АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

И. Н. ШЕВЧЕНКО

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

В V—VI КЛАССАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
МОСКВА 1961

*Утверждено Ученым советом
Института общего и политехнического
образования АПН РСФСР*

В книге излагается методика преподавания арифметики в V—VI классах в соответствии с задачами перестройки школы. Особое внимание автор уделяет наиболее принципиальным вопросам курса арифметики.

В отличие от существующих методических пособий по арифметике, в настоящем издании с необходимой полнотой освещены теория и практика приближенных вычислений, рассматривается важный вопрос о роли и значении упражнений, применяемых в связи с изучением теории и развитием вычислительной культуры учащихся, а также даются рекомендации по использованию исторических сведений в процессе преподавания арифметики. Книга предназначается для преподавателей математики средней школы, методистов и студентов педагогических институтов.

ОТ АВТОРА

Настоящее пособие для учителей арифметики V—VI классов восьмилетней школы — итог исследовательской работы автора в секторе методики математики АПН РСФСР. Эта работа проводилась в продолжение 1955—1958 гг., предшествовавших изданию закона «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР». Книга была составлена до издания новых программ для восьмилетних школ.

В силу этого обстоятельства, а также по недостатку широко проверенного опыта школ по разделу новой программы VI класса «Приближенные вычисления» автор не мог дать методики для этой темы. Методические указания и образцы упражнений для ближайшего времени, впредь до окончания перестройки учебно-педагогической литературы на новых основах, даются в статье К. И. Нешкова «Арифметика»[1].

В данной книге автор помещает главу VIII «О приближенных вычислениях в курсе арифметики». Эта глава содержит перспективные методические установки автора, касающиеся желательного в дальнейшем построения системы изучения приближенных чисел в курсе арифметики I—VI классов, понимаемом как единый, последовательно развивающийся педагогический процесс, охватывающий первые пять с половиной лет обучения. Материал главы VIII представляет собою несколько сокращенное изложение бро-

---

[1] Эта статья включена в методическое пособие «О преподавании математики в восьмилетней школе». М., изд-во АПН РСФСР, 1960; раздел этой статьи «Приближенные вычисления в курсе VI класса», кроме того, опубликован в журн. «Математика в школе», 1960, № 4.

шюры автора «Начальные сведения о приближенных вычислениях» (М., изд-во АПН РСФСР, 1958). Эта глава, а также указанная в ней литература о приближенных вычислениях может быть использована теми, кто будет иметь возможность вести на данную тему исследовательскую и опытно-педагогическую работу в школах по индивидуальным планам.

Автор приносит глубокую благодарность редакторам этой книги Ивану Львовичу Цветкову и Антонине Анатольевне Шапошниковой за подготовку рукописи к печати и ценные советы, полученные от них в процессе работы.

ЧАСТЬ I

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Учение о целых (натуральных) числах — основа, фундамент математического знания. Важнейшие, основные для нашей науки факты, явления и законы уже в первые годы школьного обучения должны усваиваться самыми юными и во всех отношениях неопытными детьми. Здесь нет никакого противоречия между целями и возможностями изучения: дети 7—10 лет в состоянии усвоить учение о целых числах, имея для этого достаточные данные, если только преподающий хочет и может считаться с особенностями психологии детского возраста.

Дети обладают острой восприимчивостью, свежестью памяти, любознательностью и способностью подражания. Первоначальные математические знания воспринимаются ими сравнительно легко, если в основу изучения положены знакомые им факты, если изложение конкретно, а переход к абстрактному осторожен и постепенен. Поступающему в первый класс понятно сложение 5 яблок и 3 яблок, но еще далеко не всегда — сложение 5 и 3 единиц; однако каждый урок поднимает его на одну, почти незаметную ступень абстракции.

Искусство учителя в том, чтобы не предлагать детям ничего непосильного и непонятного; однако, с другой стороны, не к чему пространно рассказывать детям то, что им давно известно из жизненного опыта и потому неинтересно. Конечно, тут перед учителем много педагогических трудностей. Не существует двух учеников, совершенно похожих друг на друга; жизненный опыт одного не совпадает с опытом другого; что ново и интересно одному, не привлекает другого. Только опыт педагогического творчества и знание детской природы может подсказать учителю верный путь, по которому движется вперед классный коллектив в целом. Общий же характер движения: медленно двигаться от конкретного к абстрактному, не спеша с абстракциями.

На первых порах поэтому избегают определений и многих специальных терминов; даже названия членов арифметических действий программа предусматривает только в третьем году обучения. До этого урок насыщен преимущественно показом и примером учителя: он показывает, как нужно делать, ученики следуют за ним. Если они ошибаются, учитель их поправляет, аппелируя не столько к «правилу», сколько к здравому смыслу.

Не всегда, между прочим, правильно сразу давать те приемы вычислений, к которым люди пришли в процессе длительного исторического развития. Например, сложение многозначных чисел в III классе лучше на первых порах начинать с высших разрядов, рекомендуя ученикам записывать число по разрядам; и нужно проделать много таких упражнений до перехода к современному способу сложения с низших разрядов.

Изучение арифметики в I—IV классах (как, впрочем, и далее) должно быть построено так, чтобы весь детский коллектив был втянут в непрерывную активную работу, а не пассивно слушал и созерцал то, что делает учитель или отвечающий у доски. Нельзя заставлять ребятишек длительно слушать изложение разных теоретических положений: школьник 7—10 лет особенно нуждается в движениях, деятельности — и притом разнообразной деятельности.

«Основной закон детской природы,—говорил К. Д. Ушинский,— можно выразить так: дитя требует деятельности беспрестанно и утомляется не деятельностью, а ее однообразием и односторонностью. Заставьте ребенка сидеть, он очень скоро устанет; лежать — то же самое; идти он долго не может . . но он резвится и движется целый день, переменяет и перемешивает все эти деятельности и не устает ни на минуту...»[1]

Вот почему и при изучении математики в первых четырех классах нужно организовать учение так, чтобы ученику была обеспечена возможность непрерывного и разнообразного действия, активности, чтобы он писал, считал, вычислял на бумаге, в уме и на счетах, измерял, вычерчивал гео-

[1] К. Д. Ушинский. Собрание сочинений, т. 3. Педагогические статьи, 1852—1870 гг., М.—Л., 1948, стр. 147.

метрические фигуры, вырезывал их из бумаги или изготовлял их из другого материала... Если так будет, то программный материал I—IV классов будет доступным и посильным для детей.

Другое высказывание хотелось бы адресовать также учителям арифметики V и VI классов нашей восьмилетней школы. Автор высказывания писал, что ученик должен «начинать свои первые занятия каждым новым вопросом математического содержания не с «теории» этого вопроса, т. е. не с того, чем закончилась работа мыслящего человечества над трудностями решения этого вопроса. В каждом новом вопросе дело обучения начальной математике должно начинаться с чувственных восприятий известного содержания и с р е а л ь н ы х и п р о с т ы х з а д а ч. Эти восприятия и задачи должны ставить вопросы и к вопросам приводить. Первое дело — самая постановка вопроса, второе — его решение. От восприятий — к представлениям, от представлений — к понятиям, суждениям и идеям. Но этого мало. На каждой из этих ступеней обогащения интеллекта учащихся математическими знаниями необходимо, чтобы учащийся испытывал живые эмоции интереса и удовольствия как по поводу удовлетворения этого интереса, так и по поводу движения работы вперед и преодоления ее трудностей. Для соблюдения этого условия необходима, конечно, самая широкая и свободная, под осторожным и сдержанным руководством учащего, с а м о д е я т е л ь н о с т ь у ч а щ и х с я».

Эти строки принадлежат талантливому педагогу и методисту С. И. Шохор-Троцкому (1853—1923), которого следует признать одним из предшественников советской педагогики и методики математики в русской средней школе. Его творческие искания были особенно ценными в области методики арифметики. Три публичные лекции «Чему и как учить на уроках арифметики», прочитанные в 1893 г. в Петербургском Педагогическом музее военно-учебных заведений, не потеряли своего значения до настоящего времени. Его м е т о д ц е л е с о о б р а з н ы х з а д а ч, и особенно простых задач, которые он считал исходным пунктом изучения арифметики и средством «для выработки представлений арифметического характера», средством для выработки «точных понятий о действиях, для возбуждения деятельности ума учащегося», во многом перекликается с идеями современной советской педагогики и методики математики, например в пособиях для учителей и способных к самостоятельной работе учащихся V и VI классов[1].

Можно, конечно, спорить о том, действительно ли необходим резкий переход от «эмпирических представлений» учащихся начальной школы к «элементам доступной теории арифметических понятий», рекомендуемый И. К. Андроновым («Арифметика натуральных чисел», стр. 9), и не правильнее ли думать о плавном построении единого процесса развития знаний и навыков учащихся с первого по шестой год обучения — процесса, проходящего, согласно ленинскому принципу, последовательный ряд ступеней познания, каждая из которых начинается живым созерцанием (в смысле первичной практики), продолжаясь крупицей абстрактной мысли, проверяемой опять-таки практикой, начинающей следующую ступеньку .познания.

И. К. Андронов бесспорно прав в том, что так называемый систематический[2] курс арифметики целых чисел — не простое продолжение преимущественно (не целиком!) индуктивно-эмпирического курса начальной школы, но его высшая стадия — стадия доступного, но иначе, чем раньше, систематизированного теоретического мышления, постоянно предваряемого и проверяемого практикой. Эту стадию мы лично склонны понимать как курс арифметики натуральных чисел порядка одного года, а не «галопирующего» повторения в 3—4 недели, как теперь. Построение такого курса — единого, находящегося в руках одного учителя-специалиста[3], должно бы, казалось, стать очередной задачей методики арифметики ближайших лет.

---

[1] И. К. Андронов, Арифметика натуральных чисел, Учпедгиз, 1954; его же, Арифметика дробных чисел и основных величин, Учпедгиз, 1955; И. К. Андронов и В. М. Брадис. Арифметика. Проект учебника для широкого обсуждения в среде учителей и актива учащихся, Учпедгиз, 1957.

[2] Курс I—IV классов — также систематический: он также содержит на каждой ступеньке элементы теоретической, абстрактной мысли, а не совокупность разрозненных навыков, каким он, к сожалению, мыслился многими до сих пор. Но вопрос об его обновлении и связи с следующей стадией уже выходит за границы методики.

[3] Здесь нет возможности говорить о том, в котором году обучения было бы целесообразно пройти опыт систематического изучения натуральных чисел. Старая школа начинала его с десятилетнего возраста учащихся, переходя к дробям через год, так что весь курс арифметики укладывался в $5^1/_2$ лет, как и теперь. Но этот сложный вопрос опять далеко выходит за рамки одной методики арифметики.

Однако на сегодня мы можем только искать такую форму повторения, которая позволила бы (без большой надежды на серьезный успех) постоянно возвращаться к теории и практике натуральных чисел при изучении последующих разделов курса арифметики. Другого выхода мы сейчас не имеем: нужно время, чтобы перестроить учебную литературу, программы и учебные планы, приведя к единству разорванную пополам основу, фундамент всего курса математики — арифметику натуральных чисел.

Чтобы разумно организовать повторение пройденного в I—IV классах, нужно помнить, что существует два вида повторения: однократное, в несколько минут или один-два урока, и многократное, когда в течение месяцев и даже годов непрерывно и много раз повторяют то или иное из пройденного, на ходу уточняя, углубляя и систематизируя во время прохождения очередных тем дальнейшего курса. Это нелегкий путь, но другого нет.

Вот некоторые примеры. Чтобы напомнить учащимся сложение на счетах, достаточно десяти минут; но для закрепления навыка потребуются многие и многие часы, и притом не столько в классе, сколько вне класса.

Никаким вычислениям нельзя научиться за один-два урока, но напомнить некоторые приемы можно и в несколько минут. Однако за этими минутами должны последовать годы упражнений.

В разделе «Целые числа» есть[1], например, пункт: «Округление целых чисел с точностью до 10, 100, 1000 и т. д.» (п. 13). Чтобы выяснить необходимость такого округления и решить несколько примеров, потребуется на уроке 20—25 минут. Но если этим дело и окончится, то ученики быстро забудут об округлении и никогда по своей инициативе не будут его применять. Чтобы было иначе, необходимо после урока на эту тему выполнять округление ежедневно на всех уроках математики. Лишь в этом случае округление не будет достоянием только памяти, а станет руководством к действию. Только тысячекратное повторение и поможет его усвоению, а 25 минут, затраченных на уроке, имели только установочное значение.

---

[1] Точнее, был до издания программ 1960 г., однако в последние годы округлением занимались в четвертых классах, так что совсем снять эти вопросы в начале V класса было бы ошибкой.

То же самое можно сказать и о пункте программы: «Законы арифметических действий и применение их для упрощения и рационализации устных и письменных вычислений». Здесь последовательно (по всей вероятности, на двух различных уроках) рассматриваются пять законов и затем эти законы постоянно применяются для упрощения и рационализации устных и письменных вычислений. Но очевидно, что повторение этих вопросов на уроке можно рассматривать только как подход к большой и длительной работе, которая потом будет развертываться на этой основе в течение ряда лет.

Далее, научить устным вычислениям точно так же, как и письменным, нельзя ни однократным показом вычислительных приемов, ни путем непрерывного их применения в течение 3—5 часов подряд. Тренировочные вычислительные упражнения должны затем предлагаться в малых дозах, но ежедневно в течение нескольких лет. При этом их, может быть, не нужно особо подчеркивать, выделяя для них специальные минуты; нужно добиваться того, чтобы они находили свое место на каждом занятии, входя как органическая часть в упражнения, выполняемые по программе. Новая программа при этом подчеркивает, что эти упражнения должны быть не «бездумными», а осмысленными: учащиеся обязаны понимать, что их действия опираются на пять законов и следствия из них.

К такому непрерывному, сквозному повторению в течение дальнейшего курса учителю придется обращаться в связи с многими более или менее значительными темами, в частности, к законам действий нужно будет вернуться при изучении обыкновенных и еще раз — десятичных дробей.

Учитель должен помнить, что, затратив на повторение курса I—IV классов 20 и даже 30 часов, он не может и не должен с облегченным сердцем сказать: «Я прошел полностью некоторый отдел математики и могу к нему не возвращаться. Я провел письменную работу и обнаружил, что ученики пройденный материал знают». О первом разделе V класса этого сказать нельзя. Нельзя даже предложить такой единой обобщающей работы, которая продемонстрировала бы знание учеников по всему разделу; нельзя потому, что в нем слишком много вопросов и проверить усвоение их с помощью часовой контрольной работы невозможно.

Конечно, можно провести контрольную письменную работу по каким-нибудь отдельным вопросам первой темы (это обычно и делается), но весь раздел нельзя охватить одной работой.

Глава первая

ПОВТОРЕНИЕ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ПРОЙДЕННОГО В I—IV КЛАССАХ

И на повторение, и на систематизацию материала, принесенного из начальных классов, учебный план отводит 20 учебных часов[1].

Здесь — традиционное, привычное, но очевидное противоречие между количеством материала, подлежащего повторению и систематизации, и временем, отводимым на это,— три с лишним учебные недели!

Проф. И. К. Андронов в своей «Арифметике натуральных чисел» («Слово к учителю», Учпедгиз, 1954, стр. 9) пишет: «В начале пятого года обучения у учащихся создается ложное впечатление, что на уроках арифметики говорят о том, что им, учащимся, уже известно: они не видят, что ставится то же, да не так же» (разрядка моя.— *И. Ш.*).

Далее автор на той же странице убедительно призывает к переходу от «эмпирических представлений» учащихся начальной школы к умелому формированию «элементов доступной теории арифметических понятий». Можно, конечно, спорить о том, должен ли строиться и строится ли на деле у нас курс арифметики I—IV классов, как чисто «эмпирический» с резким «переломом» на пятом году, и не правильнее ли строить курс изучения арифметики в I—VI классах без резкого «перелома», как единый процесс.

Мы согласны с тем фактом, что арифметика V и VI классов и особенно арифметика натуральных чисел как фундамент любого математического знания не есть простое продолжение арифметики начальной школы, а ее высшая стадия, стадия доступного, но систематизированного теоретического мышления, постоянно

[1] Было писано в 1957 г. Новая программа по арифметике, изданная в 1960 г., соединяет первый (повторительный) раздел (20 часов) и второй — «Делимость чисел» (20 часов) в один — раздел «Натуральные числа», отчего положение с повторением курса начальной школы остается прежним.

предваряемого и проверяемого практикой. Эта вторая стадия должна начинаться продолжительным систематическим курсом арифметики натуральных чисел, а не ускоренным повторением в 20 часов. Построение единого курса арифметики для первых 6 (точнее $5^1/_2$) лет обучения — очередная задача методики арифметики, однако в данной главе придется говорить не о ней, а искать такую ф о р м у повторения, которая позволила бы систематически возвращаться к вопросам теории и практики изучения натуральных чисел в процессе изучения последующих разделов арифметики. Другого пути сегодня нет: учебный план есть учебный план, а существующая учебная литература не может быть перестроена мгновенно.

Дело в том, что, как мы говорили выше, возможны два вида повторения: однократное, в один-два урока, и многократное, н е п р е р ы в н о е, когда в течение месяцев, года, ряда лет мы много раз повторяем то или другое из пройденного, приводя его в порядок и систему. Это путь единственно возможный.

Каждый из таких вопросов, как законы действий, свойства действий, устные вычисления, вычисления на счетах, зависимости между данными числами и результатами действий над ними, изменение результатов действий в зависимости от изменения данных, может быть рассмотрен буквально в течение нескольких минут, но для того чтобы эти вопросы были действительно глубоко и сознательно усвоены, необходимы не минуты, а часы, недели и месяцы разумных упражнений.

Таким образом, задача первой главы — рассмотреть богатое содержание первой темы V класса и по возможности указать, какие вопросы нуждаются в однократном повторении, к каким вопросам нужно возвращаться при изучении последующих разделов программы и, наконец, какие вопросы должны быть постоянно в поле зрения учителя.

1. Счет и число. В. К. Беллюстин начинает свою книгу «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» следующими словами:

«Кто положил начало арифметике и кто первый из людей «изобрел» счет, на это ответить нельзя. Мы можем назвать лицо, которое изобрело компас или книгопечатание, порох и паровую машину, нас может интересовать, кто открыл магнит или кто приготовил писчую бумагу; но никак нельзя решить вопроса, кто положил начало счету. Умение считать, по крайней мере в небольших пределах, а также и потребность считать присущи всякому человеку. Подобно тому, как живой человек непременно дышит и питается, так точно и человек, живущий сознательной жизнью, мыслит, говорит и между прочим считает.

Итак, не может быть и речи о каком-то особом изобретателе счета, так как эта потребность свойственна всем людям. Поэтому начало арифметики тонет в тех же беспредельных глубинах отдаленных веков, как и начало человечества».

Хорошо, если и учитель арифметики начнет работу в V классе с беседы о счете наших отдаленных предков. Он может рассказать учащимся, как уже на заре своего существования в своей жизненной практике люди неизбежно встречались с различными предметами и вынуждены были количественно сравнивать их при помощи счета (а сначала даже без его помощи). Уже при самом неразвитом хозяйстве у людей были домашние животные, простейшие орудия для обработки земли, приспособления для охоты и рыбной ловли, одежда, обувь. Считая те или иные предметы домашнего или общественного обихода, люди сначала смутно, а потом более отчетливо стали сознавать, что совокупности различной природы все же могут иметь между собою нечто общее. У *пяти* лошадей, у *пяти* стрел, у *пяти* любых предметов — общее то, что их столько же, сколько пальцев на руке. Эти пальцы можно просто показать вместо ответа на вопрос «сколько?», если он практически важен и интересен, чему и современный школьник приводит сколько угодно примеров из собственной жизненной практики. Вот из такой жизненной и трудовой практики и сложилось постепенно понятие о числе.

То, что здесь сказано, не дает ответа на вопрос, что такое число, но такой вопрос вообще не будет ставиться. Понятие о числе будет постепенно формироваться путем перечисления свойств числа. Иными словами, понятие числа первично: его определения арифметика не дает[1].

Методическая литература даже специально предупреждает: не определять число и не заменять определение числа какими-нибудь суррогатами.

[1] Подобным же образом, когда в первый раз знакомят людей с электричеством, то, казалось бы, прежде всего нужно было ответить на вопрос, что такое электричество. Однако делают иначе. Сначала говорят: «Если потереть янтарь о шерстяную ткань, то он начинает притягивать к себе легкие предметы». Далее говорится о том, что подобными свойствами обладают сургуч, каучук, стекло. Следовательно, ознакомление с электричеством начинается не с ответа на вопрос, что такое электричество, а с разъяснения того, откуда оно появляется в жизни, в практике.

Понятие числа отличается от многих других понятий школьного курса математики своей п е р в и ч н о с т ь ю... Математическая наука не содержит в себе ответа на вопрос, что такое число, — такого ответа, который состоял бы в определении этого понятия через другие, ранее установленные понятия; математическая наука дает этот ответ в другой форме, перечисляя свойства числа, выраженные в аксиомах. Тем более, конечно, бессмысленной и безнадежной является всякая попытка определения этого понятия в школьном курсе арифметики и алгебры[1].

2. **Счет группами.** Наша система счисления (нумерации) десятичная. Это значит, что мы считаем десятками, что во всех наших арифметических вычислениях важнейшую роль играет число 10. Это число как бы всюду присутствует, сквозит во всех наших операциях, все упорядочивает, все облегчает. Может быть, десятичная система — плод какой-нибудь человеческой фантазии или измышления кабинетных ученых? Это не праздный вопрос. Он, может быть, представляется излишним с точки зрения взрослого человека, знакомого с сущностью десятичной системы, но не таков он для ребенка и даже ученика младших классов школы. Тот и другой только накопляют знания, только собирают их по крупинкам, они готовы засыпать учителя вопросами: почему, откуда, зачем, отчего? но не всегда решаются или не умеют рассказать о своих сомнениях.

Счет группами не выдумал какой-то отдельный ученый или исследователь. Ученые, и если угодно, даже ученые «кабинеты» существовали уже в глубокой древности. Например, в древнем Египте первыми учеными были ж р е ц ы. Наука создавалась и концентрировалась за крепкими стенами храмов; многие факты науки были окружены мистической тайной и содержались жрецами под секретом. Но вовсе не они с о з д а л и счет группами. Они могли им пользоваться, но люди считали группами до них и помимо них. Самые обыкновенные люди, далекие от науки, почувствовали еще очень давно потребность считать группами. Они имели по пяти пальцев на каждой руке и ноге и быстро сообразили, что считать пятка́ми удобно. Следует иметь в виду, что люди считали и считают не только пятка́ми. Почти все небольшие числа когда-нибудь и где-нибудь служили и единицами группового счета. Это можно видеть из того, что счет группами сохранился до настоящего времени.

---

[1] А. Я. Х и н ч и н, Основные понятия математики и математические определения в средней школе, Учпедгиз, 1939, стр. 6.

Ученикам можно сказать о том, что число 10 победило сейчас всех своих конкурентов, но до сих пор мы все-таки часто считаем парами. Не исчез совершенно и счет тройками. Даже такое, казалось бы, некруглое и неудобное число, как семь, до сих пор напоминает о себе нашей семидневной неделей, а в свое время, например, у семитических народов оно было самым любимым и даже священным. Счет дюжинами (по 12) существует и до сих пор и даже еще не так давно вступал в борьбу со счетом десятками.

Таким образом, наши предки в поисках наиболее удобной групповой единицы счета перепробовали почти все числа от 2 до 12; кроме того, было использовано даже число 20, потому что у человека на руках и ногах вместе 20 пальцев

Счетная группа может быть удобной и неудобной. Одно из ее достоинств в том, чтобы она была не очень велика, другое — чтобы она имела много делителей. В этих отношениях наиболее удобно число 12. Но 10 человеческих пальцев, по-видимому, сказали свое окончательное слово в пользу числа 10.

Впрочем, среди групповых единиц счета встречается одно число, вовсе не маленькое — это число 60. Оно служило основанием ш е с т и д е с я т и ч н о й системы. Простые люди едва ли могли считать такими группами: ведь совершенно очевидно, что глазом трудно охватить группу из 60 предметов. По-видимому, эта групповая единица уже не была продуктом народного творчества; ее изобрели именно специалисты, ученые. Мы знаем, что этой системой пользовались вавилонские астрономы в глубокой древности. Таким образом, не народ, а представители науки сделали основанием системы счисления число 60. Для обозначения больших чисел оно очевидно было удобным, но для житейских подсчетов такое число не подходит. Считать предметы, например яблоки, беря сразу по 60 штук, конечно, невозможно.

Впрочем, пережитки шестидесятичной системы сохранились и теперь: час делится на 60 минут, минута на 60 секунд, окружность делится на 360 градусов.

Вообще же современная математика, учитывая длительный опыт человечества, положила в основу системы счисления число 10. Оно имеет меньше делителей, чем число 12, но по своей величине десяток очень удобен, легко обозрим и ведет происхождение от природного счетного «инструмента»— человеческих пальцев.

3. **Нумерация (счисление).** Нумерация изучается в школе начиная с первого класса. В каждом из первых четырех лет обучения учащиеся постепенно знакомятся с главными фактами, относящимися к этому фундаментальному отделу арифметики. Медленно поднимаясь по лестнице разрядов и классов, на четвертом году обучения нумерация доходит до миллиардов. Здесь очень многое на пороге пятого класса нужно подытожить и систематизировать. Такое систематическое ознакомление с вопросами нумерации на первых занятиях в V классе нельзя считать ранним или преждевременным; отодвигать его дальше едва ли возможно и целесообразно.

Числовые представления людей складывались, возникали, формировались очень медленно. Нельзя игнорировать исторический опыт человечества, и потому вопросы нумерации полезно излагать в историческом аспекте. Однако не следует понимать дело так, что учитель математики, готовясь к первым занятиям в V классе, должен изучить какой-нибудь трактат, повествующий об истории арифметики в древности. Достаточно ознакомиться с небольшими и легко написанными брошюрами на эту тему, как, например, книги Г. Н. Бермана: «Счет и число» и «Число и наука о нем», а затем изложить важнейшие факты кратко и доходчиво.

Вот те вопросы, на которых полезно остановиться. Счет отдельных предметов — это, по-видимому, древнейшая из всех математических операций. Касаться определения числа, как уже сказано, не следует, а нужно остановиться на вопросе о том, откуда число возникло. Человек пришел к понятию числа, считая однородные предметы. Выполняя эту несложную операцию, человек понял, что число не зависит ни от характера сосчитываемых предметов (лошади, деревья, столы), ни от порядка, в каком мы их считаем. Довольно рано человек понял, что выгодно считать группами. Отсюда возникли пары, тройки, пятки, десятки, дюжины. Наиболее употребительной оказалась группа из 10 предметов.

После этого повторяется устная нумерация. Здесь необходимо подчеркнуть существенное требование, которое должно быть к ней предъявлено: *нужно иметь мало различных слов для того, чтобы назвать много чисел.* В этом и состоит достоинство современной устной нумерации. Если рассматривать числа не свыше триллиона, то в ней различных слов всего 16: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, сто, тысяча, миллион, миллиард, триллион. Остальные названия чисел получаются различными сочетаниями этих 16 слов. При этом одни и те же слова, только в различных сочетаниях, могут изображать различные числа. Называя, например, число тысяча двести тридцать пять мы употребляем 4 слова из 16. Другие сочетания тех же слов или некоторых из них дадут другие числа, например: 5321, 215, 51, 32 и т. д., но новых слов для этого не требуется.

Необходимо постоянно подчеркивать особую роль числа 10 как основания десятичной системы счисления. Что касается систем счисления с другими основаниями, то едва ли целесообразно касаться их в порядке классных занятий в восьмилетней школе. Это может делаться факультативно на кружковых внеклассных занятиях, причем в связи с развитием быстродействующих счетных машин, особенно интересно ознакомление с двоичной системой счисления.

Самое существенное в классной работе по десятичной системе — это поднять учащихся до обобщения, т. е. показать им, как строится название всякого, а не только определенного, отдельного числа. Однако это отнюдь не значит, что рассуждения должны вестись абстрактно, применительно к числу вообще. Нет, они должны относиться к определенным числам (25; 346; 2345; 86754 и т. д.), но они должны сопровождаться обобщениями. Если ученики могут назвать любое число в пределах триллиона, то цель изучения устной нумерации достигнута.

За устной нумерацией следует письменная: вводится 10 цифр и последовательно раскрывается пользование ими. Полезно выделить числа второго десятка, для которых название не совпадает с написанием: читаются сначала единицы, а потом десятки, а пишется наоборот. Здесь впервые появляется нуль, которому потом придется уделять особое внимание. Затем вводится понятие о разрядах и классах. На этом полезно немного задержаться, дав учащимся возможность составить несколько таблиц. При этом нужно учесть, вполне ли сознательно составляются эти таблицы. Если учащимся трудно и они не понимают, для чего это делается, словом, еще не созрели для таких вопросов, тогда лучше составление таких таблиц отодвинуть до изучения десятичных дробей.

Центральный пункт темы «Нумерация» — это *принцип положения*. Нельзя допускать, чтобы учащиеся не обратили на него внимания. Нумерация всегда рассматривалась в V классе как самый скучный отдел арифметики. Школьники изучали ее с первого года и настолько к ней привыкли, что уже с трудом ожидают найти в этом разделе что-нибудь интересное или достойное удивления. А между тем взрослые, серьезные люди часто поражаются, как это можно с помощью крайне ограниченного числа средств написать любое число. При изучении нумерации учителю полезно повлиять на чувства учеников. То, что захватило их внимание и в какой-то мере удивило, на всю жизнь останется достоянием. Недаром же знаменитый П. С. Лаплас высказал о нумерации такое суждение: «Мысль выражать все числа десятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту [1], настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна».

4. **Сложение.** Повторяется терминология и форма записи. Давать определение не рекомендуется. Нужно уделить внимание вопросу о прибавлении нуля. Центральный пункт темы — переместительный и сочетательный законы сложения. Переместительный закон упоминается в программе III класса и затруднений не вызывает. Сочетательный закон встречается впервые и, как известно, нередко вызывает чувство неудовлетворения у учащихся. В этом возрасте их еще часто затрудняет новое незнакомое слово «сочетательный». Если дело действительно только в этом, то нужно объяснить слово. По существу же в операциях, выполняемых согласно этому закону, нет ничего сложного или непонятного. Можно разъяснить этот закон на какой-нибудь простенькой задаче. Полезно обратить внимание на то, что всякое сложение более чем двух слагаемых выполняется на основе сочетательного закона. Видимо, даже мыслительный аппарат человека устроен так, что при сложении трех чисел он сначала складывает два, а потом присоединяет третье. В пятом классе впервые появляется название «сочетательный закон» и его формулировка, а существо дела известно с I класса, так как почти всякое сложение опирается на сочетательный закон. Когда ученики во II классе складывали, например, числа 25, 12 и 5, то они привыкали пользоваться сочетательным законом, не мысля его, как общее

---

[1] В этом и состоит принцип положения.

положение. Теперь психологическая трудность в том, чтобы осознать уже автоматизированные операции как подчиненные общему закону и сформулировать его.

В V классе при повторении вообще нужно подчеркнуть роль законов при выполнении действий над числами.

Хотя законы сложения — центральный пункт этой темы (без них нельзя выполнять сложение сознательно), но задерживаться слишком долго на этом вопросе, шлифовать и заучивать формулировки не следует. Нужно только добиться ясного понимания вопроса, отложив все остальное до изучения пункта «Распространение законов действий на дробные числа» в теме «Обыкновенные дроби».

Однако было бы грубой ошибкой при прохождении первой темы вовсе пропустить законы. Основы знания и понимания должны быть заложены здесь: если в первой теме не будет дано этих основ, то нечего будет «распространять».

Сложение однозначных чисел состоит в знании наизусть таблицы сложения, которая снова составляется самими учениками; при повторении это и служит проверкой знания наизусть таблицы сложения. Факты показывают, что многие учащиеся твердо знают таблицу умножения, но не знают таблицы сложения, каждый раз в случае надобности вычисляя сумму двух однозначных чисел, присчитывают по единице. Это очень затягивает и осложняет практику сложения многозначных чисел. Интересно, что многие люди, не усвоив таблицы сложения в детстве, потом уже никогда не могли ее усвоить. В зрелом возрасте у них для этого уже не было ни времени, ни охоты, да и память потеряла свою прежнюю свежесть. Во избежание этого таблица сложения обязательно должна быть выучена *наизусть* в детском возрасте.

Что касается сложения многозначных чисел, то в течение первых четырех лет обучения решалось множество примеров на такое сложение. Все, конечно, умеют подписывать слагаемые «столбиком» и вычислять их сумму, но при повторении с более высоких позиций все-таки следует рассмотреть хотя бы один случай сложения многозначных чисел, записав слагаемые в строку. На этом одном примере и нужно показать: 1) что сложение опирается на переместительный и сочетательный законы; 2) что начинать сложение можно и с высших разрядов, но такой путь слишком длинен, и потому выработана другая запись столбиком, обладающая определенными преимуществами.

При сложении нескольких чисел учащиеся встретят два правила: как прибавить к числу сумму нескольких чисел и как прибавить какое-нибудь число к сумме. Здесь нет надобности говорить о том, что эти правила вытекают из законов сложения: в начале учебного года это было бы еще трудно для пятиклассников. Учащиеся должны запомнить, что все, относящееся к сложению — сложение многозначных чисел, приемы устного сложения и сложение на счетах, — основано на двух законах и двух правилах, что при сложении всегда опираются на эти четыре общие положения. Только при этом условии теория и практика сложения будут восприняты сознательно.

Необходимо, наконец, стремиться к тому, чтобы учащиеся видели сумму и там, где она обозначена неявно. Когда к числу 987 нужно прибавить выражение (654 + 321 + 422), то здесь видно, что первое число нужно сложить с суммой трех чисел в скобках. Выполняя это действие, учащиеся, вероятно, сошлются на правило: «Чтобы прибавить к числу сумму нескольких чисел, нужно ... и т. д.». Но вот другой случай: нужно к числу 2460 прибавить 1525. Было бы хорошо, если бы учащиеся здесь почувствовали, что второе слагаемое —1525— представляет собою сумму 1000 + 500 + + 20 + 5, и выполнили бы действие в уме, воспользовавшись правилом прибавления к числу суммы.

5. **Вычитание.** Повторяется терминология и форма записи. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Выясняется вопрос о вычитании нуля. Так как вычитание есть действие, обратное сложению, то для него не устанавливается особых законов. Но, подобно тому, что говорилось выше о прибавлении суммы, необходимо указать здесь два правила: 1) как вычесть сумму из числа и 2) как вычесть число из суммы.

При вычитании многозначных чисел мы и ссылаемся на эти правила, потому что вычитаемое мы всегда можем представить или мыслить как сумму нескольких слагаемых (разрядов). С другой стороны, многозначное уменьшаемое тоже есть сумма разрядных единиц; когда мы вычитаем какое-нибудь число, то можно сказать, что мы вычитаем его из суммы.

Будет ли это понятно учащимся? Возможно, что не сразу. Учащиеся в первых четырех классах решили много примеров на вычитание, но едва ли у всех уже созрела потребность в обосновании каждого своего шага. Здесь происходит примерно то же самое, что бывает на первых уроках геометрии, когда дети удивляются, что им доказывают вещи, как будто очевидные без доказательства. Это значит, что у них еще не созрела потребность в доказательстве. Однако пройдет 2—3 года, и они сами начнут обращаться к учителю с вопросом: «А как это доказать?»

Целесообразно выполнить сначала вычитание многозначных чисел в строчку и с полным объяснением. Это объяснение будет состоять в том, что, выполняя вычитание, учащиеся будут ссылаться на два указанные выше правила: вычитание суммы из числа и числа из суммы. Когда это будет усвоено учениками, можно перейти к записи вычитания столбиком. Здесь нужно будет рассмотреть те наиболее трудные случаи вычитания, когда в каком-нибудь разряде уменьшаемого меньше единиц, чем в том же разряде вычитаемого.

В разделе вычитания учащиеся должны усвоить еще два правила: как прибавить разность к числу и как вычесть разность из числа. Таким образом и здесь, как и при сложении, нужно запомнить четыре общих положения. На них основано вычитание многозначных чисел, устное вычитание и вычитание на счетах. Конечно, учащиеся не всегда отдают себе отчет, какое из правил они в данном случае применяют. Дело учителя — в необходимых случаях без излишней педантичности обращать внимание учеников на эти правила и тем способствовать сознательному выполнению действий.

Несомненный признак успеха и понимания проявляется в том, что учащиеся самостоятельно начинают усматривать разность там, где она не дана в явном виде. Если нужно, например, к 375 прибавить 97 или от 375 отнять 97 и ученик поступает в подобных случаях так: $375 + 97 = 375 + (100 - 3)$ и $375 - 97 = 375 - (100 - 3)$, то он не только знает правила прибавления и вычитания разности, но и применяет их сознательно.

6. Умножение. Повторяется определение, терминология и форма записи. Тщательно проверяется случай умножения на нуль. Рассматриваются переместительный, сочетательный и распределительный законы. Прочнее всего осваивается учащимися в I—IV классах переместительный закон. Тем не менее и здесь следует разъяснять и проверять его на конкретных жизненных примерах. Такие примеры встречаются на каждом шагу Хорошо, например, двумя способами подсчитать число кусков сахара в коробке на 500 грамм.

В дальнейшем, при изучении умножения нужно почаще обращаться к этому закону: всякий раз, когда множитель имеет больше знаков, чем множимое, целесообразно сделать перестановку сомножителей.

Сочетательный закон, как более трудный для учащихся, еще более нуждается в иллюстрациях. Таких иллюстраций можно придумать сколько угодно, хотя они более или менее однообразны. Можно взять прямоугольник с неравными сторонами, разграфить его на клетки и внутри каждой клетки разместить поровну какие-нибудь предметы (семена, если прямоугольник изображает огород, цветы, если это цветник и т. п.). После этого нужно подсчитать предметы двумя способами: сначала найти число предметов в клетках одного ряда и полученное произведение умножить на число рядов, а затем умножить число предметов в каждой клетке на число всех клеток.

Изучение распределительного закона тоже следует начать с какой-нибудь несложной задачи.

Девочка нанизывает на три нитки белые и красные бусы; на каждую нитку она нанизывает 12 белых бусин и 6 красных. Сколько у нее будет всех бусин на трех нитках?

Решение задачи можно записать так: $(12 + 6) \cdot 3$.

Написанное имеет следующий смысл: на одной нитке 12 белых и 6 красных бусин, но так как ниток 3, то, чтобы найти общее число всех бусин, нужно сумму $12 + 6$ умножить на 3. Как вычислить этот результат? Можно сначала сложить числа в скобках, т. е. найти сумму белых и красных бусин на одной нитке, получится $12 + 6 = 18$; затем полученное число умножить на 3; получится $18 \cdot 3 = 54$.

Но можно поступить иначе: сначала подсчитать число всех белых бусин на всех трех нитках $(12 \cdot 3)$, затем число всех красных бусин на трех нитках $(6 \cdot 3)$ и, наконец, найденные числа сложить:

а) $12 \cdot 3 = 36$; б) $6 \cdot 3 = 18$; в) $36 + 18 = 54$.

В обоих случаях получились одни и те же результаты. Они и не могли быть различными, так как двумя способами подсчитывались одни и те же предметы.

Итак, при решении этой задачи было применено два способа. Первый записан выше так: $(12 + 6)\ 3 = 54$.

Второй можно записать так: $12 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 54$.

Так как в обоих случаях получился один и тот же результат, то можно написать равенство:

$(12 + 6) \cdot 3 = 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3$.

Из этого равенства вытекает словесная формулировка распределительного закона.

Если первое ознакомление с этим законом покажется ученикам трудным, то многократное его повторение с течением времени принесет свои плоды. Очень важно обратить внимание учеников на то, что здесь для них впервые появляется только название «распределительный закон», но существо дела известно им еще с III класса. Когда они умножали письменно 4325 на 64 или устно 36 на 12, то, конечно, применяли распределительный закон. Нужно подчеркивать, что всякое умножение опирается на распределительный закон; перейдя к дробным числам, мы снова будем им пользоваться.

После этого повторяется умножение многозначных чисел. Особое внимание нужно обратить на трудные случаи — такие, когда сомножители содержат в середине нули.

Нужно тщательно проработать три правила: умножение числа на произведение, умножение произведения на число и умножение разности на число. Таким образом, вместе с законами умножения здесь составится шесть общих положений.

Говорить о связи последних трех правил с законами умножения не следует, чтобы не создавать дополнительных трудностей у учащихся. Если же учащиеся сами обратят внимание на сходство распределительного закона с правилом умножения разности на число, то стоит указать на связь между ними, подчеркнув, что упомянутый закон иногда называется распределительным законом умножения относительно сложения.

7. Деление. Повторяется терминология и форма записи. Деление определяется как действие, обратное умножению. Выясняется и особо тщательно проверяется положение с делением на единицу и на нуль. Так как деление есть действие, обратное умножению, то для него не устанавливается особых законов, но следует указать для деления два правила: 1) как разделить сумму на число и 2) как разделить разность на число.

Эти два положения очень важны при выполнении деления. С одной стороны, часто возможны такие задачи, в которых делимое представляет собою сумму или разность, но еще чаще при делении чисел мы сами стараемся представить делимое либо в виде суммы, либо в виде разности и тогда делим его по частям.

Так как деление труднее всех других арифметических действий, то ему следует при повторении уделить больше внимания, чем первым трем действиям. Учащиеся уже рассматривали различные случаи деления и раньше, но все-таки полезно еще раз вернуться к этим случаям и освежить их в памяти.

В разделе деления учащиеся встретят еще два правила: о делении числа на произведение и о делении произведения на число. Таким образом, в этом разделе будет всего четыре правила. Правило деления на произведение первоначально рассматривается на таком примере: дается число и невычисленное произведение нескольких чисел, например 600 и (15·20); требуется данное число 600 разделить на произведение. Вычисление выполняется двумя способами. Подобное упражнение, вроде (10·20·30) : 15, предлагается и для последнего правила.

Учащиеся, усвоившие эти факты, должны потом видеть произведение и там, где оно явно не обозначено. Например, 2200 : 275 можно представить так: 2200 : (11·25); 2200 : 11 = =200; 200 : 25 = 8. Другой пример: 840 : 42 = (84 · 10) : 42; 84 : 42 = 2; 2·10 = 20.

В целях предупреждения ошибок нужно рассмотреть совместно первое и четвертое правило.

Первое правило: чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные частные сложить.

Четвертое правило: чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число один сомножитель, не изменяя других.

Возможны ошибки такого рода: учащийся при делении произведения на число также станет делить на число каждый сомножитель. Во избежание этого и нужно рассмотреть оба предложения, показав на числовых примерах коренную разницу между ними.

Пример на первое правило:
(25 + 35) : 5 = 60 : 5 = 12, а по правилу:
(25 + 35) : 5 = 25 : 5 + 35 : 5 = 5 + 7 = 12.
Результаты совпали.

Пример на четвертое правило:
(20·30) : 5 = 600 : 5 = 120, или
(20·30) : 5 = (20 : 5)·30 = 4·30 = 120, или
(20·30) : 5 = 20·(30 : 5) = 20·6 = 120.

Результаты совпали, но если бы мы стали делить каждый сомножитель и потом перемножать частные, то получился бы совсем другой результат.

8. Среднее арифметическое нескольких чисел. В IV классе решаются задачи на среднее арифметическое; в V классе вопрос повторяется, поэтому нет надобности затрачивать на него много времени, тем более что в V классе к нему придется вернуться еще раз при изучении совместных действий над обыкновенными и десятичными дробями.

Этот вопрос, как и всякий другой, тем лучше будет усвоен, чем чаще к нему будут возвращаться. В V классе придется к среднему арифметическому вернуться несколько раз, в том числе при решении задач с геометрическим содержанием. Здесь, как правило, решаются задачи на вычисление периметров, площадей и объемов не только по готовым данным, но и по данным, полученным путем непосредственного измерения. Но, как правило, измерение следует выполнять несколько раз и вычислять среднее арифметическое полученных чисел.

Наконец, в теме «Практические работы» учащиеся должны будут измерять несколько различных расстояний. Каждое из этих измерений будет выполняться несколько раз, и поэтому вычисление среднего арифметического станет совершенно неизбежным.

9. Порядок выполнения совместных действий. Скобки. Порядок выполнения действий известен учащимся с III класса. Здесь этот вопрос в общих чертах повторяется. Но для того, чтобы сформулировать правила о порядке действий, необходимо ввести понятие о **ступенях действий** (см. стабильный учебник автора, § 25, 1960 г.).

Эти правила выражают собою известное соглашение. Однако если вводить эти правила, рассматривая только произвольно взятые числовые выражения, то у учащихся получится такое впечатление, что это произвольные, ни на чем не основанные утверждения. Нужно все-таки, чтобы учащиеся почувствовали целесообразность этих правил, а не считали их произвольными соглашениями. Ведь могут быть различные формы соглашений; но если договаривающиеся стороны выбирают одну из них, значит, для этого есть основания. При этом не нужно думать, что речь идет о «доказательстве» этих правил.

Не следует выводить правила из числовых примеров, представляющих собою произвольные комбинации действий. Нужно взять з а д а ч у и записать ее решение в виде числовой формулы. Такая формула не может казаться произвольным нагромождением действий: она возникла из условий задачи, ее следует разобрать и в связи с разбором решить вопрос, в каком порядке удобно выполнить действия.

Для подобного разбора учитель берет, например, такую задачу:

«Семья платит за комнату 3 рубля и за отопление 50 копеек в месяц. Сколько заплатит эта семья за комнату с отоплением в течение года?»

Будем решать эту задачу так: вычислим сначала расход на комнату с отоплением в один месяц, а потом в год:

3 (рубля) + 50 (копеек) = 3 (рубля) 50 (копеек);

3 (рубля) 50 (копеек)·12 = 42 (рубля).

Решим теперь задачу иначе: вычислим сначала расход на комнату в год, а потом на отопление тоже в год, а затем полученные расходы сложим:

3 (рубля) · 12 = 36 (рублей);

50 (копеек)·12 = 6 (рублей);

36 + 6 = 42 (рубля).

Это решение можно было бы записать в виде числовой формулы так:

3 (рубля)·12 + 50 (копеек)·12 = 42 (рубля).

Мы решили эту задачу двумя способами и записали решение ее в виде числовой формулы. Во всех этих трех случаях результат должен быть один и тот же. В первых двух случаях не возникало вопроса о том, в каком порядке нужно выполнять вычисления, но когда мы написали формулу, то здесь могут возникнуть колебания относительно порядка действий. Первым действием, конечно, будет умножение $3 \cdot 12$, но какое действие будет вторым: прибавление числа 50 к полученному произведению или умножение 50 на 12? Чтобы внести ясность, можно было бы выражение $50 \cdot 12$ заключить в скобки, но тогда оказалось бы слишком много скобок. Поэтому решили установить особое правило, позволяющее вычислять без скобок, но так, чтобы получался тот же самый результат, что и со скобками. Так получилось важнейшее из трех правил:

Если в выражение входят действия второй и первой ступеней, то сначала выполняются действия второй ступени, а потом первой, независимо от того, в каком порядке они написаны.

Два других правила затруднений не представляют. Отклонение от порядка, указанного правилами, обозначается скобками.

10. Зависимость между данными числами и результатами действий над ними. Здесь следует проверить знание общих положений (впервые сформулированных в IV классе) для прямых действий (подчиняющихся переместительному закону) и для обратных: 1) слагаемое равно сумме минус другое слагаемое; 2) уменьшаемое равно вычитаемому плюс разность; 3) вычитаемое равно уменьшаемому минус разность; 4) один из сомножителей равен произведению, деленному на другой сомножитель; 5) делимое равно делителю, умноженному на частное; 6) делитель равен делимому, деленному на частное.

Каждому из этих положений можно, если угодно, придать форму правила, например: «Чтобы найти неизвестное слагаемое, достаточно из суммы двух слагаемых вычесть известное слагаемое».

Эти соотношения часто забываются учащимися по окончании курса начальной школы, вероятно потому, что их значение было еще мало понятно, или оттого, что их редко применяли.

Надо сказать, что и теперь заучивать наизусть эти положения, не понимая их цели и пользы и без частого употребления, мало полезно. Однако с каждым днем значение их будет возрастать. Трудно представить себе какое-нибудь преобразование, в котором не использовалось бы какое-нибудь из этих положений. Нужно только, чтобы учитель указывал ученикам те моменты, когда эти правила уместно вспоминать. Прежде всего мы встречаемся с ними при всякой *проверке действия обратным действием*. Например, выполнив вычитание, мы говорим: «Уменьшаемое равно вычитаемому плюс разность»— и проверяем разность посредством сложения.

Можно предлагать учащимся хорошо знакомые им со II класса специальные упражнения вида: $x + 5 = 10$, $x - 6 = 12$ и т. п., т. е. простейшие уравнения, решаемые учащимися со второго года обучения посредством применения перечисленных выше соотношений между данными и искомыми.

Чтобы такие упражнения были более убедительными, лучше предлагать *простые задачи*, записывая их условия в виде уравнения. Пример: «Я купил на несколько рублей книг, дал в кассу 10 рублей и получил 7 рублей сдачи. Сколько стоили книги?» На основании условий задачи составляется уравнение:

$$10 - x = 7.$$

Так как вычитаемое равно уменьшаемому минус разность, то $x = 10 - 7$ и $x = 3$. Конечно, можно на том же основании решить задачу и просто вычитанием. Но даже стабильные задачники последних лет для II—IV классов рекомендуют записывать условие задач, подобных приведенной, посредством простейших уравнений, в высшей степени наглядно отражающих ситуацию простых задач в одно действие, изложенных в «косвенный форме», нелегкой для понимания детей.

Итак, для усвоения перечисленных шести соотношений нужно почаще ими пользоваться. Поводов для этого в дальнейшем будет достаточно. Например, при разложении на множители всякий раз, когда мы пишем $15 = 3 \cdot 5$, полезно рассматривать 15 как делимое и говорить: «Делимое равно делителю, умноженному на частное».

11. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных. Из многочисленных соотношений этого рода достаточно перечислить 14 важнейших: по два для прямых действий (подчиняющихся переместительному закону) и по пяти для обратных.

1. Если какое-нибудь одно из двух слагаемых увеличим на несколько единиц, не изменяя другого, то сумма увеличится на столько же единиц.

2. Если какое-нибудь одно из двух слагаемых уменьшим на несколько единиц, не изменяя другого, то сумма уменьшится на столько же единиц.

3. Если уменьшаемое увеличим на несколько единиц, не изменяя вычитаемого, то разность увеличится на столько же единиц.

4. Если уменьшаемое уменьшим на несколько единиц, не изменяя вычитаемого, то разность уменьшится на столько же единиц.

5. Если вычитаемое увеличим на несколько единиц, не изменяя уменьшаемого, то разность уменьшится на столько же единиц.

6. Если вычитаемое уменьшим на несколько единиц, не изменяя уменьшаемого, то разность увеличится на столько же единиц.

7. Если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличим или уменьшим на одно и то же число единиц, то разность не изменится.

8. Если один из двух сомножителей увеличим в несколько раз, не изменяя другого сомножителя, то и произведение увеличится во столько же раз.

9. Если один из двух сомножителей уменьшим в несколько раз, не изменяя другого, то и произведение уменьшится во столько же раз.

10. Если делимое увеличим в несколько раз, не изменяя делителя, то частное увеличится во столько же раз.

11. Если делимое уменьшим в несколько раз, не изменяя делителя, то частное уменьшится во столько же раз.

12. Если делитель увеличим в несколько раз, не изменяя делимого, то частное уменьшится во столько же раз.

13. Если делитель уменьшим в несколько раз, не изменяя делимого, то частное увеличится во столько же раз.

14. Если делимое и делитель увеличим или уменьшим в одинаковое число раз, то частное не изменится.

Эти соотношения, за единичными исключениями, не изучаются в начальной школе, и поэтому для учащихся V класса их нужно считать новыми.

Вообще над изменениями результатов действий в зависимости от изменения данных неизбежно придется работать долго: сначала при изучении натуральных чисел, а потом и дробей. Здесь достаточно изучить основные, наиболее простые случаи изменяемости. Почти во всех из 14 случаев изменяется только один из двух компонентов действия; только в седьмом и четырнадцатом случаях изменяются оба компонента.

Эти два случая представляют особый интерес как самые простые примеры инвариантности результата, несмотря на изменение обоих компонентов. Оба они заслуживают исключительного внимания ввиду важности той роли, которую играет понятие инварианта в математической науке вообще.

Но и указанные соотношения не следует заучивать наизусть; поспешное буквальное заучивание может привести к путанице. Нужно, чтобы ученики вникали в смысл этих соотношений, или правил, применяя их в течение долгого времени, пока наконец у них не появится своего рода чутье, подсказывающее правильные формулировки. Такое чутье появляется не сразу, и есть только один путь его выработать: постоянно использовать эти правила в течение всего изучения арифметики, исправляя себя в случае ошибок.

Сначала эти соотношения можно ввести с помощью несложных задач, после чего полезно каждое из них иллюстрировать с помощью составления таблиц: взять какой нибудь случай, положим, вычитания $20 - 6 = 14$, и, постепенно увеличивая уменьшаемое на 1, на 2, на 3, следить за изменением разности. Учащимся нужно это проделывать самостоятельно и у доски.

Наконец, нужно заставить постоянно применять данные соотношения в процессе вычисления.

В учебнике все эти соотношения приведены вместе, но учебник — не методика: в нем излагаются главным образом окончательные итоги и выводы. В практике преподавания можно избежать такого большого скопления теоретического материала, разбивая его по крайней мере на две части: сначала изменение суммы и разности, а спустя некоторое время — изменение произведения и частного.

В методике достаточно рассмотреть один из 14 случаев; остальные учитель проработает аналогично сам.

Посмотрим, как изменяется сумма при изменении одного слагаемого. В учебнике ответ дан в виде готовой таблицы, но в классе эта таблица должна возникать динамически, т. е. постепенно. Возьмем сумму двух слагаемых:

$$20 + 32 = 52.$$

Теперь, не изменяя второго слагаемого, увеличим первое на единицу:

$$21 + 32 = 53.$$

Вероятно, учащиеся сразу скажут, что вторая сумма должна быть на единицу больше первой.

Вывод можно для большей убедительности выразить так. От прибавления единицы к одному из слагаемых и к сумме прибавится тоже единица, потому что сумма должна заключать в себе все единицы, которые находятся в слагаемых, а следовательно, в нее должна войти и та новая единица, которую только что прибавили к первому слагаемому. После этого учащиеся прибавляют к первому слагаемому сначала две, потом три, затем четыре единицы и делают соответствующие выводы.

Наконец, нужно подвести итог и сформулировать первое соотношение или правило. Лучше всего, если формулировка будет выработана самими учащимися.

Затем следует использовать это, как и все другие усвоенные правила, при устных вычислениях.

Пусть требуется, положим, устно сложить 37 и 45. Рассуждаем так: прибавим к первому слагаемому 3 единицы, получим 40; сложим 40 и 45, сумма будет 85. Эта сумма, согласно первому соотношению, на 3 единицы больше, чем сумма $37 + 45$, потому что первое слагаемое увеличено на 3 единицы. Значит, для получения суммы $37 + 45$ нужно число 85 уменьшить на 3. После этого нужно взять еще несколько аналогичных примеров.

Рассмотрев еще несколько свойств соотношений или правил, можно предложить, например, такую задачу:

В одной школе 350 мальчиков и 180 девочек, а в другой школе мальчиков на 50 больше, а девочек на 30 меньше. В какой школе больше учащихся и на сколько?

Пусть учащиеся сами решат эту задачу *так, как они умеют*. Вероятно, они найдут последовательно число учащихся в каждой школе и затем сравнят полученные числа. Для этого им придется выполнить п я т ь действий.

Это решение нужно признать правильным, но затем показать, что искомый результат можно найти о д н и м действием.

В самом деле, выпишем для сравнения обе указанные в задаче суммы.

$$350 + 180;$$
$$(350 + 50) + (180 - 30).$$

Число учащихся в каждой школе есть сумма числа мальчиков и числа девочек. Первое слагаемое второй суммы на 50 больше, а второе на 30 меньше соответствующих слагаемых первой суммы. Итак, вторая сумма больше первой на 50—30, или на 20.

12. Вычислительная практика. Культура вычислений должна быть постоянно в поле зрения учителя. Но это отнюдь не «пункт» для однократного прохождения, а *с к в о з н а я т е м а*, *проходящаяся с первого до последнего года* школьного обучения математике.

Во всех без исключения классах школы на занятиях любым математическим предметом должны точно и неуклонно соблюдаться два нижеследующих правила контроля вычислений. На учителях арифметики I—VI классов восьмилетней школы всеобщего обучения лежит моральная ответственность за то, чтобы оба правила своевременно были доведены до автоматизма, стали навыком всех, прошедших восьмилетку, при всех вычислительных работах как в школе, так и вне школы.

П р и к и д к а. Прикидкой называется предварительный контроль предстоящего выполнения арифметических действий над целыми и дробными (преимущественно выраженными по десятичной системе) числами в виде грубой приблизительной оценки в уме ожидаемого результата действия. В уме легко «прикинуть», например, число цифр произведения. Если предстоит перемножить числа 389 и 25, то нужно, округлив данные, перемножить в уме 400 и 30, т. е. в произведении будет 5 цифр; можно так же грубо приближенно указать, между какими круглыми числами заключается произведение. Перед умножением, например, 3,63 на 2,4 можно округлить данные сначала с недостатком, а потом с избытком: $3{,}5 \cdot 2 = 7$ и $4 \cdot 3 = 12$, т. е. еще до умножения известно, что произведение больше 7 и меньше 12. Такой предварительный контроль предупреждает грубые ошибки.

П р о в е р к а, т. е. последующий контроль вычисления, безусловно должна быть постоянным спутником всякого вычисления. В программах проверка результатов действий поставлена после зависимости между данными числами и результатами действий над ними; здесь имеется в виду проверка выполненного действия с помощью обратного. Но было бы грубейшей ошибкой думать, что о проверке нужно один раз сказать по этому поводу и больше никогда к ней не возвращаться. Напротив, начиная с этого момента, нужно систематически применять проверку п о с л е к а ж д о г о в ы ч и с л е н и я н а к а ж д о м у р о к е в о в с е х к л а с с а х ш к о л ы. Кроме того, нужно приучать проверять выполненное действие не только обратным действием, но и повторным выполнением того же самого действия или каким-нибудь особым приемом, по усмотрению учителя.

Перейдем теперь к различным видам вычислений.

П и с ь м е н н ы е в ы ч и с л е н и я. Прежде всего нельзя пренебрегать правилами к а л л и г р а ф и и. Неряшливая запись нетерпима не только потому, что она некрасива, но главным образом потому, что служит источником ошибок. В силу этого необходимо писать цифры отчетливо, так чтобы нельзя было одну цифру принять за другую. Столь же отчетливо нужно писать математические знаки: плюс, минус, косой крест, знак равенства, дробную черту, скобки и прочее.

Затем необходимо тщательное соблюдение того, что можно назвать в ы ч и с л и т е л ь н о й о р ф о г р а ф и е й. Не стоит перечислять здесь правил этой орфографии, хорошо известных учителям; укажем лишь следующее. При записи чисел столбиком необходимо располагать их так, чтобы числа одного разряда стояли друг под другом. При записи многозначных чисел не разделять классы точками или запятыми, а лучше, если удобно, оставлять между ними маленькие промежутки. При сложении «в строчку» многих слагаемых нельзя, сложив только первые два слагаемые, ставить знак равенства, а после его записывать сумму этих двух слагаемых: это значило бы соединять знаком равенства неравные между собою выражения.

Несоблюдение правил этого рода ведет к вредным последствиям, и потому необходимо с самого начала быть внимательным к этой стороне дела.

У с т н ы е в ы ч и с л е н и я. При выполнении устных вычислений возникает некоторая нагрузка для памяти. Письменные вычисления, как правило, не связаны с такими усилиями памяти, какие необходимы при устных вычислениях. Письменные вычисления требуют знания таблиц сложения и умножения, но эти таблицы к пятому году обучения должны быть усвоены настолько прочно, что суммы и произведения в пределах таблиц должны воспроизводиться а в т о м а т и ч е с к и, без всяких попыток «вспомогательных вычислений» в тетрадях, и тем более на клочках бумаги. Школьные предметные комиссии по математике должны в этом отношении предъявлять самые жесткие требования ко всем учителям математики V—VIII классов и учителям I—IV классов.

Если работа выполняется без всякой записи, нужно прежде всего помнить данные. Далее необходимо хорошо помнить все результаты промежуточных вычислений. Вообще для успеха устных вычислений существенно необходима выработка умения з а п о м и н а т ь ч и с л а.

Заметную роль в устных вычислениях играют индивидуальные особенности чисел. Вычисляя на бумаге, мы мало обращаем внимания на эти особенности. Перемножение одной пары трехзначных чисел ничем существенно не отличается от перемножения другой, когда дело касается письменного умножения. При устных же вычислениях хотя и приходится опираться на некоторые общие положения, например указывать на то, что сложение начинается с высших разрядов, но во многих случаях необходимо учитывать своеобразие именно данных чисел. Известно, что прием устного умножения 98 на 7 существенно отличается от приема умножения 156 на 5. Поэтому большим подспорьем для устных вычислений должно быть изучение индивидуальных особенностей чисел, в частности состава числа из простых множителей.

Для успешности устных вычислений необходима разумная тренировка. Тренировочные упражнения должны располагаться в строгой последовательности, сопровождаться разъяснением сущности предлагаемых приемов и не вести к чрезмерному умственному напряжению или вычислительным излишествам.

Если учитель сам большой мастер устных вычислений, то он легко может увлечь на этот путь многих учеников своего класса. Некоторые из них с большим энтузиазмом займутся тренировкой, придумают свои собственные вычислительные приемы и даже обгонят в этом отношении своего учителя. Это, конечно, хорошо, но нельзя требовать такого успеха от всех учащихся, потому что в этой области, как и в области памяти, по-видимому, существуют различные типы: одни могут превосходно вычислять устно, другие, напротив, — письменно. Учителю нужно помнить, что устный счет — не только очень сложный вид умственной работы, но в то же время искусство, и потому требования к отдельным учащимся должны быть строго индивидуализированы.

На общих занятиях в классе вообще нет места для специальных приемов устных вычислений. Здесь применяются только общие приемы, т. е. такие, которые могут быть применены к любым числам. Эти общие приемы вытекают из десятичного состава числа и основаны на применении законов и свойств арифметических действий.

Вся система устных вычислений должна быть тщательно продумана, занятия должны быть заранее спланированы, должен всегда соблюдаться переход от легких упражнений к более трудным, сообщаемые детям приемы вычислений должны быть основаны на законах и свойствах арифметических действий и не производить впечатления фокусов.

Устные вычисления сначала нужно делать медленно. Всякий раз, когда ученик получает задание сделать какое-нибудь устное вычисление, он должен подумать, какой прием в данном случае он будет применять. Выяснив прием и указав, на какое свойство действий он будет опираться, ученик делает вычисления вслух. Так делается до тех пор, пока не будет замечено, что учащиеся уже овладели этим навыком в достаточной степени.

Во время повторения в первом разделе V класса учащимся напоминаются или даются вновь установки, касающиеся устных вычислений, сама же практика протекает при прохождении следующих разделов и во всех старших классах.

Вычисления на счетах. Счеты представляют собой очень простой и вместе с тем замечательный вычислительный прибор. Прежде всего, это незаменимое пособие при изучении нумерации; они же служат и самым распространенным вычислительным прибором во всех хозяйственных и счетно-финансовых расчетах. Учащиеся, желающие научиться вычислять на счетах, должны уяснить себе сущность этого несложного приспособления. Она состоит в следующем. Счеты — прибор, предназначенный для выполнения сложения и вычитания чисел. Это нужно понять, а затем претворить в жизнь, добившись путем упражнений правильного и быстрого выполнения этих двух основных действий. Что же касается умножения и деления на счетах, то эти действия возможны лишь благодаря сведению их к сложению и вычитанию. В силу этого в первую очередь и особенно тщательно должны быть отработаны на счетах сложение и вычитание.

Вообще счеты замечательны в том отношении, что, сильно облегчая и ускоряя вычисления, в особенности сложение и вычитание, они не делают вычислительного процесса бессмысленным и механическим, а, напротив, способствуют как бы постоянному повторению десятичной системы и основных математических законов. Работа на счетах не делает, кроме того, вычисления однообразными: во многих случаях вычислителю приходится выбирать удобный и целесообразный прием действий. Человек, который долго работал на счетах, опытным путем найдет много простых и быстрых способов выполнения арифметических действий.

Например, вычислители часто меняют местами множимое и множитель, если это приводит к упрощению. Умножение 333 на 587 лучше заменить умножением 587 на 333. Сомножители иногда выгодно представлять в виде суммы, разности или произведения.

Наметим теперь кратко канву упражнений на счетах. После усвоения сложения и вычитания можно перейти к умножению на разрядную единицу, которое состоит в том, что множимое откладывается на счетах на столько проволок выше, сколько нулей во множителе. Здесь же уместно сразу показать деление чисел на 2. И умножение на разрядную единицу, и деление на 2 — важные вспомогательные средства, которые потом в различных сочетаниях встречаются при умножении и делении. После этого нужно постепенно научить детей умножению на однозначный множитель, т. е. на числа первого десятка. Когда это будет усвоено, то можно перейти к умножению на двузначный множитель. Деление можно показать только для некоторых частных случаев. Очень полезно поупражняться в сложении и вычитании десятичных дробей. Это убедит ученика в том, что механизм указанных действий не меняется от положения в числе запятой.

Вычислительные таблицы. Необходимо отказаться от ошибочного взгляда на табличные вычисления, как на такие, которые существуют для малограмотных и не требуют никакого знания и никаких усилий мысли, а потому не имеют большого воспитательного значения. Напротив, вычисления с помощью таблиц следует считать высшей формой вычислительной практики, и учитель, допуская учеников к таблицам, должен разъяснить им, что они по своим знаниям уже достойны пользоваться таким вычислительным орудием, которым пользуются зрелые и опытные вычислители. Всякий ученик, пользующийся таблицей, должен понимать ее устройство, а после достаточного опыта уметь в необходимых случаях интерполировать.

Таблицы входят в школьный обиход начиная с V класса. Различные таблицы применяются потом на каждом году обучения, причем по мере накопления опыта повышаются требования в отношении понимания устройства таблиц, пользования ими и применения интерполяции.

Школа не готовит вычислителей-практиков, она и не в состоянии их подготовить. Но школа, ставя себе задачу познакомить учеников с важнейшими видами и способами вычислений, применяемыми на практике, должна привить своим питомцам охоту к табличным вычислениям и умение обращаться к таблицам в необходимых случаях.

В V классе из вычислительных таблиц прежде всего применяются таблицы умножения. Можно начать с таблиц умножения двузначных чисел на двузначные. Здесь не встретится никаких затруднений, потому что искомое произведение по таблицам находят готовым. После небольшой тренировки можно с помощью этих же таблиц выполнять умножение десятичных дробей. Умножение в этом случае не труднее, чем в первом, но требует от ученика внимания к правильной постановке в произведении запятой. Это очень простое обстоятельство должно быть использовано учителем для подчеркивания того факта, что цифровой состав произведения, или, как говорят, его значность, не зависит от положения запятых в сомножителях. При умножении 0,46·32, или 4,6·32, или 46·32, или 46·0,32, или 46·3,2 и т. д.— во всех случаях произведения будут записаны одними и теми же цифрами (1; 4; 7; 2); разница будет заключаться лишь в положении запятой. Это часто ускользает от внимания учащихся.

Следующим шагом будет умножение с помощью тех же таблиц трехзначных чисел на двузначные. В зависимости от удобств такое умножение можно заменить умножением двузначного числа на трехзначное. При некоторой тренировке можно добиться большой легкости в выполнении этих вычислений.

После умножения можно показать учащимся деление с помощью тех же таблиц. Это действие будет интереснее предыдущих, так как потребует от учащихся внимания и несложных дополнительных вычислений. При выполнении обратного действия, в данном случае деления, с помощью таблиц умножения данное делимое лишь в редких случаях может быть найдено в таблицах и приходится брать ближайшее к нему меньшее число.

Кроме указанных таблиц, учащиеся могут постепенно ознакомиться с семью таблицами, имеющимися почти во всех справочниках: квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней, кубичных корней, чисел, обратных данному, длины окружности по диаметру и площади круга по диаметру.

13. Округление целых чисел. Упражнения в округлении преимущественно уточняют и частично углубляют сведения, приносимые из I—IV классов в связи с приближенным делением (деление с остатком) и практическими навыками в измерении величин. Много времени в этой теме уделить практике округления нельзя, и округление целых и дробных чисел до любого десятичного разряда должно быть проведено снова и уточнено в теме «Десятичные дроби»[1].

Все же и при повторении не следует считать округление только формально-оперативным навыком. Говорят, например, что от Москвы до Киева 860 *км*, следует разъяснить, что смысл этого существенно иной, чем в году 12 месяцев или семья Н. состоит из 5 человек. В году 12 месяцев, а не 11 и не 13; в семье — 5 человек, ни больше, ни меньше. Но, говоря, что до Киева 860 *км*, мы придаем этому смысл — расстояние Москва — Киев близко к 860 *км*: ведь никакое измерение не может быть совершенно точным. Если перепись населения города дала число жителей 86 543, то все понимают, что это число изменится даже до конца дня переписи. Только круглое число тысяч можно считать сравнительно устойчивым, и потому говорят и пишут: «В городе около 87 000 жителей», и даже пишут: «87 тысяч» словами, а не нулями.

Бывает и так, что одно и то же число в одних случаях мы округляем, а в других — не округляем.

Завод получил заказ: за 3 месяца изготовить 6796 вагонных осей. Каждая ось должна быть доставлена заказчику, может быть даже за определенным номером, а заказчик обязан расплатиться с заводом по числу изготовленных осей. В этом случае каждая ось должна быть на учете и нельзя подменять одну цифру другой. Но можно поставить вопрос иначе. Можно спросить, какая мощность данного завода, каковы его производственные возможности, сколько осей он может изготовить за три месяца?

Если данный завод изготовил 6796 осей, то вполне уместно скруглить число до полных сотен, даже до 7 тысяч.

В теме «Натуральные числа» V класса округление проще всего проводить на числовых примерах. Возьмем пример: округлить до сотен числа 3826 и 2789. На вопрос, сколько в каждом числе сотен, учащиеся ответят: 38 и 27. Но ответ можно уточнить: первое число заключено между 38 и 39 сотнями, и подобно этому уточнить второе. Смотря по уров-

---

[1] В программе, утвержденной летом 1960 г., округление целых чисел, как особый раздел, вообще перенесено в тему «Десятичные дроби», так что в теме «Натуральные числа», в полном соответствии с вышесказанным, остается только повторение и уточнение навыков округления, полученных в начальной школе.

ню подготовки в начальной школе и общего развития учащихся, можно оформить это в виде двойных неравенств:

$$3800 < 3826 < 3900; \quad 2700 < 2789 < 2800,$$

но можно и просто сформулировать словами: 38 сотен меньше числа 3826, а 39 сотен — больше. Тогда другой вопрос (в обоих случаях): «Какое число ближе к данному?» На него можно ответить с помощью вычитания: ближе 3800. Можно ли сказать, что число 3826 содержит около 38 сотен? Очевидно, да; можно отбросить десятки и единицы, сказать, что в данном числе о к о л о 38 сотен и написать приближенное равенство $3826 \approx 3800$ или 38 сотен. Второй пример можно было бы оформить так (или разъяснить словами):

$$2700 < 2789 < 2800.$$

Можно ли сказать, что в данном числе 2789 около 27 сотен? Можно, но лучше сказать, что их около 28, потому что 2789 ближе к 28 сотням, чем к 27. Записать следует, что $2789 \approx 2800$ или 28 сотням.

Итак, чтобы округлить число до 10; 100; 1000, нужно отбросить справа лишние разряды, заменив их нулями, а оставшиеся слева или оставить, как были, или увеличить последнюю оставшуюся цифру, смотря по тому, какое из округленных чисел ближе к данному.

При ограниченном числе часов на повторение едва ли удается сделать что-нибудь большее. Но и это — хороший первый шаг к округлению целых и дробных чисел в разделе «Десятичные дроби» и учению о приближенных числах в начале VI класса.

14. Буквенные обозначения и формулы. Буквенные обозначения постепенно вводятся в арифметику начиная с V класса. Первое появление букв удивляет учеников и даже вызывает у них чувство неудовольствия. Это чувство исчезает постепенно по мере осознания учениками тех выгод и преимуществ, какие приходят вместе с буквенными обозначениями. Постепенно школьники привыкают к буквам, и число протестующих становится все меньше. От учителя зависит ускорить этот процесс и сделать его менее болезненным.

Появление на доске суммы $a + b$ обычно вызывает протест в форме: «Мы ничего не понимаем» или: «А сколько здесь получится?» и т. п. Первое возражение, облеченное в форму «непонимания», несущественно. «Не понимаю» — это просто неудачная форма выражения мысли, довольно распространенная в школьном обиходе. В классной обстановке так принято говорить во всех тех случаях, когда что-нибудь неясно или не ладится. Здесь дело не в «понимании» в собственном смысле, а только в том, что ученик в первый раз встретился с некоторым фактом, который показался ему необычным и странным. Ко всяким новым фактам необходимо привыкать постепенно так же, как привыкали люди после керосиновой лампы к электрическому освещению.

Буквы нужно вводить в математику медленно, небольшими дозами, но настойчиво. На первой ступени буквы дают возможность записать сокращенно различные математические предложения, например, записать переместительный закон сложения в форме:

$$a + b = b + a.$$

Вопрос «Сколько здесь получится» можно отклонить: он не имеет отношения к переместительному закону. Закон состоит в том, что сумма не изменяется от перестановки слагаемых, но в нем ничего не говорится о числовом значении суммы. Мы только пытаемся записать этот закон кратко, но так, чтобы сущность его была ясна. Она выражена здесь двумя буквами и знаком равенства. Смысл записи можно передать словами так: если к одному числу прибавим другое число, то получится ровно столько же, как если бы мы к другому числу прибавили первое. Только это содержание и следует вкладывать в наше равенство.

Постепенно вводя в курс арифметики буквенную символику, учитель должен помнить о двух обстоятельствах, которые объясняют целесообразность употребления букв. Если целесообразность будет понята, то сразу отпадает половина трудностей, связанных с появлением буквенных обозначений.

Первое: приблизительно через полтора года учащиеся приступят к изучению алгебры, где они постоянно будут иметь дело с буквами. Если буквенные обозначения сразу своей тяжестью обрушатся на ученика, то это будет плохо. Ученик, конечно, начнет пользоваться буквами; он не может выключить себя из коллективной работы. Он станет связывать буквы знаками действий, выполнять над ними различные операции, особенно не размышляя (для этого у него не будет времени), и может довольно быстро впасть в автоматизм, для которого у него еще нет никаких оснований. Автоматизм вообще нельзя осуждать, когда за ним стоит длительная умственная, вычислительная, тренировочная и всякая иная *привычная* деятельность. Такой неизбежный автоматизм есть у всех специалистов, особенно у музыкантов. Но автоматизм ранний, преждевременный, ничем не оправданный не может принести хороших результатов. Если буквы медленно, постепенно начинают появляться еще в курсе арифметики, то учащиеся не спеша к ним привыкают, понемногу осознают их роль в математике и постепенно начинают их ценить.

Второе обстоятельство менее связано с потребностями завтрашнего дня учащихся, но оно имеет значение для всего общего и математического образования человека. После десятичной системы нумерации трудно указать другой аппарат, который оказал бы на развитие математики столь мощное влияние, как *буквенная символика*.

В первую очередь с помощью букв будут записаны законы действий: переместительный и сочетательный — для сложения и переместительный, сочетательный и распределительный — для умножения. До этого времени буквенные символы будут, так сказать, лишь объектом созерцания. Более активную роль они начинают играть при изучении зависимостей между числами в арифметических действиях. Правда, здесь употребляется лишь одна буква (по большей части x), но зато она выступает как участник действия. Перед учащимися пройдет шесть равенств:

$$x + a = b; \qquad ax = b;$$
$$x - a = b; \qquad x : a = b;$$
$$a - x = b; \qquad a : x = b.$$

Если на каждое из этих равенств будет решено 20—30 примеров, то учащийся не только усвоит зависимости между числами в действиях, но еще приобретет некоторую привычку в обращении с буквенными символами.

Далее, с помощью букв рекомендуется записывать некоторые правила действий, например правила умножения и деления дробей, а также другие правила, какие учитель сочтет нужным.

Решение задач с геометрическим содержанием, входящих в курс арифметики, сильно поднимет значение буквенной символики, если при этом постоянно будут применяться формулы. Здесь учащийся познакомится с формулами площадей прямоугольника и треугольника, поверхности и объема прямоугольного параллелепипеда, длины окружности и площади круга, боковой поверхности и объема цилиндра.

При решении задач на проценты применение формул не только не возбраняется, но рекомендуется и поощряется.

Предлагается в разделе «Пропорциональность величин» (VI класс) дать формулы прямой и обратной пропорциональности. Это новый повод для того, чтобы воспользоваться формулами при решении задач.

Вообще применение формул при всевозможных вычислениях с каждым годом обучения должно неуклонно расширяться. Однако нужно помнить, что ученик на первых порах не имеет большой склонности прибегать к формулам, не видя в них надобности и не понимая их полезности. Поэтому нужно поставить дело так, чтобы ученик оценил значение формулы. Для этого необходимо решать несложные задачи с применением формул. Однако если будет дана задача, в которой искомым будет только одно единственное число, то цель достигнута не будет.

Пусть нужно найти путь, пройденный телом в течение 10 минут со скоростью 50 *м* в минуту. Ученик сразу даст ответ: $50 \times 10 = 500$ (*м*). Если ему будет предложено решить эту задачу по формуле $s = vt$, то он удивится и по всей вероятности ответит: «Я уже решил ее без формулы». Он не понимает, для чего нужна формула, если без нее можно обойтись. Необходимо довести до его сознания, что во многих случаях можно обойтись при решении задач без формул, но применение формул у с к о р я е т и о б л е г ч а е т решение. Чтобы эти слова звучали убедительно, следует предлагать задачи, в которых требуется найти не единственное число, а множество чисел одного и того же рода.

В качестве примера нужно взять легкую и доступную пониманию детей задачу:

При отправлении телеграммы в сельскую местность взимают за каждое слово 3 коп. и за доставку 20 коп. с 1 километра. Сколько следует уплатить за телеграмму в 10, 11, 12, 13, 14, 15, ..., 30 слов, если расстояние равно 1 *км*?

Для решения задачи можно написать формулу $y = 3x + 20$. По этой формуле можно найти не одно число, а множество чисел, последовательно подставляя в нее вместо x числа 10, 11, 12... Значит, по этой формуле мы решаем сразу не одну задачу, а целую серию однородных задач.

Это, конечно, будет замечено учениками, и они больше станут ценить и уважать формулу.

Вот еще аналогичная задача:

При переводе денег по телеграфу взимают с каждых десяти рублей 20 коп.; кроме того, за каждое слово письменного сообщения 3 коп. и, наконец, дополнительно со всякой отправляемой суммы берут 50 коп.

Сколько нужно уплатить за перевод

10	рублей	с	текстом	5	слов,	
20	»	»	»	5	»,	
20	»	»	»	6	»,	
30	»	»	»	5	»,	
30	»	»	»	6	»,	
30	»	»	»	7	»,	
40	»	»	»	5	»,	
40	»	»	»	6	»,	
40	»	»	»	7	»,	
40	»	»	»	8	»,	
100	»	»	»	5	»	и т. д.

Для решения такой задачи можно написать формулу:

$$z = 20x + 3y + 50,$$

где x обозначает число десятков, а y — число слов текста.

Здесь опять в одной задаче заключено множество маленьких задач одного рода, причем решение каждой из них получается в результате подстановки данных чисел в одну и ту же формулу.

Учитель может сам составить ряд таких задач или, выбрав из задачников, время от времени предлагать их учащимся.

15. Величины и их измерение. Решать практические задачи можно, вводя и м е н о в а н н ы е ч и с л а. С помощью отвлеченных чисел мы можем познавать правила и законы, относящиеся к самим числам, но не можем перебросить мостика от чисел к объективной реальности. Чтобы изучать окружающий мир, нужно и з м е р я т ь величины. Начинать нужно с величин, близких ученику и удобных для измерения, с простейших измерений. Число величин, знакомых ученикам V и VI классов, еще сильно ограничено. Эти величины следующие: длина, площадь, объем (емкость), вес, время, температура, стоимость, угол. Эти величины известны многим уже из дошкольного опыта как самые важные и необходимые. При изучении физики в VI классе ученик узна́ет такие величины, как сила, работа, количество тепла и пр. Они столь же необходимы, как и первые, но с ними ученик познакомится на занятиях по физике; величины, перечисленные выше, должны быть изучены на уроках математики.

Ученик должен знать единицы измерения величин, знать соотношения между единицами мер и уверенно выполнять над ними необходимые действия. Первые четыре величины связаны между собою и измеряются метрическими мерами. Несмотря на простоту метрической системы, все-таки нельзя сказать, что она хорошо знакома даже ученикам V класса и они хорошо оперируют с метрическими мерами.

Первое понятие, которое нуждается в разъяснении и уточнении, это понятие «в е л и ч и н а». Так как с этим понятием дети встречаются во всех математических задачах, то оно должно быть доведено до их сознания в форме, доступной их возрасту. Почти все авторы учебных руководств по арифметике уделяют внимание этому вопросу и в меру своих сил разъясняют это важнейшее для математики понятие. Здесь следует рассказать о величине в описательной форме: дать примеры явлений и свойств предметов, которые можно измерить, и результат измерения выразить числом, о которых можно говорить, что они больше или меньше и во сколько раз, что они способны увеличиваться или уменьшаться. Полезно предупредить учащихся, что со многими величинами, как сила, работа, количество теплоты и т. п., они скоро познакомятся в курсе физики.

Второй вопрос, которого придется здесь коснуться, это вопрос об *измерении величин*. Для измерения всякой величины необходима *единица измерения*. Конечно, единица измерения может быть вполне произвольной, но такой произвол неудобен. Поэтому с древнейших времен многократно устанавливались в различных странах, хотя и произвольные, но определенные единицы измерения. В настоящее время наиболее совершенной системой единиц измерения считается метрическая система мер. Можно кратко рассказать о ее возникновении и преимуществах.

