Один из способов делает ненужным другой, но каждый из них в практике вычислений дополняет другой.

Какой же из способов целесообразно применить в VIII классе?

Вычисления с применением правил о знаках дробности требуют введения понятия о порядке числа и некоторых правил о порядке произведения, частного и, может быть, результатов других действий. Это загружает память и не лишено некоторого формализма. Если ограничиться только правилами о порядке результатов действий, то можно наблюдать следующее: при кратком перерыве в применении линейки правила забываются, и ученик уже не может работать с ней.

Вычисления с грубо приближенной оценкой результатов действий прикидкой не требуют никаких дополнительных понятий и правил, а рассчитаны на сообразительность, на быструю и правильную оценку результата действий.

Способ прикидки заслуживает предпочтения: он должен стать основным при обучении в VIII классе. При благоприятных условиях преподаватель может познакомить школьников и с определением порядка результатов действий; этот способ станет вспомогательным и будет использоваться тогда, когда прикидка окажется затруднительной.

Способ учета порядка результатов действий можно сообщить и для любителей математики на занятиях кружка.

Издавна рекомендуется учить грубо приближенному определению результатов действий, начиная с курса арифметики. Прикидка — одно из средств контроля над вычислениями. Если в V—VII классах прикидка не применялась или проводилась несистематически, то с первых уроков изучения счетной линейки в виде подготовительных упражнений полезно тренировать учащихся в приближенной оценке результатов умножения и деления двух, а затем и нескольких чисел. Такие подготовительные упражнения резко сокращают ошибки, связанные с определением положения знака дробности.

Приведем несколько примеров на определение положения знака дробности в произведении и частном.

1) *Не производя умножения, определить, сколько цифр в целой части произведения* 234 · 0,294.

$$\begin{array}{c} 200 < 234 < 300 \\ \underline{0{,}2 < 0{,}294 < 0{,}3} \\ 40 < 234 \cdot 0{,}294 < 90 \end{array}$$

В целой части произведения две цифры.

2) *Не производя умножения, узнать, на каком месте стоит первая слева значащая цифра произведения* 0,00789 · 0,0452:

$$\begin{array}{c} 0{,}007 < 0{,}00789 < 0{,}008 \\ \underline{0{,}04 < 0{,}0452 < 0{,}05} \\ 0{,}00028 < 0{,}00789 \cdot 0{,}0452 < 0{,}0004 \end{array}$$

На четвертом месте справа от запятой.

3) *Не производя умножения, определить место запятой в произведении* $2{,}91\cdot 3{,}22\cdot 0{,}512$:

$$\begin{array}{l} 2<2{,}91<3 \\ 3<3{,}22<4 \\ 0{,}5<0{,}512<0{,}6 \\ \hline 3<2{,}91\cdot 3{,}22\cdot 0{,}512<7{,}2 \end{array}$$

В целой части произведения одна цифра.

4) *Не производя деления, найти место запятой в частном* $1{,}79:0{,}865$:

$$\begin{array}{l} 1<1{,}79<2 \\ 1>0{,}865>0{,}8 \\ \hline 1<1{,}79:0{,}865<2{,}5 \end{array}$$

В целой части частного одна цифра.

5) *Не выполняя действий, узнать положение запятой в результате:*

$$\frac{0{,}158\cdot 1{,}74}{5{,}48} \qquad \begin{array}{l} 0{,}1<0{,}158<0{,}2 \\ 1{,}7<1{,}74<1{,}8 \\ 6>5{,}48>5 \\ \hline 0{,}03<\dfrac{0{,}158\cdot 1{,}74}{5{,}48}<0{,}08 \end{array}$$

Старшая значащая цифра на втором месте справа от запятой.

При фронтальной работе класса прикидкой пользуются устно. При самостоятельной работе учащихся результаты прикидки могут контролироваться: а) по таблице произведений, б) сличением результатов с соседом.

Когда решаются задачи с конкретным содержанием, полезно применять прикидку по смыслу задач; например, если вычисляют скорости: а) течения реки, б) волжского теплохода, в) пассажирского самолета, то по смыслу задачи их выражают числами, в целых частях которых соответственно одна, две, три значащие цифры.

2. Изучение основной шкалы

Педагог знакомит учащихся с конструкцией счетной линейки и сообщает правила обращения с ней. Так как учащиеся приобретают линейки, то следует разъяснить, каким условиям она должна удовлетворять, как выбрать хорошую линейку.

При изложении приемов вычислений на линейке в VIII классе нет надобности знакомить школьников одновременно со всеми шкалами корпуса. Изучение шкал происходит постепенно в той последовательности, какая установлена программой. В первой теме «Счетная (логарифмическая) линейка» достаточно ввести основные шкалы (C и D), обеспечивающие выполнение действий второй ступени, и в конце изучения темы познакомить со шкалами квадратов (A и B), которые также можно использовать для выполнения действий второй ступени.

Так как шкалы C и D совершенно одинаковы, то достаточно детально изучить одну из них.

Преподаватель опишет неравномерную шкалу D. Ранее были составлены логарифмические шкалы, когда основание равнялось 2. Для нанесения меток шкалы D основание приняли равным 10. Метки шкалы соответствуют показателям степеней, а против меток подписаны соответствующие степени.

Преподаватель сообщит и покажет ученикам метки, соответствующие первым значащим разрядам чисел — деления первого разряда; затем деления и метки второго, третьего разряда.

Работа на счетной линейке требует безупречного знания шкал, для этого учащиеся должны прочно усвоить цену делений.

Если начальную метку шкалы D принять за 1, то цены делений будут: 0,01 для промежутка от 1 до 2; 0,02 — от 2 до 4; 0,05 — от 4 до 10. При усвоении цен делений на разных отрезках шкалы не следует опираться на память: память может изменить. Надо научить школьников быстро определять цену делений. Например, отрезок шкалы от 2 до 3 разделен длинными штрихами на 10 частей: одному такому делению соответствует 0,1; каждое из этих делений разбито на 5 частей; значит, цена малого деления 0,02. Таким же путем, выполняя ряд упражнений, ученики устанавливают цену делений на других отрезках шкалы.

При изучении основной шкалы необходимо научить: а) установке чисел на шкале, б) чтению чисел, отмеченных на шкале.

Первая задача ставится так: *Дано число, найти его место на шкале.*

Если начальную метку шкалы D принять за 1, то числа промежутка от 1 до 10 устанавливаются с сохранением знака дробности. Упражнения в установке таких чисел ведутся в последовательности: а) числу соответствует штрих на шкале, например: 3; 1,5; 4,9; 1,43; 7,54; 2,76; б) числу не соответствует метка шкалы; приходится применять интерполяцию на глаз, например: 2,75; 4,45; 1,755; в) число содержит более трех, а для отрезка шкалы от 1 до 2 более четырех значащих цифр и его предварительно приходится округлить, например: 3,743; 3,748; 1,6445; 1,2253.

Далее переходят к установке на шкале любых чисел.

Основное правило: числа устанавливают без учета знака дробности и нулей в конце целого числа. Другими словами, устанавливая числа, следует читать только его значащие цифры справа налево в том порядке, в каком они записаны в числе. Например, числа 23,6; 236; 23 600 устанавливают на шкале там же, где и

2,36, причем число читают 2—3—6: 2 — первый разряд, 3 — второй разряд, 6 — третий разряд.

Упражнения в установке любых чисел ведутся в той же последовательности, какая указана ранее для чисел промежутка от 1 до 10.

При обеспечении каждого ученика счетной линейкой установка чисел выполняется при значительной активности учащихся, с применением самостоятельной работы. Пара учеников, сидящих за одной партой, контролирует друг друга. У значительной части учащихся установку чисел проверяет преподаватель.

Вторую задачу можно сформулировать так: *С помощью штриха ползунка указано место на шкале. Прочитать соответствующее число.*

При выполнении первых упражнений примем, что читаемое число принадлежит промежутку от 1 до 10. В этом случае будем находить не только значащие цифры числа, но и само число.

На демонстрационной счетной линейке, а за отсутствием последней на шкале D, вычерченной на листе чертежной бумаги в крупном масштабе, преподаватель отмечает штрихом бегунка метку. Нескольким учащимся предлагается прочитать число. Так выполняются первые упражнения.

Дальше можно организовать самостоятельную работу учащихся парами: преподаватель выписывает на классной доске числа, один из учеников за каждой партой устанавливает, другой читает установленные числа. Затем ученики меняются ролями.

Последовательность упражнений такова: а) штрих ползунка установлен против метки шкалы, б) штрих ползунка установлен в промежутке между двумя соседними метками шкалы. В последнем случае учащиеся упражняются в интерполировании на глаз. Когда учащиеся приобретут навык в чтении чисел, принадлежащих промежутку от 1 до 10, делается переход к упражнениям в чтении значащих цифр числа. В таком случае ничего нельзя сказать о месте знака дробности или о числе нулей в конце числа. Прочесть число — значит указать в последовательности цифровой состав его значащей части и только.

Описанные виды занятий со шкалой D имеют громадное значение: они составляют добрую половину дела по применению шкал в выполнении действий второй ступени. Успех дальнейшего изучения линейки зависит от результатов описанных занятий.

3. Умножение и деление чисел

Для умножения чисел применяются совместно две тождественные шкалы C и D. Целесообразно принять следующий план обучения умножению чисел.

1) Для демонстрации процесса выполнения действия находим несколько произведений двух чисел, каждое из которых и произве-

дение принадлежат промежутку от 1 до 10, и результат легко проверить в уме, например: $2 \cdot 3$; $1{,}2 \cdot 4$; $3 \cdot 2{,}5$; $2{,}5 \cdot 2{,}5$. Учащиеся подмечают, что умножение двух чисел на линейке сводится к сложению отрезков, что при выполнении действия сперва пользуются движком, затем бегунком. Формулируется временное правило умножения двух чисел, пригодное для рассматриваемого случая.

2) Учащиеся тренируются в определении произведений любых двух чисел, когда каждое из них и произведение принадлежат промежутку от 1 до 10. Для определения положения знака дробности применяют прикидку. Решение первых примеров проверяют умножением (хорошо использовать таблицы произведений).

Проверка дает возможность выяснить, с какой точностью найдено произведение с помощью линейки. Учитель организует самостоятельную работу учащихся.

3) Возьмем пример: $6{,}55 \cdot 7{,}25$. Он вызывает замешательство учеников: шкала D коротка, чтобы прочитать произведение. Педагог знакомит учеников с перекидкой движка. Они решают примеры, в которых каждый из двух сомножителей принадлежит промежутку от 1 до 10, а произведение может быть и больше 10.

Формулируем общее правило умножения двух чисел.

4) Далее показываем, как найти произведение двух любых чисел. Теперь ученики на шкалах устанавливают значащие цифры сомножителей и по шкале D находят значащие цифры произведения. Возрастает значение прикидки в определении положения знака дробности в произведении. Учащиеся выполняют самостоятельно значительное количество примеров.

5) Большое впечатление производит на восьмиклассников так называемое серийное умножение, в котором один из сомножителей не меняется, а другой принимает различные значения. Например, *вычислить значения $y=2{,}54x$, если значения x даны в таблице.*

Таблица 23

x	0,50	0,75	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
y										

В этом случае, если не считать перекидки движка, произведения находятся при одной установке его.

6) Наконец, педагог знакомит школьников с вычислением произведения трех, четырех сомножителей, причем подчеркивает, что результаты промежуточных действий не читают.

Решаем задачи:

а) *Вычислить объем прямоугольного параллелепипеда, если его ребра равны* 17,5 *мм*, 21,5 *мм*, 35,5 *мм*.

б) *Радиус ведущего колеса паровоза равен* 785 *мм. Вычислить длину окружности колеса.*

При решении задачи обращаем внимание учеников на то, что на шкалах C и D имеется метка, соответствующая числу $\pi \approx 3{,}142$.

в) *Вычислить длины окружностей, если радиусы их равны:* 0,7 *дм*; 1,22 *дм*; 2,42 *дм*; 5,85 *дм*.

г) *Найти* 7,6% *следующих чисел*: 1,84; 27,5; 342; 7240.

Хорошие умения и навыки в умножении чисел позволяют более сжато изложить деление с помощью линейки. Можно рекомендовать такой план:

1) Чтобы продемонстрировать процесс выполнения деления, предлагаем найти такие частные, которые легко подсчитать в уме, например, 10 : 5; 8 : 2; 1,21 : 1,1; 2,56 : 1,6. Подмечаем, что деление сводится к вычитанию из отрезка, соответствующего делимому, отрезка, соответствующего делителю, что при делении сначала пользуются бегунком, а затем движком.

2) Ученики тренируются в делении чисел, когда при отсчете частного применяют начальный штрих шкалы C.

3) Учащиеся знакомятся и упражняются в отыскании частного, когда при отсчете его используют конечный штрих шкалы C.

Формулируем правило деления.

В заключение ученики решают примеры и задачи, содержащие два и более действий второй ступени, причем результаты промежуточных действий не читают.

При вычислении выражения вида $\frac{ab}{c}$ целесообразно выполнить деление a (или b) на c, а затем умножение: сокращается число установок движка. Это следует разъяснить на примере.

При вычислении выражения вида $\frac{abc\ldots f}{kim\ldots t}$ целесообразно начинать с деления и чередовать выполнение действий, пока такое чередование возможно. Это рационализирует работу.

Среди задач полезно предложить и такие:

1) *Площадь школьного земельного участка равна* 3,75 *га. Из этой площади под фруктовым садом* 0,85 *га, под ягодными кустарниками* 0,45 *га, под огородом* 1,2 *га, под опытным участком* 1,25 *га. Сколько процентов от всей площади занимают отдельно сад, ягодные кустарники, огород, опытный участок?*

Решение сводится к вычислению неизвестных членов ряда равных отношений:

$$\frac{100}{3{,}75}=\frac{x_1}{0{,}85}=\frac{x_2}{0{,}45}=\frac{x_3}{1{,}2}=\frac{x_4}{1{,}25}.$$

Неизвестные находятся, если не считать перекидки, при одной установке движка путем перемещения бегунка.

2) *Найти длины радиусов, если длины окружностей равны:* 7,38 *см*; 11,2 *см*; 155 *см*; 2380 *см*.

3) *Вычислить числа,* 2,7% *которых составляют:* 1,2; 1,85; 24,6; 375; 4642.

При решении упражнений 2) и 3) используется ряд равных отношений.

Этим материалом исчерпывается первая тема курса алгебры VIII класса. При наличии свободного времени преподаватель может познакомить учащихся со шкалами *A* и *B* и научить выполнять действия второй ступени на этих шкалах. Однако такое использование шкал *A* и *B* можно осуществить и позднее.

4. Шкала квадратов

Во второй теме курса алгебры VIII класса учащиеся дважды расширяют свои познания в отношении использования линейки: а) в начале главы они учатся вычислять квадраты чисел, б) после изучения простейших операций над квадратными радикалами осваивают извлечение квадратного корня из чисел.

Знакомство со шкалой квадратов (*A*) осуществляется легко. Вглядываясь в деления этой шкалы, ученики заметят, что она состоит из двух одинаковых подшкал; на левой нанесены числа от 1 до 10, на правой — от 10 до 100. На некоторых линейках нули на второй подшкале опущены; в таком случае вторая подшкала — точная копия первой.

Изучение шкалы *A* ведется по плану изучения шкалы *D*. Сперва восьмиклассники учатся находить цены делений. Определение цены делений несколько усложняется тем, что приходится рассматривать шесть отрезков шкалы:

0,02 — от 1 до 2,	0,2 — от 10 до 20,
0,05 — от 2 до 5,	0,5 — от 20 до 50,
0,1 — от 5 до 10,	1 — от 50 до 100.

Затем учащиеся упражняются в установке чисел на шкале: а) принадлежащих промежутку от 1 до 100, б) любых других чисел.

Наконец, школьники упражняются в чтении чисел, принадлежащих промежутку от 1 до 100, и чтении значащих цифр числа, если оно не принадлежит указанному промежутку.

Осваивая шкалу *A*, учащиеся подметят, что цифра третьего разряда имеет несколько пониженную точность по сравнению со шкалой *D*. Интерполяция на глаз для получения третьей цифры здесь менее надежна.

Сопоставление шкал *A* и *D* дает возможность возводить числа в квадрат. Возводя с помощью линейки в квадрат числа 9; 1,2;

12,5, учащиеся проверкой в уме убеждаются, что шкала A «работает» исправно. Название «шкала квадратов» оправдано.

Первые самостоятельно выполняемые упражнения по нахождению квадратов чисел полезно проверять по таблицам квадратов.

Подмечаем правило возведения числа в квадрат.

Если возводимое в квадрат число принадлежит промежутку от 1 до 10, то квадрат его заключается между 1 и 100, т. е. находится в пределах шкалы квадратов.

Если основание степени больше 10, то его предварительно представляют в виде произведения числа, заключенного между 1 и 10, и степени 10. Например, $125^2=(1{,}25\cdot 10^2)^2=1{,}25^2\cdot 10^4$; находят квадрат числа 1,25 по линейке и результат умножают на 10^4.

Если данное число меньше 1, то его предварительно преобразуют в частное числа, заключенного между 1 и 10, и степени 10. Например, $0{,}182^2=(1{,}82:10)^2=1{,}82^2:10^2$; находят квадрат 1,82 по линейке и результат делят на 100.

Этими случаями определяется последовательность упражнений.

Приведенное изложение делает ненужной грубо приближенную оценку результатов действия.

Прежде чем перейти к вычислению выражений в несколько действий, целесообразно обратить внимание на то, что шкала B движка тождественна шкале A, в чем учащиеся убеждаются, тщательно совместив начальные штрихи шкал. Шкалы A и B также дают возможность выполнять действия второй ступени. Верно, последняя значащая цифра результата оказывается менее надежной, чем при пользовании основными шкалами. Однако применение шкал A и B для умножения и деления позволяет рационализировать вычисления в некоторых случаях, когда выражение содержит несколько действий. Например, при вычислении $1{,}894^2\cdot 3{,}45$ с помощью шкал D и A выполняется возведение в квадрат, а затем с помощью шкал A и B — умножение.

Учащиеся без особых затруднений вычисляют по линейке выражения:

$$2{,}75^2\cdot 1{,}48;\quad 1{,}44^2\cdot 2{,}36;\quad \frac{53{,}2^2}{725};\quad \frac{1{,}74^2}{2{,}44^2}.$$

Они применят счетную линейку и к решению таких задач:

1) *Вычислить площадь круга, если радиус его равен* 7,25 *см.*

2) *Вычислить объем цилиндра, если радиус основания его равен* 1,245 *дм, высота* 4,35 *дм.*

Извлечение квадратного корня из чисел с помощью линейки подготовлено всей предыдущей работой. Ученики легко догадываются, как извлечь квадратный корень, и формулируют правило.

Если подкоренное число принадлежит промежутку от 1 до 100, то квадратный корень в своей целой части имеет одну значащую цифру; результат отсчитывается по шкале D.

Если подкоренное число больше 100, то оно преобразуется в произведение числа, заключенного в промежутке от 1 до 100, и четной степени числа 10, например:

$$\sqrt{1642}=\sqrt{16,42\cdot 10^2}=10\sqrt{16,42}.$$

Если подкоренное число меньше 1, то его представляют в виде дроби, числитель которой принадлежит промежутку от 1 до 100, а знаменатель — четная степень 10, например:

$$\sqrt{0,0675}=\sqrt{\frac{6,75}{10^2}}=\frac{\sqrt{6,75}}{10}.$$

Учащиеся решают и такие примеры:

$$2,35\cdot\sqrt{1,48};\quad \sqrt{24,8\cdot 2,75};\quad \sqrt{2,84}\cdot\sqrt{3,62};\quad \frac{\sqrt{4,97}}{\sqrt{5,25}}.$$

Ученики решают следующие задачи:

1) *Вычислить радиус круга, если площадь его равна* 2,78 *кв. дм.*

2) *Вычислить радиус основания цилиндра, если объем его равен* 27,5 *куб. см, а высота равна* 3,45 *см.*

5. Шкала кубов. Историческая справка о линейке

В последней главе курса алгебры VIII класса учащиеся знакомятся со шкалой кубов (шкала K). Эта шкала изучается по тому же плану, что и шкалы D и A: а) структура шкалы и цена делений на разных отрезках ее, б) установка заданных чисел на шкале, в) чтение чисел, отмеченных на шкале штрихом бегунка. Все методические указания, сделанные ранее в отношении изучения шкал D и A, применимы и здесь. Цена делений на шкале кубов отличается еще большим разнообразием, чем на шкале квадратов.

Сопоставление шкал D и K прежде всего дает возможность находить кубы чисел: на шкале D устанавливается основание, а по шкале K читается куб числа.

Если основание степени принадлежит промежутку от 1 до 10, то по шкале K находится непосредственно куб числа.

Если основание степени больше 10, то оно предварительно преобразуется в произведение числа, заключенного в промежутке от 1 до 10, и степени 10, например: $12,5^3=(1,25\cdot 10)^3=1,25^3\cdot 10^3$.

Если основание степени меньше 1, то оно предварительно преобразуется в частное с делимым в промежутке от 1 до 10 и делителем, представляющим степень 10, например:

$$0{,}234^3=\left(\frac{2{,}34}{10}\right)^3=\frac{2{,}34^3}{10^3}.$$

Эти три случая возведения в куб определяют последовательность видов упражнений.

Предлагаются для вычислений выражения, содержащие два, три и более действий, например: $0{,}54\cdot 2{,}56^3$; $1{,}28^3:1{,}48$; $2{,}44^3:1{,}92^3$.

Курс геометрии дает возможность применить возведение в куб к решению таких задач:

1) *Найти объем куба с ребром* 2,92 *см.*

2) *Вычислить объем шара, радиус которого равен* 1,56 *дм.*

3) *Вычислить объем конуса, если радиус основания его равен* 19,2 *см, а высота втрое больше радиуса основания.*

Извлечение корня третьей степени из чисел с помощью линейки подготовлено предыдущей работой и затруднений не встречает. Последовательность примеров определяется следующими тремя случаями.

Если подкоренное число заключено в промежутке от 1 до 1000, то кубический корень непосредственно читается по шкале D.

Если подкоренное число больше 1000, то оно предварительно преобразуется в произведение так, чтобы один сомножитель принадлежал промежутку от 1 до 1000, а другой был кубом числа, состоящего из 1 с последующими нулями, например: $\sqrt[3]{2350}=\sqrt[3]{2{,}35\cdot 10^3}=10\sqrt[3]{2{,}35}$. Вынесение множителя из-под корня третьей степени производится по правилу, аналогичному соответствующему правилу для квадратных радикалов.

Если подкоренное число меньше 1, то оно предварительно преобразуется в частное, делимое которого принадлежит промежутку от 1 до 1000, а делитель — куб числа, состоящего из 1 с последующими нулями, например:

$$\sqrt[3]{0{,}145}=\sqrt[3]{\frac{145}{10^3}}=\frac{\sqrt[3]{145}}{10}.$$

Геометрические задачи:

1) *Вычислить ребро куба, если объем его равен* 28,5 *куб. дм.*

2) *Определить радиус шара, если объем его равен* 234 *куб. см.*

3) *Найти радиус основания цилиндра, если объем его равен* 12,7 *куб. дм и высота в два раза больше радиуса основания.*

Умелое преподавание вычислений на счетной линейке вызывает интерес у школьников: работают они с подъемом, с увлечением, иногда высказывают сожаление, что поздно познакомились с линейкой и не могли применять ее ранее. Энтузиасты стремятся постичь, как использовать остальные шкалы движка.

Интерес к линейке нередко порождает у любознательных школьников вопрос, когда и кто изобрел счетную линейку. Педагог должен быть готов дать историческую справку по этому вопросу.

В XVI в. развитие производства, техники, торговли и мореплавания вызывает развитие точного естествознания (механики, физики, особенно астрономии). Усложняются вычисления, а это выдвигает проблему об отыскании таких средств, которые упрощали бы вычисления, позволяли бы выполнить их с меньшей затратой труда и времени. С целью упрощения вычислений шотландский математик Непер (1550—1617) и швейцарский механик, астроном и математик Бюрги (1552—1632), независимо друг от друга, составили особые таблицы (логарифмические таблицы), которые значительно облегчили вычислительную работу. Эти ученые положили начало широкому применению в вычислениях таблиц логарифмов. Уже Непер вплотную подошел к идее шкалы логарифмов. Это было сделано в первой четверти XVII в.

Английский астроном, геодезист и математик Эдмонд Гунтер (1581—1626) в 1624 г. использовал для вычислений логарифмическую шкалу. Вначале применяли только одну шкалу в сочетании с циркулем: на шкале от начального штриха откладывался отрезок, соответствующий одному сомножителю, с помощью циркуля от начала шкалы брали другой отрезок, соответствующий другому сомножителю, прикладывали его к первому отрезку и читали против конца второго отрезка произведение чисел. Умножение двух чисел заменялось сложением отрезков, соответствующих сомножителям. Аналогично деление двух чисел сводилось к вычитанию отрезков, соответствующих делимому и делителю.

Шкала и циркуль значительно упрощали выполнение действий второй ступени, но все же создавали большое неудобство.

Усовершенствовал использование шкалы другой английский математик — Оутред (1574—1660); он заменил циркуль другой шкалой, тождественной первой. Однако лишь в 1657 г. вторая шкала была сделана похожей на современный движок. Но все же долгое время изготовление шкал выполнялось кустарным способом. Фабричное изготовление линеек впервые начато во Франции в 1915 г.

Французский инженер А. Мангейм в 1851 г. изобрел бегунок, и счетная линейка была реконструирована так, что приняла современный вид.

Под влиянием развивающейся техники и производства в последней четверти XIX в. счетная линейка получила весьма широкое распространение.

Педагог сообщит, что, кроме простейшей счетной линейки, которая изучена восьмиклассниками, в настоящее время изготовляется и применяется в практике много линеек специального назначения; например, имеются линейки для морского и артиллерийского дела, для теплотехники и электротехники и др. Иногда меняется и форма линеек: встречаются цилиндрические, круговые «линейки». За последнее время появились счетные линейки с двойными логарифмическими шкалами.

Интерес учеников к вычислениям с помощью счетной линейки является хорошим поводом для изучения линейки на занятиях математического кружка. При этом расширяются возможности использования линейки; учащиеся знакомятся с тригонометрическими шкалами и применяют их к решению прямоугольных треугольников и практических задач, связанных с решением треугольников. Например, на планах земельных участков наносят в уменьшенном виде не отрезки прямых, взятых на местности, а проекции этих отрезков на горизонтальную плоскость. В практике находят длины отрезков на поверхности земли и углы между этими отрезками и горизонтальной плоскостью, а проекции вычисляют по формуле $b=c \cdot \cos A$, где b — длина проекции отрезка на местности на горизонтальную плоскость, c — длина отрезка на местности, A — угол наклона отрезка к горизонтальной плоскости. Весьма часто решается другая практическая задача: найти превышение одной точки местности над другой [1].

---

[1] Литература, кроме указанной ранее в этой главе: В. М. Брадис. Об изучении логарифмической линейки. «Математика в школе», 1957, № 6; Н. И. Сырнев. Об изучении счетной (логарифмической) линейки в восьмилетней школе. «Математика в школе», 1960, № 4; Н. Я. Прайсман. Об изучении логарифмической линейки в восьмилетней школе. «Математика в школе», 1960, № 4; В. В. Куликов. Как изготовить самодельную счетную линейку. Учпедгиз, 1958; А. А. Карташян. Дидактический материал для вычислений на логарифмической линейке. Пособие для учителей VIII—X классов средней школы. «Просвещение», 1964.

ГЛАВА XV

КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ И КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Общий обзор темы

Тема «Квадратный корень и квадратное уравнение» имеет следующие основные задачи: 1) повторить введенное ранее понятие о квадратном корне, изучить основные свойства квадратных радикалов и простейшие действия над ними; 2) ввести некоторые новые функциональные зависимости, связанные с содержанием темы — графическим решением квадратного уравнения и понятием квадратного корня ($y=x^2$, $y=\sqrt{x}$); 3) изучить решение квадратных уравнений с числовыми коэффициентами и таких систем уравнений с двумя неизвестными, в которых одно уравнение первой, а другое второй степени; 4) применить изученный в этой теме материал к решению задач. Кроме того, учащиеся продолжают совершенствоваться в применении таблиц квадратов и квадратных корней и знакомятся с использованием счетной линейки в вычислении квадратов и квадратных корней.

В объяснительной записке к программе математики указывается, что учение о числе ограничивается изучением рациональных чисел и «дальнейшее развитие понятия о числе, в частности введение понятия об иррациональном числе, программой восьмилетней школы не предусматривается».

В VI классе вводится понятие о *множестве рациональных чисел*, изучаются действия над числами этого множества, законы и свойства действий.

Но вот появляются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и др., которые нельзя заменить рациональными числами, точно равными радикалам. У многих преподавателей возникает вопрос, как быть. Если не указать, что это иное множество чисел, не дать ему особого названия, то создастся риск, что ученики отнесут квадратные радикалы к множеству рациональных чисел, а это приведет к искажению понятий. Отнести квадратные радикалы к другому классу — к классу иррациональных чисел программа не рекомендует, да и трудно сформировать понятие об иррациональном числе: потребуется много времени, которым педагог не располагает.

Соблюдая дух программы, можно поступить так: не вдаваясь в выяснения понятия иррационального числа, все же сообщить учащимся, что числа вида $\sqrt{n}$, где n — положительное рациональное число, не представляющее квадрата другого рационального числа, являются примерами чисел особого вида, называемых иррациональными. Иррациональные числа не принадлежат множеству рациональных чисел.

Такое указание позволяет избежать невольного искажения старательно сформированного понятия о множестве рациональных чисел, не противоречит научным воззрениям и не может вызвать затруднений у учащихся.

Первая встреча учащихся с понятием *квадратного корня из числа* происходит еще в курсе геометрии VII класса в связи с изучением теоремы Пифагора и ее применением. В тему «Площадь многоугольника. Поверхность и объем прямой призмы» включен следующий алгебраический материал: «Таблица квадратов чисел. Вычисление стороны квадрата по заданной площади. Извлечение квадратного корня из чисел. Таблица квадратных корней из чисел».

Учащиеся в курсе геометрии знакомятся со структурой таблицы квадратов чисел и применяют ее при расчетах, узнают понятие квадратного корня и на основании определения по соображению в простейших случаях находят корни из точных квадратов. Они знакомятся с *таблицей квадратных корней из чисел* и применяют ее в геометрических задачах.

Таким образом, часть материала, включенного в рассматриваемую тему, уже известна учащимся. Потребуется в одних случаях повторение с углублением, в других повторение и тренировка в применении.

В методической и учебной литературе по алгебре для получения формул корней квадратного уравнения указываются два способа. В основе первого из них лежит разложение левой части уравнения, если оно имеет действительные решения, на множители[1]. Разложение рассматривается как основной способ получения решений. Второй способ основан на таком преобразовании уравнения, чтобы левая часть представляла квадрат линейного выражения от неизвестного, а свободные члены находились в правой части; затем, если уравнение имеет действительные решения, из обеих частей извлекается квадратный корень. При этом способе для некоторых видов неполных уравнений применяется и разложение левой части на множители.

В литературе отдается явное предпочтение первому способу[2]. Однако он не находит широкого применения в школе: под влиянием учебника алгебры А. П. Киселева многие учителя применяют второй способ.

Рекомендации методической литературы заслуживают внимания. Решение неполных квадратных уравнений и получение формул корней полных квадратных уравнений путем разложения на множители левой части уравнения имеют преимущества.