Далее полезно указать, что для всякой величины можно было бы установить только одну единственную единицу измерения, все длины можно было бы измерять одной единицей длины, все весомые предметы — одной единицей веса и т. д. Но на практике это было бы неудобно: имея только одну единицу измерения, мы в результате измерения в одних случаях получали бы очень большие числа, а в других случаях — слишком малые. Поэтому поступают иначе: совокупность нескольких единиц принимают за новую единицу и дают ей особое название. С другой стороны, определенную часть единицы тоже принимают за новую единицу и также дают ей особое название Таким образом, получается *система единиц*, служащая для измерения одной и той же величины, например длины, площади, объема, веса, времени.

Наконец, необходимо добиться усвоения учащимися того, что всякая величина измеряется единицей, которая с ней однородна, т. е. длина измеряется длиной, площадь — площадью, тяжесть — тяжестью и т. д. Очень многие из них слышали и как будто знают об этом, но в самых нужных случаях забывают. Когда в первый раз выводится формула площади прямоугольника, то заполняющие ее квадратики подсчитываются, но на другой же день об этом подсчете забывают и в памяти сохраняют только голую фразу: «Умножить длину на ширину». Если же через несколько месяцев после этого потребуется определить площадь какой-нибудь незнакомой фигуры, что можно сделать только путем непосредственного подсчета клеток, то учащиеся обнаруживают непонимание и беспомощность.

Что же касается самого изучения метрических мер, то здесь нужно использовать все доступные учителю средства воздействия: рассказ, показ стенных плакатов и моделей и изготовление единиц измерения силами учащихся. Дети должны помнить названия всех единиц длины, площади, объема, веса и емкости, знать их единичные отношения и узаконенные сокращенные обозначения, знать зависимости между мерами веса и объема. Для усвоения этих зависимостей полезно упражнять учеников в нахождении веса воды по данному ее объему и обратно, объема воды по данному весу ее. Полезно далее, пользуясь понятием удельного веса, решать аналогичные задачи и для других веществ (снег, дерево, железо, медь, мрамор, золото, ртуть и т. д.).

Раздробление и превращение метрических мер должны выполняться быстро, легко, а в нужных случаях устно. После ознакомления с десятичными дробями эти преобразования должны безукоризненно выполняться путем перенесения запятой. Необходимо обеспечить учеников достаточным числом примеров для письменных вычислений и вопросов для устных ответов.

Для овладения метрической системой мер следует предлагать разнообразные упражнения. Можно указать такие упражнения: найти веса различных жидкостей (керосин, масло, спирт, ртуть и т. д.) по данным их объемам и удельным весам: найти объем, занимаемый каким-нибудь телом, если известен его вес.

Важно ознакомить учеников с действительными размерами каких-нибудь известных им предметов, а также со средними скоростями пешехода, лошади, парохода, велосипедиста, поезда, автомобиля, трамвая, самолета и включить эти числа в условия задач.

Не менее существенны и те величины, измерение которых не связано с метрической системой мер. Сюда относятся время, температура, стоимость, угол. Помимо специальных упражнений в раздроблении и превращении для времени, стоимости и угла, необходимо частое знакомство с такими измерительными приборами, как часы, термометр, угломерные инструменты, а также решение достаточного числа задач, в условия которых входят эти величины.

16. Задачи. Первая тема V класса «Натуральные числа» в самой значительной части посвящена повторению и систематизации пройденного в I—IV классах. При этом повторении задачи решаются на каждом занятии, располагаясь в порядке возрастающей трудности. При подборе простых и составных задач целесообразнее всего во время повторения руководствоваться материалами для классификации задач по их содержанию и характеру, которые в свое время печатались в программах начальной школы последних лет. Из этих материалов видно, что важнейшие темы задач, преимущественно п р о с т ы х, в одно действие, были следующие: нахождение остатка и разности при вычитании; увеличение и уменьшение числа на несколько единиц; разностное сравнение; увеличение и уменьшение числа в несколько раз; кратное сравнение; деление на части и по содержанию; нахождение одной и нескольких долей (части) числа; задачи на простую пропорциональность («простое тройное правило»); задачи на встречное движение; вычисление площадей и объемов.

В повторительный период задачи этих видов могут решаться в связи с повторением пройденного, независимо от задач, связанных с очередными разделами программы V класса.

При работе учителя по уточнению и систематизации законов и правил, относящихся к арифметическим действиям, существенное значение имеет продуманный подбор п р о с т ы х з а д а ч на к а ж д о е д е й с т в и е.

Решение подобных задач должно быть связано с тщательной проверкой понимания их смысла со стороны учащихся. Недооценку значения простых задач и даже наблюдавшийся иногда отказ от их решения, как «легких» и «общеизвестных», а также «в интересах выигрыша времени» нужно считать крупной педагогической ошибкой. Напротив, на каждое из действий должно быть решено по нескольку простых задач: содержание и формулировка условий иногда бывают такими, что решающий не сразу находит нужное действие. Видя, например, в тексте слово «меньше» часто пытаются задачу на сложение решать вычитанием.

Независимо от этого должны решаться составные задачи на 2—3 действия; при этом следует выбирать виды задач, знакомые учащимся по их практике в I—IV классах: нахождение среднего арифметического, нахождение чисел по их сумме (или разности) и отношению, на встречное движение и т. п. Новыми для учащихся будут задачи на движение в одном направлении и, может быть, некоторые задачи на время. Данные многих задач здесь представляют хорошие возможности для повторения метрической системы мер.

Очень полезно уже в это время приступить к записи решений некоторых задач в виде ч и с л о в ы х ф о р м у л. Для этой цели из всей массы решаемых задач учитель выбирает наиболее простые, потом немного труднее, но не предлагает трудных, многовопросных задач. Сначала для этой цели можно предлагать задачи в два вопроса, например:

В одном ящике кассы лежит 15 пятирублевых билетов, а в другом 25 рублей. Сколько всего денег в кассе?

Сначала можно решить эту задачу по вопросам, а потом записать в виде числовой формулы:

$$1)\ 5\cdot 15 = 75; \qquad 2)\ 75 + 25 = 100;$$

$$x = 5\cdot 15 + 25.$$

После решения нескольких таких задач можно перейти к задачам в три вопроса, например:

В одном ящике кассы лежит 12 десятирублевых билетов, а в другом — 20 двадцатипятирублевых. Сколько всего денег в кассе?

Числовая формула имеет вид:

$$x = 10 \cdot 12 + 25 \cdot 20.$$

Вообще для записи решения в виде числовой формулы удобно брать такие задачи, в которых отчетливо выражена прямо пропорциональная зависимость величин.

Решение задач на все четыре действия может регулироваться в программах только более или менее общими указаниями; планирование, подбор и последовательность решения задач связаны во многом с индивидуальностью учителя, его опытностью и мастерством. Многие учителя, особенно опытные, выбирают задачи из разных задачников, используя собственный опыт и знания. Но есть и такие, которые решают подряд задачи из задачника, признанного стабильным. В методиках, всегда ограниченных определенным объемом, трудно обстоятельно рассмотреть этот самый сложный вопрос арифметики. Он рассматривается в специальных монографиях. Здесь же придется остановиться на нем кратко.

Вопрос о задачах безусловно труден. Ученику гораздо легче решить десяток примеров без текста, чем самостоятельно решить одну текстовую задачу. Почему это происходит, известно всем: в примере указаны действия и их порядок, а в задаче ни того, ни другого не указано. Поэтому при решении задач необходимы помощь, руководство и указания со стороны учителя.

1. В некоторых случаях трудно понять, почему ученик не может решить предложенную задачу. Учитель должен выяснить причину и, установив ее, устранить. Иногда ученик не понимает условия задачи из-за того, что не знает смысла некоторых встречающихся в ней слов. Нельзя только думать, что так как в задаче все слова русские, а иностранных ни одного нет, то все они должны быть известны и понятны ученикам V и VI классов. Это совершенно неверно. В «Орфографическом словаре русского языка» под редакцией С. И. Ожегова и А. Б. Шапиро сколько угодно слов русских, но недостаточно понятных даже многим взрослым. Поэтому учителю необходимо хорошее знание детского словаря школьника V—VI классов. Это вопрос очень серьезный. Нельзя, конечно, годами задерживаться на том запасе слов, который к данному моменту оказался освоенным учащимися. Этот запас нужно расширять, но это расширение — дело сложное. Часто легче ввести иностранное (например, французское) слово,

дав его точный перевод, чем ввести незнакомое русское слово, которое нельзя перевести, а придется сопровождать различными сравнениями и пояснениями. Всякий, работавший в средних классах школы, знает, как иногда неправильно воспринимают ученики, казалось бы, самые обыкновенные слова, как трудно с первого раза разъяснить и пустить в оборот незнакомое слово. Обыкновенно бывает, что 40 учеников, сидящих в классе, впервые восприняли известное слово при разных обстоятельствах и по-разному его поняли. А между тем нельзя полноценно решить задачу, не понимая правильно и однозначно всех слов, какие встречаются в ее условии.

2. Немаловажно и то, из какой области взят сюжет задачи. Дети больших городов имеют другой кругозор по сравнению с кругозором тех, кто провел свое детство в деревне или маленьких городках, и это относится не только к нашей стране, но и к большинству зарубежных стран.

Состав и занятия населения, родителей и географические особенности данной местности оказывают влияние на формирование детских понятий. Автору приходилось сравнивать умственный багаж двух десятилетних мальчиков: одного из района шахт, другого из местности, населенной кустарями. Не сразу можно было уловить, в какой местности жил второй мальчик, но первый обладал запасом таких понятий и слов, которые не оставляли никаких сомнений: родиной его был район шахт, его друзьями — шахтеры, а шахтерский быт — его повседневным окружением. Нужно не забывать, что основы школьной арифметики — это наука для детей 9—12 лет, т. е. наших учащихся III—VI классов. В это время они еще не столько читают, сколько живут под непосредственными детскими впечатлениями, если только не увлекаются беспорядочным чтением случайно подвернувшейся литературы для взрослых.

Все это ставит перед нами большие педагогические вопросы. Первый из них: откуда брать сюжеты задач, чтобы они были в одинаковой степени понятны и городским и сельским детям? По ряду причин мы не можем пока составлять отдельные задачники для городских и сельских школ. Насыщение задач каким-нибудь определенным содержанием — производственным или сельскохозяйственным — означало бы, что мы изучающих арифметику в школах пытаемся подводить к какой-нибудь профессии; но для указанных возрастов это слишком рано и потому неправильно.

Из сказанного ясно одно: при изучении арифметики в III—VI классах учителю самому неизбежно приходится подбирать сюжеты задач так, чтобы они были в равной степени интересны, доступны и понятны всем детям, обучающимся в этих классах.

3. Нельзя не остановиться также на вопросе о величинах. Число величин, которые могут встречаться в задачах для V—VI классов, очень ограничено.

Употреблять какие-нибудь величины сверх указанных, конечно, нельзя до тех пор, пока они не появятся в какой-нибудь смежной дисциплине (например, в физике). Хорошее знание определенного круга величин — важная предпосылка для успешного решения задач на все четыре действия. Это знание состоит не только в том, что ученик только слышал о них и единицах их измерения. Эти единицы нужно видеть, осязать (держать в руках) и использовать в процессе измерения. Только тот, кто выполнял хотя бы самые несложные измерения, держал в руках соответствующие инструменты, не будет делать грубых ошибок в своих заключениях и вычислениях.

Все, что относится к операциям над величинами, которые выражаются *именованными* числами, и к знанию самих мер: раздробление, превращение, единичные отношения мер и обозначения,— должно быть в свое время усвоено учащимися. Особенно важно добиться понимания различия мер длины, квадратных и кубических.

4. Какими должны быть числовые данные в задачах? На этот вопрос можно ответить очень кратко: числовые данные в условиях задач должны быть реальными, т. е. соответствовать действительности, и быть приближенными в тех случаях, когда это вытекает из условия задачи. Все же на этом вопросе нужно остановиться подробнее. Прежде всего, нельзя требовать от авторов задачников, чтобы они всегда указывали реальные данные. Если задачник составляется в течение трех лет, то в наше время автор не может уследить за последними колебаниями цен: за это время они могут сильно измениться. При современном бурном росте городов трудно дать в задачнике самые свежие данные об их населении. Вообще в задачниках лишь в редких случаях удается говорить о конкретных городах, приходится говорить о городе Н., отчего замысел задачи не изменится.

Но этого мало. Реальные данные иногда целесообразно упрощать. Критики часто обвиняют авторов задачников в искусственном подборе числовых данных, но это иногда необходимо делать. Когда мы о б у ч а е м решению задач, а реальные числовые данные сложны,то целесообразно упрощать числа для облегчения решения. Даже в таких случаях, когда цена сахара, например, равна 1 рублю 15 копейкам, а не ровно 1 рублю или одно число не делится на другое без остатка, может быть, полезно решить сначала ту же задачу с более у д о б н ы м и данными, уменьшая трудности и переходя к совершенно точным данным, когда задача уже освоена на упрощенных. Нельзя допускать только нелепые данные, вроде роста человека 4 *м* или окружности циферблата карманных часов в 1 *м*.

5. В арифметических задачах встречается много специальных выражений, ставших привычными для составителей задачников и для учителей. При этом предполагается, что и ученики хорошо понимают и быстро схватывают смысл этих выражений. Конечно, это далеко не так. Возможно, что ученики как-то по-своему понимают эти выражения, но нельзя сказать, что все они понимают их однозначно. Если же в самом деле в классе найдется несколько учеников, недостаточно понимающих язык задачников, то решение задач будет поставлено под угрозу.

В первую очередь учащиеся должны точно понимать такие постоянно встречающиеся в задачниках выражения, как увеличить число на несколько единиц; уменьшить число на несколько единиц; увеличить число во столько-то раз; уменьшить число во столько-то раз; найти часть (дробь) числа; найти число по его части (дроби); найти отношение чисел; сколько раз одно число содержится в другом; во сколько раз одно число больше (меньше) другого; на сколько единиц одно число больше (меньше) другого и т. п.

Помимо этих знакомых многим детям выражений, тесно связанных с математикой, существует много других, в отношении которых трудно сказать, понимают их учащиеся или не понимают.

Сюда относятся: себестоимость товара, номинальная цена, стоимость; вес нетто, вес брутто, тара; гривенник, двугривенный, пятиалтынный; зябь, пар, озимые и яровые хлеба; цистерна, газосварщик и много других слов как из современной, так и прежней жизни и быта.

6. Решение задач — труднейший момент изучения арифметики. Кроме непонятых или плохо понятых слов и оборотов речи в условиях задач, возраст учащихся не позволяет им легко разбираться в тех довольно сложных ситуациях, с которыми они встречаются в задачах. Это относится к задачам для всех классов от III до VI. Получается даже некоторое противоречие: задачи для учеников, еще изучающих арифметику, труднее, чем на уроках алгебры в VII классе. Кроме того, решение арифметических, часто очень трудных задач иногда протекает неправильно. Хуже всего, если задачи решаются подряд по задачнику, причем в школе очень гордятся тем, что задач решено очень много. Можно было бы видеть в этом реальный успех, если бы ученики с каждой новой решенной задачей продвигались вперед на какой-нибудь хотя бы малый шаг; но при существующем положении вещей они не продвигаются. В самом деле, при коллективном решении задачи вообще не приходится долго раздумывать над решением. Время не ждет. Кто-то, может быть сам учитель, подсказал правильную мысль, решение как-то сошлось с ответом, выкладки быстро стираются с доски и начинается решение новой задачи. Дома — та же картина: товарищ, сосед, родственники наспех помогли, кое-как «вышел» верный ответ, и задача считается понятой и решенной.

Многолетний опыт говорит, что через день-два от задачи не остается никакого следа в сознании многих и многих учеников — все исчезло окончательно: и сюжет, и числовые данные, и способ решения. А между тем на уроке в день решения задачи казалось, что ученики проявляли если не интерес, то по крайней мере желание ее решить. Это получается всегда, если гнаться только за числом решенных задач, не думая о *качестве* решения. Как выправить это ненормальное положение? В общей методике арифметики, а не специальной монографии можно сказать об этом лишь кратко.

Прежде всего совершенно недопустимо, что задача молниеносно забывается и это считается в порядке вещей. Почему же, например, переместительный закон сложения запоминается не на одни сутки, а на всю жизнь? Нельзя настаивать на том, чтобы задача, решенная в сентябре 1948 г., безошибочно была воспроизведена в сентябре 1958 г., но задача должна оставлять какой-то след в сознании. Проф. И. В. Арнольд в одной статье говорит о задаче, которая запомнилась ему на всю жизнь. Почему же у наших учеников, если и остается какое-нибудь впечатление от задач, то обыкновенно туманное, расплывчатое, а подчас и неприятное? Представим себе, как ничтожно впечатление от задачи у того ученика, который сидел в укромном уголке класса, пропустил начало задачи и переписал ее механически с доски; если через полгода дать ученику снова решать ту же задачу, то он, конечно, воспримет ее как совершенно новую.

Конечно, не может быть речи о заучивании решений, но вместе с тем нельзя считать решенной задачу, если ученик понимает ее только наполовину или вовсе не понимает, а решил ее с чужих слов. Задачу нужно в какой-то мере у с в о и т ь. Для этого после первого, как правило, недостаточно понятого решения нужно закрыть тетрадь и снова попытаться ее решить. Если опять окажется, что задача не получается, то нужно снова подвергнуть ее разбору и попытаться решить самостоятельно.

Среди средств, способствующих улучшению решения задач, *можно указать на применение* аналитико-синтетического разбора и геометрических иллюстраций. Об этом можно прочесть во многих пособиях по методике начальной арифметики.

Остановимся еще на проверке решения задач[1]. Для понимания задачи огромное значение имеет проверка ее решения. Так как этот вопрос обычно излагается очень кратко, то мы остановимся на нем несколько обстоятельнее.

Проверка решения задачи осуществляется одним из следующих трех способов.

С п о с о б А. Составляют задачу, обратную предложенной, вводя в ее условие полученный ответ и исключая одно из известных (данных) чисел, которое становится искомым. Если после решения обратной задачи в ответе получится исключенное число, то можно полагать, что исходная задача решена правильно.

С п о с о б Б. Проверяют соответствие полученного ответа всем условиям задачи.

С п о с о б В. Решают предложенную и уже решенную задачу другим способом. Если ответы, полученные двумя различными путями совпадут, то это будет подтверждением их правильности.

---

[1] См. П. М. **Э р д н и е в.** Развитие навыков самоконтроля при обучении математике, Учпедгиз, 1957.

Проверка способом А. В двух библиотеках 4560 книг. Если первая библиотека передаст второй 360 книг, то в первой останется $\frac{3}{5}$ числа книг, оказавшихся во второй библиотеке.

Сколько книг было первоначально в каждой библиотеке? Ответ: 2070 книг; 2490 книг.

Можно составить три обратные задачи.

1. Искомое — 4560 книг.

В одной библиотеке было 2070 книг, а в другой 2490. Сколько книг было в двух библиотеках вместе?

2. Искомое — 360 книг.

В одной библиотеке было 2070 книг, а в другой 2490 книг. Сколько книг нужно передать из первой библиотеки во вторую, чтобы число книг в первой библиотеке составило $\frac{3}{5}$ числа книг второй библиотеки?

3. Искомое — число $\frac{3}{5}$.

В одной библиотеке 2070 книг, а в другой 2490 книг. Из первой библиотеки передали во вторую 360 книг. Какую часть составит число книг первой библиотеки от числа книг во второй библиотеке после передачи?

Решая, например, вторую обратную задачу, получаем: 1) $2070 + 2490 = 4560$ книг было в двух библиотеках вместе; 2) $1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$. Сколько частей составляет общее число книг в обеих библиотеках, если число книг во второй библиотеке принять за единицу; 3) $4560 : \frac{8}{5} = 2850$ книг стало во второй библиотеке; 4) $2850 - 2490 = 360$ книг передали из первой библиотеки во вторую. Результат совпадает с исключенным числом.

Примечание. Нет надобности во всех возможных случаях составлять все три обратные задачи. Это решит сам учитель в каждом отдельном случае.

Проверка способом Б. Решив задачу, снова возвращаемся к ее условию. Прочитав задачу полностью, разбиваем ее условие на отдельные смысловые части и выясняем для каждой части, совпадает ли найденный ответ с данными в задаче числами.

Например, читаем: «В двух библиотеках 4560 книг». Но мы уже вычислили при решении задачи, что в первой библиотеке было 2070 книг, а во второй 2490. Чтобы узнать, сколько было книг в обеих библиотеках вместе, вычисляем сумму книг:

$$2070 + 2490 = 4560 \text{ (книг)}.$$

Найденные числа удовлетворяют условию задачи.

Читаем условие дальше: «Если первая библиотека передает второй 360 книг...» Выясняем, как отразится эта передача на состоянии фонда в той и другой библиотеке: в первой книг станет меньше на 360, а во второй — на столько же больше.

2070 — 360 = 1710 книг будет в первой библиотеке.
2490 + 360 = 2850 книг будет во второй библиотеке.

Продолжаем чтение условия задачи: «... то в первой библиотеке останется $\frac{3}{5}$ числа книг, оказавшихся во второй библиотеке». Проверяем, получится ли у нас такое отношение:

$$\frac{1710}{2850} = \frac{171}{285} = \frac{57}{95} = \frac{3}{5}.$$

Отношение числа книг в двух библиотеках действительно оказалось равным $\frac{3}{5}$.

Из проверки видно, что ответ не противоречит ни одному из условий задачи, значит, задача решена правильно.

Проверка способом В. Во многих случаях арифметические задачи решаются несколькими способами. Обычно сравнивают, какой из этих способов лучше, проще и быстрее приводит к цели. Но необходимо подчеркнуть, что решение задачи новым способом одновременно означает проверку ответа, полученного первым способом. Способом «В» можно воспользоваться не во всех случаях, тогда как два предыдущих способа применимы ко всем задачам.

Проверку решения задач можно проводить и устно, чтобы сэкономить время. Иногда целесообразно устные вычисления сопровождать записью результатов (так называемая полуписьменная проверка). В тех случаях, когда числа невелики и числовые результаты видны сразу, можно не производить вычислений, а ограничиться коллективным составлением плана проверки и установлением последовательности действий.

Может возникнуть вопрос, почему уделено столько внимания проверке, когда правильность решения задачи бывает иногда очевидной. Конечно, проверка — не всегда самоцель; иногда главная цель — это решение обратной задачи. Одностороннее восприятие объекта, сопровождаемое движением мысли в одном направлении, не дает глубоких и прочных знаний, не активизирует мыслительного процесса. Чтобы знания были глубокими и прочными, а восприятие активным, необходимо рассмотреть объект с другой точки зрения или перестроить задачу. Полезно запомнить, что при проверке, как правило, решается обратная задача и наоборот, когда решается обратная задача, одновременно проверяется решение первой. Проверка любых упражнений всегда должна быть связана с творческим отношением решающего к содержанию задачи.

Вообще, если задача совершенно «одинока», то ее полезность ограниченна. Именно поэтому полезно окружать ее группой обратных и сходных задач.

Последний этап в работе над задачей — составление задач учащимися. Если учащийся сначала под руководством учителя и по его указаниям, а потом самостоятельно научился составлять задачи по определенным заданиям, то можно сказать, что он в решении задач делает безусловные успехи.

Глава вторая

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ [1]

Тема «Делимость чисел» должна быть введением в изучение дробей, которые по программе идут сразу после делимости чисел. Многие вопросы делимости, такие как признаки делимости, простые числа, нахождение наименьшего общего кратного, нахождение наибольшего общего делителя, проходятся при изучении дробей.

17. Делимость суммы и разности. Нужно разъяснить общее положение:

Если каждое слагаемое делится на какое-нибудь число, то и сумма делится на это число.

---

[1] Части текста этой главы, набранные петитом, не обязательны для изучения, как выходящие за рамки новой программы по арифметике, опубликованной Управлением школ РСФСР перед началом 1960/61 учебного года. — *Ред.*

Возьмем сначала два небольших четных числа, хотя бы 10 и 8, и напишем их сумму: $10 + 8 = 18$.

Сумма четных чисел дала также число четное. Может ли она быть нечетной? Вероятно, ученики без всякого колебания согласятся с тем, что сумма четных чисел всегда дает число четное. Если найдутся в классе сомневающиеся, то пусть попробуют из двух четных чисел составить нечетную сумму. В том же можно убедиться еще так. Мы взяли два четных числа. Это значит, что каждое из них состоит из нескольких пар: число 10 состоит из пяти пар, число 8 — из четырех пар; если мы их сложим, то у нас будет вместе девять пар; значит, и после сложения будет число четное.

Можно прибегнуть к такому наглядному приему. Пусть у нас 10 копеек в виде пяти двухкопеечных монет и 8 копеек в виде четырех двухкопеечных монет. Что будет у нас в сумме? Девять двух копеечных монет, и больше ничего: никаких иных монет у нас не было.

Рассмотрение одного примера показало, что если каждое из двух слагаемых делится на 2, то и сумма их разделится на 2. Однако этого еще мало для общего вывода.

Но можно взять не два, а больше слагаемых — сколько угодно. Учащиеся могут сами подобрать и исследовать суммы нескольких слагаемых, например:

$$6 + 8 + 10 = 24;$$
$$6 + 8 + 10 + 12 = 36;$$
$$6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 50;$$
$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 84.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Все дело в том, чтобы учащиеся схватили суть рассуждения. Число слагаемых не имеет значения — их может быть сколько угодно; их порядок тоже не имеет значения, как и их величины. Стало быть, сумма нескольких четных чисел — тоже число четное, и если каждое из нескольких слагаемых делится на 2, то и сумма их разделится на 2.

Здесь, во избежание скороспелых неправильных выводов, нужно поставить вопрос: какой будет сумма нечетных чисел — четной или нечетной? Вероятно, найдутся такие учащиеся, которые сгоряча «заключат»: если сумма четных чисел есть число четное, то сумма нечетных будет нечетной. Этого вопроса можно было бы и не касаться, так как он не относится к делу, но есть опасность, что ученики молча сделают неверный вывод. Для устранения всяких сомнений достаточно двух-трех примеров, вроде таких:

$$7 + 11 = 18;$$
$$9 + 13 + 7 = 29;$$
$$5 + 7 + 9 + 11 = 32;$$
$$3 + 13 + 23 = 39.$$

Их достаточно, чтобы показать, что сумма нечетных чисел может быть и четным и нечетным числом. Если учащиеся не спросят, в **каких случаях** она бывает четной и в каких нечетной, то на этом можно не останавливаться, но если вопрос возникнет — придется его разъяснить

После этого, если предыдущее понятно и не вызывает сомнений, можно перейти к следующим примерам. Возьмем два числа 15 и 12. Числа подобраны так, что каждое из них делится на 3. Найдем их сумму — $15 + 12 = 27$. Сумма тоже делится на 3. Но, может быть, это дело случая? Чтобы уяснить дело, будем рассуждать примерно так же, как и раньше. Число 15 состоит из пяти троек: $3 + 3 + 3 + 3 + 3$; число 12 — из четырех троек: $3 + 3 + 3 + 3$. Когда мы сложили эти два числа, то получилась сумма 27, состоящая из девяти троек: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Значит, если каждое из двух взятых нами слагаемых делилось на 3, то сумма их также должна делиться на 3.

Можно воспользоваться и здесь наглядным приемом. У нас 15 копеек в виде пяти трехкопеечных монет и 12 копеек в виде четырех трехкопеечных монет. Всего будет 9 трехкопеечных монет. Никакого другого результата получиться не может, потому что у нас были только трехкопеечные монеты.

Рассмотрение этого примера показывает, что если каждое из двух слагаемых делится на 3, то и сумма их разделится на 3. Если взять более чем два слагаемых, например таких:

$$6 + 9 + 12 = 27;$$
$$6 + 9 + 12 + 15 = 42;$$
$$6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 60;$$
$$6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 = 126;$$

. . . . ,

то можно повторить уже знакомые рассуждения, взяв сначала три слагаемых, потом четыре, потом пять, наконец — шесть. Каждое из этих слагаемых делилось на 3, и во всех случаях суммы 27; 42; 60; 126 тоже делились на 3.

Следовательно, независимо от числа слагаемых, если каждое из слагаемых делится на 3, то и их сумма делится на 3.

Так постепенно накопляются ф а к т ы. Однако их все же мало для подкрепления вывода. Следует взять в качестве делителя другое число, например 5, и не спеша сделать вместе с учащимися исследование по прежнему плану, но для нового делителя—5. Для большей убедительности можно проделать наглядный опыт с пятачками, а затем вместе с учащимися разобрать суммы трех, четырех, пяти и вообще какого угодно числа слагаемых, например такие:

$$15 + 20 + 25 = 60;$$
$$30 + 25 + 45 + 75 = 175;$$
$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150;$$
$$25 + 50 + 75 + 100 + 125 + 200 = 575.$$

. . . .

Все эти факты должны рассматриваться неторопливо, подробно и, главное, коллективно. Нельзя допускать, чтобы кто-нибудь один сказал «575 делится на 5», а все остальные промолчали; необходимо, чтобы каждый чувствовал себя ответственным за общее дело.

Занятие должно проходить так: учащиеся рассматривают последовательно слагаемые 15, 20 и 25 и говорят: первое слагаемое делится на 5, второе слагаемое делится и, наконец, третье слагаемое тоже делится на 5. Следовательно, сумма 60 делится на 5, а чему будет равно частное? Ответ: $60 : 5 = 12$.

Убеждение получается не на основании какого-нибудь признака делимости (ученики еще не знают признаков), а на основании фактического деления. Чрезвычайно важно после этого сделать проверку, т. е. написать $60 = 5 \cdot 12$. Но эта проверка имеет здесь особый смысл. Она делается не только для того, чтобы убедиться в правильности деления, а для того, чтобы подчеркнуть: д е л и м о е р а в н о д е л и т е л ю, у м н о ж е н н о м у н а ч а с т н о е. В поле зрения учеников должно быть действие — деление. Почему оно в одних случаях удается, а в других случаях не удается?

Почему 60 разделилось на 5, а 61 не разделится на 5? Потому что число 60 состоит из пятерок и этих пятерок 12 или, иначе говоря, потому что 60 есть произведение числа 5 на 12. Все это, может быть, азбучные истины для взрослых людей, но не таковы они для детей.

Разложение на множители еще впереди; однако уже здесь можно вводить постепенно, но настойчиво этот термин, не давая определения разложения, говорить, что число 60 делится на 5, давая в частном 12, и обратно: делится на 12, давая в частном 5. Это значит,— оно *«разлагается»* или может быть *разложено* на множители 5 и 12.

То же самое можно сказать и во всех последующих случаях. О второй сумме скажем: каждое из слагаемых 30; 25; 45; 75 делится на 5, и потому их сумма 175 тоже делится на 5. Частное от последнего деления — 35. Так как делимое равно делителю, умноженному на частное, то можно написать: $175 = 5 \cdot 35$. Значит, 175 разлагается на множители 5 и 35 и, стало быть, может делиться и на 5, и на 35. Эти мысли нужно постоянно подчеркивать, чтобы ученики научились чувствовать существо делимости. В частности, слово «разложение», войдя в обиход без определения и даже описания, настолько хорошо выражает обозначаемый им факт, что никогда не вызовет у учащихся внутреннего протеста. Впрочем, если кто-нибудь из учеников спросит, что значит «разложить число на два множителя», то легко сразу дать ему исчерпывающий ответ: «Это значит — представить его в виде произведения двух множителей». При этом можно прибавить, что если после деления $60 : 10 = 6$ мы пишем $60 = 10 \cdot 6$, то этим мы разлагаем 60 на два множителя: на 10 и 6.

В примере на стр. 59 еще осталось две строки: их можно (если нужно) разобрать тем же порядком, как и две первые, или заменить другими, с другим общим делителем.

Рассмотренных примеров с делителями 2, 3, 5, впрочем, достаточно для общего вывода. Однако в интересах большей законченности следует повторить рассуждение, взяв делителем число 10. Этот последний разбор учащиеся уже вполне в состоянии провести сами, без помощи учителя, тем же порядком, как в предыдущих примерах: сначала взять два слагаемых, каждое из которых делится на 10 и рассмотреть их сумму; затем показать, что вывод не зависит от числа слагаемых, взяв три, четыре, пять или сколько угодно слагаемых по желанию каждого.

В ожидании изучения признаков делимости не нужно воздерживаться от некоторых выводов, которые сами собой напрашиваются. Ученики, конечно, заметят, что число с четной цифрой на конце делится на 2, число с нулем или пятеркой на конце делится на 5, число с нулем на конце делится на 10. Вообще, чтобы деление и вопросы делимости хорошо были усвоены учащимися, нужно побольше и посмелее набирать различные факты, относящиеся к этому вопросу. Хуже всего такое положение вещей, когда ученик чувствует себя беспомощным. Деление — самое трудное из первых четырех действий, и нужно всемерно активизировать изучение этой темы. Нельзя искусственно задерживать развитие учащихся на том основании, что еще что-то не пройдено.

Итак, еще не зная признаков делимости, учащийся уже вправе говорить о делимости на 2, на 5 и на 10. Кроме того, он уже теперь должен понимать, что не всякое число, оканчивающееся четной цифрой или даже цифрой 4, делится на 4. Далее, ученик уже должен иметь представление о разложимости числа на множители и постоянно связывать деление с умножением. Разделив 180 на 6 и получив в частном 30, он должен помнить, что $180 = 6 \cdot 30$ — в этом залог успеха.

Мало того: если мы хотим научить учащихся хорошо делить, то мы обязаны требовать, чтобы они как можно чаще выполняли деление и запоминали многие результаты. Если они знают только «обращенную» таблицу умножения, т. е. могут сказать, что, например, 56 делится на 7, потому что семью восемь — пятьдесят шесть, то этого совершенно недостаточно. Нужно обязательно вывести всех за пределы первой сотни, иначе они не научатся хорошо и бегло делить; нужно, чтобы они запомнили ряд важных и характерных результатов. Нужно стремиться к тому, чтобы такие числа, как 121, 144, 169, 196, были для них близкими и чтобы они моментально отвечали, от умножения каких чисел они получаются или как они разлагаются. Но, кроме этих чисел, в памяти каждого должно накапливаться множество чисел, в которых он свободно может разбираться с точки зрения их делимости или разложимости. Недопустимо, например, не знать, что 200 делится на 8, а 300 — только на 4, и в каждом классе должна быть большая стенная таблица, составленная учениками с помощью учителя, где бы были выписаны разложения на простые и на составные множители многих и многих чисел, часто встречающихся в практике. Образец такой таблицы в книге давать не к чему: здесь должны проявиться самодеятельность классного коллектива и мастерство учителя.

Необходимое предупреждение: запоминание результатов деления не должно да и не может быть достигнуто посредством заучивания наизусть. Необходимо пробудить у учеников интерес и любовь к вычислениям, а это, как указывал в своих педагогических работах еще Л. Н. Толстой (см. ниже стр. 82), очень нетрудно сделать. Пусть дети побольше вычисляют, пусть они составляют таблицы разложения и деления, и они незаметно для себя запомнят много полезных результатов.

Во избежание всяких ошибок или недоразумений следует остановиться на положении, противоположном только что усвоенному. Говоря точнее, нужно с т а в и т ь в о п р о с ы так, чтобы ученики сами спросили: разделится ли сумма на число, если ни одно из слагаемых не делится на это число? К ответу на этот вопрос ученики уже частично подготовлены: в свое время они спрашивали, разделится ли на 2 сумма нечетных чисел, и нашли, что иногда она делится, а иногда нет. Такой же ответ они получат и теперь. Пусть они возьмут хотя бы несколько пар чисел, не делящихся на некоторое число:

$11 + 14 = 25$ (слагаемые не делятся на 5);
$21 + 31 = 52$ (слагаемое и сумма не делятся на 5);
$19 + 23 = 42$ (слагаемые не делятся на 7);

и они увидят, что в некоторых случаях деление суммы на это число возможно, в других невозможно.

После этого следует о б я з а т е л ь н о использовать положение о делимости суммы. Для этого лучше брать случаи деления больших чисел на двузначные числа от 10 до 100. При этом нужно всячески поощрять проявление всякой инициативы учеников. Эта инициатива может состоять в способе разбивки делимого на с л а г а е м ы е: можно разбить число на два, три, четыре слагаемых, и притом поразному. Вот примеры таких упражнений.

1. Делится ли на 11 число 132? Можно разбить 132 на два слагаемых так: в качестве первого слагаемого возьмем круглое число 110, в качестве второго — остаток; число разложится так:

$$110 + 22 = 132.$$

110 заведомо делится на 11, 22 делится на 11, значит, и 132 делится на 11. Вывод во всех случаях полезно проверять фактическим делением.

2. Разделится ли на 8 число 648?

Трудно сказать, на какие слагаемые разобьют ученики число 648: можно представить его, например, так:

$$200 + 200 + 200 + 48.$$

Каждое из слагаемых делится на 8, следовательно, и сумма 648 разделится на 8.

3. Разделится ли на 35 число 385?

Разложить делимое на слагаемые можно очень просто: выделить в первое слагаемое 350, как круглое число, делящееся на 35, а во второе слагаемое — остаток:

$350 + 35 = 385$. Значит, 385 делится на 35.

4. Разделится ли на 96 число 4992?

Представим делимое так: $4800 + 192$. Первое слагаемое делится на 96 (нужно сообразить, что 96 в 2 раза больше 48). Второе слагаемое 192 делится на 96. Значит сумма 4992 разделится на 96.

5. Разделится ли на 125 число 8250?

Представим делимое так: $1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 250$. Каждая тысяча делится на 125. Значит, каждое из слагаемых делится на 125 и сумма тоже разделится на 125.

Этих пяти примеров, конечно, недостаточно для того, чтобы учащиеся овладели данным методом; необходимы десятки, сотни примеров, предложенных учителями, а еще лучше — учениками. Учитель должен подобрать примеры с самыми разнообразными делителями: 12; 15; 18; 24; 25; 26; 28; 32; 34; 36; 38; 39; 42; 44; 45; 48; 52; 54; 56; 58 и т. д. Ученики в классе или дома должны придумать и продемонстрировать перед классом свои примеры со своими собственными способами разбивки чисел на слагаемые.

Хорошим дополнением к теореме о делимости суммы служит такое положение: если каждое слагаемое, кроме одного, делится на некоторое число, а это одно на него не делится, то сумма всех этих слагаемых на него не разделится.

Проверку или индуктивное доказательство этой теоремы нужно начать с двух слагаемых.

Возьмем сумму таких слагаемых: $33 + 17 = 50$.

Первое слагаемое делится на 11, второе не делится. Сумма этих чисел 50 на 11 не делится.

Из трех слагаемых: $14 + 21 + 20 = 55$ первое слагаемое делится на 7, второе — тоже, но третье слагаемое 20 не делится на 7. Сумма 55 не делится на 7.

В сумме $60 + 120 + 144 + 200 = 524$.

Каждое из трех первых слагаемых делится на 12, но четвертое слагаемое на 12 не делится. Сумма четырех слагаемых 524 на 12 не делится.

Теперь предоставим самим учащимся взять любое число по их усмотрению и на нем проверить правильность положения.

Это положение само будет приходить нам на помощь, когда нужно обнаружить, что данное число не делится на другое.

Пусть нужно решить, разделится ли 210 на 18. Представим 210 как сумму двух слагаемых каким-нибудь удобным способом, например $180 + 30 = 210$.

Первое слагаемое делится на 18, но второе слагаемое не делится на 18. Сумма 210 на 18 не разделится.

Другой пример: разделится ли на 175 число 1800?

Представим 1800 в виде суммы двух слагаемых следующим образом: $1750 + 50 = 1800$.

1750 делится на 175, но 50 не делится на 175. Значит, 1800 не разделится на 175.

После этого нужно взять ряд таких примеров, предпочтительно по выбору учащихся.

Можно так же рассмотреть положение о делимости разности:

Если уменьшаемое и вычитаемое делятся нацело на какое-нибудь число, то и разность разделится на это число.

Начнем с рассмотрения частных случаев:

14 — число четное (делится на 2),
6 — число четное (делится на 2).

Разность их $14 - 6 = 8$ есть число четное (делится на 2).

Рассмотрим другой пример:

$$30 - 18 = 12.$$

Здесь уменьшаемое (30) делится на 3, вычитаемое (18) делится на 3, их разность (12) тоже делится на 3.

Пусть учащиеся выберут уменьшаемое и вычитаемое по своему усмотрению и проверят эту теорему. Числа следует взять бóльшие. Если после этого будут оставаться сомнения, то следует рассмотреть еще ряд примеров.

Но самое важное — это применить теорему к делу, т. е. воспользоваться ею в качестве признака делимости. Возьмем примеры:

1. Пусть дано число 133, делится ли оно на 7? Представим его как разность: $140 - 7 = 133$. Здесь 140 делится на 7, число 7 тоже делится

на 7. Значит, их разность делится на 7. Деление рекомендуется выполнять.

2. Разделится ли на 35 число 665?

Представим это число как разность 700 — 35 = 665. Уменьшаемое делится на 35, вычитаемое делится на 35. Разность их разделится на 35.

3. Разделится ли на 84 число 8316?

Представим это число как разность 8400 — 84 = 8316. Уменьшаемое делится на 84, вычитаемое тоже делится на 84. Разность их 8316 разделится на 84.

Применение положения о делимости разности труднее, чем суммы, потому что здесь мы имеем дело с обратным действием. Там нужно разбить готовую сумму, а здесь нужно сообразить, каким может быть уменьшаемое.

В разделе «Делимость чисел» мы различаем три важнейшие части: признаки делимости, разложение чисел на простые множители и нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Рассмотрим их последовательно.

Признаки делимости. Эту часть темы следует связать с делением чисел. Конечно, нужно понимать, что деление чисел и делимость чисел — вещи разные. Но здесь речь идет о методическом подходе к новой программной теме. Если тема «Делимость чисел» будет в программе совершенно одинокой, оторванной от всех прочих разделов курса, то она оставит очень слабый след в сознании учеников. Связь ее с делением в то же время поможет ученикам лучше усвоить самое трудное арифметическое действие — деление.

Как нужно понимать эту связь? Мы рассуждали о теореме делимости суммы. Чтобы эти рассуждения не были голой теорией, нужно не только говорить о возможности деления, но выполнять деление фактически. При прохождении любого отдела программы ежедневно решаются задачи не только по тому разделу, который изучается, но вообще задачи на все четыре действия. Так вот, при решении этих задач и нужно постоянно использовать новые знания учеников из раздела «Делимость». Говоря о неделимости суммы, снова нужно при решении задач перед выполнением деления ставить вопрос: разделится или не разделится? Положим, не разделится. Почему? Начнем делить. В самом деле, не разделилось.

Те же самые вопросы нужно поставить и при изучении частных признаков делимости. Программа рекомендует изучение признаков делимости на 2, 3, 5 и 9. Этих признаков достаточно. Но если нужно определить, разделится ли данное число на 6, то ученик не должен беспомощно опускать руки. Если он изучил весь раздел делимости, но не понял, что число, делящееся на 6, должно делиться на 2 и на 3, то он ничего не почувствовал и ничего не вынес из этого раздела.

Это не значит, что нужно расширить число признаков. Признаков остается столько, сколько указано в программе, *но при выполнении практических* упражнений на эту тему должно ставить вопросы о делимости чисел на 6, 12, 15, 18 и ряд других чисел. В самом деле, если ученик знает признаки делимости на 4 и на 9, то он должен знать и признак делимости на 36, но это достигается не изучением теории, а в процессе решения различных задач.

Что же касается признаков делимости, то учитель может пользоваться выводами, изложенными в учебниках. Однако если окажется (учитель должен это чувствовать), что эти выводы непонятны и воспринимаются с большим трудом, то лучше их не давать; можно ограничиться разбором ряда частных случаев.

Но для чего же тогда нужны такие положения, как «если каждое слагаемое делится нацело на какое-нибудь число, то и сумма разделится на это число»? Дело в том, что они сами могут играть роль признаков делимости в тех случаях, когда у нас нет специального признака.

Хорошо, если учитель расскажет ученикам о важности «признаков», о том, что при изучении математики они в дальнейшем будут встречаться с различными признаками. Ученики должны понимать, что это слово имеет не только математический, но и более широкий смысл: каждый человек в своей деятельности часто пользуется какими-нибудь признаками. Может быть, не мешает упомянуть о том, что некоторые признаки не дают нам гарантии наступления какого-нибудь события. Появление тучи, например, может предвещать дождь, но туча может пройти мимо, и дождя не будет. Что же касается признаков делимости — они не таковы: они дают возможность безошибочно угадывать, разделится ли данное число на другое или не разделится. Под признаками делимости разумеются необходимые и достаточные условия делимости одного числа на другое. Само собою разумеется, что слова «необходимые и достаточные» должны быть сообщаемы пятиклассникам с осторожностью, но изложение должно вестись так, чтобы дети, хотя бы впоследствии, припоминая признаки делимости, представляли их себе как необходимые и достаточные. Школьная программа указывает только четыре признака делимости, но нужно так вести преподавание, чтобы учащиеся без труда могли усвоить в свое время, если нужно, и несколько десятков признаков.

18. Признак делимости на 2. Не следует давать признак делимости на 2 (да и на другое число) в готовом виде и не следует предлагать сразу того вывода или доказательства, какое дается в большинстве учебников. К формулировке признаков делимости нужно подходить индуктивно, и здесь, в процессе исканий, наибольшая активность должна принадлежать учащимся. Признак делимости на 2 — первый из признаков. Путь, по которому следует идти, еще не легок, и здесь учащиеся часто будут опираться на помощь учителя. Однако при выводе второго и последующих признаков они должны брать инициативу в свои руки.

Будем, рассматривая различные числа, выделять из них те, которые делятся на 2.

Возьмем число 10, оно делится на 2. Теперь возьмем такие числа, как 20, 30, 40. Будет ли каждое из них делиться на 2, можно ли за это ручаться и на каком основании можно говорить об их делимости на 2? Числа эти составлены из десятков, они представляют собою суммы десятков.

$$20 = 10 + 10;$$
$$30 = 10 + 10 + 10;$$
$$40 = 10 + 10 + 10 + 10.$$

Какое бы число с нулем на конце мы ни взяли, его можно представить как сумму десятков.

Но о числе 10 мы уже знаем, что оно делится на 2, значит, и всякое число, представляющее собою сумму десятков, должно делиться на 2. Это положение мы рассматривали подробно и знаем: если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма их делится на это число.

Теперь мы уверены в том, что всякое число с нулем на конце делится на 2, независимо от того, какая цифра стоит перед нулем (слева от него). Возьмем различные числа с нулем на конце:

50; 60; 110; 120; 200; 12300; 56000; 111100.

Здесь взяты самые разнообразные цифры перед нулем на конце, и все-таки любое из них разделится на 2, потому что любое можно представить как сумму десятков, а этим уже и обеспечена делимость на 2.

Теперь возьмем числа, у которых на конце не нуль, а какая-нибудь иная цифра, например:

12; 23; 36; 45.

Первое из этих чисел делится на 2, второе — не делится, третье — делится, четвертое — не делится. Разница между числами, делящимися и не делящимися на 2, в том, что у первых (12 и 36) на конце стоит четная цифра (2 и 6), а у вторых (23 и 45) на конце нечетная цифра (3 и 5). Можно предполагать, что наличие на конце четной цифры обеспечивает деление числа на 2. Чтобы это проверить, изменим у этих чисел предпоследние цифры, т. е. цифры, стоящие влево от последней. Если заменить четные цифры десятков нечетными, а нечетные — четными, то могут получаться такие числа:

22; 33; 46; 35.

Положение вещей не изменилось. Первое число по-прежнему делится на 2, второе — не делится, третье — делится, четвертое — не делится. Можно еще раз изменить число десятков так, чтобы получились трехзначные числа, например:

102; 203; 306; 405;
202; 303; 406, 305.

И после этой замены мы видим, что те числа, которые раньше делились на 2, и теперь делятся на 2, а те, которые до замены не делились на 2, и теперь не делятся. Раньше делились на 2 первое и третье числа, а не делились второе и четвертое. Картина не изменилась после изменения предпоследних цифр.

Значит, можно, по-видимому, утверждать, что в большом числе, например, в числе 139754, нет надобности смотреть, какие цифры стоят левее последней цифры 4. Если мы желаем знать, делится ли на 2 данное число, то достаточно посмотреть на последнюю справа цифру; если она четная, то и все число разделится на 2.

Как же все-таки можно теоретически обосновать этот факт, чем объяснить такое решающее значение последней цифры? Здесь на помощь приходит доказательство.

Возьмем несколько чисел: 12; 134; 2156; 23 178.

Любое из этих чисел, да и вообще любое число, можно представить как сумму десятков и единиц:

$$12 = 10 + 2;$$
$$131 = 130 + 4;$$
$$2156 = 2150 + 6;$$
$$23178 = 23170 + 8.$$

Но мы знаем, что и десяток, и сумма десятков всегда делятся на 2. Вот почему, решая вопрос о делимости какого-нибудь числа на 2, мы смотрим только на его последнюю цифру; предыдущие цифры изменить делимости не могут.

После этого нужно сформулировать признак делимости на 2. В современных учебниках этот признак формулируется так: *на 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются четной цифрой.*

В учебниках прошлого века (например А. Малинин и К. Буренин. Арифметика, 1897) этот признак формулировался так: «На 2 делятся те числа, которые оканчиваются четной цифрой или нулем».

В современной формулировке нет упоминания о числах, оканчивающихся нулем, так как нуль причисляется к четным числам. Кроме того, в современной формулировке есть еще одна особенность: в ней встречаются слова «те и только те», которых нет в старых формулировках. Эти слова имеют своею целью подчеркнуть, что данный признак выражает «необходимое и достаточное условие делимости числа на 2». Указанные слова могут служить камнем преткновения для учащихся. Поэтому некоторые авторы, чтобы облегчить ученикам понимание признака, до сих пор дают им более упрощенную формулировку, примерно такую: «На 2 делятся те числа, которые оканчиваются нулем или четной цифрой».

Такая формулировка может удовлетворить школьника 11 — 12 лет; он увидит в ней именно то, что нужно, но он не будет возражать против этой формулировки в силу недостатка у него критического отношения к ней.

Однако о последней формулировке нужно сказать, что она все же неполна. В ней говорится только о том, что числа, оканчивающиеся на четную цифру, делятся на два, но ничего не говорится о множестве других чисел, которые не оканчиваются четной цифрой. Ученик этого не заметит, возможно, до тех пор, пока он учится в V классе. Но признак делимости ему понадобится и в старших классах, и там такая формулировка его, может быть, уже не удовлетворит.

Все-таки полезно было бы обратить внимание ученика на недостатки той формулировки, в которой отсутствуют слова «те и только те». Представим себе, что школьник говорит: «Я сегодня ел мороженое» Можно ли отсюда сделать вывод, что он сегодня не завтракал, не обедал и не ужинал? Конечно нет. Даже если он сформулирует свою мысль так: «Я сегодня ел только мороженое» — и то еще нельзя утверждать, что он питался целый день одним только мороженым, потому что слово «только» он мог употребить в том смысле, что из сладостей он ел лишь мороженое, но ни конфет и ничего другого подобного он не ел. Если такой школьник хочет сделать свою мысль совершенно определенной и хочет сказать, что, кроме мороженого, он в самом деле целый день ничего не ел, то он должен сказать так: «Я сегодня ел одно только мороженое и, кроме мороженого, ничего не ел». Может быть, такого рода «отступление» поможет детям понять почему для признака делимости применяется такая т я ж е л а я формулировка.

19. Признак делимости на 4. Усвоив признаки делимости на 2, при установлении признака делимости на 4 учащиеся должны проявить больше самостоятельности и изобретательности, хотя учитель, конечно, будет работать вместе с ними и оказывать им необходимую поддержку. Спешить с готовыми выводами и здесь не следует. Нужно взять несколько чисел и потребовать выделить из них те, которые делятся на 4. Можно и здесь взять двузначные числа, оканчивающиеся на нуль; их не очень много:

10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.

Из девяти двузначных чисел, оканчивающихся на 0, четыре числа (20; 40; 60 и 80) делятся на 4, а остальные пять не делятся. Значит, один десяток на 4 не делится, а сумма десятков на 4 иногда делится, а иногда не делится. Какое-нибудь руководящее правило из этих рассуждений вывести мы не можем. Поэтому, оставив десятки, перейдем к сотням.

Делится ли на 4 число 100?

Число 100 делится на 4, а отсюда можно сделать вывод, что на 4 делятся и 200, и 300, и 400, и, одним словом, всякое число, представляющее собою сумму сотен.

Но всякое число, получившееся от сложения сотен, имеет на конце не менее двух нулей. Таким образом, о всяком числе с одним нулем на конце, как 30; 50; 60; 110; 120; 150..., мы не можем сказать, делится оно на 4 или не делится (может быть и то и другое. Но о всяком числе с двумя и более нулями на конце мы можем с ручательством сказать, что оно делится на 4. Итак, уже установлено одно: всякое число, у которого на конце два нуля или больше, безусловно, делится на 4. Цифры, которые стоят левее этих нулей, не могут повлиять на признак. Например, все такие числа, как

200; 300; 400; 500; 1200; 2100; 123 000; 321 000,

делятся на 4, потому что все они составлены из сотен, а каждая сотня на 4 делится.

Теперь рассмотрим различные двузначные числа:

12; 16; 20; 24; 28; 32; 36, 40; 44; 48; 52; 56;
60; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96; 100;
11; 14;' 18; 22; 25; 30; 34; 42; 50; 54.

Рассмотрение этих трех строчек весьма поучительно. Пусть учащиеся внимательно рассмотрят эти числа и выскажут те мысли, какие у них при этом появятся. В двух верхних строчках написаны все двузначные числа, делящиеся на 4, а под ними некоторые двузначные числа, не делящиеся на 4. Рассматривая эти числа, мы не можем сделать никаких выводов о делимости двузначных чисел на 4. Например, нельзя сказать, что имеет значение последняя цифра 4; среди чисел, оканчивающихся на 4, есть такие, которые делятся на 4, и такие, которые не делятся. Нельзя также сказать, что решающее значение имеет четность последней цифры — есть много четных чисел (14; 18; 22 и т. д.), которые не делятся на 4. В отношении четности все-таки нужно сделать некоторое примечание. Числа, делящиеся на 4, все без исключения четны: нечетных среди них нет. С другой стороны, ни одно нечетное число не делится на 4. На этом основании можно сказать следующее: чтобы число делилось на 4, н е о б х о д и м о, чтобы оно оканчивалось четной цифрой, однако этого н е д о с т а т о ч н о.

Так как среди двузначных чисел встречаются числа с одним нулем на конце, то полезно напомнить, что нуль не дает в данном случае никакого надежного признака: одни числа с нулем на конце делятся на 4 (20; 40; 60 ..), а другие нет (10; 30; 50...). Впрочем, принято относить нуль к четным числам; поэтому специальных оговорок о нуле можно не делать.

Какой же вывод можно сделать о делимости двузначных чисел на 4?

Выше сформулирован признак делимости чисел на 2. Этот признак мы могли бы высказать еще так: «На 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются на 0; 2; 4; 6; 8». Здесь получается очень краткий и легко запоминающийся признак.

Нельзя ли примерно в такой форме высказать признак делимости однозначных и двузначных чисел на 4? Нет, нельзя. Такой признак нам в будущем понадобится, но ему нельзя придать удобной формулировки. Придется запомнить наизусть все однозначные и двузначные натуральные числа, делящиеся на 4. Таких чисел, если прибавить к ним слева 4 и 8, а справа 100,— окажется всего 25. Может быть, для запоминания эти числа удобнее расположить в форме квадрата:

4	8	12	16	20
24	28	32	36	40
44	48	52	56	60
64	68	72	76	80
84	88	92	96	100

Эти числа нужно знать или как-то уметь вспоминать в нужный момент. Ученикам *не следует заучивать их наизусть*, а нужно время от времени просматривать их по горизонталям и по вертикалям и так постепенно их запомнить.

Теперь рассмотрим несколько трехзначных чисел:

104; 208; 312; 416; 520; 624; 728; 832.

Нетрудно видеть, что все эти числа делятся на 4. Обратим внимание на то, что в каждом из этих чисел последние две цифры взяты из квадрата двузначных чисел, делящихся на 4. Этим уже обеспечивается делимость каждого из этих трехзначных чисел на 4. Почему? Каждое из этих чисел можно представить как сумму сотен и единиц:

$104 = 100 + 4;$	$520 = 500 + 20;$
$208 = 200 + 8;$	$624 = 600 + 24;$
$312 = 300 + 12;$	$728 = 700 + 28;$
$416 = 400 + 16;$	$832 = 800 + 32.$

На месте первого слагаемого везде стоит сотня или несколько сотен, на втором месте стоит однозначное или двузначное число, делящееся на 4 Такая сумма обязательно будет делиться на 4.

Теперь рассмотрим несколько таких трехзначных чисел, у которых две последние цифры будут составлять число, не делящееся на 4. Например:

211; 314; 418; 522; 625; 730; 834; 942; 450, 654.

Непосредственное деление каждого из этих чисел на 4 покажет, что ни одно из них не делится на 4. Происходит это потому, что на конце у нас такие двузначные числа, которые не делятся на 4. Значит, данные десять чисел мы можем переписать так:

$211 = 200 + 11;$	$730 = 700 + 30;$
$314 = 300 + 14;$	$834 = 800 + 34;$
$418 = 400 + 18;$	$942 = 900 + 42;$
$522 = 500 + 22;$	$450 = 400 + 50;$
$625 = 600 + 25;$	$654 = 600 + 54.$

Во всех случаях на месте первого слагаемого стоит число, состоящее из сотен и, следовательно, делящееся на 4; на втором месте стоит слагаемое, не делящееся на 4. Сумма во всех десяти случаях не может делиться на 4.

Уже теперь признак делимости на 4 мы можем сформулировать так: на 4 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются двумя нулями или у которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4.

Хотя мы рассматривали только трехзначные числа, но высказанный признак делимости на 4 обладает полной общностью, так как любое число (четырехзначное, пятизначное и т. д.) можно представить как сумму указанным выше способом.

20. Признак делимости на 8. При рассмотрении признака делимости на 4 говорилось, что уже тогда желательно предоставить учащимся значительную свободу действий. Это теперь следует повторить и даже усилить. Вероятно, учащиеся уже заметили, что изучение этого вопроса хорошо начинать с рассмотрения чисел, оканчивающихся нулем или *несколькими нулями. Если так,* то они прежде всего рассмотрят двузначные числа с нулем на конце.

10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.

Еще и еще раз: не нужно спешить, нужно терпеливо искать. Среди этих девяти чисел есть только два числа, делящихся на 8,— это 40 и 80.

Придерживаясь примерно того пути, по которому мы шли, разыскивая признаки делимости на 2 и на 4, мы увидим, что о делимости чисел на 8 нельзя судить по одной последней цифре, нельзя также судить и по двум последним цифрам. В данном случае нужно постепенно дойти до тысяч, т. е. до чисел, оканчивающихся тремя нулями. Тогда мы увидим, что каждая тысяча, а также сумма тысяч делятся на 8.

После этого нужно неторопливо рассмотреть числа, у которых на конце не три нуля, а три какие-нибудь иные цифры, и тогда можно сделать вывод, что на 8 делятся те и только те числа, которые оканчиваются тремя нулями или у которых три последние цифры выражают число, делящееся на 8.

21. Признаки делимости на 5; 25; 125. Чрезвычайно простой и удобный признак делимости на 5,как показывает опыт, довольно легко воспринимается учащимися.

Также и здесь следует рассматривать различные числа, выделяя те, которые делятся на 5 и которые не делятся на 5. Положение о делимости суммы следует использовать и в этом случае.

Признак делимости на 5 напоминает признак делимости на 2, но он еще проще. Как здесь, так и там о делимости судят по последней цифре, но числа, делящиеся на 2, могут оканчиваться на 0; 2; 4; 6; 8, числа же, делящиеся на 5, могут оканчиваться только на 0 или 5.

Признак делимости на 25 аналогично напоминает признак делимости на 4. Сходство этих двух признаков в том, что в обоих случаях о делимости судят по двум последним цифрам. Но признак делимости на 25 проще, чем признак делимости на 4. В самом деле, формулируя признак делимости на 4, мы говорим о двух последних цифрах, выражающих число, делящееся на 4. Но ведь таких случаев, как мы знаем, 25. Что же касается делимости на 25, достаточно запомнить только 4 случая (00; 25; 50; 75), чтобы никогда не ошибаться при определении делимости чисел.

Признак делимости на 125 читается так: «На 125 делятся те и только те числа, которые оканчиваются тремя нулями или у которых три последних цифры выражают число, делящееся на 125».

22. Признаки делимости на 9 и на 3. Признаки делимости на 9 и на 3 образуют третью и совершенно непохожую на предыдущую группу признаков делимости чисел.

Сначала рассматривается признак делимости на 9. Если обычное, излагаемое в учебниках доказательство этого признака непосильно для учащихся данной группы, то учитель может найти более простой индуктивный путь вывода этого признака. Но если учитель будет придерживаться традиционного вывода, тогда полезно предпослать ему некоторые рассуждения такого рода.

Припомним положение о делимости суммы: если каждое из слагаемых делится на 2, то и сумма разделится на 2, например $10 + 12 + 14 = 36$. Еще пример: если каждое из слагаемых делится на 4, то и сумма разделится на 4, например $12 + 16 + 20 = 48$. Теперь рассмотрим такой случай, когда ни одно из слагаемых не делится на данное число. Например: $11 + 13 + 15 + 18 = 57$. Здесь ни одно слагаемое не делится на 4. Возьмем другой пример: $13 + 15 + 17 + 19 = 64$. Здесь ни одно слагаемое не делится на 4, но сумма их (64) делится на 4. В каком случае сумма делится, в каком случае не делится? Сравним сумму остатков от деления на 4 в первом случае с такой же суммой во втором. (Остатки написаны в скобках.)

$$11 : 4 = 2(3);\ 13 : 4 = 3(1);\ 15 : 4 = 3(3);\ 18 : 4 = 4(2).$$

Сумма остатков $3 + 1 + 3 + 2 = 9$.

$$13 : 4 = 3(1);\ 15 : 4 = 3(3);\ 17 : 4 = 4(1);\ 19 : 4 = 4(3).$$

Сумма остатков $1 + 3 + 1 + 3 = 8$.

В первом случае сумма остатков (9) не делится на 4, а во втором случае сумма остатков (8) делится на 4. Отсюда получаем такой вывод: если ни одно из слагаемых не делится на данное число, то их сумма разделится на это число в том случае, если разделится на данное число сумма остатков от деления каждого слагаемого.

Этот вывод будет полезно сделать при выводе признака делимости на 9.

Учитель здесь должен считаться с уровнем математического развития учащихся Если этот уровень низок то загромождать вывод признаков делимости теоретическими подробностями не следует, а лучше ограничиться конкретными примерами.

Далее, ученики должны обратить внимание на следующее. Если число делится на 9, то оно разделится и на 3; но в том случае если число делится на 3, то отсюда еще не следует, что оно разделится и на 9.

Характерна, между прочим, одна распространенная ученическая ошибка. К признакам делимости на 9 и 3 учащиеся нелегко привыкают, но с течением времени простота этого признака настолько привлекает учеников, что они начинают применять его уже не по назначению Например, предлагается ответить на вопрос: делится ли данное число на 4, а учащиеся начинают искать сумму цифр этого числа.

23. Признаки делимости на небольшие составные числа. Признаки делимости на такие числа, как 6; 12; 15, должны заинтересовать учащихся, потому что здесь открывается широкое поле для всевозможных комбинаций.

Начать лучше всего с числа 6, обратив внимание учеников на то, что это число разлагается на 2 и на 3, т. е. $6 = 2 \cdot 3$. После этого нужно показать, что если число делится на 2 и 3, то оно разделится и на 6. Можно предложить этот признак и в такой формулировке: на 6 делятся те и только те числа, которые делятся на каждое из чисел 2 и 3 отдельно.

Затем можно предложить и разобрать примеры: 12; 18; 24; 30; 36; 42; 54; 60; 66; ...; 432 и т. д.

Был рассмотрен признак делимости на 6; но число 6 представляет собою произведение двух других чисел (2 и 3), признаки делимости на которые известны. Все другие (последующие) признаки будут подобны этому. Это значит, что мы будем рассматривать делимость на такие числа, которые равны произведению двух других чисел или двух множителей. При этом нужно сделать оговорку, что эти множители должны быть числами в з а и м н о п р о с т ы м и. Чтобы смысл этой оговорки был понятен, нужно рассмотреть конкретный пример. Нельзя представлять 12 как $2 \cdot 6$, потому что есть много чисел, делящихся на 2 и на 6, но не делящихся на 12. Таковы, например, 18, 30, 42 и т. д.

После этого нужно рассмотреть по выбору учеников большую серию чисел, например таких: 15 (3 и 5); 14 (2 и 7); 18 (2 и 9), 21 (3 и 7); 24 (3 и 8); 28 (4 и 7); 45 (5 и 9) и т. д. Рассматривать в связи с этим число 10 (2 и 5) теперь уже неинтересно.

24. Общий признак делимости на числа 7; 11; 13. Этот признак не включается в программы и школьные учебники, как довольно сложный и притом применимый только к большим числам — четырехзначным и выше. Однако, не слишком вдаваясь в теорию, его легко разъяснить на примерах не только в порядке внеклассной работы, но и в классе, если позволит время и учащиеся им заинтересуются. Этот признак связан с делимостью числа 1001, которое разлагается на множители 7; 11; 13. При удачном подборе примеров он очень заинтересовывает учеников, если сначала ограничиться пяти-, шестизначными числами, сводя их делимость к делимости чисел, меньших, чем 1000, которые приходится проверять прямым делением. Это приведение чисел любой величины без всяких ограничений к числам менее четырехзначных выполняется во всех случаях одним и тем же приемом. Заданное число разделяется на два числа запятой, отделяющей три последние цифры справа; затем большее из двух полученных так чисел вычитается из меньшего Если заданное число содержит не больше 6 цифр, то разность будет записана не больше, чем тремя цифрами, причем ее делимость на любой из трех делителей укажет на делимость заданного числа, а остатки от деления будут те же, что и остатки данного числа.

Примеры. Дано число 85 176; отделив запятой 3 последние цифры, получим числа 85 и 176; 176 — 85 = 91. Число 91 делится на 7 и 13, а при делении на 11 дает в остатке 3. То же самое будет с данным числом, что легко проверить делением. Число 142 328 так же разделяется на числа 328 и 142; 328 —142 = 186. Остатки от деления 186 на 7; 11; 13 соответственно равны 4; 10; 4, те же остатки дает и заданное число. Дело здесь в том, что операция, проделанная, например, с числом 85 176, равносильна тому, как если бы мы из 85 176 вычли число 85 085, равное 85·1001. Но если 85176 — 85·1001 = 91, или 85·176 = 85·1001 + + 91, то оба слагаемых правой части делятся на 7 и на 13, а при делении на 11 дают в остатке 3; то же, очевидно, можно сказать об их сумме 85 176. Аналогично объясняется и любой пример, и учитель, в зависимости от уровня развития учащихся, сам доведет объяснение до нужной степени четкости.

Если данное число очень велико и пишется семью или более цифрами, то разность двух вспомогательных чисел может превысить тысячу; тогда нужно повторять с ней указанный прием, пока не получится разность, меньшая тысячи.

Для тренировки в письменном и устном вычитании в связи с проверкой делимости хорошим материалом могут служить трамвайные билеты с 5—6-значными номерами или номера вещевой лотереи.

25. Разложение чисел на простые множители. Вопросы, которые здесь рассматриваются, трудны для учеников V класса, и отчасти этим объясняются их слабые успехи. Школа рассматривает здесь небольшой, но абсолютно необходимый кусочек *теории чисел*. Учащиеся не всегда понимают, для чего им предлагают эти сведения. Безусловно, полезно сказать учащимся, что вопросами, которые они изучают, интересовались ученые самых разнообразных эпох: Евклид, Эратосфен, Ферма́, Эйлер, Чебышев и др. Особенно удивительно то, что эти вопросы волновали людей, отделенных от нас тысячелетиями. Пример этих людей, пионеров науки, должен вдохновлять и наших школьников, делающих первые шаги в математике.

Чтобы вопросы, связанные с разложением на множители, не казались скучными, необходимо соблюдение двух условий: ученики должны делать все сами, а учитель должен разъяснять, для чего это нужно.

Прежде всего выясняется понятие *простого* числа. Для этого берутся несколько (*желательно побольше* — 20, 30, 40) чисел натурального ряда и последовательно выписываются их делители. Вообще в этом отделе нужно брать много примеров. Таблица покажет большое разнообразие в числе делителей у различных чисел. Особенно выделяются те числа, у которых наименьшее число делителей, т. е. два: единица и само это число. Это простые числа. Они начинаются с числа 2 и могут быть как угодно большими. Ряд простых чисел *бесконечен*, на что обратил внимание еще Евклид в III в. до н. э.

Необходимо при изучении этого отдела иметь в виду его специфику. При изучении других отделов мы можем в порядке иллюстрации пользоваться именованными числами, обращаться к величинам, взятым из окружающей нас жизни; но здесь предмет рассмотрения — само число. Если к этому времени у учащихся не появилось еще интереса и любви к числу, то успеха не будет. Поэтому между прочим говорилось выше, что ученикам нужно самим брать различные числа, сопоставлять их, выявлять особые и разные свойства каждого из них. Следует составлять побольше различных таблиц простых чисел. Одна из этих таблиц будет воспроизводить ту таблицу, какая есть в каждом учебнике арифметики. Учитель предлагает довести таблицу до определенного числа, и дети ее самостоятельно составляют. Другая таблица может быть построена по такому принципу: в каждой строке выписываются числа только одного десятка: в первой — первого, во второй — второго и т. д. В этом случае числа, стоящие в отдельных столбцах, будут оканчиваться на 1, 3 и т. д. Третью таблицу можно построить по образцу таблицы, указанной в книге проф. И. К. Андронова «Арифметика натуральных чисел» (Учпедгиз, 1954).

Все эти таблицы отличаются только внешним видом. Самое существенное в том, чтобы идея «решета Эратосфена» как-нибудь проникла в сознание учащихся.

После этого учащиеся перейдут к разложению чисел на простые множители. Каждое число, большее единицы, может быть разложено на простые множители единственным образом. Это основное предложение доказал еще Евклид. Учащимся в этот момент, может быть, трудно оценить значение этого в высшей степени важного преобразования. Здесь же вводится понятие о степени, которое позволяет короче записывать числа, разложенные на простые множители.

Для выработки навыка в разложении следует проделать ряд упражнений. Все числа первой сотни должны быть взяты на учет, как простые или составные, и каждое составное число должно быть разложено на простые множители.

Числа, превосходящие 100 до известной границы, по усмотрению учителя (до 200, 300 и т. д.) должны быть записаны в таблицу, и для каждого из них написано разложение на простые множители не только обыкновенное, но и в виде степеней.

26. Наибольший общий делитель[1] **и наименьшее общее кратное.** При изучении наибольшего общего делителя сначала определяется понятие общего делителя, а потом — наибольшего общего делителя. Если это усвоено, то можно перейти к выводу правила нахождения наибольшего общего делителя. Сначала можно взять небольшие числа. Найдем наибольший общий делитель для чисел 12 и 8. Попробуем догадаться. Каждое из данных чисел делится на 2 и 4. По-видимому, наибольшим общим делителем будет 4. После этого можно взять еще какие-нибудь два числа, например 30 и 12, и снова по соображению найти для них наибольший общий делитель. По-видимому, это будет 6. Взяв еще несколько пар чисел и найдя для них наибольший общий делитель по догадке, можно потом взять один из рассмотренных случаев и разобраться в нем.

Возьмем числа 30 и 12 и разложим каждое из них на простые множители:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5;$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Число 30, судя по его разложению, может разделиться на 2; 3; 5; 6; 10; 15 и 30.

Число 12 может разделиться на 2; 3; 4; 6 и 12.

Рассматривая делители этих чисел, мы видим среди них общие: 2, 3, 6. Наибольший общий делитель — 6.

После этого можно взять два несколько больших числа, например 80 и 100, и провести для них аналогичные рассуждения.

Наконец, нужно взять три числа, снова провести для них рассуждения и вывести правило. Лучше всего, если бы это правило вывели ученики.

При изучении наименьшего общего кратного нужно сначала напомнить, что такое «кратное», затем перейти к общему кратному и, наконец, к наименьшему общему крат-

---

[1] Новая программа, опубликованная в 1960/61 учебном году, не содержит понятия НОД, ограничиваясь понятием об общих делителях двух или нескольких чисел.

ному. Если это усвоено, то можно перейти к выводу правила нахождения наименьшего общего кратного. Сначала можно взять небольшие числа. Найдем наименьшее общее кратное для чисел 4 и 6. Поступим так: увеличим вдвое число 6, получим 12. Это число делится и на 4. По-видимому, оно и будет наименьшим общим кратным для чисел 4 и 6. Найдем теперь наименьшее общее кратное для двух других чисел, например для 10 и 15. Поступим так же, как и раньше, т.е. увеличим одно из этих чисел, например: первое — в 3 раза, получим 30. Это число делится и на 15. По-видимому, оно и будет наименьшим общим кратным для взятых чисел. Взяв еще несколько пар чисел и найдя для них наименьшее общее кратное по догадке, возьмем потом какой-нибудь один из рассмотренных случаев и разберемся в нем подробнее.

Возьмем числа 15 и 10 и разложим каждое из них на простые множители:

$$15 = 3 \cdot 5;$$
$$10 = 2 \cdot 5.$$

Так как искомое наименьшее кратное должно делиться на 15, то оно должно делиться на 3 и на 5. Но вместе с тем оно должно делиться и на 10, так что должно делиться еще и на 2. Значит, в состав множителей искомого числа должны входить:

$$3;\ 5 \text{ и } 2 \text{ или } 2;\ 3 \text{ и } 5.$$

Их произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ и будет наименьшим общим кратным чисел 15 и 10.

После этого можно взять более трудный пример. Найти наименьшее общее кратное чисел 90 и 150 и провести для них аналогичные рассуждения.

Наконец, нужно взять три числа и предложить ученикам вывести правило нахождения наименьшего общего кратного, рассуждая примерно так, как раньше.

ЧАСТЬ II

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Изучение дробей, вообще говоря, опирается на те же принципы, что и изучение целых чисел. Конечно, дроби значительно сложнее целых чисел, но учащиеся, приступающие к изучению дробей, значительно старше и их общее развитие выше, чем у детей 7—10 лет; кроме того, за плечами пятиклассников четырехлетний запас практических и коекаких теоретических знаний о целых числах. Много изучено правил, сделано упражнений, решено текстовых задач. Важно, чтобы все это было использовано, не позабылось, не лежало мертвым капиталом, постоянно повторялось и освежалось.

Нужно не забывать, что целые числа должны быть опорой и прочным фундаментом изучения дробных чисел. Дробь можно рассматривать как частное двух целых чисел. Это обстоятельство должно служить источником многочисленных сопоставлений и законных аналогий. Частые экскурсы в область целых чисел будут поднимать интерес к дробям у учащихся и дадут им возможность подмечать новое в старом, видеть прежнее с новой точки зрения.

Изучение математики должно характеризоваться активным участием в нем учеников.

Когда в классе 40 человек и когда учитель связан программой и временем, нужно большое искусство, чтобы каждого ученика держать в поле своего зрения и каждому давать посильный вопрос и задачу. Это гораздо труднее, чем читать лекцию, которую слушатели спокойно воспринимают. Хорошие результаты учения могут быть получены только при условии активного участия всего коллектива учащихся в работе класса. Если даже при самом напряженном старании учителя он не сможет вовлечь в работу всех до одного, то это, конечно, минус, но во всяком случае нужно стремиться к тому, чтобы подавляющее большинство класса работало активно и охотно.

Проф. А. Я. Хинчин в своей статье «О формализме в школьном преподавании математики» («Известия АПНРСФСР» за 1946 год, № 4, стр. 18) говорит:

Все наши педагогические усилия должны быть направлены на то, чтобы в максимально возможной мере заставить школьника усваивать материал в порядке активной работы над ним, всеми средствами насыщая эту работу элементами самостоятельности и хотя бы самого скромного творчества и твердо памятуя, что самая усердная, самая усидчивая и напряженная работа учащегося не даст ему ничего, кроме мертвого, формального знания, если она будет состоять в одном только пассивном восприятии. Учащийся должен учиться только в процессе искания, интеллектуально активного труда, самостоятельного преодоления трудностей — в этом единственная, но зато абсолютно надежная гарантия того, что знания его не будут только формальными.

Необходимо помнить, что обучение математике на данной ступени должно быть не столько логическим, сколько психологическим.

Поясним сказанное примером. В самом начале изучения дробей нужно сказать о том, что дроби возникают от измерения и деления. Возникновение дробей от измерения не вызывает никаких затруднений. Но как рассказать о возникновении дробей от деления? В начале изучения дробей мы рассматриваем факты деления на равные части вещей, предметов, величин. Психологически это вполне оправдано: физический акт деления — прототип деления отвлеченных чисел, и мы говорим о делении целых чисел как источнике возникновения дробей, опираясь на наглядное представление и на личный опыт школьников.

Далее, учитель может извлечь большую пользу из более смелого внедрения в практику изучения дробей буквенных обозначений. Дело здесь не в пропедевтике алгебры, не столько в том, что, вводя буквы в арифметике, тем самым можно облегчить первые шаги изучения алгебры,— это само собою разумеется; здесь речь идет о пользе буквенных обозначений для изучения самой арифметики. Первое появление букв может быть связано с затруднениями, но зато через несколько уроков их благотворное влияние не замедлит сказаться. Формула должна быть сокращенной записью правила или предложения.

Ученики, усвоив некоторое положение, должны попробовать записать его в виде формулы; затем, рассматривая уже знакомую формулу, они должны выразить ее словами. Важнейшие формулы должны быть всегда перед глазами ученика; в случае какой-нибудь ошибки ученик должен обратиться к этому верному спутнику вычислений, который никогда не подведет и всегда выручит.

Исключительно полезна на всех ступенях обучения г е о м е т р и з а ц и я арифметического материала. Это особенно относится к отделу дробных чисел. Целые числа удобно изучать и иллюстрировать с помощью наглядных пособий, наилучшее из которых — русские счеты, но дробные числа лучше иллюстрируются на такой простейшей геометрической модели, как отрезок прямой линии.

Правда, в самом начале изучения дробей нагляднее рассечение круга и квадрата, но далее круг как иллюстрация отодвигается на задний план: главную роль иллюстратора занимает прямолинейный отрезок. Множество вопросов, относящихся к учению о дробях: сравнение дробей, обращение неправильной дроби в смешанное число, сокращение дробей, приведение дробей к общему знаменателю и пр.,— допускают простое и убедительное геометрическое истолкование с помощью прямолинейного отрезка.

Еще одна важная психологическая деталь. Изучение дробей в данной начальной стадии должно быть и н т е р е с н ы м. Ученики должны увлекаться работой, и нужно уметь организовать ее в наиболее интересной для них форме.

О возбуждении этого интереса говорили многие педагоги — и ярче всех Л. Н. Толстой в своей «Арифметике» (Москва, 1913, стр. 143—144):

Для того, чтобы ученик учился хорошо, нужно, чтобы он учился охотно; для того, чтобы он учился охотно, нужно: 1) чтобы то, чему учат ученика, было понятно и занимательно и 2) чтобы душевные силы его были в самых выгодных условиях.

Чтобы ученику было понятно и занимательно то, чему его учат, избегайте двух крайностей: не говорите ученику о том, чего он не может знать и понять, и не говорите о том, что он знает не хуже, а иногда и лучше учителя... Вообще давайте ученику как можно больше сведений и вызывайте его на наибольшее число наблюдений по всем отраслям знания; но как можно меньше сообщайте ему общих выводов, определений, подразделений и всякой терминологии.

Сообщайте определение, подразделение, правило, название только тогда, когда ученик имеет столько сведений, что сам в состоянии проверить общий вывод, когда общий вывод не затрудняет, а облегчает его, Другая причина, по которой урок бывает непонятен и незанимателен, заключается в том, что учитель объясняет слишком длинно и сложно то, что ученик давно уже понял. Ученику так просто то, что ему сказали, что он ищет в сказанном особенного, другого значения, а понимает (сказанное) ошибочно или уж вовсе не понимает...

Вообще: объясняйте ученику то, чего он не знает, и то, что вам самим было бы занимательно узнать, если бы вы не знали.

Существует обывательский предрассудок, что арифметика, как и вся математика,— наука очень скучная. К несчастью, эта «точка зрения» оказывает отрицательное влияние на значительную часть учащихся. На деле можно без преувеличения сказать, что нет другой более интересной дисциплины, чем математика. Но верно другое: математику, может быть, даже легче, чем другую науку, можно сделать сухой и скучной. Для этого достаточно впасть в одну из двух крайностей: или без конца рассказывать о том, что давным-давно известно учащимся, или сообщать им то, что трудно, недоступно, не может быть понято. И в первом, и во втором случае скука будет неизбежным спутником такого «преподавания».

Искусство обучения — в том, чтобы всегда предлагать учащимся преодоление одной посильной для них трудности. Эти трудности необходимы и неизбежны, но они должны быть преодолимыми.

В частности, трудное и ответственное дело — подбор упражнений и задач. Очень часто в задачниках предлагаются задачи с таким сюжетом, который не понятен детям, а иногда сюжет задачи как будто бы близок к их интересам, но при внимательном рассмотрении оказывается весьма далеким.

В какой-то момент обучения учителю придется побеседовать с учащимися об определениях. Эту беседу едва ли можно откладывать дальше пятого класса. В начальной школе, конечно, изучается немало правил, но определения встречаются редко; вместо определений там ограничиваются показом.

В учебнике арифметики для тем V класса встречаются уже определения вычитания, умножения, деления, простого числа, наибольшего общего делителя и другие. Эти определения, конечно, нужно заучивать.

Беда, однако, в том, что и здесь их часто заучивают не понимая. Это, к сожалению, факт, подтвержденный многолетним опытом. Есть и другой факт: понимают, но не знают, *зачем* это заучивается. Третий факт: иногда учащиеся слишком «привязываются» к термину. Период наивного отношения к термину переживали все; он остается у некоторых взрослых и на всю жизнь. Эти серьезные затруднения нужно преодолеть.

Обучение всякому предмету протекает в определенное число часов. Положим, за те два часа, которые отведены на данную тему, ученик не усвоил достаточно определения, а заучить его обязательно нужно: учитель спросит, значит, понимаешь или не понимаешь, а заучить нужно. Так часто заучивается то, что не понято. Чтобы этого не было, не нужно давать определение готовым, а нужно, чтобы его вывели ученики сами. Конечно, это нелегко: некоторые прочтут определение по учебнику, заучат и скажут его в готовом виде. Вот это и нужно предотвратить.