---

[1] В общих суждениях о квадратном уравнении принимается, что оно приведено к нормальному виду.

[2] См.: В. М. Брадис. Методика преподавания математики в средней школе. Учпедгиз, 1954; А. Н. Барсуков. Алгебра, ч. II. Учпедгиз. 1957; В. М. Брадис, Н. С. Истомина, А. И. Маркушевич, К. П. Сикорский. Алгебра, ч. II. Учпедгиз, 1957; И. И. Чистяков. Методика алгебры. Учпедгиз, 1934.

Во-первых, такое решение является общим способом, пригодным для любого вида квадратного уравнения, если только уравнение имеет действительные корни. Во-вторых, оно подготовляет вопрос о разложении трехчлена второй степени на множители. В-третьих, выкладки, свойственные этому способу, находят применение при изучении квадратной функции, при построении ее графика, при определении максимума и минимума ее. Высказанные соображения побуждают рекомендовать решение квадратных уравнений способом разложения левой части на множители. Этот способ усваивается несколько труднее второго, но опыт показывает, что при умелом изложении учащиеся его усваивают.

2. Функция $y=x^2$

Функция $y=x^2$ — простейшая представительница функции второй степени и находится в «близком родстве» с зависимостью $y=\sqrt{x}$, непосредственно связанной с квадратными радикалами. График зависимости $y=x^2$ служит наглядным пособием при изучении других более сложных видов квадратной функции; он используется при графическом решении квадратного уравнения, а позднее при графическом решении некоторых систем уравнений. Зависимость $y=ax^2$ находит широкое применение в различных областях науки и практики, а $y=x^2$ — частный случай такой зависимости. Рассмотрим уравнение.

$$y=x^2. \tag{1}$$

Оно выражает зависимость y от x; x — любое рациональное число, каждому значению x соответствует определенное значение y. Для построения графика преподаватель указывает, какие значения целесообразно дать x, и предлагает вычислить соответствующие значения y.

Таблица 24

x	0	$\pm0,3$	$\pm0,5$	$\pm0,7$	±1	$\pm1,2$	$\pm1,5$	$\pm1,8$	±2	$\pm2,5$	±3	±4
y	0											

В масштабе единица в 1 *см* учащиеся строят по координатам точки. Учитель обращает внимание на то, что x можно дать сколько угодно промежуточных значений; число построенных точек возрастает. Точки принадлежат плавной кривой линии — графику рассматриваемой зависимости. Полученная кривая называется параболой [1].

[1] Парабола — от греч. παραβολή. Дать доступное школьникам истолкование термина нет возможности.

График и таблица показывают, что полученная парабола симметрична относительно оси ординат. В этом легко убедиться и перегибанием фигуры по оси ординат до совпадения полуплоскостей. Просматривая фигуру на свет, учащиеся наблюдают совпадение одной половины параболы с другой. Ось симметрии параболы называется осью параболы, а точка пересечения оси с параболой — вершиной параболы.

Если отмечены две точки, симметричные относительно оси ординат, то их абсциссы — противоположные числа, а ординаты равны. Если даны точки $M\ (x;\ y)$ и $N(-x;\ y)$, то они симметричны относительно оси ординат.

Допустим, что координаты точки $M\ (x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (1). Координаты точки $N\ (-x;\ y)$ будут удовлетворять тому же уравнению. Это доказывает, что соответствующая парабола симметрична относительно оси ординат.

Преподаватель продемонстрирует параболу, вычерченную на листе миллиметровой бумаги в масштабе в 1 *дм* единица. Чертеж используется и для коллективных занятий в чтении графика. По заданным абсциссам (ординатам) учащиеся по графику находят соответствующие ординаты (абсциссы); для отмеченной на параболе точки находят координаты и указывают координаты точки, симметричной отмеченной относительно оси параболы; описывают, в каких пределах изменяются ординаты, если x изменяется, например, от 0 до 4 или от —4 до 0.

При возрастании отрицательных значений x соответственные значения y убывают, при возрастании положительных значений x соответственные значения y возрастают; если $x=0$, то $y=0$.

Координаты точки, полученные по чертежу, удовлетворяют (приближенно) уравнению (1): они являются решением уравнения. Подчеркивается, что координаты любой точки параболы служат решением уравнения (1), что уравнение имеет бесконечное множество решений. Таким образом, учащиеся подготавливаются к графическому решению квадратного уравнения, а в конце VIII класса — к графическому решению систем уравнений.

Так как график функции (1) в рассматриваемой и последующей главе программы используется многократно, то для демонстрации его полезно иметь следующее пособие: на листе тонкого органического стекла размером примерно 50×70 *см* вычерчивается тушью график уравнения $y=x^2$; к листу фанеры размером 60×90 *см* прикрепляется миллиметровая бумага с нанесенными осями координат. С помощью этого наглядного пособия хорошо демонстрируются переносы параболы параллельно осям координат. Пособие используется для демонстрации приближенного решения квадратного уравнения и некоторых систем уравнений с двумя неизвестными.

При отсутствии органического стекла его можно заменить калькой. Эту бумагу краями приклеивают к рамке из картона.

Каждому ученику полезно иметь график того же уравнения на листке кальки и кусок миллиметровой бумаги с вычерченными осями координат. За единичный отрезок принимается 1 *см*.

Желательно показать практическое значение функции (1) и параболы, но возможности этого пока ограничены.

Можно разъяснить, что в крупном масштабе хорошо вычерченная парабола дает возможность находить приближенно квадраты чисел: основание степени отсчитывается от начала координат по оси абсцисс, а соответствующая ордината дает квадрат числа (приближенно).

Можно сообщить учащимся, что, например, уравнения $y=2x^2$, $y=0,5x^2$, отличающиеся от уравнения (1) коэффициентом при x^2, тоже имеют графиками параболы, похожие и вместе с тем отличные от рассмотренной параболы. Такие уравнения будут изучаться несколько позднее.

Камень, брошенный под углом к горизонтальной плоскости, опишет кривую, близкую к параболе. Если бы не было сопротивления воздуха движению камня, то его траектория была бы идеальной параболой.

Если в сосуде, наполненном водой, открыть у дна боковое отверстие, то струя воды падает по кривой, представляющей часть параболы.

Деревянный конус можно распилить так, чтобы плоскость среза была параллельна одной из образующих конуса, тогда криволинейный контур среза — парабола. Демонстрируется соответствующая модель конуса и полученная в срезе кривая.

Педагог найдет и другие примеры, в которых встречается парабола.

3. Квадратный корень

Чтобы понятие о квадратном корне из числа оказалось связанным с возведением числа во вторую степень, сопоставляются две задачи:

1) *Найти площадь квадрата, когда дана длина стороны его.*

2) *Найти длину стороны квадрата по данной его площади.*

Решение первой задачи известно. Как решить вторую задачу, если площадь равна, например, 144 *кв. м*? Надо подобрать такое число, квадрат которого равен 144. Таким числом будет 12, ибо $12^2=144$. Длина стороны квадрата равна 12 *м*.

Определение длины стороны квадрата по его площади приводит к новому действию, обратному возведению в квадрат,— к извлечению квадратного корня из числа:

$$\sqrt{144}=x, \quad x^2=144.$$

В условиях восьмилетней школы новое действие целесообразно определить так: извлечь квадратный корень из числа —

значит найти такое число, квадрат которого равен данному числу.

В учебнике алгебры вводится в рассматриваемой теме только понятие об арифметическом квадратном корне. Редактор учебника С. И. Новоселов указывает, что запись, например, $\sqrt{25}=\pm 5$ следует считать неверной. Приемлемы записи: $\sqrt{25}=5$, $\pm\sqrt{25}=\pm 5$[1]. Только при решении уравнения $x^2=a$ при $a>0$ появляется запись $x=\pm\sqrt{a}$.

Такое изложение является наиболее простым. Оно достаточно для рассматриваемой темы, так как преобразования квадратных радикалов применяются только к арифметическим корням.

В следующей теме *вводится понятие о корне третьей степени* из числа; придется установить более широкий взгляд на это понятие.

Чтобы понятие о квадратном корне из числа и связанные с ним понятия были усвоены, учащиеся решают на основании определения по соображению примеры с последующей проверкой:

1) $\sqrt{49}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{121}$;

2) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{9}{25}}$, $\sqrt{\frac{16}{81}}$, $\sqrt{\frac{64}{49}}$;

3) $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{0{,}36}$, $\sqrt{1{,}44}$, $\sqrt{0{,}0001}$.

Решение таких примеров желательно распределить на несколько уроков.

Не существует рационального числа, равного $\sqrt{30}$. $5^2<30$, $6^2>30$: нет целого числа, равного $\sqrt{30}$. Нет и дробного числа, равного $\sqrt{30}$: квадрат каждой несократимой обыкновенной дроби равен несократимой дроби. Если принять, что $\sqrt{30}\approx 5$ или $\sqrt{30}\approx 6$, то 5 и 6 являются приближенными значениями $\sqrt{30}$ с точностью до 1, первый по недостатку, второй по избытку. Предлагается найти с точностью до 1 корни: $\sqrt{40}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{107}$ и решить, какое приближенное значение ближе к значению корня, взятое с недостатком или с избытком.

Не существует рационального числа, равного $\sqrt{-4}$: нет рационального числа, квадрат которого равен -4. На самом деле квадрат любого рационального числа, кроме нуля, всегда положительное число, а квадрат нуля равен нулю. В дальнейшем рассматриваются квадратные корни только из неотрицательных чисел.

---

[1] См.: С. И. Новоселов. О новом издании учебника «Алгебра» А. Н. Барсукова. «Математика в школе», 1961, № 3.

В восьмилетней школе было бы возможно обойтись без введения алгоритма извлечения квадратного корня из чисел и довольствоваться извлечением его по таблицам и с помощью счетной линейки. Однако в задачнике Ларичева имеется довольно много задач, при решении которых приходится извлекать корень из чисел, имеющих пять и более значащих цифр. Приближенное извлечение корня усложняет проверку по уравнению и по задаче. В этом случае представляют подкоренное число в виде произведения и извлекают корень из каждого сомножителя отдельно. А как представить подкоренное число в виде произведения? Надо разложить его на множители.

Например: $\sqrt{116964}=\sqrt{2^2\cdot3^4\cdot19^2}=2\cdot3^2\cdot19=342.$

Такой прием требует больше времени, чем применение алгоритма извлечения квадратного корня.

В силу этого в 1962/63 учебном году некоторые учителя изучали с восьмиклассниками алгоритм извлечения квадратного корня из чисел.[1]

Изложение алгоритма разработано в учебной и методической литературе: оно производится на разумно подобранном примере с помощью формулы квадрата суммы двух чисел и требует довольно много времени, если педагог поставил задачу добиться его усвоения каждым учащимся. Изложение требует пространных и длительных, связанных между собой рассуждений, которые далеко не сразу усваиваются учащимися и вызывают затруднения у многих из них. Рассмотрение одного примера недостаточно, а на повторение нет времени. Вот почему принятое в литературе изложение алгоритма весьма редко усваивается учащимися.

Целесообразно использовать более простые способы ознакомления с алгоритмом. Наметим план упрощенного изложения.

1) Подмечают, что квадраты целых однозначных чисел — однозначные или двузначные числа, квадраты двузначных чисел — трехзначные или четырехзначные числа и т. д. Делают заключение: квадрат всякого целого числа содержит вдвое более цифр, чем число, или вдвое более без одной. Обратное предложение позволяет предвидеть, сколько цифр содержит квадратный корень из целого числа: чтобы узнать, сколько цифр в квадратном корне из целого числа, достаточно число цифр подкоренного числа разделить на два, если оно четное, или прибавить одну цифру и разделить на два, если подкоренное число имеет нечетное число цифр. Подготовлена необходимая разбивка подкоренного числа на грани.

2) На примерах показывают применение алгоритма извлечения квадратного корня из четырехзначных и трехзначных чисел, представляющих точные квадраты. Результаты проверяют возведением в квадрат. Это убеждает в правильности алгоритма.

3) Применение алгоритма распространяют на случай пятизначных и шестизначных подкоренных чисел, являющихся точными квадратами чисел. Результаты также проверяют возведением полученного корня в квадрат.

4) Возведя в квадрат несколько десятичных дробей с различным числом десятичных знаков, учащиеся подмечают: при возведении в квадрат десятичных дробей число десятичных знаков удваивается; оно всегда четное. Верно и обратное предложение. Подготовлена разбивка на грани десятичных знаков подкоренного числа.

Алгоритм извлечения корня распространяют на десятичные дроби, когда они — точные квадраты. Проверкой сопровождают решение первых примеров.

5) Далее алгоритм извлечения квадратного корня распространяют на случай, когда подкоренное число не является точным квадратом. Учащиеся извлекают корни с точностью до 1, до 0,1 и т. д. Учитель подчеркивает, что квадратный корень из любого числа (целого, десятичной дроби) всегда можно извлечь с любой степенью точности.

Так как в практике весьма часто приходится извлекать квадратный корень из приближенного числа, то этот случай заслуживает особого внимания.

Пусть площадь квадрата приближенно, с точностью до 0,1 *кв. см, равна* 47,2 *кв. см. С какой точностью следует вычислять сторону квадрата?*

Истинное значение площади заключается между 47,1 *кв. см* и 47,3 *кв. см*. Если сторону квадрата обозначим x, то $\sqrt{47{,}1}<x<\sqrt{47{,}3}$. Извлекая квадратный корень с тремя значащими цифрами (первый по недостатку, второй по избытку), найдем: $6{,}86<x<6{,}88$.

Уже сотые доли являются сомнительными.

Если извлечь корень с четырьмя значащими цифрами, то получим: $6{,}862<x<6{,}878$.

Подтверждается, что сотые доли вызывают сомнение. Значит, заслуживают внимания только три значащие цифры, т. е. столько же, сколько их в подкоренном числе. Итак, $x\approx 6{,}87$ *см*.

Для избежания «короткой» индукции таким же образом рассматривают еще несколько примеров, причем приближенные подкоренные числа берут с различным числом значащих цифр. Ученики приходят индуктивно к выводу: при извлечении квадратного корня из приближенного числа в результате надо взять столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.

Ученики вспоминают, как использовать таблицы квадратных корней из чисел, и знакомятся с извлечением квадратного корня с помощью счетной линейки.

Полезно познакомить учащихся с приближенной формулой извлечения квадратного корня из чисел вида $1\pm a$, где a по сравнению с единицей — малая дробь.

Если в правой части тождества

$$\left(1 \pm \frac{a}{2}\right)^2 = 1 \pm a + \frac{a^2}{4}$$

отбросить весьма малый по сравнению с другими член $\frac{a^2}{4}$ и извлечь из обеих частей квадратный корень, то получим приближенное равенство:

$$\sqrt{1 \pm a} \approx 1 \pm \frac{a}{2}.$$

Оно дает возможность легко в уме находить приближенные корни из чисел, близких к единице, например: $\sqrt{1,04} \approx 1,02$; $\sqrt{0,996} \approx \approx 0,998$.

Учитывая, что перенесение запятой в подкоренном числе на две цифры вправо (влево) вызывает перенесение запятой в корне на один знак вправо (влево), можно формулу применять к более широкому классу чисел, чем указано первоначально, например:

$$\sqrt{101} \approx 10,05; \ \sqrt{99} \approx 9,95; \ \sqrt{0,0104} \approx 0,102.$$

Навыки в извлечении корня применяют при решении задач:

1) *Площадь круга приближенно равна* 46,8 *кв. м. Вычислить радиус круга.*

2) *Объем цилиндра приближенно равен* 723,5 *куб. см, высота его приближенно равна* 40,8 *см. Вычислить диаметр основания цилиндра.*

3) *Падающее в пустоте тело проходит в t секунд расстояние s, выражаемое формулой:*

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Вычислить, в какое время тело пройдет 100 *м.*

4. Функция $y = \sqrt{x}$

В отличие от изученных зависимостей, функция $y = \sqrt{x}$ имеет ограниченную слева область допустимых значений аргумента, именно $0 \leqslant x$.