Как показывает опыт, иногда учитель предлагает выучить определение и держать его в памяти до тех пор, пока спросят; а пока не спросят, оно так и будет лежать мертвым капиталом. Чтобы этого не было, необходимо заставить это определение, как и любое теоретическое положение, *работать*, т. е. использовать его при работе. Учащиеся, конечно, ценят не ту «теорию», которая держится в уме на случай возможного спроса, а ту, которую приходится применять на деле, которая когда-нибудь и для чего-нибудь полезна.

Ученик, раз восприняв термин с определенным значением, так свыкается с этим значением, что никак не может связать с этим же термином новый смысл. Прочно связав с самого начала термин «умножение» с увеличением числа, учащиеся с трудом понимают, как умножение на число, меньшее единицы, ведет к уменьшению, а деление на такое число равносильно увеличению. Привыкнув понимать слово «коэффициент» как *цифровой* множитель, стоящий перед буквой, многие и в дальнейшем упорно держатся за этот первоначальный смысл. Это явление довольно типично, хотя оно исчезает постепенно с повышением культурного уровня ученика и с расширением его кругозора.

Между педагогами нет согласия в отношении того, в какой последовательности следует проходить в школе дроби. Автор этой книги принадлежит к сторонникам общепринятого и многократно испытанного порядка: в V классе сначала изучать обыкновенные дроби, а после них десятичные.

Проф. Макс Симон говорит следующее: «В последнее время в программу первого класса (имеется в виду немецкая школа) довольно часто включаются еще десятичные дроби, правда, под благозвучным псевдонимом десятичных чисел. Это есть нежелательный результат нашего десятичного деления мер. Но хотя почти все настоящие математики высказались против того, чтобы проходить десятичные дроби до действий над обыкновенными дробями, этот нелепый порядок все более распространяется. Это приблизительно то же самое, как если бы обучение письму начали со стенографии. Привожу поэтому еще раз свои доводы, хотя я вполне сознаю бесполезность своих стараний:

1. Дробь $\frac{7}{9}$ предполагает такое же понятие о дроби, как и дробь $\frac{7}{10}$.

2. Правила сложения и вычитания могут быть уяснены лишь с большим трудом, правила умножения и деления вовсе не могут быть уяснены.

3. Десятичные дроби очень мало пригодны для умственных вычислений.

4. Без нужды не следует отступать от исторического хода развития понятия о дроби.

5. Причина и следствие меняются ролями, потому что десятичная система мер есть следствие десятичных дробей, а не наоборот.

6. Ученики не понимают огромного значения десятичных дробей и не оценивают легкости действий над ними, коль скоро не знают, как трудны действия над обыкновенными дробями. Десятичные дроби... обладают свойством не менять своего значения, если справа приписать к ним один или несколько нулей. Это свойство дроби непосредственно вытекает из общеизвестного положения в учении о дробях, что значение дроби не изменяется, если умножить числитель и знаменатель ее на одно и то же число, и понять его можно только по ознакомлении с обыкновенными дробями.

7. Ученики не поймут, зачем они потом (после изучения десятичных дробей) столько трудятся над обыкновенными дробями; в таком случае было бы уже последовательнее ограничить действия над дробями решением одной только задачи о превращении обыкновенной дроби в десятичную».

В этом отношении прав советский методист В. Г. Чичигин, писавший в своей «Методике арифметики» (Учпедгиз, 1949) следующее:

«1. Независимо от того или иного порядка прохождения обыкновенных и десятичных дробей никогда нельзя замалчивать самую сущность и смысл действий над дробями, особенно смысл умножения и деления на дробь.

2. Преодолеть эти трудности легче в курсе обыкновенных дробей с небольшими числами, чем при изучении десятичных дробей, где знаменатели и числители обычно выражены большими числами; или же это придется делать два раза.

3. Изучение десятичных дробей очень важно для всей практической деятельности человека; в школе их надо очень хорошо и основательно изучать, но как частный случай обыкновенных дробей».

Нельзя, кроме того, не отметить следующее. Все без исключения педагоги признают, что в IV классе школы должен быть первый концентр ознакомления учащегося с обыкновенными дробями, где формируется первоначальное понятие о дроби, а уже потом мнения разделяются: одни рекомендуют продолжать начатое изучение обыкновенных дробей, а другие — оставить их и перейти к десятичным. Автор считает правильным углублять формирование понятия обыкновенной дроби на основе уже созданного привычного образа, написания и наименования.

Иногда в связи с вопросом о порядке изучения дробей говорят, что десятичные дроби имеют бóльшее практическое значение, чем обыкновенные, и поэтому их следует проходить раньше обыкновенных. Но ведь речь идет не о том, какие дроби чаще встречаются в жизни, а о рациональном **порядке** прохождения дробей с точки зрения методики, т. е. в конечном счете о психологии восприятия. Если десятичные дроби часто встречаются в практике, то отсюда следует только, что в школе эти дроби должны быть хорошо усвоены, но это еще не аргумент в пользу того или другого порядка изучения дробей.

Чтобы устранить всякие сомнения, нужно обратить внимание на следующее. **Дробь есть число, представляющее собою совокупность двух чисел.** Именно так и только так нужно представлять себе дробь. В силу того, что дробь — число более сложное, чем целое, изучение дробей связано с некоторыми трудностями. Чтобы понять дроби и изучить действия над ними, нужно овладеть механизмом совместных действий не над одним, конечно, а **над двумя числами**, что невозможно при изучении десятичных дробей, где ученик не видит знаменателя. В силу этого тенденция изучать десятичные дроби раньше обыкновенных методически неправильна.

Тема «Обыкновенные дроби» — наиболее трудная во всем курсе V класса. Трудность эта отчасти проистекает из того обстоятельства, что с вопросами, предшествующими дробям, учащиеся постепенно знакомились (хотя и не полностью) в начальной школе. Что же касается дробей, то здесь для них почти все ново, и если присоединить сюда безусловную усложненность материала, то будет понятно, что здесь от учащихся требуется несколько большее напряжение их умственных сил.

Глава третья

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ «ДРОБЬ»

27. О долях единицы. Изучение обыкновенных дробей распадается на две части: «Формирование понятия дроби» (основные понятия) и «Действия над обыкновенными дробями». Формирование понятия дроби начинается с деления на части различных предметов, из которых каждый мы рассматриваем как целую единицу. Абстрактное понятие дроби, по-видимому, возникло из этого конкретного деления, разламывания, раздробления, разложения. Об этом говорят сами слова «дробь» (от дробить), «ломаное число» (в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого, изд. 1703 г.), немецкое Bruchzahl (от brechen — ломать), французское fraction (от fractionner — раздроблять).

Эту начальную стадию ученик прошел уже несколько лет назад. Еще в дошкольном возрасте ему приходилось разламывать яблоки, пряники и конфеты, резать арбузы, апельсины, лимоны, и уже в то время он неоднократно говорил о половине, о четверти, о трети и о некоторых других долях целого.

Для формирования понятия «дроби» ее рассматривают с различных сторон, а именно: откуда она возникает, как сравниваются различные дроби между собой, при каких условиях она изменяется и остается без изменения. Между прочим устанавливается, что дробь родственна частному.

Эти сведения, чрезвычайно важные для дальнейшего, должны быть изложены в системе. Предыдущий вопрос должен порождать последующий, и последующий должен вытекать из предыдущего. Система, о которой мы говорим, может быть субъективной, и расположение материала у одного учителя может отличаться от расположения его у другого. Это возможно, но нужно, чтобы у учителя была обдуманная система. При этом ученикам не обязательно сообщать избранную систему, важно, чтобы учитель ее наметил и ей следовал.

Сначала должен быть некоторый период, соответствующий нумерации. Здесь нужно избегать голой словесности. Не нужно только говорить: «Если мы возьмем яблоко и разрежем его пополам или если мы возьмем отрезок и разделим его на три равные части, то ...» — а нужно взять настоящее яблоко и настоящий отрезок и проделать с ними то, что требуется. Заблуждается тот, кто говорит, что так как дети знают, каким образом получаются половина, четверть, треть, то нет надобности этого касаться.

Первые опыты могут быть грубо наглядными: берется яблоко и разламывается на две равные части, в каждой руке будет половина яблока; берется стакан, наполненный водой, и половина воды выливается в цветочную банку, значит, в стакане остается полстакана воды.

Затем можно взять единицы измерения: грамм, сантиметр, миллиметр, дециметр, метр — и указать, какие доли они составляют от других единиц измерения. Например, сантиметр — одна десятая дециметра, миллиметр — одна десятая сантиметра и т. д.

Далее следует перейти к геометрическим образам: взять квадрат и разделить его пополам диагональю или прямой, проходящей через середины противоположных сторон, разделить его на четыре части двумя диагоналями или двумя прямыми, проходящими через середины противоположных сторон. Взять круг и разделить его диаметром пополам, двумя взаимно-перпендикулярными диаметрами на четыре части и т. д.

Наконец, нужно перейти к иллюстрации долей с помощью отрезков.

Когда мы разламывали на две части яблоко или резали арбуз, то это разделение имело целью произвести наиболее сильное впечатление на глаз ученика, и в этом смысле этот первый опыт имеет значение; но после того как мы проделали этот опыт несколько раз, нужно признать его уже сыгравшим свою роль и оставить. Если бы, например, после разламывания яблока на две части положить эти части на чашки хороших весов то равновесия не получилось бы.

Для демонстрации всевозможных дробей отрезок — наиболее совершенная модель и в смысле простоты,

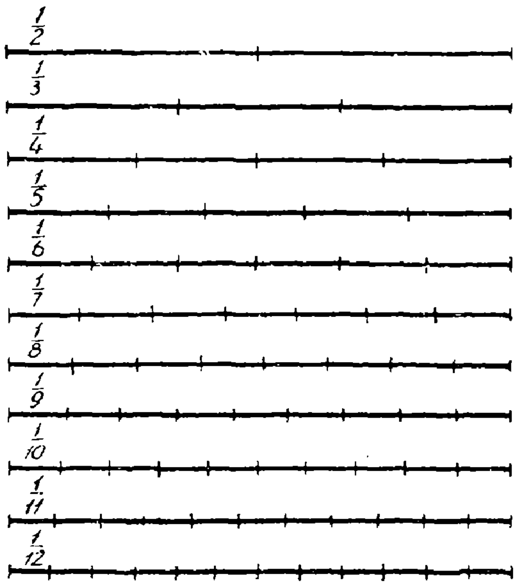

Рис. 1.

и в смысле точности построения. Число дробей безгранично, поэтому достаточно проиллюстрировать только несколько дробей с однозначным и двузначным знаменателями. Ученики должны тщательно воспроизвести чертеж, который здесь предлагается (рис. 1). Польза такого чертежа многообразна. Во-первых, ученик тщательно построит 11 отрезков, во-вторых, по указанию учителя он старательно разделит их на необходимое число равных частей, в-третьих, он воспримет на глаз величину каждой из получившихся долей, и, в-четвертых, он заметит, что по мере увеличения знаменателя доли неограниченно уменьшаются. Так как в этот момент ученики могут еще не знать твердо изображения дробей и наименований членов дроби, то названия долей можно писать словами.

28. Изображение дробей. Для того чтобы формирование понятия «дроби» протекало успешнее, необходимо после первого ознакомления с дробью научиться изображению дробей. Писать дроби словами неудобно, воспринимать их наименования на слух недостаточно. Когда же дети начинают изображать дроби цифрами, то в этом изображении они находят незаменимую опору и для восприятия дробей, и для действий над ними. Дробь есть число, и, как всякое число, она должна быть записана цифрами. Как это сделать?

Берется отрезок, принятый за единицу, и делится, положим, на четыре равные части (рис. 2).

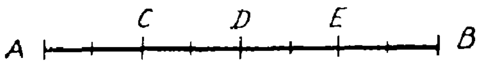

Рис. 2.

Учащиеся рассматривают отрезок AB (образ) и говорят: отрезок AC составляет одну четверть отрезка AB, принятого за единицу. Это пишется так: $\frac{1}{4}$. Единица (1) называется числителем, 4 — знаменателем. Итак, образ, написание и слово должны взаимно порождать друг друга. После этого берется отрезок AD и указывается, что он равен двум четвертям отрезка AB. Пишется так: $\frac{2}{4}$. Затем рассматривается отрезок AE и указывается, что он равен трем четвертям AB. Записываем так: $\frac{3}{4}$. Наконец, берется весь отрезок AB (он был принят за единицу).

Рассматривая этот пример, мы последовательно переходили от образа (отрезок) к слову (название дроби) и к написанию (изображению дроби).

Затем полезно предложить ученикам последовательно перейти от образа к написанию и потом к слову (отрезок, изображение дроби и, наконец, наименование). Например, отрезок MN разделен на 8 равных частей (рис. 3). Как охарактеризовать отрезок MO? $MO = \frac{3}{8}$ отрезка MN.

После этого можно предложить ученику проделать путь от слова к написанию и образу. Учитель называет дробь

$\frac{5}{9}$ и предлагает сначала ее записать, а потом сделать иллюстративный чертеж.

Такую процедуру следует проделать несколько раз, с разными учениками, на разных отрезках и при различной величине дробей.

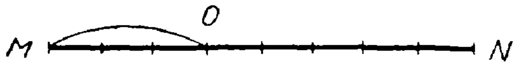

Рис. 3.

Мы указали не все возможные здесь случаи, но это не значит, что мы их исключаем. Напротив, мы советуем выполнить и остальные три задания, т. е.

Слово ⟶ образ ⟶ написание
Написание ⟶ образ ⟶ слово
Написание ⟶ слово ⟶ образ.

Во всех случаях необходимо добиться свободы, скорости и уверенности.

Здесь вводится терминология: числитель, знаменатель, члены дробей, смешанное число. Относительно терминологии учителем могут быть сделаны некоторые замечания. Термины «числитель» и «знаменатель» встречаются еще в «Арифметике» Магницкого, поэтому к ним нельзя относиться строго с точки зрения современного русского языка. Термин «числитель» более близок к современности. Термин «знаменатель» происходит от устарелого слова «знаменовать», т. е. означать, свидетельствовать о чем-либо. Термин «смешанное число» произносится именно как смешанное число, а не смешанная дробь. Этим термином подчеркивается соединение, «смешение» в одном символе целого числа и дроби.

О том, что обозначают числитель и знаменатель, нужно несколько раз сказать при изображении дробей отрезками и записывании их цифрами.

Здесь же нужно сказать о чтении дробей. Указывается общая норма: числитель читается как целое количественное число в именительном падеже, знаменатель читается как порядковое число в родительном падеже множественного числа, например пять шестых. Затем указываются некоторые основные случаи, а именно: половина вместо одной второй, треть, четверть, две трети (числитель в женском роде, знаменатель в единственном числе), три четверти (знаменатель в единственном числе), но если имеется пять четвертей, то знаменатель употребляется во множественном числе или по общему правилу: пять четвертых.

Так как мы уже упомянули о смешанном числе, то нужно среди записываемых чисел предлагать и смешанные числа. Берем отрезок AB, равный, положим, двум каким-нибудь линейным единицам, и затем справа «пристраиваем» к нему отрезок BC, равный $\frac{3}{4}$ той же единицы. Полученный отрезок AC записывается с помощью смешанного числа $2\frac{3}{4}$. После этого нужно еще взять несколько отрезков и записать соответствующие им смешанные числа.

Говорить о том, что $2\frac{3}{4}$ — сумма числа 2 и дроби $\frac{3}{4}$, пока нет надобности, но если этот вопрос возникнет помимо воли учителя, то можно указать, что это сумма. Не следует бояться забегания вперед, стремясь к мнимой строгости изложения.

При разработке этого параграфа ученики часто будут писать дроби на слух, с голоса учителя. Необходимо требовать отчетливого и выразительного чтения членов дроби, иначе неизбежны ошибки, особенно при написании дробей с большими числителем и знаменателем. В самом деле, если я читаю без пауз такую дробь: тысяча двести тридцать пятых, то можно записать не одну единственную, а несколько дробей:

$$\frac{1000}{235}; \quad \frac{1200}{35}; \quad \frac{1230}{5}.$$

29. Возникновение дробей. Откуда возникают дроби и что заставляет ввести дробные числа? Эти вопросы должны быть неторопливо рассмотрены с учащимися. Учителю необходимо иметь метровую линейку или ленту для измерения. Кроме того, нужно заранее подобрать несколько предметов в классе, к которым удобно приблизиться, чтобы их измерить.

Длина. Можно принести в класс несколько предметов и предложить ученикам их измерить: карандаш, книга, перо, ящик, листы бумаги, куски дерева и стекла и т. д. Выполняя эти измерения, учащиеся увидят, что все измерения неизбежно бывают приближенными.

Предметы для измерения можно подобрать так, чтобы в результате измерения получились примерно такие дроби:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{10};\ \frac{2}{10};\ \frac{3}{10};$$

$$1\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{4};\ 1\frac{3}{4};\ 2\frac{1}{5};\ 2\frac{3}{5}.$$

Так как учащиеся знакомы не только с длиной, но и с другими величинами, то полезно образовать и дроби других величин.

Вес. Хорошо было бы иметь в классе весы с большим числом разнообразных гирек. Это дало бы возможность продемонстрировать соотношения между килограммом и некоторыми его частями, такими, как

$$\frac{1}{2}\ \textit{кг};\ \frac{1}{4}\ \textit{кг};\ \frac{3}{4}\ \textit{кг};\ \frac{1}{5}\ \textit{кг};\ \frac{2}{5}\ \textit{кг};\ \frac{3}{5}\ \textit{кг};\ \frac{1}{10}\ \textit{кг}.$$

Интересны и бóльшие единицы измерения веса: центнер и тонна. Их нельзя продемонстрировать в классной обстановке, но учитель может обратиться к иллюстративным чертежам.

Время. Здесь можно рассмотреть такие случаи: 6 месяцев составляют полгода (снова следует обратить внимание на приближенность такого деления), 4 месяца составляют третью часть года, а 3 месяца — четвертую часть года (квартал). Если принимать месяц за 30 дней, то 15 дней составят половину месяца, 10 дней — треть месяца, 12 часов составляют половину суток, 15 минут — четверть часа и т. д. Вообще «время» дает обильный материал для образования разнообразных дробей.

Деньги. Рубль содержит 100 копеек, поэтому 1 копейка составляет одну сотую рубля, 2 копейки — 2 сотых и т. д. 10 копеек можно рассматривать как 10 сотых, или как одну десятую. Ученики еще не имеют представления о сокращении, но не будет вреда в том, если они поймут, что одна величина выражается двумя дробями, которые равны между собой.

Относительно получения дробей от деления мы уже кратко заметили во введении, что говорить здесь об этом преждевременно до тех пор пока не будет изучено действие деления. В этом смысле и высказываются некоторые методисты. Однако мы считаем полезным и даже необходимым на этом остановиться, но мы подойдем к этому вопросу наглядным, опытным путем. Мы будем говорить о возникновении дробей не от деления чисел (это следующая, более высокая ступень), а от деления вещей, предметов, допускающих разделение. Можно ли это делать? Это нужно делать потому, что в этом месте имеется в виду наглядная концепция дроби. Речь идет о возникновении дроби из некоторой конкретной реальности.

Здесь полезно припомнить, как в первый раз 7—8-летние дети знакомятся с делением.

Учитель берет, положим, 30 яблок и говорит: «Я хочу разделить эти яблоки между пятью учениками. Сколько яблок достанется каждому?» Затем он начинает откладывать по одному яблоку и говорит: «Это Коле, это Васе» и т. д. Затем он начинает откладывать по второму, по третьему и т. д. яблоку и делает так до тех пор, пока в куче из 30 яблок не останется ни одного. Вместо кучи из 30 яблок у него образовалось пять меньших кучек, по 6 яблок в каждой. Такое опытное, фактическое деление вещей должно дать наглядное представление об абстрактном делении чисел.

Ученики стали старше, и они могут решать несколько более сложные задачи. Пусть у нас яблок меньше, чем детей, например яблок 3, а детей 4, и требуется разделить эти яблоки поровну между детьми. Очевидно, что по ц е л о м у яблоку дети не получат, а каждому из них достанется лишь некоторая часть яблока. Как эту часть найти? Можно поступить так. Каждое из двух яблок разрезать пополам и дать каждому мальчику по половине яблока. Затем взять оставшееся третье яблоко и разрезать его на четыре равные части. После этого нужно каждому ученику добавить еще по одной четверти яблока. Сколько всего пришлось каждому ученику? На этот вопрос ответить трудно, потому что здесь нужно сложить $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, а дети еще не знают сложения дробей. Чтобы довести задачу до конца, нужно апеллировать к наглядности и здравому смыслу. На отрезках или на кружочках нетрудно показать, что в половине две четверти и, значит, сложить $\frac{1}{2}$ с $\frac{1}{4}$ — это все равно, что сложить $\frac{2}{4}$ с $\frac{1}{4}$,— получится $\frac{3}{4}$. Итак, каждый получил по $\frac{3}{4}$ яблока.

Деление вещей привело к появлению дробного числа. С течением времени эта задача будет облечена в отвлеченную форму: число 3 разделить на число 4 — в частном получается дробь $\frac{3}{4}$.

Мы пытались показать происхождение дробей от деления и для этой цели брали некоторые конкретные предметы (дискретные множества). Помимо этого, можно говорить о делимости величин. Рассмотрим, например, площадь. Изобразим квадрат с произвольной стороной и разделим его на две части или диагональю, или прямой, проходящей через середины противоположных сторон. Запишем в виде дробей полученные результаты. Изобразим несколько различных прямоугольников, разделим один из них пополам (хотя бы диагональю), другой — на три равные части, третий — на четыре и т. д., и все эти части обозначим дробями.

Аналогично можно рассмотреть деление на части объемов. Существуют деревянные шары, которые хорошо расщепляются на две равные части. Можно изготовить деревянную модель куба, которая допускала бы разделение на 2, на 4 и на 8 равных частей.

30. Сравнение дробей по величине. Когда вводятся новые числа, то всегда возникает вопрос об их сравнении. Целые числа тоже нуждаются в сравнении. О них мы говорим, что из двух целых чисел то больше, которое в натуральном ряде стоит правее.

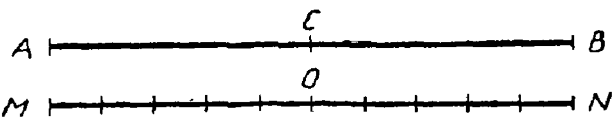

Рис. 4.

Начинать сравнение дробей можно так: возьмем два равных между собой отрезка AB и MN, значит, у нас $AB = MN$ (рис. 4). Пусть длина каждого из них равна, положим, одному дециметру.

Разделим первый из них (AB) на две равные части ($AC = CB$), тогда каждый из отрезков AC и CB будет равен $\frac{1}{2}$ отрезка AB. Разделим второй отрезок (MN) на 10 равных частей, тогда каждый из отрезков MO и ON будет равен

$\frac{5}{10}$ отрезка MN. Отрезки AC и MO равны между собой, значит, и числа, которыми они измеряются, равны между собой, т. е.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}.$$

Две дроби равны между собой, несмотря на то что у них различны числители и знаменатели. Равенство их очевидно, так как первая дробь получается из второй путем сокращения на 5, но учащиеся еще не знают сокращения, поэтому об этом нельзя с ними говорить.

В данный момент особенно важно обратить внимание учащихся на то, что многие дроби изображаются (пишутся) по-разному, но равны между собой по величине.

Можно предупредить учащихся, что о равенстве $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{10}$ мы могли бы говорить, приведя эти дроби к общему знаменателю, т. е. выразив первую дробь в десятых долях, но пока этого делать не стоит, а следует заняться сравнением дробей в том виде, в каком они даются.

Вообще сравнение дробей представляет собой ценный материал для размышления и для понимания дробей. Для того чтобы судить о степени понимания детьми этого вопроса, полезно предлагать им пары дробей для сравнения без приведения их к общему знаменателю.

1. Какая из дробей больше: $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$?

Возьмем рис. 5.

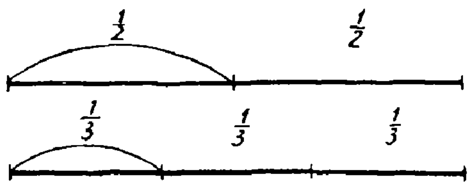

Рис. 5

Даны два равных между собой отрезка. Первый разделен на две, а второй на три равные части. Рисунок показывает, что $\frac{1}{2}$ больше $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{2} > \frac{1}{3}\right)$.

Значит, в данном случае дробь с меньшим знаменателем больше, чем дробь с бо́льшим знаменателем.

К этому выводу можно было бы прийти и без чертежа, путем рассуждения. В первом случае единица разделена на 2 равные части, а во втором случае та же единица разделена на 3 равные части: очевидно, что первые части должны быть более крупными, а вторые более мелкими: значит, $\frac{1}{2}$ больше $\frac{1}{3}$.

Мы брали две дроби с числителями, равными единице. Теперь нужно взять две дроби с числителями, равными какому-нибудь другому числу, например $\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{8}$. Чтобы их сравнить, воспользуемся чертежом. Возьмем два равных отрезка AB и MN (рис. 6). Разделим первый отрезок на 6

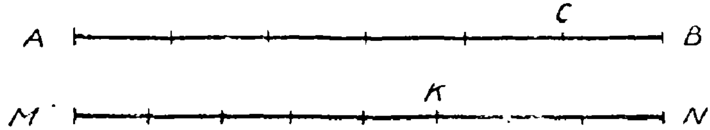

Рис. 6.

равных частей и возьмем 5 таких частей, это будет отрезок AC, он равен $\frac{5}{6}$ AB. Разделим второй отрезок на 8 равных частей и возьмем тоже 5 таких частей, это будет отрезок MK, он равен $\frac{5}{8}$ отрезка MN. Из чертежа видно, что отрезок AC больше отрезка MK:

$$AC > MK, \text{ значит,}$$
$$\frac{5}{6} > \frac{5}{8}.$$

Этот факт можно понять и без чертежа. Шестые доли крупнее восьмых долей, значит, 5 более крупных долей больше, чем 5 мелких долей.

Значит, из двух дробей с одинаковыми числителями та дробь больше, у которой знаменатель меньше.

2. После этого переходим к сравнению дробей с одинаковыми знаменателями. Этот вопрос проще предыдущего. Сравним дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$. Возьмем отрезок AB и разделим его на 8 равных частей (рис. 7).

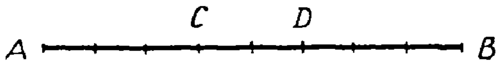

Рис. 7.

Тогда отрезок AC представит $\frac{3}{8}$, а отрезок AD — $\frac{5}{8}$ от AB. Очевидно, что AC меньше AD; поэтому

$$\frac{3}{8} < \frac{5}{8}, \text{ а } \frac{5}{8} > \frac{3}{8}.$$

При рассмотрении этого случая очень важно отчетливо произносить названия дробей, делая акцент на числителях: т р и восьмых меньше п я т и восьмых.

Конечно, необходимо оттенить тот факт, что у обеих дробей доли одинаковые, поэтому главную роль играет число долей. Значит, первая дробь $\left(\frac{3}{8}\right)$ меньше второй $\left(\frac{5}{8}\right)$, потому что у нее ч и с л о долей меньше.

Следовательно, из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой числитель больше.

3. Остановимся на сравнении дробей с разными числителями и знаменателями. В этом случае лучше всего привести дроби к общему знаменателю, но очень полезно для развития учащихся сравнить несколько пар дробей, не приводя их к общему знаменателю. Возьмем дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ и ответим на вопрос, какая из них больше. Начнем с чертежа. Построим два равных отрезка AB и MN (рис. 8).

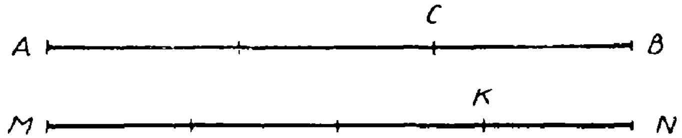

Рис. 8.

Разделим AB на 3 равные части и выделим таких частей 2; разделим MN на 4 равные части и выделим таких частей 3. Из чертежа видно, что AC меньше MK, значит, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Можно рассуждать так: сравним каждую из данных дробей с единицей, дробь $\frac{2}{3}$ меньше 1 на $\frac{1}{3}$, а дробь $\frac{3}{4}$ меньше 1 на $\frac{1}{4}$. Одна треть, как мы уже знаем, больше одной четверти. Значит, у первой дроби больше недостает до единицы, чем у второй, и, значит, сама она меньше, чем вторая.

Полезно предлагать учащимся вопросы такого типа: «Какая из дробей больше: $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$, если a больше b?»

31. Дроби правильные и неправильные. Смешанные числа. Рекомендуется взять отрезок, равный, например, каким-нибудь двум линейным единицам, изобразить его на доске и в тетрадях, разделить каждый единичный отрезок на 10 равных частей и рассмотреть последовательно все части, на которые разделены эти отрезки (рис. 9).

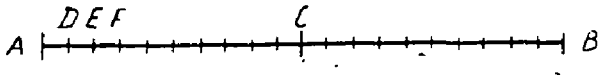

Рис. 9.

Каждую часть нужно записать в виде дроби и назвать словами. Таким образом, получаем:

$$AC = 1;\ CB = 1;\ AD = \frac{1}{10};\ AE = \frac{2}{10};\ AF = \frac{3}{10}$$

и так далее до конца. Значит, у нас получаются, кроме написанных, следующие дроби:

$$\frac{4}{10};\ \frac{5}{10};\ \frac{6}{10};\ \frac{7}{10};\ \frac{8}{10};\ \frac{9}{10};\ \frac{10}{10};\ \frac{11}{10};\ \frac{12}{10};\ \frac{13}{10};\ \frac{14}{10};\ \frac{15}{10};$$
$$\frac{16}{10};\ \frac{17}{10};\ \frac{18}{10};\ \frac{19}{10};\ \frac{20}{10}.$$

Затем нужно сначала выписать первые 9 дробей, у каждой из них числитель меньше знаменателя. Потом отдельно выписать дробь $\frac{10}{10}$, у которой числитель равен знаменателю, и, наконец, отдельно выписать последние 10 дробей, у которых числитель больше знаменателя. Дроби первой группы называются правильными, дроби второй и третьей групп — неправильными.

Дети не должны воспринимать термин «неправильная дробь» как какой-то недостаток (порок) дроби, точно так же и термин «правильная дробь» как подчеркивание каких-то достоинств этой дроби.

Эти названия нужно понимать в том самом обыкновенном смысле, что правильная дробь есть дробь, меньшая единицы, а неправильная дробь есть дробь, равная единице или большая единицы. Эти мысли нужно записать в виде неравенств и равенства, т. е.

$$\frac{1}{10} < 1; \ \frac{2}{10} < 1, \ \ldots; \ \frac{10}{10} = 1; \ \frac{11}{10} > 1; \ \frac{12}{10} > 1, \ \ldots$$

Затем возникает вопрос о том, что все неправильные дроби допускают второе написание, а именно: из чертежа видно, что

$$\frac{10}{10} = 1, \text{ а } \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}; \ \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}$$

и т. д. У нас снова возникли смешанные числа, о которых уже упоминалось в первых параграфах учения о дробях. В данном случае мы заменяли неправильную дробь смешанным числом, опираясь на чертеж. Поэтому следует выполнить еще один чертеж с иным подразделением на части и снова проделать все прежние операции от начала до конца. Если учащиеся научатся безошибочно делать это по чертежу, то нужно поставить перед ними две обратные задачи. Первая — обратить неправильную дробь в смешанное число и вторая, обратная ей,— обратить смешанное число в неправильную дробь (см. следующий параграф).

При определении правильной и неправильной дроби должен быть указан и внешний их признак: у правильной дроби числитель меньше знаменателя, а у неправильной дроби числитель или равен знаменателю,или больше его.

После того как ученики усвоили сущность этого параграфа, необходимо предложить им самостоятельно написать три строчки дробей на доске и в тетрадях. В первой строке будет, положим, 10 дробей, у которых числитель меньше знаменателя (правильные дроби). Во второй строке столько же дробей с числителями, равными знаменателю (неправильные дроби). В третьей строке столько же дробей с числителями, большими знаменателей (неправильные дроби). Некоторые из этих дробей по указанию учеников можно проиллюстрировать с помощью чертежа.

32. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратно. Перед обращением неправильной дроби в смешанное число сначала нужно выяснить, для чего это преобразование выполняется. Напишем несколько чисел:

$$\frac{11}{2}; \ \frac{57}{10}; \ \frac{169}{30}; \ \frac{331}{60}; \ \frac{541}{100}.$$

Подобные числа очень редко встречаются в жизни и с первого взгляда трудно сказать, большие это числа или маленькие. Нетрудно видеть, что каждое из этих чисел представляет собой неправильную дробь, т. е. содержит в себе какое-то число целых единиц, если бы число этих единиц в каждом отдельном случае было выявлено, то легче было бы судить об их величине Неправильные дроби чаще всего возникают в процессе каких-нибудь вычислений и играют промежуточную роль; но как только вычисление окончено и привело к неправильной дроби, ее обращают в смешанное число. Вот почему необходимо уметь обращать неправильные дроби в смешанные числа. Как это делается?

Возьмем дробь $\frac{11}{2}$ и поставим вопрос, сколько в ней целых единиц? Вероятно, ученик будет исходить из той простой мысли, что в одной единице половин две; если мы будем постепенно брать по две половины, то не только дойдем до 11 половин, но даже перешагнем их. Фактически это будет так: две половины дают единицу, единица и еще две половины дают два, два и еще две половины дают три, три и еще две половины дают четыре, четыре и еще две половины дают пять. Мы уже исчерпали 10 половин, остается одна 11-я половина, для которой нет пары. Значит, у нас получилось 5 целых единиц и одна $\frac{1}{2}$ единицы, т. е. смешанное число $5\frac{1}{2}$. На чертеже это можно было бы изобразить так (рис. 10):

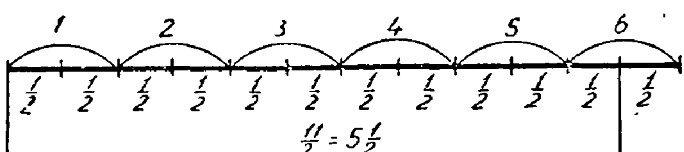

Рис. 10.

Мы проделали довольно длинный путь для того, чтобы установить, что $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$. Обычно это делается гораздо короче. Требуется сообразить, сколько пар половин содержится в 11. Для этого 11 нужно разделить на 2, получится 5 и 1 в остатке.

Принимая это во внимание, рассмотрим остальные случаи и получим:

$$\frac{57}{10} = ? \qquad \frac{57}{10} = 5\frac{7}{10};$$

$$\frac{169}{30} = ? \qquad \frac{169}{30} = 5\frac{19}{30};$$

$$\frac{331}{60} = ? \qquad \frac{331}{60} = 5\frac{31}{60};$$

$$\frac{541}{100} = ? \qquad \frac{541}{100} = 5\frac{41}{100}.$$

Интересно отметить, что все пять дробей очень близки между собой по величине; каждая из них оказалась больше 5 и меньше 6.

После этого следует предложить учащимся сформулировать правило обращения неправильной дроби в смешанное число и затем решить несколько примеров по выбору учащихся. Подчеркнуть, что преобразование называется *исключением целого числа из неправильной дроби*.

Перейдем теперь к обратному преобразованию, т. е. к обращению смешанного числа в неправильную дробь. Такое преобразование тоже часто приходится выполнять в процессе решения различных задач.

Возьмем смешанное число $1\frac{1}{2}$ и подумаем, как представить его в виде неправильной дроби. Знаменатель уже дан — это число 2. Значит, вопрос ставится так: как заменить смешанное число $1\frac{1}{2}$ неправильной дробью со знаменателем 2? Единица равна $\frac{2}{2}$ да еще имеется $\frac{1}{2}$, значит, всего будет $\frac{3}{2}$. Итак, $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Обратим в неправильную дробь смешанное число $3\frac{3}{4}$. Можно и здесь обратиться к помощи чертежа. Для этого следует построить отрезок, равный $3\frac{3}{4}$ какой-нибудь единицы. (Ученики должны построить чертеж.)

Чтобы подсчитать, сколько в нем четвертей, нужно число четвертей в каждой части умножить на число частей, т. е. на 3, и потом прибавить $\frac{3}{4}$. Получим:

$$\frac{4 \times 3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

Как нужно рассуждать, если не обращаться к чертежу? Каждая целая единица содержит четыре четверти, а 3 единицы будут содержать в три раза больше четвертых долей. Значит, в 3 целых единицах содержится 12 четвертей, да в дробной части смешанного числа имеется еще 3 четверти. Итого в $3\frac{3}{4}$ содержится 15 четвертей. Следовательно, $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

После этого ученики формулируют правило обращения смешанного числа в неправильную дробь.

33. **Обращение целого числа в неправильную дробь.** Всякое целое число может быть написано в виде неправильной дроби с любым знаменателем.

Для чего это нужно? Это бывает иногда полезно при выполнении вычислений, когда почти все числа, кроме немногих, выражены дробями, тогда и эти немногие целые числа удобно записать в виде дробей.

Рассмотрим этот вопрос последовательно

Прежде всего у всякого целого числа можно в качестве знаменателя подразумевать единицу, т е.

$$1 = \frac{1}{1};\ 2 = \frac{2}{1};\ 3 = \frac{3}{1};\ 4 = \frac{4}{1};\ 5 = \frac{5}{1}\ \text{и т. д.}$$

Но рассмотрим более сложные случаи. Попробуем написать единицу в виде дроби со знаменателем 2. Мы знаем, что дробь равна единице в том случае, когда ее числитель равен знаменателю. Значит, здесь и числителем должно быть число 2, так что

$$1 = \frac{2}{2}.$$

Таким же образом мы можем записать единицу в виде неправильной дроби с любым знаменателем, а именно:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} \ldots$$

Но это частный случай, из которого еще не вытекает общего правила для написания всякого числа в виде неправильной дроби с любым знаменателем.

Как теперь обратить любое целое число в неправильную дробь с каким-нибудь знаменателем? Пусть требуется, например, число 5 обратить в неправильную дробь со знаменателем 6. Будем рассуждать так: в одной единице шесть шестых долей, а в 5 единицах этих долей будет в 5 раз больше, т. е. 6 $\times$ 5 = 30 шестых долей. Это можно записать так:

$$5 = \frac{6 \cdot 5}{6} = \frac{30}{6}.$$

Таким же точно образом можно число 5 выразить и в каких-нибудь других долях, например:

$$5 = \frac{4 \cdot 5}{4} = \frac{20}{4}; \quad 5 = \frac{10 \cdot 5}{10} = \frac{50}{10};$$

$$5 = \frac{8 \cdot 5}{8} = \frac{40}{8}; \quad 5 = \frac{12 \cdot 5}{12} = \frac{60}{12}.$$

После этого учащиеся выведут правило обращения целого числа в неправильную дробь.

34. Изменение величины дроби с изменением ее членов. Этот вопрос вызывает споры. Некоторые педагоги заявляют, что место этого параграфа среди действий над дробями Мы излагаем этот вопрос в общей части и считаем, что если ученик хорошо усвоит относящиеся сюда положения, то ему гораздо легче будет продвигаться вперед. Мы рекомендуем с исключительным вниманием изучить этот параграф.

1-й вопрос. Учитель берет какую-нибудь дробь, например $\frac{1}{12}$, и предлагает ученику изменить ее, увеличивая числитель. Ученик увеличивает числитель дроби в 2 раза и получает дробь $\frac{2}{12}$. Он должен ответить на вопрос, что произошло с дробью и почему (дробь увеличилась в 2 раза, потому что вдвое увеличилось число долей). Затем нужно увеличить числитель в 3, в 4, в 5 и т. д. раз и каждый раз делать вывод.

Полезно взять отрезок, принять его за единицу, разделить на 12 равных частей и зафиксировать одну двенадцатую часть этого отрезка — это будет $\frac{1}{12}$; затем взять две такие части и указать на то, что второй отрезочек (две части) в два раза больше первого; ясно, что и число, т. е. соответствующая ему дробь, в два раза больше первой дроби, т. е. $\frac{1}{12}$. После этого таким же образом рассмотреть другие отрезки и соответствующие им дроби $\frac{3}{12}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{5}{12}$ и т. д.

После этого нужно взять другую дробь, например $\frac{1}{15}$, и проделать над ней ту же самую операцию. Желательно, чтобы каждый ученик принял участие в этой работе.

Наконец, учащиеся делают вывод: если числитель дроби увеличить в несколько раз, не изменяя знаменателя, то дробь увеличится во столько же раз.

Сделав этот вывод, попробуем сравнить изменение дроби в зависимости от изменения ее членов с изменением частного в зависимости от изменения делимого и делителя.

Возьмем частное от деления числа 16 на 8.

$$16 : 8 = 2.$$

Увеличим делимое (16) в два, три, четыре раза, разделим каждое новое делимое на прежний делитель и посмотрим, какое будет частное:

а) увеличиваем делимое в 2 раза:

$$(16 \cdot 2) : 8 = 32 : 8 = 4;$$

б) увеличиваем делимое в 3 раза:

$$(16 \cdot 3) : 8 = 48 : 8 = 6;$$

в) увеличиваем делимое в 4 раза:

$$(16 \cdot 4) : 8 = 64 : 8 = 8.$$

Во всех трех случаях частное увеличивалось во столько же раз, во сколько было увеличено делимое. Значит, частное и дробь в этом отношении ведут себя одинаково

2-й вопрос. Что происходит с величиной дроби при уменьшении ее числителя в несколько раз?

После того как рассмотрен первый вопрос, учащиеся с большей самостоятельностью смогут разрешить второй вопрос. Пусть они возьмут какую-нибудь дробь и попробуют уменьшить в несколько раз ее числитель. Может случиться, что они возьмут дробь $\frac{7}{20}$, которая дает мало возможностей для уменьшения. Ее числитель можно уменьшить только в 7 раз, и, значит, для обнаружения нашей мысли она хотя и годится, но мало показательна. Однако отвергать этот пример не следует, его нужно использовать. Но после этого нужно предложить взять какую-нибудь другую дробь. Если у этой дроби числитель будет с достаточным числом делителей, то на нем можно хорошо продемонстрировать изменение дроби в зависимости от изменения числителя.

Рассуждение должно быть проведено полностью: если уменьшим числитель вдвое, то дробь уменьшится тоже вдвое. Почему? Потому что стало вдвое меньше число долей, а доли остались те же самые.

Полезно взять отрезок, принять его за единицу, разделить его, например, на 15 равных частей и таких частей отделить, положим, 8. Значит, на нашем рисунке наглядно будет представлена дробь $\frac{8}{15}$ в виде определенного отрезка. Мы можем брать теперь части от этого отрезка. половину, четверть, восьмую. Числитель нашей дроби будет уменьшаться вдвое, вчетверо, в восемь раз; соответственно и величина дробей будет уменьшаться, так как изображающие их отрезки будут становиться все меньше и меньше.

Сопоставление с частным провести обязательно на числовых примерах.

3-й вопрос. Дальше учащиеся должны сообразить сами, что мы будем рассматривать. Мы рассмотрели изменение дроби в зависимости от увеличения и уменьшения числителя. Теперь, очевидно, нужно рассматривать изменение дроби при изменении знаменателя. Изменение знаменателя представляет собой более трудное явление, потому что здесь, выражаясь кратко, «увеличение ведёт к уменьшению» и обратно, и именно здесь ученики делают наибольшее число ошибок. Поэтому изменение дроби в зависимости от изменения знаменателя нужно рассмотреть подробно и обстоятельно.

Нужно показать, что с увеличением знаменателя дробь уменьшается. Чтобы это действительно было показательно, нужно взять сначала дробь с очень маленьким знаменателем, например со знаменателем 2, и затем не пожалеть времени и места на записывание дробей с постепенно увеличивающимися знаменателями. Конечно, не обязательно писать подряд все эти дроби, а написав несколько дробей, сделать разрыв, потом написать еще несколько дробей и т д. На учеников, конечно, произведет сильное впечатление, если, например, данный знаменатель будет увеличен в 100 раз, тогда вся дробь уменьшится в 100 раз. И если при этом пользовались геометрической иллюстрацией, то ученики даже не в состоянии будут изобразить такой крошечный отрезочек, какой нужно отложить, например $\frac{1}{200}$. Такого рода сильные впечатления необходимы, потому что через короткое время ученики начнут опять путать увеличение числителя с увеличением знаменателя.

Для того чтобы сделать вывод, полезно воспользоваться чертежом. Изобразим шесть отрезков (рис. 11). Первый отрезок AB разделим на 5 равных частей, а второй CD — на 10 равных частей. На этих двух отрезках можно иллюстрировать уменьшение дроби в 2 раза при увеличении знаменателя, например $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$.

Третий отрезок EF разделим на 3 равные части, а четвертый HK — на 9 равных частей. На этих отрезках можно иллюстрировать уменьшение дроби в 3 раза при увеличении знаменателя во столько же раз, например $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$.

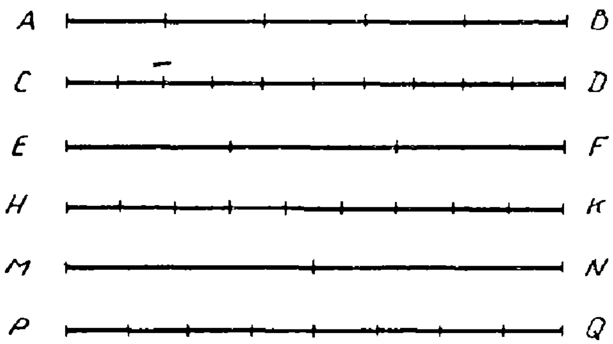

Рис. 11.

Пятый отрезок MN разделим пополам, а шестой отрезок PQ разделим на 8 равных частей. На этих отрезках можно иллюстрировать уменьшение дроби в 2 и в 4 раза при соответствующем увеличении знаменателя.

Повторяем, что трех пар отрезков недостаточно для того, чтобы ученики раз и навсегда усвоили сущность изменяемости дроби в зависимости от изменения знаменателя: они еще долго будут ошибаться. Чтобы добиться безошибочных ответов, нужно взять еще несколько рядов чисел (дробей) и чертежей. Необходимо почаще к этому вопросу возвращаться и почаще его повторять.

Аналогию с частным провести нужно и в этом случае. Например: $144 : 2 = 72$;

$$144 : (2 \cdot 6) = 144 : 12 = 12.$$

4-й вопрос. Необходимо, чтобы учащиеся сами сообразили, в чем будет состоять четвертый вопрос. Так как мы только что рассмотрели изменение дроби при увеличении знаменателя, то нужно думать, что теперь мы будем говорить об изменении дроби при уменьшении знаменателя. Конечно. есть много общего между третьим и четвертым вопросами, но все-таки четвертый вопрос нужно тщательно рассмотреть, тем более что, рассматривая четвертый вопрос, мы тем самым повторяем и третий. При этом можно даже использовать предыдущий чертеж, рассматривая его в обратном порядке, снизу вверх.

Рассмотрим отрезок CD; он разделен на 10 равных частей. Значит, каждая часть равна $\frac{1}{10}$. Отрезок AB разделен на меньшее число частей, на 5 частей Значит, каждая часть равна $\frac{1}{5}$. Сравним дроби $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{5}$. Знаменатель первой в два раза больше, чем знаменатель второй. Иными словами, знаменатель второй дроби в два раза меньше знаменателя первой, но вторая дробь все-таки в два раза больше первой, что очень хорошо видно на чертеже. После этого следует и остальные пары отрезков рассмотреть в том же порядке.

Далее можно этот же вопрос рассмотреть на числах. Для этого возьмем какую-нибудь дробь, например $\frac{1}{24}$, и будем постепенно уменьшать ее знаменатель:

$$\frac{1}{24};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}.$$

Знаменатели наших дробей постепенно уменьшаются (с 24 до 2), зато сами дроби все время увеличиваются. И если мы сравним первую дробь с последней, то увидим, что знаменатель последней в 12 раз меньше знаменателя первой, но сама последняя дробь в 12 раз больше первой. Нужно сравнить и другие пары дробей. При этом недостаточно говорить «больше» или «меньше», а нужно указывать во сколько раз. Например, сравним первую дробь с третьей $\left(\frac{1}{24}\text{ и }\frac{1}{8}\right)$. Знаменатель второй дроби (8) в три раза меньше знаменателя первой (24), но сама числовая величина второй дроби в три раза больше первой Чтобы убедиться в том, что восьмая доля именно в три раза больше двадцать четвертой, можно отложить ту и другую на одном и том же отрезке прямой.

Наконец, полезно сопоставить это свойство дроби с аналогичным свойством частного. Разделим 120 на 12:

$$120 : 12 = 10.$$

Уменьшим делитель (12) в шесть (6) раз и снова выполним деление:

$$120 : 2 = 60, \text{ или } 120 : (12 : 6) = 60.$$

Свойство дроби и свойство частного совпадают.

5-й вопрос. Мы приступаем к рассмотрению самого интересного в теоретическом отношении и самого важного в практическом отношении свойства дроби: дробь не изменяется при одновременном увеличении или уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз. Следует последовательно рассмотреть оба случая — увеличение и уменьшение.

1. Для большей ясности полезно подробнее остановиться хотя бы на какой-нибудь одной дроби. Возьмем дробь $\frac{3}{5}$ и увеличим сначала только ее числитель, положим, в 4 раза, получится дробь $\frac{12}{5}$, т. е. $\frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

Мы получили дробь $\frac{12}{5}$, которая будет иметь вспомогательное значение. Она в 4 раза больше первой дроби. Теперь возьмем вспомогательную дробь $\frac{12}{5}$ и увеличим в 4 раза только ее знаменатель. Получим $\frac{12}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$.

Дробь $\frac{12}{5}$ уменьшилась в 4 раза. Что же произошло в конце концов с дробью $\frac{3}{5}$? Сначала мы увеличили ее числитель в 4 раза и тем самым увеличили всю дробь в 4 раза, затем мы увеличили знаменатель вспомогательной дроби тоже в 4 раза и тем самым уменьшили всю дробь в 4 раза. Таким образом, исходная дробь после этих двух операций осталась без изменения. Значит, $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$.

Факт неизменяемости дроби при одновременном увеличении числителя и знаменателя в одинаковое число раз прекрасно иллюстрируется на чертеже. Нужно изобразить отрезок AB, разделить его на 5 равных частей и взять три такие части (рис. 12). Тогда отрезок AC будет равен

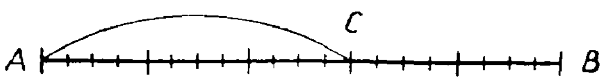

Рис. 12.

$\frac{3}{5}$ отрезка AB. Разделим теперь каждую пятую часть отрезка AB на четыре равные части, тем самым весь отрезок AB разделится на 20 равных частей. Таким образом, при первом делении отрезок AC изображался дробью $\frac{3}{5}$, а при новом раздроблении тот же отрезок AC изображается дробью $\frac{12}{20}$.

После этого можно несколько сократить изложение. Можно взять какую-нибудь исходную дробь, например $\frac{1}{2}$, и, увеличивая одновременно ее члены, получить ряд равных ей дробей, т. е.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}.$$

Теперь ученики должны сформулировать вывод: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же число, то величина дроби не изменится.

Это свойство в высшей степени важно записать на буквах; если даже ученики слабо владеют буквенным аппаратом, все-таки это свойство настолько рельефно выглядит на буквах, что его поймет каждый. Обозначим дробь через $\frac{a}{b}$, а число, на которое умножаются числитель и знаменатель,— буквой m, тогда полученное свойство дроби примет вид:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}.$$

2. Переходя к изменению дроби в связи с уменьшением ее членов, можно еще раз изложить рассуждения, аналогичные проведенным выше.

Возьмем дробь $\frac{6}{15}$ и уменьшим сначала только ее числитель в 3 раза, получится $\frac{6:3}{15}=\frac{2}{15}$.

Мы получили дробь $\frac{2}{15}$, которая будет иметь вспомогательное значение. Она в 3 раза меньше первой дроби. Теперь возьмем полученную вспомогательную дробь $\frac{2}{15}$ и уменьшим в 3 раза только ее знаменатель, получим $\frac{2}{15:3}=\frac{2}{5}$.

Дробь $\frac{2}{15}$ увеличилась в 3 раза. Что же произошло с дробью $\frac{6}{15}$ в конце концов? Сначала мы уменьшили ее числитель в 3 раза и тем самым уменьшили всю дробь в 3 раза. Затем мы уменьшили знаменатель вспомогательной дроби тоже в 3 раза и тем самым увеличили всю дробь в 3 раза. Таким образом, исходная дробь после этих двух операций осталась без изменения. Значит, $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Неизменяемость дроби при одновременном уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз удобно иллюстрируется на чертеже. Возьмем отрезок AB, разделим его на 15 равных частей и зафиксируем 6 таких частей. Тогда отрезок AC будет равен $\frac{6}{15} AB$. Теперь произведем другое деление отрезка точками D, C, E, F на 5 равных частей. Тогда отрезок AC будет соответствовать $\frac{2}{5}$ отрезка AB (рис. 13). Значит, один и тот же отрезок AC при одном делении выражался дробью $\frac{6}{15}$, а при другом делении дробью $\frac{2}{5}$, т. е. $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. (На чертеже 15-е доли не обозначены.)

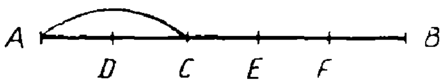

Рис. 13.

Теперь тот же вопрос можно рассмотреть на числах. Возьмем какую-нибудь исходную дробь, например $\frac{60}{120}$, и, уменьшая одновременно ее члены, получим ряд равных ей дробей, т. е.

$$\frac{60}{120} = \frac{30}{60} = \frac{20}{40} = \frac{15}{30} = \frac{12}{24} = \frac{10}{20} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Теперь ученики должны сформулировать вывод: если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же число, то величина дроби не изменится. Запишем этот вывод с помощью буквенных символов. Обозначим дробь через $\frac{a}{b}$, а число, на которое делятся числитель и знаменатель,— буквой m, тогда полученное свойство дроби примет вид:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}.$$

Затем два последних вывода объединяются вместе и получается основное свойство дроби.

Провести аналогию между основным свойством дроби и соответствующим свойством частного совершенно необходимо.

35. Сокращение дробей Изучение сокращения дробей рекомендуется начать с того, что существуют дроби с различными членами (числителями и знаменателями) и все-таки равные между собой.

Установить этот факт можно сначала опытом: можно взять яблоко и показать, что $\frac{2}{4}$ его все равно, что $\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Можно взять другой предмет (круглый хлеб, арбуз и т. д.) и показать (разрезав его на 8 равных частей), что $\frac{6}{8}$ все равно, что $\frac{3}{4}$, а $\frac{4}{8}$ все равно, что $\frac{2}{4}$, и $\frac{2}{4}$ все равно, что $\frac{1}{2}$.

После этого рекомендуем перейти к геометрическим представлениям: отрезок делится на 4 части и указывается, что $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; отрезок делится на 6 частей и указывается, что $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; отрезок делится на 8 частей и указывается, что $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$; $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Этих отрезков недостаточно. Нужно взять еще несколько различных по длине отрезков, принять каждый из них за единицу и выполнить фактическое деление отдельных отрезков на 12, 16, 18, 20, 24 и т. д. частей. Не следует ограничиваться только указанием на то, что такое деление может быть выполнено. Необходимо, чтобы все построения, измерения, записи и выводы были сделаны самостоятельно учащимися. Учитель в данном случае только исправляет ошибки.

Теперь поставим вопрос, было ли все это для нас неожиданностью, или мы подготовлены к этому предыдущими рассуждениями? Ничего неожиданного нет: все это вытекает из основного свойства дроби. Всякий раз, когда мы какую-нибудь дробь, например $\frac{5}{10}$, заменяем дробью $\frac{1}{2}$, деля числитель и знаменатель на 5, мы опираемся на основное свойство дроби. Само преобразование называется сокращением дроби.

Теперь нужно перейти к деталям этого преобразования. Возьмем, например, дробь $\frac{1}{3}$. Ее нельзя сократить. Почему? Потому что ее числитель и знаменатель не имеют общих делителей. Это дробь несократимая.

Возьмем дробь $\frac{2}{6}$. Ее числитель и знаменатель имеют общий делитель 2, и, значит, на него можно разделить каждый из членов дроби $\frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$. Получили несократимую дробь $\frac{1}{3}$.

Деления, которые мы сейчас написали в числителе и знаменателе, обычно не пишутся, а выполняются в уме. Можно воспользоваться геометрической иллюстрацией. Возьмем отрезок AB и разделим его на 6 равных частей (рис. 14). Каждый из отрезков AC, CD и DB равняется

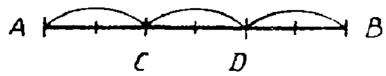

Рис. 14.

$\frac{2}{6}$ отрезка AB. Теперь пусть ученики посмотрят на чертеж и скажут, сколько на чертеже отрезков, равных $\frac{2}{6}$? Три. Каждый из них обведен дугой. Какую же часть отрезка AB составляет каждый из этих отрезков? Одну треть $\left(\frac{1}{3}\right)$. Следовательно, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Теперь возьмем дробь $\frac{6}{12}$ и сократим ее на 2: $\frac{6}{12} = \frac{3}{6}$.

Это сокращение не привело нас к несократимой дроби; полученная дробь $\frac{3}{6}$ снова может быть сокращена на 3:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Значит, мы сократили дробь $\frac{6}{12}$ сначала на 2, а потом полученную дробь $\frac{3}{6}$ сократили на 3. Мы выполнили сокращение последовательно. Можно ли было сразу сократить $\frac{6}{12}$ на 6? Можно. Получилась бы та же самая дробь $\frac{1}{2}$.

Возьмем теперь дробь с большими числителем и знаменателем, например $\frac{160}{224}$, и попробуем ее сократить. Мы сократим ее сначала на наименьший из возможных делителей, т. е. на 2: $\frac{160}{224}=\frac{80}{112}$.

Полученная от этого сокращения дробь тоже допускает сокращение на 2, т. е. $\frac{80}{112}=\frac{40}{56}$.

Снова у нас в числителе и знаменателе четные числа, и, стало быть, снова возможно сокращение на два: $\frac{40}{56}=\frac{20}{28}$.

Выполним еще сокращение, причем уже не на 2, а сразу на 4, получим: $\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$.

Мы получили несократимую дробь, выполнив несколько последовательных сокращений. Однако можно было бы привести данную дробь к несократимой не путем последовательных сокращений, а путем деления числителя и знаменателя на их наибольший общий делитель. Иногда можно догадаться, чему равен этот делитель; но если догадаться трудно, то нужно разыскать его по известному правилу[1]. Разложим числитель и знаменатель на простые множители:

$$160 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5;$$
$$224 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7;$$
$$\text{Н. О. Д.} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32.$$

Таким образом, предложенную выше дробь $\frac{160}{224}$ можно было бы сразу сократить на 32, т. е.

$$\frac{160^{(32)}}{224}=\frac{5}{7}.$$

(Сверху справа от числителя в скобочках написан делитель, на который мы сокращаем числитель и знаменатель).

Еще несколько замечаний о сокращении дробей. Если в числителе и знаменателе имеется один или несколько, но поровну нулей, то прежде всего нужно зачеркнуть этот нуль или нули. Например:

$$\frac{230}{750}=\frac{23}{75}.$$

[1] Как указано выше, знание понятия НОД не обязательно. Методические указания консультанта-методиста Министерства просвещения РСФСР И. С. Петракова («Математика в школе», 1960, № 4, стр. 19—20) рекомендуют сокращать дроби на последовательно выявляемые делители.— *Ред.*

Этим мы сразу уменьшаем члены дроби, и тогда становится виднее, возможно ли дальнейшее сокращение. Относительно полученной выше дроби может возникнуть вопрос, нельзя ли ее еще сократить. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно обратить внимание на то, что в числителе этой дроби написано простое число 23; значит, сокращение было бы возможно лишь в том случае, если бы знаменатель делился на 23, но знаменатель 75 разлагается так: $3 \cdot 5 \cdot 5$ и на 23 делиться не может. В данном случае числитель и знаменатель являются числами взаимно простыми и дробь оказывается несократимой.

При изучении этого отдела мы рекомендуем не отказываться от устного сокращения небольших дробей, например таких:

$$\frac{2}{4}; \frac{4}{12}; \frac{5}{10}; \frac{6}{8}; \frac{10}{12}; \frac{12}{16}; \frac{15}{20}; \frac{16}{18}; \frac{12}{18}; \frac{16}{24} \text{ и т. д.}$$

36. Приведение дробей к общему знаменателю. Цель приведения дробей к общему знаменателю достаточно очевидна, и она должна быть в самом начале сформулирована. Эта цель состоит в том, что, во-первых, приведение дробей к общему знаменателю позволяет сравнивать по величине любые дроби и, во-вторых, дроби с равными знаменателями без труда можно складывать и вычитать. И то и другое следует объяснить на примере. И хотя ученики еще не знают сложения и вычитания дробей, но никто не пострадает, если мы покажем им по одному примеру на сложение и вычитание.

Мы возьмем только две простейшие дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ и на них продемонстрируем все эти три факта.

Сравнение дробей. Дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ легко выражаются в шестых долях, что можно показать на чертеже. Для этого достаточно взять два равных отрезка и разделить первый на две равные части, а второй — на три равные части. После этого каждый отрезок нужно дополнительно разделить на 6 равных частей, и тогда будет видно, что

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \text{ а } \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Итак, мы привели наши дроби к общему знаменателю и теперь видим, что $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, потому что $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$.

Сложение дробей. Мы должны сложить $\frac{1}{2}$ с $\frac{1}{3}$. Мы можем заменить эти дроби равными им дробями $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. Спрашиваем, сколько шестых долей получится в сумме, если в первом слагаемом их 3, а во втором 2. Очевидно, в сумме их будет 5, т. е. $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.

Вычитание дробей. Мы должны вычесть из дроби $\frac{1}{2}$ дробь $\frac{1}{3}$. Заменим эти дроби равными им дробями $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$. Поставим вопрос, сколько шестых долей останется, если из трех шестых мы вычтем две шестых. Очевидно, останется $\frac{1}{6}$, т. е. $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$.

Таким образом мы выясним цель «приведения дробей к общему знаменателю».

Теперь мы займемся изучением этого преобразования.

Обычно рассматриваются три случая: а) один из знаменателей данных дробей делится на каждый из остальных; б) знаменатели имеют общие множители, но ни один из них не делится на остальные; в) знаменатели — числа взаимно простые.

Рассмотрим их последовательно. Конечно, в этих трех случаях ученики не должны видеть три разные задачи; это одна и та же задача, и сущность ее решения во всех случаях одна и та же. Задача эта решается единообразно и независимо от того, сколько дано дробей для приведения их к общему знаменателю. Этот единый метод может быть изложен в самом начале, и он всегда должен быть перед глазами ученика. Он состоит в следующем:

1) найти наименьшее кратное знаменателей данных дробей. Это и будет наименьший общий знаменатель;

2) найти дополнительный множитель для знаменателя каждой дроби путем деления наименьшего общего знаменателя на знаменатель первой, второй и т. д. дроби;

3) умножить оба члена каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.

Эти три пункта нужно выполнить во всех случаях. Разница будет лишь в незначительных деталях.

Начинать изложение вопроса лучше с небольшого числа дробей, а постепенно число дробей можно увеличить.

1. Привести к общему знаменателю дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{16}$. Наименьшим кратным знаменателей служит знаменатель второй дроби 16. В таком простом случае мы, конечно, не выполняем процедуры нахождения наименьшего кратного: сразу видно, что 16 делится на 8.

Итак, первый шаг мы выполнили в уме. Теперь нужно найти дополнительные множители. Для знаменателя первой дроби дополнительный множитель 2, для второй — единица. Какой же вид примут наши дроби после приведения?

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{6}{16};\quad \frac{5}{16}=\frac{5\cdot 1}{16\cdot 1}=\frac{5}{16}.$$

Сравнительная простота этого примера в том, что общий знаменатель можно найти в уме и дополнительный множитель для знаменателя второй дроби равен 1. Последнее влечет за собой обычные последствия: от умножения числителя и знаменателя на единицу члены дроби остаются без изменения

Рассмотрим три дроби: $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{11}{40}$ Этот пример отличается от первого только числом дробей. Наименьшим кратным знаменателей является знаменатель третьей дроби (40). Дополнительные множители: для знаменателя первой дроби — 4, для второй — 2. Дальнейшие вычисления протекают обычно:

$$\frac{3}{10}=\frac{3\cdot 4}{10\cdot 4}=\frac{12}{40};\ \frac{7}{20}=\frac{7\cdot 2}{20\cdot 2}=\frac{14}{40};\ \frac{11}{40}=\frac{11\cdot 1}{40\cdot 1}=\frac{11}{40}.$$

Таким образом, общая схема решения, намеченная выше, выполняется и в этом случае.

2. Приведем к общему знаменателю дроби: $\frac{5}{18}$ и $\frac{7}{24}$. Здесь больший из знаменателей (24) не делится на меньший (18), и поэтому прежний путь для нас закрыт. Мы должны искать наименьшее общее кратное знаменателей не среди данных знаменателей. Если решать по всем правилам, то для нахождения наименьшего общего кратного знаменателей нужно разложить знаменатели данных дро-

бей на простые множители. Однако в данном случае знаменатели 18 и 24 не велики: учащиеся сообразят без разложения, что здесь наименьшим общим кратным будет число 72. Дополнительные множители для знаменателя первой дроби 4, а для второй — 3. Выполним вычисления:

$$\frac{5}{18}=\frac{5\cdot 4}{18\cdot 4}=\frac{20}{72};\ \frac{7}{24}=\frac{7\cdot 3}{24\cdot 3}=\frac{21}{72}.$$

Рассмотрим теперь другой пример. **Приведем к общему** наименьшему знаменателю дроби:

$$\frac{7}{18};\ \frac{5}{24};\ \frac{8}{25};\ \frac{11}{40};\ \frac{7}{72};\ \frac{5}{48}.$$

Найдем наименьшее общее кратное знаменателей по общему правилу:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\ & 18=2\cdot 3\cdot 3;\\
\text{II.}\ & 24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3;\\
\text{III.}\ & 25=5\cdot 5;\\
\text{IV.}\ & 40=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5;\\
\text{V.}\ & 72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3;\\
\text{VI.}\ & 48=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3;
\end{aligned}$$

$$\text{Н. О. К.}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5=3600.$$

Дополнительные множители рекомендуется находить р а ц и о н а л ь н о. Это значит, что следует не делить наименьший общий знаменатель на каждый из данных знаменателей, а выключать из состава множителей общего знаменателя множители данного знаменателя. Если на первых порах это покажется ученикам трудным, то можно сначала пойти трафаретным путем деления, а затем уже постепенно перейти к рациональному пути получения дополнительных множителей:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\ & 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5 && =200;\\
\text{II.}\ & 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5 && =150;\\
\text{III.}\ & 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 && =144;\\
\text{IV.}\ & 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 && =90;\\
\text{V.}\ & 2\cdot 5\cdot 5 && =50;\\
\text{VI.}\ & 3\cdot 5\cdot 5 && =75.
\end{aligned}$$

Умножая числители и знаменатели данных дробей на соответствующие дополнительные множители, наконец, приведем наши дроби к общему знаменателю:

$$\frac{7}{18} = \frac{7 \cdot 200}{18 \cdot 200} = \frac{1400}{3600};$$

$$\frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 150}{24 \cdot 150} = \frac{750}{3600};$$

$$\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 144}{25 \cdot 144} = \frac{1152}{3600};$$

$$\frac{11}{40} = \frac{11 \cdot 90}{40 \cdot 90} = \frac{990}{3600};$$

$$\frac{7}{72} = \frac{7 \cdot 50}{72 \cdot 50} = \frac{350}{3600};$$

$$\frac{5}{48} = \frac{5 \cdot 75}{48 \cdot 75} = \frac{375}{3600}.$$

На первых порах дополнительные множители пишут и возле числителя, и возле знаменателя. Конечно, это не обязательно и рекомендуется только для того, чтобы внести окончательную ясность в этот процесс.

В практике вычислений многое, само собой разумеющееся пропускается, многие вычисления выполняются устно, а в целом полуписьменно.

В тех случаях, когда для упражнения даются дроби с громоздкими числителями и знаменателями, нужно стремиться к более подробной записи, в особенности на первых порах. С течением времени запись, естественно, должна сократиться.

3. Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$. Это приведение нужно сделать, конечно в уме. При этом ученики должны заметить особенность этого случая. Она состоит не в том, что здесь маленькие числа, а в том. что знаменатели — числа взаимно простые. Поэтому общий знаменатель равен произведению данных знаменателей, а дополнительными множителями будут: для знаменателя первой дроби — знаменатель второй, а для знаменателя второй дроби — знаменатель первой. Значит, решение примет вид:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}; \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}.$$

Возьмем другой пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{10}$ и $\frac{5}{21}$. Знаменатели — числа взаимно простые, поэтому общий знаменатель будет равен их произведению:

$$\frac{7}{10}=\frac{7\cdot 21}{10\cdot 21}=\frac{147}{210};\quad \frac{5}{21}=\frac{5\cdot 10}{21\cdot 10}=\frac{50}{210}.$$

Возьмем более сложный пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби: $\frac{5}{33}$, $\frac{3}{25}$ и $\frac{2}{14}$. Знаменатели этих дробей — числа взаимно простые, и потому наименьший общий знаменатель будет равен их произведению. Пусть ученики сообразят, как можно написать дополнительные множители Конечно, дополнительные множители можно вычислить по общему правилу (разделить наименьший общий знаменатель на знаменатель данной дроби). Но гораздо интереснее и в образовательном отношении полезнее, если ученики поймут, что наименьший общий знаменатель составлен здесь от перемножения знаменателей данных дробей (есть их произведение). Дополнительный же множитель (или множители) можно получить путем «выключения» из произведения всех знаменателей одного знаменателя (знаменателя данной дроби). Выполним теперь «приведение»:

$$\frac{5}{33}=\frac{5\cdot 25\cdot 14}{33\cdot 25\cdot 14}=\frac{1750}{11\,550};$$
$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 33\cdot 14}{25\cdot 33\cdot 14}=\frac{1386}{11\,550};$$
$$\frac{2}{14}=\frac{2\cdot 33\cdot 25}{14\cdot 33\cdot 25}=\frac{1650}{11\,550}.$$

Глава четвертая

ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

37. Сложение дробей. Здесь последовательно рассматриваются три случая:

1) сложение дробей с одинаковыми знаменателями;
2) сложение дробей с разными знаменателями;
3) сложение смешанных чисел.

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями. Это самый простой и важный случай сложения дробей; важный потому, что сложение любых дробей сводится к сложению дробей с одинаковыми знаменателями.

Сложение дробей, как и сложение целых чисел, это — нахождение суммы дробей.

Наилучшее объяснение этого действия будет состоять в использовании чертежа. Пусть нужно сложить дроби $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$. Возьмем отрезок AB (рис. 15), примем его за единицу

Рис. 15.

и разделим на 5 равных частей. Тогда отрезок AC будет равен $\frac{1}{5}$ AB, отрезок CD равен $\frac{2}{5}$ AB, а отрезок AD, который является суммой AC и CD, очевидно, равен $\frac{3}{5}$ отрезка AB. Значит, можно написать:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

В этом и заключается все объяснение. Для того чтобы впечатление было более глубоким, нужно взять две другие дроби, например $\frac{4}{15}$ и $\frac{8}{15}$; построить новый отрезок, принять его за единицу, разделить на 15 равных частей и провести соответствующие рассуждения. В результате получим, что

$$\frac{4}{15}+\frac{8}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Полезно взять еще две дроби по желанию учащихся и с помощью чертежа проделать над ними необходимые манипуляции

После этого ученики должны вывести правило. Вообще все правила выводят ученики и выписывают их на доске. Если это правило лучше книжного, то его следует предпочесть.

Для усиления впечатления полезно использовать классные «дробные счеты», если таковые имеются в школе. На этих счетах можно продемонстрировать несколько случаев сложения простейших дробей с одинаковыми знаменателями. Брать дроби с какими-нибудь сложными знаменателями, конечно, нельзя, потому что набор долей на счетах ограничен простейшими. Вся работа по сложению дробей на счетах проводится учеником. Учитель только дает задание, например, сложить $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{12}$, а ученик должен сам указать необходимую проволоку и проделать действия. Следует постоянно обращать внимание учащихся на то, какие доли складываются, такие получаются и в сумме; конечно, после сокращения доли получатся иные.

Не следует лишать учащихся возможности выполнять некоторые довольно простые манипуляции, например, складывать отрезки, пользоваться дробными счетами на том основании, что ученики это хорошо понимают и в этом не нуждаются. Те, кто говорит это, упускают из виду одно чрезвычайно важное обстоятельство. Когда ученик складывает отрезки, то при этом он видит эти отрезки, своими руками чертит их, а не только слышит наименование дробей и видит их изображение цифрами.

Почему у нас часто бывает так: пока ученик изучал начальные сведения о дробях, то все понимал, а потом вдруг перестает понимать? Потому что он **бегло** прошел начальные сведения о дробях, нигде не встречал больших затруднений, все ему казалось очень простым и даже не заслуживающим большого внимания.

С. И Шохор-Троцкий в своей методике арифметики (стр. 243, 1912) высказывает такую интересную мысль: «Все дело только в том — правильно ли и достаточно ли выразительно прочтены данные дроби, т. е. правильно ли поставлены ударения на словах, обозначающих числители. От выразительности чтения в начале изучения, можно сказать, зависит все. Когда требуется сложить $\frac{3}{16}$ и $\frac{5}{16}$, то это требование надо прочесть так: «**Три** шестнадцатых, **да еще пять** шестнадцатых, а не так три **шестнадцатых**, да еще пять **шестнадцатых**».

К его словам стоит прислушаться. Однообразное чтение, без выделения, без остановок, без логических ударений, производит меньшее впечатление на ученика, чем чтение осмысленное, выразительное, сопровождающееся изменением интонации, паузами и подчеркиванием особо важных слов.

Некоторые авторы, желая облегчить изучение дробей, проводят аналогию между именованными числами и дробями. Этим путем они хотят, в частности, предотвратить иногда встречающуюся, особенно на первых порах, ошибку, состоящую в том, что дети при сложении дробей складывают не только числители, но и знаменатели. В таком случае рекомендуется сопоставить, например, такие суммы:

$$\frac{4}{15}+\frac{7}{15}=\frac{11}{15}; \; 4 \textit{ см} + 7 \textit{ см} = 11 \textit{ см}.$$

После рассмотрения сложения двух слагаемых можно перейти к сложению большего числа слагаемых, в первую очередь трех. По существу здесь ничего нет нового, но без выработки навыка учащиеся не научатся складывать дроби. Необходимо обращать внимание учащихся на своевременное сокращение суммы и исключение целого числа из неправильной дроби, если таковая получится в результате сложения. Например:

$$\frac{3}{16}+\frac{5}{16}+\frac{7}{16}+\frac{9}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями завершается выводом формулы. Возьмем хотя бы три дроби: $\frac{a}{k}$; $\frac{b}{k}$; $\frac{c}{k}$ и сложим их:

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}=\frac{a+b+c}{k}.$$

Учитель должен внимательно следить за настроением учеников. Интересно установить, какое впечатление произведет на учеников это буквенное равенство, доставит ли оно им чувство удовлетворения, или, напротив, они будут недовольны и разочарованы. В зависимости от той или иной реакции учеников учитель должен построить свои дальнейшие объяснения. Если ученики спросят, для чего это нужно, то можно ответить, что эта формула дает сокращенную символическую запись правила сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Правило гласит: чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и оставить тот же знаменатель. В левой части формулы записана «задача» — сложить три дроби с одинаковыми знаменателями, а в правой части дается ее решение, оно состоит в сложении числителей дробей и в сохранении того же знаменателя. Глядя на формулу, ученик должен своими словами выразить эту мысль. Если же кто-нибудь из учеников спросит: «что» или «сколько» здесь получится (это возможно), то придется ответить, что формула не дает ответа на вопрос «что» или «сколько», а отвечает на вопрос «как».

Формулы нужно постепенно накапливать. Заучивать их не следует. Они должны быть записаны в карманных книжках учеников или на классных стенных таблицах. Время от времени нужно предлагать ученикам объяснить ту или иную формулу. Иногда, если ученик допускает ошибку в вычислениях, нужно указать ему формулу и спросить, понимает ли он, что отклоняется в своих действиях от формулы, и может ли он теперь, взглянув на формулу, исправить свою ошибку.

Сложение дробей с разными знаменателями. Если сложение дробей с одинаковыми знаменателями усвоено отчетливо, то сложение дробей с разными знаменателями затруднений не представит. Здесь могут быть особые ошибки, связанные с неумением найти наименьшее общее кратное знаменателей. Вот на эту сторону дела и следует обратить внимание. Если действительно ученики несколько забыли вопросы делимости, то полезно сделать краткое повторение.

Сложение дробей с разными знаменателями начинается с простейшего случая, когда один из знаменателей служит наименьшим общим кратным данных знаменателей. Сначала нужно взять только два слагаемых, а потом можно перейти к большему числу их.

Возьмем самый простой случай сложения:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$$

Пусть ученики сами скажут, что мы не можем сложить эти дроби, потому что у них разные знаменатели (*выражены в различных долях*). Поэтому, вероятно, догадаются ученики, их нужно сначала привести к общему знаменателю. Можно воспользоваться таким чертежом. Возьмем отрезок AB и разделим его в точке C на две равные части (рис. 16). Разделим отрезок CB пополам, тогда от-

Рис. 16.

резок CD будет равен $\frac{1}{4}$ AB. Значит, нам нужно сложить отрезки AC и CD, их сумма выразится отрезком AD, который можно представить как:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Но если мы разделим отрезок AC пополам, то ему будет соответствовать дробь $\frac{2}{4}$. Значит, наша задача примет вид:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Такого рода пример ученики должны решать в уме, рассуждая так: нужно сложить половину с одной четвертью, но половина содержит две четверти, значит, две четверти да одна четверть составляют $\frac{3}{4}$.

После этого можно взять пример сложнее:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=?$$

Общим знаменателем будет 12, дополнительным множителем для знаменателя первой дроби — 2. Решение примет вид:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}+\frac{7}{12}=\frac{10+7}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}.$$

В дальнейшем нужно стремиться к сокращению записи, но на первых порах следует писать подробно с обоснованием каждого шага. Мы написали дополнительные множители и у числителя, и у знаменателя, чтобы подчеркнуть, что на дополнительный множитель умножается каждый член дроби и что здесь мы опираемся на основное свойство дроби.

Можно еще рассмотреть какой-нибудь случай сложения трех дробей, взятых из условия задачи.

После этого можно предложить несколько примеров дробей с небольшими знаменателями, которые можно привести к общему знаменателю по соображению (не разлагая знаменатели на простые множители). Например:

$$\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=?$$

$$\frac{7}{12}+\frac{5}{18}=?$$

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=?$$

. . . .

В этих случаях, если трудно сообразить, какой будет общий знаменатель, можно пользоваться таким приемом: увеличить наибольший из знаменателей вдвое и посмотреть, не разделится ли полученное число на другой знаменатель; если не разделится, то увеличить его втрое, и т. д.

После этого можно перейти к тому общему случаю сложения дробей, когда для нахождения наименьшего общего знаменателя требуется найти наименьшее общее кратное путем разложения знаменателей на простые множители. Например,

$$\frac{13}{40}+\frac{5}{32}=?$$

$$\frac{13}{40}+\frac{5}{32}=\frac{52+25}{160}=\frac{77}{160}.$$

$$40=2\cdot2\cdot2\cdot5;$$
$$32=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2;$$
$$\text{Н. О. З.}=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5=160.$$

Дальше учащиеся будут решать подобные тренировочные примеры с двумя, тремя, четырьмя слагаемыми. Желательно, чтобы примеры предлагали сами учащиеся. При этом учащиеся будут часто подбирать неудачные примеры, например будут предлагать сократимые дроби; учитель будет исправлять отдельные недочеты и объяснять, почему данный пример не совсем удачный.

Наконец, рассматривается тот случай сложения дробей, когда знаменателями оказываются числа взаимно простые. Например:

$$\frac{7}{15}+\frac{9}{14}=?$$

Нужно найти наименьшее общее кратное знаменателей (15 и 14). Учащиеся должны припомнить, как найти наименьшее общее кратное чисел взаимно простых. Выяснив, что в таких случаях числа следует перемножить, приступаем к сложению дробей:

$$\frac{7}{15}+\frac{9}{14}=\frac{7^{(14)}}{15}+\frac{9^{(15)}}{14}=\frac{98+135}{210}=\frac{233}{210}=1\frac{23}{210}.$$

Может еще возникнуть вопрос о законности при сложении приведения дробей не к наименьшему общему знаменателю, а просто к общему знаменателю. Конечно, мы имеем право приводить дроби к любому общему знаменателю, но это нерационально.

Рассмотрев все случаи сложения дробей с различными знаменателями, ученики должны сформулировать правило сложения дробей. Так как в это правило неизбежно войдет пункт «приведение дробей к общему знаменателю», то здесь же нужно спросить другое правило, как привести дроби к общему знаменателю.

Сложение смешанных чисел. После того как изучено сложение дробей с одинаковыми и различными знаменателями, сложение смешанных чисел уже не представит никаких затруднений. Но пропустить этот вопрос нельзя ни при каких обстоятельствах, потому что именно здесь должны быть рассмотрены самые разнообразные и все возможные случаи сложения дробных чисел. Поэтому необходимо рассмотреть различные комбинации слагаемых, дабы убедиться в том, что все эти случаи доступны учащимся и они безошибочно выполняют любой из них. Можно последовательно рассмотреть следующие случаи:

1. Сложение целого числа с правильной дробью:

$$12 + \frac{5}{8} = 12\frac{5}{8}.$$

Сложение целого числа с правильной дробью состоит в том, что целое число и правильная дробь пишутся рядом. В сумме получается смешанное число. Этот факт известен учащимся с первых шагов ознакомления с дробями. Еще не имея представления о сложении дробей, учащиеся устно по соображению делали вывод, что 2 яблока и $\frac{1}{2}$ яблока составляют $2\frac{1}{2}$ яблока. Может быть, тогда сама конкретная постановка вопроса помогала сделать этот вывод, но теперь они должны решать такие примеры на любых отвлеченных числах.

2. Сложение целого числа со смешанным числом:

$$5 + 4\frac{3}{4} = 9\frac{3}{4}.$$

Сложение целого числа со смешанным числом состоит в сложении целых чисел и в приписывании к их сумме дробной части. В сумме получается смешанное число.

3. Сложение смешанного числа с правильной дробью:

$$6\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = 6\frac{15+14}{24} = 6\frac{29}{24} = 7\frac{5}{24}.$$

Сложение смешанного числа с правильной дробью состоит в сложении дробной части смешанного числа с правильной дробью. Эта сумма потом записывается рядом с целым числом. В случае возникновения неправильной дроби от сложения дробей следует исключить целое число и, если возможно сокращение, сделать его.

4. Сложение смешанных чисел:

$$8\frac{5}{9}+4\frac{5}{6}=12\frac{10+15}{18}=12\frac{25}{18}=13\frac{7}{18}.$$

При сложении смешанных чисел нужно сначала сложить целые числа, а потом, приведя дроби к общему знаменателю, сложить дроби. Если при этом получится неправильная дробь, то нужно исключить из нее целое число и присоединить его к ранее полученным целым. Если возможно, то следует сократить полученную дробь.

В порядке выполнения упражнений нужно брать больше двух слагаемых и с более сложными знаменателями. Полезно брать не только отвлеченные примеры, но и несложные текстовые задачи, приводящие к сложению разнообразных дробных чисел.

Если в примере встретятся большие целые числа и громоздкие дроби, то промежуточные вычисления могут быть сделаны отдельно и в стороне. Как раз в этом случае нужно следить за правильной записью, потому что дети иногда пропускают одно звено суммы и соединяют вычисления знаком равенства. Например:

$$123\frac{5}{12}+456\frac{7}{18}=\frac{15+14}{36}=\ldots \text{ и т. д.}$$

Нужно своевременно обратить внимание учеников на то, что при сложении смешанных чисел нет надобности обращать их в неправильные дроби. Такой прием нельзя назвать ошибочным, но он нерационален. Правда, сейчас он не придет в голову ученикам, но после изучения умножения и деления смешанных чисел они нередко будут сбиваться на этот путь, и тогда этот прием уже будет свидетельствовать о том, что ученик плохо усвоил действия над дробями. Вина ученика тогда будет не в том, что он применяет нерациональный прием, а в том, что он переносит правила, относящиеся к одним действиям, на другие. Это типичнейшая школьная ошибка, свойственная тем ученикам, которые схватывают только внешнюю форму явления. Эта ошибка чрезвычайно распространена, и виды ее многообразны. Например, ошибка, состоящая в сокращении слагаемых из числителя и знаменателя, относится к той же категории.

38. Вычитание дробей. Здесь последовательно рассматриваются три случая:

1) вычитание дробей с одинаковыми знаменателями;
2) вычитание дробей с разными знаменателями;
3) вычитание смешанных чисел.

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями. После того как усвоено сложение дробей, вычитание их не представит затруднений. Это, однако, не значит, что вычитание может быть рассмотрено бегло. Его следует изучить столь же тщательно, не пропуская ни одного пункта.

Вычитание дробей определяется (как и вычитание целых чисел) как действие, обратное сложению. Оно состоит в нахождении по сумме двух слагаемых и одному из слагаемых другого слагаемого.

Объяснение вычитания можно начать с рассмотрения чертежа. Пусть нужно из дроби $\frac{13}{15}$ вычесть дробь $\frac{4}{15}$. Возьмем отрезок AB, разделим его на 15 равных частей (рис. 17),

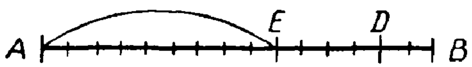

Рис. 17.

тогда отрезок AD составит $\frac{13}{15}$ от AB, а отрезок ED будет равен $\frac{4}{15}AB$. Если от отрезка AD отнять отрезок ED, то останется отрезок AE, равный $\frac{9}{15}AB$. На этом основании мы можем написать:

$$\frac{13}{15}-\frac{4}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Значит, $\frac{3}{5}$ и есть разность дробей $\frac{13}{15}$ и $\frac{4}{15}$. Таким образом, числитель разности получается от вычитания числителя вычитаемого из числителя уменьшаемого, а знаменатель остается тот же самый.

Для закрепления этого вывода нужно взять еще несколько пар дробей с равными знаменателями и выполнить вычитание меньшей из большей, сопровождая каждое вычитание иллюстративным чертежом.

Как и при сложении, здесь полезно использовать дробные счеты. Работу на счетах учащиеся могут проделать самостоятельно под наблюдением преподавателя. При выполнении вычитания разность может выразиться сократимой дробью, поэтому необходимо обращать внимание учеников на необходимость своевременных сокращений.

Вычитание небольших дробей нужно выполнять в уме, при этом если данные дроби произносятся голосом, а учащиеся воспринимают их на слух, то преподаватель должен произносить их выразительно, делая ударение на числителях данных дробей, например д е в я т ь десятых минус т р и десятых. Устное вычитание дробей, как и письменное, следует проверять сложением.

Полезно сопоставить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями с вычитанием так называемых именованных чисел. Это сопоставление можно провести путем сравнения таких записей:

$$\frac{11}{15}-\frac{7}{15}=\frac{4}{15};$$

$$11\ \textit{кг}-7\ \textit{кг}=4\ \textit{кг}.$$

Теперь следует предложить ученикам, сопоставив все решенные примеры, самостоятельно, без помощи учителя, написать формулу вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Ученики, может быть, вспомнят, как пишется формула сложения дробей. Если они в самом деле это помнят, то они без труда напишут и формулу вычитания. Тогда можно, имея формулу, высказать и правило вычитания. Если же ученики не смогут написать формулу, тогда нужно сначала составить правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями, а потом на основании правила написать:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Необходимо проверить, понимают ли ученики формулу, что обозначает каждая буква, как понято то, что написано слева от знака равенства, и как понять то, что написано справа от знака равенства.

В ы ч и т а н и е д р о б е й с р а з н ы м и з н а м е н а т е л я м и. Теперь уже дети вполне подготовлены к вычитанию дробей с разными знаменателями. Они уже знают сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями и сложение дробей с разными знаменателями. Все это такие факты, которые облегчают изучение вычитания дробей с разными знаменателями. Ведь единственный пункт, который требует к себе пристального внимания,— это приведение дробей к общему знаменателю.

Вычитание дробей с разными знаменателями начинается с того простейшего случая, когда один из знаменателей является наименьшим общим кратным данных знаменателей. Вычтем из дроби $\frac{7}{8}$ дробь $\frac{3}{4}$. Можно сначала предложить выполнить это вычитание в уме без всяких правил: $\frac{3}{4}$ равны $\frac{6}{8}$, и поэтому

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{7-6}{8}=\frac{1}{8}.$$

Таким образом, этот пример (приведение дробей к общему знаменателю и вычитание их) дети решают в уме. Тем не менее полезно проиллюстрировать это действие с помощью чертежа. Возьмем отрезок AB и разделим его на 8 равных частей (рис. 18). Часть этого отрезка AC будет равна $\frac{7}{8}AB$.

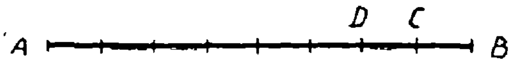

Рис. 18.

Требуется вычесть из этого отрезка отрезок, равный $\frac{3}{4}$, или после приведения к общему знаменателю $\frac{6}{8}$. На рисунке эту дробь можно представить отрезком AD. Таким образом, нам нужно вычесть такие отрезки:

$$AC-AD=DC.$$

На рисунке видно, что отрезок DC равен $\frac{1}{8}$ отрезка AB.

Теперь нужно взять дроби с большими знаменателями, но опять такими, чтобы знаменатель одной без остатка делился на знаменатель другой, например:

$$\frac{35}{64}-\frac{7}{16}=\frac{35-28}{64}=\frac{7}{64}.$$

После этого должны идти многочисленные упражнения такого же характера, как предложенные выше. В каждом случае нужно подметить, что один из данных знаменателей делится на другой. Этот больший знаменатель и будет общим знаменателем, а частное от деления его на меньший знаменатель будет дополнительным множителем для знаменателя этой дроби.

Перейдем ко второму случаю, когда среди двух данных знаменателей нет такого, который был бы кратным второго. В этом случае нужно находить наименьшее кратное знаменателей. Но мы начнем с таких простейших примеров, когда наименьшее кратное можно найти в уме. Такими примерами являются:

$$\frac{7}{15}-\frac{3}{10}=?$$

$$\frac{11}{18}-\frac{5}{12}=?$$

$$\frac{15}{16}-\frac{5}{24}=?$$

Если в каком-нибудь из этих случаев трудно догадаться, какой будет общий знаменатель, то можно удвоить больший знаменатель или утроить его и посмотреть, не будет ли полученное число делиться и на другой знаменатель.

Затем можно перейти к тому общему случаю, когда по соображению трудно найти наименьшее общее кратное и приходится прибегать к разложению данных знаменателей на простые множители.

Рассмотрим пример:

$$\frac{13}{40}-\frac{5}{32}=?$$

$$\frac{13}{40}-\frac{5}{32}=\frac{13^{(4)}}{40}-\frac{5^{(5)}}{32}=\frac{52-25}{160}=\frac{27}{160};$$

$$40=2\cdot2\cdot2\cdot5;$$

$$32=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2;$$

$$\text{Н.О.З.}=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5=160.$$

Теперь учащиеся могут решать тренировочные упражнения на вычитание и даже комбинированные задачи на сложение и вычитание.

Остается рассмотреть только частный случай вычитания, когда знаменателями являются числа взаимно простые. Например:

$$\frac{18}{35}-\frac{5}{12}=?$$

Учащиеся уже знают, что наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению. Поэтому

$$\frac{18}{35}-\frac{5}{12}=\frac{18^{(12)}}{35}-\frac{5^{(35)}}{12}=\frac{216-175}{420}=\frac{41}{420}.$$

Для большей ясности последний случай можно записать в виде формулы:

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{n}=\frac{an-bm}{m\cdot n}.$$

Из формулы отчетливо видно, что общий знаменатель получается от умножения данных знаменателей, а дополнительным множителем для знаменателя первой дроби служит знаменатель второй дроби, и обратно: дополнительным множителем второй дроби — знаменатель первой. После этого можно предлагать всякие примеры на сложение и вычитание устно и письменно. В примерах, содержащих вместе слагаемые и вычитаемые, можно, если это целесообразно, отыскивать общий знаменатель сразу для всех дробей, как слагаемых, так и вычитаемых; затем отдельно сложить слагаемые дроби и отдельно вычитаемые и из одной суммы вычесть другую.

Не следует забывать о проверке вычитания посредством сложения.

Вычитание смешанных чисел. Учащиеся, усвоившие сложение смешанных чисел, не встретят затруднений и при вычитании смешанных чисел. Единственное место, где нужно быть особо внимательным, это случай, когда дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого. Рассмотрим последовательно ряд случаев:

а) $2-\frac{5}{8}=1\frac{3}{8}$.

Здесь из 2 берется единица и выражается в восьмых долях, получается $\frac{8}{8}$, а затем из них вычитается $\frac{5}{8}$, остается $\frac{3}{8}$.

б) $15\frac{4}{7}-5=10\frac{4}{7}$.

Случай совсем простой: вычитаемое не имеет дробной части, действие выполняется только над целыми числами.

в) $12\frac{9}{10}-\frac{2}{5}=12\frac{9-4}{10}=12\frac{5}{10}=12\frac{1}{2}$.

Вычитаемое не имеет целой части. Действие выполняется над дробными частями уменьшаемого и вычитаемого.

г) $5\frac{17}{36} - 2\frac{5}{24} = 3\frac{34-15}{72} = 3\frac{19}{72}$.

Здесь из целой части уменьшаемого вичитается целая часть вычитаемого; дроби приводятся к общему знаменателю и тоже вычитаются.

д) $6\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4} = ?$

Приводим дроби к общему знаменателю:

$$6\frac{2}{12} - 2\frac{9}{12} = ?$$

Здесь $\frac{2}{12}$ меньше $\frac{9}{12}$, поэтому для выполнения вычитания нужно взять (занять) у уменьшаемого одну целую единицу и, обратив ее в соответствующие доли, присоединить их к таким же долям уменьшаемого, а потом вычесть:

$$6\frac{2}{12} - 2\frac{9}{12} = 5\frac{14}{12} - 2\frac{9}{12} = 3\frac{5}{12}.$$

Еще пример:

$$10\frac{2}{5} - 2\frac{7}{8} = ?$$

$$10\frac{16}{40} - 2\frac{35}{40} = 9\frac{56}{40} - 2\frac{35}{40} = 7\frac{21}{40}.$$

Не следует при вычитании смешанных чисел сначала производить вычитание целых чисел, а потом приступать к приведению дробей к общему знаменателю. Сначала нужно выяснить, возможно ли будет вычитание дробей, а потом уже приступать к вычислениям.

Таким образом, мы окончили действия первой ступени *над дробными числами*. Каких-нибудь принципиальных затруднений при сложении и вычитании быть не может. Необходимо только тщательно следить за соблюдением некоторых деталей в процессе выполнения действий. Укажем следующие:

1. Сложение и вычитание дробей с небольшими знаменателями следует выполнять устно.

2. Обращать при сложении и вычитании смешанные числа в неправильные дроби нецелесообразно.

3. Результаты сложения и вычитания (сумму и разность) нужно сокращать, если это возможно.

4. После выполнения действий необходимо сложение проверять вычитанием, а вычитание — сложением.

5. Общий знаменатель при сложении и вычитании нужно искать наименьший, а не какой-нибудь из числа возможных.

39. Умножение дробей. Большой раздел «Умножение дробей» излагается в следующем порядке:

1. Умножение дроби на целое число.
2. Нахождение дроби данного числа.
3. Умножение целого числа на дробь.
4. Умножение дроби на дробь.
5. Умножение смешанных чисел.
6. Понятие о проценте.
7. Нахождение процентов данного числа.

Все эти вопросы связаны между собой и излагаются именно в той последовательности, какая здесь указана. В учебнике арифметики этот материал изложен менее чем на десяти страницах, и, следовательно, в среднем на каждый вопрос приходится немного более одной страницы. Это обстоятельство может породить мысль, что здесь все так гладко и просто, как в учебнике, и что достаточно разделить весь материал на 7 равных частей и спокойно изложить каждую часть.

В действительности, это один из самых трудных разделов арифметики, и его прохождение нельзя вести в равномерном темпе; напротив, некоторые вопросы придется проходить значительно медленнее, чем другие.

Пункт 1 затруднений не представит, потому что для умножения дроби на целое число сохраняют силу прежние определения. Но пункт 3 вызовет затруднения, и ради того, чтобы его изложить, понадобилось введение пункта 2.

Непреодолимых трудностей здесь быть не должно, но следует разъяснить, почему они возникали.

Вопрос об умножении числа на дробь имеет свою историю. Некоторые авторы учебников и методик, подходя к этому вопросу, старались представить дело так, что здесь ничего нового нет. Этим путем они надеялись избежать трудностей. Они рассуждали так: нужно придумать такое универсальное определение умножения, под которое подходили бы все случаи умножения (вплоть до умножения отрицательных чисел), и тогда все трудности отпадут сами собой. И вот такое определение было придумано: «Умножить одно число на другое — это значит составить из множимого новое число так, как множитель составлен из единицы». Однако эффект получился противоположный ожидаемому. Затруднения не уменьшились, а, напротив, усилились. Это определение удивляет учеников и кажется им непонятным.

Мы же со своей стороны рекомендуем не становиться на путь утверждений, будто в умножении на дробь «нет ничего нового».

Следует, напротив, с самого начала заявить прямо, ничего не затушевывая, что здесь будет нечто новое; этим удастся избежать многих затруднений.

Умножение дроби на целое число. Изучение вопроса начинается с *определения*. Определение умножения дроби на целое число не отличается от определения умножения целого числа на целое. Это — нахождение суммы одинаковых слагаемых, где каждое слагаемое равно множимому, а число слагаемых равно множителю.

Предлагается ряд примеров:

а) $\frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1+1+1}{2} =$

$= \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$;

в) $\frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} =$

$= \frac{3+3+3+3+3+3}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

Чтобы умножение дроби на целое число приобрело в глазах учеников еще более реальный смысл, полезно давать теперь уже не только абстрактные примеры, но и текстовые задачи с жизненным содержанием. Например, сколько нужно заплатить за 10 коробок карандашей, если одна коробка стоит $\frac{1}{5}$ рубля?

$$\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{1 \cdot 10}{5} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2 \text{ (рубля)}.$$

Мы считаем, что, несмотря на всю простоту этого действия, ему должно быть уделено достаточно внимания. Если ученик приобретет хороший навык умножения дроби на целое число, то это поможет ему и в дальнейшем.

Последующие случаи умножения дробей по своему смыслу будут отличаться от первого пункта; но достаточно длительные занятия этим первым пунктом приучат ученика к той мысли, что дробь иногда может выступать в качестве одного из сомножителей, что здесь обязательно будет фигурировать дробная черта и выполняться сокращение не после того, как выполнены вычисления, а до выполнения вычислений. Само по себе это сокращение нельзя сводить к бездумному зачеркиванию чисел в числителе и знаменателе, а нужно рассматривать как преобразование, имеющее определенный смысл. Этот смысл должен быть понятен и доступен ученикам. В самом деле, пусть требуется $\frac{7}{12} \times 18$. В результате этого умножения мы получим: $\frac{7 \cdot 18}{12}$.

Прежде всего нужно убедить ученика в целесообразности сокращения. Цель его в том, чтобы избежать перемножения больших чисел. Далее, чтобы ученик понимал, что он делает, выполняя сокращение; нужно, чтобы он отчетливо представлял себе, что числитель дроби можно рассматривать как делимое, а знаменатель — как делитель, дробь же есть частное от деления числителя на знаменатель. Кроме того, числитель представляет собой произведение, но еще из отдела целых чисел ученик знает, что для того, чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из сомножителей.

После решения нескольких примеров следует сформулировать правило умножения дроби на целое число и написать формулу. Последнюю можно получить постепенно, рассматривая частные случаи умножения, например можно рассмотреть:

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \cdot 2}{4}; \quad \frac{3}{4} \times 3 = \frac{3 \cdot 3}{4};$$

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3 \cdot 4}{4}; \quad \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} \text{ и т. д.}$$

Обобщая эти отдельные факты, мы можем написать:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Нахождение дроби данного числа. Рассмотрим основную (важнейшую) задачу — нахождение дроби числа. Ее так и следует называть — основная задача на дроби. Она будет встречаться особенно часто. Кроме того, она, безусловно, жизненна и естественна.

В дальнейшем мы встретимся с другими, более сложными задачами, но многие из них будут сводиться к основной.

Сначала (во всяком случае, на первом уроке) ее нужно называть задачей на нахождение ч а с т и числа, а потом перейти к обычному названию.

Первоначально полезно решать ее устно и запомнить наизусть некоторые результаты. Вот первые шаги:

Выразить $\frac{1}{2}$ метра в сантиметрах: $100:2=50$ *(см)*;

» $\frac{1}{4}$ » » » $100:4=25$ *(см)*;

» $\frac{3}{4}$ » » » $100:4=25$; $25\cdot3=75$ *(см)*;

» $\frac{1}{10}$ » » » $100:10=10$ *(см)*;

» $\frac{1}{2}$ суток в часах: $24:2=12$ (часов);

» $\frac{1}{3}$ » » » $24:3=8$ (часов);

» $\frac{1}{4}$ » » » $24:4=6$ (часов);

» $\frac{2}{3}$ » » » $24:3=8$; $8\cdot2=16$ (часов);

» $\frac{3}{4}$ » » » $24:4=6$; $6\cdot3=$ (18 часов);

» $\frac{1}{6}$ » » » $24:6=4$ (часа);

» $\frac{1}{2}$ часа в минутах: $60:2=30$ (минут);

» $\frac{2}{3}$ месяца в днях: $30:3=10$; $10\cdot2=20$ (дней).

После этого можно перейти к более трудным задачам с большими числами. Трудность в том,что иногда их придется решать не в уме, а на бумаге.

1. Мать, давая дочери 48 рублей, сказала: $\frac{3}{4}$ этих денег израсходуешь на ручные часы, а остаток денег — на продукты. Сколько стоили часы?

$$48:4=12 \text{ (рублей)};\ 12\cdot3=36 \text{ (рублей)}.$$

2. В школе учатся 1200 учащихся. Из них мальчики составляют $\frac{3}{8}$ от общего числа детей. Сколько мальчиков?

$$1200 : 8 = 150 \text{ (мальчиков)}; \quad 150 \cdot 3 = 450 \text{ (мальчиков)};$$

$$\text{или } (1200 : 8) \cdot 3 = 450 \text{ (мальчиков)}.$$

Полезно приучать учеников записывать решение задач в виде такой числовой формулы.

3. Один килограмм чая стоит 8 рублей. Сколько стоят $\frac{3}{4}$ килограмма?

Отличие этой задачи от предыдущих в том, что здесь дается дробь не той величины, которая фигурирует в задаче, а некоторой другой. Мы ищем здесь не часть товара (чая), а часть его стоимости (денег). Решение ничем не отличается от решения предыдущих задач: для нахождения стоимости покупок нужно будет взять $\frac{3}{4}$ цены килограмма.

$$(8 : 4) \cdot 3; \quad 8 : 4 = 2; \quad 2 \cdot 3 = 6.$$

Таких задач нужно решить множество. Сюжеты их должны быть разнообразны. Несколько задач нужно решить устно и рассматривать их как стандарт, к которому время от времени следует обращаться, если что-нибудь неясно. На решение основной задачи можно затратить значительно больше времени, с тем чтобы потом уделить последующим темам меньше времени.

Может возникнуть вопрос, почему основная задача помещена где-то между другими темами и как-то теряется между ними. Эту задачу можно было бы и выделить, например поставить ее первой в разделе действий над обыкновенными дробями, перед сложением дробей. Но так как эта задача теснейшим образом связана с умножением числа на дробь, то она поставлена непосредственно перед этим вопросом. Если эти два пункта разъединить во времени, то, приступая к умножению числа на дробь, учащиеся могут позабыть самую основу этого умножения.

После решения нескольких таких задач устно и письменно и после достаточного выяснения их смысла ученики должны сформулировать правило.

Нужно взять одну из решенных задач и выявить, какие действия и в какой последовательности применялись для ее решения. Получим правило: чтобы найти величину дроби от данного числа, нужно разделить это число на знаменатель дроби и полученное частное умножить на ее числитель.

Обозначим число, от которого нужно найти дробь, буквой a. Пусть дробь, которую нужно найти от числа a, будет обозначаться через $\frac{b}{c}$. Значит, задача формулируется так: найти дробь $\frac{b}{c}$ от числа a.

Для полной конкретизации возьмем такую задачу:

Монтер выполнил в доме работу по освещению и получил за труд 120 рублей; $\frac{5}{8}$ этих денег он отложил на летний отдых. Сколько рублей от отложил на отдых?

Установим соответствие между числами в общей и конкретной задачах:

$$\text{120 рублей} \longleftrightarrow a;$$
$$\frac{5}{8} \longleftrightarrow \frac{b}{c}.$$

Решим задачу:

1) $120:8=15$;

2) $15\cdot5=75$,

или

$$(120:8)\cdot5=75,$$

или

$$\frac{120\cdot5}{8}=75.$$

Формула примет вид:

$$\frac{a\cdot b}{c}.$$

Понимают ли ученики, что данное в задаче число, дробь которого находят, согласно формуле, умножается на числитель и делится на знаменатель? Предложите ученикам написать формулу, изменив все буквы и решив другую конкретную задачу.

Умножение целого числа на дробь. После изложения вопроса о нахождении дроби числа нужно дать определение умножения на дробь:

Умножить целое число (множимое) на дробь (множитель) — значит найти эту дробь множимого.

Итак, под умножением на дробь разумеется не то, что раньше понималось под умножением на целое число, а нахождение дроби данного числа. Это сразу мобилизует учеников и заставляет их насторожиться. С этого нужно начать, а потом не поскупиться на всякие разъяснения.

Переходим к умножению целого числа на дробь. В свое время мы изучали умножение целых чисел и знаем, что под умножением разумеется сложение одинаковых слагаемых. Например:

$$10 \times 4 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40.$$

Значит, всякое умножение можно заменить сложением одинаковых слагаемых.

Теперь напишем такой пример: $12 \cdot \frac{3}{4}$.

Это действие нельзя рассматривать как нахождение суммы равных слагаемых, потому что у нас на месте множителя стоит дробь, т. е., иными словами, не указано ни одного слагаемого. Значит, в данном случае под умножением нужно разуметь не то, что разумелось раньше, а нечто другое. Что же именно?

Ответ на этот вопрос должен дать учитель, а не ученик, потому что ученик не может знать тех соглашений, которые установлены в математике.

Итак, под умножением числа на дробь условились понимать нахождение дроби данного числа.

Если предыдущий параграф усвоен учениками хорошо, то все остальное будет ясно и в дальнейшем никаких трудностей не встретится.

Как же выполняется умножение целого числа на дробь? По существу уже все рассказано выше. Мы еще повторим этот вывод, потому что такое повторение всегда полезно. Теперь мы будем исходить не из текстовой задачи, а из числового примера. Пусть нужно 50 умножить на $\frac{3}{4}$. Согласно определению, это значит найти $\frac{3}{4}$ числа 50.

Найдем сначала $\frac{1}{4}$ от 50, а затем уже $\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{4} \text{ числа 50 составляет } \frac{50}{4};$$

$$\frac{3}{4} \text{ числа 50 составляют } \frac{50 \cdot 3}{4}.$$

Следовательно,

$$50 \cdot \frac{3}{4} = \frac{50 \cdot 3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}.$$

После решения нескольких подобных примеров с другими числами можно предложить учащимся сформулировать правило: чтобы умножить целое число на дробь, нужно умножить целое число на числитель дроби и это произведение сделать числителем, а знаменателем подписать знаменатель данной дроби.

Затем можно написать формулу:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Ученики должны сравнить это правило с правилом нахождения дроби данного числа и убедиться, что по существу между этими двумя правилами нет разницы; они отличаются только порядком действий, что, конечно, не может повлиять на результат.

Формулы же в обоих случаях совершенно тождественны.

После этого следует еще немало потрудиться над этим новым действием. Нужно решить множество примеров устно и письменно, нужно решить ряд текстовых задач, выучить правило, поупражняться в применении формулы.

Рассмотрим теперь задачу на нахождение площади прямоугольника. Возьмем прямоугольник $ABCD$ со следующими размерами: длина 4 и ширина 3 линейные единицы (рис. 19, размеры увеличены).

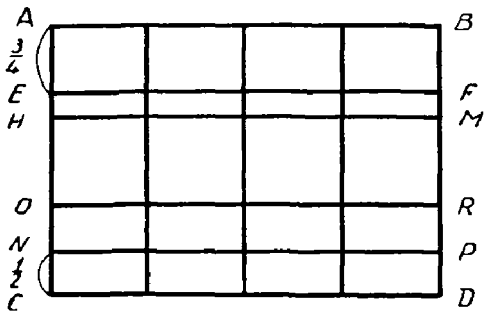

Рис. 19.

Площадь этого прямоугольника будет равна $4 \times 3 = 12$ (*кв. см*).

Теперь вычислим площадь прямоугольника $ABFE$. Его длина 4 *см*, а ширина $\frac{3}{4}$ *см*. Поступая так же, как и прежде, найдем площадь этого прямоугольника:

$$4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \ (\text{кв. см}).$$

Проверим, соответствует ли найденный результат (3 *кв. см*) действительности. Проверять нужно с помощью чертежа. Площадь прямоугольника $ABFE$ действительно равна 3 *кв. см*, потому что она состоит из площадей четырех маленьких прямоугольников, каждый из которых имеет площадь, равную $\frac{3}{4}$ *кв. см*:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Можно проверку выполнить иначе: взять прямоугольник $ABMH$ и вычесть из него прямоугольник $EFMH$, который равен 1 *кв. см*. В результате получим $4 - 1 = 3$. Значит, вычисление сделано правильно.

Наконец, вычислим площадь прямоугольника $NPDC$, у которого длина 4 *см*, а ширина $\frac{1}{2}$ *см*. Площадь его будет

$$4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \ (\text{кв. см}).$$

Проверим полученный результат, соответствует ли он действительности. Интересующая нас площадь состоит из четырех полуквадратов; площадь каждого из них равна половине квадратной единицы. Значит, площадь всей фигуры равна 2 *кв. см*. Очевидно, площадь вычислена правильно.

Следовательно, умножение целого числа на правильную дробь дает возможность решать совершенно правильно задачу нахождения площади прямоугольника и полученная в свое время формула площади ($S = a \cdot b$) сохраняет свою силу и в этом случае.

Возникает такой вопрос: мы определили в свое время действие умножения целого числа на дробь как нахождение дроби от множимого. Сохраняет ли это определение силу теперь, в двух последних случаях, когда мы искали площади прямоугольников? Да, сохраняет. В предпоследнем случае имеется умножение:

$$4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \ (\text{кв. см}).$$

Здесь мы ищем дробь $(\frac{3}{4})$ от 4 *кв. см*. На чертеже фигура $ABMH$ равна 4 *кв. см*. Умножив 4 на $\frac{3}{4}$, мы нашли $\frac{3}{4}$ от 4, и эта дробь равна 3.

В последнем случае имеется умножение:

$$4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \ (\textit{кв. см}).$$

Здесь мы тоже ищем дробь $(\frac{1}{2})$ от 4 *кв. см*. На чертеже прямоугольник $ORDC$ равен 4 *кв. см*. Умножив 4 на $\frac{1}{2}$, мы нашли $\frac{1}{2}$ от 4, и эта дробь равна 2.

Таким образом, все наши действия вполне отвечают определению умножения.

Далее ученики могут поставить вопрос, почему при умножении на правильную дробь произведение меньше множимого. Может быть, этот вопрос и не будет поставлен. Вообще его постановка говорит о неблагополучии в изложении или в изучении этого раздела. Возникновение такого вопроса говорит о том, что ученики не поняли этой темы.

Что произведение здесь меньше множимого — факт совершенно естественный, хотя он был бы противоестественным при умножении целых чисел. Но теперь, когда мы дали новое определение умножения, самый вопрос говорит либо о том, что ученики не поняли этого определения, либо не обратили на него внимания, либо отнеслись к нему легкомысленно.

Для ученика, который хорошо усвоил, что под умножением целого числа на дробь условились понимать нахождение дроби данного числа, должно быть ясно, что искать *правильную* дробь числа — это значит искать часть этого числа. Часть же всегда меньше целого. Таким образом, когда мы, например, умножаем 20 на $\frac{3}{4}$, то мы должны заранее ожидать, что мы получим только три четверти от 20.

Что касается нового определения умножения на дробь, то учащиеся должны припомнить факты, с которыми они встречались еще при изучении целых чисел. Умножение там определялось как нахождение суммы одинаковых слагаемых. Однако умножение на единицу не подходит под это определение, и мы принимаем, что произведение числа на единицу равно данному числу, т. е. $a \cdot 1 = a$.

Точно так же при умножении числа на нуль мы принимаем, что произведение равно нулю, т. е. $a \cdot 0 = 0$.

Могут возникнуть еще такие вопросы: почему при умножении на дробь мы пошли как будто более трудным путем, а не воспользовались, например, перестановкой сомножителей или вычислением площади прямоугольника или каким-нибудь иным, более простым способом. Кроме того, не ученики, а многие авторы, пытаясь избежать трудностей, давали универсальное определение умножения: «умножить одно число на другое — значит из множимого составить новое число точно так, как множитель составлен из единицы». Последнее определение довольно старое, и встречается оно у многих авторов: Рашевского, Малинина и Буренина, Португалова и других.

Ученики такого определения никогда не придумают, но первый вопрос у них возникнет обязательно.

Почему мы не воспользуемся перестановкой сомножителей? Почему нельзя сказать, что если $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$, то $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$? Мы не можем пользоваться переместительным законом для дробных чисел, потому что он установлен пока только для целых чисел. Могут возразить, что это уже излишняя строгость. Неужели учащиеся не поверят, что это доказано в математике, и разве на этой ступени мы всегда стремимся к такой исключительной строгости?

Но отступать от строгости не стоит, если от этого нет никакого выигрыша. Что мы этим выиграем? Ничего. Мы «затушуем» это неприятное место, а ученики от этого пользы не получат. Важно не отмахиваться от трудностей, нужно преодолеть трудное место и понять его, а если мы переставим сомножители, то по существу мы ничего не объясним, а только искусным маневром обойдем опасное место.

Что касается того факта, что многие учителя и даже авторы учебников пользовались «универсальным» определением умножения, то об этом нужно сказать следующее: определение это неудачно потому, что оно двусмысленно. Но если бы мы даже договорились раз навсегда, в каком смысле его нужно понимать, то оно все-таки не принесло бы пользы делу обучения, потому что оно непонятно ученикам. Об этом говорит педагогический опыт.

Может возникнуть, наконец, еще такой вопрос: почему это особое действие, которое мы сейчас изучали, получило название умножения? Здесь, конечно, разрыв между трактовкой этого вопроса в науке и в школьной практике. В математике действиям, различным по своим внешним признакам и природе компонентов, дается общее название в том случае, когда эти действия обладают общими формальными свойствами (например, подчиняются переместительному и сочетательному законам и т. п.). Для школы такое объяснение было бы неуместным. Поэтому мы предлагаем другое объяснение. Мы говорим: одинаковые по смыслу (содержанию) задачи решаются одним действием, т. е. мы считаем, так сказать, непоследовательным находить стоимость 5 *кг* конфет при цене 10 рублей за 1 *кг* одним действием, а стоимость $\frac{3}{4}$ *кг* при той же цене — другим действием. Напротив, мы считаем полезным, чтобы обе эти задачи решались одним и тем же действием, которое мы называем умножением:

$$10 \cdot 5 = 50 \text{ (рублей)},$$

$$10 \cdot \frac{3}{4} = 7 \text{ (рублей) } 50 \text{ (копеек)}.$$

Умножение дроби на дробь. После того как учащиеся усвоили умножение целого числа на дробь, они уже не встретят никаких затруднений при умножении дроби на дробь. В самом деле, если можно найти, например, половину 10, то почему нельзя найти половину $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ и т. д.?

Таким образом, определение умножения в данном случае остается прежнее: умножить дробь на дробь — значит, найти дробь от множимого. Для первоначального нахождения искомого результата можно обратиться к чертежу. Найдем половины от дробей, написанных выше. Найдем половину от четверти. Построим отрезок AB, примем его за единицу и разделим на 4 равные части. Каждая из полученных частей, т. е. AC, CD, DE и EB, будет равна $\frac{1}{4}$ отрезка AB (рис. 20). Разделим теперь

Рис. 20.

каждый из этих отрезков пополам, мы получим восьмые доли, потому что весь отрезок AB тем самым разделился на 8 равных частей. Как же решилась наша задача? Мы должны были найти половину $\frac{1}{4}$. Оказалось, что половина четверти равна $\frac{1}{8}$. Это можно записать с помощью знака умножения:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Можно было бы, не прибегая к чертежу, рассуждать следующим образом: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$, по определению значит, что нужно найти половину от четверти, или, иными словами, нужно $\frac{1}{4}$ уменьшить в два раза. Спросим учеников, как можно дробь уменьшить в два раза? Они должны это знать. Дробь можно уменьшить в два раза, или уменьшая числитель в два раза, или увеличивая знаменатель в два раза. Возьмем наш пример:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = ?$$

Уменьшить числитель в два раза (разделить на два) мы не можем, но увеличить знаменатель всегда можно. Значит,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Мы получили тот же самый результат, что и с помощью чертежа. Теперь найдем половины от двух остальных дробей:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ и } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Мы выполнили умножение в трех простейших случаях. Теперь рассмотрим более общий случай.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = ?$$

Что это значит? Найти $\frac{5}{7}$ от $\frac{3}{4}$. Поступим так: сначала найдем $\frac{1}{7}$ от $\frac{3}{4}$, а потом $\frac{5}{7}$.

$\frac{1}{7}$ числа $\frac{3}{4}$ выразится так: $\frac{3}{4 \cdot 7}$;

$\frac{5}{7}$ числа $\frac{3}{4}$ выразится так: $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$.

Значит, вместе все это можно написать так:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}.$$

После этого нужно сопоставить полученный результат с результатами трех предыдущих примеров и вывести правило умножения дроби на дробь.

Чрезвычайно существенным при умножении дробей является своевременное сокращение. Об этом мы уже говорили выше, полезно напомнить еще раз. Сокращение должно быть сознательным. Положим, делается умножение:

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}=\frac{5\cdot4}{8\cdot9}=\frac{5\cdot1}{2\cdot9}=\frac{5}{18}.$$

Выполняя сокращение, учащийся не должен механически зачеркивать сокращаемые числа, а должен думать и рассуждать, например, в данном случае так: разделим числитель дроби на 4, тем самым мы уменьшим его в 4 раза. Значит, после этого действия наша дробь уменьшилась в 4 раза. Теперь разделим знаменатель на 4 (в знаменателе есть число 8, которое делится на 4), тем самым мы увеличим дробь в 4 раза. Значит, мы сделали два уничтожающих друг друга действия: уменьшили дробь в 4 раза и затем увеличили результат в 4 раза, дробь осталась без изменения.

Сокращение дробей довольно часто приводит к ошибкам. Наиболее типичная — сокращение слагаемых из числителя и знаменателя. Существует взгляд, что не нужно подсказывать детям ошибочные действия, нужно воспитывать только на правильных образцах. Согласимся с этим. Но все же рекомендуем учителю, как только ученик допустит сокращение слагаемых, сейчас же подвергнуть этот случай обсуждению и осуждению. Нужно поставить вопрос, есть ли такое правило, что для деления суммы достаточно разделить только одно слагаемое.

Для большей убедительности изложенного полезно прибегнуть к чертежу. Проще всего взять квадрат, разделить каждую его сторону на 8 равных частей и через точки деления провести две серии параллельных прямых. В квадрате получится 64 клетки. Умножим $\frac{5}{8}$ на $\frac{3}{8}$. Результат выразится дробью $\frac{15}{64}$. Этот результат и нужно проверить по чертежу. Для этого на одной стороне квадрата нужно отложить 5 клеток, а на другой — 3 и потом подсчитать клетки. (Площадь квадрата принята за единицу).

Очень полезно записать правило умножения дробей в виде формулы. Эта формула очень удобна:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}.$$

Умножение смешанных чисел. Умножение смешанных чисел почти не вносит ничего нового в теорию умножения дробей. Тем не менее и этот раздел нужно неторопливо разобрать с учащимися, потому что здесь будут подытожены и еще раз пересмотрены все вопросы, относящиеся к умножению дробей. Мы рассмотрим последовательно все относящиеся сюда случаи.

$$\text{а) } 2\frac{3}{5} \cdot 5 = ?$$

Обратим смешанное число $2\frac{3}{5}$ в неправильную дробь:

$$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$

Задача сводится теперь к умножению дроби на целое число. Этот случай мы рассмотрели выше:

$$\frac{13}{5} \cdot 5 = \frac{13 \cdot 5}{5} = 13.$$

Этот пример можно было бы решить иначе, применяя распределительный закон:

$$2\frac{3}{5} \cdot 5 = \left(2 + \frac{3}{5}\right)5 = 2 \cdot 5 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 10 + 3 = 13.$$

Такую возможность всегда следует использовать.

В примере нет никаких особенностей, которые могли бы смутить учеников. Здесь множитель больше единицы, значит, произведение больше множимого.

$$\text{б) } 12 \cdot 3\frac{3}{4} = ?$$

Обратим $3\frac{3}{4}$ в неправильную дробь:

$$12 \cdot \frac{15}{4}.$$

Задача теперь сводится к умножению целого числа на дробь. Этот случай мы рассмотрели выше.

$$12 \cdot \frac{15}{4} = \frac{12 \cdot 15}{4} = 45.$$

Этот пример можно было бы решить иначе, применяя распределительный закон:

$$12 \cdot 3\frac{3}{4} = 12 \cdot \left(3 + \frac{3}{4}\right) = 12 \cdot 3 + 12 \cdot \frac{3}{4} = 36 + 9 = 45.$$

Ученики должны использовать и эту возможность. Решение примера не может вызвать никаких недоумений. Множитель здесь больше единицы, значит, произведение, как и следует ожидать, больше множимого.

$$\text{в)}\ 12\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = ?$$

Обратим $12\frac{1}{2}$ в неправильную дробь:

$$12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}.$$

Задача сводится теперь к умножению дроби на дробь. Такой случай был рассмотрен выше:

$$\frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 10.$$

В результате умножения здесь получилось число, меньше множимого. Этого и нужно было ожидать, так как мы умножили $12\frac{1}{2}$ на правильную дробь $\frac{4}{5}$.

$$\text{г)}\ \frac{7}{8} \cdot 4\frac{2}{3} = ?$$

Во множителе обратим смешанное число $4\frac{2}{3}$ в неправильную дробь:

$$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

Теперь задача сводится к умножению дроби на дробь. Такой случай был рассмотрен выше.

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{14}{3} = \frac{7 \cdot 14}{8 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}.$$

Мы умножали правильную дробь $(\frac{7}{8})$ на смешанное число (число больше единицы). Результат выразился смешанным числом (числом, большим единицы).

$$\text{д)}\quad 5\frac{3}{5} \cdot 3\frac{2}{11} = ?$$

Здесь и множитель, и множимое выражены смешанными числами. Обратим каждое из них в неправильную дробь:

$$5\frac{3}{5} = \frac{28}{5};\quad 3\frac{2}{11} = \frac{35}{11}.$$

Теперь нам остается перемножить две дроби. Напишем весь процесс подробно:

$$5\frac{3}{5} \cdot 3\frac{2}{11} = \frac{28}{5} \cdot \frac{35}{11} = \frac{28 \cdot 35}{5 \cdot 11} = \frac{28 \cdot 7}{1 \cdot 11} = \frac{196}{11} = 17\frac{9}{11}.$$

Можно было бы перед выполнением этого действия сделать так называемую «прикидку», т. е. хотя бы грубо оценить ожидаемый результат. Для этого нужно перемножить только целые части сомножителей (5 и 3), получится 15. Отсюда можно сделать вывод, что произведение должно быть больше 15.

Теперь учащиеся могут сформулировать правило умножения смешанных чисел.

Здесь после рассмотрения всех случаев умножения можно подумать о некотором общем правиле умножения чисел и целых, и дробных. Какие бы два числа мы ни взяли, их всегда можно перемножить по правилу умножения двух дробей. Почему? Потому что если среди двух множителей есть целое число, то его можно рассматривать как дробь со знаменателем, равным единице. Если же среди сомножителей есть смешанное число, то его можно обратить в неправильную дробь.

После изучения трех действий полезно, прежде чем перейти к делению, сделать остановку и проделать ряд упражнений на три совместные действия. Здесь можно решить несколько хорошо подобранных примеров со скобками и без скобок, а также несколько текстовых задач.

Полезно написать на доске и в тетрадях такую легко обозримую таблицу:

1	$12 \times 6 = 72$	$12 \times 4 = 48$
	$12 \times 5\frac{1}{6} = 62$	$12 \times 3 = 36$
	$12 \times 5 = 60$	$12 \times 2\frac{3}{4} = 33$
	$12 \times 4\frac{1}{2} = 54$	$12 \times 2 = 24$
2	$12 \times 1 = 12$	
3	$12 \times \frac{5}{6} = 10$	$12 \times \frac{1}{3} = 4$
	$12 \times \frac{3}{4} = 9$	$12 \times \frac{1}{4} = 3$
	$12 \times \frac{2}{3} = 8$	$12 \times \frac{1}{6} = 2$
	$12 \times \frac{1}{2} = 6$	$12 \times \frac{1}{12} = 1$
4	$12 \times 0 = 0$	

Эту таблицу нужно внимательно рассмотреть. Достойны внимания следующие факты:

1. Множимое во всех 18 случаях остается без изменения, множитель изменяется и при этом все время уменьшается (убывает до нуля).

2. Пока множитель больше единицы, произведение больше множимого.

3. При множителе, равном единице, произведение равно множимому.

4. Во всех тех случаях, где множитель меньше единицы (равен правильной дроби), произведение меньше множимого.

5. При множителе, равном нулю, произведение равно нулю.

После этого полезно предложить учащимся другую таблицу, которая отличается от первой тем, что в ней множимое выражено не целым, а дробным числом. Ученики должны рассмотреть каждую строчку этой таблицы (ее можно изобразить на большом листе и повесить в классе), снова решить каждый пример и сравнить свое решение с табличным. Работу необходимо проводить внимательно и аккуратно.

Множимое во всех 18 случаях равно $\frac{1}{2}$, множитель изменяется, постепенно уменьшаясь от шести до нуля. Дальнейшее рассмотрение таблицы можно провести с помощью вопросов.

1. Как изменяется произведение при уменьшении множителя от 6 до единицы?

2. Чему равно произведение, когда множитель равен единице?

3. Что больше — множимое или произведение в тех случаях, когда множитель меньше единицы? Почему?

4. Чему равно произведение в том случае, когда множитель равен нулю?

Таблицу можно разделить на четыре неравные части горизонтальными прямыми:

в первой части произведение больше множимого,
во второй части произведение равно множимому;
в третьей части произведение меньше множимого;
в четвертой части произведение равно нулю.

Эти замечания относятся и к первой таблице.

1	$\frac{1}{2} \times 6 = 3$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times 3 = 1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \times 5 = 2\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4} = 1\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$
4	$\frac{1}{2} \times 0 = 0$

П о н я т и е о п р о ц е н т а х[1]. Теперь рассмотрим некоторую разновидность, или частный случай основной задачи на дроби.

З а д а ч а. Я выехал ночью из города A по направлению к городу B, между которыми расстояние 600 *км*. Утром я посмотрел на часы и подсчитал, что я проехал уже $\frac{3}{4}$ всего расстояния. Сколько километров я проехал?

Решение: $600 \cdot \frac{3}{4} = 450$ (*км*).

Это образец основной задачи.

Рассмотрим теперь такую задачу.

[1] Понятие о процентах согласно новой программе впервые дается в разделе «Десятичные дроби»; процентное отношение чисел вообще исключено из курса V класса и проходится в разделе «Проценты» программы для VI класса.

На одном участке железнодорожного пути уложено 800 шпал. В текущем году во время ремонта сменили $\frac{13}{100}$ всех шпал. Сколько шпал сменили?

Решение: $800 \cdot \frac{13}{100} = 104$.

В этой задаче иное содержание, чем в предыдущей, и другие числа, но тот же самый тип: нахождение дроби данного числа. В обеих задачах применяется умножение числа на дробь. Значит, по существу вторая задача ничем, за исключением чисел и сюжета, не отличается от первой. Но для способа решения безразлично, какие числа попались в задачах, важно ведь только содержание. Небольшие затруднения возникают только в тех случаях, когда в условие входят слишком большие числа или неудобные дроби, требующие утомительных вычислений, но это вопрос не принципиального характера.

Таким образом, ученик, который решил первую задачу, без труда решит и вторую.

Во второй задаче встретилась дробь со знаменателем 100. Надо сказать, что во многих практических задачах стараются употреблять дроби именно со знаменателем 100, и поэтому к ним нужно особое внимание.

Почему задачи со знаменателем 100 получили такое широкое распространение в практике? Лучше всего пояснить это на примере.

В одной школе учится 800 учеников, причем успевающие составляют $\frac{81}{100}$ общего числа учащихся; в другой школе — 900 учеников и успевающие составляют $\frac{87}{100}$ общего числа учащихся.

В этой задаче число успевающих выражается двумя дробями со знаменателем 100 и сразу видно, что успеваемость во второй школе выше, чем в первой. А если бы дроби были с разными знаменателями, то об успеваемости судить было бы труднее.

Вычислить, сколько успевающих учеников в первой школе и сколько во второй, легко. Но как решить важный практический вопрос: в какой школе лучше учатся?

1) $800 \cdot \frac{81}{100} = 648$ (учеников).

2) $900 \cdot \frac{87}{100} = 783$ (ученика).

Выпишем ответы, чтобы их сравнить:

I школа	— 800 учащихся	— 648	успевающих
II »	900 »	783	»

Рассматривая только эти числа, еще нельзя сказать, в какой школе успеваемость выше: правда, во второй школе успевающих больше, но ведь в ней и учащихся больше. А вот две дроби, данные в задаче $\left(\frac{81}{100}\text{ и }\frac{87}{100}\right)$, сразу говорят о том, что успеваемость во второй школе выше, чем в первой. Итак, во многих задачах из практической жизни сами числа говорят меньше, чем полученные из них дроби с равными знаменателями.

Почему при этом берутся дроби с равными знаменателями совершенно ясно. Такие дроби легче сравнивать между собою: достаточно сравнить одни числители. Но, как правило, для сравнения результатов выбирают число 100. Учащимся нужно просто рассказать, что число 100 по величине — среднее между числами 10 и 1000. Число 10 слишком мало, число же 1000 слишком велико и не всегда удобно для сравнения. Поэтому жизненная практика выдвинула число 100 в качестве наиболее удобного для всякого рода сравнений. Число 10 в этих целях не употребляется, что же касается числа 1000, то и оно иногда употребляется, но об этом ученики узнают впоследствии.

При решении основной задачи часто придется, стало быть, пользоваться дробями со знаменателем 100. Эти задачи ничем не отличаются от задач на нахождение дроби числа, которые мы решали раньше. Но все-таки учащиеся иногда видят в этих задачах что-то новое, необычное и затрудняются при их решении.

Затруднение, вероятно, в том, что теперь эти задачи называются задачами на проценты. А называются они так потому, что сотые части чисел принято называть процентами. Чтобы облегчить решение этих задач, нужно в старых задачах, где встречаются сотые доли, изменить терминологию. Вот недавно мы решали задачу о замене шпал на некотором участке железнодорожного пути, там встречалась дробь $\frac{13}{100}$, нужно теперь ввести в эту задачу слово «проценты». Кроме того, мы решали задачу об успеваемости учеников в двух школах, нужно и в эту задачу ввести слово «процент».

Одним словом, нужно проделать некоторую работу, чтобы ученики привыкли к новым формулировкам. Для этой цели мы предлагаем здесь несколько задач, которые нужно неторопливо рассмотреть и решить с учениками. Терминология должна быть двойная: одну и ту же задачу нужно сформулировать со словом «процент» и ее же — без этого слова. Вот образцы этих задач.

1. Служащий получает 80 рублей в месяц. Из них он вносит в профессиональный союз 1%. Сколько это составляет рублей?

2. Сберегательные кассы платят вкладчикам 2% в год с положенной суммы. Сколько получит дохода вкладчик, положивший в кассу 500 рублей?

3. Комната имеет объем 60 *куб. м*. Сколько в ней кубических метров кислорода, если кислород составляет приблизительно 20% воздуха?

4. Один сорт сукна стоил 20 рублей. Цена на него понизилась на 15%. На сколько рублей понизилась цена на сукно?

5. Школа получила 600 учебников, причем задачники составили 12%. Сколько было задачников?

6. В одном населенном пункте 5000 человек. За год население увеличилось на 3%. Найти прирост населения.

7. Сколько содержится борной кислоты в 250 *г* ее четырехпроцентного раствора?

8. В классе 40 учеников. Из них неуспевающих по арифметике 5%. Сколько учеников не успевают по арифметике?

9. Из одного пункта в другой перевезли 6000 яиц. Бой в дороге составил 5%. Сколько яиц разбито при перевозке?

10. В одном учебном заведении 2000 студентов. Из них иногородних 32%. Сколько иногородних студентов?

После этого необходимо рассмотреть и выучить наизусть некоторые основные, опорные равенства:

1	составляет	100%;	$\frac{1}{10}$	составляет	10%;
$\frac{1}{2}$	»	50%;	$\frac{1}{5}$	»	20%;
$\frac{3}{4}$	»	75%;	$\frac{3}{20}$	»	15%;
$\frac{1}{4}$	»	25%;	$\frac{9}{10}$	»	90%;

$\frac{4}{5}$	составляет	80%;	$\frac{1}{50}$	составляет	2%;
$\frac{3}{5}$	»	60%;	$\frac{1}{100}$	»	1%;
$\frac{2}{5}$	»	40%;	$\frac{1}{3}$	»	33% (прибл.);
$\frac{3}{10}$	»	30%;	$\frac{2}{3}$	»	66% (прибл.);
$\frac{1}{20}$	»	5%;	$\frac{1}{25}$	»	4%;
			$\frac{7}{10}$	»	70%.

Нахождение процентов данного числа. Задача нахождения процентов данного числа — первая из задач на проценты. Успех ее решения будет обеспечен, если с самого начала будет подчеркнуто, что эта задача ничем не отличается от задачи о нахождении дроби данного числа. В силу этого устанавливается тот непреложный факт, что для решения первой задачи на проценты ничего не нужно знать сверх того, что ученики знают о нахождении дроби данного числа. Задача о нахождении дроби данного числа может быть решена двумя действиями, но это уже, так сказать, давно пройденный этап. Ученик, усвоивший умножение на дробь, должен решать эту задачу одним действием — умножением числа на дробь. То же самое можно сказать и относительно первой задачи на проценты; ее можно решать двумя действиями, но рекомендуется делать одним действием. Можно снова решать ее в два действия, но только если учащиеся с трудом усваивают задачу.

Приступить к решению первой задачи можно так: предложить две формулировки какой-нибудь очень простой задачи в дробях и в процентах. Например:

В магазин доставили 500 тарелок. Из них $\frac{3}{100}$ в дороге разбилось. Сколько тарелок разбилось?

Решение двумя действиями: 1) $500 : 100 = 5$; 2) $5 \cdot 3 = 15$.

Решение одним действием: $500 \cdot \frac{3}{100} = \frac{500 \cdot 3}{100} = 15$.

Формулировка задачи в процентах: в магазин доставили 500 тарелок. Из них 3% разбилось. Сколько тарелок разбилось?

Решение: 3% составляют $\frac{3}{100}$, следовательно, $500 \cdot \frac{3}{100} = 15$.

Нужно ограничиться здесь лишь немногими указаниями. Процентом числа называется одна сотая этого числа. Но можно сказать иначе: проценты указывают, сколько каких-нибудь предметов приходится на 100 (сотню) этих предметов. Например, в последней задаче сказано, что разбили 3% тарелок, иными словами, на каждую сотню тарелок приходится 3 разбитых. Это полезно помнить, потому что благодаря этому мы можем делать проверку решения задач. В самом деле, на каждую сотню приходятся 3 разбитые тарелки, а сотен пять, значит, всего разбито 15 тарелок, этот же результат мы нашли и вычислением.

Далее бывают, например, задачи такого типа:

Учреждение получило 3000 рублей. Из этих денег 30% израсходовано на библиотеку, 40% — на оплату лекторов, 20% — на ремонт лекционного зала и 10% — на электрификацию. После решения задачи будут получены следующие ответы: *библиотека — 900 рублей, лекторы — 1200 рублей, ремонт — 600 рублей, электричество — 300 рублей.*

Нужно проверить, чему равна сумма процентов, данных в задаче; 30% + 40% + 20% + 10% = 100%. Значит, израсходована вся полученная сумма. Такая проверка необходима, потому что из текста задачи не видно, все ли израсходовали.

Кроме того, нужно проверить свои вычисления. Для этого нужно сложить числа, полученные при решении:

$$900 + 1200 + 600 + 300 = 3000.$$

Способы проверки (контроля) могут быть различные.

Иногда в задаче может встретиться какое-нибудь очень несложное число процентов, например: 10%; 20%; 25%; 50% и т. д. В этих случаях проверка сильно упрощается. Например, требуется найти 10% от 600. Мы можем выполнить все выкладки и получим 60. Однако нетрудно догадаться, что 10% представляют собой десятую часть числа и, следовательно, можно было, не решая задачу по общему правилу, найти десятую часть от 600. Но если уж задача решена, то, принимая это во внимание, легко ее проверить. Вообще нужно добиться того, чтобы ученики легко переходили от одной формы записи к другой, например: 20%; 0,2; $\frac{1}{5}$.

Это послужит и для облегчения решения, и для контроля. В таблице, которая была дана выше, эти соотношения указаны, а такие простые случаи, как 50% — это половина, 25% — четверть, 75% — три четверти, ученик должен постоянно помнить. Мы сказали выше, что эти равенства могут быть для него опорными. Что это значит? Это значит, что на них можно опираться даже в тех случаях, когда дается число процентов, близкое к знакомому.

Например, нужно найти 21% числа 800. Здесь придется выполнить несложные вычисления. Однако полезно предварительно сделать такую прикидку: 21% — это немного больше 20%, а 20% — это одна пятая числа. Поэтому попробуем сообразить, чему равна одна пятая 800. Это будет 160. Значит, искомый результат должен быть несколько больше 160, т. е. $800 \cdot 0{,}21 = 168$.

«Прикидка» позволяет нам приблизительно оценить возможный результат.

То же самое можно повторить,если вообще получились проценты, близкие к опорным, например: 9%, 11%, 19%, 22%, 24%, 26%, 49%, 51% и т. п.

40. Деление дробей. Лучше всего следующий порядок изложения этой темы: 1) деление целого числа на целое в случае дробного частного; 2) деление дроби на целое число; 3) деление целого числа на дробь; 4) деление дроби на дробь; 5) деление смешанных чисел; 6) нахождение числа по данной его дроби; 7) нахождение числа по его процентам.

В основу этого раздела не следует класть задачу на нахождение числа по данной его дроби. Эта задача стоит здесь на шестом месте. Она крайне искусственна, и эта искусственность чувствуется учениками. В самом деле, рассмотрим задачу:

Я израсходовал 32 рубля, что составляет $\frac{2}{5}$ бывших у меня денег. Сколько у меня было денег?

Искусственность этой задачи очевидна. Чтобы расходовать, нужно было иметь деньги, а для того чтобы сообразить, что я потратил именно $\frac{2}{5}$, нужно было знать, с к о л ь к о у меня денег.

Чувствуя искусственность, многие авторы предлагают, например, такую задачу:

За $\frac{3}{4}$ *кг* конфет заплатили 6 рублей; сколько стоит килограмм конфет?

Это уже не совсем та задача, о которой говорилось выше. Она тоже искусственная, только здесь не говорится, что 6 — *это и* есть величина дроби $\left(\frac{3}{4}\right)$ некоторого числа; это *подразумевается*. Однако существо дела остается то же.

Деление целого числа на целое. Деление целого числа на целое относится к области целых чисел, и в свое время оно было рассмотрено, но не полностью. Мы рассматривали в свое время такой случай, когда деление выполнялось нацело, например: $30 : 5 = 6$.

Мы рассматривали, кроме того, случай деления с остатком, например: $43 : 5 = 8$ (3 остаток).

Здесь делимое больше делителя, 8 —приближенное частное с точностью до единицы с недостатком и 3 — остаток. Такие случаи деления целого числа на целое, когда делимое было бы меньше делителя, до сих пор не изучались.

Теперь рассмотрим общий случай деления любого целого на любое целое. Примеры будем усложнять постепенно. При этом необходимо помнить, что деление есть действие, обратное умножению, т. е. разделить одно число на другое — это значит найти такое третье число, которое после умножения на второе дает в произведении первое. Рассмотрим следующие случаи:

1) $$1 : 10 = ?$$

Возьмем отрезок AB, примем его за единицу и разделим на 10 равных частей, тогда каждая из полученных частей будет равна одной десятой (рис. 21). Значит, пе-

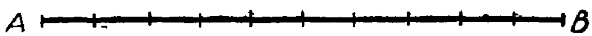

Рис. 21.

реходя от отрезков к числам, мы можем сказать, что частное от деления единицы на 10 равно одной десятой:

$$1 : 10 = \frac{1}{10}.$$

Если действие выполнено правильно, делимое должно быть равно делителю, умноженному на частное. Проверим:

$$10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

Действие выполнено правильно.

2) а) $1:9=?$ б) $2:9=?$

Возьмем сначала отрезок AB, примем его за единицу и разделим на 9 равных частей (рис. 22), тогда каждая из

Рис. 22.

полученных частей будет равна одной девятой. Теперь нужно разделить на 9 не один, а два. Попробуем это выполнить так:

$$2:9=(1+1):9=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

Мы воспользовались основным свойством деления: для деления суммы на число можно разделить каждое слагаемое отдельно. Поэтому мы представили число 2 как сумму: $1+1$.

Сделаем проверку деления:

$$2=9\cdot\frac{2}{9}=2.$$

Деление выполнено правильно.

3) $3:10=?$

Мы не будем здесь прибегать к чертежу, а поступим так, как во втором примере:

$$3:10=(1+1+1):10=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.$$

Сделаем проверку деления:

$$3=10\cdot\frac{3}{10}=3.$$

Деление выполнено правильно.

Сравнивая эти три случая, мы можем сделать такой вывод: чтобы разделить целое число на целое, нужно в частном написать такую дробь, у которой числитель равен делимому, а знаменатель равен делителю. В буквенных символах это будет:

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Деление дроби на целое число. Задача деления дроби на целое число равносильна уменьшению дроби во столько раз, сколько единиц в целом числе. Таким образом, если вопрос об увеличении и уменьшении дроби был в свое время учащимися усвоен хорошо, то и деление дроби на целое число не представит для них никаких затруднений. Здесь мы встречаемся с двумя случаями: а) числитель делимого делится на делитель; б) числитель делимого не делится на делитель. Рассмотрим их последовательно. Совершенно необходимо начинать этот раздел с первого случая, хотя он сравнительно редок. Это необходимо потому, что при этом условии действие деления для ученика психологически свяжется с актом разделения, расщепления, и он не увидит в этом делении чего-то противоречащего здравому смыслу.

1) $$\frac{8}{9} : 4 = ?$$

Построим отрезок AB, разделим его на 9 равных частей и возьмем таких частей 8 (рис. 23). Тогда у нас получится отрезок AC. Разделим этот отрезок на 4 равные части и определим, сколько девятых долей будет в каждой из этих частей. Чертеж показывает, что в каждой из этих частей будет две девятых доли. Значит, мы можем написать, что $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$.

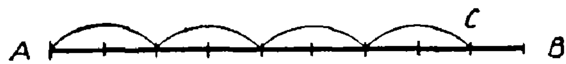

Рис. 23.

Что же нужно сделать с членами дроби, чтобы получить этот результат? Нетрудно видеть, что для этого достаточно числитель дроби разделить на 2.

Можно, не прибегая к помощи чертежа, получить тот же самый ответ, рассуждая так. Требуется дробь $\frac{8}{9}$ разделить на 4. Разделить дробь на 4 — все равно, что уменьшить ее в 4 раза. А чтобы уменьшить дробь в несколько раз, нужно или уменьшить во столько же раз ее числитель, или увеличить во столько же раз ее знаменатель. В данном случае мы уменьшили числитель в 4 раза и получили искомый результат.

Может быть, более сильное впечатление на учащихся произведет такая простая задача:

В две недели израсходовали $\frac{4}{5}$ *кг* сахару. Сколько было израсходовано в одну неделю, если расходовали равномерно?

Очевидно, что в одну неделю израсходовали сахара в два раза меньше, чем в две недели, и, следовательно, для вычисления результата нужно $\frac{4}{5}$ разделить на два, а для этого достаточно разделить на два только числитель дроби, т. е.

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}.$$

Значит, независимо от чертежа и от условий конкретной задачи во всех случаях, подобных двум рассмотренным, деление дроби на целое число сводится к делению числителя на это число, например:

$$\frac{12}{25} : 3 = \frac{4}{25}.$$

Все три рассмотренных случая отличались той особенностью, что числители данных дробей делились на делитель. Как же поступать в том случае, когда числитель не делится на делитель? Рассмотрим те же три случая, но будем выполнять действие иначе, имея в виду, что уменьшить дробь можно не только путем деления ее числителя, но и путем умножения ее знаменателя. Начнем с первого случая:

$$\frac{8}{9} : 4 = ?$$

Умножим знаменатель (9) на 4 и выполним необходимые преобразования.

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}.$$

После сокращения получился тот же самый результат. Возьмем решенную выше задачу:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}.$$

Результат получится тот же самый. Возьмем третий пример:

$$\frac{12}{25} : 3 = \frac{12}{25 \cdot 3} = \frac{4}{25}.$$

Мы снова получили тот же самый результат.

Полное совпадение полученных результатов с прежними говорит о том, что при делении дроби на целое число можно пользоваться умножением на это число знаменателя дроби.

Рассмотрим пример:

$$\frac{5}{8} : 3 = ?$$

$$\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8 \cdot 3} = \frac{5}{24}.$$

Может быть, некоторые учащиеся не «прочувствуют» справедливости этого результата, а, получив в ответе $\frac{5}{24}$, промолчат. Если, в самом деле, на лицах некоторых учеников учитель прочтет недоверие к найденному результату, то пусть он возьмет отрезок, разделит его на 8 равных частей и выделит таких частей 5. Пусть он затем дополнительно маленькими штрихами разделит данный отрезок на 24 части и покажет ученикам, сколько будет двадцать четвертых долей в одной трети отрезка, составляющего $\frac{5}{8}$ данного.

Пример:

$$\frac{10}{21} : 15 = ?$$

$$\frac{10}{21} : 15 = \frac{10}{21 \cdot 15} = \frac{2}{21 \cdot 3} = \frac{2}{63}.$$

Теперь, чтобы устранить всякую неясность, нужно остановиться на сокращении. Конечно, сокращение должно выполняться не после того, как будут выполнены все действия, а раньше, чтобы тем самым избежать вычислений над большими числами. По поводу сокращения следует сделать такие замечания. Очевидно, что всякий раз при делении дроби на целое число мы будем встречаться с выражением такого вида:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$

Число a с числом b сокращаться, конечно, не будет, потому что нет смысла предлагать для деления сократимую дробь, но число a в некоторых случаях будет сокращаться с числом n. Если это сокращение покажется ученикам немотивированным, то можно сделать некоторые пояснения. Сокращение это опирается на о с н о в н о е свойство дроби: величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель разделим на одно и то же число. В отношении числителя сомнений никаких не будет, но в знаменателе два числа, а мы делим только одно. Это разъяснить можно так: в знаменателе написано произведение двух множителей — b и n, из них мы делим только один второй. Чтобы такое деление не вызывало смущения, нужно припомнить правило, изученное еще в отделе целых чисел. Там было сказано: «Чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число один сомножитель, оставив другие без изменения».

Д е л е н и е ц е л о г о ч и с л а н а д р о б ь. Деление есть действие, обратное умножению, поэтому при изучении деления мы имеем право опираться на этот бесспорный и хорошо известный ученикам факт. Иногда говорят, что деление на дробь есть действие столь же трудное, как и умножение на дробь. Это абсолютно неверно! Умножение на дробь действительно является трудным действием — этого не нужно скрывать. Но деление числа на дробь есть обыкновенная несложная арифметическая тема, в которой нет ничего необычного.

Чтобы облегчить прохождение этой темы, нужно все время исходить из смысла деления. Разделим 20 на 5:

$$20 : 5 = 4.$$

Что показывает число 4 в этом случае? Математика знает одно действие деления, но смысл результата в каждом конкретном случае зависит от условия задачи и может быть истолкован по-разному. Рассмотрим возможные случаи:

1. 20 конфет разделены между пятью мальчиками. Сколько получил каждый? 4 конфеты.

В этом случае число 4 обозначает величину одной пятой ч а с т и (одного пая).

2. В коробке несколько отделений. В нее положили 20 яблок по 5 яблок в каждое отделение. Сколько отделений?

Отделений, очевидно, столько, сколько раз 5 **содержится** в 20, т. е. 4.

3. Дяде 20 лет, а племяннику 4 года. Во сколько раз дядя старше племянника? Ответ: в 5 раз.

Рассмотрим теперь деление на дробь:

$$5 : \frac{1}{2} = ?$$

Что это значит? Очевидно, это действие нельзя понимать в первом смысле как деление числа 5 на равные части. Но вполне допустимо такое истолкование, что здесь мы ищем, сколько раз половина содержится в 5 или во сколько раз 5 больше половины.

Ответ на эти вопросы учащиеся найдут легко. Они скажут: в одной единице две половины, а в 5 единицах в 5 раз больше, т. е. 10 половин, или единица в 2 раза больше половины, а 5 единиц в 10 раз больше.

Таким же точно образом «по соображению» дети скажут, чему равно $6 : \frac{1}{4}$, $2 : \frac{1}{3}$, $4 : \frac{1}{5}$ и т. д.

Все эти случаи деления очень легко проиллюстрировать на чертеже с помощью отрезков.

Выполнив несколько делений по соображению устно, можно получить тот же результат, исходя из определения деления как действия, обратного умножению. Возьмем прежний пример: 5 разделить на $\frac{1}{2}$. Обозначим искомое частное буквой x:

$$5 : \frac{1}{2} = x.$$

По свойству деления $x \cdot \frac{1}{2} = 5.$

Что здесь написано? Здесь написано, что некоторое число x, умноженное на $\frac{1}{2}$, дало 5. А что значит умножить число на $\frac{1}{2}$? Это значит найти половину этого числа. Таким образом, половина неизвестного числа равна 5, а все неизвестное число вдвое больше, т. е. $x = 5 \cdot 2$; $x = 10$. Теперь будем усложнять примеры: разделить 6 на $\frac{2}{3}$.

Попробуем найти искомый результат с помощью чертежа. Построим отрезок AB, равный 6 каким-нибудь линей-

Число a с числом b сокращаться, конечно, не будет, потому что нет смысла предлагать для деления сократимую дробь, но число a в некоторых случаях будет сокращаться с числом n. Если это сокращение покажется ученикам немотивированным, то можно сделать некоторые пояснения. Сокращение это опирается на основное свойство дроби: величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель разделим на одно и то же число. В отношении числителя сомнений никаких не будет, но в знаменателе два числа, а мы делим только одно. Это разъяснить можно так: в знаменателе написано произведение двух множителей — b и n, из них мы делим только один второй. Чтобы такое деление не вызывало смущения, нужно припомнить правило, изученное еще в отделе целых чисел. Там было сказано: «Чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число один сомножитель, оставив другие без изменения».

Деление целого числа на дробь. Деление есть действие, обратное умножению, поэтому при изучении деления мы имеем право опираться на этот бесспорный и хорошо известный ученикам факт. Иногда говорят, что деление на дробь есть действие столь же трудное, как и умножение на дробь. Это абсолютно неверно! Умножение на дробь действительно является трудным действием — этого не нужно скрывать. Но деление числа на дробь есть обыкновенная несложная арифметическая тема, в которой нет ничего необычного.

Чтобы облегчить прохождение этой темы, нужно все время исходить из смысла деления. Разделим 20 на 5:

$$20 : 5 = 4.$$

Что показывает число 4 в этом случае? Математика знает одно действие деления, но смысл результата в каждом конкретном случае зависит от условия задачи и может быть истолкован по-разному. Рассмотрим возможные случаи:

1. 20 конфет разделены между пятью мальчиками. Сколько получил каждый? 4 конфеты.

В этом случае число 4 обозначает величину одной пятой части (одного пая).

2. В коробке несколько отделений. В нее положили 20 яблок по 5 яблок в каждое отделение. Сколько отделений?

Отделений, очевидно, столько, сколько раз 5 *содержится* в 20, т. е. 4.

3. Дяде 20 лет, а племяннику 4 года. Во сколько раз дядя старше племянника? Ответ: в 5 раз.

Рассмотрим теперь деление на дробь:

$$5 : \frac{1}{2} = ?$$

Что это значит? Очевидно, это действие нельзя понимать в первом смысле как деление числа 5 на равные части. Но вполне допустимо такое истолкование, что здесь мы ищем, сколько раз половина содержится в 5 или во сколько раз 5 больше половины.

Ответ на эти вопросы учащиеся найдут легко. Они скажут: в одной единице две половины, а в 5 единицах в 5 раз больше, т. е. 10 половин, или единица в 2 раза больше половины, а 5 единиц в 10 раз больше.

Таким же точно образом «по соображению» дети скажут, чему равно $6 : \frac{1}{4}$, $2 : \frac{1}{3}$, $4 : \frac{1}{5}$ и т. д.

Все эти случаи деления очень легко проиллюстрировать на чертеже с помощью отрезков.

Выполнив несколько делений по соображению устно, можно получить тот же результат, исходя из определения деления как действия, обратного умножению. Возьмем прежний пример: 5 разделить на $\frac{1}{2}$. Обозначим искомое частное буквой x:

$$5 : \frac{1}{2} = x.$$

По свойству деления $x \cdot \frac{1}{2} = 5$.

Что здесь написано? Здесь написано, что некоторое число x, умноженное на $\frac{1}{2}$, дало 5. А что значит умножить число на $\frac{1}{2}$? Это значит найти половину этого числа. Таким образом, половина неизвестного числа равна 5, а все неизвестное число вдвое больше, т. е. $x = 5 \cdot 2$; $x = 10$. Теперь будем усложнять примеры: разделить 6 на $\frac{2}{3}$.

Попробуем найти искомый результат с помощью чертежа. Построим отрезок AB, равный 6 каким-нибудь линейным единицам и разделим каждую единицу на 3 равные части (рис. 24). Поставим теперь вопрос, сколько раз

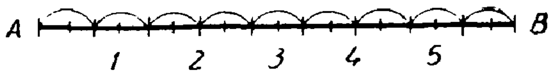

Рис. 24.

отрезок, равный двум третям единицы, содержится в шести единицах. Отметив на чертеже по две трети единицы дугами и подсчитав число полученных отрезков, мы увидим, что $\frac{2}{3}$ содержатся в 6 ровно 9 раз. Значит, можно написать, что $6 : \frac{2}{3} = 9$.

Мы получили ответ с помощью чертежа. Проверим результат умножением:

$$6 = \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{2 \cdot 9}{3} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Деление выполнено правильно.

Теперь возникает вопрос: нельзя ли как-нибудь найти этот ответ без чертежа? Попробуем. Нам дано задание:

$$6 : \frac{2}{3} = x.$$

По определению деления:

$$x \cdot \frac{2}{3} = 6.$$

Здесь написано, что некоторое число x, умноженное на $\frac{2}{3}$, дало 6. А что значит умножить число на $\frac{2}{3}$? Это значит найти $\frac{2}{3}$ этого числа. Стало быть, можно рассуждать так: две трети какого-то числа равны шести, а одна треть, очевидно, равна трем, а три трети, т. е. все число, равно девяти.

Итак, мы получили тот же самый результат без чертежа, с помощью рассуждения.

Теперь выясним, какие же действия нужно выполнить над данными числами при делении целого числа на дробь. Возвратимся снова к прежнему примеру:

$$6 : \frac{2}{3} = ?$$

Требуется ответить на вопрос, сколько раз $\frac{2}{3}$ содержатся в 6. Узнаем сначала, сколько раз $\frac{1}{3}$ содержится в 6. В одной единице — 3 трети, а в 6 единицах — в 6 раз больше, т. е. 18 третей. Для нахождения этого числа мы должны 3 умножить на 6. Таким образом, дробь $\frac{1}{3}$ содержится в 6 единицах 18 раз, а $\frac{2}{3}$ содержатся в 6 не 18 раз, а вдвое меньше, т. е. $18 : 2 = 9$ раз. Следовательно, при делении 6 на $\frac{2}{3}$ мы выполнили следующие действия:

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Здесь не сделано сокращения, чтобы не потерялось ни одно из данных чисел, но в дальнейшем необходимо будет делать сокращения раньше, чем будут выполнены окончательные вычисления.

После этого необходимо решить таким же способом несколько примеров и затем предложить ученикам вывести общими силами правило.

Буквенная формула здесь необходима.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Учащиеся должны подумать над этой формулой и уяснить себе ее смысл.

Деление дроби на дробь. Деление во всех случаях рассматривается как действие, обратное умножению. Какой смысл имеет деление дроби на дробь? Такой же, какой имеет деление целого на дробь. Мы можем ставить такие вопросы:

1. Сколько четвертей в половине? Ответ дается делением: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$.

2. Сколько восьмушек в четверти? Ответ дается делением: $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2$.

3. Сколько восьмых долей в трех четвертях? Ответ дается делением: $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = 6$.

Проиллюстрируем каждый из этих вопросов чертежом (рис. 25).

Чертеж показывает, что во всех этих случаях деление имело реальный смысл.

Так как деление дроби на дробь — наиболее общий случай деления дробей, то не следует спешить с выводом

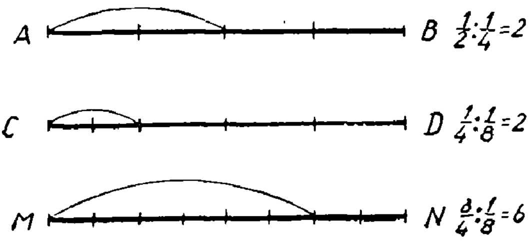

Рис. 25.

правила и с автоматизацией вычислений, а лучше побольше рассмотреть с учениками таких упражнений, где они рассуждали бы и проверяли свои рассуждения чертежом.

Здесь речь идет о делении числа на дробь, поэтому полезно вернуться назад и припомнить, как мы делили на дробь целое число.

Разделим, например, 2 на $\frac{3}{16}$. Ученики без труда это сделают:

$$2 : \frac{3}{16} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Следует иллюстрировать это деление чертежом и обратить внимание на то, что когда делитель — дробь, то числитель этой дроби в результате попадает в знаменатель, а знаменатель — в числитель.

Теперь разделим единицу (1) тоже на $\frac{3}{16}$. Эту задачу дети тоже решать умеют:

$$1 : \frac{3}{16} = \frac{1 \cdot 16}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Этот пример тоже следует проиллюстрировать чертежом и снова обратить внимание на то, что единица умножается на знаменатель делителя и делится на числитель.

Далее рассмотрим более сложный пример, где и делимое выражено дробью:

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{16} = ?$$

Но в этом примере тоже не следует усматривать ничего необыкновенного. Мы должны разделить число $\frac{7}{8}$ на другое дробное число $\frac{3}{16}$. Чем мы будем руководствоваться? Мы уже не раз видели, что при делении на дробь нужно числитель делителя написать в знаменателе, а знаменатель делителя написать в числителе. Попробуем и здесь поступить так же. А чтобы застраховать себя от ошибок, мы потом сделаем проверку. Таким образом,

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{16} = \frac{7 \cdot 16}{8 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Теперь проверим. У нас получилось $4\frac{2}{3}$, но это все равно, что $\frac{14}{3}$. Поэтому умножим

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{14}{3} = \frac{3 \cdot 14}{16 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 7}{8 \cdot 1} = \frac{7}{8}.$$

Наше предположение оправдалось. Деление сделано правильно. Но так как этот пример имеет для нас огромное значение, то мы проиллюстрируем его еще с помощью чертежа, не потому что мы не доверяем проверке, а просто ради того, чтобы посмотреть, как этот факт отражается на чертеже.

Изобразим отрезок AB, примем его за единицу (рис. 26), разделим на 8 равных частей и зафиксируем отрезок

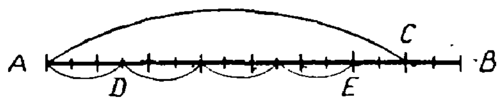

Рис. 26.

AC, равный делимому, т. е. $\frac{7}{8}$ отрезка AB. Этот отрезок нужно разделить на $\frac{3}{16}$, т. е. ответить на вопрос, сколько раз $\frac{3}{16}$ содержатся в $\frac{7}{8}$. Для этого разделим каждую восьмую долю отрезка AB пополам, или, иными словами, разделим AB на 16 равных частей. Отметим на отрезке AC по $\frac{3}{16}$ доли и посмотрим, сколько же раз укладывается на отрезке AC $\left(\frac{7}{8}\right)$ отрезок $AD\left(\frac{3}{16}\right)$. Выполнив это действие, мы увидим, что отрезок $\frac{3}{16}$ откладывается 4 раза и после этого остается на отрезке AC маленький отрезок EC. Значит, можно сказать, что отрезок $\frac{3}{16}$ отложился больше 4 и меньше 5 раз, точнее, он отложился $4\frac{2}{3}$ раза. Хотя такой способ выражения не принят в русском языке, но мы уже сказали, что интересующий нас отрезок отложился больше 4 и меньше 5 раз, вычисления же дали нам число $4\frac{2}{3}$, чертеж дает такое же число, поэтому мы и воспользовались таким несколько необычным способом выражения.

Ввиду исключительной важности этого вопроса мы еще раз проведем рассуждения, но уже независимо от чертежа. Для разнообразия возьмем другие числа.

Пусть требуется разделить $\frac{15}{16}$ на $\frac{3}{32}$, т. е. $\frac{15}{16}:\frac{3}{32}=x$.

Будем рассуждать так: нужно найти такое число, которое после умножения на $\frac{3}{32}$ даст произведение, равное $\frac{15}{16}$. Это можно записать так: $\frac{3}{32}\cdot x=\frac{15}{16}$.

Запись имеет такой смысл: $\frac{3}{32}$ умножается на неизвестное число x, и результат выражается дробью $\frac{5}{16}$. Как найти неизвестное число? Мы видим из последнего равенства, что $\frac{3}{32}$ неизвестного числа x составляют $\frac{15}{16}$, отсюда $\frac{1}{32}$ неизвестного числа x составляет $\frac{15}{16\cdot 3}$, а $\frac{32}{32}$ числа x составляют $\frac{15\cdot 32}{16\cdot 3}$.

Следовательно, сопоставляя все эти выкладки, можно написать:

$$\frac{15}{16}:\frac{3}{32}=\frac{15\cdot 32}{16\cdot 3}=\frac{5\cdot 2}{1\cdot 1}=10.$$

Необходимо обращать внимание на своевременное сокращение. После этого можно еще несколько раз провести аналогичные рассуждения, а потом предложить ученикам сформулировать правило деления дроби на дробь. Исключительно важное звено этого раздела — вывод формулы деления. Если эта формула будет сознательно усвоена, то это можно рассматривать как большой успех в изучении дробей. От искусства учителя зависит эффект подачи этой формулы. Можно предложить такой путь. После того как дети решат десятки упражнений на деление и уже почувствуют, как нужно поступать с делимым и с делителем, можно записать дроби русскими буквами так:

$$\frac{ч_1}{з_1} : \frac{ч_2}{з_2}.$$

А затем поставить вопрос, что делается при делении дробей с числителем ($ч_1$) и знаменателем ($з_1$) первой дроби и что делается с числителем ($ч_2$) и знаменателем ($з_2$) второй дроби. Можно надеяться, что дети сразу напишут:

$$\frac{ч_1}{з_1} : \frac{ч_2}{з_2} = \frac{ч_1 \cdot з_2}{з_1 \cdot ч_2}.$$

После этого можно заменить русские буквы латинскими.

Деление смешанных чисел. Этот небольшой отдел уже не содержит ничего принципиально нового, а имеет своею целью подытожить те сведения о делении дробей, которые изложены ранее. Рассмотрим последовательно относящиеся сюда вопросы.

1. $$6 : 2\frac{2}{5} = ?$$

Обратим делитель в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления целого числа на дробь, т. е.

$$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5},$$

тогда

$$6 : 2\frac{2}{5} = 6 : \frac{12}{5} = \frac{6 \cdot 5}{12} = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Проверим:

$$6 = 2\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{12 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 6.$$

Деление выполнено правильно.

2. $$3\frac{3}{4} : 12 = ?$$

Обратим делимое в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления дроби на целое число:

$$3\frac{3}{4} = \frac{15}{4},$$

тогда $$3\frac{3}{4} : 12 = \frac{15}{4} : 12 = \frac{15}{4 \cdot 12} = \frac{5}{4 \cdot 4} = \frac{5}{16}.$$

Проверим: $3\frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{5}{16} = \frac{12 \cdot 5}{16} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Деление выполнено правильно.