На это и обращаем внимание учащихся: x может принимать только неотрицательные значения из множества рациональных чисел. Учащиеся вспоминают, почему x не может принимать отрицательные значения.

Так как рассматриваются только арифметические квадратные корни, то каждому неотрицательному значению x соответствует одно вполне определенное значение y.

Уравнение

$$y=\sqrt{x} \qquad (1)$$

выражает зависимость y от x.

Так как x принимает неотрицательные значения и y получает тоже неотрицательные значения, то можно предвидеть, что график зависимости (1) располагается только в первой четверти.

Предлагается самостоятельная работа: *построить график зависимости* (1) (значение x указывает педагог):

Таблица 25

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
y													

Значения y школьники находят с точностью до 0,01 с помощью счетной линейки.

Близкое родство зависимости (1) с зависимостью $y=x^2$ следует и из того, что при возведении частей уравнений (1) в квадрат получается уравнение $y^2=x$, а это — уравнение параболы, только иначе расположенной относительно осей координат. С помощью шаблона параболы, заготовленного ранее на куске органического стекла или на кальке, можно демонстрировать и график зависимости (1), надо только его расположить так, чтобы вершина параболы совпадала с началом координат, ось — с положительным направлением оси абсцисс, и использовать часть кривой, расположенную в первой четверти.

Если график зависимости (1) вычертить на листе миллиметровой бумаги в масштабе единица в 1 *дм*, то он может служить для приближенного извлечения квадратных корней с точностью до 0,02.

В практических приложениях используют зависимость, сходную с (1), но усложненную наличием коэффициента при x, а иногда и перед радикалом:

$$y=\sqrt{ax}, \quad y=c\sqrt{ax}.$$

Например, период колебания маятника определяется по формуле:

$$t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где t — время в секундах, l — длина маятника в сантиметрах, g — ускорение силы тяжести ($см/сек^2$).

Скорость истечения воды из малого отверстия на боковой поверхности сосуда определяется по формуле:

$$v=0{,}6\sqrt{2gh},$$

где v — скорость истечения (*см/сек*), h — высота уровня воды в сосуде над отверстием (*см*), g — ускорение силы тяжести (*см/сек*^{2}).

5. Свойства квадратных радикалов

В этом параграфе идет речь об арифметических корнях.

В учебнике алгебры теоремы о корне из произведения, из дроби и степени доказаны способом проверки на основании определения корня. Приведем одно из доказательств для того, чтобы сделать некоторые замечания.

Требуется доказать теорему о квадратном корне из произведения:

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}. \qquad (а)$$

Возводим в квадрат правую часть равенства:

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2\cdot\left(\sqrt{c}\right)^2=abc.$$

Получилось подкоренное выражение левой части. Делаем заключение, что равенство (а) верно.

Правая часть равенства (а) — произведение действительных чисел, все или некоторые сомножители могут быть иррациональными. Правило возведения в степень произведения рациональных чисел безоговорочно перенесено на действительные числа. Такое доказательство нельзя признать корректным: учеников заставляют выполнять операции над действительными числами, а они не имеют представления ни об этих числах, ни о действиях над ними.

В восьмилетней школе *целесообразно отказаться от применения* доказательств способом проверки и удовлетвориться индуктивным изложением свойств радикалов.

Рассмотрим, как изложить предложение об извлечении квадратного корня из произведения. Требуется вычислить $\sqrt{4\cdot 25}$.

Произведем вычисления двумя способами и сравним результаты:

1) $\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{100}=10$, 2) $\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=2\cdot 5=10$.

Результаты оказались равными. Можно сделать заключение:

$$\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}.$$

Рассмотрим еще примеры:

$$\sqrt{49\cdot 100};\ \sqrt{9\cdot 16\cdot 36};\ \sqrt{4\cdot 9\cdot 16\cdot 25}.$$

Как сформулировать правило?

Правило верно и тогда, когда из одного или всех сомножителей подкоренного числа нельзя извлечь корень точно. Проверим на примере: $\sqrt{2\cdot 3}$.

По правилам приближенных вычислений найдем результаты с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}\approx 2{,}45$; 2) $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 1{,}414\cdot 1{,}732\approx 2{,}45$.

Аналогично рассматриваем еще 2—3 примера. Учащиеся формулируют теорему об извлечении корня из произведения.

Теорему можно записать в символической форме:

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}, \tag{1}$$

где все корни арифметические.

Если равенство (1) переписать так:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}, \tag{2}$$

то учащиеся сформулируют теорему об умножении квадратных радикалов.

Тождество (1) служит основанием для вынесения множителя из-под знака корня:

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$$

Часто бывает полезно вводить множитель под знак корня. Основанием для этого служит тождество (2):

$$2\sqrt{15}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{60}.$$

Аналогично излагают вопрос об извлечении квадратного корня из дроби: получают тождество

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \tag{3}$$

где все корни арифметические и $b\neq 0$.

Тождество (3) служит основанием для вынесения из-под знака корня знаменателя:

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\cdot 7}{7^2}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Переписав тождество (3) так:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, \tag{4}$$

учащиеся сформулируют теорему о делении квадратных корней.

При рассмотрении теоремы об извлечении квадратного корня из степени можно опереться непосредственно на определение корня. Предлагается на основании определения решить примеры и проверить полученные корни:

$$\sqrt{3^2};\ \sqrt{a^2};\ \sqrt{c^4};\ \sqrt{m^{10}};\ \sqrt{x^{18}}.$$

Уничтожение корня в знаменателе можно осуществить двумя способами:

$$1)\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot3}{3\cdot3}}=\frac{\sqrt{6}}{3};\qquad 2)\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Учащиеся занимаются не только простейшими преобразованиями квадратных радикалов, но и подсчетом приближенных значений иррациональных выражений с помощью счетной линейки.

Указание объяснительной записки к программе математики о том, что формулы, выражающие корень из произведения и частного, следует использовать для решения несложных примеров на умножение и деление выражений с квадратными радикалами, не дает возможности судить, какова должна быть сложность примеров. В стабильном задачнике в этом разделе примеры подобраны не вполне удачно.

В восьмилетней школе квадратные радикалы применяются в решении квадратных уравнений с числовыми коэффициентами. Учащиеся должны свободно выполнять упрощение выражений, получающихся при решении квадратных уравнений и простейших уравнений с буквенными коэффициентами, должны уметь полученные решения проверять по уравнению. А для этого надо решить примеры, указанные в задачнике, и, кроме того, примеры следующих видов:

$$\left(-2+\sqrt{7}\right)^2;\ \left(0{,}5-2\sqrt{5}\right)^2;$$

$$\left(4\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right);$$

$$\left(\sqrt{2}-2\right)^2+2\left(\sqrt{2}-2\right)-2;$$

$$\left(-5+2\sqrt{3}\right)^2+10\left(-5+2\sqrt{3}\right);$$

$$\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)^2;\ \left(-2a+\sqrt{b-4a^2}\right)^2.$$

6. Квадратное уравнение

Первые шаги изучения квадратного уравнения сопровождаются такими преобразованиями его, которые нуждаются в учете равносильности получаемых выводных уравнений данному. Например, обращая внимание учащихся на то, что при выводе формул корней уравнения $x^2+px+q=0$ выполняются операции, приводящие к последовательному получению выводных уравнений, равносильных данному, приходим к заключению, что нет надобности проверять, удовлетворяют ли полученные корни решаемому уравнению. В дальнейшем решаются дробные уравнения, возможно получение уравнения, неравносильного исходному, и появление посторонних решений. Учитель начинает главу с повторения понятия о равносильности уравнений, двух свойств уравнений и следствий из них.

Для первого ознакомления учеников с квадратным уравнением используем задачу. Составляя уравнение для ее решения, учащиеся получают первое квадратное уравнение. Такой прием показывает, что изучение квадратных уравнений вызвано необходимостью решать усложненные задачи, что оно обусловлено практикой. Полученное уравнение служит исходным конкретным материалом для последующих обобщений и определений.

Для примера рассмотрим задачу.

Из листа жести, имевшего форму прямоугольника, длина которого в 1,5 *раза больше ширины, сделана открытая сверху коробка. Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной* 20 *см и получившиеся боковые грани загнуты. Найти размеры листа, если объем коробки оказался равным* 6400 *см*^{3}.

Ученики составляют уравнение:

$$3x^2-200x+2560=0,$$

где x — длина меньшей стороны листа.

Преподаватель сообщит, что уравнение такого вида называется уравнением второй степени: высшая степень неизвестного — вторая. Иначе такое уравнение называется квадратным. Пока мы не умеем решать квадратные уравнения. Главная задача главы, которую начинаем, заключается в том, чтобы научиться решать квадратные уравнения.

В дальнейшем вернемся к полученному уравнению и решим его.

Приводим еще примеры квадратных уравнений:

$$x^2-5x+6=0, \qquad \text{(а)}$$

$$3x^2-5x=0, \qquad \text{(б)}$$

$$2x^2-8=0, \qquad \text{(в)}$$

$$5x^2=0. \qquad \text{(г)}$$

Каждое из записанных уравнений имеет одно неизвестное. Старшая степень неизвестного — вторая. Чтобы уравнение было второй степени, или квадратным, необходимо, чтобы коэффициент старшего члена не был равен нулю. Коэффициент при неизвестном в первой степени может быть любым числом, в частности и нулем, как в примерах (в) и (г). Член, не содержащий неизвестного, также может быть любым числом, в частности и нулем, как в примерах (б) и (г).

Если коэффициент при x^2 отрицательный, то, умножая обе части уравнения на -1, получим уравнение, равносильное данному. Например, умножая обе части уравнения $-2x^2+x-4=0$ на -1, получим $2x^2-x+4=0$. Поэтому в квадратном уравнении коэффициент при неизвестном во второй степени будем считать положительным.

Квадратное уравнение в общем виде записывают так:

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

где $a>0$, а b и c — любые числа.

Сообщаем названия членов уравнения и коэффициентов его. Так подготовлено определение квадратного уравнения.

Если коэффициент $a=1$, то уравнение называют приведенным квадратным уравнением. Его записывают так:

$$x^2+px+q=0. \tag{2}$$

Уравнение (1) всегда можно заменить равносильным ему приведенным уравнением. Это достигается делением обеих частей уравнения (1) на коэффициент старшего члена ($a \neq 0$):

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Положив $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, получим:

$$x^2+px+q=0.$$

Если $c=0$, или $b=0$, или $b=c=0$, уравнение называется неполным квадратным уравнением. Возможны следующие виды неполных квадратных уравнений:

$$ax^2+bx=0 \quad (x^2+px=0); \tag{3}$$

$$ax^2+c=0 \quad (x^2+q=0); \tag{4}$$

$$ax^2=0 \quad (x^2=0). \tag{5}$$

Практика обучения показывает, что все предварительные сведения о квадратных уравнениях можно сообщить одновременно: они не затрудняют восьмиклассников. Но учитель может знакомить школьников с отдельными видами уравнений и постепенно — по мере обучения решению уравнений.

7. Решение неполных квадратных уравнений

Основной прием решения неполных квадратных уравнений — разложение левой части уравнения на множители. Для уравнения $ax^2+c=0$ возможно отклонение от основного способа, однако и здесь желательно показать, что при известном условии уравнение можно решить разложением на множители.

Целесообразно начать с примеров уравнения $ax^2+bx=0$.

Решим уравнение $x^2-5x=0$. Его можно представить так: $x(x-5)=0$. Если произведение двух сомножителей равняется нулю, то или $x=0$, или $x-5=0$. Получаем: $x_1=0$, $x_2=5$. Устная проверка по уравнению показывает, что 0 и 5 — корни уравнения.

Решаем уравнения: $2x^2-7x=0$; $4y^2+y=0$; $z^2-\sqrt{3}\cdot z=0$.

Затем решаем уравнение:

$$ax^2+bx=0. \qquad (3)$$

Подмечаем, что квадратное уравнение рассматриваемого вида всегда имеет два решения, одно из которых равно нулю. Равенство нулю одного из решений является его характеристическим свойством. Можно доказать теоремы: а) если свободный член квадратного уравнения равен нулю, то один из корней равен нулю; б) если один из корней квадратного уравнения равен нулю, то свободный член равен нулю.

Пусть $c=0$. В таком случае, как уже показано, уравнение имеет решение, равное нулю.

Пусть нуль — корень квадратного уравнения (3). Подставляя в уравнение (1) вместо x число 0, получим $c=0$.

Переходим к уравнению $ax^2+c=0$.

Требуется решить уравнение $x^2-16=0$. Разложив на множители левую часть, получим: $(x-4)(x+4)=0$. Применяя рассуждение, которое только что использовалось, найдем: $x-4=0$, $x+4=0$. Получаем: $x_1=4$, $x_2=-4$. Устная проверка показывает, что 4 и —4 — решения данного уравнения.

Аналогично решаются уравнения: $x^2-144=0$; $4x^2-9=0$. При решении уравнения $x^2-3=0$ предварительно его преобразуют: $x^2-(\sqrt{3})^2=0$.

Требуется решить уравнение $x^2+4=0$. Левая часть при любом значении x больше нуля, а правая равна нулю. Уравнение не имеет решений.

Уравнения $x^2+25=0$, $4x^2+9=0$ также не имеют решений.

По неполной индукции подмечаем, что уравнение $ax^2+c=0$ или имеет два взаимно противоположных решения или не имеет решений.

В дальнейшем не нужно возражать, если кто-либо из учащихся решит уравнение $ax^2+c=0$ путем переноса свободного члена в правую часть, деления обеих частей на a и извлечения, если возможно, из обеих частей квадратного корня.

Рассмотрим последнее неполное квадратное уравнение $ax^2=0$. Так как $a \neq 0$, то оно сводится к равносильному уравнению $x^2=0$. Отсюда $x_1=0$ и $x_2=0$. Уравнение имеет два корня, каждый из которых равен нулю.

По аналогии с двумя предыдущими случаями решения неполных квадратных уравнений, появление двух корней, каждый из которых равен нулю, не вызывает затруднений у учащихся.

В стабильном задачнике дается достаточное количество примеров на решение неполных квадратных уравнений. Среди них имеются и дробные уравнения. Параллельно с решением неполных квадратных уравнений целесообразно решать и задачи, которые приводят к таким уравнениям.

8. Уравнение $x^2+px+q=0$

Преобразование трехчлена в алгебраическую сумму двух выражений, одно из которых — квадрат линейного двучлена, неоднократно применяется в курсе алгебры восьмилетней школы. Важно, чтобы учащиеся овладели навыком такого преобразования. Поэтому решение приведенного квадратного уравнения следует начинать с решения серии целесообразно подобранных постепенно усложняющихся примеров. В результате учащиеся приходят к выводу формулы решения приведенного квадратного уравнения, овладевают навыком представлять трехчлен второй степени в виде указанной алгебраической суммы двух слагаемых.

Требуется решить уравнение $(x^2-1)^2-25=0$.

Легко усмотреть, что это — квадратное уравнение. Для решения квадратных уравнений много раз применялось разложение левой части на множители. Применим разложение и в этом случае:

$$(x-6)(x+4)=0,$$

$$x_1=6, \quad x_2=-4.$$

Проверка подтверждает, что 6 и -4 корни решаемого уравнения.

Аналогично решается уравнение $(x+2)^2-36=0$.

Пусть требуется решить уравнение $x^2-2x-3=0$. Преобразуем левую часть его так, чтобы получилось уравнение, похожее на предыдущее. Нужно выделить в левой части квадрат двучлена.

Будем рассматривать старший член как квадрат первого слагаемого, равного x, средний член как удвоенное произведение первого слагаемого на второе. За второе слагаемое надо принять 1. Прибавим квадрат второго слагаемого, т. е. 1^2. Чтобы не изменить левую часть уравнения, вычтем 1^2. Получим:

$$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-3=0,$$

или

$$(x-1)^2-4=0.$$

Находим два решения: $x_1=3$, $x_2=-1$.