3. $$12\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = ?$$

Обратим делимое в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления дроби на дробь, т. е.

$$12\frac{1}{2} = \frac{25}{2},$$

тогда

$$12\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \frac{25}{2} : \frac{5}{6} = \frac{25 \cdot 6}{2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 15.$$

Проверим: $12\frac{1}{2} = \frac{5}{6} \cdot 15 = \frac{5 \cdot 15}{6} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Деление выполнено правильно.

4. $$\frac{7}{8} : 4\frac{2}{3} = ?$$

Обратим делитель в неправильную дробь и тогда разделим по правилу деления дроби на дробь, т. е. $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$, тогда

$$\frac{7}{8} : 4\frac{2}{3} = \frac{7}{8} : \frac{14}{3} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 14} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 2} = \frac{3}{16}.$$

Проверим: $\frac{7}{8} = 4\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{7 \cdot 1}{1 \cdot 8} = \frac{7}{8}$.

Деление выполнено правильно.

5. $$5\frac{5}{8} : 3\frac{3}{4} = ?$$

Обратим делимое и делитель в неправильные дроби и тогда разделим по правилу деления дроби на дробь, т. е. $5\frac{5}{8} = \frac{45}{8}$; $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$,

тогда

$$5\frac{5}{8} : 3\frac{3}{4} = \frac{45}{8} : \frac{15}{4} = \frac{45 \cdot 4}{8 \cdot 15} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Проверим: $5\frac{5}{8} = 3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$.

Деление выполнено правильно.

В некоторых случаях полезно опираться на правило деления суммы, например:

$$12\frac{3}{4} : 3 = \left(12 + \frac{3}{4}\right) : 3 = 12 : 3 + \frac{3}{4} : 3 = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}.$$

Здесь мы не обращали смешанного числа $12\frac{3}{4}$ в неправильную дробь, а, представив делимое как сумму, разделили каждое слагаемое отдельно.

В каждом из пяти выполненных примеров на деление мы делали последующую проверку. Но можно еще до выполнения деления сделать «прикидку», чтобы хотя бы грубо определить ожидаемый результат. В последнем примере можно целую часть делимого разделить на делитель (12 : 3), получится 4. Отсюда можно сделать вывод, что частное должно быть приблизительно равно 4.

Учащиеся, выполнив все возможные случаи деления смешанных чисел, могут сформулировать, наконец, правило деления смешанных чисел.

Можно в порядке обобщения остановиться на вопросе о том, что всякое целое число можно представить как дробь со знаменателем, равным единице. Тогда любой случай деления можно свести к делению дроби на дробь.

После изучения всех четырех действий открываются широкие возможности для выполнения самых разнообразных упражнений на все четыре действия с целыми и дробными числами.

Здесь можно решить множество текстовых задач, так как благодаря введению дробных чисел значительно расширяется диапазон для составления самых разнообразных задач.

Далее, теперь можно уже без всякого ограничения брать упражнения на совместные действия как без скобок, так и со скобками.

Наконец, в вычисление можно ввести так называемые «сложные дроби», т. е. такие примеры, где и числитель, и знаменатель выражены дробными числами. Вот несложный пример такого характера:

$$\frac{2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}\right)}{1 : \frac{5}{8}} = ?$$

Мы взяли такой пример, который легко решается в уме. Учителя не должны упускать возможности почаще упражнять учащихся в устных вычислениях.

Кроме того, никогда не следует пренебрегать проверкой вычислений. Роль проверки нужно усилить. В книге Очаповского «Дроби» [1] есть такой пример:

$$1\frac{7}{10} : \frac{\left(1\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{135}}{\frac{5}{9}} - \frac{5}{12} = ?$$

Решив этот пример, мы получим единицу (1). Рекомендуется приравнять написанное 1, а вместо числа $1\frac{2}{3}$ поставить x и проделать все выкладки.

Полезно написать на доске и в тетрадях такую легко обозримую таблицу:

$24 : 6 = 4;$	$24 : \frac{3}{4} = 32;$
$24 : 5 = 4\frac{4}{5};$	$24 : \frac{2}{3} = 36;$
$24 : 4\frac{1}{2} = 5\frac{1}{3};$	$24 : \frac{3}{5} = 40;$
$24 : 4 = 6;$	$24 : \frac{1}{2} = 48;$
$24 : 3 = 8;$	$24 : \frac{3}{8} = 64;$
$24 : 2\frac{3}{4} = 8\frac{8}{11};$	$24 : \frac{3}{10} = 80;$
$24 : 2 = 12;$	$24 : \frac{4}{25} = 150;$
$24 : 1\frac{1}{2} = 16;$	$24 : \frac{1}{10\,000} = 240\,000.$
$24 : 1 = 24;$	
$24 : \frac{5}{6} = 28\frac{4}{5};$	

Эту таблицу нужно внимательно рассмотреть, обратив внимание на следующие факты:

1. Делимое во всех 18 случаях остается без изменения, делитель изменяется и при этом все время уменьшается (убывает до очень малых дробей).

[1] Л. В. Очаповский, Дроби. Курс арифметики и задачник. Спб., 1914.

2. До тех пор пока делитель больше единицы,— частное меньше делимого.

3. При делителе, равном единице, частное равно делимому.

4. Во всех тех случаях, где делитель меньше единицы (равен правильной дроби), частное больше делимого.

5. Если делитель сильно уменьшается (становится очень малой дробью), то частное может стать очень большим числом.

После этого полезно предложить учащимся другую таблицу, которая отличается от первой тем, что в ней делимое выражено не целым, а дробным числом. Вот эта таблица:

$\frac{1}{2} : 10 = \frac{1}{20}$;	$\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = 1\frac{1}{3}$;
$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$:
$\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} = \frac{1}{9}$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 4$;
$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{16} = 8$;
$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$:	$\frac{1}{2} : \frac{1}{32} = 16$;
$\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = \frac{2}{11}$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{64} = 32$;
$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{128} = 64$;
$\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{1000} = 500$;
$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$;	$\frac{1}{2} : \frac{1}{5\,000\,000} = 2\,500\,000$.

Делимое во всех 18 случаях равно $\frac{1}{2}$, делитель изменяется, постепенно уменьшаясь от 10 до малых дробей. Дальнейшее рассмотрение таблицы можно провести с помощью вопросов.

1. Как изменяется частное при уменьшении делителя от 10 до единицы?

2. Чему равно частное, когда делимое равно делителю?

3. Что больше, делимое или частное в тех случаях, когда делитель правильная дробь (меньше единицы)? Почему?

4. Как ведет себя частное в том случае, когда делитель неограниченно уменьшается?

Вообще учителю почаще следует направлять внимание учеников на рассмотрение всевозможных таблиц. При этом не следует ограничиваться одним только пассивным созерцанием, нужно предложить ученикам вновь самостоятельно составить подобную таблицу, а таблица в книге или на стене должна быть тем образцом, к которому следует стремиться.

Нахождение числа по его дроби. Мы рассмотрели в свое время основную задачу на дроби (нахождение дроби данного числа). Теперь мы приступим к рассмотрению обратной задачи (нахождение числа по данной его дроби). Мы уже упоминали об этой задаче раньше и предупреждали, что при изучении этой темы придется встретиться со значительными трудностями. Учащиеся не сразу освоятся с этой задачей. Чтобы облегчить изучение, мы рекомендуем следующее: во-первых, нужно проходить эти две задачи (основную и обратную ей) в разное время, т. е. так, чтобы между ними был некоторый промежуток времени; во- вторых, не нужно брать обратную задачу за основу теории деления дробей — это создает дополнительные трудности при изучении.

Большинство задач этого типа — искусственные. Конечно, можно придумать несколько задач, отражающих реальные ситуации. Таким образом, путь изложения этой темы состоит в том, чтобы постепенно, в порядке возрастающей трудности предлагать детям задачи, вполне понятные им по содержанию и решаемые сначала одним действием (умножением), потом двумя действиями (делением и умножением) и, наконец, на завершающей стадии одним действием (делением). Мы не можем, конечно, совершенно отказаться от этой задачи, как предлагают некоторые практические работники, уже потому, что в свое время мы рассматривали совершенно необходимую прямую задачу, а поэтому когда-то следует рассмотреть и обратную.

Выше было сказано, что задачу на нахождение дроби числа и обратную задачу на нахождение числа по его дроби целесообразно проходить в разное время, т. е. так, чтобы между ними был некоторый промежуток времени.

Это нужно понимать так: прямая (основная) задача нахождения дроби данного числа рассматривается в отделе умножения дробей, перед умножением числа на дробь, а обратная здесь не рассматривается во избежание смешения одной задачи с другой. Первая задача слишком важна, и поэтому нужно добиться полного ее понимания, для чего необходимы многочисленные упражнения и, конечно, время. Когда же мы окончим умножение дробей и пройдем все случаи деления, тогда можно показать ученикам, что есть задача, обратная основной задаче на дроби.

Основная задача к этому времени будет усвоена совершенно отчетливо. Однако когда умножение и деление усвоены, то обратная задача должна быть изложена в связи с прямой. Нужно дать возможность ученикам осознать, по отношению к чему новая задача будет обратной. Постановка здесь рядом двух взаимно обратных задач уже не будет опасной; как не вредит сложение вычитанию, так и в данном случае обратная задача не повредит прямой.

Целесообразно начинать с какой-нибудь прямой задачи, например:

Площадь участка 315 *кв. м*, $\frac{1}{5}$ часть его занята домом. Сколько квадратных метров занимает дом?

Это прямая задача. Решив ее, получим, что дом занимает 63 *кв. м*.

Теперь рассмотрим обратную задачу.

Дом занимает 63 *кв. м*. Это составляет $\frac{1}{5}$ всего участка. Чему равна площадь всего участка? Эту задачу можно решить умножением: $63 \times 5 = 315$ (*кв. м*).

Решая задачу умножением, мы еще не даем учащимся общего метода решения таких задач, который мы дадим им в конце концов. Мы пока хотим добиться только того, чтобы ученики уяснили себе самую проблему, т. е. поняли бы, что представляют собой задачи на нахождение числа по данной его дроби. Пусть на первых порах они решают подобные задачи так, как им доступно (умножением или двумя действиями), но пусть они уяснят себе их смысл и поймут, что от них требуется. Теперь можно взять такую задачу.

У меня было 50 рублей; $\frac{3}{5}$ из них я израсходовал на покупку обуви. Сколько стоила обувь?

Это прямая задача. Решив ее, получим $50 \cdot \frac{3}{5} = 30$ (рублей).

Рассмотрим обратную задачу:

Я израсходовал на покупку обуви 30 рублей, что составляло $\frac{3}{5}$ моих денег. Сколько было у меня денег?

Ученики будут решать эту задачу, конечно, наиболее естественным путем, т. е. они сначала найдут одну пятую от 30 посредством деления ($30 : 3 = 10$) и потом пять пятых посредством умножения ($10 \times 5 = 50$).

Таких задач нужно решить много, прежде чем перейти к решению их одним действием — делением на дробь.

После этого полезно записать параллельно прямую и обратную задачи и выяснить, что дано и что нужно найти в каждой из них. Тогда получится такая запись.

Прямая задача	Обратная задача
$50 \cdot \frac{3}{5} = \frac{50 \cdot 3}{5} = 30.$	$30 : \frac{3}{5} = \frac{30 \cdot 5}{3} = 50.$

Нахождение числа по его процентам. Если учащиеся усвоили задачу на нахождение числа по его дроби, то задача на нахождение числа по его процентам не должна представлять никаких затруднений. Это та же самая задача, но только ее частный случай. Частным этот случай можно назвать потому, что в общем случае дробь может быть с любым знаменателем, а здесь только со знаменателем 100. Возможно, что в основе возникающих трудностей лежит тот факт, что учащиеся рассматривают «число по его процентам» и «число по его дроби» как две различные, а не как одну и ту же задачу. Значит, первая забота учителя: убедить учеников в тождественности этих задач. Чтобы этого добиться, нужно избегать скопления нескольких трудностей. Это значит, что нужно представить задачу в прозрачном виде, не загромождая и не осложняя какими-нибудь дополнительными деталями. Нужно показать, что это та же самая задача, носящая только особое название.

Как этого добиться? В изложении этого вопроса нужно соблюдать строгую постепенность, в особенности на первых порах. Например, до тех пор пока не будет достигнуто полного понимания изучаемого вопроса, не следует предлагать задач с дробным числом процентов и не следует вводить в условие каких-нибудь дополнительных данных.

Сначала нужно взять какую-нибудь очень простую задачу на нахождение числа по его дроби, например:

Поезд прошел 400 *км*, что составляет $\frac{2}{5}$ всего расстояния между двумя городами. Чему равно все расстояние между городами?

Решение: $400 : \frac{2}{5} = \frac{400 \cdot 5}{2} = 1000$ *км.*

Итак, все расстояние между этими городами равно 1000 *км.*

Теперь обратим внимание на то, что $\frac{2}{5}$ расстояния все равно, что 40% расстояния, а 40% при решении задач заменяются дробью $\frac{40}{100}$.

Принимая это во внимание, мы можем нашу задачу изложить теперь так:

Поезд прошел 400 *км*, что составляет 40% всего расстояния между двумя городами. Чему равно все расстояние между этими городами?

Решение: $400 : \frac{40}{100} = \frac{400 \cdot 100}{40} = 1000$ *км.*

Таких задач нужно решить столько, сколько необходимо, чтобы ученики, наконец, поняли, что задача нахождения числа по его процентам решается так же, как и задача нахождения числа по его дроби.

Первоначально нужно решать по две одинаковые задачи так, чтобы в одной из них часть была выражена обыкновенной дробью, а в другой — процентами. Когда это будет усвоено учащимися, можно уже не брать парных задач, а предлагать одну задачу, в которой часть выражена процентами.

Для полного понимания этих задач и для проверки решения, или самоконтроля, полезно решать здесь же задачу на нахождение дроби числа. Вообще решение взаимно обратных задач должно практиковаться возможно чаще.

41. Взаимно обратные числа. Замена деления умножением. Взаимно обратные числа имеют большое значение в математике. Уже в арифметике они встречаются при делении дробей и при делении числа на пропорциональные части. В будущем они встретятся много раз. Прежде всего ученики должны научиться писать число, обратное любому данному. Сначала можно дать серию правильных дробей, например:

$$\frac{2}{9};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{3}{8};\ \frac{1}{5};\ \frac{7}{20};\ \frac{4}{11};\ \frac{1}{10},$$

и предложить учащимся написать обратные им дроби:

$$\frac{9}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{1};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{3};\ \frac{5}{1};\ \frac{20}{7};\ \frac{11}{4};\ \frac{10}{1}.$$

Когда ученики станут рассматривать полученные ими обратные дроби, то они сами заметят, что среди них оказались целые числа, а именно:

$$\frac{2}{1}=2;\quad \frac{5}{1}=5;\quad \frac{10}{1}=10.$$

От обращения каких дробей возникли эти целые числа? От обращения тех, у которых числитель равен единице. Далее возникает вопрос, как написать число, обратное целому. Для этого достаточно написать это число со знаменателем 1 и потом выполнить обращение, например:

$2=\frac{2}{1}$, обратное $\frac{1}{2}$; $3=\frac{3}{1}$, обратное $\frac{1}{3}$;

$4=\frac{4}{1}$, обратное $\frac{1}{4}$; $5=\frac{5}{1}$, обратное $\frac{1}{5}$ и т. д.

После этого нужно изложить свойство взаимно обратных чисел, причем желательно, чтобы учащиеся сами его подметили.

Наконец, нужно использовать взаимно обратные числа для замены деления умножением.

42. Распространение законов и свойств действий на дробные числа. Здесь нужно изучить некоторый теоретический отдел. Предупреждаем об этом, потому что учащиеся и в этом возрасте больше любят действовать, чем заниматься теорией. Однако этот отдел имеет очень большое значение:

здесь «распространяются» известные ранее законы и свойства действий на дробные числа, и тем самым они снова воспроизводятся и повторяются.

Чтобы этот отдел не был скучным, нужно насытить его деятельностью и непрерывно поддерживать связь с теорией целых чисел. Ученики должны проявить максимум активности при изучении этого раздела.

Может возникнуть вопрос, когда лучше рассмотреть изложенные здесь законы и свойства действий: при прохождении самих действий или после их прохождения. Положим, мы изучаем сложение дробей и здесь же, не переходя к вычитанию, говорим, что для сложения дробей сохраняют свое значение переместительный и сочетательный законы. Но можно поступить иначе: мы рассматриваем законы и свойства действий после того, как пройдены и усвоены все четыре действия.

Эта книга идет по второму пути; законы и свойства действия, известные нам из отдела целых чисел, распространяются на дробные числа после того, как пройдены все действия над дробями. Можно, конечно, оспаривать такой порядок, но после того, как изучены все четыре действия над дробными числами и создан известный навык их выполнения, вторичный просмотр всех действий с более высоких позиций представляет собой прекрасную школу повторения и усвоения всех деталей ранее изученных действий.

С л о ж е н и е. Здесь нужно рассмотреть:

а) переместительный закон сложения;

б) сочетательный закон сложения;

в) изменение суммы с увеличением одного слагаемого;

г) изменение суммы с уменьшением одного слагаемого.

Занятия этого рода не могут быть слишком интересными и увлекательными — самый материал здесь довольно однообразен. Лучше всего разработку этого вопроса предоставить самим учащимся, а за учителем сохранить наблюдение, исправление и контроль. Вот примерное течение урока. Учитель говорит ученикам, что для целых чисел имеет место переместительный закон сложения, например:

$$18 + 32 = 32 + 18, \text{ или вообще } a + b = b + a.$$

Этот закон справедлив и для дробных чисел. Как нам это проверить? Вероятно, ученики пожелают проверить справедливость этого закона на каких-нибудь дробях.

Пусть они укажут эти дроби. Несколько учеников назовут несколько пар дробей. Учитель берет какую-нибудь пару, например:

$$\frac{7}{25}+\frac{11}{25}=\frac{11}{25}+\frac{7}{25}=\frac{18}{25}.$$

Почему это происходит? Здесь не нужно никакой теории. Ученики, вероятно, скажут, что можно присчитывать к 7 по одной единице от числа 11 и можно, наоборот, к 11 присчитывать по одной единице от числа 7. Может быть, некоторые ученики скажут, что эти дроби можно представить в виде отрезков; тогда будет безразлично, в каком порядке мы будем складывать эти отрезки. Но наилучшее объяснение состояло бы в том, что сложение любых дробных чисел с одинаковыми знаменателями сводится к сложению ц е л ы х чисел, т. е. их числителей.

Далее переходим к сочетательному закону. Берем несколько дробных чисел, например четыре, и выполняем сначала сложение дробей первой пары, затем сложение дробей второй пары и, наконец, сложение первой суммы со второй. В целях проверки и в целях подтверждения сочетательного закона следует выполнить действия в другом порядке. Можно допускать комбинацию переместительного и сочетательного законов. Очень важно подобрать серию удачных упражнений. Возьмем пример:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{10}+\frac{7}{12}+\frac{9}{20}.$$

Если выполнять сразу сложение всех дробей, то пришлось бы привести их к довольно большому знаменателю (60), но можно сделать перестановку и группировку некоторых слагаемых, например:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{3}{10}+\frac{9}{20}\right),$$

и тогда решение примет вид:

а) $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}=\frac{8+7}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$;

б) $\frac{3}{10}+\frac{9}{20}=\frac{6+9}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$;

в) $1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=2.$

Вообще мы рекомендуем превратить этот отдел в серию занимательных упражнений, сопровождаемых теоретическими выводами и практическими приложениями.

Если в задачнике нет подходящих упражнений, то учитель может придумать такие упражнения самостоятельно. Еще лучше, если в составлении таких упражнений примут участие школьники.

Вопросы изменяемости суммы при изменении слагаемых тоже полезно рассмотреть на хорошо подобранных примерах. Возьмем, например, дроби: $2\frac{3}{4}+3\frac{5}{8}$. Выполнение этого сложения никаких затруднений не представит; но попробуем выполнить это сложение устно, например, так: округлим первое слагаемое до целого числа, т. е. добавим в уме к нему $\frac{1}{4}$ и выполним сложение:

$$3+3\frac{5}{8}=6\frac{5}{8}.$$

Эта сумма больше суммы данных чисел на $\frac{1}{4}$, потому что первое слагаемое было увеличено на $\frac{1}{4}$. Чтобы получить сумму данных чисел, нужно от полученной суммы отнять $\frac{1}{4}$, т. е.

$$6\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=6\frac{3}{8}.$$

Это нужно сделать в уме.

Повторяем еще раз, что весь этот раздел нужно рассматривать как систему удачно подобранных упражнений. В этом случае он не будет скучным и принесет учащимся пользу: это будет хорошая тренировка в рационализации вычислений. Кроме того, ученик, который добросовестно выполнит все упражнения этой главы, сразу почувствует значительную беглость, смелость и уверенность в выполнении действий над дробными числами.

В ы ч и т а н и е. Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) вычитание суммы из числа;
б) вычитание числа из суммы;
в) изменение разности с увеличением уменьшаемого;
г) изменение разности с уменьшением уменьшаемого;
д) изменение разности с увеличением вычитаемого;
е) изменение разности с уменьшением вычитаемого;
ж) неизменяемость разности при одновременном увеличении или уменьшении уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число.

Одно из основных свойств вычитания целых чисел состоит в том, что вычитание суммы приводится к последовательному вычитанию каждого слагаемого. Это свойство бывает особенно заметным при устном вычитании, где, например, при вычитании числа 234 из числа 500 мы сначала вычитаем 200, потом 30 и, наконец, 4. Это можно записать в общем виде:

$$a - (b + c + k) = a - b - c - k.$$

Это свойство остается справедливым и для дробных чисел. Применение его можно показать так: пусть, например, нужно выполнить действие:

$$5\frac{15}{16} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right).$$

Сначала можно найти сумму дробей, заключенных в скобки, а затем вычесть эту сумму из $5\frac{15}{16}$, но можно выполнить вычитание дробей последовательно и даже в уме, т. е. так:

1) $5\frac{15}{16} - \frac{1}{2} = 5\frac{15}{16} - \frac{8}{16} = 5\frac{7}{16}$;

2) $5\frac{7}{16} - \frac{1}{4} = 5\frac{7}{16} - \frac{4}{16} = 5\frac{3}{16}$;

3) $5\frac{3}{16} - \frac{1}{8} = 5\frac{3}{16} - \frac{2}{16} = 5\frac{1}{16}$.

Принимая во внимание сказанное в отделе «Сложение», мы и здесь можем, удачно подбирая большое число подходящих примеров, рассмотреть все указанные выше семь пунктов.

Умножение. Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) переместительный закон умножения;

б) сочетательный закон умножения;

в) распределительный закон умножения;

г) изменение произведения с увеличением одного сомножителя;

д) изменение произведения с уменьшением одного сомножителя.

Распространение законов и свойств умножения на дробные числа выполняется, как и для других действий, путем подбора и решения целесообразных упражнений. Исключительно важно значение распределительного закона. Сначала полезно повторить его на целых числах и показать формулу: $(a + b + c) \cdot k = ak + bk + ck$.

Затем нужно сказать, что всякое умножение многозначного числа на однозначное (а затем и на многозначное) требует применения распределительного закона. Далее нужно отметить, что устное умножение сплошь и рядом сопровождается применением распределительного закона, например: $123 \cdot 3 = (100 + 20 + 3) \cdot 3 = 300 + 60 + 9 = 369$.

После этого можно перейти к дробным числам. Нужно показать, что пример $\left(\frac{5}{18} + \frac{7}{12} + \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{4}{5}$ может быть решен двумя способами: а) сначала можно найти сумму дробей, заключенных в скобки, а потом умножить ее на $\frac{4}{5}$; б) сначала можно вычислить произведение каждого слагаемого на $\frac{4}{5}$, а затем сложить три полученных произведения.

Наконец, на большом числе примеров нужно показать рационализирующее значение распределительного закона при вычислениях. Сначала нужно взять самые простые примеры, решаемые в уме, например: $5\frac{1}{2} \cdot 4 = \left(5 + \frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 20 + 2 = 22$, а затем можно рассмотреть более сложные примеры.

Деление. Здесь нужно рассмотреть следующие вопросы:

а) деление суммы на число;

б) деление разности на число;

в) изменение частного с увеличением делимого;

г) изменение частного с уменьшением делимого;

д) изменение частного с увеличением делителя;

е) изменение частного с уменьшением делителя;

ж) неизменяемость частного при одновременном увеличении и уменьшении делимого и делителя в одинаковое число раз.

Предлагаемые здесь важные свойства деления следует, конечно, рассмотреть сначала на целых числах. Вполне возможно, что некоторые учащиеся при изучении целых чисел этих свойств не рассматривали. Учитель мог пропустить эти свойства на том основании, что детям трудно будет их усвоить. Если к моменту окончания изучения обыкновенных дробей ученики стали более зрелыми, то целесообразно теперь на большом числе постепенно усложняющихся примеров рассмотреть эти интересные свойства. Начинать, конечно, нужно с целых чисел.

Свойство «1» имеет очень большое значение и, в частности, для устных вычислений. Деля 884 на 4, мы обычно поступаем так:

$$884 : 4 = (800 + 80 + 4) : 4 = 200 + 20 + 1 = 221.$$

Свойство «2» тоже может быть применено при устных вычислениях. Разделить 992 на 4 можно так:

$$992 : 4 = (1000 - 8) : 4 = 250 - 2 = 248.$$

Свойством «7» мы очень часто пользуемся при делении. Если нужно разделить 36 000 на 300, то мы обычно отбрасываем по два нуля в делимом и в делителе. Это значит не что иное, как уменьшение делимого и делителя в одинаковое число (в 100) раз.

После тщательного рассмотрения всех семи случаев на целых числах нужно продемонстрировать их на дробях.

43. Отношение величин[1]. Вопрос об «отношении» имеет свою историю.

В учебнике арифметики Малинина и Буренина, который еще в прошлом веке выдержал 20 изданий, говорится: «Отношением называют результат, полученный от сравнения двух чисел... Отношение можно находить только между величинами однородными». Затем вводятся термины: предыдущий, последующий члены и знаменатель отношения.

А. П. Киселев в «Арифметике» издания 1906 г. говорит: «Отношением одного значения величины к другому значению той же величины называется число, на которое надо умножить второе значение, чтобы получить первое».

---

[1] Отношение величин (и чисел) новая программа относит к 4-му разделу программы V класса, т. е. после раздела 3 «Десятичные дроби».

Термина «знаменатель отношения» А. П. Киселев не вводит.

В издании «Арифметики» 1929 г. А. П. Киселев сохраняет прежнее определение отношения, но в отделе «Измерение величин» он определяет еще отношение двух однородных мер как «число, показывающее, сколько раз меньшая мера содержится в большей».

В более ранних изданиях А. П. Киселев таким способом определил «единичное отношение».

В более поздних изданиях («Арифметика» А. П. Киселева в переработке А. Я. Хинчина, 1938) говорится так: «частное от деления одного числа на другое иначе называется отношением этих чисел».

Термин «знаменатель отношения» уже окончательно исчезает. Правда, и до последнего времени некоторые авторы сохраняют этот термин или заменяют его термином «величина отношения».

Если, излагая вопрос об отношении, мы просто скажем, что это — частное, то нам не удастся избежать очень многих затруднений. Если частное и отношение — одно и то же, то нужно было еще в начальной школе при изучении деления сказать, что результат деления называется частным, или отношением. Однако мы вводим новое название не только для частного, но и для делимого, и для делителя.

Нужно либо отказаться от термина «частное», либо указать какую-нибудь специфичность понятия «отношение».

Есть сторонники того, что понятие отношения действительно нужно ввести в самом начале изучения арифметики и о терминологии деления говорить так: делимое, делитель, частное, или отношение.

Килограмм сахара стоит 1 рубль. Сколько стоят 5 *кг*? Решение: $1 \cdot 5 = 5$ (рублей).

Теперь решим две обратные задачи:

$$1)\ 5 : 5 = 1\ (\text{рубль});\quad 2)\ 5\ (\text{рублей}) : 1\ (\text{рубль}) = 5.$$

Результат деления в первом случае называют частным, а во втором случае — отношением.

Профессор Парижского университета Жюль Таннери в своем большом курсе арифметики пишет так: «Понятие о т н о ш е н и я, в сущности, не отличается от понятия меры».

«Два отрезка прямой (рис. 27), например AB и RS, называются соизмеримыми между собой, когда существует некоторый отрезок, который содержится точно известное число раз в RS и точно известное число раз в AB; такой отрезок есть так называемая общая мера для RS и для AB; если бы этот отрезок был принят за единицу, то оказалось бы возможным измерить RS и AB целыми числами; на рисунке эта общая мера содержится точно 5 раз в AB и 7 раз в RS.

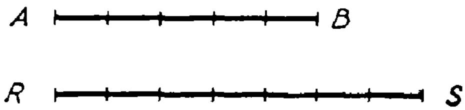

Рис. 27.

В настоящей главе, как только мы будем говорить об отношении двух величин, то этим самым мы будем предполагать, что эти величины соизмеримы между собой, что эти величины имеют общую меру, содержащуюся точно известное число раз в первой и известное число раз во второй величине.

Отношение двух величин (первой ко второй) есть дробь, числитель которой выражает, сколько раз общая мера содержится в первой величине, а знаменатель которой выражает, сколько раз общая мера содержится во второй величине.

Или отношение первой величины ко второй величине есть дробь, которая служит мерой для первой величины, когда за единицу принимается вторая величина.

Отношение двух промежутков времени, из которых первый продолжается 7 минут, а второй продолжается 5 минут, есть $\frac{7}{5}$. Отношение второго промежутка времени к первому есть $\frac{5}{7}$».

К формированию понятия «отношение» можно прийти на основании рассмотрения следующих фактов.

Сколько «пятерок» содержится в 10 рублях? (Сознательно употреблено слово «пятерка», а не 5 рублей.)

Ученики на этот вопрос ответят: две. Как это найти? Нужно 10 разделить на 5: $10 : 5 = 2$.

Может быть, здесь уместно подчеркнуть, что в данном случае 10 не делится на 5 равных частей, где в каждой части получается 2, а 10 сравнивается с пятью. Покажем это на чертеже (рис. 28).

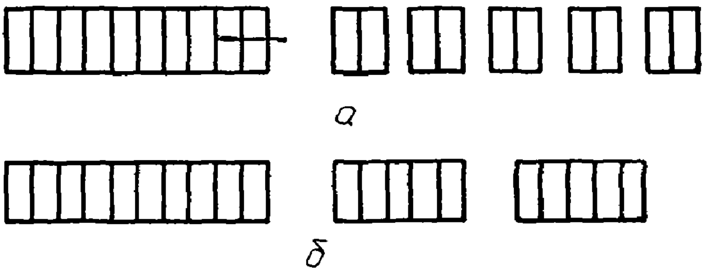

Рис. 28.

На рис. 28, *а* десять разделено на пять равных частей.

На рис. 28, *б* десять можно представить, как два раза по пяти.

Сколько «десяток» содержится в 30 рублях? (Снова сознательно употреблено слово «десятка» вместо слов десять рублей.)

Ученики на этот вопрос ответят: три. Как это найти? Нужно 30 разделить на 10; $30 : 10 = 3$.

Что мы предлагаем? Мы рекомендуем называть отношением символ, состоящий из д в у х чисел, т. е. не, одно число, а с о в о к у п н о с т ь д в у х ч и с е л. Одного числа в качестве отношения быть не должно. И это понятно. Ведь мы говорим об отношении чего-то к чему-то. Значит, чисел должно быть два.

В самом деле, если у нас речь идет об установлении отношения числа 5 к числу 7, то запись будет такая: $5 : 7$, или $\frac{5}{7}$.

А получается одно число в тех случаях, когда предыдущий член делится без остатка на последующий? Нет, не получается.

Пусть устанавливается отношение между числами 10 и 5. Это пишется так:

$$10 : 5, \text{ или } \frac{10}{5}.$$

А если сократим, то

$$10:5=2:1, \text{ или } \frac{10}{5}=\frac{2}{1}.$$

Ну, а если мы напишем так:

$$10:5=2, \text{ или } \frac{10}{5}=2;$$

будет в этом ошибка? Ошибки не будет, но так писать не нужно. Что выражают последние равенства? Они выражают, что 10 так относится к 5, как 2 относится к единице. Иными словами, 10 в два раза больше, чем 5. Зачем же отбрасывать единицу?

Если ученик этого на первых порах не понимает, пусть он сначала пишет без единицы, а когда привыкнет, пусть снова пишет единицу.

44. Нахождение процентного отношения чисел[1]. Это одна из весьма важных задач на проценты. В житейской практике и на производстве очень часто решаются такие задачи. Смысл ее понятен учащимся, и ее частные случаи решаются довольно просто, но вывести общее правило решения все-таки затруднительно. Может быть, следует пойти по линии подбора удачных задач. Возьмем такую:

В одном населенном пункте 200 домов, из них 150 кирпичных. Сколько процентов общего числа домов составляют кирпичные дома?

Эту задачу можно решить даже в уме, исходя из таких соображений: если на 200 домов приходится 150 кирпичных домов, то на 100 таких домов придется 75. А число домов, приходящихся на каждую сотню, и указывает их процент. Значит, кирпичных домов было 75%.

Но можно к решению этой задачи подойти иначе. Найдем сначала отношение числа кирпичных домов к общему числу домов. Это ученики должны делать достаточно уверенно:

$$150:200=3:4, \text{ или } \frac{3}{4}.$$

Значит, кирпичные дома составляют $\frac{3}{4}$ всех домов. Стало быть, на каждую сотню приходится $\frac{3}{4}$ кирпичных домов, и для нахождения числа кирпичных домов в каждой

[1] См. сноску на стр. 188.

сотне нужно найти $\frac{3}{4}$ от 100, что делается, как известно, посредством умножения:

$$100 \cdot \frac{3}{4} = 75.$$

Значит, кирпичных домов было 75%. Вот тот путь, которым можно идти для того, чтобы вывести общее правило решения таких задач. Главное в том, чтобы обосновать факт умножения отношения на 100.

Наилучший способ закрепления — проверка результата путем решения обратных задач.

45. Числовой масштаб. Изучение этого вопроса можно провести так. Сначала рассказать об изображении различных предметов на бумаге, выяснив при этом, что на плоских картах и чертежах одни предметы можно изображать в натуральную величину, другие в уменьшенном виде, третьи, наоборот, в увеличенном виде. На планах и географических картах предметы изображаются в уменьшенном виде. Этим последним случаем в V классе можно и ограничиться.

Прежде всего нужно выяснить, что и план, и карта должны давать представление не только о взаимном расположении предметов, но и об их действительной величине. Чтобы это было возможно, на плане и картах делается указание, во сколько раз уменьшены действительные размеры предметов и расстояния между ними. Это указание, надписанное на плане или карте, мы в повседневной жизни и называем *масштабом* карты или плана. В дальнейшем изучении математики учащиеся ознакомятся с различными видами масштаба; на данном этапе достаточно освоить представление о *числовом* масштабе. Числовым масштабом называется *отношение* длины любой линии на плане или карте к ее действительной длине («длина в натуре»). Нужно избегать смешения терминов: числовой и линейный масштаб, с которыми ученики ознакомятся позже в геометрии, а также не называть в школе просто «масштабом» хорошо известную всем школьникам *измерительную* линейку с делениями (правильно: «масштабная линейка» в смысле «измерительная»).

В отношении, называемом числовым масштабом, основная единица длины, принятая на плане или карте, принимается за единицу. Если, например, на карте все расстояния уменьшены в 10 000 раз, то числовой масштаб записывают в виде 1 : 10 000.

Можно рекомендовать решение трех задач:

1. Имея план или карту какого-нибудь участка и зная масштаб, вычислить истинные размеры этого участка или его частей, т. е. размеры в натуре.

2. Зная размер какого-нибудь расстояния в натуре и зная масштаб, найти длину соответствующего отрезка на плане.

3. Найти масштаб плана, зная какое-нибудь расстояние в натуре и соответствующее расстояние на плане.

Начинать нужно с той задачи, которая представляется ученикам более легкой и знакомой. Может быть, ученики данного или старшего класса снимали план школьного двора или огорода. У них имеется под руками план с цифровыми данными и масштабом. Интересно и поучительно предложить ученикам сначала определить на глаз истинные размеры участка, потом вычислить эти размеры, пользуясь планом, и, наконец, проверить найденные числа путем непосредственного измерения.

ЧАСТЬ III

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Глава пятая

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЯХ

46. Предварительные разъяснения. Понятие о десятичных дробях. Изучение десятичных дробей можно рассматривать как большой повторительный отдел по отношению к натуральным числам и обыкновенным дробям. В самом деле, он состоит из трех частей: особые свойства десятичных дробей, действия над ними и понятие о процентах. Но особые свойства десятичных дробей представляют собою распространение принципов десятичной системы нумерации на дробные числа; действия над десятичными дробями — небольшое видоизменение действий над целыми числами; наконец, решение простейших задач на проценты ничем почти не отличается от решения аналогичных задач в отделе обыкновенных дробей.

Все это не может не отразиться на методике изучения десятичных дробей. Если указанные разделы учения о десятичных дробях — только продолжение ранее изученного, то необходимо, чтобы ранее изученное было усвоено основательно. Всякие пробелы в освоении предыдущего для учащихся будут тормозом при изучении последующего, а для учителя — сигналом, подсказывающим ему, какие вопросы из ранее пройденного следует тщательно повторить при изучении текущего материала.

Что касается методики изучения десятичных дробей, то многолетний опыт показывает одно: когда учащимся, целиком изучившим дроби, приходится затем прилагать свои знания к вычислениям и задачам, то, как правило, они стремятся проводить вычисления в обыкновенных дробях, отказываясь от десятичных, как бы это ни затрудняло вычисления.

Трудно объяснить, чем вызывается эта весьма распространенная настороженность учащихся, вплоть до самых старших классов школы, в отношении десятичных дробей **как средства вычисления**. Но возможно, что основная причина в следующем. И обыкновенные, т. е. выраженные по общему правилу в виде частного целых чисел, и специальная форма десятичных дробей, записываемых по десятичной системе, в дальнейшем имеют свои преимущественные области приложений: первые — главным образом в теоретических вопросах общего характера, а вторые — в практических вычислениях. В практической жизни и технике постоянно пользуются десятичными дробями; операции с ними быстрее и проще из-за простоты их преобразований и быстроты арифметических действий над ними, легко сводящихся к действиям над целыми числами.

Именно поэтому нужно поддерживать неослабный интерес как к обыкновенным, так и к десятичным дробям. Правила операций над десятичными дробями выясняются и проверяются простым переводом их из десятичной записи в общую, с числителем и знаменателем. Вообще теоретические положения выводятся на обыкновенных дробях, а практические выкладки выполняются на десятичных.

Десятичные дроби превосходно согласуются с десятичной системой нумерации, с метрической системой мер, знакомой и понятной учащимся. У нас метрическими мерами измеряются наиболее распространенные величины: длина, площадь, объем, вес и даже деньги. Учащиеся знают, что метр имеет 10 дециметров, дециметр имеет 10 сантиметров, сантиметр имеет 10 миллиметров, а отсюда миллиметр есть $\frac{1}{10}$ сантиметра, сантиметр есть $\frac{1}{10}$ дециметра, дециметр есть $\frac{1}{10}$ метра, сантиметр $\frac{1}{100}$ метра, миллиметр $\frac{1}{1000}$ метра — все это дроби со знаменателями 10, 100, 1000, т. е. десятичные дроби. Получается полное соответствие между десятичными дробями и теми дробями, которые встречаются при измерении величин и при решении задач. Здесь дроби тоже десятичные.

Однако это не значит, что нужно всегда отбрасывать обыкновенные дроби и вычислять с десятичными потому, что так поступают вычислители-практики. Школьник не готовится быть непременно профессиональным вычислителем; пока он находится в школе, он только «обучаемый», и дело не в том, чтобы он применял необдуманно, механически какой-нибудь один прием. В школе он должен быть так обучен и воспитан, чтобы, сравнивая различные, быстрые и медленные, легкие и трудные приемы, в конце концов научился выбирать из них наиболее рациональные для каждого данного случая. Все теоретические вопросы легче рассматривать на обыкновенных дробях, потому что они всегда пишутся с явно обозначенным знаменателем и поэтому всегда выигрывают в наглядности. У десятичных же дробей знаменатель мыслится и подразумевается, но в явном виде не пишется.

Изучение десятичных дробей начинается вопросами:

Дроби с какими знаменателями мы изучали раньше? Дроби с любыми (всевозможными) знаменателями: 1, 2, 3.., 9, 10, 11.., 25, 30, 40...

Какие дроби мы будем изучать теперь? Дроби со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д.

Чем являются новые дроби по отношению к старым? Частным их видом (случаем).

Полезно остановиться на вопросе о времени появления десятичных дробей. Они появились сравнительно поздно и, безусловно, позже обыкновенных дробей. Они представляют собою позднейшее и очень разумное усовершенствование аппарата дробных чисел.

Аль Каши (Самарканд) пришел к ним в XV в., а Симон Стевин (Голландия) в XVI.

47. Изображение десятичной дроби. Прежде чем перейти к изображению десятичной дроби не в виде отношения двух целых чисел, а путем расширения десятичной системы нумерации, следует повторить на высшем уровне принципиальную основу этой системы, которая практически была знакома, но далеко недостаточно осознана учащимися в области целых (натуральных) чисел еще в начальной школе и при весьма спешном повторении в начале V класса.

Начать и теперь следует опять-таки с разбора способа записи натуральных чисел. Если мы пишем цифру 2 без всяких дополнительных знаков или наименований, то она обозначает число два, или две единицы. Но если после этой цифры справа от нее стоит какая-нибудь другая цифра, например 0; 1, 2; 3, то мы получим числа 20; 21; 22; 23.

Цифра 2 обозначает уже не 2 единицы, а 2 десятка, или 20. В этом состоит **позиционный принцип** нашей десятичной системы нумерации. Особенно рельефно этот принцип выявляется, если с учащимися рассматривать число, записанное с помощью только какой нибудь одной цифры. Возьмем, например, число 2222. В нем четыре двойки, но каждая из них имеет свое значение в зависимости от места (положения), какое она занимает в числе. Первая двойка справа обозначает единицы, вторая — десятки, третья — сотни, четвертая — тысячи. Если написать еще двойку левее тысяч, то она будет обозначать десятки тысяч и т. д. Итак, каждая цифра, стоящая левее данной, обозначает единицы, в 10 раз большие данной.

Теперь возникает вопрос: если рассматривать цифры, например, в числе 2222 слева направо, то что можно сказать о величине обозначаемых ими чисел? Всякая цифра, стоящая правее данной, обозначает единицы, которые в 10 раз меньше данных.

Хорошо предложить учащимся написать, например, трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, и обозначить наименование разряда над каждой цифрой таким образом:

сотни	десятки	единицы
2	2	2

Что могла бы обозначать двойка, написанная правее последней справа двойки? Она будет обозначать 2 единицы, в 10 раз меньшие, чем простые единицы. Это будут 2 десятые доли единицы; соседняя с ней справа будет обозначать сотые доли единицы, а следующая справа — тысячные доли единицы.

сотни	десятки	единицы		десятые	сотые	тысячные
2	2	2	|	2	2	2

Вертикальная черта служит только для того, чтобы отделить целые разряды от дробных. Пока наименования разрядов написаны, она не нужна. *Однако если отбросить* наименования и просто написать подряд шесть двоек: 222222, то будет неизвестно, какая из них обозначает разряд единиц. Поэтому принято отделять целые разряды от дробных каким-нибудь знаком. У нас принято ставить запятую: 222,222.

Теперь постепенно нужно перейти к упражнениям на запись и чтение десятичных дробей. Это нужно выполнять в медленном темпе. Выполняя эти упражнения, ученик должен постоянно помнить, что он имеет дело с д р о б я м и, а не писать какие-то числа, не связывая их ни с какой реальностью. Десятые доли можно откладывать на чертеже (рис. 29 следует изобразить на доске) или отмечать на метро-

Рис. 29.

вой линейке. Возьмем отрезок AB и примем его за единицу. Тогда часть AC этого отрезка можно записать двумя способами: либо $\frac{1}{10}$, либо 0,1; часть отрезка AB, обозначенную буквами CD, — тоже или $\frac{1}{10}$, или 0,1, а часть AD можно записать: $\frac{2}{10}$, или 0,2.

Чтобы учащиеся лучше освоились с новой записью дробей, можно взять отрезок MN, равный двум линейным единицам (рис. 30).

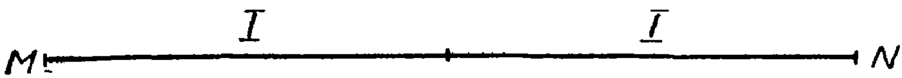

Рис. 30.

Можно весь отрезок MN разделить на 20 равных частей либо разделить только отрезок ON на 10 равных частей и отрезок, равный $\frac{1}{10}$ ON, обозначить хотя бы буквами OC, тогда отрезок MC можно записать либо как $1\frac{1}{10}$, либо как 1,1 и т. д.

Эти первые шаги несколько медленны, но зато мы никогда не отрываемся от наглядности; мы все время рассматриваем части отрезка и записываем обозначающие их дроби. Одну и ту же дробь мы записываем сначала в двух видах: со знаменателем и с помощью запятой, без явно обозначенного знаменателя. В последнем случае учащийся должен всякий раз помнить принципы десятичной системы нумерации.

Принципы написания десятичной дроби просты, но это не значит, что ученики сразу научатся писать л ю б у ю десятичную дробь. Необходимы некоторые упражнения. Особенно трудно писать десятичные дроби на слух с голоса. Пусть, например, требуется написать дробь: нуль целых тридцать пять стотысячных. На первых порах здесь, безусловно, будут ошибки. Даже зная правила записи, сначала будут писать 0,35, или 0, 035 , или 0,0035.

Для тренировки учащийся пишет сначала различные дроби со знаменателем 10:

0,2; 1,3; 0,5; 12,2; 36,8.., затем со знаменателем 100:

0,01; 0,12; 2,14; 0,22; 14,14; 2,22; 43,58.., а затем со знаменателем 1000 и так далее.

Хорошо, если бы учащиеся подметили правило: в изображении десятичной дроби после запятой должно быть столько знаков, сколько знаменатель имеет нулей. Когда нужно написать число две целых пять тысячных, то нужно подумать, сколько будет з н а к о в п о с л е з а п я т о й. Задано написать тысячные; тысяча имеет три нуля, значит, десятичных знаков должно быть три, а дана только одна цифра 5; где же взять еще две цифры? Два места нужно заполнить нулями, тогда получим: 2,005.

Десятичные дроби нужно писать по заданиям, предложенным в различных формах. Вот эти формы:

1. Десятичная дробь написана словами, а требуется написать ее цифрами. Пример: написать дробь нуль целых двадцать четыре десятитысячных.

2. Десятичную дробь $\frac{23}{1000}$ записать по десятичной системе.

3. Дана сумма дробей: $0{,}0005 + 0{,}004 + 0{,}006 + 0{,}8$; написать ее в виде одной десятичной дроби.

4. Дана сумма: $0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003 + 0{,}004$; написать ее в виде десятичной дроби.

5. Сумму дробей:

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{9}{10\,000}$$

написать в виде одной дроби по десятичной системе.

Затем нужны упражнения в чтении десятичных дробей. Общее положение: чтобы прочесть десятичную дробь, нужно сначала прочесть целую ее часть, т. е. число, стоящее слева от запятой, и прибавить слово «целых», а затем прочесть дробную часть, т. е. число, стоящее справа от запятой, и назвать дробные доли, соответствующие последней цифре справа; например, 5,326 читается: пять целых триста двадцать шесть тысячных. Правило это, конечно, заучивать не нужно, а следует, чтобы ученик, прочитав какую-нибудь дробь по указанию учителя, потом осмысленно, своими словами, рассказал, как он ее читает.

Это общепринятое чтение десятичных дробей, но для понимания сущности дела полезно сначала научить читать дроби по разрядам. Например, 5,326 сначала нужно читать так: пять целых три десятых две сотых и шесть тысячных. В таком чтении нужно упражняться довольно продолжительное время. Если такое чтение покажется трудным, то нужно число представить как сумму

$$5+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}.$$

48. Приписывание нулей к десятичной дроби. Для изображения десятичной дроби имеет большое значение цифра 0. Без нуля слева нельзя написать ни одной правильной десятичной дроби. Но этого мало: без нулей мы не можем написать ни одной правильной или неправильной дроби, у которой нет десятых, например: 0,01; 0,02; 0,034; 2,0123; 0,04567 и т. д.

Вообще здесь нуль употребляется для обозначения отсутствующих целых или дробных разрядов.

Необходимо продемонстрировать на примерах значение нуля в том случае, когда он заменяет какой-нибудь д е с я т и ч н ы й разряд. Для этого нужно предложить ученикам написать несколько десятичных дробей с помощью каких-нибудь двух цифр (например, 3 и 5) и нескольких нулей слева от этих цифр или между ними.

Ученики должны иметь возможность достаточно тренироваться в писании дробей, подобных написанным ниже.

0,35 — 0 целых 35 сотых;

0,035 — 0 целых 35 тысячных;

0,305 — 0 целых 305 тысячных;

0,0305 — 0 целых 305 десятитысячных;

0,0035 — 0 целых 35 десятитысячных.

После этого следует заняться нулями справа. Для этого возьмем сначала целое число, например 5, и припишем к нему после запятой справа нуль: 5,0.

Это значит, что в данном числе пять целых единиц и нет десятых. Это последнее обозначено нулем на месте десятых. Однако, если мы этот нуль не напишем, то все равно всякий поймет, что в этом числе десятых долей нет. Значит, этот нуль не нужен.

Возьмем другое число, например 5,3, и припишем к нему справа нуль: 5,30. В числе нет сотых, но это понятно и без нуля. Можно рассуждать и так: до приписывания нуля в нашем числе было $\frac{3}{10}$, а после приписывания стало $\frac{30}{100}$, но $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$.

Вывод: если мы припишем справа к десятичной дроби один или несколько нулей, то от этого она не изменится. Точно так же, если мы отбросим справа у десятичной дроби нули, то она от этого не изменится.

Эти два вывода должны быть рассмотрены на таком числе примеров, какое достаточно для полного их понимания. Примеры:

а) $8{,}5 = 8{,}50 \left(8\frac{5}{10} = 8\frac{50}{100}\right)$; $2{,}3 = 2{,}300 \left(2\frac{3}{10} = 2\frac{300}{1000}\right)$;

б) $4{,}300 = 4{,}3 \left(4\frac{300}{1000} = 4\frac{3}{10}\right)$; $5{,}6000 = 5{,}6 \left(5\frac{6000}{10\,000} = 5\frac{6}{10}\right)$.

Далее нужно указать, что приписывание нулей справа и их отбрасывание без изменения величины дроби применяется в практике, и учащимся в дальнейшем придется делать и то и другое.

Для того чтобы осмыслить приписывание нулей, нужно взять несколько дробей и посмотреть, какие у них знаменатели. Возьмем несколько дробей, например:

$$0{,}3;\ 0{,}23;\ 0{,}137;\ 0{,}4567;\ 0{,}54321.$$

Знаменатели этих дробей различны. Напишем эти дроби со знаменателями:

$$\frac{3}{10};\ \frac{23}{100};\ \frac{137}{1000};\ \frac{4567}{10\,000};\ \frac{54\,321}{100\,000}.$$

Если бы понадобилось привести последние дроби к общему знаменателю, то мы, быстро найдя дополнительные множители, написали бы следующие дроби:

$$\frac{30\,000}{100\,000};\quad \frac{23\,000}{100\,000};\quad \frac{13\,700}{100\,000};\quad \frac{45\,670}{100\,000};\quad \frac{54\,321}{100\,000}.$$

Теперь перепишем эти дроби по десятичной системе: 0,30000; 0,23000; 0,13700; 0,45670; 0,54321.

Мы привели наши дроби к общему знаменателю. Для этого потребовалось только в некоторых случаях приписать необходимое число нулей.

Итак, приписывание нулей используется для быстрого приведения десятичных дробей к о б щ е м у з н а м е н а т е л ю, причем не нужно находить ни наименьшего общего кратного знаменателей, ни дополнительных множителей: достаточно у всех данных дробей уравнять число десятичных знаков после запятой посредством приписывания, где нужно, необходимого числа нулей.

Чтобы выяснить смысл отбрасывания нулей, стоящих справа, возьмем дробь: 0,70 и перепишем ее в виде отношения $\frac{70}{100}$. Дробь допускает сокращение на 10: $\frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

Сокращение не изменяет величины дроби, и мы можем написать: $0{,}70 = 0{,}7$.

Таким образом, отбрасывание у десятичной дроби нуля справа равносильно ее с о к р а щ е н и ю. Для сокращения десятичной дроби достаточно отбросить у нее нули; не нужно искать делителей числителя и знаменателя и не нужно выполнять самого деления.

Нужно, конечно, взять еще несколько примеров такого типа и потом обратить внимание учащихся на простоту этого преобразования.

49. Сравнение десятичных дробей по величине. В свое время учащиеся сравнивали по величине целые числа. Об этом полезно теперь вспомнить. Если целые числа выписаны в натуральный ряд, то они постепенно возрастают, и любое число, стоящее правее данного, обязательно больше данного. Отсюда нетрудно сделать вывод, что любое двузначное число в натуральном ряде всегда будет стоять правее однозначного. По той же причине всякое трехзначное число будет больше любого двузначного и тем более однозначного. Если же мы возьмем, например, два двузначных числа (23 и 28 или 39 и 41), то при равенстве десятков большим будет то, у которого больше единиц, а при неравенстве десятков большим будет то, у которого больше десятков. Все это должно быть известно учащимся, но все же перед сравнением десятичных дробей должно быть восстановлено в их памяти.

Сравнение обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями (что учащиеся также должны помнить) сводится к сравнению их числителей, т е. сводится к сравнению по величине целых чисел Правда, можно сравнивать дроби с разными знаменателями, но для этого нужно пользоваться некоторыми особыми приемами. Перед тем как переходить к сравнению десятичных дробей, полезно дать учащимся для сравнения несколько пар обыкновенных дробей.

Вообще говоря, можно сказать, что разница между сравнением целых чисел и десятичных дробей есть: при сравнении целых чисел иногда бывает достаточно подсчитать число цифр, а при сравнении десятичных дробей это не всегда приводит к цели: например, дробь 0,5 имеет меньше цифр, чем дробь 0,1234, но первая дробь больше второй.

Изучение этого вопроса опять-таки нужно проводить постепенно: т. е. сначала взять пару дробей с одним знаком после запятой, затем пару дробей таких, из которых одна имеет один знак после запятой, а другая — два знака, и так далее

При изложении вопроса следует пользоваться чертежами и метрическими мерами. Возьмем (рис. 31) отрезок AB,

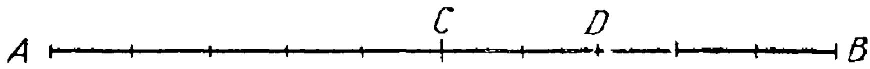

Рис. 31.

примем его за единицу и разделим на 10 равных частей. Тогда $AB = 1$, $AC = 0{,}5$ и $AD = 0{,}7$. На чертеже отрезок AD больше отрезка AC, значит, дробь 0,7 больше дроби 0,5. Можно написать $0{,}7 > 0{,}5$. Чем же отличаются эти дроби? У них равное число целых — нуль, но у первой дроби больше десятых, чем у второй.

Этот факт и следует заметить, он должен будет войти в общий вывод как его составная часть.

Далее можно взять деревянный метр и указать на нем 70 *см* и 78 *см*. Учащиеся скажут, какие это части метра:

70 *см* — это 0,7 *м*, или 0, 70 *м*, и 78 *см* — это 0,78 *м*. Сравним дроби 0,70 и 0,78. Для сравнения нуль сотых в первой дроби будет полезен: обе дроби выражены в сотых долях и сравнению подлежат только числители. На деревянном метре 78 *см* больше 70 *см*. Значит,

$$0{,}78 > 0{,}70, \text{ или } 0{,}78 > 0{,}7.$$

Пока мы рассмотрели пары правильных десятичных дробей. Хотя это не повлияет на общность вывода, но все-таки перед учениками должны пройти самые разнообразные случаи.

Возьмем две дроби с целою частью: 23,5 и 12,5. Десятичные знаки у них одинаковые, но у первой дроби 23 целых, а у второй 12. Первая дробь больше второй. Это можно записать:

$$23{,}5 > 12{,}5.$$

Возьмем другие дроби с одинаковой целою частью: 10,4 и 10,38. Для сравнения этих дробей полезно приписать справа к первой дроби нуль. Тогда мы будем сравнивать следующие дроби: 10,40 и 10,38. Каждая дробь имеет после запятой 2 цифры, значит, у этих дробей один и тот же знаменатель 100, но числитель 40 больше 38, стало быть, первая дробь больше второй:

$$10{,}4 > 10{,}38.$$

У первой дроби число десятых долей больше, чем у второй, правда, вторая дробь имеет еще 8 сотых, но они меньше одной десятой, потому что $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$.

Сравним теперь дроби 31,347 и 31,35. Припишем справа ко второй дроби нуль и будем сравнивать десятичные дроби 31,347 и 31,350. Целые части у них одинаковы, значит, нужно сравнить только дробные части 0,347 и 0,350. Знаменатель у этих дробей общий, но числитель второй дроби больше числителя первой, значит, вторая дробь больше первой, т. е. $31{,}35 > 31{,}347$.

Сравним, наконец, еще две дроби: 20,625 и 20,62473. Припишем к первой дроби два нуля, чтобы уравнялись разряды и сравним полученные дроби: 0,62500 и 0,62473. Знаменатели у них одинаковы, но числитель первой дроби 62500 больше числителя второй дроби 62473. Следовательно, первая дробь больше второй:

$$20{,}625 > 20{,}62473.$$

Из рассмотренных примеров можно сделать такой вывод:

Из двух десятичных дробей та больше, у которой число целых больше; при равенстве целых — та, у которой число десятых больше; при равенстве целых и десятых — та, у которой число сотых больше, и так далее.

50. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в *10, 100, 1000* ... раз. Учащиеся помнят, что всякий приписанный к целому числу справа нуль увеличивал это число в 10 раз. Если взять, например, число 25 и приписать к нему справа нуль, то получится число 250, в 10 раз большее. Число 5, которое раньше обозначало простые единицы, теперь стало обозначать десятки, а число 2, которое раньше обозначало десятки, теперь стало обозначать сотни. Благодаря приписыванию нуля прежние разряды заменились новыми, укрупнились, передвинулись на одно место влево. Что же касается десятичных дробей, то, как уже было выяснено, приписывание к ним справа нулей не изменяет их величины.

Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т д. раз можно сначала рассмотреть на обыкновенных дробях и от них перейти к десятичным. Пусть требуется увеличить в 10 раз дробь 0,17 Записав ее со знаменателем, получим:

$$\frac{17}{100} \cdot 10 = \frac{17 \cdot 10}{100} = \frac{17}{10} = 1,7.$$

Таким образом, увеличение дроби 0,17 в 10 раз свелось к перенесению в ней запятой на один знак вправо. Этот факт учащиеся должны заметить; затем взять какую-нибудь другую дробь и умножить ее, положим, еще раз на 10, чтобы этот факт проверить.

Затем следует по выбору учащихся взять третью дробь и умножить ее на 100.

Возьмем, например, дробь 0,027 и умножим ее на 100. Напишем ее со знаменателем:

$$\frac{27}{1000} \cdot 100 = \frac{27 \cdot 100}{1000} = \frac{27}{10} = 2,7.$$

Умножение десятичной дроби на 100 свелось к перенесению запятой на два (2) знака вправо.

Выполнив ряд аналогичных примеров, учащиеся должны сделать соответствующие выводы.

Установив факты на обыкновенных дробях, следует осмыслить их, уже не прибегая к обыкновенным дробям. Это нетрудно сделать. Возьмем дробь 0,37 и увеличим ее в 10 раз. Согласно предыдущему это будет 3,7, потому что перенесение запятой на один знак вправо изменило роль каждой цифры: вместо трех десятых стало 3 целых (т. е. в 10 раз больше), вместо семи сотых стало 7 десятых, значит, число увеличилось в 10 раз.

Обобщая наблюдение, можно сказать:

когда нужно увеличить десятичную дробь в 10 раз, мы должны передвинуть все десятичные разряды на одно место влево; но такое передвижение не может быть достигнуто приписыванием нуля; оно достигается перенесением запятой вправо на один знак.

Вот ряд разнообразных примеров: 1. В дроби 0,5 перенесем запятую на одно место вправо, получим число 5, которое в 10 раз больше 0,5, потому что раньше пятерка обозначала десятые доли единицы, а теперь она обозначает простые целые единицы. 2. Перенесем в числе 1,234 запятую на два знака вправо, число примет вид 123,4. Это число в 100 раз больше прежнего, потому что в нем число 3 стало обозначать простые единицы, число 2 — десятки, а число 1 — сотни. 3. Увеличим число 2,43 в тысячу раз. Для этого нужно перенести запятую на три знака вправо, но в нашем числе нет трех десятичных знаков после запятой; тогда мы поступим так: сначала перенесем запятую на два знака, которые имеются в этом числе, а вместо недостающего третьего знака припишем справа нуль и число примет вид 2430. Это число в 1000 раз больше 2,43. 4. Увеличим в 10 000 раз десятичную дробь 2,5. Для этого нам нужно перенести запятую на 4 знака, и мы п р е д в а р и т е л ь н о припишем справа к числу 2,5 столько нулей, чтобы у нас получилось 4 знака, т. е. 2,5000. Теперь перенесем в этом числе запятую на 4 знака, тогда получится:

25000, или 25000.

Обратно, если требуется уменьшить десятичную дробь в 10, 100, 1000 и т. д. раз, то нужно перенести в ней запятую в л е в о на один, два, три и т. д. знака.

После подробного рассмотрения вопроса об увеличении десятичной дроби в 10, 100 и т. д. раз соответствующее уменьшение уже не представит трудностей для учащихся. Достаточно рассмотреть два-три примера, а затем предложить им упражнения по образцу приводимой ниже таблицы.

Числа	Уменьшены			
	в 10 раз	в 100 раз	в 1000 раз	в 10 000 раз
26,44	2,644	0,2644	0,02644	0,002644
0,603	0,0603	0,00603	0,000603	0,0000603
0,015	0,0015	0,00015	0,000015	0 0000015
334	33 4	3,34	0,334	0,0334
18,0009	1,80009	0,180009	0,0180009	0,00180009

51. Округление десятичных дробей. Учащиеся должны были уже познакомиться с округлением чисел при изучении целых чисел. Тогда же они должны были узнать, почему и для какой цели выполняется округление.

О правилах округления Округление десятичных дробей мало отличается от округления целых чисел. Разница только в том, что при округлении целых чисел места отброшенных разрядов заполняются нулями, а при округлении десятичных дробей эти нули ставить не нужно.

Согласно рекомендации Главного управления школ РСФСР, опубликованной в журнале «Математика в школе», 1960, № 2, надлежит отказаться от «правила четной цифры», как это уже сделано в новейшей машинной вычислительной математике. Во всех классах средней школы РСФСР надлежит руководствоваться следующими правилами округления:

1) если первая слева из отбрасываемых цифр 0, 1, 2, 3, 4, то последняя оставляемая цифра не изменяется;

2) если первая слева из отбрасываемых цифр 5, 6, 7, 8, 9, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1.

Напоминать учащимся о значении округления полезно, может быть, не сразу, а иногда, время от времени. Много и долго говорить о пользе округления не стоит, но сказать об отдельных фактах необходимо. Например, хорошо сказать, что нет надобности выражать длину здания составным именованным числом 30 *м* 1 *см*, или 30,01 *м*, а следует сказать: «Длина здания — 30 *м*», потому что за это число мы можем ручаться, а число 30,01 трудно, да и не нужно, находить, измеряя здание метровой линейкой или лентой. Стены здания могли быть исключительно хорошо отшлифованы, чтобы к ним можно было бы аккуратно приложить линейку, углы здания могли быть весьма тщательно выверены, и все-таки едва ли можно было учесть один сантиметр, прибавленный к трем десяткам метров. При таких обстоятельствах можно привести учащимся еще какой-нибудь убедительный пример.

Первые примеры округления найдутся при непосредственном измерении. Измерения длины классной комнаты, классной доски или учительского стола, безусловно, дадут результат, требующий округления. Нужно рассмотреть два случая: округление с недостатком и округление с избытком. На каждый случай должно быть достаточное число примеров, их должны давать ученики сами, только тогда можно будет установить, в какой степени они понимают, о чем идет речь. Вот образчики примеров на эти случаи (для учителя).

1. Медицинский термометр (хорошо бы иметь его в классе) позволяет на глаз оценивать температуру примерно до сотых долей градуса (десятых долей деления). Глазомером оценили показание температуры 36°,63 (дробь 0,03 близка к одной трети и легко оценивается). Округлить показание до десятых долей. Округление (с недостатком) дает 36°,6.

Именно так поступают в медицинской практике: на глаз оценивают сотые доли градуса (или грубее — больше или меньше половины деления), а потом округляют без записи до десятых долей.

2. Округлить до одной сотой число 25,347.

Так как отбрасываются 0,007, то предыдущая цифра увеличивается на единицу, получается 25,35. Принято говорить, что после округления дан результат с точностью до одной сотой. Это значит, что п о г р е ш н о с т ь округленного числа меньше одной сотой. В самом деле, она равна 25,35 − 25,347 = 0,003; это меньше одной сотой.

3. Округлить числа: а) 12,345 до одной сотой; б) 23,1875 до одной тысячной; в) 728,55 до одной десятой.

Р е ш е н и я: а) перед цифрой тысячных (5) стоит цифра 4, она должна остаться без изменения.

Число округляется в 12,34; б) перед отбрасываемой цифрой 5 — цифра 7, к ней нужно прибавить единицу. Ответ: 23,188; в) перед цифрой 5 (сотых) стоит также цифра 5. Ответ: 728,6.

Среднее арифметическое. При решении многих практических задач приходится вычислять среднее арифметическое.

Средним арифметическим двух или нескольких чисел называется частное от деления их суммы на число слагаемых.

Понятие о среднем арифметическом дается в начальной школе и повторяется в теме «Целые числа» в V классе. В теме «Обыкновенные дроби» среднее арифметическое дробных чисел вычисляют только точно, а в теме «Десятичные дроби» понятие углубляется и сопровождается более развернутыми упражнениями.

Пример 1. Школьники измерили длину изгороди школьного огорода. Каждый измерял самостоятельно и так, как считал для себя удобным. У первого получилось 507 *м*, у второго — 504 *м*, у третьего — 510 *м* и у четвертого — 508 *м*. Какое число можно принять за длину изгороди?

В тех случаях, когда несколько измерений дают различные числовые результаты, принято брать среднее ариметическое этих чисел. Для этого сначала нужно вычислить сумму всех найденных результатов измерений, а потом эту сумму разделить на число измерений:

$$507 + 504 + 510 + 508 = 2029 \text{ м},$$
$$2029 : 4 \approx 507 \text{ м}.$$

Пример 2. Для измерения расстояний часто пользуются шагами. Так как у разных людей шаги разные, то, чтобы узнать расстояние, например, от дома до школы, нужно знать длину своего шага в метрах. Если мы знаем длину своего шага и что от дома до школы 700 шагов, то довольно точно можно рассчитать, сколько это составляет метров. Но здесь есть еще одно небольшое затруднение: шаги даже одного человека не всегда одинаковы — один шаг бывает больше, другой — меньше. Поэтому нужно вычислить среднюю длину шага. Делается это следующим образом. С помощью веревки или рулетки отмеривают на земле какое-нибудь расстояние, например 20 *м*. Затем обычным равномерным шагом проходят вдоль отмеренного отрезка и считают число сделанных шагов. Здесь может быть допущена некоторая погрешность. Шаг может не уложиться целое число раз на отмеренном отрезке; тогда, если остаток короче половины шага, на него можно не обращать внимания, если же он длиннее половины шага, то его можно считать за целый шаг.

Предположим, что, пройдя 20 *м*, мы сделали 32 шага; тогда среднюю величину шага можно найти делением. Нужно 20 *м*, которые составляют 2000 *см*, разделить на 32:

$$2000 : 32 \approx 62 \text{ (с точностью до 1 } см\text{)}.$$

Итак, средняя величина шага по нашим подсчетам оказалась приблизительно равной 62 *см*.

В этом примере мы тоже нашли среднее арифметическое: у нас было 32 слагаемых, сумма их была равна 20 *м*, частное от деления суммы этих слагаемых на их число оказалось равным 62 *см*.

Примечание. Иногда при определении средней величины шага проходят вдоль отмеренной прямой линии не один раз, а несколько, например 5—6, и берут среднее арифметическое чисел шагов, получившихся при каждом таком передвижении.

Пример 3. В течение февраля месяца день прибывает на 2 часа. На сколько минут в среднем увеличивается каждый следующий день?

Если в течение месяца день прибавился на 2 часа, или на 120 минут, то это число составилось из ежедневных приращений по нескольку минут.

Приращения дня неравномерны. В феврале 28 дней, и мы можем вычислить среднее дневное приращение, найдя среднее арифметическое из 28 слагаемых, сумма которых 120.

120 : 28 = 4,3 (с точностью до 0,1 мин., или до 6 сек.). В феврале день в среднем увеличивается на 4,3 мин. (или на 4 мин. 18 сек.).

Пример 4. С помощью рулетки измеряют расстояние между двумя пунктами. Измерили 10 раз и получили следующие результаты: 62,36; 62,30; 62,32; 62,31; 62,36; 62,35 62,33; 62,32; 62,38; 62,37.

Складывая эти числа и деля на 10, получим среднее арифметическое:

$$623{,}4 : 10 = 62{,}34.$$

Этот результат можно найти короче, если найденные числа мало отличаются друг от друга.

Если все данные числа отличаются друг от друга только последней цифрой, то округляют любое из них так, чтобы на конце получился нуль (в примере 4 есть готовое число 62,30), а если числа с нулем на конце нет, то его составляют и вычитают по очереди из каждого данного числа (результата измерения). Если данные числа отличаются двумя последними цифрами, то округляют любое из них так, чтобы на конце были бы два нуля.

Затем вычисляют среднее арифметическое разностей («отклонений» от округленного числа) и прибавляют среднее арифметическое к округленному числу.

В примере 4 вычитаем 62,30 из данных чисел и находим разность (отклонения) сотых долей — 6, 0, 2, 1, 6, 5, 3, 2, 8, 7.

Складываем отклонения и вычисляем; берем среднее арифметическое отклонений:

$$40 : 10 = 4 \text{ (сотых)}.$$

Среднее расстояние равно: $62{,}30 + 0{,}04 = 62{,}34$.

Этим оканчиваются общие сведения о десятичных дробях.

* * *

Полезно заметить, что изучение этого отдела должно сопровождаться решением примеров на метрическую систему мер. Подобного рода примеры оживляют процесс изучения и, если угодно, сближают его с практикой.

Приводятся образцы таких примеров:

1. Какую часть метра составляет: 1 *см*? 8 *см*? 35 *см*? 1 *мм*? 45 *мм*? 1 *дм*? 8 *дм*? 15 *дм*? (написать).

2. Какую часть килограмма составляет 1 *г*? 45 *г*? 250 *г*? 500 *г*? 775 *г*? (написать).

3. Какую часть километра составляют: 35 *м*? 500 *м*? 1 *м*? 100 *м*? 1 *см*? 10 *см*?

4. Какую часть тонны составляют: 1 *кг*? 25 *кг*? 100 *кг*? 125 *кг*? 500 *кг*? 250 *кг*?

5. Превратить в метры: 1 *м* 5 *дм*; 2 *м* 25 *см*; 250 *см*; 75 *см*; 325 *см*.

6. Превратить в килограммы: 1 *кг* 500 *г*; 3 *кг* 750 *г*; 2500 *г*; 3450 *г*; 5655 *г*.

7. Превратить в километры: 2 *км* 500 *м*; 2600 *м*; 23 *км* 750 *м*; 325 *м*; 12 *км* 345 *м*.

Глава шестая

ДЕЙСТВИЯ НАД ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

52. Сложение десятичных дробей. При сложении десятичных дробей используется тот же самый механизм сложения, что и при сложении целых чисел, поэтому лучше всего начать с разбора примерно такого сложения:

$$615 + 243 = (600 + 10 + 5) + (200 + 40 + 3) = (600 + 200) + (10 + 40) + (5 + 3) = 800 + 50 + 8 = 858.$$

Пример должен быть записан в строчку, чтобы нагляднее выявить механизм сложения многозначных чисел, одинаковый независимо от формы записи,— сложение по разрядам. Надо показать, что при записи в столбик (нужно здесь же написать на доске) сама запись позволяет складывать одноименные разряды еще проще, чем в первом случае.

Поучительно затем разобрать сложение обыкновенных дробей:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} = \frac{8 + 12 + 14 + 15}{16} = \frac{49}{16} = 3\frac{1}{16}.$$

Чтобы сложить эти дроби, пришлось привести их к общему знаменателю, сложить числители и подписать общий знаменатель. Это нужно помнить при сложении десятичных дробей. Здесь приведение к общему знаменателю сводится лишь к приписыванию справа нулей, которое, кроме того, часто только подразумевается, так что сложение десятичных дробей сводится, как и сложение всяких дробей, к *сложению их числителей*. Короче говоря, сложение десятичных дробей сводится к сложению целых чисел. Задача учителя — убедить учащихся, что сложение самых разнообразных десятичных дробей протекает так же, как сложение целых чисел. Первые примеры должны быть подобраны так, чтобы они служили иллюстрацией этой мысли. Более простые примеры нужно решать в уме, но на первых порах следует записывать все примеры сначала в строчку, а потом в столбик как общую формулу записи, применяя устное сложение и запись в строчку лишь в отдельных случаях. После решения нескольких первых примеров ученик должен уже сам делать разумный выбор в отношении того, в каких случаях лучше сложить устно, когда применить запись в строчку и когда записать слагаемые столбиком.

Вот образчики примеров на сложение десятичных дробей.

Чтобы сложить 6,1 и 2,3, можно сначала записать слагаемые в строчку:

$6{,}1 + 2{,}3 = (6 + 0{,}1) + (2 + 0{,}3) = 6 + 2 + 0{,}1 + 0{,}3 =$
$= 8 + 0{,}4 = 8{,}4.$

Мы выполнили сложение по разрядам: сначала сложили целые, потом сложили десятые. Но, конечно, и здесь удобнее записывать слагаемые в столбик, подписав слагаемые одно под другим, и выполнить сложение справа налево, начиная с низших разрядов.

1. $6{,}1 + 2{,}3 = ?$

$$\begin{array}{r} 6{,}1 \\ +\,2{,}3 \\ \hline 8{,}4 \end{array}$$

2. $5{,}06 + 7{,}8 = ?$

$$\begin{array}{r} 5{,}06 \\ +\,7{,}80 \\ \hline 12{,}86 \end{array}$$

Во втором слагаемом для наглядности приписано справа 0 сотых, но этого можно было и не делать. Важно не допустить ошибки при подписывании слагаемых друг под другом

3. $9{,}1 + 2{,}03 + 4{,}506 = ?$

$$\begin{array}{r} 9{,}1 \\ +\,2{,}03 \\ 4{,}506 \\ \hline 15{,}636 \end{array}$$

Этот пример отличается от предыдущих только числом слагаемых. Здесь нули справа только подразумеваются.

4. $1{,}2357 + 0{,}469 + 2{,}08 + 3{,}90701 = ?$

$$
\begin{array}{r}
1{,}2357 \\
+\;0{,}469 \\
2{,}08 \\
3{,}90701 \\
\hline
7{,}69171
\end{array}
$$

Здесь при сложении тысячных долей получилось 21 тысячная; мы написали 1 под тысячными, а 2 прибавили к сотым, таким образом, в разряде сотых у нас получились следующие слагаемые: $2 + 3 + 6 + 8 + 0$; в сумме они дают 19 сотых, мы подписали 9 под сотыми, а единицу присчитали к десятым, где получились такие слагаемые: $1 + 2 + 4 + 0 + 9$, т. е. 16 десятых, или, иными словами, 1 целая и 6 десятых; 6 подписали под десятыми, а единицу отнесли к целым.

Запятая в сумме занимает то же самое место, какое она занимала в отдельных слагаемых.

Итак, сложение десятичных дробей выполняется так же, как и сложение целых чисел; при этом соблюдаются еще следующие правила: дроби подписываются одна под другой так, чтобы во всех слагаемых одинаковые разряды находились друг под другом и все запятые стояли в одном и том же вертикальном столбце; справа от десятичных знаков некоторых слагаемых приписывают, хотя бы мысленно, такое число нулей, чтобы все слагаемые имели одинаковое число десятичных знаков, затем выполняют сложение по разрядам начиная с правой стороны и в полученной сумме ставят запятую в том же самом вертикальном столбце, в котором она находится в данных слагаемых.

Примерные упражнения на сложение десятичных дробей:

1) $0{,}1 + 2{,}34 + 5{,}678 = ?$
2) $0{,}12 + 3{,}456 + 4{,}5678 + 5{,}6789 = ?$
3) $0{,}12345 + 1{,}2345 + 2{,}345 + 3{,}45 + 4{,}5 = ?$
4) $9{,}08 + 8{,}007 + 7{,}0006 + 6{,}00005 = ?$
5) $9{,}99999 + 8{,}8888 + 7{,}777 + 6{,}66 + 5{,}5 + 4 = ?$
6) $361{,}1264 + 8{,}351 + 136{,}28 + 11{,}0104 = ?$
7) $8{,}37 + 136{,}489 + 23{,}3045 + 140364 = ?$
8) $2{,}451 + 8{,}56 + 56{,}375 = ?$

53. Устное сложение десятичных дробей. Устное сложение десятичных дробей опирается на те же правила, на которых основано сложение целых чисел. Эти правила нужно решать в уме, но на первых порах следует записывать все примеры сначала в строчку, а потом в столбик как общую формулу записи, применяя устное сложение и запись в строчку лишь в отдельных случаях. После решения нескольких п е р в ы х примеров ученик должен уже сам делать разумный выбор в отношении того, в каких случаях лучше сложить устно, когда применить запись в строчку и когда записать слагаемые столбиком.

Вот образчики примеров на сложение десятичных дробей.

Чтобы сложить 6,1 и 2,3, можно сначала записать слагаемые в строчку:

$6{,}1 + 2{,}3 = (6 + 0{,}1) + (2 + 0{,}3) = 6 + 2 + 0{,}1 + 0{,}3 =$
$= 8 + 0{,}4 = 8{,}4.$

Мы выполнили сложение по разрядам: сначала сложили целые, потом сложили десятые. Но, конечно, и здесь удобнее записывать слагаемые в столбик, подписав слагаемые одно под другим, и выполнить сложение справа налево, начиная с низших разрядов.

1. $6{,}1 + 2{,}3 = ?$

$$\begin{array}{r} 6{,}1 \\ +\;2{,}3 \\ \hline 8{,}4 \end{array}$$

2. $5{,}06 + 7{,}8 = ?$

$$\begin{array}{r} 5{,}06 \\ +\;7{,}80 \\ \hline 12{,}86 \end{array}$$

Во втором слагаемом для наглядности приписано справа 0 сотых, но этого можно было и не делать. Важно не допустить ошибки при подписывании слагаемых друг под другом

3. $9{,}1 + 2{,}03 + 4{,}506 = ?$

$$\begin{array}{r} 9{,}1 \\ +\;2{,}03 \\ 4{,}506 \\ \hline 15{,}636 \end{array}$$

Этот пример отличается от предыдущих только числом слагаемых. Здесь нули справа только подразумеваются.

4. $1,2357 + 0,469 + 2,08 + 3,90701 = ?$

$$\begin{array}{r} 1,2357 \\ +\begin{array}{r} 0,469 \\ 2,08 \end{array} \\ 3,90701 \\ \hline 7,69171 \end{array}$$

Здесь при сложении тысячных долей получилось 21 тысячная; мы написали 1 под тысячными, а 2 прибавили к сотым, таким образом, в разряде сотых у нас получились следующие слагаемые: $2 + 3 + 6 + 8 + 0$; в сумме они дают 19 сотых, мы подписали 9 под сотыми, а единицу присчитали к десятым, где получились такие слагаемые: $1 + 2 + 4 + 0 + 9$, т. е. 16 десятых, или, иными словами, 1 целая и 6 десятых; 6 подписали под десятыми, а единицу отнесли к целым.

Запятая в сумме занимает то же самое место, какое она занимала в отдельных слагаемых.

Итак, сложение десятичных дробей выполняется так же, как и сложение целых чисел; при этом соблюдаются еще следующие правила: дроби подписываются одна под другой так, чтобы во всех слагаемых одинаковые разряды находились друг под другом и все запятые стояли в одном и том же вертикальном столбце; справа от десятичных знаков некоторых слагаемых приписывают, хотя бы мысленно, такое число нулей, чтобы все слагаемые имели одинаковое число десятичных знаков, затем выполняют сложение по разрядам начиная с правой стороны и в полученной сумме ставят запятую в том же самом вертикальном столбце, в котором она находится в данных слагаемых.

Примерные упражнения на сложение десятичных дробей:

1) $0,1 + 2,34 + 5,678 = ?$
2) $0,12 + 3,456 + 4,5678 + 5,6789 = ?$
3) $0,12345 + 1,2345 + 2,345 + 3,45 + 4,5 = ?$
4) $9,08 + 8,007 + 7,0006 + 6,00005 = ?$
5) $9,99999 + 8,8888 + 7,777 + 6,66 + 5,5 + 4 = ?$
6) $361,1264 + 8,351 + 136,28 + 11,0104 = ?$
7) $8,37 + 136,489 + 23,3045 + 140364 = ?$
8) $2,451 + 8,56 + 56,375 = ?$

53. Устное сложение десятичных дробей. Устное сложение десятичных дробей опирается на те же правила, на которых основано сложение целых чисел. Эти правила полезно напомнить ученикам перед устным сложением десятичных дробей, хотя, конечно, устные вычисления должны выполняться **в с е г д а** при изучении арифметики, никогда не прерываясь.

В каких случаях нужно рекомендовать устное сложение десятичных дробей, решить нелегко, но можно высказать одно общее положение. Если нужно сложить, положим, две **правильных** десятичных дроби, то, мысленно отбросив нули целых, мы получим два целых числа и тогда увидим, удобно ли их складывать устно и какой прием следует применить. Короче говоря, при сложении десятичных дробей применяются, как правило, те же приемы, как и при сложении целых чисел. Пусть, например, нужно сложить 0,65 и 0,97. Для сложения целых чисел 65 и 97 принято округлять 97 до 100 и поступать так: $65 + 97 = 65 + 100 - 3 = 162$.