Предлагаем решить уравнения:

$$x^2-4x+3=0;\quad x^2+5x+6=0;\quad x^2+x-6=0.$$

При решении уравнения $x^2-2x-1=0$ получаем корни, содержащие радикалы:

$$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-1=0,$$

$$(x-1)^2-2=0,$$

$$(x-1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=0,$$

$$\left[(x-1)-\sqrt{2}\right]\cdot\left[(x-1)+\sqrt{2}\right]=0.$$

В результате получим:

$$x_1=1+\sqrt{2},\quad x_2=1-\sqrt{2}.$$

Уравнения $x^2-4x+1=0$, $x^2+6x-4=0$ также имеют корни, содержащие радикалы.

Решая уравнение $x^2-2x+5=0$, учащиеся приходят к заключению, что левая часть не разлагается на множители. При любых значениях x левая часть больше нуля, а правая равна нулю. Уравнение не имеет решений.

К такому же выводу придут учащиеся при решении уравнений:

$$x^2+6x+10=0;\quad x^2-8x+19=0.$$

Далее рассматриваем уравнения с буквенными коэффициентами:

$$x^2-3mx+2m^2=0,\quad x^2+7nx+10n^2=0.$$

С помощью неполной индукции можно отметить, что приведенное квадратное уравнение или имеет два решения или не имеет решений.

Теперь проложен путь для получения формулы решения приведенного квадратного уравнения.

Требуется решить уравнение $x^2+px+q=0$.

Будем стремиться разложить левую часть на множители, если такое разложение возможно. Выделим квадрат линейного относительно неизвестного двучлена:

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]=0.$$

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, то можно записать:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(x+\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = 0,$$

$$x+\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0,$$

$$x+\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0,$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

В приведенных выкладках уравнения каждой последующей строки равносильны уравнениям предыдущей строки: получена формула корней приведенного квадратного уравнения.

Если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то уравнение не имеет решений; левая часть при любых значениях неизвестного больше нуля, а правая равна нулю.

На двух-трех ближайших уроках обоснование формулы корней приведенного квадратного уравнения повторяем. Учащимся предъявляем требование, чтобы они запомнили и формулу и правило.

Дискриминант[1] непосредственно связан с выводом формулы корней. Нет надобности знакомство с понятием о дискриминанте и о его значении откладывать на более позднее время.

После решения одного из приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами учитель обращает внимание учащихся на соотношение между корнями уравнения и его коэффициентами. Такую связь они наблюдают и при решении последующих примеров. Пользуясь неполной индукцией, можно сформулировать прямую теорему Виета: в приведенном квадратном уравнении сумма корней равна коэффициенту среднего члена с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Дают доказательство теоремы.

---

[1] Дискриминант — от лат. *discriminans* — «разделяющий, различающий», в нашем случае — различитель.

Целесообразно познакомить учащихся и с обратной теоремой. Ее можно сформулировать так: если два числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям: $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Из равенств $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$ исключим x_2:

$$x_2=-x_1-p, \quad x_1(-x_1-p)=q.$$

Преобразуя последнее равенство, получим:

$$x_1^2+px_1+q=0.$$

Равенство свидетельствует, что x_1 — корень уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Теперь из равенств, предусмотренных условием теоремы, исключим x_1:

$$x_1=-x_2-p, \quad x_2(-x_2-p)=q.$$

Из последнего равенства имеем: $x_2^2+px_2+q=0$. Значит, x_2 — корень того же уравнения.

В школе часто наблюдается логическая ошибка: составляя по данным корням, например 3 и —7, квадратное уравнение

$$x^2+4x-21=0,$$

учащиеся ссылаются на теорему Виета.

На самом деле уравнение составлено на основании обратной теоремы. Основание для составления уравнения указывают неверно. Вот почему полезно обратить внимание на теорему, обратную теореме Виета.

Среди примеров на решение приведенных квадратных уравнений используют дробные уравнения. Особое внимание обращают на возможность нарушения равносильности, на возможность получения решений, посторонних по отношению к данному уравнению, а значит, на необходимость проверки решений. Пусть, например, требуется решить уравнение:

$$x-\frac{4x}{x-1}=\frac{5-x}{1-x}.$$

Последовательно получаем:

$$x(x-1)-4x=x-5, \qquad x^2-6x+5=0.$$

По теореме Виета находим решения последнего уравнения:

$$x_1=5, \; x_2=1.$$

Проверка показывает, что уравнение имеет только один корень 5.

Вот примеры уравнений, при решении которых появляются посторонние корни:

$$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{x^2-3}{9-x^2}; \quad \frac{x+2}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2(2x+3)}{(x-1)(2-x)}.$$

9. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ и графическое решение квадратного уравнения

А. Формулу корней уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

можно получить различными способами. Наиболее простой из них основывается на применении формулы решения приведенного квадратного уравнения.

Разделив обе части уравнения (1) на a ($a > 0$), получим:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Составим дискриминант этого уравнения:

$$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Если $b^2-4ac \geqslant 0$, то уравнение имеет решения:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}};$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если $b^2-4ac<0$, то уравнение (1) не имеет решений в области действительных чисел.

Дальнейшее изучение уравнения (1) аналогично изучению приведенного уравнения.

Дискриминант вводится в непосредственной связи с получением формулы корней и используется для исследования корней.

Для дальнейшего полезно на примерах показать, что уравнение вида (1) можно решить разложением левой части его на множители, если $b^2-4ac \geqslant 0$.

Рассмотрим, например, уравнение:

$$2x^2-5x+2=0.$$

Его дискриминант равен 9: уравнение имеет корни. Последовательно получаем:

$$4x^2-10x+4=0,$$

$$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4=0,$$

$$\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0,$$

$$(2x-1)\cdot(2x-4)=0, \qquad x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

Проверка по уравнению покажет, что $\frac{1}{2}$ и 2 — корни уравнения.

Применяя тот же прием решения к уравнению $2x^2-x+1=0$, получим уравнение, левая часть которого при всех значениях x больше нуля. Значит, оно не имеет решений. Это подтвердит и дискриминант.

После решения одного из уравнений учитель обращает внимание на соотношение между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами. При решении нескольких следующих уравнений учащиеся наблюдают то же соотношение. Это дает возможность сформулировать теорему Виета. Затем дают обычное доказательство ее.

По мотивам, изложенным ранее, полезно дать обратную теорему: если два числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$, то эти числа — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Доказательство теоремы такое же, как для приведенного уравнения.

Не все школьники осознают, что формула корней уравнения (1) является общей, т. е. применимой к любому квадратному уравнению. На этот факт полезно обратить внимание учащихся.

Б. Программа по алгебре предусматривает изучение решения квадратного уравнения с помощью графика. Это решение не связано с другими: изучение его может и предшествовать аналитическому решению и следовать за ним.

Требуется, например, решить уравнение:

$$x^2-2x-1=0. \tag{а}$$

Перепишем его так, чтобы в левой части остался только старший член

$$x^2=2x+1. \tag{б}$$

Обозначим левую и правую части уравнения (б) y:

$$y=x^2, \tag{в}$$

$$y=2x+1. \tag{г}$$

Уравнения (в) и (г) выражают известные зависимости y от x. На одном чертеже в одном и том же масштабе построим графики этих уравнений (рис. 7).

Корнями уравнения (б), а значит и (а), будут те значения x, при которых значения y в уравнениях (в) и (г) будут равны. А они принимают равные значения при тех же значениях x, которые являются абсциссами точек пересечения графиков уравнений (в) и (г).

Прочитав по чертежу абсциссы точек пересечения графиков, найдем приближенно корни уравнения (а).

Для усвоения сути графического решения рассуждение повторяется применительно к уравнениям: $x^2-x-5=0, x^2+x-3=0$. Полезно предложить и такие квадратные уравнения, которые имеют два равных корня и не имеют решений.

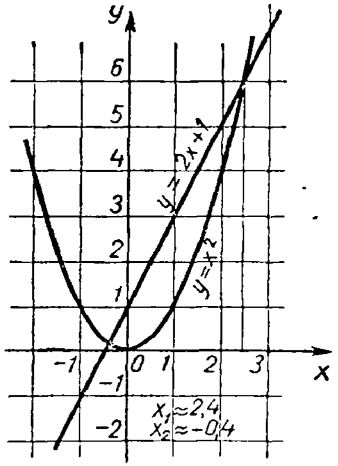


Рис. 7.

Если для описанного графического решения квадратных уравнений использовать заблаговременно заготовленный шаблон графика функции $y=x^2$, то такое решение выполняется достаточно быстро. Оно не требует вычислений. Корни отсчитываются с точностью до $\pm 0{,}2$, если масштаб единица в 1 *см*. Графическое решение выполняется быстрее аналитического решения таких уравнений, коэффициенты которых получены эмпирически и являются дробными числами, например, $x^2-3{,}9x-9{,}8=0$.

До сих пор графический прием применялся к решению приведенных квадратных уравнений. А как решить уравнение, если старший коэффициент не равен единице?

Если предложено уравнение:

$$4x^2-8x+3=0,$$

то его можно заменить равносильным приведенным уравнением:

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0.$$

Таким образом, для графического решения применяется та же парабола.

На примере графического решения квадратного уравнения учащиеся познакомились с таким приемом решения, который можно применить к значительному классу уравнений. Его значение заключается в том, что он может быть использован тогда, когда аналитические способы неизвестны учащимся. При изучении следующей главы учащиеся встретятся с этим приемом в применении к другим видам уравнений, например к уравнениям $x^3-2x+1=0$; $2x^3-2x^2+\frac{1}{2}=0$; $\sqrt{x}=x^2+1$, аналитическое решение которых не изучается в школе.

Человек, решающий достаточно трудную и незнакомую задачу составлением уравнения, может не знать и часто не знает, к какому виду уравнений он придет, однако это не мешает составить уравнение. Решающий никогда не ставит вопрос, какого вида уравнение получится, ибо этот вопрос не имеет значения для решения. Это значит, что сущность вопроса о решении задач составлением уравнений не связана с конкретными видами уравнений, что последние не накладывают никаких условий на мышление решающего.

Следовательно, решение задач составлением квадратных уравнений не содержит ничего принципиально нового по сравнению с решением с помощью уравнений первой степени.

Такое положение и позволило нам неоднократно рекомендовать не откладывать решение задач на конец главы, а упражняться в составлении уравнений по мере продвижения в изучении теоретических вопросов.

Вместе с тем описанная ситуация освобождает от повторения методических рекомендаций, которые сделаны ранее, в главах V, IX, и не утратили значения при рассмотрении квадратных уравнений.

10. Квадратный трехчлен

Требуется особо четко ознакомить учеников с понятием трехчлена второй степени, чтобы они не путали трехчлен с квадратным уравнением. Уместно начать с рассмотрения примеров трехчленов, с выявлением функциональной природы их.

Пусть дан многочлен $2x^2-11x+5$. В этом многочлене старшая степень x — вторая. Многочлен такого вида называют трехчленом второй степени или квадратным трехчленом, x может меняться и принимать различные числовые значения. В зависимости от значения x многочлен принимает различные значения. Составим таблицу:

Таблица 26

x	0	1	2	3	4	5	0,5
$2x^2-11x+5$	5	—4	—9	—10	—7	0	0

При $x=5$ и $x=0,5$ значения трехчлена равны нулю; 5 и 0,5 — корни трехчлена второй степени.

Аналогично рассматриваем еще несколько трехчленов:

а) $x^2+7x+10$; б) $-x^2+7x-12$; в) $-2x^2+5x-20$.

Некоторые учащиеся по аналогии с преобразованием квадратного уравнения пытаются изменить знаки у всех членов трехчлена на противоположные в случае, когда знак старшего члена отрицательный. Эту распространенную ошибку следует предупредить, разъяснив, что, например, $-x^2+5x-6$ и x^2-5x+6 различные трехчлены, что при одном и том же значении x они имеют противоположные значения.

Рассматривая примеры трехчленов, показываем учащимся, как найти их корни, а вместе с тем отмечаем, что не всякий трехчлен имеет корни; например, трехчлен в) корней не имеет в области действительных чисел.

После рассмотрения примеров дается понятие о квадратном трехчлене. Многочлен вида ax^2+bx+c при $a \neq 0$ называется трехчленом второй степени или квадратным трехчленом. Коэффициент старшего члена может быть и положительным и отрицательным числом. Коэффициент среднего члена и свободный член могут быть любыми числами.

Корнями квадратного трехчлена называются те значения x, при которых значения трехчлена равны нулю. Чтобы найти корни трехчлена, если они имеются, следует трехчлен приравнять нулю и решить полученное квадратное уравнение.

С целью подчеркнуть функциональную сущность квадратного трехчлена интересны задачи на определение, при каких значениях x трехчлен достигает наибольшего или наименьшего значения и чему равны эти значения. Такие задачи полезны и с точки зрения политехнического обучения: определение максимума и минимума функции широко применяется в технике и на производстве.

Дан трехчлен второй степени $y=x^2-8x+15$. *При каких значениях* x *трехчлен имеет наименьшее значение?*

Выделим в трехчлене полный квадрат двучлена:

$$y=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+15=(x-4)^2-1.$$

Первое слагаемое полученного выражения принимает положительные значения при любых значениях x, кроме $x=4$. При $x=4$ это слагаемое равно нулю, т. е. имеет наименьшее значение. Второе слагаемое не изменяется. Следовательно, квадратный трехчлен принимает наименьшее значение при $x=4$. Наибольшего значения он не имеет: с увеличением по абсолютной величине x первое слагаемое неограниченно растет.

Дан трехчлен $y=-x^2+10x-24$. *Определить, каково наибольшее значение трехчлена.*

Вновь выделим полный квадрат с переменным x:

$$y=-(x^2-10x+24)=-(x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2-5^2+24)=$$
$$=-(x-5)^2+1.$$

При $x=5$ трехчлен достигает наибольшего значения. Оно равно единице. Наименьшего значения он не имеет.

При изучении следующей главы учащиеся познакомятся с изображением наибольшего или наименьшего значения трехчлена второй степени на графике.

Можно предложить и простейшие задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин.

1) *Имеется строительный материал для изгороди длиной в 400 м. Такой изгородью можно обнести бесконечное множество*

земельных участков в виде прямоугольника. Определить стороны того из них, площадь которого наибольшая.

2) *Сумма катетов прямоугольного треугольника равна* 12 *см. Таких треугольников бесконечное множество. Найти катеты того из них, площадь которого наибольшая.*

3) *В квадрат со стороной* 8 *см вписать квадрат, имеющий наименьшую площадь.*

После указанных упражнений ученики освоятся с квадратным трехчленом, а вместе с тем у них исчезнут всякие попытки произвести неверные операции над ними.

Вопрос о разложении квадратного трехчлена на линейные относительно x множители подготовлен всей системой изложения материала о квадратном уравнении.

Допустим, что x_1 и x_2 — корни трехчлена x^2+px+q. Имеем тождество:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2). \qquad (1)$$

Оно является прямым следствием вывода формулы корней приведенного квадратного уравнения и не нуждается в иных обоснованиях.

Однако из педагогических соображений, чтобы не связывать получение тождества (1) с выводом формул корней, можно дать обычное доказательство, основанное на применении теоремы Виета. Аналогично выводится и другое тождество:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

В связи с повторением и подготовкой к экзаменам разложение квадратного трехчлена на множители полезно применить в тождественных преобразованиях алгебраических дробей, а также в решении уравнений.

Упростить выражения:

а) $\dfrac{12-2a^2}{a^2-9}-\dfrac{4-a^2}{a^2-7a+12}-\dfrac{2a-2}{a+2}$;

б) $\dfrac{2(b^2+6)}{b^2-9}+\dfrac{2(b-4)}{b+2}:\dfrac{b^2-b-12}{4-b^2}$.

Решить уравнения:

а) $\dfrac{x^2+3x-7}{2x^2+5x-3}-\dfrac{x}{3+x}-\dfrac{1}{1-2x}=0$;

б) $\dfrac{x+3}{x-4}-\dfrac{x+4}{3-x}-\dfrac{5x-27}{x^2-7x+12}=0$.

ГЛАВА XVI
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

1. Переменная и постоянная

«Функции и графики» — последняя тема курса алгебры восьмилетней школы. Основные задачи темы таковы: 1) введение понятия о *функции* и серии сопутствующих понятий (возрастание и убывание, четность и нечетность, наибольшее и наименьшее значение и др.); 2) систематический обзор линейной функции с применением дедуктивного метода; 3) изучение функции второй степени и некоторых других функций, предусмотренных программой; 4) применение графиков функций для решения уравнений и систем уравнений с двумя неизвестными; 5) использование таблиц и счетной линейки для вычисления кубов чисел, корней третьей степени из чисел и других расчетов; 6) приложение функций и графиков их в решении практических задач.

При изложении темы имеет значение аналитико-графический метод: в одних случаях свойства функций усматриваются из уравнений, которыми они заданы; в других случаях выяснению свойств помогают графики функций; в третьих аналитический и графический методы применяются совместно и дополняют друг друга.

При построении графиков функций учащиеся встречаются с некоторыми «переводами» фигур на координатной плоскости: переносом параллельно оси ординат, переносом параллельно оси абсцисс, растяжением и сжатием вдоль оси ординат и др.

Содержание темы имеет воспитательное значение: величины мыслятся не неизменными, а находящимися в разнообразных изменениях, в движении; они мыслятся не изолированными друг от друга, а взаимосвязанными, зависящими друг от друга. Воспитательное значение темы возрастает, если привлекается достаточно богатый фактический материал, показывающий взаимную связь и обусловленность величин, их взаимную изменяемость.

Понятия о *переменной* и *постоянной* вводят путем абстракции от реальных движений материи, ее изменяемости. Учащиеся уже знают, что мир материален, что материя находится в движении, что формы движения разнообразны.

Различные науки — астрономия, механика, физика, химия и др.— изучают различные формы движения материи.

В математике изучают те стороны изменений действительности, которые связаны с формой, взаимным расположением тел, количественными характеристиками этих изменений. В математике уделяют большое внимание методам и приемам изучения движений.

Учитель демонстрирует модель: треугольник ABC образован натянутым резиновым шнуром. Прямая BK параллельна AC. Вершина B движется по прямой BK в направлении, указанном стрелкой (рис. 8). Какие величины в процессе этого движения не изменяются? Какие величины изменяются? Как изменяются?

На той же модели демонстрируется равнобедренный треугольник ACD. DE — его высота, DF — продолжение высоты. Вершина D движется по DF в направлении, указанном стрелкой.

Какие величины при этом движении изменяются? Как изменяются? Какие величины постоянны?

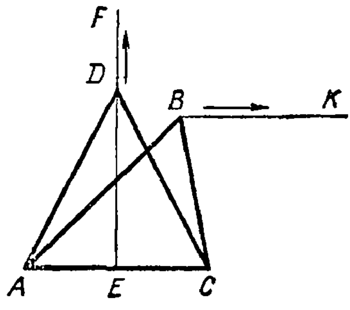


Рис. 8.

В природе, в производстве, на транспорте люди имеют дело с очень многими переменными величинами. Учащиеся приводят примеры таких величин: продолжительность дня и ночи — величины переменные, скорость движения поезда тоже переменная. Встречаются величины постоянные: продолжительность суток, продолжительность года.

Итак, величина называется переменной, если она в условиях рассматриваемого вопроса может получать различные численные значения; величина называется постоянной, если она в условиях рассматриваемого вопроса не меняет численного значения. Вместо терминов «постоянная величина», «переменная величина» употребляются соответственно термины «постоянная», «переменная».

В первом случае преобразования треугольника на модели высота и площадь треугольника постоянные, а во втором случае они переменные. В обоих преобразованиях основание треугольника — постоянная величина. Однако в других случаях и основание может изменяться. Другими словами, понятия «постоянная» и «переменная» относительны. Длина деревянного метра в торговом деле считается постоянной, хотя она изменяется от температуры. При геодезических работах, проводимых с высокой степенью точности, учитывают, что длина метра изменяется от температуры, и вводят поправку на температуру в результаты измерения.

Переменные величины изменяются весьма разнообразно.

Скорость свободно падающего тела все время возрастает, увеличивается: всякое последующее ее значение больше предыдущего. Это — пример возрастающей переменной. Возраст человека — возрастающая переменная.

Переменная называется возрастающей, если всякое последующее ее значение больше предыдущего.

Переменная называется убывающей, если всякое последующее значение меньше предыдущего. Например, скорость тела, брошенного вертикально вверх, уменьшается, убывает.

Если переменная x, начиная, например, со значения, равного 5, возрастает и может принимать как угодно большие численные значения, то говорят: «x изменяется от 5 до плюс бесконечности» и записывают: «x изменяется от 5 до $+\infty$». Если переменная x принимает как угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения и возрастает, например, до 0, то говорят: «x изменяется от минус бесконечности до нуля» и записывают: «x изменяется от $-\infty$ до 0».

2. Функция

В природе, производстве изменение величин зависит от изменения других величин. Например, при атмосферном давлении в 760 *мм* температура кипения воды 100° С; если давление уменьшается, температура кипения понижается; если давление увеличивается, температура кипения повышается. Каждому значению давления соответствует вполне определенная температура кипения воды. Другой пример: длина пути свободно падающего тела определяется по формуле $s=0{,}5\,gt^2$, где s — длина пути, g — ускорение силы тяжести, t — время. Каждому значению t соответствует определенное значение s. Учащиеся приводят примеры величин, зависимых от других величин, из физики, геометрии, из обыденной жизни. Рассмотрим подробно два примера.

1) *Теплоход идет со скоростью 20 км/ч. Какой путь он пройдет за t часов?*

Обозначив длину пути в километрах s, получим: $s=20\,t$. Время движения теплохода и длина пройденного им пути — переменные величины. Скорость 20 *км/ч* в нашей задаче — постоянная величина. По смыслу задачи t принимает неотрицательные значения. Каждому допустимому значению t соответствует определенное значение s. Говорят, что между t и s имеется функциональная зависимость, при этом t называют независимой переменной или аргументом, а s — зависимой переменной или функцией.

2) *Найти площадь квадрата, если сторона его равна x сантиметрам.*

Обозначив площадь квадрата y, получим: $y=x^2$. Допустимые значения x — множество известных учащимся положительных чисел. Каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y. Независимой переменной, или аргументом, служит x, а зависимой переменной, или функцией, является y.

Опираясь на приведенные и аналогичные им примеры, дают определение функции одного переменного: если каждому допустимому значению одной переменной по некоторому правилу соответствует определенное значение другой переменной, то первая из них называется аргументом (независимой переменной), а вторая — функцией (зависимой переменной) от этого аргумента[1].

Учитель сообщает учащимся, что функция является одним из важнейших понятий современной математики. С помощью этого понятия очень часто выражают законы природы. Функция — мощное средство не только выражения законов природы, но и изучения этих законов. Функциональные зависимости широко используют во многих науках, а также в производстве.

Впервые определение функции, близкое современным определениям, было дано в 1834 г. великим русским математиком Н. И. Лобачевским. Несколько позднее (в 1837 г.) аналогичное определение было сформулировано талантливым немецким математиком Дирихле.

Чтобы учащиеся освоились с понятием функции, рассматриваем еще примеры: $y=x$; $y=\frac{1}{x-1}$; $y=\sqrt{x}$.

Обращаем внимание учащихся на то, что если функция не связана с каким-либо конкретным вопросом, то выбранная область допустимых значений аргумента определяется характером правила, закона, каким задана функция. Если функция связана с рассмотрением конкретной задачи, то область допустимых значений аргумента определяется сущностью этой задачи. Например, формула $N=5n+3$, выражающая все целые положительные числа, которые при делении на 5 дают остаток 3, есть функция натурального аргумента n.

3. Способы задания функции

Современное содержание понятия о функции совпадает с понятием соответствия между элементами одного и элементами другого множеств: каждому элементу первого из них (значению аргумента) по определенному правилу соответствует один определенный элемент второго множества (значение функции).

В зависимости от того, какими средствами устанавливается соответствие между значениями аргумента и значениями функции, т. е. в зависимости от того, как выражено правило соответствия, различают способы задания функции. Эти способы разнообразны.

1) Очень часто соответствие между значениями аргумента и значениями функции задают алгебраическим или иным математическим выражением. Примеры этого способа уже встречались ранее: $y=2x+1$; $y=x^2$; $y=\sin x$. В каждом из примеров указывают, какие операции в определенном порядке надо выпол-

---

[1] Функция — от лат. *functio* — «деятельность, отправление, основное значение, выполнение». Термин введен немецким ученым Г. Лейбницем в 1692 г.

нить над значением x, чтобы получить соответствующее значение y. Такой способ задания функциональной зависимости называют аналитическим.

В преподавании математики в школе аналитический способ задания функции имеет важное значение.

Функция может быть задана не только одним аналитическим выражением, а и несколькими выражениями; например, если $x \geqslant 0$, то $y = x+2$; если $x < 0$, то $y = 0,5x$. Записывают так:

$$y = \begin{cases} x+2 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0,5x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В этом примере функция задана двумя алгебраическими выражениями.

2) Соответствие между значениями аргумента и значениями функции часто задается таблицей. Учащиеся знают много таблиц, употребляемых для упрощения вычислений. Таблица — правило, по которому можно указать для одного числа x другое число y.

Табличную запись функциональной зависимости применяют и тогда, когда аналитическое выражение этой зависимости неизвестно, когда соответствие между значениями аргумента и функции получают из наблюдений, опытов, когда имеют дело с эмпирическими функциональными зависимостями. Например, таким образом часто фиксируют соответствие между временем и температурой, выпуском продукции фабрикой или заводом поденно и помесячно.

3) Правило соответствия между значениями x и значениями y может быть выражено графически, при этом применяется та или иная система координат.

Так поступают для фиксации эмпирических функций; например, в больнице вычерчивают график изменения температуры больного с изменением времени. На метеорологических станциях применяют самопишущие приборы, фиксирующие графическим путем изменение атмосферного давления. В этих примерах функции заданы графически.

Часто графики применяют для того, чтобы избежать однотипных вычислений. Представим себе, что при решении каких-либо вопросов приходится многократно переводить английские дюймы в сантиметры, причем не требуется получать высокую точность результатов. Английский дюйм приближенно равен 2,54 *см*. Функциональную зависимость можно выразить аналитическим путем так: $y = 2,54x$, где x принимает значения длин отрезков в дюймах, а y — длин отрезков в сантиметрах. На миллиметровой бумаге строят график уравнения. Он дает возможность, не производя вычислений, по заданному числу дюймов найти приближенно соответствующее число сантиметров, а также решать и обратную задачу. В этом примере график — другое представление аналитически заданной функциональной зависимости, замена данной функции равносильной.

Графическое изображение функциональной зависимости используют и для того, чтобы наглядно показать изменение функции в зависимости от изменения аргумента.

4) Закон соответствия между аргументом и функцией можно описать или разъяснить устно. Представим, что радиус окружности неизвестен; допустимые значения хорды — любой отрезок, который не больше диаметра. Всякому допустимому значению хорды соответствует одно определенное расстояние этой хорды от центра. Расстояние хорды от центра — функция длины хорды.

5) В геометрии правило соответствия часто задается определенным для каждого случая геометрическим построением. Например, в плоскости для данного отрезка AB и данной оси l строят отрезок A_1B_1, симметричный AB относительно этой оси. В таком «переводе» одного отрезка в другой каждой точке отрезка AB ставится в соответствие по известному построению определенная точка отрезка A_1B_1. Точки отрезка AB можно рассматривать как значения аргумента, а соответствующие точки отрезка A_1B_1 — как значения функции.

«Переводы» в плоскости одной фигуры в другую путем симметрии относительно точки, параллельного переноса, поворота вокруг заданной точки — примеры соответствий, устанавливаемых определенным для каждого случая построением.

6) Правило соответствия может быть неизвестным, хотя само соответствие и существует. Например, солнечные явления (пятна, протуберанцы и др.) оказывают влияние на метеорологические явления на Земле, однако соответствие между явлениями на Солнце и метеорологическими явлениями на Земле в настоящее время еще не изучено. Изучение природы и общества и состоит в открытии и установлении законов соответствий между различными явлениями, зависимости между величинами действительного мира.

В дальнейшем будем иметь дело с аналитическим, табличным и графическим выражением функциональной зависимости.

4. Линейная функция

В VII классе учащиеся уже познакомились с графиками зависимостей[1] $y=kx$, $y=kx+b$. В VII классе изучение линейной функции является обзорным повторением, систематизирующим и углубляющим знания учащихся. Что нового вносится в это изучение? Усиливается применение дедукции и ослабляется роль неполной индукции, используется общее обозначение функции первой степени с одной переменной.

[1] В этой главе использованы те обозначения коэффициентов, какие приняты в учебнике алгебры.

Чтобы опереться на ранее изученное, целесообразно рассмотреть примеры: $y=2x+7$, $y=3x$. Естественная область допустимых значений x — множество рациональных чисел. Каждому значению x соответствует определенное значение y. В обоих случаях имеем функции аргумента x. Они являются частными случаями функции первой степени с одним переменным.

Общий вид этой функции записывается так:

$$y=kx+b, \qquad (1)$$

где k и b — любые числа из известного учащимся множества чисел, причем $k \neq 0$.

Если $b=0$, то

$$y=kx. \qquad (2)$$

В VII классе опытным путем учащиеся многократно убеждались, что функции $y=kx$ (например, $y=2x$) соответствует прямая, проходящая через начало координат. Учащиеся прочно усвоили этот факт, им кажется ненужным доказательство теоремы: графиком функции $y=kx$ является прямая, проходящая через начало координат. Как и в других аналогичных случаях, надо заронить сомнения в верности теоремы, надо ясное сделать неясным. Полезно вспомнить, что в VII классе рассматриваемое предложение устанавливалось опытным путем для некоторых частных случаев: $y=2x$, $y=0{,}5x$. А будет ли теорема верна для любого k, отличного от нуля? В VII классе подмечено, что координаты любой точки прямой, соответствующей, например, функции $y=2x$, удовлетворяют уравнению. А нет ли точек, не принадлежащих этой прямой, координаты которых тоже удовлетворяют уравнению $y=2x$?

Чтобы дать ответы на такие вопросы, докажем теорему: графиком финкции $y=kx$ является прямая, проходящая через начало координат.

Если в уравнении $y=kx$ положить $x=0$, то $y=0$. Значит, график функции (2) проходит через начало координат.

Если $x=1$, то $y=k$. Значит, график проходит через точку $A(1,\ k)$.

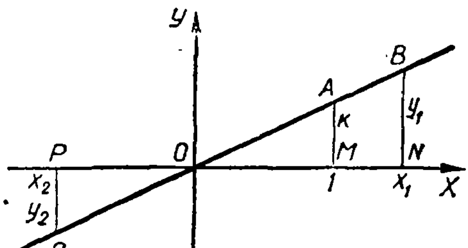


Рис. 9.

Рассмотрим случай, когда $k > 0$. Тогда точка A лежит в первой четверти. Построим эту точку (на рисунке 9 $k=0{,}5$).

Проведем через точки O и A прямую и докажем, что прямая OA график функции (2).

Надо доказать, что: 1) координаты любой точки прямой OA удовлетворяют уравнению (2), 2) координаты никакой другой точки плоскости не удовлетворяют уравнению (2).

1) Пусть $B(x_1, y_1)$ — произвольная точка прямой OA, принадлежащая первой четверти. Координаты ее x_1 и y_1 — положительные числа.

Так как $\triangle OAM$ и $\triangle OBN$ прямоугольные и с общим острым углом, то они подобны. Из подобия следует:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{k}{1}, \text{ или } y_1=kx_1.$$

Координаты точки B удовлетворяют уравнению (2).