Складывались сотые доли, и в сумме получились сотые: $0,65 + 0,97 = 1,62$.

Заметим в связи с этим, что, хотя десятичные дроби пишутся без знаменателя, он всегда подразумевается. При сложении десятичных дробей полезно представлять себе знаменатель как бы написанным. Удобно при устном сложении тихо называть складываемые доли и их суммы по разрядам.

При устных вычислениях сказывается индивидуальность человека. Известно даже, что люди по особенностям памяти делятся в основном на два типа — зрительный и слуховой. Кроме того, иногда указываются еще промежуточные типы. Тихое произношение чисел при устном вычислении полезно почти для всех людей (за немногими исключениями), так как повышает внимание, но особенно полезно для людей слухового типа.

Сложим числа 0,64 и 0,25. Это наиболее типичный случай сложения.

Не обращая внимания на запятые, складываем 6 десятых и 2 десятых, получаем 8 десятых; затем складываем 4 сотых и 5 сотых, получаем 9 сотых. Объединяя полученные результаты, находим 8 (десятых) и 9 (сотых), или, иначе, 89 сотых, т. е. 0,89.

Сложение чисел 6,54 и 5,123.

Представим второе слагаемое как сумму $5,100 + 0,023$ и будем рассуждать так: 6 и 540 тысячных и 5 и 100 тысячных, получим 11 и 640 тысячных, да 0 и 023 тысячных:

всего 11,663. Здесь видно, что иногда полезно представить как сумму только второе слагаемое.

Когда слагаемых больше двух, следует иногда применять переместительный и сочетательный законы сложения.

54. Сложение десятичных дробей на счетах. Сложение десятичных дробей на счетах, как и на бумаге, по существу протекает так же, как и сложение на счетах целых чисел.

Иногда чем-нибудь отмечают проволоки, на которых будут откладываться дробные разряды. Если в слагаемых встречаются сотые, то на двух нижних проволоках будут откладываться сотые и десятые доли: тогда на раме между второй и третьей проволокой, считая снизу, помещается большой палец левой руки. Если среди слагаемых встречаются десятичные дроби с десятитысячными долями, то на четырех нижних проволоках откладываются десятитысячные, тысячные, сотые и десятые; тогда большой палец левой руки помещается на раме между четвертой и пятой проволокой.

Если первая косточка четвертой проволоки окрашена в особый цвет, что бывает на некоторых счетах, а в задачу входят только десятые, сотые и тысячные доли, то в этом случае нет надобности отмечать три нижних проволоки еще каким-нибудь особым знаком.

Действия на счетах рекомендуется выполнять не спеша, не гонясь за скоростью и не предлагая сразу больших чисел. Учитель без труда подберет несложные примеры для первоначальных упражнений. Вот несколько таких упражнений.

1. $0,24 + 0,53$.

В этом примере имеются только десятые и сотые. Значит, на нижней проволоке будут сотые, а на второй снизу — десятые доли. Отделить дробные разряды от целых можно большим пальцем левой руки; если это стесняет учащихся и они желают, чтобы обе руки были свободны, то можно взять полоску плотной бумаги шириной в 1 *см* и длиной в 6—8 *см*, согнуть ее в виде буквы «п» и навесить на раму между второй и третьей проволокой, считая снизу. На второй проволоке снизу откладываются 2 косточки (две десятых) и 5 косточек (пять десятых), итого получаем на второй снизу проволоке 7 десятых. Затем на первой проволоке снизу откладываем 4 косточки (четыре сотых) и 3 косточки (три сотых) — итого 7 сотых. Таким образом, $0,24 + 0,53 = 0,77$.

2. $5,3 + 5,7$.

Сложение протекает обычным порядком, в результате получается 10 косточек на второй и 10 косточек на первой проволоке. Они сдвигаются вправо и заменяются одной косточкой на третьей снизу проволоке и одной косточкой на второй внизу проволоке. Итого : $5,3 + 5,7 = 11$.

3. $1,23 + 7,6$.

Здесь у слагаемых неравное число знаков после запятой. На это и нужно обратить внимание учащихся. Итого: $1,23 + 7,6 = 8,83$.

Дальше следует предлагать постепенно усложняющиеся случаи. Например:

4. $2,72 + 10,273 = ?$

5. $142,345 + 21,44 = ?$

6. $321,543 + 34,2547 = ?$

55. Вычитание десятичных дробей. Вычитание всегда считается более трудным действием, чем сложение. Эти трудности вполне понятны учителю. Они коренятся исключительно в преодолении технических затруднений.

Нет никакого нового определения вычитания, а есть одно общее определение вычитания для целых и дробных чисел. Кроме того, не принято предлагать для заучивания наизусть какого-нибудь «правила» вычитания, а нужно в свободной форме описать процесс вычитания, в особенности многозначных чисел.

Ошибки в письменном вычитании чаще всего наблюдаются, когда нужно «занимать» единицу высшего разряда для того, чтобы сделать возможным вычитание единиц низшего разряда. Только здесь и лежит камень преткновения, и только на эту трудность должно быть обращено внимание учителя.

Однако число ошибок на вычитание десятичных дробей настолько велико, что нельзя пройти мимо них. Эти ошибки происходят не от непонимания механизма действия, а иногда от поспешности, иногда от невнимания, иногда от небрежности. Все эти ошибки могут быть устранены целесообразно подобранными и тщательно расположенными упражнениями. Всякий раз, когда ученик ошибся, необходимо выяснить, почему он ошибся. Это полезно всегда, но особенно при вычитании десятичных дробей.

Итак, нужно поставить себе за правило: а) постепенно усложнять примеры, б) выполнять упражнения в медленном темпе, в) проверять каждый решенный пример. Приведем образцы упражнений:

1. $9{,}86 - 6{,}43 = ?$

Здесь не приходится занимать единиц высших разрядов. Таких примеров нужно решить несколько, чтобы была достигнута уверенность в поразрядном вычитании. Предложенный пример легко решается «полуписьменно», т. е. он записывается на доске и в тетрадях, а ученики говорят ответ. Однако, чтобы было видно вычитание по разрядам, нужно подписать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы единицы одного разряда находились друг под другом:

Решение: $\begin{array}{r} -\,9{,}86 \\ 6{,}43 \\ \hline 3{,}43 \end{array}$ Проверка: $\begin{array}{r} +\,6{,}43 \\ 3{,}43 \\ \hline 9{,}86 \end{array}$

Иначе: $9{,}86 - 6{,}43 = 9\frac{86}{100} - 6\frac{43}{100} = 3\frac{43}{100} = 3{,}43.$

2. $5{,}678 - 2{,}105 = ?$

Решение: $\begin{array}{r} -\,5{,}678 \\ 2{,}105 \\ \hline 3{,}573 \end{array}$ Проверка: $\begin{array}{r} +\,2{,}105 \\ 3{,}573 \\ \hline 5{,}678 \end{array}$

3. $19{,}999 - 5{,}047 = ?$

Решение: $\begin{array}{r} -\,19{,}999 \\ 5{,}047 \\ \hline 14{,}952 \end{array}$ Проверка: $\begin{array}{r} +\,5{,}047 \\ 14{,}952 \\ \hline 19{,}999 \end{array}$

Эти и подобные им примеры нужно решать до тех пор, пока будут достигнуты безошибочные результаты. Можно, конечно, брать примеры с большим числом целых и десятичных (дробных) знаков. Например:

4 $987{,}8576 - 24{,}1234 = ?$

Решение: $\begin{array}{r} -\,987{,}8576 \\ 24{,}1234 \\ \hline 963{,}7342 \end{array}$ Проверка: $\begin{array}{r} +\,24{,}1234 \\ 963{,}7342 \\ \hline 987{,}8576 \end{array}$

Полезно предлагать примеры с неравным числом знаков, например:

5. $1268{,}3485 - 32{,}102 = ?$

Решение: $\begin{array}{r} -\,1268{,}3485 \\ 32{,}102 \\ \hline 1236{,}2465 \end{array}$ Проверка: $\begin{array}{r} +\,32{,}102 \\ 1236{,}2465 \\ \hline 1268{,}3485 \end{array}$

Наконец, необходимо перейти к примерам, где приходится «занимать» единицу высшего разряда.

6. 7,85 — 2,37.

Сделаем сначала вычитание в строчку:

$$(7 + 0,8 + 0,05) - (2 + 0,3 + 0,07) =$$
$$= (7 - 2) + (0,8 - 0,3) + (0,05 - 0,07).$$

Занимаем от 0,8 одну десятую и прибавляем ее к 0,05, тогда выражение примет вид:

$$(7 - 2) + (0,7 - 0,3) + (0,15 - 0,07) =$$
$$= 5 + 0,4 + 0,08 = 5,48.$$

Вычисление можно записать столбиком:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 7,85 \\ 2,37 \\ \hline 5,48 \end{array} \end{array} \qquad \text{Проверка:} \quad +\begin{array}{r} 2,37 \\ 5,48 \\ \hline 7,85 \end{array}$$

7. 29,843 — 6,356.

Здесь придется занимать дважды.

Перепишем пример столбиком:

$$-\begin{array}{r} 29,843 \\ 6,356 \\ \hline 23,487 \end{array} \qquad \text{Проверка:} \quad +\begin{array}{r} 6,356 \\ 23,487 \\ \hline 29,843 \end{array}$$

Этот пример следует разобрать подробно. Можно его переписать в строчку, можно заменить десятичные дроби обыкновенными Но каким бы путем ни пошел учитель, необходимо заботиться о том, чтобы не исчезла основная суть дела: вычитание десятичных дробей не отличается от вычитания целых чисел; заимствование единицы у числа старшего разряда ничего не содержит в себе нового.

8. 25,0213 — 6,350712.

Перепишем числа столбиком и уравняем нулями разряды уменьшаемого и вычитаемого.

$$-\begin{array}{r} {\scriptstyle 2910} \\ 25,021300 \\ 6,350712 \\ \hline 18,670588 \end{array} \qquad \text{Проверка:} \quad +\begin{array}{r} 6,350712 \\ 18,670588 \\ \hline 25,021300 \end{array}$$

Вычитание было выполнено следующим образом. На последнем месте справа стоят миллионные доли, но мы не можем вычесть 2 миллионных из 0, следует перейти к стотысячным. На месте стотысячных тоже стоит нуль, нужно обратиться к десятитысячным. Из трех десятитысячных берем одну и раздробляем ее в стотысячные, получаем 10 стотысячных; 9 стотысячных оставляем над разрядом стотысячных, а одну стотысячную раздробляем в миллионные, получаем 10 миллионных. Таким образом, в трех последних дробных разрядах у нас получилось: миллионных — 10, стотысячных — 9, десятитысячных — 2. Эти числа, чтобы не позабыть, надписаны сверху над соответствующими дробными разрядами уменьшаемого. Теперь можно выполнить вычитание обычным способом, как при вычитании целых чисел, начиная с низших разрядов (справа).

Итак, вычитание десятичных дробей выполняют так же, как и вычитание целых чисел, соблюдая следующее: подписывают вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы одинаковые разряды находились друг под другом и запятые стояли в одном и том же вертикальном столбце; справа от десятичных знаков приписывают, хотя бы мысленно, в уменьшаемом или в вычитаемом столько нулей, чтобы они имели одинаковое число цифр, затем выполняют вычитание по разрядам начиная с правой стороны и в полученной разности ставят *запятую в том же самом вертикальном* столбце, в каком она находится в уменьшаемом и вычитаемом.

Примерные упражнения на вычитание десятичных дробей:

1) 1,35 — 0,17 = ?	6) 126,4 — 83,76 = ?
2) 2,567 — 1,2345 = ?	7) 0,05 — 0,03604 = ?
3) 10,1908 — 5,234 = ?	8) 8,375 — 0,89745 = ?
4) 12,9876 — 9,129 = ?	9) 19,336 — 8,45 = ?
5) 14,1234 — 10,123 = ?	10) 12,345 — 6,7809 = ?

56. Устное сложение и вычитание десятичных дробей. Устное сложение и вычитание десятичных дробей рассматривается совместно потому, что при сложении часто применяется прием округления, требующий вычитания (ср. стр. 216).

1. 5,86 — 2,34 = ?

Это вычитание можно выполнять по разрядам, нужно только помнить уменьшаемое и вычитаемое: из 5 целых вычесть 2 целых — 3; из 8 десятых вычесть 3 десятых — 5 десятых; из 6 сотых вычесть 4 сотых — 2 сотых. Итого 3 целых, 5 десятых и 2 сотых, т. е. 3,52.

Однако удерживать в памяти отдельные разряды уменьшаемого и вычитаемого трудно, поэтому иногда удобно выполнять вычитание десятичных дробей, как вычитание целых чисел, а потом ставить запятую. Например:

2. 8,56 — 3,54 = ?

Будем говорить так: 856 минус 354; 800—300 будет 500; 56 — 54 будет 2, итого 502. Переходя к десятичным дробям, получим 5,02.

Чаще всего применяются все же какие-нибудь особые приемы вычитания. Например:

3. 0,356 — 0,258 = ?

356 — 256 = 100.

Зная, что 356 — 256 = 100, мы уменьшили вычитаемое на 2, отчего разность увеличилась на 2. Значит, полученная разность *100* на 2 единицы больше истинной и 0,356 — — 0,258 = 0,098.

Аналогичных примеров можно предложить несколько: 0,465 — 0,369 и другие в этом роде.

4. 9,35 — 4,97 = ?

Заменив данные десятичные дроби целыми числами: 935 — 497, поступим так. Округлим вычитаемое до 500, тогда *935 — 500 = 435*. Мы увеличили вычитаемое на 3 единицы. Если же мы увеличиваем вычитаемое на несколько единиц, то разность уменьшается на столько же единиц. Значит, полученная разность 435 на 3 единицы меньше истинной. Истинная разность будет 438. Переходя к десятичным дробям, будем иметь 9,35 — 4,97 = 4,38.

57. Сложение и вычитание десятичных дробей на счетах. Простейшие примеры сложения десятичных дробей на счетах были рассмотрены выше. Теперь рассмотрим более сложные случаи сложения и вычитания.

1. 32,48 + 21,56 = ?

Здесь у слагаемых по два десятичных знака, поэтому нужно оставить для них две нижних проволоки. Сложение протекает обычным путем, только при откладывании на первой проволоке 6 сотых у нас окажется, что на ней уже есть 8 сотых. Тогда мы на второй проволоке снизу положим одну косточку (10 сотых), а с первой проволоки сбросим 4 косточки (4 сотых). Для получения окончательного результата нужно сбросить со второй нижней проволоки 10 косточек и положить вместо них одну косточку на третьей проволоке снизу.

Итог: 32,48 + 21,56 = 54,04.

2. 56,783 + 28,19 = ?

Здесь нужно оставить для десятичных разрядов три нижние проволоки, потому что в первом слагаемом 3 знака после запятой. Обращаться к старшим разрядам придется, откладывая 8 единиц и 9 сотых второго слагаемого.

Итог: 56,783 + 28,19 = 84,973.

3. 243,56 — 91,72 = ?

Здесь нужно оставить для десятичных разрядов две нижние проволоки, потому что у уменьшаемого и вычитаемого по 2 знака после запятой. Обращаться к старшим разрядам придется при вычитании 9 десятков и 7 десятых.

Итог: 243,56 — 91,72 = 151,84.

4. 845,562 — 382,29 = ?

Здесь нужно оставить для десятичных разрядов три нижние проволоки, так как у уменьшаемого 3 знака после запятой. Обращаться к старшим разрядам придется, вычитая 8 десятков и 9 сотых.

Итог: 845,562 — 382,29 = 463,272.

58. Умножение десятичных дробей. При умножении обыкновенных дробей прежде всего был выяснен смысл умножения числа на дробь. После этого было последовательно изучено умножение целого числа на дробь, умножение дроби на дробь, умножение смешанных чисел. Этого порядка можно придерживаться и теперь, но следует напомнить ученикам смысл умножения на дробь и, если нужно, решить с ними 1—2 примера на обыкновенную дробь.

Рассмотрим теперь следующие случаи умножения: а) умножение десятичной дроби на степень числа 10; б) умножение целого числа на десятичную дробь; в) умножение десятичной дроби на целое число; г) умножение десятичной дроби на десятичную дробь.

Рассмотрев частные случаи, будет легко сделать общий вывод.

У м н о ж е н и е д е с я т и ч н о й д р о б и н а с т е п е н ь д е с я т и. Этот случай умножения уже рассмотрен в предыдущей главе, когда говорилось об увеличении десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Учащиеся должны знать, как выполняется такое умножение, но нужно с к а з а т ь, что увеличение десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз, сводящееся к умножению целого на целое, не равное единице, р а в н о с и л ь н о ее умножению на те же числа.

Затем учитель предлагает примеры на эту тему. Некоторые из них могут проверяться сложением на счетах. Можно, конечно, решать такие примеры, предлагаемые самими учащимися. Вот ряд последовательных примеров.

1) $0,25 \cdot 10 = 2,5$;
2) $3,125 \cdot 10 = 31,25$;
3) $0,253 \cdot 100 = 25,3$;
4) $12,375 \cdot 100 = 1237,5$;
5) $0,1234 \cdot 1000 = 123,4$;
6) $123,75 \cdot 1000 = 123\,750$;
7) $0,03582 \cdot 1000 = 35,82$.

Дальше можно предлагать умножение на 10 000 и т. д. В целях проверки полезно данные дроби писать со знаменателем.

Умножение целого числа на десятичную дробь. 1. Умножение целого числа на правильную десятичную дробь.

$$32 \cdot 0,3 = ?$$

Чтобы найти призведение этих чисел, мы можем рассуждать следующим образом: если множитель увеличить в 10 раз, то оба сомножителя будут целыми числами и мы можем тогда перемножить их по правилам умножения целых чисел. Но мы знаем, что при увеличении одного из сомножителей в несколько раз произведение увеличивается во столько же раз. Значит, число, которое получится от умножения целых сомножителей, т. е. 32 на 3, будет в 10 раз больше, чем следует; чтобы получить верное произведение, нужно найденное произведение уменьшить в 10 раз. Здесь придется выполнить один раз умножение на 10 и один раз деление на 10; но умножение и деление на 10 выполняются перенесением запятой вправо и влево на один знак. Поэтому нужно во множителе перенести запятую вправо на один знак, затем перемножить полученные целые числа: $32 \cdot 3 = 96$. Это мы нашли произведение 32 на 3, а произведение 32 на 0,3 будет в 10 раз меньше. Для уменьшения числа в десять раз нужно запятую в нем перенести на один знак влево. Таким образом, получится $32 \cdot 0,3 = 9,6$.

Для вывода правила, а также для его проверки можно также десятичную дробь написать со знаменателем и выполнить действие по правилу умножения обыкновенных дробей:

$$32 \cdot 0,3 = 32 \cdot \frac{3}{10} = \frac{32 \cdot 3}{10} = \frac{96}{10} = 9,6.$$

2. Умножение целого числа на неправильную десятичную дробь.

$$28 \cdot 4{,}3 = ?$$

Увеличим множитель в 10 раз и выполним умножение полученных целых чисел: $28 \cdot 43 = 1204$.

Полученное произведение в 10 раз больше произведения 28 на 4,3. Чтобы получить это произведение, нужно 1204 уменьшить в 10 раз:

$$28 \cdot 4{,}3 = 120{,}4.$$

Здесь также можно было вывести правило с помощью обыкновенных дробей;

$$32 \cdot 4{,}3 = 32 . \frac{43}{10} = \frac{32 \cdot 43}{10} = \frac{1204}{10} = 120{,}4,$$

а также проверить этим первый способ вывода.

Рассмотренные примеры на умножение десятичных дробей, записанных по десятичной системе, объединяются одной общей мыслью: *умножение десятичных дробей приводится к умножению целых чисел и к соответствующей постановке запятой.*

Другими словами, при умножении нужно выполнить необходимые вычисления, не обращая внимания на запятые, и только в произведении поставить запятую, где следует. Отсюда видно, что умножение десятичных дробей проще умножения обыкновенных дробей: умножая обыкновенные дроби, нужно отдельно перемножать числители и отдельно знаменатели, что довольно утомительно, если они выражены большими числами. При умножении десятичных дробей перемножаются только целые числа — числители, а затем только ставится запятая.

Чтобы отбрасывание запятой не повело к смешению учащимися дробей с целыми числами, учитель может, во-первых, выводить правила из соответствующих правил действий над обыкновенными дробями, записывая десятичные дроби при выводе в виде обыкновенных; при выводе первым путем, указанным в тексте, прибегать к проверке полученных результатов, заменяя данные десятичные дроби обыкновенными дробями. Учитель может выбрать один из двух указанных путей, которые оба приводят к замене умножения дробей умножением целых чисел с последующим делением на степени 10, сводящемуся к переносу запятой.

Мы рассмотрели два примера на умножение десятичных дробей: 32 · 0,3 и 28 · 4,3.

Тот же способ будет применяться и в остальных случаях. С точки зрения методики обучения важно, чтобы ученики **сами** применяли этот способ, чтобы они проявляли **свою** активность.

Если учитель покажет один-два раза этот способ и, кроме того, подчеркнет, что в математике прием сведения последующего к предыдущему весьма распространен, то новые примеры многие будут уже решать самостоятельно.

После этого нужно решить несколько более усложненных примеров того же типа.

$$67 \cdot 0{,}84 = ?$$

Здесь сохранен тот же самый тип примера, но во множителе фигурируют сотые доли. Цель: показать, что прежний способ не изменяется, какие бы десятичные доли ни были даны. Пример:

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times\ 0{,}84 \\ \hline 268 \\ +\ 536 \\ \hline 56{,}28 \end{array}$$

При записывании сомножителей столбиком можно пропустить запятую и написать целые числа, а потом в произведении поставить запятую.

Еще пример: 126 · 0,342 = ?

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times\ 0{,}342 \\ \hline 252 \\ +\ 504 \\ 378 \\ \hline 43{,}092 \end{array}$$

Случай по существу ничем не отличается от предыдущего. Перемножаем данные числа как целые и отделяем запятой три десятичных знака.

Чрезвычайно важно, чтобы ученики оценивали полученный результат. Способы оценки могут быть самые разнообразные, и чем они остроумнее, тем лучше. Можно ограничиться даже очень грубой «прикидкой», но важно, чтобы оценка о чем-то говорила. Например, в предпоследнем упражнении можно взять вместо 67 округленное число 70 и умножить его на 0,8. Сразу видно, что получается 56. В последнем упражнении 126 умножается на число, близкое к $\frac{1}{3}$, а произведение будет немного больше 40.

Ниже мы даем несколько примерных упражнений на умножение, которыми полезно воспользоваться.

Умножение десятичной дроби на целое число. Рассмотрим пример: $3{,}6 \cdot 9 = ?$

Комкать решение этого примера не следует; напротив, нужно провести все необходимые здесь рассуждения: увеличим множимое в 10 раз, после чего оно станет целым числом 36; умножив это число на 9, получим $36 \cdot 9 = 324$.

Чтобы получить произведение 3,6 на 9, нужно найденное произведение уменьшить в 10 раз, т. е.

$$3{,}6 \cdot 9 = 32{,}4.$$

Сделаем проверку:

$$3{,}6 \cdot 9 = 3\frac{6}{10} \cdot 9 = \frac{36}{10} \cdot 9 = \frac{36 \cdot 9}{10} = \frac{324}{10} = 32{,}4.$$

Можно было свести дело к целым числам, н а ч а в с записи десятичного множимого в виде обыкновенной дроби (см. последний ряд равенств).

После этого полезно рассмотреть пример, в котором будут сотые доли во множимом.

$$4{,}23 \cdot 12 = ?$$

Теперь, может быть, ученики сами догадаются увеличить множимое в 100 раз. Учителю сто́ит выждать, пока ученики сами подскажут ход решения.

$$423 \cdot 12 = 5076.$$

Искомое произведение будет в 100 раз меньше.

$$4{,}23 \cdot 12 = 50{,}76.$$

Есть ли у учеников ч у в с т в о того, что это произведение верно не только по правилам, но и по здравому смыслу? Результат умножения можно было бы заранее «прикинуть» в уме. Но если такая «прикидка» не была сделана, то ее не поздно сделать и теперь.

В самом деле, посмотрим, что мы умножали:

$$4{,}23 \cdot 12 = (4 + 0{,}23) \cdot 12 = 4 \cdot 12 + 0{,}23 \cdot 12 =$$
$$= 48 + 2{,}76 = 50{,}76.$$

Такого рода «прикидку», или, если угодно, «проверку по здравому смыслу», нужно осуществлять постоянно. Нужно так воспитать учеников, чтобы они, получив для решения этот пример, сразу сказали: «Здесь получится немного больше 48». Иначе может получиться так, что ученики, получив результат, перестанут им интересоваться, а он может оказаться по недосмотру совершенно неверным.

Умножение десятичной дроби на десятичную дробь. Этот случай умножения следует рассмотреть на особо подобранных примерах, расположенных в порядке возрастающей трудности.

$1{,}2 \cdot 3{,}4 = ?$

Увеличим множимое и множитель в 10 раз, отчего произведение увеличится в 100 раз. Перемножим числа как целые, а потом уменьшим произведение в 100 раз, перенеся запятую на два десятичных знака влево: $12 \times 34 = 408$; $1{,}2 \times 3{,}4 = 4{,}08$.

Полученный результат следует проверять прикидкой.

Забота учителя одна: убедить учеников в том, что, несмотря на многообразие примеров, умножение десятичных дробей всегда приводится к умножению целых чисел и затем к соответствующему перенесению запятой.

Нужно не спеша усложнять примеры, хотя бы в таком порядке: $2{,}42 \cdot 3{,}6$; $3{,}24 \cdot 2{,}56$; $21{,}245 \cdot 3{,}28$; $3{,}426 \times 1{,}523$; $12{,}235 \cdot 0{,}293$.

Рассмотрим хотя бы третий пример: $21{,}245 \cdot 3{,}28$.

Не обращая внимания на запятые, временно увеличим множимое в 1000 раз, а множитель — в 100 раз, отчего произведение увеличится в 100 000 раз.

$$21245 \cdot 328 = 6\,968\,360.$$

Принимая во внимание, что полученное произведение в 100 000 раз больше истинного, и уменьшая произведение в 100 000 раз надлежащей постановкой запятой, имеем:

$$21{,}245 \cdot 3{,}28 = 69{,}68360 = 69{,}6836.$$

Проверим, применяя обыкновенные дроби:

$$21{,}245 \cdot 3{,}28 = 21\frac{245}{1000} \cdot 3\frac{28}{100} = \frac{21245}{1000} \cdot \frac{328}{100} = \frac{6968360}{1000\,000} = \frac{696836}{10\,000} = 69{,}6836.$$

Таким образом, чтобы перемножить два десятичных числа, достаточно, не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа и в произведении отделить запятой с правой стороны столько десятичных знаков, сколько их во множимом и во множителе вместе.

Примерные упражнения на умножение десятичных дробей: 8 ·0,4; 24 · 0,12; 1672 · 0,014; 0,8 · 9; 0,32 · 15; 0,035 · 12; 0,2497 · 30; 1,8 · 3,4; 3,2 · 2,25; 1,6 · 0,025; 4,563 · 3,457; 0,00125 · 8,8; 679,85 · 0,00056; 150,3205 × × 0,087218; 0,12345 · 0,016.

59. Умножение с помощью таблиц. Во многих практитических вычислениях при умножении десятичных дробей применяют таблицы. Чтобы добиться необходимой постепенности в этом деле, нужно сначала воспользоваться таблицами умножения двузначных чисел. Потом можно перейти к более сложным таблицам. Существуют печатные таблицы умножения двузначных чисел. О таких таблицах мы уже говорили при изучении умножения целых чисел. Рассмотрим и здесь частичку такой таблицы. Рекомендуется самим учащимся составлять таблицы под руководством учителя.

53

1	53	11	583	21	1113	31	1643
2	106	12	636	22	1166	32	1696
3	159	13	689	23	1219	33	1749
4	212	14	742	24	1272	34	1802
5	265	15	795	25	1325	35	1855
6	318	16	848	26	1378	36	1908
7	371	17	901	27	1431	37	1961
8	424	18	954	28	1484	38	2014
9	477	19	1007	29	1537	39	2067
10	530	20	1060	30	1590	40	2120

1. Умножить 53 на 5.

В качестве первого примера мы взяли умножение целого числа на целое. Произведение таких чисел мы находим в таблице в готовом виде без поправок. Множимое 53 напечатано над таблицей, множитель 5 напечатан в крайнем левом столбце, произведение найдем рядом со множителем вправо от него во втором (вертикальном) столбце.

Значит, 53 · 5 = 265.

Теперь представим себе, что множитель выражается дробным числом 0,5, т. е. нужно умножить 53 · 0,5 = ?

Сравним предыдущий пример с данным. В обоих случаях множимое равно 53, а множитель во втором случае в 10 раз меньше, чем в первом, значит, и произведение во втором случае в 10 раз меньше, чем в первом. Ученики уже должны знать, почему это так.

Значит, $53 \cdot 0{,}5 = 26{,}5$.

Таким образом, умножение на 0,5 можно выполнить с помощью той самой таблички, какую мы применяли при умножении числа на 5. Нужно только помнить, что в произведении следует отделить запятой столько знаков, сколько их было во множителе. Ученики, конечно, должны понимать, что отделение запятой одного знака или перенесение запятой влево на один знак равносильно делению числа на 10 или уменьшению его в 10 раз.

2. Найдем теперь произведение 53 на 1,5, т. е. $53 \cdot 1{,}5 = ?$

Будем искать в таблице произведение 53 на 15; 53 находится в таблице сверху, а 15 — в третьем (вертикальном) столбце слева; произведение — в четвертом столбце правее множителя. По таблице $53 \cdot 1{,}5 = 79{,}5$.

3. Мы можем и во множимом взять не целое, а дробное число. Например: $0{,}53 \cdot 2{,}4$.

Сначала найдем в таблице произведение 53 на 24. Это будет 1272. Но так как мы увеличили множимое и множитель в общей сложности в 1000 раз, то и полученное произведение оказалось в 1000 раз больше истинного. Поэтому мы должны уменьшить это произведение в 1000 раз.

$$0{,}53 \cdot 2{,}4 = 1{,}272.$$

Существуют таблицы, устроенные несколько сложнее. Их довольно много, и преподаватель может воспользоваться ими по своему выбору. В частности, можно указать небольшую книжку П. Н. Горкина «Таблицы умножения и деления» (Госстатиздат, М., 1955). Воспользуемся ею.

4. $0{,}62 \cdot 5{,}4$.

Найдем сначала в таблице произведение 62 на 54. Как его найти? Множимое напечатано сверху жирным шрифтом. Первая цифра множителя (5) напечатана в средней части таблицы в крайнем левом столбике, единицы множителя — в средней части таблицы в верхней строке. Первые три цифры произведения напечатаны на пересечении указанных столбца и строки, а последняя цифра произведения — под тремя первыми в нижней ненумерованной строке. Таким образом, $62 \cdot 54 = 3348$.

Но это произведение в 1000 раз больше, чем произведение данных чисел, поэтому $0{,}62 \cdot 5{,}4 = 3{,}348$.

Наконец, можно воспользоваться более полными таблицами умножения О'Рурка. Разобраться в этих таблицах нетрудно, тем более что вначале имеются правила пользования таблицами. На каждой странице имеются три отдела, над каждым из них жирным шрифтом напечатано множимое, например 113, 114, 115 или 515, 516, 517. Эти множимые начинаются с числа 11 и оканчиваются числом 999.

Рассмотрим пример:

$$4{,}52 \cdot 0{,}46 = ?$$

Найдем сначала произведение 452 на 46; оно будет в 10 000 раз больше искомого, потому что, выполняя такое умножение, мы увеличиваем множимое в 100 раз и множитель в 100 раз и, следовательно, произведение в 10 000 раз. Найдем страницу, в которой сверху напечатано число 452 (154-ю по изданию 1949 г.). Это множимое. Множитель составляется так: десятки 40 ищем в верхней строке, а единицы 6 — в крайнем левом столбце. Проведем мысленно прямые вниз от числа 40 и вправо от числа 6. На пересечении этих прямых увидим искомое произведение 452 на 46, а именно 20 792. Уменьшив его в 10 000 раз, получим:

$$4{,}52 \cdot 0{,}46 = 2{,}0792.$$

Первые примеры умножения с помощью таблиц нужно проверять непосредственным умножением и хотя бы грубой «прикидкой».

60. Деление десятичных дробей. При изучении деления дробей полезно рассмотреть все возможные частные случаи этого действия. Можно рассматривать эти частные случаи в таком порядке: деление числа на степень десяти; деление целого числа на целое; деление десятичной дроби на целое число; деление целого числа на десятичную дробь; деление десятичной дроби на десятичную дробь.

Мы дробим деление для того, чтобы избежать нескольких трудностей подряд; основная же цель в том, чтобы в разнообразном подметить общее.

Деление числа на степень десяти. Этот случай деления сводится к уменьшению десятичной дроби в 10, 100, 1000 и т. д. раз, что учащиеся должны знать. Но в каждом классе найдутся такие ученики, которые не отождествляют деление на целое число (исключая единицу) с уменьшением делимого в несколько раз. Учитель, подчеркнув тождественность, может предложить ряд числовых конкретных примеров:

$$24{,}5 : 10 = 2{,}45,$$
$$135{,}6 : 10 = 13{,}56.$$

Ученики могут проверить эти примеры вычислением на счетах:

$$123{,}4 : 100 = 1{,}234, \qquad 2468{,}5 : 1000 = 2{,}4685,$$
$$234{,}56 : 100 = 2{,}3456, \qquad 100{,}102 : 1000 = 0{,}100102$$

и т. д.

Деление целого числа на целое. На первый взгляд может показаться, что этот пункт относится к целым числам и ему не место среди десятичных дробей. Однако это верно в тех случаях, когда делимое кратно делителю, в противном же случае частное может быть во многих случаях выражено десятичной дробью, и поэтому уместно рассматривать такое деление здесь.

Рассмотрим примеры:

1. $245 : 2 = ?$

Делимое число нечетное, поэтому на 2 не разделится. Будем искать частное в виде десятичной дроби.

$$\begin{array}{r|l}
-245 & 2 \\
\underline{2} & \overline{122{,}5} \\
-4 & \\
\underline{4} & \\
-5 & \\
\underline{4} & \\
-10 & \\
\underline{10} & \\
0 &
\end{array}$$

После того как мы разделили на 2 число 5, получился остаток, равный целой единице. Ставим в частном после двойки запятую и раздробляем единицу в 10 десятых долей. Получаем в остатке 10 десятых. Деля их на 2, получаем в частном 5 десятых.

2. $847 : 4 = ?$

По признаку делимости видно, что 847 на 4 не разделится. Будем искать частное в виде десятичной дроби.

$$\begin{array}{r|l}
-847 & 4 \\
\underline{8} & \overline{211{,}75} \\
-4 & \\
\underline{4} & \\
-7 & \\
\underline{4} & \\
-30 & \\
\underline{28} & \\
-20 & \\
\underline{20} & \\
0 &
\end{array}$$

После того как мы разделили на 4 число 7, у нас получился остаток, равный трем целым единицам. Ставим в частном после единицы запятую и раздробляем остаток 3 в десятые доли. Получаем в остатке 30 десятых Деля их на 4, получаем в частном 7, а в остатке 2 десятых. Раздробляем их в сотые доли и получаем 20 сотых. Делим их на 4 и получаем в частном 5.

3. $5481 : 20 = ?$

Будем искать частное в виде десятичной дроби.

```
_5481 | 20
 40   |------
 ---  | 274,05
_148
 140
 ---
 _81
  80
  ---
 _100
  100
  ---
    0
```

После получения в частном цифры 4 ставим запятую и находим остаток, равный единице. Раздробляем единицу в десятые доли, получаем 10 десятых; но так как деление невозможно, то раздробляем 10 десятых в сотые, получаем 100 сотых Делим на 20, получаем в частном 5 сотых.

Д е л е н и е д е с я т и ч н о й д р о б и н а ц е л о е ч и с л о.

1. $2{,}46 : 2 = ?$

```
2,46 | 2
     |-----
     | 1,23
```

Делим на 2 по порядку сначала целые, потом десятые доли и, наконец, сотые доли.

2. $32{,}46 : 3 = ?$

```
_32,46 | 3
 3     |------
 --    | 10,82
 _24
  24
  --
  _6
   6
   -
   0
```

Мы разделили 3 десятка на 3, затем стали делить 2 единицы на 3; так как цифра делимого (2) меньше делителя (3), то пришлось в частном поставить 0; далее, мы снесли к остатку 4 десятых и разделили 24 десятых на 3, получили в частном 8 десятых и, наконец, разделили 6 сотых.

3. $1{,}2345 : 5 = ?$

```
_1,2345 | 5
 10     |-------
 --     | 0,2469
 _23
  20
  --
  _34
   30
   --
   _45
    45
    --
```

Здесь в частном на первом месте получился 0 целых на том основании, что 1 меньше 5; раздробив 1 в десятые, получаем в частном 2 десятых и продолжаем деление.

Изучив деление целого числа на целое и десятичной дроби на целое число, следует предложить учащимся сформулировать, хотя бы своими словами (но, конечно, грамотно), правило деления десятичной дроби на целое число.

Д е л е н и е ц е л о г о ч и с л а н а д е с я т и ч н у ю д р о б ь. Рассмотрим последовательно примеры:

1. $32 : 0{,}4 = ?$

Как решить этот пример? Нужно свести это деление к предыдущему виду деления. Что это значит? Нужно сделать делитель целым числом, увеличив его в 10 раз. Что потом нужно сделать с делимым, чтобы не изменить частного? Увеличить тоже в 10 раз. Примерно такого рода вопросы нужно поставить ученику, чтобы добиться сознательности деления. Выполним деление:

$$32 : 0,4 = 320 : 4 = 80.$$

Почему частное оказалось больше делимого?

2. $72 : 0,18 = ?$

Этот пример совершенно подобен предыдущему, только в дробном делителе имеются сотые доли. Учащиеся должны сообразить, что здесь нужно увеличить делитель в 100 раз (и соответственно делимое). Выполним деление:

$$72 : 0,18 = 7200 : 18 = 400.$$

Следовательно, можно написать $72 : 0,18 = 400$. Почему частное больше делимого? Что обозначает число 400? Каким действием можно проверить это деление?

Я хочу сделать грубую проверку (прикидку) частного и предлагаю вместо 0,18 взять в делителе 0,2. Что у меня получится в частном, больше 400 или меньше? Сколько?

3. $136 : 0,125 = ?$

Здесь в делителе тысячные доли. Учащиеся сами должны подсказать путь решения.

$$136 : 0,125 = 136\,000 : 125 = 1088.$$

Ученики должны тщательно выполнить это деление и осмыслить каждую цифру частного. Почему на втором месте в частном получился нуль? Почему частное больше делимого? Какой обыкновенной дроби равна дробь 0,125? Что означает число 1088? Какой оно имеет смысл? Что мы ищем, когда делим 136 на 0,125? Какое число получится в произведении, если мы число 136 умножим на 8?

Деление десятичной дроби на десятичную дробь.

1. $2,46 : 0,2 = ?$

Мы уже умеем делить десятичную дробь на целое число, и поэтому, естественно, поставить вопрос, нельзя ли этот новый случай деления свести к предыдущему? В свое время нами рассматривалось замечательное свойство частного: оно остается без изменения при одновременном увеличении или уменьшении делимого и делителя в одинаковое число раз. Мы без труда выполнили бы деление предложенных нам чисел, если бы делитель был целым числом.

Для этого достаточно увеличить его в 10 раз, а для получения правильного частного необходимо во столько же раз, т. е. в 10, увеличить и делимое, тогда деление данных чисел заменится делением:

$$24{,}6 : 2,$$

причем никаких поправок в частном делать уже не придется. Почему? Выполним это деление:

```
_24 6 | 2
 2    |----
 --   | 12,3
 _4
  4
  --
  _6
   6
  --
```

Значит, можно написать $2{,}46 : 0{,}2 = 12{,}3$.

2. $1{,}25 : 1{,}6 = ?$

```
_12,5  | 16
 11,2  |-------
 ----  | 0,7812
 _1 30
  1 28
  ----
   _20
    16
   ---
   _40
    32
   ---
   _80
    80
   ---
```

Ученики должны сообразить, что в данном случае необходимо увеличить делитель (1,6) в 10 раз, а чтобы частное не изменилось, увеличить в 10 раз и делимое. Теперь дело свелось к делению десятичной дроби на целое: оно учащимся уже известно.

Нужно обратить внимание на следующее:

а) нет никакой надобности при делении добиваться того, чтобы и делимое сделалось целым числом; целым должен стать делитель, делимое же может оставаться и целым, и дробным числом;

б) когда в частном не получается целых, то на их месте пишется 0 целых;

в) когда после снесения к остатку цифры делимого получается число, которое не делится на делитель, то в частном пишется 0;

г) когда после снесения последней цифры делимого деление не оканчивается, то, приписывая к остаткам нули, продолжают деление;

д) если в делимом целое число, то при делении на десятичную дробь, его увеличивают, приписывая к нему нули;

е) в частном получается тот разряд, какой мы делим: делим целые, получаем в частном целые, делим десятые доли, получаем десятые и т. д.

Итак, чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно отбросить в **д е л и т е л е** запятую, а затем увеличить делимое во столько раз, во сколько увеличился делитель при отбрасывании в нем запятой, после чего выполнить деление по правилу деления на целое число.

Примерные упражнения на деление десятичных дробей:

1) $4{,}2 : 0{,}35 = ?$	6) $207{,}1845 : 9 = ?$
2) $63{,}44 : 13 = ?$	7) $25432 : 8 = ?$
3) $9 : 0{,}032 = ?$	8) $3{,}1556 : 0{,}425 = ?$
4) $0{,}2125 : 0{,}5 = ?$	9) $0{,}09 : 0{,}0032 = ?$
5) $33{,}3546 : 0{,}115 = ?$	10) $0{,}07 : 0{,}008 = ?$

61. Приближенное частное. Мы изучали деление десятичных дробей. Во всех рассмотренных нами примерах деление доводилось до конца, т. е. получалось точное частное. Однако в огромном числе случаев точное частное не может быть получено, как бы далеко мы ни продолжали деление. Вот один из таких случаев. Разделим 0,7 на 13.

```
 0,7    | 13
_70     |----------
 65     | 0,05384615
 --
 _50
  39
  --
 _110
  104
  ---
   _60
    52
    --
    _80
     78
     --
     _20
      13
      --
      _70
       65
       --
        5
```

Мы уже получили достаточно много цифр в частном, а деление еще не окончилось. Кроме того, совершенно очевидно, что оно никогда не окончится, так как в остатках у нас начинают появляться цифры, которые встречались уже раньше, поэтому и в частном уже появилась цифра 5, которая стоит у нас на третьем месте под чертой, очевидно, что вслед за ней появится цифра 3 и т д. Таким образом, нет оснований предполагать, что, продолжая деление, мы когда-нибудь доведем его до конца. Значит, при делении десятичных дробей возможны случаи, когда частное не может быть выражено десятичной дробью. В таких случаях прерывают деление и ограничиваются несколькими первыми цифрами частного. Такое частное называется приближенным частным. Как при этом нужно выполнять деление, мы покажем на примерах.

Пусть требуется 25 разделить на 3. Очевидно, что точного частного, выраженного десятичной дробью или целым числом, от такого деления получиться не может, поэтому мы будем искать приближенное частное:

$$25 : 3 = 8, \text{ остаток } 1.$$

Приближенное частное равно 8, оно, конечно, меньше истинного частного, потому что есть остаток 1. Чтобы получить т о ч н о е частное, нужно к данному приближенному частному 8 прибавить дробь, которая получится от деления остатка на 3; это будет дробь $\frac{1}{3}$. Значит, точное частное выразится смешанным числом $8\frac{1}{3}$. Так как $\frac{1}{3}$ представляет собой правильную дробь (меньшую 1), то, отбрасывая ее, мы сделаем ошибку, которая меньше 1. Частное 8 будет приближенным частным с точностью до 1 с недостатком. Если мы вместо потери $\frac{1}{3}$ увеличим наше частное до 9, то мы тоже допустим погрешность, которая будет меньше 1, так как мы прибавим не целую 1, а только $\frac{2}{3}$. Такое частное будет приближенным частным с точностью до 1 с избытком.

Возьмем теперь другой пример:

$$0{,}93 : 0{,}7 = ?$$

Перепишем этот пример и начнем деление: мы получили первую цифру частного (1). Если нас интересует грубый приближенный ответ, то одной цифры достаточно. Мы можем сказать, что нашли приближенное частное с точностью до 1, потому что дальше, если мы разделим остаток на 7, получаются десятые доли, которые будут меньше 1. Так как у нас в задаче даны еще и десятые доли, то ограничиться в частном целыми неудобно. Поэтому мы продолжим деление. Мы нашли первый десятичный знак. Здесь можно прекратить деление и принять за частное число 1,3. В этом случае погрешность будет меньше одной десятой (0,1), потому что истинное частное больше 1,3 и меньше 1,4. Разность же между этими числами равна 0,1. Чтобы убедить учеников в том, что 1,3 меньше истинного частного, а 1,4 больше истинного частного, нужно проверить деление умножением, т. е. умно-

$$\begin{array}{r|l} -9{,}3 & 7 \\ \underline{7} & \overline{1} \\ 2\,3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -9{,}3 & 7 \\ \underline{7} & \overline{1{,}3} \\ -2\,3 & \\ \underline{2\,1} & \\ 2 & \end{array}$$

жить 1,3 на 0,7 (получится 0,91) и 1,4 на 0,7 (получится 0,98). Вывод отсюда ясен.

Продолжим деление еще немного, найдем еще второй десятичный знак. После нахождения десятых у нас в остатке получилось 2 (десятых). Раздробляем их в сотые доли, получаем 20 (сотых). Делим их на 7 и получаем в частном 2 (сотых).

$$\begin{array}{r|l} -\,9{,}3 & 7 \\ \underline{7} & \overline{1{,}32} \\ -\,2\,3 & \\ \underline{2\,1} & \\ -\,20 & \\ \underline{14} & \\ 6 & \end{array}$$

Мы нашли второй десятичный знак. Прекратим здесь деление, но так как у нас получился очень большой остаток (6), то мы еще дополнительно выясним, следует ли нам брать в частном 1,32 или 1,33.

Рассмотрим в связи с этим третий пример. Пусть требуется 27 разделить на 8. Так как и здесь не получится точного частного, выраженного целым числом, то мы будем искать приближенное частное:

$$27 : 8 = 3, \text{ остаток } 3.$$

Здесь погрешность равна $\frac{3}{8}$, она меньше 1, значит, приближенное частное (3) найдено с точностью до 1 с недостатком. Продолжим деление: раздробим остаток 3 в десятые доли, получим 30 десятых, разделим их на 3.

$$\begin{array}{r|l} -\,27 & 8 \\ \underline{24} & \overline{3{,}3} \\ -\,30 & \\ \underline{24} & \\ 6 & \end{array}$$

Мы получили в частном на месте десятых 3 и в остатке 6 десятых. Если мы в частном ограничимся числом 3,3, а остаток 6 отбросим, то мы допустим погрешность, меньшую одной десятой. Почему? Потому что точное частное получилось бы тогда, когда мы прибавили бы к 3,3 еще результат деления 6 десятых на 8; от этого деления получилось бы $\frac{6}{80}$, что составляет меньше одной десятой. (Проверьте!). Таким образом, если в частном мы ограничимся десятыми долями, то можно будет сказать, что мы нашли частное с точностью до одной десятой.

$$\begin{array}{r|l} -\,27 & 8 \\ \underline{24} & \overline{3{,}37} \\ -\,30 & \\ \underline{24} & \\ -\,60 & \\ \underline{56} & \\ 4 & \end{array}$$

Продолжим деление, чтобы найти еще один десятичный знак. Для этого раздробим 6 десятых в сотые доли и получим 60 сотых, разделим их на 8.

В частном на третьем месте получилось 7 и в остатке 4 сотых, если мы их отбросим, то допустим погрешность, меньшую одной сотой, потому что 4 сотых, деленные на 8, составляют меньше одной сотой $\left(\frac{4}{100} : 8 = \frac{1}{200}\right)$. В таких случаях говорят, что частное найдено с точностью до одной сотой (с недостатком).

В примере, который мы сейчас рассматриваем, можно получить точное частное. Для этого достаточно последний остаток 4 сотых раздробить в тысячные и выполнить деление на 8. Однако в огромном большинстве случаев получить точное частное невозможно и приходится ограничиваться его приближенными значениями. Такой пример мы сейчас и рассмотрим:

$$40 : 7 = 5{,}71428571\ldots$$

Дадим объяснения к этому примеру. Мы взяли частное с восемью дробными знаками, но мы могли и не искать такой большой точности, а ограничиться лишь целой частью частного, т. е. числом 5 (точнее 6); для большей точности можно было бы прибавить сюда десятые доли и взять 5,7; если и эта точность почему-либо недостаточна, то можно остановиться на сотых и взять 5,71 и т. д. Выпишем отдельные частные и назовем их:

первое	приближен.	частное	с	точн.	до	единицы:	6
второе	»	»	»	»	»	0,1	5,7
третье	»	»	»	»	»	0,01	5,71
четвертое	»	»	»	»	»	0,001	5,714
пятое	»	»	»	»	»	0,0001	5,7143
шестое	»	»	»	»	»	0,00001	5,71429
седьмое	»	»	»	»	»	0,000001	5,714286
и т. д.							

Таким образом, чтобы найти приближенное частное с точностью до какого-нибудь, например третьего десятичного знака, т. е. до одной тысячной, прекращают деление, как только находят этот знак и увеличивают его на 1, если ожидаемый четвертый знак частного 5 или больше.

Примерные упражнения на деление:

1) $12{,}45 : 0{,}5 = ?$
2) $7{,}4339 : 0{,}0079 = ?$
3) $5{,}4 + 8{,}2 : 0{,}5 = ?$
4) $(0{,}008 + 0{,}992) : (3 - 1{,}4) = ?$
5) $10 : 0{,}02 - 1{,}69 : 65 + 2{,}89 : 17 = ?$
6) 12,84 : 62,3 (с точностью до одной десятой)
7) 123,5 : 28 (с точностью до одной сотой)
8) 345,6 : 15,2 (с точностью до одной тысячной)

62. Деление десятичных дробей с помощью таблиц. Это деление, как правило, выполняется с помощью таблиц *умножения*. А отсюда вытекает следующее: если при умножении мы всегда можем найти в таблицах множимое и множитель, то при делении мы лишь в редких случаях можем найти в *таблицах точное делимое. В большинстве* случаев приходится ограничиваться приближенным делимым. Это очень важное обстоятельство необходимо помнить в процессе преподавания.

Мы уже говорили, что при умножении по таблицам мы ищем один из сомножителей сверху; он напечатан жирным шрифтом. При делении в верхней части страницы мы будем иметь делитель. Рассмотрим примеры начиная с целых чисел.

1. 6237 : 63 = ?

Ищем в таблицах умножения двузначных чисел 63. В средней части таблицы на этой странице ищем сначала первые три цифры делимого 623, а под ними четвертую цифру 7. Значит, мы нашли делимое. Частное, которое ему соответствует, будет 99, итак

$$6237 : 63 = 99.$$

2. 3825 : 58 = ?

Ищем в таблице страницу, на которой в заголовке стоит 58. В средней части таблицы на этой странице ищем сначала три первые цифры делимого 382 и под ними четвертую цифру. Но цифры 5 в таблице нет, а имеется 8. Так как разница между данным делимым и числом, найденным в таблице, всего 3 единицы, то можно написать приближенное равенство:

$$3825 : 58 \approx 66.$$

В таблице указываются способы уточнения частного, но нам кажется, что на данном этапе они были бы трудными.

3. 27348 : 318 = ?

Ищем в таблицах О'Рурка страницу, на которой в заголовке стоит 318. Среди пятизначных чисел в таблице отыскиваем 27 348, а затем ищем число, которому такое произведение соответствует; 27 348 стоит на пересечении столбца, идущего от 80, и строки, идущей от 6. Значит, искомое число будет 86, т. е.

$$27348 : 318 = 86.$$

4. $17\,941 : 23{,}3 = ?$

Ищем в таблицах О'Рурка страницу, на которой в заголовке стоит 233. Среди пятизначных чисел в таблице отыскиваем 17 941, а затем ищем число, которому такое произведение соответствует. Это будет число 77. Но число 77 получается от деления 17 941 на 233. Наш делитель (23,3) в 10 раз меньше табличного, значит, частное будет в 10 раз больше табличного, т. е.

$$17\,941 : 23{,}3 = 770.$$

5. $33418 : 3{,}84 = ?$

Ищем в таблицах О 'Рурка страницу, на которой в заголовке стоит число 384. Среди пятизначных чисел в таблице отыскиваем 33 418. Оказывается, такого числа в таблице нет. Тогда берем ближайшее к нему — 33 408. Ищем число, которое соответствует такому произведению. Это будет 87. Разница между нашим числом и табличным очень невелика, поэтому мы не будем делать поправки. (Выяснение поправки было бы трудно для данного возраста.) Мы нашли в таблице частное от деления 33 408 на 384, оно равно 87, но у нас делитель в 100 раз меньше 384, поэтому частное будет в 100 раз больше табличного, т. е.

$$33\,408 : 3{,}84 = 8700,$$

а искомое частное выразится приближенным равенством:

$$33\,418 : 3{,}84 \approx 8700.$$

Более трудные примеры, пожалуй, будут непосильны.

63. Замена деления умножением. При изучении деления обыкновенных дробей мы установили, что деление числа на дробь можно заменить умножением на число, обратное делителю. Деление числа на десятичную дробь тоже можно заменить умножением его на число, обратное делителю. Посмотрим, как это делается. Пусть нужно 24 разделить на 0,5, в частном будет: $24 : 0{,}5 = 48$. Теперь сделаем иначе. Заменим 0,5 обратным числом: $0{,}5 = \frac{5}{10}$, обратное число $\frac{10}{5} = 2$. Значит, деление 24 на 0,5 можно заменить умножением числа 24 на 2, т. е. $24 \cdot 2 = 48$.

Сделаем еще один пример. Разделив 64 на 0,25, получим: $64 : 0{,}25 = 256$. Теперь заменим 0,25 обратным числом: $0{,}25 = \frac{25}{100}$; обратное ему число $\frac{100}{25} = 4$. Значит, деление числа 64 на 0,25 мы можем теперь заменить умножением на 4: $64 \cdot 4 = 256$.

Следовательно, при выполнении вычислений важно безошибочно заменить делитель обратным ему числом. Такую замену легко осуществить с помощью таблиц, имеющихся в большинстве справочников. Почти во всех математических таблицах имеется колонка с обозначением $\frac{1}{n}$. Это и есть таблица обратных чисел. В нашей книге мы тоже даем небольшую таблицу обратных чисел. Расскажем об ее устройстве и применении.

Пусть требуется найти число, обратное числу 21. В нашей таблице (стр. 243) десятки обозначены в левом вертикальном столбце, а единицы в верхней горизонтальной строке. На пересечении строки «2» и столбца «1» мы найдем число, обратное числу 21; это будет 0,0476. Проверим это, т. е. найдем обратное число непосредственным вычислением. Разделим единицу на 21; если ограничиться четырьмя знаками, получится то же число, как в таблицах.

Для числа 45 обратное число найдется точно так же, оно равно 0,0222. Для числа 74 обратное будет 0,0135.

Теперь найдем число, обратное однозначному числу 6. В таблице справа от числа 6 имеется 0,0167, но это число стоит под нулем (0). Значит, оно обратно не числу 6, а числу 60. Так как 6 в 10 раз меньше 60, то мы можем без труда исправить это число. Будем рассуждать так: число 0,0167 обратно числу 60, т. е. оно получилось от деления 1 на 60. Значит,

$$1 : 60 = 0{,}0167.$$

Что станет с частным, если делитель уменьшится в 10 раз? Частное увеличится во столько же раз, т. е. от деления 1 на 6 получится 0,167. Руководствуясь этим замечанием, мы можем найти в нашей таблице числа, обратные однозначным числам.

Таблица обратных чисел имеется, в частности, в школьных четырехзначных математических таблицах В. М. Брадиса.

Во многих справочниках таблицам обратных чисел придан несколько иной вид. Разница состоит в том, что вместо $\frac{1}{n}$ там дается $\frac{1000}{n}$. Что от этого получается? Пусть требуется найти число, обратное числу 85. Найдем его по нашей таблице. Это будет 0,0118. В таблицах же, дающих $\frac{1000}{n}$, будет 11,8. Почему? Потому, что в наших таблицах на 85 разделена единица, а в тех таблицах на 85 разделено число 1000. Значит, во втором случае результат должен быть в 1000 раз больше. Поэтому, если мы желаем пользоваться теми таблицами, мы должны уменьшать данные там числа в 1000 раз.

Таблица обратных чисел

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,1000	0,0909	0,0833	0,0769	0,0714	0,0667	0,0625	0,0588	0,0556	0,0526
2	0,0500	0,0476	0,0454	0,0435	0,0417	0,0400	0,0385	0,0370	0,0357	0,0345
3	0,0333	0,0322	0,0313	0,0303	0,0294	0,0285	0.0278	0,0270	0,0263	0,0256
4	0,0250	0,0244	0,0238	0,0238	0,0227	0,0222	0.0217	0,0212	0,0208	0,0204
5	0,0200	0,0196	0,0192	0,0189	0,0185	0,0181	0,0179	0,0175	0,0172	0,0169
6	0,0167	0,0164	0.0161	0,0159	0,0157	0,0154	0,0152	0,0149	0,0147	0,0145
7	0,0143	0,0141	0,0139	0,0137	0,0135	0,0133	0,0132	0,0130	0,0128	0,0127
8	0,0125	0,0124	0,0122	0,0121	0,0119	0,0118	0,0116	0.0115	0,0114	0,0112
9	0,0111	0,0110	0,0109	0,0108	0,0106	0,0105	0,0104	0.0103	0,0102	0,0101

Как пользоваться такой таблицей для замены деления умножением? Разделим 51 на 42. Непосредственное деление дает: 51 : 42 = 1,214... Заменим теперь делитель 42 обратным ему числом, взяв его из нашей таблицы. Число, обратное числу 42, найдем на пересечении строки «4» и столбца «3». Это будет 0,0238. Умножив 42 на 0,0238 и взяв результат с тремя десятичными знаками, получим 1,214.

Еще пример. Пусть требуется разделить 124 на 68. Заменим сразу это деление умножением на обратное число. Число, обратное 68, как видно из таблицы, будет 0,0147. Таким образом, получаем:

$$124 \cdot 0{,}0147 = 1{,}823.$$

64. Простейшие задачи на проценты. Еще более двух с половиной тысяч лет тому назад людям приходилось решать задачи, связанные с займами. Люди занимали деньги в двух случаях: либо для покрытия своих жизненных расходов, либо для осуществления своих торговых операций. В каждом из этих случаев нужно было за держание денег платить тоже деньги. Размер этих взносов часто регулировался законом. Иногда такое взимание денег за держание денег считалось действием безнравственным. Например, *Аристотель* (384—322) признавал такой промысел самым противоестественным и осуждал его.

Такого рода промысел существовал в Греции, в Риме и, возможно, в других государствах. Правил, какими пользовались при выполнении такого рода вычислений, не сохранилось. Однако сохранились законы, которые в разное время определяли «ставку», выше которой воспрещалось взимать деньги за пользование деньгами. Эта ставка в разное время менялась. Закон обычно указывал, сколько и с какой суммы можно было брать денег при займе, например 4 со 100 (четыре со ста), 6 со 100, 8 со 100, 10 со 100 и т. д. А так как на латинском языке «сто» обозначается словом centum, то отсюда и возникло слово «процент» (pro centum — за сотню).

Таким образом, задачи на проценты в глубокой древности были связаны исключительно с денежными расчетами.

Подобные задачи решались и у нас еще в древней Руси. Некоторые люди, имевшие свободные деньги, давали их «под проценты» (в рост). Эти люди назывались ростовщиками, или процентщиками. Если, например, заимодавец давал должнику 500 рублей с условием, что через год он получит эту сумму обратно да плюс 10 рублей с каждой сотни, то говорили, что заимодавец получит с должника 10 процентов годовых, т. е. 50 рублей, а всего 550 рублей.

Постепенно слово «процент» стало принимать более широкий, но сначала все-таки денежный смысл. Его стали употреблять при вычислении прибыли и убытка, например говорили: торговец получил 10 процентов прибыли. Это значит, что на каждую затраченную сотню рублей он получал при продаже товара 110 рублей. Если говорят, что убыток составил 6 процентов, то это значит, что при продаже вместо 100 рублей брали только 94 рубля.

Несколько позже слово «процент» начинают применять не только при денежных расчетах. Например, стало возможно такое выражение: при перевозке муки было потеряно 15 процентов ее. Смысл этого выражения тот, что на каждые 100 *кг* муки потеряли 15 *кг*, или вместо каждых 100 *кг* привезли только 85 *кг*.

В наше время слово «процент» применяется в самых разнообразных случаях: в науке, технике и повседневной человеческой практике. Например, возможны такие выражения: 5-процентный раствор борной кислоты; в школе 6 процентов неуспевающих; вообще уже трудно представить себе область, где бы не применялись проценты.

Чтобы лучше выяснить сущность процентных вычислений, рассмотрим простые задачи.

«Сколько процентов получит вкладчик с 800 рублей, если сберегательные кассы платят 2 процента в год?»

Эта задача имеет такой смысл: вычислить доход вкладчика с 800 рублей, если каждая сотня дает 2 рубля дохода в год.

Так как с каждой сотни получаются 2 рубля дохода, а сотен 8, то достаточно умножить 2 на 8, чтобы получить ответ на вопрос задачи:

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ (рублей)}.$$

Это совершенно правильное и законное решение задачи. Но оно не всегда будет таким простым, каким оно оказалось выше. Оно сразу оказалось бы сложнее, если бы в условие задачи входило не такое число, как 800, а, например, 375 642. Здесь пришлось бы рассуждать так: в данном числе 3756 сотен, доход с них составил 7512, кроме того, доход с 10 рублей составит 20 копеек, а с 40 рублей — 80 копеек и, наконец, доход с 1 рубля — 2 копейки, а с 2 рублей — 4 копейки. Итого весь доход составил 7512,84 рубля. Поэтому в общем случае предпочитают рассуждать иначе. Обычно ставят такой вопрос: со 100 рублей сберегательные кассы дают 2 рубля дохода, а сколько они дадут дохода с 1 рубля? Так как 1 рубль в сто раз меньше 100 рублей, то и дохода с 1 рубля, очевидно, будет не 2 рубля, а в 100 раз меньше, т. е. $2 : 100 = 0{,}02$ (рубля). Доход с 1 (в данном случае с 1 рубля) выражается дробью 0,02. Но если доход с 1 представляет собой некоторую часть (дробь) единицы, то и доход с любого числа будет выражаться той же самой дробью.

Все это мы можем проверить на имеющихся у нас числах.

Доход с 1 рубля составляет 0,02 рубля (2 копейки).

Доход со 100 рублей составляет тоже 0,02 ста рублей. Найдем эту дробь. 100 рублей: $100 \cdot 0{,}02 = 2$ (рубля).

Доход с 800 рублей составляет тоже 0,02 этой суммы:

$$800 \cdot 0{,}02 = 16{,}00 = 16 \text{ (рублей)}.$$

Доход с 375 642 рублей составляет тоже 0,02 этой новой суммы. Вычисление показывает:

$$375\,642 \cdot 0{,}02 = 7512{,}84 \text{ (рубля).}$$

Значит, во всех случаях, чтобы найти 2 процента числа потребовалось умножить число на дробь со знаменателем 100. А так как иного знаменателя здесь быть не может, то процент определяют так:

Процентом величины или числа называется сотая часть этой величины или числа.

В конкретной задаче, когда нужно найти 2 процента от 800 рублей, под процентами нужно понимать результат решения этой задачи, т. е. число 16, а не число 2 и не 0,02.

Этим определением не отрицается указанный выше первоначальный смысл слова «процент», состоящий в том, что под процентом разумеется число предметов, приходящихся на каждую сотню таких предметов. Приведенные выше рассуждения показывают, что одно из этих определений вытекает из другого.

Для сокращения письма вместо слова «процент» пишут знак %.

Два различных определения процентов связаны между собой. Мы можем, рассматривая нашу задачу, спросить: если 2 процента от 800 равны 16, то чему равны 2 процента от одного рубля? Очевидно, в 800 раз меньше, т. е. $\frac{16}{800} = 0{,}02$. Мы пришли к дроби 0,02, но здесь эта дробь — число *именованное*, или предметное, конкретное: оно имеет то наименование, какое имеет 800. Если число 800 обозначает рубли, то и 0,02 обозначает рубли.

В этом отличие нашего понимания слова «процент» от того, которое было дано некоторыми авторами. Согласно их пониманию процентом называется отвлеченная дробь 0,02; но эта дробь сама по себе вовсе не нуждается в переименовании в 2%. Дело в том, что при решении некоторой группы задач получается определенный именованный результат.

Математика имеет дело с отвлеченными числами. Всевозможные практические задачи составляют прикладной отдел математики. Определенную группу задач мы называем задачами на проценты. Число именованное, предметное, конкретное, возникающее в результате отыскания нескольких сотых долей от данного числа, называется процентом этого последнего числа.

При изучении этого раздела в классе нужно предварительно рассмотреть ряд вопросов, а именно:

1. *Что принимается за 100?*

Если процентом числа называется сотая часть этого числа, то само число принимается за 100 процентов.

Мы часто будем встречаться с задачами такого рода. «В саду всего 300 деревьев. Из них яблони составляют 50 процентов, груши — 30 процентов и вишни — 20 процентов». Здесь общее число деревьев, т. е. 300, принято за 100 процентов $(50 + 30 + 20 = 100)$.

2. *Как обозначаются проценты?*

Проценты обозначаются значком %. Этому значку мы *не придаем никакого числового значения* — он заменяет *слово* «процент». Вместо того чтобы писать: «50 процентов от 300 равны 150»,— мы пишем: «50% от 300 составляют 150».

3. *Почему выбрано деление на сто частей?*

Это деление выдвинуто практикой. Деление на 10 частей во многих случаях было бы слишком «грубо», а число 1000 — слишком мелко. Практическое значение задачи о 300 деревьях в саду будет различным, если вместо числа 100 взять 10 или 1000, как было сказано выше.

Самое существенное при решении задачи на проценты — умение быстро и безошибочно написать вместо числа, данного в задаче со знаком % или со словом «процент», ту десятичную дробь, которая войдет в вычисление. Для этого учащиеся должны составить себе *таблицу перевода*:

Проценты	Дроби
1	0,01
3	0,03
6	0,06
10	0,1
25	0,25
40	0,4
50	0,5
61	0,61
75	0,75
85	0,85
90	0,9
100	1

Учащийся должен внимательно просмотреть эту таблицу в двух направлениях, т. е. каждый столбик посмотреть и сверху вниз, и снизу вверх. Он должен себя спрашивать: 18% какой дробью можно записать? 0,35 как написать со знаком %?

Удобно ли соединить знаком равенства дробь со знаменателем 100 и целое число со знаком %? Удобно ли писать равенство $25\% = 0,25$?

Неудобно. Если бы мы определяли процент как дробь со знаменателем 100, тогда такая запись была бы допустимой, но ведь мы определяем процент иначе. При нашем определении такая запись была бы неудобной. Лучше соответствие между этими двумя числами выражать в виде таблицы, подобной той, какую мы дали выше. При решении задач удобно пользоваться фразой «Заменим число процентов десятичной дробью — такой-то». Решая задачу: «Найти 12% числа 300», — мы будем говорить: з а м е н и м данное в задаче число 12% десятичной дробью 0,12 и выполним вычисление. (Решение: $300 \cdot 0{,}12 = 36$).

Ученики, конечно, понимают, что существуют разные задачи: разные по числовым данным, разные по содержанию (сюжету), разные по способам решения.

В данном случае, когда учитель будет рассказывать о процентах, у учеников возникнет вопрос, не будут ли им теперь предложены для решения новые задачи. Здесь учитель должен со всей настойчивостью заявить, что здесь не будет новых задач, а будут повторяться старые с новыми названиями. Решались задачи на нахождение дроби числа, теперь будет решаться частный случай этих задач, где дробь будет со знаменателем 100; решались задачи на нахождение числа по его дроби (эти задачи были обратными первым); теперь будет решаться частный случай этих задач, где данная дробь будет со знаменателем 100.

65. Нахождение процентов данного числа. В основу изучения задач на проценты нужно положить именно эту задачу, а две другие считать производными или обратными.

Далее абсолютно необходимо связать задачу о нахождении процентов данного числа с задачей нахождения дроби числа, подчеркнув их полное тождество. Итак, нужно показать ученикам, что здесь не две разных, а одна и та же задача. Чтобы это показать, нужно сначала решить задачу на нахождение дроби данного числа.

Возьмем такую задачу.

«В текущем году для школы приобрели 800 различных книг. Среди них книги на русском языке составляли $\frac{3}{4}$ от общего числа всех книг. Сколько было книг на русском языке?

Это — известная ученикам из прошлого задача на нахождение дроби числа, решаемая умножением числа на данную дробь:

$$800 \cdot \frac{3}{4} = 600 \text{ (книг)}.$$

Теперь, не меняя содержания задачи, заменим только дробь $\frac{3}{4}$ равной ей дробью 0,75. Здесь тоже будем искать дробь от числа, но эта дробь выражена в сотых долях. Это и будет *первая задача на проценты*. Ее смысл можно выразить словами: «Сколько русских книг приходится на каждые 100 книг?»

Итак, в текущем году для школы приобрели 800 различных книг. Среди них книги на русском языке составляют 0,75. Сколько было книг на русском языке?

Решение ее и ответ будут такие же, как и предыдущей задачи: $800 \cdot 0{,}75 = 600$ (книг).

Итак, нет особых задач на нахождение процентов от числа, есть задачи на нахождение дроби числа, а нахождение процентов числа — ее частный случай. Никаких особых правил решения этих задач нет и не будет. Учащиеся должны это знать. Больше учителю сообщать им, собственно говоря, нечего: многословие в данном случае может оказаться вредным, наталкивая учащихся на мысль, что речь идет о чем-то очень трудном. Нужно только установить, что могло остаться непонятным или неясным, и разъяснить только непонятное.

Рассмотрим некоторые детали решения задач этого вида.

В магазине я увидел объявление: цены на товары понизились на 12%. До понижения цен мужские ботинки стоили 30 рублей, полотняный пиджак — 20 рублей и легкие летние брюки — 10 рублей. Я хочу знать, на сколько рублей подешевел каждый из этих нужных мне предметов.

Здесь соединены три простые, совершенно однородные задачи. На разборе этих задач можно выяснить ряд понятий, относящихся к вычислению процентов.

Мужские ботинки стоили 30 рублей. Цена на них понизилась на 12%. На сколько рублей подешевели ботинки? Интересно и другое: сколько ботинки стоят теперь?

Что значит запись «12%», читаемая «12 процентов»?

Процентом числа называется сотая часть этого числа. Значит, 12% некоторого числа обозначают 12 сотых этого числа (иначе пишется: $\frac{12}{100}$ или 0,12). Знак % — не математический знак, а наименование, заменяющее слово «процент».

Итак, нужно найти 12 сотых числа 30. Найти 0,12 числа 30,— значит, найти дробь числа: это выполняется умножением числа на данную дробь. Но $30 \cdot 0,12 = 3,6$ (рубля).

Ботинки подешевели на 3,6 рубля; 3,6 рубля и есть 12% 30 рублей.

Второй вопрос: сколько стоят ботинки теперь? Ответ на него дается вычитанием. Нужно из старой цены вычесть 3,6 рублей: $30-3,6 = 26,4$ (рубля).

Однако можно было бы новую цену найти и по-другому: этот второй путь стоит рассмотреть не для того, чтобы показать разные способы решения задачи, а чтобы коснуться новых вопросов теории.

Скидка со стоимости ботинок составляла 12%, значит, старая цена принимается за 100%. Вычитанием можно найти, сколько *процентов* составляет новая цена: $100-12 = 88$ (процентов).

Теперь мы можем найти новую цену ботинок вторым способом. До понижения цен ботинки стоили 30 рублей, а теперь они стоят только 88% прежней стоимости. Значит, получается еще одна задача того же самого вида — *на нахождение процентов от числа*:

$$30 \cdot 0,88 = 26,4 \text{ (рубля)}.$$

Ответ получился тот же самый, чего и нужно было ожидать. Но, может быть, это не понятно для учащихся, что новая цена вместе со скидкой равна старой, т. е.

$$26,4 + 3,6 = 30 \text{ (рублей)}.$$

Эту мысль можно выразить и иначе:

$$88\% + 12\% = 100\%.$$

Теперь доведем до конца решение нашей задачи. На сколько подешевел полотняный пиджак, который раньше стоил 20 рублей?

$$20 \cdot 0,12 = 2,4 \text{ (рубля)}.$$

Пиджак подешевел на 2,4 рубля. Новая цена

$$20 - 2,4 = 17,6 \text{ (рубля)},$$

или $20 \cdot 0,88 = 17,6$ (рубля).

Можно было бы рассуждать и так. Товар *подешевел на* 12% — это значит, что с каждой сотни рублей делается скидка 12 рублей. Пиджак стоил 20 рублей, т. е. 0,2 сотни.

С 0,2 сотни скидка будет не 12 рублей, а $12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4$ (рубля), а новая цена будет равна:

$$88 \cdot 0{,}2 = 17{,}6 \text{ (рубля).}$$

Наконец, вычислим, на сколько подешевели брюки, которые до понижения стоили 10 рублей:

$$10 \cdot 0{,}12 = 1{,}2 \text{ (рубля).}$$

Брюки подешевели на 1,2 рубля. Новая их цена

$$10 - 1{,}2 = 8{,}8 \text{ (рубля),}$$

или $10 \cdot 0{,}88 = 8{,}8$ (рубля).

Здесь достойно внимания то обстоятельство, что ответ на вопрос задачи выражается числом 1,2, т. е. 12 % 10 рублей составляют 1,2 рубля. Так и должно быть, потому что, как говорилось выше, под процентами мы разумеем число каких-нибудь предметов на 100 таких же предметов. Совершенно так же и 88 % 10 рублей составляют 8,8 рубля.

66. Нахождение числа по его процентам. Это — задача, обратная первой, поэтому начнем ее с разбора прямой задачи, уже решенной (см. стр. 248).

Тогда было известно, что было приобретено 800 книг, из них $\frac{3}{4}$ на русском языке. На вопрос: сколько было русских книг?— был дан ответ: книг на русском языке было 600.

Но могло быть и так: число книг на русском языке было нам известно; по каким-то данным мы знаем, что они составляют $\frac{3}{4}$ общего числа всех книг, и хотим узнать, сколько всего было книг

Этот случай встречается редко, но все-таки он возможен, хотя задача в этом виде несколько искусственна.

При этом предположении новая, обратная задача принимает вид:

«В текущем году для школы приобрели 600 книг на русском языке. Это составляет $\frac{3}{4}$ всех книг, какие в этом году поступили в школу. Сколько всего книг приобрели для школы?»

Это — типичная задача на нахождение всего числа по его дроби (части), тоже обратная нахождению дроби числа. Такие задачи решаются делением. Решение обратной задачи таково:

$$600 : \frac{3}{4} = \frac{600 \cdot 4}{3} = 800 \text{ (книг).}$$

Если, не меняя содержания задачи, заменим дробь $\frac{3}{4}$ равной ей дробью 0,75, мы тоже будем искать все число по его дроби, но эта дробь теперь дана в сотых долях. Это — *вторая задача на проценты*. Ее теперь можно сформулировать так. В текущем году для школы приобрели 600 книг на русском языке. Они составляют 75% всех книг, какие в этом году были приобретены для школы. Сколько всего книг приобрели для школы?

Заменяя условное обозначение 75% дробью 0,75, решаем задачу так: 600 : 0,75 = 800 (книг).

Результат получился тот же самый, чего и следовало ожидать. Итак, нет особых задач на нахождение числа по данным его процентам, это опять частный случай задач на нахождение всего числа по его дроби, и снова не будет никаких особых правил для их решения. Эту мысль учащиеся должны хорошо усвоить.

Это — задача, обратная первой, но учащимся она предлагается как самостоятельная задача. Когда разъяснялся способ ее решения, взяли сначала прямую задачу, потом обернули ее, не меняя ситуации. Но в жизни будет не так, будет дано не две задачи, а одна как самостоятельная. Учащимся полезно представить себе, какой же будет в данном случае прямая задача. Они будут рассуждать так: для школы купили x книг, 75% от них составляет 600. Сколько было всего книг или чему равен x?

Если бы мы знали x, то могли бы написать так:

$$x \cdot 0{,}75 = 600, \text{ или } 0{,}75 \cdot x = 600.$$

Слева у нас написано произведение двух сомножителей, из которых один неизвестен. Чтобы найти один из двух сомножителей, нужно произведение разделить на другой сомножитель, т. е.

$$x = 600 : 0{,}75, \text{ или } x = 800.$$

Для проверки полезно предложить учащимся вопрос: сколько же всего было книг на русском языке, если на каждую сотню купленных книг приходится 75 книг на русском языке.

Ответ: на каждую сотню книг приходится 75 книг на русском языке, а всего было 8 сотен книг, значит,

$$75 \cdot 8 = 600 \text{ (книг).}$$

Получилось число, которое было дано в условии прямой задачи.

Чтобы устранить всякие неясности, полезно подробно разобрать еще какую-нибудь задачу.

«Нужно вспахать большой участок земли. В течение первых дней вспахали 105 *га*, что составляет 35% всего участка. Сколько гектаров составляет весь участок?»

Заменим условное обозначение 35% десятичной дробью 0,35, получим задачу на нахождение числа по его дроби. Такие задачи решаются делением:

$$105 : 0{,}35 = 300 \ (\textit{га}).$$

Величина всего участка нам неизвестна. Обозначим ее буквой x. Если нужно найти 0,35 числа x, то:

$$x \cdot 0{,}35 = 105, \text{ отсюда } x = 105 : 0{,}35 = 300 \ (\textit{га}).$$

В целях проверки решим прямую задачу. Найти 0,35 от 300 *га*.

$$300 \cdot 0{,}35 = 105 \ (\textit{га}).$$

Получили число, данное в условии первой задачи.

67. Нахождение процентного отношения чисел[1]. Эта важная задача на проценты, как показывает опыт, дается учащимся с трудом. Причины этих затруднений пока не выяснены. Возможно, что учащимся непонятен смысл этой задачи. Поэтому нужно предварительно разобрать с ними несколько решенных задач, а потом уже предлагать учащимся задачи для самостоятельного решения.

1. Между городами A и B проходит шоссейная дорога протяженностью 250 *км*. Участок дороги, расположенный у города A и имеющий длину 50 *км*, асфальтирован. Какую часть длины дороги он составляет?

Такие вопросы в практике ставятся довольно часто. Условие задачи можно представить наглядно (рис. 32).

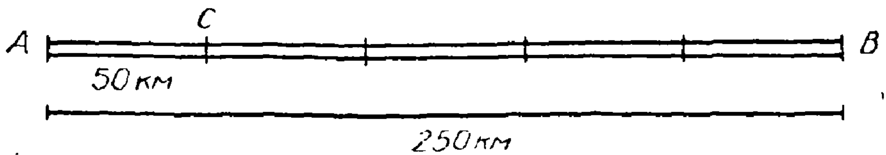

Рис. 32.

Здесь шоссейная дорога между A и B представлена в виде узкой полосы. Асфальтированная часть полосы обозначена AC.

[1] См. выше стр. 192.

Для решения задачи нужно 50 разделить на 250, т. е.

$$\frac{50}{250} = \frac{1}{5}.$$

Итак, асфальтированная часть дороги составляет $\frac{1}{5}$ всей дороги. Это хорошо представлено на чертеже. Речь идет о сравнении двух расстояний. Сравнивая одно расстояние с другим, мы говорим, что AC составляет одну пятую часть AB. Эту же мысль можно выразить так: если первое расстояние примем за 1, то второе будет равно пяти единицам. В математике принято выражать эту мысль иначе: расстояние AC относится к AB как $1 : 5$.

Если же мы будем делить AB на 100 долей, как принято в задачах на проценты, то дробь $\frac{1}{5}$ нужно выразить в сотых долях. Это и есть ответ на вопрос: сколько процентов длины всей дороги составляет ее асфальтированная часть? Если в классной таблице перевода есть дробь $\frac{1}{5}$, или 0,2, то можно из нее выписать готовую дробь со знаменателем 100. Если же в таблице 0,2 нет, то нетрудно сообразить: $\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$, или $0{,}2 = 0{,}20$, что составляет 20%. Это и есть ответ на вопрос задачи.

Таким образом, на вопрос задачи можно ответить тремя способами. Асфальтированная часть дороги а) составляет одну пятую $\left(\frac{1}{5}\right)$ всей дороги; б) относится к длине всей дороги как один к пяти $(1 : 5)$; в) составляет 20% всей дороги.

Ответ «в» означает, что мы нашли *процентное отношение двух чисел, или величин*[1].

Если у учащихся появится сомнение в том, что это — отношение, то достаточно им напомнить, что запись 20% можно представить как $\frac{20}{100}$, или $20 : 100$, откуда ясно видно, что это действительно отношение.

Здесь еще нет правила решения этого вида задач, а только разъяснение смысла задачи.

---

[1] Если понятие об отношении величин, или чисел, согласно программам 1960 г. будет отнесено к следующему за десятичными дробями разделу, то, разумеется, весь п. 67, как и все, сказанное об отношении во второй части книги, должен быть отнесен туда.— *Ред.*

2. Поле имеет площадь 30 *га*. Оно засеяно различными хлебными растениями; 12 *га* засеяны пшеницей. Какая часть поля находится под пшеницей?

Изобразим условие задачи на чертеже (рис. 33). Здесь поле представлено прямоугольником $ABCD$. Длина его 600 *м*, ширина 500 *м*. Длина заштрихованной части $ABEF$ 600 *м*, ширина 200 *м*. Площадь заштрихованной части 120 000 $м^2$, или 12 *га*. Эта часть засеяна пшеницей. Чтобы найти, какую часть всего поля она составляет, нужно 12 разделить на 30, т. е. $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

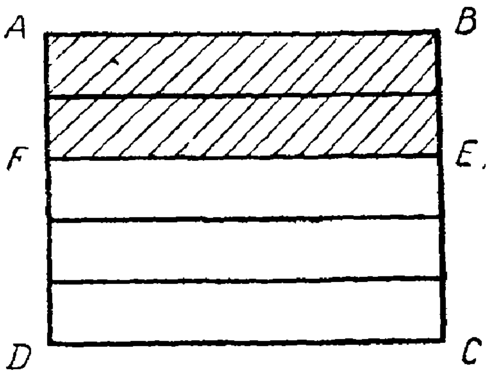

Рис. 33.

Это можно было обнаружить наглядно по чертежу. Прямоугольник $ABCD$ разбит горизонтально прямыми на 5 равных полос, из них заштрихованы 2. Значит, заштрихованная полоса равна $\frac{2}{5}$ всего прямоугольника.

Сравнивая эти две площади, мы говорим, что меньшая составляет $\frac{2}{5}$ большей. Эту же мысль можно выразить еще так: если всю площадь примем за пять частей, то площадь, засеянная пшеницей (заштрихованная на чертеже), равна двум таким частям. В математике принято выражать это еще иначе: площадь поля, засеянная пшеницей, относится к площади всего поля как 2 : 5.

Если же мы будем пользоваться, как в предыдущей задаче, сотенным делением, то дробь $\frac{2}{5}$ придется выразить в сотых долях. Дробь со знаменателем 100 дает ответ на вопрос: сколько процентов всего поля составляет его часть, засеянная пшеницей, если выразить $\frac{2}{5}$ в сотых долях. Можно сообразить, что $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, или $\frac{40}{100}$, или 0,40, что составляет 40% поля.

Таким образом, на вопрос нашей задачи можно ответить теми же тремя способами, как и в задаче 1. В третьем случае принято говорить, что мы нашли **процентное отношение** чисел (или величин).

Если после разбора этой задачи у учеников будут какие-нибудь неясности или сомнения, то нужно вместо готовой задачи предложить составить ее самим учащимся. Тут будет сразу ясно, все ли и всё ли понимают. Это обнаружится уже в выборе сюжета, будет ли это повторением предыдущих сюжетов, или придумают новую, собственную ситуацию. Скажется то же самое и в том, какие подберут числа для своей задачи. Во всяком случае, задача, составленная самими учениками, должна быть рассмотрена, и учитель должен проявить большое внимание к ее деталям.

После этого нужно установить способ решения задач этого вида.

Необходимо установить, что это — вторая задача, **обратная** первой.

Прямая задача о книгах, приобретенных для школы (см. стр. 248), решалась так:

$$800 \cdot \frac{3}{4} = 600 \text{ (книг)}.$$

Первая задача, обратная прямой, решалась так:

$$x \cdot \frac{3}{4} = 600; \ x = 600 : \frac{3}{4}; \ x = 800 \text{ (книг)}.$$

Здесь был неизвестен первый сомножитель («множимое»). Мы нашли его делением.

А если был бы неизвестен второй сомножитель («множитель») и мы бы его искали, то вопрос пришлось бы записать и решить так:

$$800 \cdot x = 600; \ x = \frac{600}{800} = \frac{3}{4}.$$

Смысл полученного ответа такой: мы нашли, какую часть общего числа книг составляют русские книги. Искомая часть выражена обыкновенной дробью, нам же нужно, чтобы она была выражена дробью со знаменателем 100. Такая дробь сразу давала бы нам ответ, сколько процентов одно число составляет от другого.

Мы уже знаем, что дробь $\frac{3}{4}$ можно заменить десятичной дробью со знаменателем 100 — дробью 0,75. Если учащиеся это плохо помнят, достаточно подсказать, что для обращения $\frac{3}{4}$ в дробь со знаменателем 100 нужно 3 разделить на 4 и мы получим 0,75.

Теперь возьмем еще одну задачу, у которой будет другое содержание, но подобные числовые данные. Для полной ясности мы рассмотрим прямую задачу и две обратные.

«Служащий получил 80 рублей и израсходовал из них 75%. Сколько рублей он израсходовал?»

$$80 \cdot 0,75 = 60 \text{ (рублей)}.$$

Первая обратная задача. «Служащий из полученных денег израсходовал 60 рублей, что составляло 75% получки. Сколько он всего получил денег?»

$$60 : 0,75 = 80 \text{ (рублей)}.$$

Вторая обратная задача. «Служащий получил 80 рублей и израсходовал из них 60 рублей. Сколько процентов он израсходовал от получки?»

$$60 : x = 80; \; x = \frac{60}{80} = 0,75.$$

Эту десятичную дробь нужно заменить целым числом со значком %; 0,75 составляет 75%.

Как же решается третья задача на проценты, т. е. как найти процентное отношение двух чисел?

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно сначала найти их отношение и затем заменить его дробью со знаменателем 100.

В этой замене, может быть, и не будет надобности, если у нас сразу при делении получится отношение, у которого последующий член равен числу 100. Например:

$$\frac{3}{100} = 0,03; \; \frac{17}{100} = 0,17;$$

$$\frac{25}{100} = 0,25; \; \frac{36}{100} = 0,36; \; \frac{47}{100} = 0,47 \text{ и т. д.}$$

Когда же у нас получится дробь со знаменателем 100 или отношение с последующим членом 100, то потом нужно будет заменить его целым числом со значком %.

Например: 0,01 $\longleftrightarrow$[1] 1%; 0,02 $\longleftrightarrow$ 2%; 0,04 $\longleftrightarrow$ 4%; 0,07 $\longleftrightarrow$ 7%; 0,11 $\longleftrightarrow$ 11%; 0,16 $\longleftrightarrow$ 16%; 0,22 $\longleftrightarrow$ 22% и т. д.

---

[1] Знак $\longleftrightarrow$ заменяет слова «составляет» или «равносильно».

Глава седьмая

СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

68. Обращение обыкновенной дроби в десятичную. В этом разделе рассматриваются следующие вопросы:

1) Обращение обыкновенной дроби в десятичную посредством разложения знаменателя на простые множители.

2) Обращение обыкновенной дроби в десятичную посредством деления числителя на знаменатель.

3) Какие обыкновенные дроби обращаются в десятичные?

4) Что такое периодическая дробь?

5) Что такое период?

6) Что такое чистая и что такое смешанная периодическая дробь?

7) Как округляется периодическая дробь?

Если пункт 1 имеет меньшее практическое значение, чем пункт 2, то его теоретическое значение очень велико: нельзя не знать, какие обыкновенные дроби могут обращаться в десятичные и какие не могут.

Изучив этот раздел, учащиеся должны приобрести следующие умения: обращать обыкновенные дроби в десятичные любым способом и округлять периодические дроби, как и вообще десятичные дроби, с необходимой степенью точности.

К решению вопроса об обращении обыкновенной дроби в десятичную можно подойти следующим образом.

Возьмем пример на приведение к общему знаменателю дробей $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{8}$. Общим знаменателем будет 8; дополнительный множитель для первой дроби — 2, для второй — 1; дроби примут вид $\frac{6}{8}$ и $\frac{1}{8}$.

Был выбран случай, когда общим знаменателем двух дробей был знаменатель одной из них. Так как при этом была преобразована только первая дробь, то в сущности задача состояла в том, чтобы дробь $\frac{3}{4}$ выразить в восьмых долях. Присмотримся ближе к задачам того же вида.

Дана дробь $\frac{1}{2}$, выразить ее в шестых долях. Новый знаменатель будет 6, дополнительный множитель 3. Следовательно,

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}.$$

Рассмотрим еще пример. Дана дробь $\frac{3}{8}$; выразить ее в двадцать четвертых долях. Дополнительный множитель будет 3. Значит,

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}.$$

Если ученики хорошо поймут эту задачу, то они будут знать, в чем состоит обращение обыкновенной дроби в десятичную.

После этого полезен разбор трех примеров

1. Дробь $\frac{1}{2}$ выразить в десятых долях:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}.$$

2. Дробь $\frac{3}{4}$ выразить в сотых долях. Здесь дополнительный множитель будет 25, так как $100 : 4 = 25$. Значит,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}.$$

3. Дробь $\frac{7}{40}$ выразить в тысячных долях. Здесь дополнительный множитель будет 25, так как $1000 : 40 = 25$. Значит,

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000}.$$

В трех последних примерах мы фактически обратили обыкновенные дроби в десятичные, но об этом не говорилось, а употреблялись другие выражения. В самом деле,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5;$$

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75;$$

$$\frac{7}{40} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$$

Таким образом, пользуясь тем приемом, который применяется при приведении дробей к общему знаменателю, мы выразили несколько дробей в иных долях, в том числе и в десятичных. В одном из предшествующих примеров мы выразили $\frac{3}{4}$ в сотых долях. Но что было бы, если бы мы попытались выразить эту дробь в десятых долях? Это не удалось бы, потому что 10 на 4 не делится нацело. Это следует запомнить.

Теперь рассмотрим такой пример. Дробь $\frac{3}{20}$ надо выразить в каких-нибудь десятичных долях, иными словами, дробь $\frac{3}{20}$ написать так, чтобы в знаменателе была 1 с нулями за ней — это и значит обратить дробь $\frac{3}{20}$ в десятичную.

Чего нам не достает для решения этой задачи?

Здесь точно не сказано, какой у нас будет знаменатель, т. е. или 10, или 100, или 1000 и т. д. Сказано только, что должна быть 1 с нулями, но это довольно неопределенно. Мы только что видели, что не всегда можно взять л ю б о й десятичный знаменатель.

Сделаем несколько проб. Попробуем взять число 10. Оказывается, это число в качестве знаменателя для данной дроби не подходит. Возьмем число 100. Найдем дополнительный множитель и выполним необходимые действия:

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

Мы обратили дробь $\frac{3}{20}$ в десятичную со знаменателем 100. Почему же нам не удалось воспользоваться знаменателем 10, а пришлось взять знаменатель 100? Может показаться, что это произошло потому, что число 10 меньше, чем 20. Но возьмем другой пример: надо выразить в десятых долях дробь $\frac{9}{40}$. Эту дробь нельзя выразить в десятых долях, но нельзя выразить и в сотых долях, хотя число 100 больше 40. Попытаемся выразить ее в тысячных долях. Дополнительный множитель будет $1000 : 40 = 25$, а после преобразования:

$$\frac{9}{40} = \frac{9 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{225}{1000} = 0{,}225.$$

Теперь мы обратили пять различных обыкновенных дробей в десятичные. Иногда проще, иногда сложнее, но все-таки всякий раз задача решалась успешно. Теперь подумаем, в с е г д а л и эта задача разрешима. П о п р о б у е м дробь $\frac{11}{21}$ обратить в десятичную. Предыдущие опыты показывают, что нужно взять в качестве знаменателя какое-нибудь число, изображаемое 1 с нулями (10, 100, 1000, 10 000 и т. д.), но сначала найти дополнительный множитель, т. е. взять частное от деления ожидаемого знаменателя на данный.

Разделится ли на 21 какое-нибудь число, изображаемое 1 с нулями? Посмотрим: 10 на 21 не делится; 100 — тоже; 1000 — тоже; 10 000 — тоже.

Попробуем разделить на 21 еще 100 000. Оказывается, 100 000 тоже не делится на 21. Почему? Может быть, попытки напрасны и вопрос о возможности разделить число, изображаемое единицей с нулями, на 21 можно решить как-нибудь теоретически?

Попробуем же разобраться в этом теоретически.

Почему 30 делится на 5 и не делится на 11, а 44, наоборот, делится на 11 и не делится на 5, а, например, 55 делится и на 5, и на 11? Это зависит от того, на какие простые множители можно разложить эти числа. Посмотрим, как они разлагаются:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5;$$
$$44 = 2 \cdot 2 \cdot 11;$$
$$55 = 5 \cdot 11.$$

Среди множителей числа 30 есть число 5. Значит, 30 на 5 разделится. Среди множителей числа 44 есть число 11 и нет числа 5. Значит, 44 на 11 разделится, а на 5 не разделится. Наконец, среди множителей числа 55 есть и 5, и 11. Значит, 55 разделится и на 5, и на 11.

Теперь займемся делимостью чисел, изображаемых 1 с нулями, на 21. Разложим на простые множители 21 и некоторые из чисел, изображаемых 1 с нулями:

$$21 = 3 \cdot 7;$$
$$10 = 2 \cdot 5;$$
$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5;$$
$$1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5;$$
$$10\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5;$$
$$100\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Стоит ли еще разлагать на простые множители, например, число 1 000 000? Не стоит, все уже ясно. Всякое число, изображаемое 1 с нулями, разлагается только на двойки (2) и пятерки (5), причем двоек и пятерок входит в разложение поровну и по стольку, сколько нулей в числе.

Итак, ни одно из чисел, изображаемых 1 с нулями, не разделится на 21, потому что для делимости на 21 нужно, чтобы в состав делимого входили множители 3 и 7, а делимое содержит только множители 2 и 5.

Рассмотренные примеры говорят, что дробь $\frac{11}{21}$ не обратится в десятичную, т. е. нельзя найти равной ей дроби, у которой знаменатель изображался бы 1 с несколькими нулями. Нельзя потому, что нет возможности в данном случае найти дополнительный множитель; ни одно число, изображаемое 1 с нулями, не разделится на 21.

Теперь мы видим, что задача обращения обыкновенной дроби в десятичную разрешима н е в с е г д а. Во многих случаях данную обыкновенную дробь нельзя обратить в десятичную. Теоретически важно знать, какие обыкновенные дроби обращаются в десятичные и какие не обращаются. Ответ на этот вопрос подготовлен всеми предыдущими рассуждениями.

Несократимая дробь, знаменатель которой не содержит никаких иных простых множителей, кроме 2 и 5, обращается в десятичную. Десятичная дробь, которая получается от обращения некоторой обыкновенной, будет иметь столько десятичных знаков, сколько раз в состав знаменателя обыкновенной дроби после ее сокращения входит численно преобладающий множитель 2 или 5. Например, при обращении $\frac{3}{20}$ в десятичную дробь получим в результате дробь с двумя десятичными знаками, потому что численно преобладающий множитель 2 входит в знаменатель 20 два раза. В самом деле, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, дополнительный множитель 5. Следовательно,

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15.$$

При обращении $\frac{7}{250}$ в десятичную дробь получим в результате дробь с тремя десятичными знаками, потому что численно преобладающий множитель 5 входит в знаменатель 250 три раза. В самом деле, $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, дополнительный множитель $2 \cdot 2 = 4$. Следовательно,

$$\frac{7}{250} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{28}{1000} = 0,028.$$

Изложенный здесь способ обращения обыкновенной дроби в десятичную основывается на разложении знаменателя на простые множители.

Теперь перейдем ко второму способу обращения обыкновенных дробей в десятичные. Рассмотренный выше первый способ имеет то важное значение, что объясняет, в каких случаях такое обращение возможно. Второй способ не дает такого признака, но он скорее ведет к цели.

1. Возьмем сначала дробь $\frac{1}{2}$. Ее можно рассматривать как частное от деления 1 на 2. Выполним это деление так, как мы в свое время выполняли деление целого числа на целое: $1 : 2 = 0,5$, что мы уже знаем.

В следующих примерах надо каким-нибудь образом проверять вычисление, например множить делитель на частное, чтобы получить делимое:

$$1 = 2 \cdot 0,5 = 1,0.$$

2. Обратить в десятичную дробь $\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0,75 \\ 20 & \end{array}$$

Проверка: $3 = 4 \cdot 0,75 = 3,00$.

3. Обратить в десятичную дробь $\frac{5}{8}$.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 8 \\ \hline 50 & 0,625 \\ 20 & \\ 40 & \end{array}$$

Проверка: $5 = 8 \cdot 0,625 = 5,000$.

4. Обратить в десятичную дробь $\frac{7}{40}$ (см. выше):

$$\begin{array}{r|l} 7 & 40 \\ \hline 70 & 0,175 \\ 300 & \\ 200 & \end{array}$$

Проверка: $7 = 40 \cdot 0,175 = 7,000$.

5. Обратить в десятичную дробь $\frac{11}{50}$.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 50 \\ \hline 110 & 0,22 \\ 100 & \end{array}$$

Проверка $11 = 50 \cdot 0,22 = 11,00$.

Отсюда вытекает очень простое правило для обращения обыкновенной дроби в десятичную.

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно разделить числитель дроби на ее знаменатель.

Вот два способа обращения обыкновенной дроби в десятичную. Но мы уже знаем, что в одних случаях это обращение возможно, а в других — невозможно. Не может быть обращена в десятичную любая из следующих дробей:

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{2}{15},\ \frac{7}{15}\ \text{и т. д.},$$

так как знаменатели их или вовсе не содержат двоек и пятерок, или если и содержат, то вместе с другими множителями.

Теперь можно проделать некоторый опыт со вторым способом обращения. Рассмотрим первую из указанных выше дробей — $\frac{1}{3}$. Эта дробь не может быть обращена в десятичную, потому что в знаменателе ее есть множитель 3.

Но если бы мы, не испробовав первого способа обращения, сразу применили бы второй способ деления, то что в этом «невозможном» случае должно обнаружиться? Невозможность решения останется невозможностью при любом способе обращения. Сделаем же опыт деления 1 на 3.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 3 \\ \cline{2-2}
\underline{10} & 0{,}33333 \\
\ \ 10 & \\ \cline{1-1}
\ \ \underline{10} & \\
\ \ \ \ 10 & \\ \cline{1-1}
\ \ \ \ \ \ \underline{10} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 1 &
\end{array}$$

Мы получили в частном 0 целых и 5 троек и в остатке 1. Продолжать деление дальше не стоит, потому что нет никакой надежды кончить это действие. Сколько бы мы не продолжали деление, в частном все прибывали бы тройки, а в остатке все оставалась бы 1. Деление продолжалось бы без конца, фактически оно невыполнимо. Так и второй способ обнаруживает невозможность обращения: мы приходим к невыполнимому делению.

Однако есть все же возможность осмыслить полученный результат деления. В свое время мы встречались со случаями бесконечного частного, и такие случаи мы не считали безнадежными. В таких случаях можно ограничиться приближенными результатами.

Ограничим наше частное от деления 1 на 3 для простоты хотя бы тремя десятичными знаками:

$$1 : 3 = 0{,}333\ldots$$

Частное 0,333 — приближенное частное.

Если теперь сделать проверку деления, исходя из того что делимое равно делителю, умноженному на частное, то делимое не совпадет с произведением делителя на частное. Это произведение будет меньше делимого, потому что частное у нас неполное; оно ограничено третьим десятичным знаком. Вот что дает проверка:

$$3 \cdot 0,333 = 0,999.$$

У нас получается не 1, а 0,999, это меньше единицы на 0,001 (на одну тысячную), потому что

$$1 - 0,999 = 0,001.$$

Выполняя проверку, мы заранее знали, что произведение будет меньше делимого, потому что частное взято с недостатком. Теперь попробуем увеличить частное на одну тысячную и снова сделать проверку. При делении 1 на 3 мы получили в частном 0,333. Усилим теперь последнюю цифру частного, т. е. возьмем:

$$1 : 3 = 0,334,$$

и сделаем проверку: $3 \cdot 0,334 = 1,002$.

При проверке получилась не 1, а 1,002; это больше 1 на 0,002, потому что $1,002 - 1 = 0,002$.

Мы брали в частном от деления 1 на 3 три десятичных знака. Возьмем теперь четыре знака и посмотрим, что из этого получится:

$$1 : 3 = 0,3333.$$

Проверка: $3 \cdot 0,3333 = 0,9999$.

Снова у нас получилась не 1, а только 0,9999; это ближе к 1, чем 0,999, но все-таки это меньше 1 на 0,0001, потому что $1 - 0,9999 = 0,0001$.

Усилим последнюю цифру частного и снова сделаем проверку:

$$1 : 3 = 0,3334.$$
$$3 \cdot 0,3334 = 1,0002.$$

Проверка дала число больше 1.

Конечно, на основании одного случая еще нельзя делать общих выводов. Понаблюдаем, что получится в других аналогичных случаях. Рассмотрим дробь $\frac{1}{6}$. Она не может быть обращена в десятичную. Но мы еще раз посмотрим, как эта невозможность обнаружится при попытке обратить ее вторым способом.

Разделим 1 на 6; $1 : 6 = 0{,}166$, в остатке без конца 4. Опять невыполнимое деление указывает, что дробь $\frac{1}{6}$ не может быть обращена в десятичную.

Однако предыдущий пример показал, что *получаемая* таким делением десятичная дробь очень близка к данной обыкновенной дроби, хотя немного меньше ее. Мы могли бы сделать даже графическую проверку этого факта. Правда, тысячные доли трудно откладывать на чертеже. Но в предыдущем примере можно взять не три знака, а два и даже один, т. е. положить, что $1 : 3 = 0{,}3$. Посмотрим, *как это выйдет на чертеже.* Изобразим отрезок AB и примем его за 1 (рис. 34).

На чертеже дробь $\frac{1}{3}$ изображается отрезком AC, а дробь

Рис. 34.

0,3 — отрезком AD. Эти отрезки не равны между собой: отрезок AC больше отрезка AD, но разница между ними невелика, ее можно даже вычислить: она равна $\frac{1}{30}$.

Во втором примере дробь $\frac{1}{6}$ тоже не равна дроби 0,166, а больше, потому что деление не было окончено и полученное частное было неполным. Сделаем проверку:

$$6 \cdot 0{,}166 = 0{,}996.$$

Делимое 1 больше этого произведения на 0,004.

Теперь усилим последнюю цифру частного ($1 : 6 = 0{,}167$) и снова сделаем проверку:

$$6 \cdot 0{,}167 = 1{,}002.$$

Полученное произведение больше единицы (1) на 0,002. Можно сказать, что 0,166 — приближенное десятичное выражение дроби $\frac{1}{6}$ с недостатком, а 0,167 — приближенное ее выражение с избытком. Чтобы прийти к окончательному выводу, прибавим в частном еще один десятичный знак, т. е. положим:

$$1 : 6 = 0{,}1666.$$

Проверка частного: $6 \cdot 0{,}1666 = 0{,}9996$.

Как и следовало ожидать, найденное произведение меньше 1 на 0,0004, потому что

$$1 - 0{,}9996 = 0{,}0004.$$

Усилим последний знак частного, положив $1:6 = 0{,}1667$.

Проверка: $6 \cdot 0{,}1667 = 1{,}0002$.

Проверка дала число, большее единицы на 0,0002.

Подведем итоги всем рассуждениям. Обыкновенная дробь может быть обращена в десятичную только в том случае, когда знаменатель ее не имеет никаких иных множителей, кроме 2 и 5. Обращение обыкновенной дроби в десятичную можно выполнить или способом, основанным на разложении знаменателя на простые множители, или способом деления числителя на знаменатель. В тех случаях, когда обыкновенная дробь не обращается в десятичную, имеется возможность обратить ее в десятичную *приближенно*. Способ, который здесь применяется, состоит в делении числителя на знаменатель. *Значит*, это второй из ранее указанных способов с той только разницей, что в случае обращения обыкновенной дроби в десятичную мы об этом знаем заранее и знаем, сколько десятичных знаков будет иметь искомая десятичная дробь.

Когда десятичная дробь действительно обращается в десятичную, то мы говорим, что она обращается **точно**, каким бы способом мы ее не обращали, у нас получится **конечная** десятичная дробь.

Если обыкновенная дробь не обращается в десятичную точно, а только приближенно, то от деления получается бесконечная десятичная дробь, которая может иметь неограниченно много десятичных знаков. Написать бесконечно много десятичных знаков нельзя; поэтому деление прерывают и пишут столько десятичных знаков, сколько их в данном случае требуется.

Во всех таких случаях результат получается приближенный и округленный[1]. Запишем результат, который у нас получился в двух последних случаях.

---

[1] Согласно программе 1960 г. округление натуральных и дробных чисел, а также связанные с округлением понятия «приближенное значение числа», «точность» и «погрешность» приближенного числа проходятся **впервые** в теме «Десятичные дроби». — *Ред.*

Обращение $\frac{1}{3}$ в десятичную дробь.

0,3	вычислена	с	точностью	до	одной	десятой;
0,33	»	»	»	»	»	сотой;
0,333	»	»	»	»	»	тысячной;
0,3333	»	»	»	»	»	десятитысячной.

Приближенное значение дроби $\frac{1}{3}$ везде с недостатком.

Обращение $\frac{1}{6}$ в десятичную дробь.

0,2	вычислена	с	точностью	до	одной	десятой;
0,17	»	»	»	»	»	сотой;
0,167	»	»	»	»	»	тысячной;
0,1667	»	»	»	»	»	десятитысячной.

Приближенное значение дроби $\frac{1}{6}$ везде с избытком.

69. Понятие о периодической дроби. Бесконечная десятичная дробь, в которой одна или несколько цифр повторяются без конца в одной и той же последовательности, называется периодической десятичной дробью. Мы только что встречались с такими дробями, например, при обращении $\frac{1}{3}$ в десятичную мы получили 0,333333..., при обращении $\frac{1}{6}$ — 0,1666666...

Так же при обращении $\frac{2}{11}$ в десятичную дробь получится 0,1818181818...; при обращении $\frac{26}{111}$ в десятичную получится 0,234234234234...

Здесь в первом случае повторяется одна цифра 3, во втором случае — тоже одна цифра 6, в третьем случае повторяются две цифры — 18, а четвертом — три цифры — 234.

Совокупность повторяющихся цифр называется периодом этой дроби.

Период первой дроби — цифра 3.

Период второй дроби — одна цифра 6.

Период третьей дроби составляют две цифры — 18.

Период четвертой дроби состоит из трех цифр — 234.

На это учителю следует обратить особое внимание, потому что учащиеся под периодом, как правило, разумеют нечто крайне неопределенное. Необходимо говорить о периоде не отвлеченно, а совершенно конкретно. Это значит: нужно не один раз, а много и не на одном примере, а на многих показывать период каждой отдельной дроби. Например, взяв третью периодическую дробь, подписать под ней:

$$
\begin{array}{cccccc}
0, & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & \text{период} & \text{период} & \text{период} & \text{период} & \text{период}
\end{array}
$$

Кроме того, периоды нужно нумеровать цифрами: первый, второй, третий и т. д. Для этого, например, четвертую дробь можно оформить так:

	1-й период	2-й период	3-й период	4-й период
	↓	↓	↓	↓
0,	234	234	234	234

При рассмотрении различных периодических дробей можно видеть, что у некоторых из них периоды, т. е. повторение цифр, начинаются сразу после запятой; это наблюдается у первой, третьей и четвертой дробей. Однако у второй дроби между запятой и первым периодом есть неповторяющаяся цифра — 1. Можно привести еще такой пример второго рода: при обращении $\frac{5}{6}$ в десятичную дробь получается 0,833333...

Здесь между запятой и первым периодом тоже одна неповторяющаяся цифра — 8.

В связи с этой особенностью периодические дроби разделяются на чистые и смешанные. Периодическая дробь называется ч и с т о й, если ее период начинается тотчас после запятой. Напротив, периодическая дробь называется с м е ш а н н о й, если у нее между запятой и первым периодом есть одна или несколько неповторяющихся цифр.

Учащиеся должны усвоить форму записи и способ чтения периодических дробей.

З а п и с ь. Периодическая дробь бесконечна, но остается неясным, сколько периодов нужно написать, чтобы это считалось достаточным. Это безразлично: можно написать три периода, четыре, пять, можно даже два, но во всех случаях за ними должны стоять точки (довольно трех), показывающие, что запись не закончена.

Есть, однако, другой общепринятый способ записи периодических дробей: цифры периода принято писать один раз в скобках и не ставить после них многоточия. Те периодические дроби, которые нам встречались и которые мы записывали, многократно повторяя период, можно писать так.

дробь	0,333333...	записывается	0,(3);
»	0,166666...	»	0,1(6);
»	0,18181818...	»	0,(18);
»	0,234234234...	»	0,(234);
»	0,83333...	»	0,8(3).

Чтение. Периодическая дробь 0,(3) читается так: 0 целых, 3 в периоде.

Периодическая дробь 0,1(6) читается так: 0 целых, 1 до периода, 6 в периоде.

Периодическая дробь 5,00(17) читается так: 5 целых, два нуля до периода, 17 в периоде.

Все предыдущие рассуждения говорят о том, что периодические дроби возникают при обращении обыкновенных дробей в десятичные. При этом полезно представить совместно с учащимися весь пройденный нами путь с самого начала. При первых попытках обращать обыкновенные дроби в десятичные выяснилось, что такое обращение допускает не всякая дробь. Только такая обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержит никаких множителей, кроме 2 и 5, может обращаться в конечную десятичную. Если же знаменатель обыкновенной десятичной дроби не содержит в своем разложении множителей 2 и 5 или содержит наряду со множителями 2 и 5 какие-нибудь другие множители, то такая обыкновенная дробь не может быть точно равна конечной десятичной. Делением числителя на знаменатель ее можно обратить в бесконечную десятичную дробь, и эта десятичная дробь будет всегда периодической.

Этот последний факт учащиеся должны проверить сами. Для этого следует взять несколько таких обыкновенных дробей, которые заведомо не допускают обращения в десятичные. Эти дроби должны быть разнообразными, например одна дробь со знаменателем 21, другая — со знаменателем 22, третья — со знаменателем 15 и т. д. Пусть учащиеся выполнят все необходимые деления и увидят, какие при этом получатся частные и какие будут остатки.

Они увидят, что число остатков всегда будет ограниченным, и они неизбежно начнут повторяться, а вслед за ними будут повторяться и цифры частного.

Как используются периодические дроби на практике? Это вопрос, который неизбежно возникнет у учащихся. Если периодическая дробь встречается при решении какой-нибудь задачи, имеющей жизненное значение, а не просто вставленной в задачник для тренировки, то она берется приближенно с таким числом десятичных знаков, какого требует сущность данной задачи. В одних случаях она будет взята с недостатком, т. е. вместо 0,33333...— 0,33, в других случаях — с избытком, т. е. вместо 0,166666...— 0,167.

70. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями. После изучения действий над десятичными дробями полезно выполнить ряд упражнений на совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями. Предполагается, что к этому времени ученики хорошо выполняют действия отдельно над обыкновенными и отдельно над десятичными. Если этого еще нет, то совместные действия будут только нагромождением трудностей и будут вызывать у учеников чувство неудовольствия. Поэтому, прежде чем приступить к совместным действиям, может быть, полезно выполнить несколько упражнений на действия с обыкновенными дробями, которые к этому времени могли быть частично забыты.

Укажем различные случаи, с которыми мы встретимся.

1. При решении задачи или примера на совместные действия можно обратить все данные обыкновенные дроби в десятичные. При этом могут быть два случая: или все обыкновенные дроби, входящие в задачу, обращаются в десятичные точно, или некоторые и даже все обыкновенные дроби обращаются в десятичные только приближенно.

2. При совместных действиях можно обратить все данные десятичные дроби в обыкновенные.

3. В некоторых случаях можно оставить дроби такими, какими они были, и выполнять действия с теми и другими дробями одновременно.

4. В некоторых случаях часть примера решают в обыкновенных дробях, а другую часть — в десятичных, после чего получают два числа, связанных каким-нибудь знаком действия, и оканчивают вычисление в зависимости от обстоятельств.

5. Когда при совместных действиях требуется применечие распределительного закона, то *не обращают смешанные числа в неправильные дроби.*

Рассмотрим все эти случаи последовательно.

1а. $\left(\frac{3}{8}+0,625\right):\left(\frac{5}{16}-0,1875\right)=?$

Обратим все обыкновенные дроби в десятичные:

$$\frac{3}{8}=0,375; \quad \frac{5}{16}=0,3125.$$

После подстановки пример принял вид:

$(0,375+0,625):(0,3125-0,1875).$

Вычисления:

1) $0,375+0,625=1;$
2) $0,3125-0,1875=0,125;$
3) $1:0,125=8.$

1б. $\left(3,25+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right):\left(0,3-\frac{2}{11}\right)=?$

Обратим обыкновенные дроби в десятичные:

$$\frac{4}{5}=0,8; \quad \frac{5}{6}\approx 0,83;$$

$$\frac{2}{11}\approx 0,18.$$

Тогда пример примет вид:

$$(3,25+0,8+0,83):(0,3-0,18).$$

Вычисления:

1) $3,25+0,8+0,83=4,88;$
2) $0,3-0,18=0,12;$
3) $4,88:0,12\approx 40,67.$

2. $\dfrac{\left[\left(5-2\frac{7}{15}\right):4\right]+\left[(10-5,6):12\right]-\frac{17}{45}}{2,6\cdot 12+0,8\cdot 31}=?$

Обратим все десятичные дроби в обыкновенные:

$$\frac{\left[\left(5-2\frac{7}{15}\right):4\right]+\left[\left(10-5\frac{3}{5}\right):12\right]-\frac{17}{45}}{2\frac{3}{5}\cdot 12+\frac{4}{5}\cdot 31}=?$$

Вычисление:

1) $5-2\frac{7}{15}=2\frac{8}{15}$;

2) $2\frac{8}{15}:4=\frac{38}{15\cdot4}=\frac{19}{30}$;

3) $10-5\frac{3}{5}=4\frac{2}{5}$;

4) $4\frac{2}{5}:12=\frac{22}{5}:12=\frac{22}{5\cdot12}=\frac{11}{30}$;

5) $\frac{19}{30}+\frac{11}{30}=\frac{30}{30}=1$;

6) $1-\frac{17}{45}=\frac{28}{45}$;

7) $2\frac{3}{5}\cdot12=\frac{13}{5}\cdot12=\frac{13\cdot12}{5}=\frac{156}{5}=31\frac{1}{5}$;

8) $\frac{4}{5}\cdot31=\frac{4\cdot31}{5}=\frac{124}{5}=24\frac{4}{5}$;

9) $31\frac{1}{5}+24\frac{4}{5}=56$;

10) $\frac{28}{45}:56=\frac{28}{45\cdot56}=\frac{1}{45\cdot2}=\frac{1}{90}$.

3. Пользоваться одновременно обыкновенными и десятичными дробями без обращения одних дробей в другие особенно удобно, когда в пример входят только умножение и деление. Например,

$$\frac{\frac{2}{9}\cdot0{,}75\cdot\frac{2}{7}}{\frac{4}{21}\cdot2{,}5}$$

Перепишем пример так:

$$\frac{2\cdot75\cdot2\cdot21\cdot10}{9\cdot100\cdot7\cdot4\cdot25}=\frac{1}{10}.$$

4. $$\frac{1\frac{1}{6}+4\frac{2}{3}}{5\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}+\frac{3{,}75+1{,}5}{0{,}1-0{,}0125}=?$$

Здесь пример явно распадается на две части, соединенные знаком плюс (+). В первом слагаемом — только обыкновенные дроби, а во втором — только десятичные.

Отдельно решим первую часть и отдельно вторую, а затем сложим полученные результаты.

1) $1\frac{1}{6}+4\frac{2}{3}=5\frac{1+4}{6}=5\frac{5}{6}$;

2) $5\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=4\frac{9-5}{6}=4\frac{4}{6}=4\frac{2}{3}$;

3) $5\frac{5}{6}:4\frac{2}{3}=\frac{35}{6}:\frac{14}{3}=\frac{35\cdot 3}{6\cdot 14}=\frac{5\cdot 1}{2\cdot 2}=1\frac{1}{4}$;

4) $3{,}75+1{,}5=5{,}25$;

5) $0{,}1-0{,}0125=0{,}0875$;

6) $5{,}25:0{,}0875=60$;

7) $1\frac{1}{4}+60=61\frac{1}{4}$.

5. Применение распределительного закона часто облегчает и ускоряет вычисления. Рассмотрим пример:

$$5\frac{3}{4}\cdot 12=?$$

Вместо того чтобы обращать $5\frac{3}{4}$ в неправильную дробь, мы поступим иначе:

$$5\frac{3}{4}\cdot 12=\left(5+\frac{3}{4}\right)\cdot 12=5\cdot 12+\frac{3}{4}\cdot 12=60+9=69.$$

Еще пример:

$$\left(3\frac{2}{3}+4\frac{3}{4}\right)\cdot 12=?$$

Вместо общего способа применим такой:

$$3\frac{2}{3}\cdot 12+4\frac{3}{4}\cdot 12=3\cdot 12+\frac{2}{3}\cdot 12+4\cdot 12+\frac{3}{4}\cdot 12=$$
$$=36+8+48+9=101.$$

Пока ученик находится в стенах школы, он должен уметь выполнить любое упражнение любым способом; но, применяя различные способы вычислений, иногда, может быть, очень длинные и нерациональные, и не раз ошибаясь в выборе способов, он должен постепенно выработать у себя сноровку, позволяющую быстро выбирать наиболее удобные пути, какими следует идти в каждом конкретном случае.

ЧАСТЬ IV

ИЗУЧЕНИЕ АРИФМЕТИКИ В VI КЛАССЕ

Глава восьмая[1]

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АРИФМЕТИКИ

Методические приемы подготовки учащихся пятых классов к изучению первого раздела новой программы по арифметике для VI класса — округление целых и дробных чисел, среднее арифметическое, понятие о погрешности приближенного числа — посильно освещены автором выше в главе первой, пятой и седьмой.

Что касается раздела программы VI класса, то на ближайшее время, впредь до накопления достаточного опыта этой, пока еще новой для многих школ Российской Федерации, программной темы, учителям арифметики рекомендуется при ее изучении держаться методических установок, указаний и образцов упражнений, данных в статье К. И. Нешкова «Арифметика» в сборнике «О преподавании математики в восьмилетней школе», изд. АПН РСФСР, 1961 г.

Для данного момента к рекомендациям указанной статьи едва ли своевременно дополнять что-либо, кроме подтверждения необходимости чрезвычайной осторожности и постепенности при введении новых понятий и терминов, связанных с вопросами приближения, а также опасности излишнего теоретизирования. Задача данной главы не-

[1] Эта глава составлена в 1960 г. в связи с появлением в новой программе для VI класса раздела «Приближенные вычисления».

сколько иная: она перекликается с высказыванием общего характера, которым начинается статья К. И. Нешкова и который может открывать известную перспективу перестройки школьного курса арифметики вообще, и в частности в вопросе о приближенных вычислениях и их связи с практикой измерений.

«Чтобы добиться последовательного развития знаний и навыков учащихся, следует рассматривать процесс обучения арифметике в I—VI классах как единый процесс...»

Из этого высказывания большой принципиальной важности автор цитаты и вместе с ним сектор методики математики Института общего и политехнического образования АПН пока делают только вывод об особом значении преемственности в обучении IV и V классов в форме взаимного посещения уроков учителями, взаимного изучения программ и прочего. Но, может быть, сегодня уже на очереди вопрос не просто о «преемственности», а об единстве содержания и методики математики в восьмилетней школе с первого до последнего класса.

Этот вопрос не следует ставить в книге по методике арифметики, он многими своими сторонами выходит за границы соображений чисто методического характера. Но автор этих строк убежден, что именно на путях единства и решительной ликвидации разрывов между частями единой восьмилетней школы всеобщего обучения (начальной школы и V—VIII классов) возможно удовлетворительное решение давнишнего вопроса о школьном курсе арифметики натуральных чисел и нового вопроса о методике изучения точных и приближенных чисел.

Автор позволяет себе надеяться, что помещаемое ниже краткое изложение недавно опубликованных им соображений по последнему вопросу в брошюре «Начальные сведения о приближенных вычислениях» послужит полезным материалом для тех учителей V—VI классов, которые могут работать в данной области по индивидуальному плану, и для возможных педагогических экспериментов в наших педвузах и Институте общего и политехнического образования АПН РСФСР.

71. Как возникают приближенные числа. Числа, которые мы называем приближенными, иначе говоря, верными только приблизительно, но не совершенно точно, постоянно встречаются нам в жизни, в практике.

Приближенные числа могут получаться прежде всего при счете предметов, если этих предметов слишком много и их почему-либо трудно или даже нельзя подсчитать точно.

Если, например, трое подсчитывали деревья на одном и том же участке леса или рощи большой площади, то могут получиться итоги вроде таких: у первого — 2640 деревьев, у второго — 2703, у третьего — 2686 деревьев. Что можно сказать после такого подсчета? Только одно: на участке круглым числом около 2700 деревьев. Число 2700 — приближенное; точного числа деревьев мы не узнали, но ошибка невелика

Другой пример. Чтобы узнать число жителей города, обыкновенно производят однодневную перепись, приглашая большое число счетчиков. Допустим, что итоги всех счетчиков безошибочны и правильно сложены.

Получилось число жителей, допустим, 65 287. Но, пока шел подсчет, сколько-то жителей уехало, вместо них приехало сколько-то новых; родились новые люди, некоторые могли умереть. Все, что можно утверждать уверенно,— это то, что в день переписи в городе жило около 65 000 человек. Это — число приближенное, но оно дает достаточное представление о численности населения города. Здесь приближенное число возникло в результате округления. Точное число каждое мгновение может измениться, тогда как округленное до тысячи довольно устойчиво в течение длительного промежутка времени.

Конечно, в результате счета предметов могут получаться и точные числа, если предметов не слишком много, если их число не слишком быстро меняется и если их без затруднений можно подсчитывать. Таковы: число окон или дверей в доме, число домов на улице, число учеников, пришедших сегодня в класс.

Итак, в разных случаях и в разных обстоятельствах счет предметов может приводить и к точному, и к приближенному числу.

Но часто число получается в результате измерения какой-нибудь величины, например, длины, площади, объема, веса. Такое число (его называют значением величины) всегда бывает приближенным.

Измеряя длину дома метром без делений или метровым полевым циркулем, мы получим почти всегда не целое число метров, а, например, 32 *м* с некоторым остатком.

Что же можно знать о длине дома после этого измерения? Точное числовое значение длины остается неизвестным, но мы знаем, что эта длина больше 32 *м*, но меньше 33 *м*. Как говорят, длина дома равна 32 *м* «с точностью до 1 *м*». Если остаток больше половины метра, то лучше считать длину дома равной 33 *м*. И то и другое — числа неточные, а приближенные.

Можно было бы измерить длину дома и точнее, взяв мерную ленту (рулетку), разделенную на сантиметры. Если после измерения получилось, допустим, 32,36 *м* с некоторым остатком, то точность будет значительно большей (неточность меньше 1 *см*), но число 32,36 все же будет не точным, а приближенным, только с меньшей погрешностью (неточностью).

То же получится при измерении величины любого другого рода. При взвешивании, например, очень трудно добиться полного равновесия; нельзя изготовить гири идеально точного веса, поэтому допустимые границы отклонений устанавливаются государством.

Итак, измерение всегда приводит не к точному, а к приближенному числу той или другой степени точности. В начальной школе упражнения в измерении длины и веса начинаются уже на первом году обучения. С 1954/55 учебного года объяснительная записка к программе по арифметике для начальной школы совершенно правильно требует, «чтобы число и мера служили орудием познания окружающей действительности», так чтобы в I—IV классах учащиеся приобрели «не только прочные знания мер, но и умение пользоваться ими для измерения».

При фактических измерениях, хотя бы длины, у детей должны возникнуть первичные представления о приближенном числе как результате измерения. Наконец, приближенные числа могут возникать в результате арифметических операций над точными и тем более над приближенными числами (или точными и приближенными вместе). Самый простой случай приближенного числа в результате вычисления известен учащимся начальной школы: это — деление с остатком, дающее приближенное частное с точностью до единицы. После изучения десятичных дробей на этой основе возникает весьма распространенный вид приближенного числа — приближенное частное с любой десятичной точностью.

Итак, можно указать три основных источника приближенных чисел: 1) измерение величины; 2) вычисление; 3) округление чисел как точных, так и приближенных.

72. Погрешность приближенных чисел и точность приближения. Изучение приемов приближенного вычисления следует проводить в курсе арифметики I—VI классов, но проводить постепенно и осторожно, исходя из практики измерения и округления чисел, главным образом в связи с практическими жизненными задачами. Нужно предполагать, что самая первоначальная подготовка в этом направлении будет вестись уже в I—IV классах школы. В какой мере удастся осуществить на деле связь и преемственность обучения арифметике между начальной школой и V—VI классами вообще, и в данном вопросе в частности, покажет ближайшее будущее.

Но так или иначе речь идет о начальной стадии изучения приближенных чисел и операций с ними, о простейших сведениях, задачах, упражнениях, которые нужно включить в учебники и задачники для первых шести лет обучения. На всем этом этапе самым удобным материалом для практических занятий, задач и числовых примеров будут упражнения в *измерении* (преимущественно длины), а также в *делении с остатком*, приводящим *к приближенному частному*.

С самого начала работы с приближенными числами независимо от их происхождения сами собой возникают два вопроса: о *точности приближения* и его *погрешности*, иначе говоря, его неточности.

Самое простое измерение длины дома, вроде приведенного выше, на стр. 277, приводит к *двойному неравенству*:

$$32 \text{ м} < x < 33 \text{ м},$$

где x — длина дома в метрах, которую мы точно не знаем и узнать не можем. Не будем пока решать, в каком месте курса арифметики действительно нужно показать *учащимся* знаки неравенства и оформлять двойным неравенством результаты измерений; несомненно одно, для такого оформления от учащегося не требуется ничего, кроме знания знаков неравенства и буквы x, которой уже наши первоклассники привыкли обозначать неизвестное число. Во всяком случае, сам процесс измерения неразделенным метром или самодельной бумажной линеечкой, разделенной на сантиметры (без миллиметров) для измерения отрезков на бумаге, с оформлением или простой записью двух приближенных значений длины легко доведет до сознания школьника даже III—IV классов нехитрое рассуждение, подкрепленное наглядностью и собственной практикой измеряющего:

«Я ищу длину дома: 32 *м* — мало; 33 *м* — много; если я возьму число 32 или 33, это будет не совсем верно, но ошибка меньше метра». Так получается первое представление о точности приближения и уясняется смысл выражения «длина дома равна 32 *м* с точностью до 1 *м*».

Впрочем, точный смысл этого общеупотребительного выражения далеко не просто усваивается учащимися первых лет обучения. Проще и нагляднее было бы говорить: «Длина равна 32 *м*, погрешность не больше 1 *м*».

Понятие о приближенном частном легко дать на любом примере деления с остатком. Например, при делении 26 : 11 получается частное 2 и остаток 4; как и при измерении длины дома, фактически получается двойное неравенство

$$2 < x < 3.$$

Здесь как 2, так и 3 — два приближенных значения частного с точностью до 1; но достаточно взглянуть на остаток, чтобы выбрать из них ближайшее, дающее погрешность, которая меньше половины единицы.

В случае измерения в предыдущем примере ближайшее значение длины может быть установлено на глаз. После упражнений может быть оформлена запись приближенных равенств $x \approx 32$ *м*, $x \approx 2$, точных каждое до половины единицы.

В зависимости от условий и плана работы все упражнения, может быть, удобнее отработать на более простых для технического выполнения примерах с меньшими числами, пользуясь в качестве единицы, например, сантиметром, а не метром.

С помощью учителя учащиеся узнают, что два приближенных значения длины называются: одно — «с недостатком», другое — «с избытком» — и что погрешность каждого из них не может быть больше единицы — ведь недостаточное и избыточное значения сами отличаются друг от друга на 1. Так сам процесс измерения уже формирует представление о погрешности измерения или вычисления, именно о погрешности, которая имеет определенный деловой смысл, а не об ошибке, за которую можно получить «двойку». Мало того, малолетний школьник на деле уже ясно представляет себе, хотя и не может этого сформулировать (словаря еще не хватает), то, что в теории приближенных чисел называется предельной погрешностью и что довольно неудачно, хотя давно и бесповоротно названо точностью приближения. Учителя-практики всей восьмилетки, а не только V—VIII классов отдельно могли бы проверить на опыте, какой из терминов методически удачнее.

73. Относительная погрешность приближенного числа. Погрешность приближенного числа, однако, еще недостаточно характеризует качество измерения или вычисления, его тщательность и точность полученного результата на практике. При измерении длины дома рулеткой может, например, получиться число 3236 *см*. Его погрешность не превышает 1 *см*. При измерении длины корешка книги получилось 18 *см*. Погрешность также могла доходить до 1 *см*. Совершенно ясно, что первое измерение выполнено точнее второго, хотя погрешности одинаковы. Если при взвешивании картофеля не хватило 100 *г* на общий вес 100 *кг*, это несущественно; а такой же недовес в 100 *г* при общем весе в 300 *г* совершенно недопустим. Качество измерения, степень его тщательности определяются не самой погрешностью, а тем, насколько малую часть найденного значения величины эта погрешность составляет. При измерении дома с погрешностью до 1 *см* эта погрешность составляет не более $\frac{1}{3236}$ его длины; когда же измерялся корешок книги, ошибка до 1 *см* составляла уже до $\frac{1}{18}$ измеряемой величины, так что второе измерение качественно хуже первого. Вот несколько примеров.

1. Длина классной комнаты приближенно равна 8 *м*, причем отброшен остаток, не превышающий 5 *см*. Погрешность измерения не превышает 5 *см*, а относительная погрешность — до 0,025, или до 2,5%, длины комнаты.

2 При взвешивании 800 *г* конфет допущена неточность, не превышающая 10 *г*. Погрешность не превышает 10 *г*, а относительная погрешность — до 0,05, или 5%, общего веса.

3. При делении 25 на 8 вместо точного частного взяли приближенное до одной десятой. Погрешность приближенного частного равна 0,025, а относительная погрешность равна 0,001 делимого (проверить).

74. Правила округления точных и приближенных чисел. До самого последнего времени при округлении целых и дробных чисел, выраженных (точно или приближенно) по десятичной системе нумерации, до любого (целого или десятичного) знака, соблюдалось так называемое *«правило четной цифры»*, относившееся к случаю, когда при округлении отбрасывается только цифра 5, за которой не следует других цифр. Это правило было условным, недостаточно обоснованным и без нужды осложняло практику вычислений. Как сообщило Главное управление школ РСФСР («Математика в школе», 1960, № 2, стр. 68—69), новейшая машинная вычислительная математика отказалась от применения при округлении «правила четной цифры», и согласно рекомендации Управления школ во всех классах средней школы надлежит руководствоваться следующими правилами округления путем отбрасывания лишних цифр:

1. Если первая (слева) из отбрасываемых цифр 0, 1, 2, 3, 4, то последняя оставляемая цифра не изменяется.

2. Если первая (слева) из отбрасываемых цифр 5, 6, 7, 8, 9, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу[1].

Образцы примеров на округление целых и дробных чисел приведены в этой книге (§ 51), а также в указанной выше методической рекомендации Управления школ РСФСР в журнале «Математика в школе».

Правила округления чисел впервые формулируются при прохождении в V классе раздела «Десятичные дроби»; в III—IV классах и при повторении в разделе «Натуральные числа» V класса примеры на округление целых чисел еще не нуждаются в формулировке особых правил. При формулировке правил округления на надлежащем месте и в надлежащее время рекомендуется также начинать не

[1] В практических заданиях не всегда можно применять эти правила механически: иногда самый характер такого задания требует округления только с недостатком или, наоборот, только с избытком. Желательно, чтобы в своей практике учителю удалось подобрать задания, допускающие только такое одностороннее округление.

с поднесения ее готовой, а с целесообразно подобранных измерений, задач, вычислений, предоставляя учащимся формулировку правил только после достаточного практического опыта. Эта формулировка должна быть точной, но при коллективной выработке может иметь различные варианты изложения.

Необходимо помнить, что округление чисел до такого-то десятичного разряда само по себе, в отрыве от жизненного, практически значимого задания, есть все же только формально-оперативный навык, не дающий представления о реальной ценности округленного результата Нужно, чтобы учащиеся как можно раньше, быть может еще в начальной школе, привыкли отбрасывать лишние знаки и округлять результаты в связи с характером конкретного задания.

Учитель арифметики, встречаясь с результатами измерения как при решении задач из задачника, так и при практических упражнениях в измерении, должен настойчиво подчеркивать то обстоятельство, что точность результата измерения всегда должна определяться целью конкретного измерения, его практической значимостью.

Длина дома в 25,288 *м* — нелепость, измеряя рулеткой, невозможно или почти невозможно получить такую точность, да она на практике и не нужна. Если такое число встретится в задаче, его нужно округлить, сообразуясь с реальным смыслом задачи.

Ширину листа бумаги достаточно давать с точностью до 1 *мм*, например 20,3 *см*, но не 20,34 *см*; измерение с точностью до 0,1 *мм* трудно выполнить и, вообще говоря, не нужно. Если в задаче дана ширина, например, 20,34 *см*, то ее прежде всего следует округлить по крайней мере до 0,1 *см*.

Отсюда, конечно, нельзя сделать такого вывода, что всегда достаточно сохранять не больше одного-двух знаков после запятой. Некоторые величины, например коэффициенты линейного расширения, выражаются приближениями с точностью до пятого, даже седьмого десятичного знака: для свинца — 0,000029, платины — 0,000009, алмаза — 0,0000013.

Измерение площади комнаты для житейских целей нет надобности доводить до квадратных сантиметров: чаще всего достаточно ограничиться точностью половины или четверти квадратного метра. Однако при измерении быть и сотые, но число было округлено до десятых. Если же написано 2,40, то это значит, что нам известны целые (2), десятые (4) и сотые (0); но могли быть и тысячные, которые при округлении были отброшены, если сначала мы имели, например, число 2,403.

То же можно сказать и о числе 0,020. Здесь последний нуль обозначает число тысячных, но могли быть отброшены десятитысячные. На том же самом основании мы должны отличать 1,23 от 1,230.

Подобное же отличие проводится и для целых чисел. Если написано число 382, то принято считать, что у этого числа все цифры верные. Но если нельзя ручаться за последнюю цифру, то неудобно писать его в виде 380; тогда можно подумать, что нуль—верная цифра. Лучше употреблять описательное выражение «около 380» или «приблизительно 380».

Но в VI классе и даже в тех пятых классах, где учащиеся знакомы с показателем степени, можно показать, что число округлено до десятков, записав $38 \cdot 10$. Здесь число 38 состоит, по принятому условию, из одних верных цифр, а второй множитель указывает, что точная цифра единиц неизвестна.

Если в числе 4720 верны только две первые цифры, то его округляют и пишут так: $47 \cdot 10^2$. Когда в справочниках мы видим, например, такие записи:

поверхность Земли: $510 \cdot 10^6$ *км*²;

объем Земли: $1083 \cdot 10^9$ *км*³;

масса Земли: $598 \cdot 10^{19}$ *т*;

среднее удаление Земли от Солнца: $149{,}5 \cdot 10^6$ *км*;

поверхность Солнца: $6079 \cdot 10^9$ *км*²;

объем Луны: $22 \cdot 10^9$ *км*³;

то их нужно понимать так:

поверхность Земли равна приближенно 510 млн. *км*²;

объем Земли — 1083 млрд. *км*³;

среднее расстояние Земли от Солнца — 149,5 млн. *км*.

Везде мы имеем числа округленные, иногда до очень высоких разрядов, даже не имеющих употребительных названий, как, например, 19-й разряд. Но всегда перед степенью 10, заменяющей неизвестные или округленные разряды, стоит число, все цифры которого мы считаем в е р н ы м и.

Такое же значение имеет словесная запись, когда, например, пишут, что население города составляет 93 тысячи человек.

77. Значащие цифры и десятичные знаки. Десятичными знаками числа называются те его цифры, которые расположены справа от запятой.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, начиная с первой слева (отличной от нуля) до последней, за правильность которой можно ручаться (даже если это нуль, который в точных десятичных дробях на конце просто не пишется), например:

5 — одна значащая цифра,

0,5 — одна значащая цифра (один десятичный знак),

0,05 — одна значащая цифра (два десятичных знака),

0,25 — две значащие цифры (два десятичных знака),

0,025 — две значащие цифры (три десятичных знака),

0,304 — три значащие цифры (три десятичных знака),

0,0208 — три значащие цифры (четыре десятичных знака),

1234 — четыре значащие цифры,

0,2134 — четыре значащие цифры (четыре десятичных знака),

0,01034 — четыре значащие цифры (пять десятичных знаков).

О числе 33,13 можно сказать, что оно:

1) дано с точностью до 0,01 (одной сотой),

2) » » до сотых долей,

3) с двумя десятичными знаками (или знаками после запятой),

4) с предельной погрешностью до 0,01.

78. Основной принцип округления приближенных чисел. Результаты разного рода приближенных подсчетов, например среднего числа зерен ржи на каждые 10 *г* веса, выводятся посредством вычисления среднего арифметического. Если взять 5 порций зерен по 10,0 *г*, взвешивая с точностью до 0,1 *г*, мы получим разные числа зерен, так как зерна не могут быть совершенно одинаковыми по весу. Пусть примерно получились такие числа: 308, 332, 326, 341, 305. Среднее арифметическое этих чисел дает 322,4. Во всех пяти случаях цифра сотен та же, что и в среднем, следовательно, за верность ее можно ручаться. Цифра десятков колеблется от 0 до 4, но колеблется не очень сильно: ее можно назвать н е в п о л н е н а д е ж н о й, а цифры единиц уже, безусловно, не заслуживают доверия. Окончательный вывод можно сделать такой: каждые 10,0 г испытуемой ржи содержат в среднем около $32 \cdot 10$, или $3{,}2 \cdot 10^2$, зерен: это получается в результате округления числа до двух значащих цифр[1].

Здесь применяется основной принцип округления приближенных чисел, вытекающий из принципа академика А. Н. Крылова (1863—1945). В приложении к школьному употреблению этот принцип можно изложить так: «Число, получающееся в результате измерения и вычисления, записывается так, чтобы по самому его начертанию можно было судить о степени его точности. Именно все значащие цифры такого числа, кроме последней, должны быть верны, а последняя цифра невполне надежна и может в среднем допускать погрешность не больше чем на одну-две единицы».

79. Арифметические действия над приближенными числами. Рассмотрим сначала примеры на сложение и вычитание.

Сложение целых приближенных чисел. Пусть, например, известна приближенная численность населения четырех городов: в первом городе 26 000 жителей, во втором — 3800, в третьем — 2900, в четвертом — 1130.

Из условия задачи видно, что число жителей первого города известно с точностью до тысяч, второго и третьего — до сотен и четвертого — до десятков. Различную точность этих чисел можно объяснить тем, что население малого города точнее учтено, чем большого. Сложим эти числа:

$$\begin{array}{r} 26\,000 \\ +\;\; 3\,800 \\ 2\,900 \\ 1\,130 \\ \hline 33\,830 \end{array}$$

Так как в первом слагаемом надежны только две цифры слева (26), то и в сумме надежными можно считать только первые две цифры (33). Искомая сумма после округления — 34 тысячи[2].

---

[1] Пример заимствован из книги проф В. М. Брадиса «Средства и способы элементарных вычислений», Учпедгиз, 1954, стр. 43.

[2] См. там же.

Сложение приближенных десятичных дробей.

$$3{,}258 + 15{,}3 + 9{,}65 + 25{,}12.$$

Первое слагаемое содержит восемь тысячных долей. Так как число тысячных в остальных слагаемых нам неизвестно, то найти сумму тысячных мы не можем. Точно так же мы не можем найти сумму сотых, так как сотые доли во втором слагаемом отсутствуют. Десятые доли налицо у всех четырех слагаемых; их сумма может быть вычислена.

При выполнении сложения лучше сохранять один запасной знак сверх того, какой имеется у всех слагаемых; в данном случае следует сохранять сотые доли в трех слагаемых; тысячные в первом слагаемом следует отбросить, соблюдая правило округления:

$$\begin{array}{r} 3{,}26 \\ +\ 15{,}3 \\ 9{,}65 \\ 25{,}12 \\ \hline 53{,}33 \end{array}$$

Окончательно сумма выразится числом 53,3; запасной знак в ней следует, конечно, отбросить: он совершенно ненадежен.

Вычитание. Чтобы найти разность чисел 22,8 и 1,248, сохраняем в уменьшаемом один десятичный знак, а в вычитаемом еще один запасной, отбрасывая в вычитаемом тысячные с округлением; тогда пример примет вид:

$$\begin{array}{r} -\ 22{,}8 \\ 1{,}25 \\ \hline 21{,}55, \end{array}$$

а разность выразится числом 21,6.

Правило сложения и вычитания приближенных чисел.

При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Примечание. При вычитании чисел могут встретиться такие случаи, когда уменьшаемое мало отличается от вычитаемого, например: 19 — 18; 123 — 121; 4235 — 4232... В таком случае разность выражается малым числом, имеющим во всяком случае значительно меньше знаков, чем уменьшаемое и вычитаемое. При сложении такой случай исключается, а при вычитании разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое. Эта «потеря значащих цифр», или «потеря точности», в случае, когда уменьшаемое по величине близко к вычитаемому, хорошо видна в приводимом ниже примере.

Найти толщину тонкостенной трубы, если внешний радиус ее 15,6 *мм*, а внутренний — 15,4 *мм*. Вычитая из первого числа второе, находим, что толщина трубы равна 0,2 *мм*. Мы видим, что уменьшаемое (15,6) имеет три значащие цифры, вычитаемое (15,4) имеет столько же значащих цифр, а разность (0,2) имеет только одну значащую цифру. Получилась «потеря значащих цифр».

Вследствие этого на практике, когда это возможно, стараются избегать вычисления искомой величины с помощью вычитания **близких** чисел.

Умножение приближенных чисел. Будем выполнять умножение, помня, что при умножении приближенных чисел с одинаковым числом **значащих цифр** сохраняется в произведении столько **значащих цифр**, сколько их было в каждом из сомножителей.

Пример. Выполняя обычным путем умножение **приближенного** числа 34,6 на **приближенное** же число 23,8, мы получили бы 823,48. Но в полученном произведении вполне надежны только цифры сотен и десятков; уже цифры единиц не вполне надежны согласно принципу А. Н. Крылова (п. 78). Цифры десятков и единиц произведения уже совсем ненадежны, так что произведение нужно записать так:

$$34,6 \cdot 23,8 \approx 823.$$

Пусть теперь нужно перемножить 60,183 и 0,821. Сомножители имеют неравное число значащих цифр: множимое имеет 5 значащих цифр, а множитель — 3.

Выполняя это умножение обычным путем, оставляем в произведении столько **значащих цифр**, сколько их было в сомножителе с наименьшим числом значащих цифр, т. е. три цифры слева. Результат:

$$60{,}183 \cdot 0{,}821 = 49{,}4,$$

что легко проверить обычным умножением.

При этом нужно избегать одной ошибки. Пусть дана задача вычислить периметр правильного восьмиугольника, длина стороны которого при измерении оказалась равной 23,4 *см*.

Вычисляем: $23{,}4 \cdot 8 = 187{,}2$ *см* ≈ 187 *см*.

В произведении нужно сохранить все три значащие цифры, а не одну, потому что множитель 8 — число точное.

Еще одна задача. В книге, переведенной с иностранного языка, сказано, что путешественник проехал 216 миль. Зная, что английская миля составляет 1,609 *км*, вычислить, сколько километров проехал путешественник. Здесь оба сомножителя — приближенные.

$$1{,}609 \cdot 216 = 347{,}544. \text{ Ответ: } 348 \text{ км}.$$

Иногда возникает вопрос, откуда мы знаем, какой из двух сомножителей точный и какой приближенный. Очень часто это бывает видно из условия задачи. Пусть, например, предлагается такая задача: найти периметр правильного шестиугольника, сторона которого равна 12,24 *см*. По смыслу задачи нужно 12,24 умножить на 6. Здесь множимое как число, полученное от измерения, может быть только приближенным, но множитель 6 — число точное. В произведении нужно взять столько значащих цифр, сколько их имеется в приближенном множимом, т. е. четыре:

$$12{,}24 \cdot 6 = 73{,}44.$$

Следует обратить внимание на то, что между правилами умножения приближенного числа на приближенное и приближенного числа на точное нет противоречия. В самом деле, всякое точное число можно считать имеющим неограниченное число значащих цифр, так как к нему можно приписать сколько угодно нулей справа. На этом основании в последнем примере мы сохраняем в произведении столько значащих цифр, сколько их было во множимом, т. е. четыре, рассматривая множимое как менее точное из данных, чем совершенно точный множитель.

Деление приближенных чисел. Если при делении как делимое, так и делитель содержат по одинаковому числу верных значащих цифр (согласно принципу А. Н. Крылова, это должно быть видно уже из их записи), то, как и при умножении, в частном нужно взять столько значащих цифр, сколько их в каждом из данных чисел. Практически, зная число верных значащих цифр в каждом из компонентов, можно закончить деление, когда в частном накопится столько же значащих цифр, сколько их было в делимом или делителе: дальнейшее деление бесполезно, так как последующие цифры частного заведомо неверны.

Если бы делимое и делитель были неравноточными, т. е. содержали бы не равные количества значащих цифр, то в частном можно было бы взять столько значащих цифр, сколько их имело данное с меньшим числом значащих цифр.

Примеры. 1. При делении 868 на 136 в частном получится 6,38 и в остатке 32 тысячные; $868 : 136 \approx 6{,}38$; продолжать деление нет смысла, поскольку частное не может иметь больше трех верных значащих цифр.

2. $48{,}99 : 0{,}272$; в частном нужно сохранить 3 значащие цифры: $48{,}99 : 0{,}272 \approx 180{,}1$, но за верность четвертой цифры нельзя ручаться: частное — 180.

3. $83{,}786 : 22{,}1 \approx 3{,}79$ — четвертая цифра частного уже неверна.

Проверка деления умножением подтверждает правильность принципа А. Н. Крылова.

Правило умножения и деления приближенных чисел.

При умножении и делении приближенных чисел нужно в результатах сохранять столько значащих цифр, сколько их было в приближенном данном с наименьшим числом значащих цифр.

Примечание. Если одно из данных точное, то его следует рассматривать, как число, имеющее неограниченное число значащих цифр, и, следовательно, сохранять в результате столько значащих цифр, сколько их было в другом, приближенном, данном.

80. Округление промежуточных результатов. Представим себе, что нам нужно вычислить какое-нибудь выражение, в которое входит несколько различных действий, например несколько умножений и сложений.

Вычисляя выражение:

$$3{,}28 \cdot 2{,}6 + 4{,}84 \cdot 2{,}7 + 3{,}14 \cdot 3{,}6,$$

мы сначала умножим первое число на второе ($3{,}28 \cdot 2{,}6$), затем третье — на четвертое ($4{,}84 \cdot 2{,}7$) и пятое — на шестое ($3{,}14 \cdot 3{,}6$). Мы получим так называемые п р о м е ж у т о ч н ы е результаты. Сложив их, мы найдем о к о н ч а т е л ь н ы й результат. Если, прежде чем сложить промежуточные результаты, мы округлим их согласно указанному выше правилу, то к погрешностям данных чисел прибавится погрешность округления. Это отрицательно скажется на окончательном результате. Чтобы избежать такого влияния, нужно во всех промежуточных результатах брать о д н о й ц и ф р о й б о л ь ш е, чем следует по правилам подсчета цифр в окончательном результате. Пример следует решать так:

$3{,}28 \cdot 2{,}6 = 8{,}528$ (округляется до 8,53, а не до 8,5)

$4{,}84 \cdot 2{,}7 = 13{,}068$ (округляется до 13,1, а не до 13)

$3{,}14 \cdot 3{,}6 = 11{,}304$ (округляется до 11,3, а не до 11).

Окончательный результат получается такой:

$$8{,}53 + 13{,}1 + 11{,}3 = 32{,}9 \approx 33.$$

Литература для учителя о приближенных вычислениях в школе

1. А. Н. Крылов, академик. Собрание трудов. Т. 1. Ч. 2, изд-во АН СССР, стр. 1—35. Научно-популярные статьи.

2. И. Б. Лобанов, Н. И. Лобачевский как инициатор введения приближенных вычислений в среднюю школу, статья в журн. «Математика в школе», 1958, № 2.

3. В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, 1954. 236 стр., гл. II, «Приближенные вычисления».

4. П. С. Александров и А. Н. Колмагоров, академики, Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях, «Математика в школе», 1941, № 2.

5. И. Н. Шевченко, статья «Арифметика», глава «Приближенные вычисления» в сб. «Преподавание математики в свете задач политехнического обучения», изд. 2, 1954, или «Преподавание математики», 1957, изд-во АПН РСФСР.

6. Раздел «Приближенные вычисления» в методиках математики В. М. Брадиса, Учпедгиз, 1954.

7. В. У. Грибанов, Приближенные вычисления в средней школе, Учпедгиз, 1958. 136 стр.

В книге содержится история вопроса в русской и советской школе с 1893 г. и списки литературы для учителя по теории, методике и практике приближенных вычислений в школе.

8. И. Н. Шевченко, Начальные сведения о приближенных вычислениях, изд-во АПН РСФСР. 1958. 34 стр.

9. М. В. Парцколадзе, Приближенные вычисления в курсе средней школы, «Математика в школе», 1959, № 4.

В том же выпуске журнала — статьи других авторов по вопросам о приближенных вычислениях в школе.

10. К. И. Нешков, Приближенные вычисления в курсе VI класса, статья в журн. «Математика в школе», 1960, № 4, а также в сб. «О преподавании математики в восьмилетней школе», изд-во АПН РСФСР, 1961, статья К И. Нешкова «Арифметика», глава «Приближенные вычисления». В указанном выпуске журнала см. также статью И. С. Петракова «О новых программах», методическая консультация, раздел «Арифметика».

11. И. Н. Шевченко, Стабильный учебник арифметики для V и VI классов, Учпедгиз, 1960.

12. С. А. Пономарев и Н. И. Сырнев. Сборник задач и упражнений по арифметике для V и VI классов, Учпедгиз, 1960.

Глава девятая

ПРОЦЕНТЫ

81. Повторение ранее пройденного. Задачи на проценты в курсе арифметики решаются несколько раз. В первый раз эти задачи предлагаются учащимся в связи с прохождением обыкновенных дробей[1]. После изучения действий над обыкновенными дробями решаются задачи на проценты. Эти задачи рассматриваются как задачи на дроби. Во второй раз эти задачи предлагаются учащимся в связи с прохождением десятичных дробей. Нам кажется, что это совершенно естественно. Если ученики научились писать десятичные дроби и выполнять над ними действия, то почему бы им не решить в связи с этим несколько задач на проценты.

Мы думаем, что задачи на проценты можно было бы решать еще раньше, т. е. до изучения дробей, в отделе целых чисел. Нужно только подбирать подходящие числа. Если на этой ступени не удастся решить все три простейшие

[1] Согласно программе арифметики, утвержденной в 1960 г., весь материал о процентах переносится в разделы «Десятичные дроби» и «Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями», а специальная тема «Проценты» проходится в VI классе.— *Ред.*

задачи, то можно решить две или одну. Но для первоначального ознакомления с процентами и это будет хорошо.

Здесь между педагогами есть разногласия. Одни считают, что проценты нужно проходить только один раз и предпочтительно в разделе пропорций[1]. Нам кажется, что такое отдаление этой темы и такая искусственная изоляция ее не принесет пользы. Гораздо целесообразнее проходить проценты несколько раз, но не делать из них особой проблемы, а рассматривать их среди других задач. Очевидная польза от такого прохождения состоит в том, что этот вопрос будет повторяться; однако это повторение не будет для учеников утомительным, потому что каждый раз они будут видеть в повторяемом материале нечто новое.

Правильной точкой зрения на этот вопрос представляется такая. В арифметике нет особого учения о процентах и нет специальной теории этого вопроса, а несколько задач особого вида, которые время от времени решаются наряду с другими задачами. Решать их полезно разными способами, чтобы ученикам не *казалось*, что есть какой-то единственный метод решения, отступление от которого недопустимо. Конечно, можно решать задачи на проценты и с помощью пропорций, но нельзя говорить, что это и есть единственно возможный и даже предпочтительный перед другими путь решения.

После того как уже несколько раз учащиеся решали задачи на проценты, полезно подвести итоги и предложить несколько усложненные задачи на эту тему. В чем состоит это усложнение? Мы представляем его так. В этих задачах число процентов может быть дробным или может превышать 100; наконец, на этой ступени можно решать задачи по формулам и таблицам. Правда, формулы и таблицы предназначены для облегчения вычислений, но для этого нужны одни предпосылки: твердые, почти автоматические навыки в обычных способах вычислений с целыми и дробными числами. Большинство наших пятиклассников овладевают этими навыками только к концу учебного года. В VI классе можно перейти к новым способам вычислений.

Однако, прежде чем перейти ко всем этим «усложнениям», нужно хотя бы бегло повторить то, что раньше было усвоено.

---

[1] В новой программе, опубликованной в 1960 г., раздел «Проценты» помещен в VI классе после раздела «Приближенные вычисления», но п е р е д разделом «Пропорции».

Повторение можно провести следующим образом. Можно кратко напомнить основные сведения о процентах: что́ называется процентом, как проценты обозначаются, как перейти от процентной записи числа к дроби и обратно и т. д. Кроме того, нужно обратить внимание еще на одну сторону дела. До сих пор задачи на проценты решаются неудовлетворительно. Контрольные работы на эту тему дают большое число неудовлетворительных оценок. Иногда при просмотре работы трудно определить, почему допущена та или другая ошибка. Можно предположить, что некоторые учащиеся не понимают условия предложенной задачи, потому что они выполняют иногда действия, не вытекающие из этого условия. Учителю, безусловно, полезно проанализировать, почему не решена какая-нибудь конкретная задача. Если она не решена потому, что ученик не знает некоторых слов, или не понимает некоторых выражений, или не улавливает смысла задачи, то на эту сторону дела нужно обратить внимание. Проще всего выяснить смысл отдельных слов. Мы, конечно, предполагаем, что незнакомые слова в тексте задач встречаются сравнительно редко. Словарь ученика должен обогащаться, но нельзя приступать к решению задачи, если в условии есть непонятные слова. Уровень, на котором стоят ученики VI класса, довольно высок, но все же возможно, что учащиеся не понимают смысла некоторых выражений. Ученики сами об этом, может быть, не заявят, но учитель должен путем умело подобранных вопросов выяснить слабые места в знаниях своих учащихся.

Вполне возможно, что учащиеся многого не понимают из того, что им говорят о процентах. Вместе с тем только учащимся V—VIII классов можно и должно изучать эти вопросы. Нельзя откладывать изучение их до 20-летнего возраста: тогда будет много времени потеряно понапрасну.

Учителю при повторении нужно прежде всего проверить, точно ли учащиеся понимают смысл выражений: увеличить и уменьшить на столько-то единиц; увеличить и уменьшить во столько-то раз; найти часть (дробь) числа; найти число по его дроби; найти, сколько раз одно число содержится в другом, во сколько раз одно число больше другого, во сколько раз одно число меньше другого; найти отношение чисел.

Перечислить все эти выражения мы, конечно, не можем. Учитель скорее может подметить эти камни преткновения и устранить их. Чтобы выяснить, насколько ученикам понятны эти выражения, нужно выполнить некоторые упражнения. Например, полезно предложить учащимся совершенно самостоятельно составить такие задачи, которые показывали бы, что выражения им понятны. Можно такую работу провести письменно, дав каждому ученику посильное задание, и затем коллективно обсудить результаты.

У учителей может возникнуть вопрос, чем вызвано рассуждение на эту тему именно в данный момент.

На эту тему можно было бы поговорить и в другое время, однако именно в данный момент обстановка располагает к такой беседе. К этому времени пройдены целые числа, обыкновенные и десятичные дроби. Теперь решается группа задач, которая дает возможность подвести итоги. Поэтому в качестве таких подытоживающих задач избраны задачи на проценты. Можно было бы для этой цели взять и другие задачи, но задачи на проценты не хуже прочих. Обычно они имеют очень простой сюжет, но, решая их, мы воспроизводим обширный материал, пройденный в прошлом. И вот, начиная решать эти задачи, мы сразу видим, что успехи учащихся оказываются ниже, чем они были раньше. Отчего это происходит? По-видимому, в прошлом что-то было не выполнено. Мы начинаем искать причину. Конечно, эти поиски ведутся ощупью, мы делаем различные предположения и начинаем вносить поправки в материал, пройденный прежде. Мы допускаем, что среди указанных выше выражений найдутся непонятные. Сюда относится, например, такое выражение, как «найти дробь числа». Конечно, мы не говорим, что их не понимают все учащиеся, однако вполне возможно, что некоторых оно смущает и затрудняет.

Когда кончается арифметика целых и дробных чисел и начинаются ее приложения: проценты, пропорциональность величин, — полезно оглянуться назад и проверить, все ли было в прошлом усвоено основательно и сознательно или же нужно что-нибудь повторить и напомнить.

Еще раз подчеркиваем: задачи на проценты нужно решать *разными способами*. Не следует привязывать учеников к какому-нибудь одному способу: это было бы неправильно, если есть другие способы. Кроме того, умение решать одну и ту же задачу разными способами показывает, что ученик хорошо понимает эту задачу и, следовательно, решает ее свободно и уверенно.

Здесь следует перерешать три основные задачи на проценты методом п р и в е д е н и я к е д и н и ц е. Тут возможны некоторые возражения со стороны учителей и методистов. Возражения сводятся к следующему Если уже решать задачи на проценты методом приведения к единице, то можно было бы сделать это еще в отделе целых чисел, вовсе не связывая их с дробями. Разве обязательно привлекать к решению этих задач громоздкий аппарат дробей?

Как сказано выше, задачи на проценты можно решать и при изучении целых чисел, но стоит ли это делать? Ведь ученик V класса по своему развитию, вообще говоря, несколько ниже ученика VI класса. Раздел целых чисел, для систематизации которого, как всегда, недостает времени, и без того перегружен трудным теоретическим и практическим материалом. Нагружать его еще задачами на проценты, конечно, нецелесообразно.

Что же касается сочетания (комплексирования) задач на проценты с изучением дробей, то оно представляется нам наиболее естественным и разумным. Мы рассматриваем процент как сотую часть числа или величины, а понятие части настолько близко примыкает к понятию дроби, что было бы странно не воспользоваться моментом изучения дробей для решения задач на проценты. Особенно это было бы непростительно при изучении умножения на дробь: мы изучаем вопрос о нахождении дроби числа и почему-то игнорируем нахождение от числа семи сотых (0,07), трех сотых (0,03).

Таким образом, весьма полезно еще раз прорешать три задачи на проценты, сначала методом приведения к единице, потом с помощью обыкновенных дробей и, наконец, с помощью десятичных дробей.

З а д а ч а 1. В школе 600 учеников. Среди них неуспевающие составляют 12%. Сколько неуспевающих учеников в школе?

Р е ш е н и е. Найдем, чему будет равен один процент (1%) числа 600. Иными словами, сколько было бы неуспевающих учеников, если бы они составляли один процент? Под одним процентом разумеется одна сотая числа, поэтому для нахождения одного процента нужно 600 разделить на 100, т. е. $600 : 100 = 6$ (учеников).

Но по условию задачи неуспевающих учеников в школе не 1%, а 12, т. е. в 12 раз больше, чем мы нашли $6 \cdot 12 = 72$ (ученика).

Ответ: в школе из 600 учеников не успевает 72 ученика.

В школьной практике бывают случаи, когда задача не оставляет никакого следа в сознании учащихся. Ученики каждый день решают по нескольку задач и считают свою цель достигнутой, как только задача решена и получен правильный ответ. Бывают случаи, когда решается трудная задача и ученики еле-еле справляются с ее решением. Они решили ее с помощью, т. е. при подсказке, учителя и поняли, может быть, только на половину. Они облегченно вздыхают и радуются тому, что такая неприятная задача наконец решена и что, самое главное, к ней уже не придется возвращаться. В действительности же нужно поступить совсем наоборот. Чем труднее задача, тем дольше на ней нужно задержаться. Необходимо во что бы то ни стало задержать на ней внимание учащихся. Способов для этого много. Можно сделать проверку, решить обратную задачу, попробовать изменить числовые данные, может быть слегка перестроить условие задачи. Если это не будет сделано, то ученики не научатся решать задачи. Даже очень интересные и трудные задачи через 2—3 дня совершенно забываются. Исчезает из памяти все — сюжет, числа, способ решения.

Может быть, читатель спросит: что же, все задачи из задачника нужно помнить наизусть? Нет, дело не в этом. Подумаем, какие вещи нами запоминаются надолго, иногда на всю жизнь и какие забываются через несколько минут? Каждый день мы получаем извне (дома, на работе, на улице) массу всевозможных впечатлений. А запоминаются только единичные вещи —то, что ярко, интересно, необычно, красиво или ужасно, грандиозно или ничтожно мало по своим размерам и вообще чем-то «замечательно».

Так вот, если хорошая задача не оставила о себе никаких воспоминаний, кроме того, что было что-то трудное и непонятное, то она была бесполезна. Настоящая, хорошая задача запоминается надолго, ее держат в памяти, аккуратно записывают в карманную книжку, показывают своему другу, демонстрируют на школьных вечерах.

Поэтому следует решительно высказаться против того, чтобы решать «побольше задач», которые мелькают перед учеником одна за другой, как в калейдоскопе, и не оставляют никакого следа в сознании ученика. Лучше решить меньше задач, но решить сознательно, с полным пониманием решенного. Не плохо, если ученик *на некоторое время* запомнит какую-нибудь хорошую задачу и ее решение.

В конце концов он ее забудет или, точнее, элементарная детская задача будет вытеснена более сложными задачами из более высоких областей математики.

Задача о числе неуспевающих учеников в школе слишком проста для того, чтобы на ней следовало останавливаться. Однако достаточно небольшого усложнения задачи, чтобы возникли затруднения. Поэтому следует тщательно проверить, все ли без исключения ученики понимают ее содержание и решение. С этой целью даже такую простую задачу следует сопроводить некоторыми вопросами. Например, ученики должны знать, что утверждение «в школе отстает 12% учащихся» можно заменить таким: «на каждую сотню учащихся приходится 12 отстающих» Проверим с этой точки зрения нашу задачу В школе 6 сотен учащихся. В каждой сотне неуспевающих 12; в 6 сотнях неуспевающих 12 · 6, итого 72 ученика.

Хорошо учить,— значит, в каждый момент улавливать, что ученики понимают правильно и в чем они заблуждаются, что они понимают превратно. Ошибки и заблуждения, в какие иногда впадает подросток, бывают поистине удивительны. Если даже ученик не говорит о них учителю по скрытности или застенчивости, учитель должен о них догадываться сам. Опыт подскажет учителю, в каком месте возможно непонимание, полупонимание или недоразумение; вопросами нужно вскрыть, не стоит ли ученик на ложном пути.

Когда мы говорим, что под процентами можно понимать число предметов, приходящихся на каждую сотню этих предметов, то и эту мысль можно, конечно, понять превратно; иной ученик так и поймет. Он скажет: в трех параллелях VI класса 102 ученика, из них неуспевающих 8; а в трех параллелях другого класса 99 человек, т. е. около 100, а неуспевающих 15. Как же здесь можно говорить о числе неуспевающих на каждую сотню? Такой разговор взрослому человеку может показаться наивным, если он понимает, что в подобных случаях всегда говорят о средней величине; но иной двенадцатилетний школьник может смотреть на эти вещи иначе

З а д а ч а 2. В школе 72 неуспевающих ученика, что составляет 12% от общего числа учащихся. Сколько учеников в школе?

Сначала одно замечание по поводу самого содержания задачи. У некоторых учеников, безусловно, может возникнуть вопрос: как могли узнать процент неуспевающих, если неизвестно число всех учащихся? Чтобы узнать, нужно сначала знать число учащихся. Это правильное возражение. Но тогда возникает второй вопрос: можно ли предлагать такие задачи? Можно, для этого есть основания. Одно из оснований — теоретическое и вместе с тем педагогическое. Эта задача — обратная первой, и потому она очень удобна для проверки решения первой задачи, а первая — жизненна сама по себе.