Пусть $C(x_2, y_2)$ — произвольная точка прямой OA, принадлежащая третьей четверти. Координаты ее x_2, y_2 — отрицательные числа.

Из подобия $\triangle OAM$ и $\triangle OCP$ имеем:

$$\frac{|y_2|}{|x_2|}=\frac{k}{1}.$$

Так как

$$\frac{|y_2|}{|x_2|}=\frac{y_2}{x_2},$$

то

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{k}{1}, \text{ или } y_2=kx_2.$$

Координаты точки C удовлетворяют уравнению (2).

Таким образом, координаты любой точки прямой OA удовлетворяют уравнению (2).

2) Если точка $L(x', y')$ не принадлежит прямой OA, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (2).

Пусть точка L лежит выше прямой OA (рис. 10), $LK \perp Ox$ и пересекает OA в точке E. Так как точка E лежит на прямой OA, по доказанному ее координаты x' и y_3 удовлетворяют уравнению (2):

$$y_3=kx'.$$

Так как $y' > y_3$, то $y' > kx'$, т. е. координаты точки L не удовлетворяют уравнению (2).

Аналогично доказывается, что координаты любой точки, лежащей ниже OA, не удовлетворяют уравнению (2).

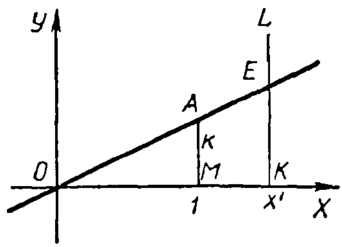


Рис. 10.

Далее рассматриваем случай, когда $k<0$. График находится во второй и четвертой четвертях. Доказательство аналогично изложенному; приходится учитывать знаки координат точек включаемых в доказательство.

Покажем, что график функции $y=kx+b$ — также прямая линия.

Рассмотрим функции $y=kx+b$ (1) и $y=kx$ (2). Пусть $b>0$. Дадим аргументу той и другой функции значение x_1. Тогда значение функции (1) окажется на b больше значения функции (2). Такое соотношение между значениями функций имеет место для любого значения x. Геометрически это означает, что ординаты точек графика функции (1) больше соответствующих ординат точек графика функции (2) на один и тот же отрезок b, т. е. график функции (1) получается путем переноса параллельно оси ординат кверху графика функции (2) на b единиц. Значит, график функции (1) — прямая.

Если $b<0$, то аналогичным рассуждением покажем, что график функции (1) получается из графика функции (2) путем переноса последнего параллельно оси ординат на длину отрезка b книзу. И в этом случае график уравнения (1) — прямая.

Попутно выясняем геометрический смысл коэффициента b и называем его *начальной ординатой*.

Путем построения графиков функций на одном чертеже: $y=0{,}5x+2$; $y=x+2$; $y=2x+2$; $y=-2x+2$ выясняем геометрический смысл коэффициента k и сообщаем его название — *угловой коэффициент*.

Уравнение $ax+by=c$, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, сводится к уравнению $y=kx+b$. Значит, график его — прямая.

Полезно предложить учащимся графически решить системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Перед учащимися в порядке повторения вновь пройдут системы определенные, противоречивые и неопределенные.

Крайне желательно уделить внимание отысканию уравнений прямых, заданных теми или иными геометрическими свойствами. Приведем простейшие из них, доступные восьмиклассникам.

Найти уравнение прямой: а) проходящей через начало координат и имеющей угловым коэффициентом число 0,5; б) отсекающей на осях координат соответственно отрезки в 5 и 4 единицы; в) проходящей через две данные точки $M(1;\ 1)$ и $N(2;\ 3)$; г) имеющей начальную ординату, равную 1,5, и угловой коэффициент, равный 2; д) проходящей через точку M (5; 2) параллельно оси абсцисс; е) проходящей через точку N (—2; 5) параллельно оси ординат.

Решить с помощью систем уравнений задачи:

1) *Горизонтальная балка длиной 5 м свободно лежит своими концами на двух опорах. Определить давление на каждую из опор, если груз в 0,4 Т помещен на расстоянии 1 м от одной из опор. Вес балки в расчет не включать.*

2) Горизонтальная балка длиной а метров свободно лежит своими концами на двух опорах. Опоры испытывают давление: одна в 0,25 Т, а другая в 0,35 Т. Определить, на каком расстоянии от концов балки помещен груз. Вес балки не учитывать.

3) Вал компрессора, вырабатывающего сжатый воздух для цеха завода, имеет длину 84 см. На вал насажен шкив весом 0,4 Т. Определить, на каком расстоянии от каждого подшипника расположен шкив, если давление на один из них на 0,2 Т больше, чем давление на другой. Вес вала в расчет не принимать.

4) Вал компрессора имеет длину, равную 150 см. Он несет два шкива весом 0,3 Т и 0,5 Т. Меньший шкив расположен от одного из подшипников на расстоянии 40 см. Определить, на каком расстоянии от подшипников расположить второй шкив, чтобы давление на каждый подшипник было одно и то же. Вес вала в расчет не включать.

5. Функция $y=ax^2+bx+c$

А. При изучении функции второй степени школьники приобретают навыки: определять координаты вершины параболы по аналитическому выражению зависимости, находить положение вершины и оси на координатной плоскости, строить соответствующую параболу. Эти навыки позволят использовать параболу при графическом решении уравнений и систем уравнений. Кроме того, по аналитическому выражению функциональной зависимости школьники читают некоторые свойства функции: промежутки, когда функция положительна или отрицательна, промежутки возрастания или убывания значения аргумента, при которых функция имеет наибольшие или наименьшие значения.

Если первые параболы вычерчивают по точкам, то в дальнейшем полезно прибегать к индивидуальным самодельным шаблонам: полезно изготовить шаблоны для следующих парабол: $y=x^2$; $y=2x^2$; $y=0{,}5x^2$. Применение шаблонов вносит наглядность в перенос параболы параллельно осям координат, в построение параболы, симметричной данной относительно оси абсцисс, активизирует учебную деятельность учащихся, позволяет быстро вычерчивать графики и высвобождает учебное время.

Функция $y=x^2$ играет особую роль при изучении других функций второй степени: она служит своеобразным эталоном, с которым сопоставляют другие функции. Учащимся поручается в порядке домашней работы повторить то, что они изучали об этой зависимости и ее графике.

На примере функции $y=x^2$ целесообразно ввести понятия о возрастании и убывании функций. Нет надобности откладывать этот вопрос на конец изучения функций второй степени, как это сделано в стабильном учебнике: этими понятиями учащиеся могут неоднократно пользоваться при изучении последующих зависимостей.

Естественно начать с графических представлений. Рассматривая график, легко усмотреть, что при положительных значениях x большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. если $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$. Говорят, что функция при $x > 0$ возрастает.

При $x < 0$ большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. если $x_1 < x_2$, то $y_1 > y_2$. Говорят, что при $x < 0$ функция убывает.

Вводятся определения возрастающей и убывающей функций, приведенные в учебнике алгебры.

Предлагается выяснить, какие из следующих функций возрастают, какие убывают:

$$y=-x;\quad y=3x;\quad y=2x-3;\quad y=-x+2;\quad y=|x|.$$

Полезно ввести понятия о четной и нечетной функциях.

Функция называется четной, если ее значения, взятые для противоположных значений x, равны; например, функция $y=x^2$ — четная: $x^2=(-x)^2$. Геометрическим выражением четности функции является симметрия ее графика относительно оси ординат.

Функция называется нечетной, если ее значения, взятые для противоположных значений x, противоположны; например, функция $y=kx$ — нечетная: $kx=-k(-x)$. Геометрическим выражением нечетности функции является симметрия ее графика относительно начала координат.

Предлагается выяснить, какие из функций четные, какие нечетные, какие нельзя отнести ни к тем, ни к другим:

$$y=\frac{1}{2}x;\quad y=3x^2;\quad y=4x+1;\quad y=\frac{1}{x}.$$

Б. Уместно показать, что потребности практики вызывали и вызывают интерес к функции $y=ax^2$.

1) Летящий самолет испытывает сопротивление воздуха. Если при той же высоте полета скорость самолета увеличится в 2 раза, то сопротивление воздуха возрастет в 4 раза; если скорость увеличится в 3 раза, то сопротивление возрастет в 9 раз, и т. д. Говорят, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости самолета.

Погруженная в воду движущаяся подводная лодка испытывает сопротивление воды. И в этом случае при постоянной глубине сопротивление пропорционально квадрату скорости подводной лодки.

Вообще сопротивление, оказываемое средой движению тела, пропорционально квадрату скорости этого тела. На языке алгебраических символов эту мысль выражают так:

$$f=av^2,$$

где f — сопротивление среды движению, v — скорость, a — коэффициент пропорциональности. Сопротивление f есть функция скорости движения тела.

2) Длина пути, проходимого телом при равномерно ускоренном или равномерно замедленном движении, выражается формулой: $s=0,5ct^2$, где s — длина пути, t — время, c — ускорение. Длина пути — функция времени t.

Функции такого вида, как в рассмотренных случаях, встречаются в различных областях науки и техники. Отвлекаясь от конкретного содержания примеров, можно записать $y=ax^2$. Это один из простейших частных случаев функции второй степени. Область определения — множество известных учащимся чисел. Коэффициент a — любое число, кроме нуля. Если $a=1$, то $y=x^2$. Это — простейший случай функции второй степени, который уже изучен ранее.

Предстоит познакомиться с влиянием коэффициента на поведение функции $y=ax^2$. Рассмотреть случаи: а) $a>1$; б) $0<a<1$; в) $a<0$.

Сравним функции $y=x^2$ и $y=2x^2$. Дадим x одно и то же значение. Значение второй функции в 2 раза больше значения первой. Это имеет место для каждого значения аргумента, кроме $x=0$. Ординаты точек графика второй функции в 2 раза больше соответствующих ординат графика первой функции. Можно сказать, что график второй функции получается растяжением в 2 раза ординат графика первой функции. По графику функции $y=x^2$ легко построить график функции $y=2x^2$.

Рассматривая функции $y=x^2$ и $y=0,5x^2$, аналогично выясняем, что график второй функции получается из графика первой путем сжатия ординат в 2 раза.

Сопоставляя функции $y=x^2$ и $y=-x^2$, устанавливаем, что при одном и том же значении аргумента, кроме нуля, значение второй функции противоположно значению первой. И в этом случае можно из графика первой функции получить график второй: графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс. Получение графика функции $y=-x^2$ демонстрируем с помощью шаблона параболы $y=x^2$.

Чтобы построить график функции $y=-3x^2$, следует выполнить растяжение ординат графика функций $y=x^2$ в 3 раза, а затем построить график, симметричный относительно оси x полученной параболе.

Учащиеся изготовляют шаблоны для вычерчивания парабол $y=2x^2$, $y=0,5x^2$.

Выше было отмечено, что с параболой можно встретиться во многих областях знания. Приведем еще примеры.

Если выпустить из орудия снаряд под углом к поверхности земли, то снаряд опишет траекторию, близкую к параболе.

Парабола применяется в строительном деле.

В межпланетном пространстве многие кометы движутся по параболам (вблизи Солнца).

Учащиеся упражняются в определении промежутков, в которых функция положительна или отрицательна, в каких промежутках она возрастает или убывает.

В. При изучении функции $y=ax^2+c$ учащиеся по уравнению указывают некоторые свойства ее.

Рассматривая, например, функцию $y=x^2+3$ в эвристической беседе, школьники ответят на следующие вопросы:

1) *Какова область допустимых значений аргумента, или область определения функции?*

2) *Какой знак имеет функция?*

3) *Выяснить промежутки возрастания и убывания функции.*

4) *Показать, что функция четная. Какая прямая является осью симметрии графика?*

5) *Чему равно наименьшее значение функции?*

Сравним графики функций $y=x^2$ и $y=x^2+3$. Для любого значения x значение второй функции на 3 единицы больше соответствующего значения первой. График второй функции есть также парабола, полученная переносом графика первой функции кверху параллельно оси ординат на 3 единицы. Перенос демонстрируется с помощью соответствующего шаблона.

Аналогично изучаем функцию $y=x^2-2$. Самостоятельно учащиеся ответят на те же вопросы, какие предложены при изучении предыдущей функции. Вопросы выписываются на классной доске до начала урока.

Г. Рассматриваем следующий частный случай функции второй степени: $y=(x+m)^2$.

Примеры:

$$y=x^2+6x+9=(x+3)^2; \tag{в}$$

$$y=x^2-4x+4=(x-2)^2. \tag{г}$$

Построив по точкам графики, сравнивают их с графиком функции $y=x^2$. Устанавливают, что графики функции (в) и (г) — параболы, полученные переносом параллельно оси абсцисс в случае (в) влево на 3 единицы, в случае (г) вправо на 2 единицы графика функции $y=x^2$. Оси параллельны оси ординат и отстоят от нее соответственно на —3 и 2 единицы; вершины лежат в точках (—3; 0), (2; 0). Функции не являются четными.

Таким образом, график функции $y=(x+m)^2$ можно получить из графика функции $y=x^2$, перенося последний параллельно оси абсцисс на m единиц, причем при $m>0$ перенос выполняется влево, при $m<0$ — вправо от начала координат. Упражнения помогут закрепить вывод. Среди упражнений найдут место и такие: $y=-(x+2)^2$; $y=-(x-5)^2$; $y=2(x-1)^2$.

Д. Далее рассматриваем функцию $y=x^2+px+q$, например: $y=x^2+4x+7$. Выделим полный квадрат линейного относительно x двучлена: $y=(x+2)^2+3$. Сравним эту функцию с функцией $y=(x+2)^2$.

При любых значениях аргумента значения первой функции на 3 единицы больше соответствующих значений второй: график первой получается из графика второй функции путем переноса последнего на 3 единицы кверху параллельно оси ординат. Имеем параболу с вершиной в точке (—2; 3); ось симметрии параболы параллельна оси ординат и отстоит от нее на 2 единицы.

После решения двух-трех примеров, на которых выясняются пути построения графика, целесообразно перейти к упрощенному построению графиков: путем выделения квадрата двучлена находят координаты вершины параболы, строят вершину и ось и по соответствующему шаблону наносят параболу.

Полезно выделить квадрат линейного двучлена в общем виде

$$y=x^2+px+q, \quad y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(-\frac{p^2}{4}+q\right)$$

и найти координаты вершины параболы:

$$\left(-\frac{p}{2};\ -\frac{p^2}{4}+q\right).$$

Однако при решении примеров выражениями координат вершины пользоваться не рекомендуется: такое решение было бы ставкой на память, а нужно заботиться о развитии мышления.

Е. Требуется построить график функции

$$y=2x^2+4x+1.$$

Выделяя квадрат двучлена, получим:

$$y=2(x+1)^2-1.$$

Сравним рассматриваемую функцию с функцией $y=2(x+1)^2$, график которой умеем строить: вершина параболы в точке (—1; 0), ось параллельна оси ординат. График исследуемой функции получается путем переноса графика вспомогательной параллельно оси ординат на единицу книзу. Вершина параболы лежит в точке (—1; —1), ось параллельна оси ординат, парабола направлена вверх. Параболу вычерчиваем по шаблону.

Аналогично строим график функции

$$y=-2x^2+4x-1,$$

которую приводим к виду:

$$y=-2(x-1)^2+1.$$

Вершина параболы лежит в точке (1; 1), ось параллельна оси ординат, парабола направлена вниз. Вычерчиваем по шаблону.

Полезно выделить квадрат двучлена для функции

$$y=ax^2+bx+c$$

и найти координаты вершины:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}; \quad \left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

Находить таким путем координаты вершины при решении примеров не рекомендуем по тем же мотивам, которые указаны ранее.

Полезно решить задачи:

1) *Найти наименьшее значение функции*

$$y=x^2-5x+6.$$

2) *Из множества прямоугольников данного периметра* $2p$ *определить тот, который имеет наибольшую площадь.*

3) *Равнобедренный треугольник из жести имеет основание* 10 *дм и высоту* 8 *дм. Требуется из этого треугольника вырезать прямоугольник с наибольшей площадью. Определить основание и высоту прямоугольника.* (Чтобы избежать исследования, допустим, что две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника.)

4) *Металлический конус имеет высоту* 10 *см и диаметр основания* 12 *см. Требуется выточить из него цилиндр с наибольшей боковой поверхностью. Определить диаметр основания цилиндра.*

6. Функция $y=x^3$

Программа алгебры предусматривает изучение функции $y=x^3$ и построение ее графика.

В подготовленном классе функцию изучают при значительной активности учащихся, с использованием самостоятельной работы.

В краткой вводной беседе педагог ставит задачу по изучению функции. Ученикам предлагается ответить с соответствующими обоснованиями и пояснениями на вопросы, записанные до начала урока на классной доске:

1) *Какова область определения функции?*

2) *Выяснить, проходит ли график функции через начало координат.*

3) *Какой знак имеет функция, если* $x>0$? *если* $x<0$?

4) *В каких четвертях расположен график функции?*

5) *Выяснить, является ли функция четной или нечетной, или ни той ни другой.*

6) *Как расположен график функции относительно начала координат?*

7) *Выяснить характер изменения функции (возрастание, убывание).*

Если учитель найдет, что самостоятельная работа трудна, то первое знакомство учащихся с функцией полезно провести в форме беседы по тем же вопросам.

Построение графика функции ученики выполняют самостоятельно. Педагог лишь укажет, какие значения целесообразно дать аргументу:

Таблица 27

x	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{4}$	± 1	$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2	± 3
y								

Полученная кривая называется кубической параболой (рис. 11). Можно показать учащимся применение кубической параболы для приближенного нахождения кубов чисел.

Программа предусматривает графическое решение уравнений. В частности, график функции $y=x^3$ можно использовать для графического решения уравнения третьей степени.

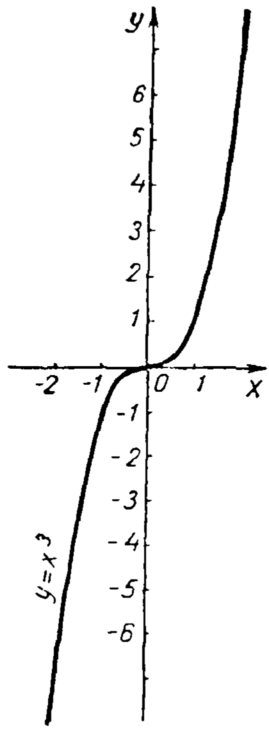


Рис. 11.

Уравнение

$$x^3-3x-2=0$$

— пример уравнения третьей степени с одним неизвестным. Требуется решить его.

Применим тот же прием, какой использовался при графическом решении квадратного уравнения. Перенесем второй и третий члены в правую часть уравнения:

$$x^3=3x+2.$$

Функции правой и левой частей обозначим y:

$$y=x^3,\ y=3x+2.$$

Обе функции известны. На одном чертеже в одном и том же масштабе строим графики функций (рис. 12).

Те значения x, при которых обе рассматриваемые функции принимают равные значения, являются корнями решаемого уравнения. Иначе: абсциссы точек пересечения или касания графиков являются корнями уравнения.

Находим их:

$$x_1\approx 2,\ x_2=x_3\approx -1.$$

Полезно из плотной бумаги или картона сделать шаблон для быстрого вычерчивания кубической параболы.

Применяя тот же график кубической параболы, учащиеся решают уравнения: $x^3-x+2=0$; $x^3+x-2=0$.

При решении уравнения $2x^3 - 2x + 3 = 0$ его можно заменить равносильным данному приведенным уравнением $x^3 - x + 1{,}5 = 0$ и применить тот же прием.

Графически можно решить любое кубическое уравнение, при этом приходится пользоваться кубической и обыкновенной параболами. Пусть требуется, например, решить уравнение $2x^3 - 4x^2 - 5 = 0$.

Можно поступить так:

$$x^3 = 2x^2 + 2{,}5, \quad y = x^3, \quad y = 2x^2 + 2{,}5.$$

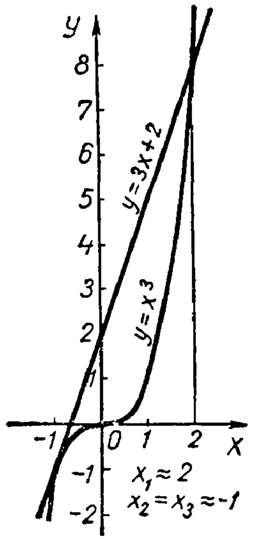


Рис. 12.

7. Функция $y = \sqrt[3]{x}$.

Введение понятия о кубическом корне подготовлено отчасти теми предварительными упражнениями, которые проводились в связи с разложением на множители по формулам умножения, отчасти понятием квадратного корня. Ограничимся только несколькими замечаниями.

Определение целесообразно дать в такой формулировке: извлечь кубический корень из числа — значит найти такое число, куб которого дает подкоренное число. Такая формулировка хорошо вскрывает суть понятия и направляет мысль ученика при отыскании корней по соображению.

По аналогии с квадратным корнем некоторые учащиеся склонны допустить, что подкоренное число корня третьей степени не должно быть меньше нуля. Эту ложную аналогию следует опровергнуть рассмотрением примеров:

$$\sqrt[3]{-8}, \quad \sqrt[3]{-0{,}001}, \quad \sqrt[3]{-a^6}.$$

Извлечение кубического корня по таблицам и с помощью счетной линейки полезно применить к решению стереометрических задач, связанных с объемом тел. Приведем примеры задач:

1) *Вычислить ребро куба, если его объем равен* 475 *куб. см.*

2) *Определить сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, если объем ее равен* 228 *куб. см и высота больше стороны основания в* 2 *раза.*

3) *Высота конуса в* 3 *раза больше диаметра основания. Определить диаметр основания, если объем конуса равен* 62,3 *куб. см.*

4) *Объем шара равен* 9,42 *куб. дм. Вычислить радиус шара.*

Функция $y = \sqrt[3]{x}$ (1) изучается примерно по тому же плану, что и функция $y = x^3$.

Для самостоятельной работы по аналитическому ознакомлению с функцией предлагаем те же семь вопросов, которые указаны в предыдущем параграфе.

Если педагог найдет нецелесообразным проводить самостоятельную работу, то заменит ее беседой с рассмотрением тех же вопросов.

Для построения графика можно давать аргументу такие значения, из которых корень извлекается точно по соображению или по таблицам. Можно использовать и счетную линейку. Значения аргумента указывает преподаватель. Остальную работу, включая и построение графика, учащиеся выполняют самостоятельно.

Таблица 28

x	0	$\pm 0{,}027$	$\pm 0{,}125$	$\pm 0{,}343$	$\pm 0{,}729$	± 1	$\pm 1{,}728$	$\pm 2{,}744$	$\pm 4{,}096$	± 8
y										

График (рис. 13) используется, чтобы наглядно показать свойства функции (1), подмеченные ранее. Учащиеся усматривают, что график функции (1) имеет сходство с графиком функции $y=x^3$. Действительно, вновь получена кубическая парабола, но расположена

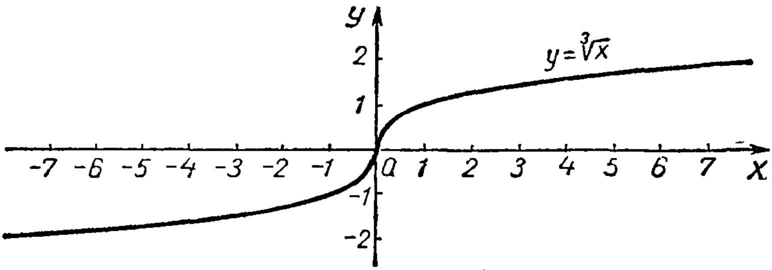


Рис 13.

она относительно осей координат иначе. Полученный график симметричен графику функции $y=x^3$ относительно биссектрисы координатных углов первой и третьей четвертей. В этом легко убедиться, если вычертить оба графика на одном чертеже и перегнуть чертеж по указанной биссектрисе.

Если график построить тщательно на миллиметровой бумаге в масштабе 1 *дм* единица, то его можно использовать для приближенного извлечения корней третьей степени.

Например:

$$\sqrt[3]{0{,}3} \approx 0{,}67; \quad \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{0{,}5 \cdot 1000} = 10 \cdot \sqrt[3]{0{,}5} \approx 10 \cdot 0{,}79 =$$

$$= 7{,}9; \quad \sqrt[3]{0{,}17} + \sqrt[3]{1{,}32} \approx 0{,}55 + 1{,}10 = 1{,}65.$$

График функции (1) можно применить и к решению некоторых уравнений. Пусть, например, требуется решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}=x^2-2.$$

Обозначив левую и правую части уравнения y, получим:

$$y=\sqrt[3]{x}, \quad y=x^2-2.$$

Графики можно вычертить по шаблонам. Дальнейшее решение не встретит затруднений.

Таким же образом можно решить уравнения:

$$x-2=\sqrt[3]{x}; \ (x-2)^2=\sqrt[3]{x}; \ \sqrt[3]{x}+(x+3)^2=0.$$

8. Графическое решение системы уравнений

Согласно программе требуется научить школьников графическому способу решения систем уравнений с двумя неизвестными. При рассмотрении этого вопроса учащиеся встретятся со всеми функциями, которые они изучили. Поэтому графическое решение систем служит хорошим материалом для повторения функций и их графиков.

Чтобы сэкономить учебное время, можно использовать шаблоны для вычерчивания параболы, кубической параболы и графиков некоторых других функций. Можно применить и графики, вычерченные ранее на стекле или прозрачной бумаге.

Возможно познакомить учащихся с графиками некоторых новых видов уравнений. Например, в нашем опыте учащиеся без затруднений пользовались уравнением $x^2+y^2=r^2$ и его графиком.

Учащиеся уже неоднократно встречались с тем, что если к функции, например, $2x$ прибавить число 3, то график новой функции $2x+3$ получается из графика первоначальной функции переносом последнего параллельно оси ординат на 3 единицы кверху.

Это положение можно распространить на все известные школьникам функции. Например, функции $y=x^3+2$, $y=x^3-4$ имеют графиком кубическую параболу, но перенесенную из начального положения параллельно оси ординат в первом случае на 2 единицы кверху, во втором на 4 единицы книзу. Имея шаблон для вычерчивания кубической параболы, легко построить графики этих двух функций.

То же можно отметить о графиках функций $y=\sqrt[3]{x}+2$ и $y=\sqrt[3]{x}-4$ или $y=\frac{1}{x}+2$ и $y=\frac{1}{x}-4$.

Итак, если к исходной функции прибавить число, то график новой функции можно получить из графика начальной переносом последнего параллельно оси ординат на расстояние, равное прибавленному числу: а) кверху, если оно положительное, б) книзу, если оно отрицательное. Осознание этого положения расширяет круг функций, графики которых учащиеся сумеют построить.

Учащиеся встречались и с тем, что если в функции, например, $2x^2$ аргумент x заменить $x+3$ или $x-3$, то графики $2(x+3)^2$, $2(x-3)^2$ можно получить из графика начальной функции путем переноса последнего параллельно оси абсцисс на 3 единицы влево в первом случае и вправо во втором случае. Это положение можно распространить на любые функции. Например, графики функций $\frac{1}{x-2}$ и $(x+2)^3$ можно получить из графиков функций $\frac{1}{x}$ и x^3 переносом последних параллельно оси ординат на две масштабные единицы для первой вправо, для второй влево. По шаблонам первоначальных функций легко построить графики рассматриваемых функций.

Итак, если к аргументу исходной функции прибавить число, то график новой функции можно получить из графика исходной путем переноса последнего параллельно оси абсцисс на расстояние, равное прибавленному числу: а) вправо, если оно отрицательное, б) влево, если оно положительное.

Это положение также расширяет круг функций, графики которых школьники смогут построить.

При благоприятных условиях можно идти дальше и обобщить то, что подмечено учащимися при изучении функции второй степени. Если исходную функцию умножить на число q, то график новой функции получается из графика начальной: 1) при $q>1$ растяжением вдоль оси ординат; 2) при $0<q<1$ сжатием вдоль той же оси; 3) при $q=-1$ отражением от оси абсцисс; 4) при $q<-1$ растяжением вдоль оси ординат и последующим отражением от оси абсцисс; 5) при $-1<q<0$ сжатием вдоль оси ординат и последующим отражением от оси абсцисс. В этих случаях построение графика новой функции по графику первоначальной можно выполнить с помощью пропорционального циркуля.

Если учитель, ограниченный временем, не сможет использовать приведенные предложения на уроках, то они найдут место в занятиях математического кружка.

Графическое решение системы уравнений основано на тех же положениях, что и графическое решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Координаты любой точки графика одного уравнения системы удовлетворяют этому уравнению. Координаты любой точки графика другого уравнения удовлетворяют второму уравнению. Значит, координаты точек пересечения графиков будут удовлетворять обоим уравнениям, т. е. явятся решением системы. Требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=x^2-4x+1. \end{cases}$$

Если применить способ подстановки, то получится уравнение четвертой степени, аналитические приемы решения которого учащимся неизвестны.

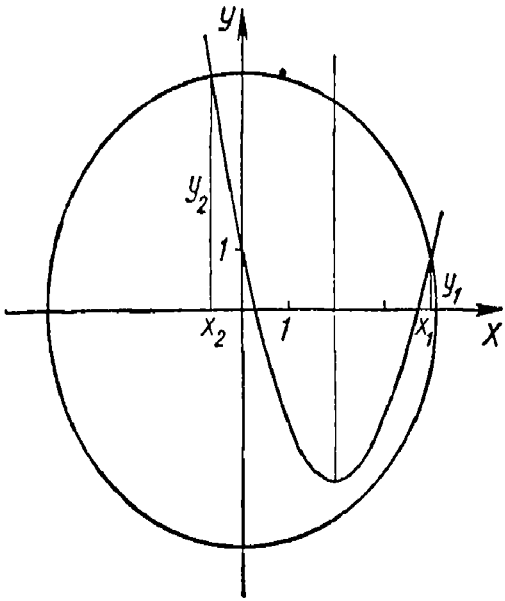


Рис 14.

Выручает графический способ. График первого уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4. График второго уравнения — хорошо известная парабола с вершиной в точке (2;—3). Начертив на миллиметровой бумаге окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4, накладывают надлежащим образом на этот чертеж кальку с изображением параболы или вычерчивают последнюю по шаблону. Координаты точек пересечения кривых дают решения системы (рис. 14).

В стабильном задачнике для графического решения приведены простейшие системы. В интересах повторения и применения изученных функций можно предложить более сложные системы:

1) $\begin{cases} xy=1, \\ x-y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 2x-y=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3-y=0, \\ x^2-y-1=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x}-y=0, \\ x^2-y-2=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-y=0, \\ x^2-y-1=0. \end{cases}$

Системы 1 и 2 учащиеся могут решить и аналитическим способом и получить точные решения. Сопоставление результатов двух решений позволяет установить абсолютные и относительные погрешности графических решений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Васильевич Рэпьев

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

Редактор **А. А. Свечников**

Художественный редактор **В. С. Эрденко**

Технический редактор **Е. К. Полукарова**

Корректор **Р. Б. Штутман**

Сдано в набор 19/IV 1967 г. Подписано к печати 6/X 1967 г. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типографская № 2. Печ. л. 17,25. Уч.-изд. л. 15,38. Тираж 100 000 экз. (Тем. пл. 1967 г. № 169). А 04895. Заказ 234.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Типография изд-ва «Уральский рабочий», г. Свердловск, проспект Ленина, 49.

Цена без переплета 42 коп., переплет 18 коп.