Впрочем, задачи такого типа могут быть и реальными, а не искусственными, как данная. Иногда число процентов бывает постоянным и заранее известным. Например, сберегательные кассы дают всегда 2% дохода своим вкладчикам; и если кто-нибудь получил в сберегательной кассе 50 рублей процентных денег, то легко сообразить, что у него на книжке 2500 рублей.

Вообще число процентов во многих случаях может быть известно заранее. Оно часто устанавливается многолетними наблюдениями. Так, например, поступают в сельском хозяйстве и в других областях народного хозяйства, так что и задачи разбираемого типа могут быть возможны и реальны.

Решая задачу приведением к единице, найдем один процент неуспевающих; он составляет $72 : 12 = 6$ учеников.

Если бы неуспевающие составляли всего 1%, то их было бы 6. Это и составляет также одну сотую долю всех школьников, а всех учащихся в школе $6 \cdot 100$, или 600.

Наша задача обратна предыдущей, и весьма полезно предложить учащимся сопоставить эти две задачи в качестве дополнительного размышления.

З а д а ч а 3. В школе учатся 600 учеников, из них 72 неуспевающих. Сколько это составляет процентов от общего числа учащихся?

Эта задача затрудняет многих учащихся. Они плохо понимают выражение «сколько процентов одного числа составляет другое». В данном случае спрашивается, сколько процентов числа 600 составляет число 72.

Чтобы ученики поняли, о чем идет здесь речь, нужно найти сначала 1% от 600: получается $600 : 100 = 6$ (учеников).

Это — ответ на первый вопрос задачи. Смысл найденного ответа такой: 6 учеников составляют 1% от 600 учеников. Тогда 2% 600 будут вдвое больше, т. е. 12, 3% равны

18 и т. д. Идя последовательно таким путем, мы, наконец, узнаем, скольким процентам равно число 72. Но это путь длинный и утомительный: можно найти результат значительно скорее, разделив 72 на 6, т. е. 72 : 6 = 12.

Значит, 72 составляют 12% числа 600. Это будет второй и последний вопрос нашей задачи.

Если и после этого что-нибудь еще будет неясным, тогда нужно сделать дополнительные разъяснения. Можно сказать, что в задаче фигурирует число учащихся в школе 600. Оно принимается за 100%. Кроме того, в задаче имеется другое число — 72 неуспевающих. Сущность вопроса задачи следующая: если все число учеников принять за 100%, то скольким процентам будет равно число неуспевающих, если их 72? Если и это разъяснение не удовлетворит учащихся, то можно предложить еще более простое истолкование.

В задаче дано общее число учащихся 600; можно принять это число за единицу: тогда всякая часть этого числа выразится правильной дробью, например 300 выразится дробью $\frac{1}{2}$, число 150 выразится дробью $\frac{1}{4}$, число 75 выразится дробью $\frac{1}{8}$ и т. д. Но мы сделали несколько иначе. Мы приняли данное в задаче число 600 не за 1, а за 100, т. е. мы решили так: примем число 600 за 100 частей, тогда одна часть будет равна 6 (в 100 раз меньше), а сколько частей будет в числе 72? Очевидно, 72 придется разделит на 6, и тогда получим 12 частей.

Мы решили три основные задачи приведением к единице. После этого нужно повторить, прежде чем пойти дальше, решение основных задач другим способом. Сначала нужно решить каждую из основных задач в обыкновенных дробях, а потом в десятичных. Но одной задачи на каждый случай мало. Число задач, которые следует решать, зависит от успехов класса; учитель решит это самостоятельно.

При повторении нужно постепенно усложнять условие задачи, т. е. вводить в условие какие-нибудь дополнительные данные, чтобы решение не сводилось только к голому процентному вычислению, но требовало бы нахождения еще каких-либо величин. Пусть сюжет задачи будет очень простой, но целесообразно построить его так, чтобы решение не получалось применением какого-нибудь одного заученного приема. Если число процентов будет выражено десятичной дробью, то задача будет простой, т. е. будет решаться одним действием. Но несомненно, каждый учитель сумеет подобрать, усложняя условие, ряд таких задач, которые будут решаться не одним, а двумя-тремя действиями.

Вот пример очень несложной задачи.

«Некто имел 600 рублей денег. Из них он израсходовал 74 рубля. Затем он должен был внести в банк 360 рублей, но пропустил срок уплаты, и с него взяли 5% штрафа. Сколько денег у него осталось после этих расходов?»

Решение.

1. Вычислим 5% суммы 360 рублей

$$360 \cdot 0{,}05 = 18 \text{ (рублей)}$$

2. Сколько уплачено в банк?

$$360 + 18 = 378 \text{ (рублей)}$$

3. Сколько рублей истрачено всего?

$$74 + 378 = 452 \text{ (рубля)}$$

4. Сколько денег осталось?

$$600 - 452 = 148 \text{ (рублей).}$$

Задача не претендует на оригинальность, но в ней больше одного вопроса. Искомое — остаток после произведенных расходов.

82. Дробные проценты. Поскольку учащиеся к этому времени решили уже не мало задач на целое число процентов, теперь остается пересмотреть те же три типа задач, но с некоторыми усложнениями. Первое усложнение: в новых задачах будут встречаться проценты, выраженные не только целыми, но и дробными числами. Учащиеся должны припомнить способы решения задач на проценты или, если забыли, посмотреть в тетрадях записи решений этих задач.

«Общий фонд заработной платы некоторого предприятия 80 000 рублей. Рабочие решили отчислить 1200 рублей на одно мероприятие. Сколько процентов они должны удержать от заработной платы?»

Будем искать число процентов посредством проб. Сколько рублей составит 1%?

$$80\,000 \cdot 0{,}01 = 800 \text{ (рублей)}.$$

Итак, одного процента мало.

Сколько рублей составит 2%?

$$80\,000 \cdot 0{,}02 = 1600 \text{ (рублей)}.$$

Конечно, эту сумму можно было найти, умножая предыдущую сумму на 2.

Двух процентов оказывается много; нужно отчисление всего в 1200 рублей. Чтобы получить эту сумму отчисления, нужно взять больше одного, но меньше двух процентов. У самих учащихся, несомненно, возникнет мысль о дробных процентах. Естественно подумать, нельзя ли воспользоваться каким-то средним числом процентов. Но среднее число в данном случае будет обязательно дробным: оно больше 1 и меньше 2.

Исходя, по примеру С. И. Шохор-Троцкого, из составленной нами «целесообразной задачи», сначала решим ее так. Мы знаем, что 1% 80 000 рублей равен 800 рублям. Половина одного процента вдвое меньше, т. е. 400 рублей. Сложив 1% и 0,5% фонда заработной платы, мы получим 1200 рублей, т. е. намеченную сумму отчисления.

Учащиеся, вероятно, легко сообразят, что для решения задач совершенно безразлично, будет ли число процентов выражено обыкновенной или десятичной дробью.

После этого нужно выработать у учащихся навык оперировать с дробными процентами.

При решении задач на проценты предпочтительно пользоваться десятичными дробями: выясним же, как нужно заменять десятичной дробью дробное число процентов. Возьмем ряд таких чисел:

$$2\frac{1}{2}\%;\ 3\frac{1}{2}\%;\ 4\frac{1}{4}\%;\ 5\frac{1}{4}\%;\ 6\frac{3}{4}\%;\ 7\frac{3}{4}\%;\ 8{,}6\%;\ 9{,}32\%$$

и приведем их к виду, удобному для решения задач.

Заменим смешанное число $2\frac{1}{2}$ десятичной дробью: $2\frac{1}{2} = 2{,}5$. Вместо 2,5% можно написать $2\% + 0{,}5\%$. При решении задач 2% заменяются дробью 0,02, а 0,5 заменяются дробью 0,005. Значит, 2,5% заменяются десятичной дробью 0,025. Соответственно

$3\frac{1}{2}\% = 3{,}5\%$	можно заменить дробью	0,035,
$4\frac{1}{4}\% = 4{,}25\%$	» » »	0,0425,
$5\frac{1}{4}\% = 5{,}25\%$	» » »	0,0525,
$6\frac{3}{4}\% = 6{,}75\%$	» » »	0,0675,
$7\frac{3}{4}\% = 7{,}75\%$	» » »	0,0775,
8,6%	» » »	0,086,
9,32%	» » »	0,0932.

После этого нужно тщательно разобрать какую-нибудь простенькую задачу, может быть, составленную самими учениками, и затем уже решать более трудные задачи из задачника.

В тренировочных целях полезно выполнить обратный переход от записи числа в виде десятичной дроби к процентной записи.

0,01	можно заменить через	1%,	
0,005	» » »	$\frac{1}{2}\%$,	или 0,5%,
0,0025	» » »	$\frac{1}{4}\%$,	» 0,25%,
0,0075	» » »	$\frac{3}{4}\%$,	» 0,75%,
0,015	» » »	$1\frac{1}{2}\%$,	» 1,5%,
0,0225	» » »	$2\frac{1}{4}\%$,	» 2,25%,
0,0375	» » »	$3\frac{3}{4}\%$,	» 3,75%,
0,053	» » »	$5\frac{3}{10}\%$,	» 5,3%,
0,0827	» » »	$8\frac{27}{100}\%$,	» 8,27%,
0,127	» » »	$12\frac{7}{10}\%$,	» 12,7%.

Выполнив несколько десятков таких тренировочных примеров, учащиеся без труда смогут ответить на вопросы: Чем заменяются десятые доли процента? (тысячными долями дроби). Чему соответствуют десятитысячные доли десятичной дроби? (сотым долям процента) и т. п.

83. Задачи, в которых число процентов превышает 100. В задачах, которые учащиеся решали до сих пор, число процентов не превышало 100. Когда же учащиеся освоились с такими задачами, можно перейти к усложненным задачам. Одно из таких усложнений уже рассмотрено только что: это были дробные проценты. Пойдем дальше. Рассмотрим такие случаи, когда в задаче встречается превышение 100 процентов. Для выяснения этого вопроса нужно опять разобрать целесообразные задачи.

1. На предприятиях обычно для рабочих устанавливается норма, т. е. число изделий, которое должен выполнить каждый рабочий за день, неделю, месяц, год. Если рабочий выполняет меньше нормы, то о нем говорят, что он не выполняет нормы, если же делает изделий больше, чем требуется по норме, то говорят, что он перевыполняет норму.

Пусть норма изделий за такое-то время составляет 1000 каких-нибудь деталей. Это число можно принять за 100%. Рабочий, выработавший 950 деталей, дал меньше 100%, а сделавший 1100 предметов перевыполнил норму и дал свыше 100%. Так могут появиться задачи, в которых приходится вычислять больше, чем 100%.

2. На швейной фабрике изготовлены костюмы. Фабрика израсходовала на материал и работу 5000 рублей. Это число можно принять за 100%. Костюмы были отправлены в торговую сеть для продажи. Здесь возникли дополнительные расходы на транспорт и прочее, составившие в общем 10% фабричной стоимости костюмов. Этот дополнительный расход пришлось учесть при продаже. Поэтому покупатель при покупке костюма платит 110% его первоначальной стоимости.

Иногда сама задача составлена так, что некоторое, встречающееся в ней число приходится принять больше, чем за 100%. Таких задач можно составить множество. Вот одна из таких задач.

3. В библиотеке 11 040 книг на русском и иностранных языках, причем число иностранных составляет 15% числа книг на русском языке. Сколько в библиотеке отдельно русских и иностранных книг?

Здесь за 100% проще всего принять число книг на русском языке. Число книг на иностранных языках составит, как сказано в задаче, 15% числа книг на русском языке, а число всех книг в библиотеке, число 11 040, составит 115% числа русских книг.

Какую величину или число принять за 100%, решают по-разному. В последней задаче можно было бы принять за 100% число всех книг библиотеки; но это осложнило бы решение задачи, довольно просто решаемой при первой постановке вопроса: после выкладок число книг на русском языке оказалось бы приблизительно 87% общего числа, а число книг на иностранных языках — около 13%.

В вычислительной практике за 100% обычно принимают то число, которое выражает какую-нибудь важную, существенную величину. Например, если речь идет о выполнении заводом плана, то естественно принять за 100% годовой план завода; если речь идет об итогах годовой работы школы, то, конечно, за 100% нужно будет принять число всех учащихся в этой школе; если речь идет о финансовом отчете школы за год, то за 100% можно принять сумму в с е х расходов: на оплату труда педагогического персонала, на ремонт школы, на покупку учебно-наглядных пособий и инвентаря, на отопление и т. д.

Если решается задача на тему о выполнении плана каким-нибудь заводом, то удобно за 100% принимать плановую выработку; выработка меньше плановой составит меньше 100% и означает невыполнение; а большая, чем 100%, — перевыполнение.

Эти несложные вещи должны быть разъяснены учащимся. Затем следует выполнить несколько устных и письменных упражнений такого характера.

Число 500 принято за 100%. Какое число составит 50, 150% данного числа?

Число 400 принято за 100%. Каким числом выразится 80, 90, 110, 120% данного числа?

За 100% принято число 1000. Найти отсюда 25, 50, 75, 125, 150, 175% данного числа.

Примем 1600 за 100% и вычислим 1; 10; 10,5; 20,5; 110; 120,5% данного числа.

Полезно спрашивать у учащихся, что означают выражения: рабочий выполнил 200% плана, фабрика в этом году выработала 300% продукции по сравнению с прошлым годом. Ученик должен понимать, что в первом случае рабочий выработал изделий вдвое больше, чем требовалось по плану, а во втором случае смысл выражения тот, что в текущем году фабрика выработала изделий втрое больше, чем в прошлом. Не мешает выяснить, и смысл выражений: план перевыполнен на 100, 250%; продукция увеличилась на 100, 150, 200% и т. п.

84. Задачи первого типа (нахождение процентов данного числа). Для решения задач этого типа, в которых число процентов выражено дробью или превышает 100, почва уже подготовлена в предыдущем.

Вероятнее всего, что в первом случае число процентов будет выражаться так: 0,5; 2,5; 7,3; 12,7; 15,25; 23,34; 37,75% и т. д. Самое существенное в данном случае — безошибочно переходить от процентной записи к выражению этого числа десятичной дробью. Если это сделано правильно, то дальнейший ход решения едва ли будет трудным. Когда необходимая дробь написана, то решение задачи сводится к применению правила нахождения дроби числа. Например, найти 2,5% числа 500. Заменим 2,5% десятичной дробью. Это будет 0,025.

Решение: $500 \cdot 0{,}025 = 12{,}5$.

Лучше, конечно, брать для решения не голые примеры, а задачи с конкретным содержанием. Хорошо, если такие задачи будут предлагаться самими учащимися.

Во втором случае число процентов будет выражаться примерно так: 102; 110; 150; 200; 225% и т. д. Пусть нужно найти 110% от 300. Заменим 110% десятичной дробью — 1,1. Задачи этого типа решаются умножением, т. е. $300 \cdot 1{,}1 = 330$. Это может смутить учеников: «не ищется дробь числа, а применяется правило нахождения дроби». Необходимо некоторое разъяснение. Решать эту задачу можно было бы так: найти сначала 100%, это будет само число (300), затем нужно найти 10%, это будет 30 и, наконец, соединить полученные результаты: $300 + 30 = 330$. Эта проверка разъясняет правильность умножения.

85. Решение этих задач по формуле. Значение формул в решении любых задач огромно. Формула — итог и завершение каждой математической задачи и вопроса. Конечно, формулы при изучении арифметики принимаются учащимися неохотно; однако данные формулы — уже не первые. Некоторая привычка обращаться с формулами у учащихся уже есть.

Чтобы учащиеся с охотой употребляли буквенные обозначения, чтобы они полюбили формулы, учителю самому нужно открыто проявлять любовь к формулам, разъяснять их значение для вычислений, подчеркивать их роль в математике а не избегать их до начала алгебры.

Сначала нужно вывести формулу для решения первой задачи на проценты. Но этот «вывод» будет, конечно, своеобразным. Здесь формула не будет выводиться из другой формулы, как это иногда бывает, ее нужно будет вывести из рассмотрения уже решенных задач. Эти задачи должны быть максимально простыми, как теперь иногда говорят, «прозрачными»

«В саду 800 деревьев. Из них яблонь 43%. Сколько яблонь в саду?»

Здесь сознательно взято 43%, чтобы не произошло сокращения с числом 100 и получился бы не общий, а частный случай.

Как же решать эту задачу? Придется 800 разделить на 100 и умножить на 43. Эту мысль нужно четко выразить словами.

Запишем сначала два действия: 1) $800 : 100 = 8$, 2) $8 \cdot 43 = 344$.

Затем запишем словами: чтобы найти 43 процента числа 800, нужно число 800 разделить на 100 и полученное частное умножить на 43. Это правило можно записать так: $(800 : 100) \cdot 43$, а еще удобнее так: $\frac{800 \cdot 43}{100}$.

Обычно принято формулы писать так, чтобы у них была левая и правая часть. В этой задаче мы ищем число яблонь в саду. Обозначим число яблонь любой буквой, например буквой b, тогда можно написать:

$$b = \frac{800 \cdot 43}{100}.$$

После выполнения действий получится 344.

Написанное равенство можно назвать числовой формулой, потому что в правой части нет букв.

Учащиеся должны понять, что такое равенство пригодно для решения данной задачи, но применить его для другой задачи неудобно — в другой задаче будут другие числа. Поэтому лучше будет заменить цифры буквами и помнить, какая буква чему будет соответствовать. Будем данное число, от которого ищем проценты, обозначать буквой a, данное в задаче число процентов — обозначать буквой p, и тогда выведенное выше равенство примет вид:

$$b = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Для своего закрепления формула требует решения многих задач.

86. Применение таблиц к решению задач первого типа. Задачи на нахождение процентов данного числа очень часто встречаются в различных областях науки, техники, производства и текущей жизни вообще. Ежедневно такие задачи решаются, между прочим, сотрудниками сберегательных касс, банков, расчетных контор и т. п. Например, в сберегательных кассах постоянно приходится вычислять доходы вкладчиков, положивших свои деньги на сбережение. В нашей стране сберегательные кассы выплачивают своим вкладчикам 2% в год, и сотрудник кассы должен вычислить, сколько составляет 2% суммы каждого вклада. Например, Александров имеет на книжке 500 рублей, Борисов — 1200 рублей, Васильев — 2450 рублей и т. д. С каждой суммы нужно вычислить 2%, и либо выдать их вкладчику, либо приписать к сумме, лежащей в кассе. То же самое выполняет кассир или счетовод любого учреждения или завода, если ему нужно начислить какие-нибудь проценты на заработок работника. Чтобы облегчить труд вычислителей, ускорить их работу и сэкономить их время, составлено много вспомогательных таблиц. Образцы таких таблиц можно найти в учебниках арифметики, в некоторых задачниках, в справочниках для счетных работников, иногда в календарях и других справочных изданиях. При наличии таких таблиц под руками полезно иметь конторские счеты и на них производить вспомогательные выкладки. Тогда вычисления будут идти еще скорее.

Опыт работы в школе показывает, что ученики неохотно пользуются таблицами, считая, что лучше всего выполнять вычисления карандашом на бумаге. Для вычисления окончательных результатов часто нужно действительно записывать промежуточные данные и потом складывать на бумаге или на счетах. Некоторые учителя тоже не одобряют таблицы, полагая, что если ученики привыкнут к таблицам, то не научатся вычислять. Все это заблуждение. Таблицы необходимы в жизни и технике. А чтобы учащиеся научились вычислять, учитель должен следить за тем, чтобы в процессе работы постоянно чередовали письменные, устные, табличные и инструментальные (счетах или арифмометре) вычисления. Наконец, табли никогда не помешают выработке высокой вычислительн техники, потому что нет таких таблиц, которые во все случаях давали бы готовый результат. Кроме то наши таблицы имеют учебное значение. В противополож ность тому, что бывает в практике, когда вычисление мож быть сплошь механизировано, в школе так не быва Учитель всегда регулирует учебный процесс, указыв каким видом вычислений и когда нужно воспользоватьс

В классе прежде всего нужно заняться составл нием таблиц. Готовыми таблицами пользоваться следует. Маленькая таблица, которая дается в учебник служит образцом. Школьный опыт показывает, что де очень охотно составляют таблицы. Чтобы не расходова на это много времени, нужно в классе показать толь принцип составления, а вычислительную работу перенест на домашние занятия.

Учитель должен указать, что в таблице нужно разл чать строки (горизонтальные ряды цифр) и столбцы (ве тикальные ряды). Сначала можно заготовить рамку. К нечно, это будет только черновик, с которого потом буд выполнен настоящий экземпляр на лучшей бумаге и прод манных размеров. Все дополнительные вычисления делаю ся отдельно, а в рамку вписываются только результат В верхней строке последовательно записываются: 1%, 2 3%... 10%. Сначала можно ограничиться десятью пр центами. В будущем эту таблицу, может быть, придетс дополнить, смотря по обстоятельствам. Сначала достаточ ограничиваться целыми процентами, но с течением вр мени можно будет сделать вычисления и для некоторы дробных процентов. В самой нижней строке тоже можн записать: 1%, 2%, 3%... В крайнем левом столбце пишутс числа либо от 1 до какого-нибудь большого числа, напри мер до 10 000, либо, положим, от 10 000 до 1. В таблица для счетных работников сверху идут большие числа, вни зу — малые до 1. Это делается потому, что на счетах сн чала откладывают высшие разряды, а потом низшие, нач ная с десятков тысяч и кончая единицами. Можно придер живаться такого порядка и в школьной практике. В кра нем правом столбце тоже можно написать числа 1, 2, 3.. 10 000. Таблица примет такой вид:

буквой a, данное в задаче число процентов — обозначать буквой p, и тогда выведенное выше равенство примет вид:

$$b = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Для своего закрепления формула требует решения многих задач.

86. Применение таблиц к решению задач первого типа. Задачи на нахождение процентов данного числа очень часто встречаются в различных областях науки, техники, производства и текущей жизни вообще. Ежедневно такие задачи решаются, между прочим, сотрудниками сберегательных касс, банков, расчетных контор и т. п. Например, в сберегательных кассах постоянно приходится вычислять доходы вкладчиков, положивших свои деньги на сбережение. В нашей стране сберегательные кассы выплачивают своим вкладчикам 2% в год, и сотрудник кассы должен вычислить, сколько составляет 2% суммы каждого вклада. Например, Александров имеет на книжке 500 рублей, Борисов — 1200 рублей, Васильев — 2450 рублей и т. д. С каждой суммы нужно вычислить 2%, и либо выдать их вкладчику, либо приписать к сумме, лежащей в кассе. То же самое выполняет кассир или счетовод любого учреждения или завода, если ему нужно начислить какие-нибудь проценты на заработок работника. Чтобы облегчить труд вычислителей, ускорить их работу и сэкономить их время, составлено много вспомогательных таблиц. Образцы таких таблиц можно найти в учебниках арифметики, в некоторых задачниках, в справочниках для счетных работников, иногда в календарях и других справочных изданиях. При наличии таких таблиц под руками полезно иметь конторские счеты и на них производить вспомогательные выкладки. Тогда вычисления будут идти еще скорее.

Опыт работы в школе показывает, что ученики неохотно пользуются таблицами, считая, что лучше всего выполнять вычисления карандашом на бумаге. Для вычисления окончательных результатов часто нужно действительно записывать промежуточные данные и потом складывать на бумаге или на счетах. Некоторые учителя тоже не одобряют таблицы, полагая, что если ученики привыкнут к таблицам, то не научатся вычислять. Все это заблуждение. Таблицы необходимы в жизни и технике. А чтобы учащиеся научились вычислять, учитель должен следить за тем, чтобы в процессе работы постоянно чередовались письменные, устные, табличные и инструментальные (на счетах или арифмометре) вычисления. Наконец, таблицы никогда не помешают выработке высокой вычислительной техники, потому что нет таких таблиц, которые во всех случаях давали бы готовый результат. Кроме того, наши таблицы имеют учебное значение. В противоположность тому, что бывает в практике, когда вычисление может быть сплошь механизировано, в школе так не бывает. Учитель всегда регулирует учебный процесс, указывая, каким видом вычислений и когда нужно воспользоваться.

В классе прежде всего нужно заняться составлением таблиц. Готовыми таблицами пользоваться не следует. Маленькая таблица, которая дается в учебнике, служит образцом. Школьный опыт показывает, что дети очень охотно составляют таблицы. Чтобы не расходовать на это много времени, нужно в классе показать только принцип составления, а вычислительную работу перенести на домашние занятия.

Учитель должен указать, что в таблице нужно различать строки (горизонтальные ряды цифр) и столбцы (вертикальные ряды). Сначала можно заготовить рамку. Конечно, это будет только черновик, с которого потом будет выполнен настоящий экземпляр на лучшей бумаге и продуманных размеров. Все дополнительные вычисления делаются отдельно, а в рамку вписываются только результаты. В верхней строке последовательно записываются: 1%, 2%, 3%... 10%. Сначала можно ограничиться десятью процентами. В будущем эту таблицу, может быть, придется дополнить, смотря по обстоятельствам. Сначала достаточно ограничиваться целыми процентами, но с течением времени можно будет сделать вычисления и для некоторых дробных процентов. В самой нижней строке тоже можно записать: 1%, 2%, 3%... В крайнем левом столбце пишутся числа либо от 1 до какого-нибудь большого числа, например до 10 000, либо, положим, от 10 000 до 1. В таблицах для счетных работников сверху идут большие числа, внизу — малые до 1. Это делается потому, что на счетах сначала откладывают высшие разряды, а потом низшие, начиная с десятков тысяч и кончая единицами. Можно придерживаться такого порядка и в школьной практике. В крайнем правом столбце тоже можно написать числа 1, 2, 3... 10 000. Таблица примет такой вид:

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	...	
1 2 3 ...									1 2 3 ...

Затем учащиеся приступают к заполнению таблицы. Числа в таблицу вносятся не все. Если учащиеся желают довести таблицу до 10 000, то в таблицу достаточно включить следующие числа:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000

Вычисления начинать не обязательно с единицы. Можно начинать вычисления с сотен и даже устно быстро написать следующие результаты:

	1%	2%	3%	4%	5%	...
100	1	2	3	4	5	...
200	2	4	6	8	10	...
300	3	6	9	12	15	...
400	4	8	12	16	20	...
500	5	10	15	20	25	...
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Если эта часть таблицы заполнена, то можно выполнить вычисления для десятков (10, 20, 30 ...). Теперь это сделать очень легко. Для этого достаточно учесть предыдущие результаты; так как десяток в десять раз меньше сотни, то числа новой таблички будут в десять раз меньше чисел предыдущей; получится следующее:

	1%	2%	3%	4%	5%	...
10	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	...
20	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	...
30	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	...
40	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	...
50	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	...
...	...	...	...	...	...	...

Так же нетрудно заполнить и все остальные клетки нашей таблицы.

После составления таблицы можно перейти к ее использованию. Решим с помощью таблиц такую задачу.

Вкладчик имеет в сберегательной кассе на книжке 9753 рубля. Кассы дают доход 2% в год. Сколько дохода получит вкладчик через год после этого вклада? Нужно вычислить 2% с указанной суммы, поэтому в таблице нужно смотреть на первый столбец и на столбец, где написано вверху 2%. Рассуждаем так: нужно найти 2% от 9753 рублей. По таблице находим 2% числа 9000, это будет 180; затем 2% числа 700, это будет 14; а далее 2% числа 50—1,0 и, наконец, 2% числа 3—0,06. Складывая эти числа, получаем 195,06. Сложение можно выполнить на счетах.

Чтобы освоиться с этой таблицей, нужно выполнить ряд упражнений такого типа.

Служащие одного учреждения решили отчислить от месячного заработка в культурный фонд 5%. Сколько это составит с заработка служащего, получающего: а) 56 рублей, б) 67 рублей, в) 78 рублей, г) 86 рублей, д) 94 рубля, е) 123,5 рубля, ж) 132 рубля, з) 145 рублей, и) 152,4 рубля. Для примера вычислим пункт «е» и найдем 5% 123,5 рубля. По таблице находим 5% числа 100, это будет 5; затем 5% числа 20, это будет 1; далее 5% числа 3, т. е. 0,15, и, наконец, 5% числа 0,5, т. е. 0,025. Складывая эти числа, получим 6,175. Это значит, что 5% суммы 123,5 рубля составляют 6,175 рубля ($\approx 6,18$).

87. Задачи второго типа (нахождение числа по его процентам). Задача. За известное время завод изготовил 984 паровоза, что составило 123% плана. Каков был план?

План здесь был принят за 100%, и такие задачи учащиеся привыкли решать делением, т. е. по правилу нахождения числа по его дроби (иногда говорят не всегда точно: нахождение целого по его *части*). Когда такие задачи решались, то результат получался больше числа, данного в условии задачи. Здесь же после решения данной задачи мы наверняка получим в ответе число, меньше того, какое дано в условии. Значит, говорить, что мы ищем целое по его «части», уже неправильно — это значит забывать, что бывают дроби и больше единицы. Однако эти задачи решаются тоже делением:

$$984 : 1,23 = 800 \text{ (паровозов).}$$

Если у учащихся возникнет какой-нибудь вопрос, то учителю придется постепенно подвести их самих к ответу на него.

88. Решение этих задач по формуле. Учащиеся уже вывели формулу для решения первой (прямой) задачи на проценты. Было бы очень хорошо, если бы ученики оценили значение формул, почувствовали бы, что формулы облегчают и ускоряют вычисления, и стали бы охотно ими пользоваться. Но, конечно, такой успех приходит не сразу.

Как вывести формулу задачи второго типа (обратной задачи на проценты)?

Во-первых, эту формулу можно получить из первой. Хорошо, если бы ученики, рассматривая первую формулу $b = \frac{ap}{100}$, сами сообразили, что теперь искомым будет уже не число b, а число a, и ответили на вопрос, как найти a, т. е. как его выразить через b, p и 100. Если никто из учащихся не сможет с этим справиться, учителю придется выступить самому.

Как найти a из этого равенства? Можно испробовать такой более или менее доступный для учеников путь. Перепишем формулу так: $b = a\frac{p}{100}$.

Можно сделать пояснения, указав, что в числителе дроби произведение двух сомножителей, которое нужно разделить на число 100. Чтобы разделить произведение, можно поступить так: разделить один из сомножителей и полученное частное умножить на другой сомножитель. Если это неясно, то следует в стороне написать какой-нибудь числовой пример и выполнить указанные действия.

Теперь решение нашей задачи сводится к следующему: слева у нас написано число b, а справа — произведение двух сомножителей. Один из сомножителей нужно найти. Чтобы найти этот сомножитель, нужно произведение (b) разделить на другой сомножитель.

$$\text{Если } b = a \cdot \frac{p}{100}, \text{ то } a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

Этот вывод, конечно, можно считать формальным. Для школьников VI класса можно найти выводы, более убедительные и понятные. Если учитель, зная уровень класса, сочтет предыдущий вывод трудным и неубедительным, то следует вывести формулу из решения какой-нибудь конкретной задачи. Например, такой: при постройке дома стоимость строительных материалов составляет 65%, а в денежном выражении — 97 500 рублей. Во что обойдется постройка дома?

Решение этой задачи можно записать так:

1) 97 500 : 65 = 1500; 2) 1500 · 100 = 150 000, или в виде числовой формулы:

$$a = \frac{97500 \cdot 100}{65} = 150\,000.$$

Полезно выразить этот результат словами: чтобы найти все число по нескольким его процентам, нужно данное в задаче число, соответствующее этим процентам, разделить на число процентов и полученное частное умножить на 100. Это словесное правило действительно тяжеловесно, и сам собою возникает вопрос, нельзя ли записать его покороче. Здесь приходит на помощь буквенная символика. Возьмем прежние обозначения:

все число обозначим буквой a;

число процентов обозначим буквой p;

число рублей, соответствующее этим процентам,— b.

Тогда правило кратко запишется в виде равенства так:

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

Формула только тогда может заинтересовать учеников, когда она р а б о т а е т, т. е. часто применяется, и ученики видят, что она приносит пользу. После того как формула появится, все ее поняли и никто против нее не возражает, необходимо предложить ряд кратко и выразительно сформулированных задач, хотя бы с небольшими числами, допускающими вычисление в уме.

89. Применение таблиц к решению задач второго типа. Вопрос о применении таблиц к решению этих задач несколько сложнее, чем в первом случае. Вторая задача — обратная первой, и таблица, в свое время составленная для решения первой задачи, может пригодиться и для решения второй. Эта мысль должна быть ясно оттенена, потому что в будущем ученики с ней встретятся. Со временем они узнают, например, что таблицы логарифмов могут служить и для нахождения чисел по данным логарифмам.

В свое время была составлена таблица для нахождения процентов данного числа: эта же таблица может служить и для нахождения числа по данным его процентам. Здесь встретятся, впрочем, известные затруднения, но о них не следует говорить сразу. Лучше сказать о них, когда они встретятся при решении конкретных задач. Больших надежд на применение этих таблиц при решении второй задачи возлагать, конечно, не следует, но нужно с учениками рассмотреть только основу их использования в обратном порядке.

1. Найти число, 8% которого составляют 640.

Ищем в таблице столбец с пометкой 8% и в этом столбце находим 640. Какому числу соответствует 640? Смотрим крайний левый столбец и видим 8000. Следовательно, число, от которого 8% составляют 640, будет 8000.

2. Найти число, 6% которого составляют 180.

Ищем в таблице столбец с пометкой 6% и в этом столбце находим 180. Какому числу соответствует 180? Смотрим крайний левый столбец и видим 3000. Следовательно, число, 6% которого составляют 180, будет 3000.

3. Найти число, 9% которого составляют 72.

Ищем в таблице столбец с пометкой 9% и в этом столбце находим 72. Какому числу соответствует 72? Смотрим крайний левый столбец и видим 800. Следовательно, число, 9% которого составляют 72, будет 800.

Этих трех примеров достаточно, чтобы ученики, во-первых, поняли, как отыскивается в таблицах число по его процентам, и, во-вторых, заметили, что данное в задаче число лишь в редких случаях можно найти в таблице. Вероятно, ученики подметят это сами и не преминут сказать об этом учителю.

Если же ученики не поставят такого вопроса, то учитель сам может взять, например, число 680, которое составляет 8% какого-то числа, и поставить вопрос, какого именно.

Находим в таблице столбец с пометкой 8% и видим, что числа 680 в этом столбце нет. Однако есть меньшее число — 640 и большее — 720. Числу 640 соответствует (это уже известно) число 8000, а числу 720 соответствует 9000. Вопрос этот для учеников будет, конечно, новым. Не пытаясь исчерпать его, учитель все-таки может сказать ученикам, что искомое число будет больше 8000 и меньше 9000. Обозначая искомое буквой x, можем записать:

$$8000 < x < 9000.$$

Так как ученики не знают пропорций, то интерполировать еще нельзя. В этом случае можно поступить так: рассмотрим числа 640 и 720, имеющиеся в таблице. Разность между ними 80. Сравним число 640 с числом 680, данным в задаче; разность 680—640 равна 40, или половине предыдущей разности. Учащиеся поверят, если учитель укажет, что разность между процентами равна половине известной разности, то и разность между соответствующими этим процентам числами будет равна половине разности между табличными числами. В таблице мы нашли числа 8000 и 9000, разность между ними равна 1000, а половина этой разности 500. Прибавив ее к меньшему числу, мы найдем 8500. Это и будет искомое число, т. е. 680 составляют 8% от числа 8500. Этот вывод полезно проверить вычислением: 680 : 0,08 = 8500, что подтверждает вычисление по таблицам.

Исходя из этих соображений, учитель может предлагать и более сложные примеры. Появления приближенных чисел избегать не следует [1]. Проверка вычислением во всех случаях весьма желательна.

90. Задачи третьего типа (нахождение процентного отношения чисел). Задачи этого типа практически важнее задач второго типа. Необходимые замечания по поводу их решения были даны выше.

Для выработки навыка нужно теперь решить несколько тренировочных задач. Учащиеся уже познакомились с дробными процентами, и поэтому их не удивит появление в ответе числа с тремя и бо́льшим числом десятичных знаков. На вопрос: «Сколько процентов числа 500 составляет число 75» — можно ответить делением 75 на 500, что дает дробь 0,15.

Задача, собственно, уже решена, так как процентом числа называется сотая часть этого числа. Остается только перейти к процентной форме записи и написать ответ 15%.

Однако чаще всего в частных, особенно в конкретных, задачах получается больше двух десятичных знаков и даже бесконечное число, так что учитель должен будет указывать, на каком знаке следует остановиться (точнее говоря, до какого знака дробь нужно округлить).

---

[1] Это облегчается тем, что раздел «Приближенные вычисления» в программе 1960 г. для VI класса предшествует разделу «Проценты».— *Ред.*

Что касается случаев, где число процентов больше 100, то пусть дана задача: сколько процентов числа 200 составляет число 230?

При решении мы получим результат: 230 : 200 = 1,15. Этот результат может сначала показаться непривычным, потому что получилась неправильная дробь (она же и «смешанное число»). Но к этому учащиеся быстро привыкнут.

91. Решение этих задач по формуле. Учащиеся уже вывели две формулы для решения задач на проценты. Мы полагаем, что теперь они сами подскажут учителю, как найти путь к выводу третьей формулы.

Нельзя ли прежде всего новую формулу вывести из прежних. Возьмем первую формулу:

$$b = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Для третьего типа искомой величиной будет число p. Как вывести его «наружу»?

Написанное равенство можно понимать и так: число ap делится на 100 и дает в частном число b. Значит, можно написать

$$\frac{a \cdot p}{100} = b.$$

Отсюда можно найти $a \cdot p$. Так как делимое равно делителю, умноженному на частное, то можно написать:

$$a \cdot p = 100 \cdot b.$$

В левой части равенства — произведение двух сомножителей a и p. Чтобы найти один из этих сомножителей, нужно выполнить деление, получается

$$p = \frac{100 \cdot b}{a}.$$

Полученную формулу можно переписать так:

$$p = \frac{b}{a} \cdot 100.$$

Вот формальный вывод этой формулы. Учитель может в сильных классах воспользоваться этим выводом, но в классах среднего уровня нужен другой вывод.

С этой целью рассмотрим «целесообразную задачу».

«Автомобиль идет из пункта A в пункт $Б$, расстояние между которыми 800 *км*. В первый день он прошел 384 *км*. Сколько это процентов от всего пути?»

При любом способе решений задачи результат выразится так:

$$p = \frac{384}{800} \cdot 100.$$

Выразим его словами: чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно найти их отношение и умножить его на 100. Теперь введем обозначение:

процентное отношение чисел обозначим буквой p;
число километров, пройденных в первый день,—буквой b;
все расстояние между A и $Б$ — буквой a.

Тогда числовая формула примет вид:

$$p = \frac{b}{a} \cdot 100.$$

После получения формулы необходимо решить ряд задач, как из числа решенных ранее без формулы, так и новых.

92. Применение таблиц к решению задач третьего типа. Таблицы для решения этих задач могут быть различными по своему устройству. В стабильном учебнике арифметики дан образец таблицы, имеющий форму треугольника. Устройство таблицы такое. В верхней строке помещены числа от 1 до какого-нибудь определенного числа. Можно начинать таблицу не с единицы, а с какого-нибудь данного числа и доводить ее до того числа, до какого желательно. В крайнем левом столбце расположены те же самые числа, которые помещены в верхней строке. Крайний верхний левый квадратик остается свободным. Рассмотрим образец таблицы, помещенный в стабильном учебнике на странице 180, изд. 1960 г.

Вопрос 1. Найти процентное отношение числа 61 к самому себе. Иначе говоря: сколько процентов самого себя составляет данное число? Конкретно: было дано задание подвезти 61 *т* угля, к указанному сроку подвезли 61 *т*. Принято говорить: задание выполнено на 100%. Значит, процентное отношение числа 61 к числу 61 равно 100%. Где найти это число в таблице? Нужно провести прямые линии слева направо от числа 61 и сверху вниз от числа 61. На пересечении строки и столбца мы увидим 100,00. Это и есть ответ.

Вопрос 2. Найти процентное отношение числа 61 к числу 62, иначе, ответить на вопрос: сколько процентов числа 62 составляет число 61? Пересечение нужной строки и столбца найти нетрудно. Если мы возьмем 61 сверху, а 62 слева, то на пересечении будет пустая клетка. Значит, нужно брать 61 слева, а 62 сверху. На пересечении строки и столбца будет 98,39. Это и будет ответ на вопрос: 61 составляет 98,39% числа 62.

Найти процентное отношение числа 63 к числу 67. На пересечении строки, идущей от числа 63, и столбца, идущего от 67, увидим 94,03. Значит, 63 составляет 94,03% числа 67.

Теперь нужно проверить табличные данные. Первый пример в проверке не нуждается. Проверим второй пример: 61 составляют 98,39% числа 62. Разделим 61 на 62, ограничив частное четырьмя десятичными знаками: получится $61 : 62 = 0{,}9839$, а в процентной записи 98,39%.

Третий пример: 63 составляют 84,03% от 67. Разделим 63 на 67 и, взяв в частном 4 десятичных знака, получим

$$63 : 67 = 0{,}9403, \text{ что составляет } 94{,}03\%.$$

Таблицы процентных отношений имеются в продаже, но учащиеся должны составить эти таблицы самостоятельно. Объем этих таблиц, преследующих, конечно, учебные цели, учитель должен установить вместе с учащимися.

Составив таблицы, нужно показать, как их использовать. Все таблицы неизбежно имеют ограниченный объем, а составленные учащимися таблицы сверх того упрощены, и решать любую задачу по ним, конечно, нельзя. Учитель должен, учитывая объем таблиц и их числовые данные, составить несколько таких задач, чтобы применение таблиц при их решении было возможно.

Другой вариант таблицы процентных отношений можно найти в статье автора «Арифметика», помещенной в сборнике «Преподавание математики в свете задач политехнического обучения». Устройство таблицы такое. В верхней строке помещены числа от 1 до какого-нибудь определенного числа. В крайнем левом столбце расположены те же самые числа, которые помещены в верхней строке. Отличие этой таблицы от предыдущей в том, что по второй таблице можно найти отношение не только меньшего числа к большему или отношение равных чисел, но и отношение *большего числа к меньшему*.

Пусть требуется найти процентное отношение числа 9 к числу 6. В крайнем левом столбце находим число 9. В первой верхней строке — число 6. На пересечении строки, идущей от 9, и столбца, идущего от 6, видим число 150,00. Это значит, что число 9 составляет 150% числа 6.

Чтобы найти процентное отношение числа, например, 10 к самому себе, находим соответствующие строки и столбец и на их пересечении число 100,00, т.е. 100%, как и следовало ожидать.

Требуется найти процентное отношение числа 10 к числу 14. Способом, указанным выше, находим 71,43%.

Проверить решение легко делением 10 на 14.

В таблице, о которой идет речь, даны процентные отношения для очень малых чисел; в книге помещена не рабочая таблица, а ее образец, который должен служить читателю для ориентировки.

Школьники должны составить по указанию учителя свою таблицу в тех границах, какие ими будут признаны наиболее желательными. Полезно запомнить, что если мы имеем таблицу процентных отношений только для однозначных чисел, то по ней можно находить процентные отношения для чисел в 10, 100, 1000 ... раз больших.

Существуют также печатные таблицы процентных отношений, например Н. П. Любимова, Таблицы процентных отношений (Москва, 1955 г.). Устройство этих таблиц более сложно. Есть подобные таблицы в школьном справочнике по математике А. М. Воронца.

В заключение еще несколько слов о таблицах. О практическом значении и важности таблиц уже упоминалось. В школе таблицы применяются, конечно, в учебных целях. Это вовсе не означает отказа от устных и письменных вычислений. Так что использование таблиц ни в коей мере не может нанести ущерба вычислительной технике учащихся. Чтобы привить вкус к таблицам и элементарный навык в пользовании ими, с учащимися проводится некоторая работа в этом направлении: таблицы составляются элементарными способами и применяются в небольших границах.

93. **Усложненные задачи на проценты.** Особые затруднения испытывают учащиеся при решении таких задач на проценты, условия которых усложнены какими-нибудь дополнительными данными, т. е. таких задач, в которых не один вопрос, а несколько.

Возьмем несложную задачу из задачника Е. С. Березанской.

«Вес рельсовых скреплений составляет в среднем 7,5% веса рельсов. Определить вес скреплений для одноколейного участка пути длиной в 74,8 *км*, если один погонный метр рельса весит 33,25 *кг*».

Приведенная задача не должна показаться особенно трудной, хотя в ней будут затруднять ученика громоздкие числа. Это, казалось бы, второстепенное обстоятельство мешает быстрому ее решению. «Неудобные» числа будут затемнять смысл задачи. Поэтому следовало бы сначала решить совершенно такую же задачу, но с меньшими числами.

Возьмем другую задачу из того же задачника.

«Книготоргующая сеть получила от издательства книги со скидкой в 15% с номинальной цены, обозначенной на обложке, а продала их, учитывая расходы, по номиналу. Какой процент от уплаченной за книги суммы составляют расходы книготоргующей сети (с точностью до 0,1%)?»

Эта задача покажется ученикам более трудной, потому что в ней даются только проценты, но не дано соответствующих им чисел. Это сразу испугает учеников: задача покажется им отвлеченной. Предвидя это, следует предварительно решить, так сказать, более «материализованную» задачу, например такую: «Книга по номиналу стоит 8 рублей. Магазин покупает ее со скидкой 15%, а продает, учитывая свои расходы, по номиналу. Сколько процентов составляют эти расходы от уплаченной за книгу суммы?»

Эта, безусловно, легкая задача все-таки затрудняет учеников, потому что им трудно понять ее смысл. В ней, например, говорится о том, что магазин продает книгу дороже, чем он заплатил за нее при покупке, «учитывая расходы». Эти слова, вместо которых старые задачники говорили бы о «прибыли», конечно, отвлекают учеников, не имея прямого отношения к самим вычислениям.

Глава десятая

ПРОПОРЦИИ

94. Предварительные разъяснения. Основной вопрос, которым мы будем теперь заниматься,— это пропорциональная зависимость величин в ее двух видах. Вопрос же о пропорциях вступительный или вспомогательный. Мы рекомендуем приступить к изучению этого материала с рассмотрения нескольких несложных задач. Возьмем задачи:

1. Метр сукна стоит 8 рублей. Сколько стоит кусок сукна, в котором 100 метров?

2. Поезд идет со скоростью 40 *км* в час. Во сколько часов он пройдет 300 *км*, если на этом участке не будет остановок?

3. Дом застрахован в 8000 рублей. Сколько придется заплатить в год за его страховку, если с каждой тысячи платится 25 рублей?

4. Маляр должен окрасить пол в зале размером 20 *м* длины и 12 *м* ширины. Сколько нужно уплатить ему за работу, если за каждый квадратный метр ему платят 3 рубля?

5. Килограмм муки стоит 30 копеек. Сколько нужно уплатить за 80 *кг* этой муки?

Учащиеся должны рассмотреть эти задачи прежде всего со стороны их содержания. Они должны понимать, что совершенно различные по содержанию задачи могут решаться одним и тем же способом. Для иллюстрации этой мысли можно взять первую и пятую задачи, в которых говорится о совершенно различных вещах, но решаются они одним и тем же способом.

Эти задачи предлагается рассмотреть (а если угодно, то и решить, так как они очень легкие) для того, чтобы вспомнить, что называется *величиною*.

В первой задаче мы встречаем величину, которая называется *расстоянием* или *длиною*. Кроме того, в задаче встречается другая величина — *стоимость*. Отличительная особенность всякой величины в том, что она может быть измерена какими-нибудь единицами измерения. В данном случае длина измерена метрами, а стоимость — рублями.

Вторая задача отличается от первой своим содержанием. В ней говорится о движении поезда, которое связано с расстоянием: это — величина, которая уже встречалась и в первой задаче. Только в данном случае она измерена не в метрах, а в километрах. Но здесь упоминается и еще одна величина: время, выраженное в часах. Для полной сознательности учащиеся должны разобраться, почему в первой задаче длина выражена в метрах, а во второй — в километрах. Кроме того, они должны понимать известную связь между величинами: во второй задаче речь идет о движении, а всякое движение протекает во времени. Поэтому почти неизбежно, что в задачах на движение встречаются величины: расстояние и время.

В третьей задаче говорится о страховании дома. Здесь одна величина, *стоимость*, дана в рублях (8000 рублей). Вторая величина, упоминаемая в этой задаче,— время, выраженное в годах (дом застрахован на 1 год). В задаче есть еще третья величина, назовем ее «*страховая такса*». Это — число рублей, уплачиваемых с каждой тысячи. Может быть, такого рода задача покажется более трудной, но она полезна: ее содержание выводит школьников за пределы шаблонных сюжетов.

В четвертой задаче даны известные уже величины: линейные размеры зала (длина и ширина), но они даны для того, чтобы найти особую величину — *площадь* зала. Эта площадь измеряется квадратными метрами. Оплата труда, производимая с каждого квадратного метра площади, тоже есть величина, измеряемая рублями.

В пятой задаче дается новая величина — *вес*, измеренный килограммами. Затем дается цена килограмма в рублях и требуется определить *стоимость*.

Таким образом, мы, рассматривая эти пять задач, наметили следующие величины: расстояние (длина), стоимость, время, страховая такса, площадь, вес.

Конечно, здесь перечислены не все возможные величины. Величин гораздо больше; многие из них встретятся при изучении физики. Здесь упомянуты только наиболее распространенные из величин, с которыми человек встречается в повседневной жизни. Каждый человек куда-нибудь ежедневно ходит или ездит, например на предприятие или в учреждение. Значит, ему знакома такая величина, как длина пути. Каждый человек ежедневно что-нибудь покупает, и, следовательно, ему понятна такая величина, как стоимость или цена. У каждого человека есть ручные, или карманные, или настольные, или стенные часы, которые существуют для измерения особой величины — времени. Столь же часто употребляются и другие упомянутые выше величины.

Учащиеся должны помнить, что для каждой величины должна быть единица измерения. Если же что-нибудь мы не можем измерить, то это не величина. Мы иногда говорим о человеческой грубости или вежливости, но мы не можем этих свойств измерить, не можем их выразить числом, и потому нельзя сказать, что это величина.

О каждой величине можно сказать, что она принимает ряд различных значений. Если я с помощью полевого метра измеряю длину усадьбы, то я иду вдоль изгороди, откладываю метр за метром и говорю: 1 метр, 2 метра, 3 метра, 4 метра и т. д. Названные мною расстояния 1 *м*, 2 *м*, 3 *м*, 4 *м* и будут называться **значениями** величины (длины).

То же самое можно повторить и о любой другой величине. Если я, например, по часам наблюдаю за каким-нибудь явлением, то говорю: 1 минута (или секунда), 2 минуты, 3 минуты, 4 минуты, 5 минут и т. д. Как и в предыдущем примере, здесь 1 мин., 2 мин., 3 мин., 4 мин., 5 мин.— значения времени как величины.

Вот краткий рассказ о величинах. Он нужен до начала изучения пропорций. В учебниках иногда учение о пропорциях начинается без всякого предупреждения, поражая учащихся как неожиданность. Нужен совсем другой подход: сначала рассказать о том, что в любой задаче мы встречаемся с какими-нибудь величинами, что любая величина измеряется определенными единицами измерения, затем рассмотреть различные, знакомые ученикам виды величин, ввести и объяснить термин «значение величины», наконец, сравнивая значения однородных величин, подойти к понятию «отношения»[1].

После того как учащиеся вспомнили, что такое отношение, не трудно перейти к пропорции. В любой задаче мы встречаемся с какими-нибудь величинами, и важно подчеркнуть, что в задачах мы встречаемся не с одной, а по крайней мере с двумя величинами. Эти величины всегда связаны между собой. Связь может быть различная, но на первых порах мы будем рассматривать самую простую связь, или **зависимость**, которая называется прямой пропорциональностью.

---

[1] Понятие об отношении учащиеся уже получили в V классе, но об этом необходимо напомнить.

Сказанное здесь можно нагляднее показать на любой задаче, например на первой, стр. 323. В первой задаче говорится, что метр сукна стоит 8 рублей, и требуется найти стоимость 100 *м* сукна.

Рассмотрим ряд вопросов, которые могут возникнуть в связи с содержанием этой задачи:

1. Какие здесь величины? Ответ: длина куска сукна и цена сукна (стоимость 1 *м*).

2. Как связаны между собой эти величины? Ответ: связь эту можно выразить словами: чем больше метров сукна, тем больше стоимость куска сукна.

3. Напишите несколько значений обеих величин — длины куска и его стоимости.

Длина куска: 1 *м*, 2 *м*, 4 *м*, 7 *м*, 10 *м*.

Стоимость куска: 8 руб., 16 руб., 32 руб., 56 руб., 80 руб.

4. Какими единицами можно измерять каждую из этих величин? Ответ: длина измеряется метрами, километрами, сантиметрами, миллиметрами; стоимость измеряется рублями, копейками.

5. Какие еще вам известны величины, кроме тех, которые встретились в этой задаче? Ответы: время, страховая такса, площадь, вес. Кроме этих величин, ученики, вероятно, вспомнят две величины, не встречавшиеся в предложенных выше задачах,— объем и температуру. Если же ученики не вспомнят об этих величинах, то учитель напомнит.

Вообще вопросу о величинах следует уделить особое внимание. Обычно на эту тему говорят мало и скороговоркой, и это отражается на успехах учащихся.

После этого полезно заняться сравнением значений величин. Как сравнить такие значения величин: 40 *м* и 20 *м*? Нужно написать их отношение: $40 : 20$, или $\frac{40}{20}$. Эти отношения можно упростить, и тогда получится $2 : 1$, или $\frac{2}{1}$. Смысл написанных отношений: первое расстояние, или первый отрезок, в два раза больше второго. Полезно сравнить второй отрезок с первым, написав обратное отношение:

$$20 : 40; \ \frac{20}{40}, \text{ или } 1 : 2; \ \frac{1}{2}.$$

Смысл этих выражений: второй отрезок составляет половину первого.

Нужно рассмотреть последовательно все величины, с которыми мы здесь встречались, и по указанию учителя или по выбору самих учеников написать достаточное число отношений, составленных из значений этих величин. Эти упражнения могут протекать так. Учитель предлагает ученику записать в виде отношения, что 30 *кг* в пять раз больше 6 *кг*, или, наоборот, объяснить смысл записи $\frac{40\text{ мин.}}{10\text{ мин.}}$.

После этого, возвращаясь к первой задаче, предложим следующий ее вариант: *3 м сукна стоят 24 рубля. Сколько рублей стоят 12 м сукна?*

Обозначим искомое число рублей буквой x, тогда условие задачи кратко можно записать так:

3 *м* сукна стоят 24 рубля,

12 *м* сукна стоят x рублей.

Мы знаем стоимость 3 *м*, а ищем стоимость 12 *м* — вчетверо большего числа метров.

Запишем отдельно отношение метров и отношение рублей:

$$12 : 3; \qquad x : 24.$$

Можно ли эти отношения соединить знаком равенства? Этот вопрос нужно понимать не формально, а совершенно конкретно: будут ли ученики VI класса возражать против того, что эти отношения равны. Тут дело не в том, есть ли какие-нибудь математические или логические основания, чтобы между этими отношениями написать знак равенства, а только в том, склонны ли психологически дети на данной ступени обучения поставить этот знак равенства.

Безусловно, они согласятся поставить этот знак. Самый естественный ход рассуждения у них будет такой: мы знаем, что 3 *м* сукна стоят 24 рубля, а вчетверо больше метров сукна — 12 *м* стоят вчетверо больше рублей. Значит, буква x изображает число, которое в 4 раза больше 24. Ученики с легким сердцем напишут:

$$12 : 3 = x : 24.$$

Получилась пропорция. Мы еще не знаем никакой теории пропорций, но решим пропорцию по здравому смыслу.

Если выполнить деление чисел слева от знака равенства, то равенство примет вид:

$$4 = x : 24.$$

Каждый окончивший когда-то начальную школу ученик должен сообразить, что $x = 96$ (рублям).

Здесь пропорция возникла не неожиданно, а получилась из условия задачи. Ученики должны понимать, что пропорции составляются из условий задач и могут служить превосходным орудием их решения. Особенно важно добиться с учениками хорошего навыка в решении пропорций. Пропорция, в которую входит неизвестное число,— не что иное, как вид уравнения, весьма употребительный при изучении алгебры и изучении физики.

95. **Пропорции.** Начнем с рассмотрения следующих фактов:

1	*м*	полотна	стоит	2,5	руб.
2	»	»	»	5	»
3	»	»	»	7,5	»
4	»	»	»	10	»
5	»	»	»	12,5	»
6	»	»	»	15	»
7	»	»	»	17,5	»
8	»	»	»	20	»
9	»	»	»	22,5	»
10	»	»	»	25	»
11	»	»	»	27,5	»
12	»	»	»	30	»

Из этих чисел можно составить несколько пропорций. Напишем какую-нибудь одну, например:

$$1 \text{ м} : 4 \text{ м} = 2{,}5 \text{ руб.} : 10 \text{ руб.}$$

Мы составили отношение двух значений величины, стоящей в таблице слева (число метров полотна), и связали его знаком равенства с отношением двух значений величины, стоящей в таблице справа. Получилась пропорция. Она составлена совершенно правильно, в чем легко убедиться проверкой. Но эта пропорция, в которой известны все четыре числа, не может быть использована как задача. Это только п р и м е р пропорции. Но если бы в ней было неизвестно одно из четырех чисел, то, зная остальные три, мы могли бы вычислить четвертое. Пусть нам неизвестно любое из четырех чисел, хотя бы первое. Перепишем пропорцию, отбросив наименования:

$$x : 4 = 2{,}5 : 10.$$

Упростив отношение, стоящее справа, получим пропорцию:

$$x : 4 = 1 : 4, \text{ или } \frac{x}{4} = \frac{1}{4}.$$

Чему здесь равен x? Делимое равно делителю, умноженному на частное (или если знаменатели двух *равных* дробей равны, то равны и их числители); отсюда

$$x = 4 \cdot \frac{1}{4}; \quad x = 1.$$

Мы решили пропорцию, опираясь на предыдущие знания. С течением времени мы найдем правило для решения пропорций. Пока же ученики должны освоиться с мыслью: пропорция возникает из условия задачи, и пропорции очень удобно применять при решении многих задач. Теперь же нужно несколько глубже и подробнее познакомиться с пропорциями, прежде чем заниматься их приложениями. Написав несколько пропорций из приведенной выше таблицы, следует рассказать о способах чтения пропорций и установить терминологию.

Составим пропорцию, взяв первые пары значений наших величин:

$$1 : 2 = 2{,}5 : 5.$$

Преподаватель, конечно, введет термины: члены пропорции, крайние члены (1; 5), средние члены (2; 2,5). С самого начала обязательно проверять каждую пропорцию, устанавливая, равны ли входящие в нее отношения. Здесь в левой части имеем отношение 1 : 2; в правой части после упрощения (деления обоих членов на 2,5) получим отношение 1 : 2. Проверка, о которой сказано, нужна просто для того, чтобы установить, не вкралась ли при записи какая-нибудь случайная ошибка.

Кроме указанных терминов, полезны еще такие: члены первого отношения (1 : 2) и члены второго отношения (25 : 50). Напишем пропорцию: 1 : 2 = 25 : 50.

Читается эта пропорция так: один так относится к двум, как двадцать пять относится к пятидесяти. Это наиболее удобный способ чтения пропорции. Его можно заменить и другим: отношение 1 к 2 равно отношению 25 к 50. Если термин «отношение» еще не стал для учащихся привычным, то сначала время от времени можно читать пропорцию так: единица составляет такую часть двух, какую 25 составляет от 50, или: единица во столько раз меньше двух, во сколько 25 меньше 50.

Затем нужно взять другую пропорцию из таблицы, например $8 : 2 = 20 : 5$; с этой пропорцией нужно проделать то же, что и с предыдущей: проверить, сказать наименования, прочесть ее различными способами, учитывая то, что здесь на первом месте стоит большее число, чем на втором.

После этого учащиеся составляют ряд пропорций из таблицы, а также независимо от таблицы.

Что касается наименований, то можно составлять пропорции, как из отвлеченных чисел, так и из именованных. В задаче, которую нужно решить составлением пропорции, фигурируют именованные числа; их наименования войдут и в пропорцию. Как правило, члены первого отношения имеют одно наименование (например, километры), а члены второго отношения — другое (например, часы). При решении пропорции наименования нужно отбросить, получив пропорцию, составленную из отвлеченных чисел, и приписать их к ответу только после решения.

96. Основное свойство членов пропорции. Всякая пропорция обладает простым, но весьма важным свойством. Оно состоит в том, что *произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.*

Как подвести учеников к этому? Весьма возможно, что учащиеся, рассматривая несколько пропорций с небольшими числами, сами обратят внимание на это свойство, а подметив его, спросят учителя, не будет ли каких-нибудь исключений. Тогда учителю нужно будет как-то мотивировать это свойство. Во всяком случае, нужно идти индуктивным путем, и если ученики сами не заметят этого, то учитель может подсказать:

если	$2 : 1 = 6 : 3$,	то $2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$
»	$3 : 1 = 15 : 5$,	» $3 \cdot 5 = 1 \cdot 15$.
»	$8 : 2 = 20 : 5$,	» $8 \cdot 5 = 2 \cdot 20$.
»	$10 : 2 = 15 : 3$,	» $10 \cdot 3 = 2 \cdot 15$.
»	$4 : \frac{1}{2} = 16 : 2$,	» $4 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 16$ и т. д.

Наиболее убедительным доказательством на этой стадии обучения будет подбор достаточного числа разнообразных примеров. Но если ученики попросят учителя «доказать» или «вывести» это, можно использовать обычный прием, состоящий в том, что берут пропорцию, например

$$10 : 2 = 15 : 3,$$

и переписывают ее так:

$$\frac{10}{2} = \frac{15}{3}.$$

Затем умножают каждое из двух равных отношений на одно и то же число $2 \cdot 3$ — произведение последующих членов пропорции. После умножения получим:

$$\frac{10 \cdot 2 \cdot 3}{2} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 3}{3},$$

а после сокращений слева и справа:

$$10 \cdot 3 = 15 \cdot 2.$$

Не следует обольщать себя мыслью, что после этого доказательства все станет ясно и все ученики почувствуют удовлетворение. Индукция на этой ступени убеждает большинство учеников сильнее, чем дедукция. Предыдущие рассуждения приведены на случай, если они понадобятся учителю.

Еще меньше убеждает общее доказательство на буквах, но на всякий случай приводим и его.

Пусть дана пропорция общего вида:

$$a : b = c : d, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Умножим каждое из двух равных отношений на одно и то же произведение последующих членов пропорции bd. После умножения получим:

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d},$$

а после сокращений слева и справа:

$$ad = bc.$$

Такого рода выкладки могут быть убедительными для учеников старших классов школы, но в VI классе, чтобы ученики привыкли к пропорциям, нужно теперь брать пропорции с различными членами целыми и дробными, читать их разными способами и проверять или делением, или используя основное свойство пропорции.

Упражнения следует проводить примерно так:

1. Проверьте делением пропорцию:

$$100 : 50 = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}.$$

2. Проверьте применением основного свойства пропорцию:

$$34 : 17 = 10 : 5.$$

3. Проверьте делением пропорцию:

$$36 : 4 = 99 : 11.$$

4. Проверьте применением основного свойства пропорцию:

$$5 : 12 = 15 : 36.$$

5. Проверьте делением пропорцию:

$$\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = 100 : 50.$$

6. Проверьте применением основного свойства пропорцию:

$$10 : \frac{1}{2} = 5 : \frac{1}{4}.$$

7. Проверьте делением пропорцию:

$$15 : 3 = 25 : 4 \quad \text{(исправьте).}$$

8. Проверьте применением основного свойства пропорцию:

$$20 : 3 = 35 : 5 \quad \text{(исправьте).}$$

Основное свойство пропорции исключительно важно, и поэтому необходимо добиться того, чтобы учащиеся сознательно его усвоили. Однако при его изучении едва ли встретятся затруднения: оно слишком просто и прозрачно.

После этого в учебниках обычно говорится о том, что четыре числа, выбранные так, что произведение двух из них равно произведению двух других, всегда являются членами пропорции.

Этот факт, конечно, следует знать, но все же он приводится главным образом для полноты изложения. Тратить на это много времени на следует. В глазах учеников изложение этого факта можно оправдать, пожалуй, следующим образом. Ученик составил пропорцию и увидел, что она неверна. Его ошибка могла произойти оттого, что он неверно расположил взятые числа, но могла быть и другая причина: он взял или ему дали такие числа, из которых нельзя составить пропорцию. Высказанное выше предложение и указывает, в каких случаях из четырех чисел можно составить пропорцию.

Возьмем четыре числа: 3; 4; 15; 20 — и поставим вопрос, можно ли из них составить пропорцию. Выше было сказано, что для этого нужно, чтобы произведение одной пары этих чисел было равно произведению чисел другой пары. Как взять эти пары? Будем пробовать.

$3 \cdot 4 - 15 \cdot 20$ — не получается;

$3 \cdot 15 - 4 \cdot 20$ — не получается;

$3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$ — получилось равенство.

Значит, из этих четырех чисел получилось равенство, и поэтому из них можно составить пропорцию. Как это сделать? Для этого можно разделить обе части равенства $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$ на произведение двух чисел из данных четырех, но взятых из разных частей равенства. Значит, можно разделить на следующие произведения:

$3 \cdot 4$; $3 \cdot 15$; $20 \cdot 4$; $20 \cdot 15$.

Получим следующие пропорции:

$$\frac{3 \cdot 20}{3 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 4}, \text{ откуда } \frac{20}{4} = \frac{15}{3}.$$

$$\frac{3 \cdot 20}{3 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 15}, \text{ откуда } \frac{20}{15} = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{3 \cdot 20}{20 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 15}{20 \cdot 4}, \text{ откуда } \frac{3}{4} = \frac{15}{20}.$$

$$\frac{3 \cdot 20}{20 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 15}{20 \cdot 15}, \text{ откуда } \frac{3}{15} = \frac{4}{20}.$$

Таким образом, сначала мы установили, что из данных четырех чисел пропорции составить можно, а потом мы написали самые возможные пропорции из предложенных чисел.

После этого нужно рассмотреть несколько примеров. Пусть учащиеся или п о д б е р у т пары чисел, или возьмут их случайно. При случайном выборе чисел мало вероятно, что из четырех каких-то чисел получится пропорция. Возьмем, например, числа 2; 3; 4; 5.

Посмотрим, какие здесь возможны произведения.

$$2 \cdot 3 \text{ — } 4 \cdot 5;$$
$$2 \cdot 4 \text{ — } 3 \cdot 5;$$
$$2 \cdot 5 \text{ — } 3 \cdot 4.$$

Мы не можем получить здесь ни одного равенства. Значит, из этих четырех чисел нельзя составить пропорции.

Может быть, полезна оговорка относительно числа нуль. Нуль — тоже число и может встречаться в качестве сомножителя. Вполне возможно, что учащиеся не обратят внимания на этот случай, но если они предложат такой вопрос, то придется ответить, что если в одном из произведений оба сомножителя нули, тогда из таких четырех чисел нельзя составить пропорцию. В самом деле, в этом случае мы будем иметь, положим, в левой части $0 \cdot 0$, а в правой — тоже 0, умноженный на какое-нибудь число: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 7$. Здесь при попытке составить пропорцию пришлось бы делить на нуль, а это, как мы знаем, недопустимо.

97. Вычисление неизвестных членов пропорции. Здесь будет изложен самый важный вопрос данного раздела. Практически важнее всего уметь вычислить один из членов пропорции, если он неизвестен, благодаря этому пропорция становится орудием решения многих задач.

В общем виде эти вопросы рассматриваются в алгебре, но по установившейся традиции в арифметике рассматривается некоторый частный вопрос.

Возьмем такую, например, пропорцию:

$$x : 4 = 15 : 3.$$

Не будем пока интересоваться тем, какова та задача, которая привела к составлению этой пропорции, а подумаем, как можно эту пропорцию р е ш и т ь, иначе говоря, как вычислить неизвестное нам число, обозначенное буквой x.

Предложенное равенство (уравнение) имеет вид пропорции. Его можно решить, опираясь на основное свойство пропорции. Оно состоит, как уже знают учащиеся, в том, что произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов. Произведение крайних членов пропорции будет $3 \cdot x$. Это произведение содержит неизвестное число, и мы пока вычислить его не можем. Но оба средних числа нам известны; их произведение можно вычислить; первый вопрос можно записать так:

$$4 \cdot 15 = 60.$$

Но по основному свойству пропорции произведение крайних членов пропорции тоже должно быть равно 60, т. е. мы можем написать:

$$3 \cdot x = 60.$$

Дальше следует несложное рассуждение: в левой части равенства два сомножителя, один неизвестен и обозначен буквой x. В разделе целых чисел было следующее правило: чтобы найти неизвестный сомножитель, достаточно разделить произведение двух сомножителей на известный сомножитель, т. е.

$$x = 60 : 3, \text{ отсюда } x = 20.$$

В целях проверки найденное число 20 полезно подставить в данную пропорцию:

$$20 : 4 = 15 : 3.$$

Правильность решения проверяется двумя способами. Можно проверить, равны ли отношения:

$$20 : 4 = 5;\ 15 : 3 = 5, \text{ итак } 5 = 5.$$

Можно воспользоваться основным свойством пропорции:

$$20 \cdot 3 = 4 \cdot 15.$$

Пропорция решена правильно.

При решении этой пропорции мы выбрали довольно длинный путь; обычно те же самые вычисления располагают более удобно: чтобы найти неизвестный крайний член пропорции x, сначала перемножаются средние члены и их произведение делят на известный крайний член. Оба действия можно записать вместе следующим образом:

$$x = \frac{4 \cdot 15}{3} = \frac{4 \cdot 5}{1} = 20^*.$$

Равенство отмечено звездочкой потому, что придется еще раз к нему возвратиться.

Возможен еще такой вариант решения.

Пусть дана пропорция:

$$x : 4 = 15 : 3.$$

На первом месте в качестве крайнего члена стоит буква x (неизвестное). Мы не можем разделить букву на число 4 и перепишем без изменения левую часть равенства. Но в правой части равенства мы можем выполнить деление $15 : 3 = 5$, и можно написать: $x : 4 = 5$. Отсюда, припоминая зависимость между делимым, делителем и частным (делимое равно делителю, умноженному на частное), мы можем написать:

$$x = 4 \cdot 5, \text{ или } x = 20.$$

Мы нашли по-другому то же числовое значение неизвестного члена пропорции, которое было найдено раньше. Это может служить проверкой обоих решений. Безразлично, как вычислять x, но общепринят первый способ. Рассмотрим поэтому еще раз решение, выше отмеченное звездочкой.

Сущность задачи состояла в том, чтобы найти неизвестный крайний член. Решение выразилось такой числовой формулой:

$$x = \frac{4 \cdot 15}{3},$$

где 4 и 15 — средние члены, а 3 — известный крайний член. Можно выразить словами эту числовую формулу: крайний член пропорции равен произведению средних, деленному на другой крайний.

Если ученики уже достаточно продвинуты в смысле овладения буквенной символикой, что весьма желательно и вполне возможно, так как мы уже приближаемся к концу арифметики, то следует предложить им вместо числовой буквенную формулу. Можно предоставить инициативу самим учащимся, указав им на то, что неизвестные числа принято обозначать последними буквами латинского алфавита (x, y, ...), а известные — первыми буквами (a, b, c ...). Имея это в виду, данную пропорцию можно записать так:

$$x : a = b : c.$$

Рядом с этой пропорцией или под ней можно написать ту числовую пропорцию, которую мы решали. И тогда учащиеся без труда напишут формулу:

$$x = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Она была выведена для вычисления крайнего члена пропорции по двум средним и другому крайнему. Но из формулы не видно, какой крайний был неизвестен, левый или правый. Теперь покажем, что формула и правило вычисления, которое она указывает, не изменятся, какой бы из крайних членов пропорции мы ни вычисляли, левый или правый.

Возьмем пропорцию с неизвестным правым крайним членом:

$$24 : 8 = 21 : x.$$

Чтобы найти x (это и значит решить пропорцию), можно исходить из основного ее *свойства*: $24 \cdot x = 8 \cdot 21$; отсюда

$$x = \frac{8 \cdot 21}{24} = \frac{21}{3} = 7.$$

Проверим решение подстановкой $x = 7$ в данную пропорцию:

$$24 : 8 = 21 : 7$$

$$24 : 8 = 3;\ 21 : 7 = 3 \text{ (пропорция верна)},$$

$$24 \cdot 7 = 168;\ 8 \cdot 21 = 168 \text{ (пропорция верна)}.$$

Был вычислен сначала один из крайних членов — левый, а потом другой — правый. В обоих случаях формула и правило нахождения неизвестного крайнего члена остались в силе.

Возьмем теперь пропорцию, в которой неизвестен какой-нибудь средний член:

$$36 : x = 20 : 5.$$

Как найти неизвестный средний член, обозначенный буквой x? Рассуждение будет почти целиком повторяться, так что учащиеся должны теперь проявить еще больше активности. При этом они, безусловно, должны опираться на основное свойство пропорции. В случае же затруднений учитель должен вопросами направлять мысль учеников на правильный путь. Канва этой беседы примерно такая.

Запишем произведение средних членов пропорции: $20 \cdot x$. (Если из двух сомножителей один обозначен цифрами, а другой — буквой, то цифровой сомножитель пишется на первом месте. Однако если бы мы написали его на втором месте, то существо дела от этого не изменилось бы.) Написанное произведение содержит неизвестное число, и вычислить его пока мы не можем. Но оба крайних члена пропорции нам известны, и их произведение может быть вычислено:

$$36 \cdot 5 = 180.$$

Произведение средних членов — $20 \cdot x$, а произведение крайних — 180 по основному свойству пропорции должны быть равны, так что

$$20 \cdot x = 180.$$

Найдем один из сомножителей, зная другой сомножитель и произведение:

$$x = 180 : 20; \text{ отсюда } x = 9.$$

Для проверки найденное число 9 полезно подставить в данную пропорцию:

$$36 : 9 = 20 : 5.$$

Правильность решения проверяем двумя способами:
1) $36 : 9 = 4$; $20 : 5 = 4$ (пропорция верна);
2) $36 \cdot 5 = 180$; $9 \cdot 20 = 180$ (пропорция верна).

Задача состояла в том, чтобы найти неизвестный средний член. Решение ее выразилось такой числовой формулой:

$$x = \frac{36 \cdot 5}{20},$$

где 36 и 5 — крайние члены, а 20 — средний правый член. Мы можем выразить словами эту числовую формулу.

Средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на другой средний.

После этого полезно вывести буквенную формулу. Сохраняя обозначения, введенные раньше, напишем пропорцию так:

$$a : x = b : c.$$

Но данная пропорция имела вид: $36 : x = 20 : 5$; сопоставляя эти пропорции, мы можем написать такую формулу:

$$x = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Неизвестный правый средний член вычисляется совершенно так же; учащиеся должны найти его сами под руководством учителя.

Ученики обычно любят решать пропорции. Достаточное число упражнений необходимо для выработки хорошей техники. Когда все это усвоено, нужно брать пропорции, полученные из условия задач. Здесь тоже необходима тренировка.

З а д а ч а. Машинистка перепечатывает рукопись. Она перепечатала 10 рукописных страниц, и у нее получилось 6 машинописных страниц. В рукописи всего 120 страниц. Сколько примерно страниц получится на машинке, если рукопись написана одним и тем же почерком?

Будем рассуждать так:

из 10 рукописных страниц получается 6 страниц на машинке;

из 120 рукописных страниц получается x страниц на машинке.

Ясно, что x больше 6 во столько раз, во сколько 120 больше 10.

Это можно записать в виде пропорции:

$$x : 6 = 120 : 10,$$

$$x = \frac{6 \cdot 120}{10}; \; x = 6 \cdot 12; \; x = 72.$$

Рукопись уложится на 72 страницах.

Пусть теперь учащиеся сами предлагают задачи для составления пропорций.

98. Упрощение пропорции. Упростить пропорцию — значит сделать ее проще. Нужно только выяснить, какую пропорцию можно назвать простой и какую — не простой. В математике нет понятия «простая пропорция» и употреблять этот термин не следует. Это прилагательное (не термин!) употреблено только для того, чтобы как-то отличить пропорцию, подлежащую упрощению, от той, которая получается после упрощения.

Возьмем пропорцию $1 : 2 = 5 : 10$. Она не нуждается ни в каких упрощениях. Но пропорция с большими числами, требующими громоздких вычислений, в случае надобности может быть иногда заменена без ущерба для дела другой пропорцией с меньшими числами.

Не следует делать из этого вопроса большую «проблему», не следует искусственно преувеличивать его роль и значение. Дело в том, что если в задачнике встретится пропорция с большими числами, то это не значит, что мы не сможем ее решить без упрощения. Пропорция с любыми числами все равно будет решена. Вопрос только в том, при каких преобразованиях (с целью решения пропорции или с другой целью) данная пропорция остается правильной.

Сначала покажем на примере, что замена в пропорции больших чисел меньшими вовсе не обязательна, а потом займемся вопросом о допустимом ее преобразовании.

Пусть дана пропорция:

$$300 : 25 = 48 : x.$$

Решим ее, как она есть:

$$x = \frac{25 \cdot 48}{300} = \frac{1 \cdot 48}{12} = 4.$$

Теперь сначала уменьшим каждый из членов первого отношения в 25 раз, а потом уже решим полученную пропорцию.

Данная пропорция приняла после преобразования вид:

$$12 : 1 = 48 : x.$$

Решение:

$$x = \frac{1 \cdot 48}{12} = 4.$$

Ответ тот же самый.

Теперь перейдем к основному вопросу: какие преобразования можно выполнять над данной пропорцией, чтобы вновь полученная пропорция оказалась правильной.

Можно одновременно увеличить или уменьшить оба члена любого отношения в одинаковое число раз.

Конечно, если члены какого-нибудь отношения и без того велики, то практически увеличивать их нет никакого смысла, но мы должны рассмотреть и этот факт, потому что нас интересует теоретический вопрос: имеем ли мы право делать такое увеличение.

Можно взять любую пропорцию, например пропорцию

$$1 : 2 = 5 : 10.$$

Нужно проверить четыре факта:

1. Увеличение членов первого отношения.

Увеличим члены первого отношения в 18 раз, оставив члены второго отношения без изменения:

$$18 : 36 = 5 : 10.$$

Внешне эта пропорция отличается от данной, но, как легко проверить, левая часть равенства равна правой, а произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов. Значит, преобразование законно.

2. Увеличение членов второго отношения.

Увеличим члены второго отношения в 8 раз, оставив первое отношение без изменения:

$$1 : 2 = 40 : 80.$$

Левая часть новой пропорции равна правой, и произведение крайних членов равно произведению средних ее членов. Значит, это преобразование вполне допустимо.

3. Уменьшение членов первого отношения.

Зная, что можно увеличивать в несколько раз члены первого отношения, не нарушая пропорции, ученики сами поймут, что можно и уменьшать их в несколько раз. Для этого достаточно сравнить члены пропорций из примера 1

$$1 : 2 = 5 : 10;$$
$$18 : 36 = 5 : 10$$

в обратном порядке: ясно, что первая пропорция получается из второй делением членов первого отношения на 18. Конечно, помимо этого, полезно рассмотреть и специальный пример по выбору учащихся.

4. Уменьшение членов второго отношения.

Здесь можно поступить так же, как и в пункте 3, сравнив члены пропорций:

$$1 : 2 = 5 : 10;$$
$$1 : 2 = 40 : 80$$

«снизу вверх», считая, что первая пропорция возникла из второй. Тогда будет видно, что для этого нужно оба члена второго отношения уменьшить в 8 раз, не изменяя членов первого отношения.

Вывод. Пропорция не нарушится, если мы одновременно увеличим или уменьшим в одинаковое число раз оба члена любого из отношений, составляющих пропорцию.

Можно одновременно увеличивать или уменьшать оба предыдущих члена или оба последующих члена отношений, входящих в пропорцию, в одинаковое число раз.

Здесь опять полезно напомнить сказанное выше, что увеличение чисел не упрощает пропорцию, если числа и без того велики; но при наличии дробных членов в пропорции увеличение, конечно, полезно.

Проверим опять следующие четыре случая:

а) увеличение предыдущих членов; б) увеличение последующих членов; в) уменьшение предыдущих членов; г) уменьшение последующих членов.

Возьмем, например, такую пропорцию:

$$15 : 5 = 3 : 1.$$

Увеличим оба предыдущих члена (15 и 3) в 4 раза и оставим оба последующих члена (5 и 1) без изменения:

$$60 : 5 = 12 : 1.$$

Получилась новая пропорция, но при проверке она оказалась верной. Увеличение обоих предыдущих членов в одинаковое число раз вполне допустимо.

Увеличение предыдущих членов в 4 раза — только примерный образец преобразования, отнюдь не обязательный. Все преобразования должны выполняться при активном участии учеников. Учитель должен только поставить вопрос, а ученики — сами соображать, какие случаи следует рассмотреть, какое число и во сколько раз нужно увеличить или уменьшить.

Во всех четырех случаях в качестве примеров рассматриваются пропорции, предложенные учениками, и выполняется увеличение или уменьшение членов во столько раз, во сколько желательно ученикам.

Перечисленные преобразования дают возможность, во-первых, упрощать пропорции, т. е. заменять пропорции с большими числами пропорциями с меньшими числами, и, во-вторых, освобождать пропорции от дробных членов.

Нужно рассмотреть ряд примеров на уменьшение чисел, входящих в пропорцию, и на освобождение пропорций от дробных членов.

В выборе примеров нужно соблюдать постепенность.

1. Сначала берем пропорцию с двумя членами, выраженными большими числами, и упрощаем ее. Затем упрощаем пропорцию, у которой все члены представлены большими числами.

2. Берем пропорцию с одним дробным членом, например

$$4 : \frac{1}{2} = 24 : x,$$

и освобождаем ее от этого дробного члена. Затем берем пропорцию с двумя дробными членами, например

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 20 : 10,$$

и освобождаем ее от дробных членов. Потом освобождаем от дробных членов пропорцию с тремя и, наконец, с четырьмя дробными членами.

Совершенно необходимо, чтобы эти пропорции предлагались учениками, ибо только в этом случае можно судить о том, насколько они понимают изучаемые вопросы.

99. Перестановка членов пропорции. При решении разнообразных задач, в которых встречаются какие-нибудь пропорции, часто приходится для разных целей переставлять члены пропорций. Иногда бывает так, что дается заведомо верная пропорция, а вторая отличается от нее не числами, а только порядком этих чисел. Например, у второй пропорции крайний правый член первой пропорции стал на первое место, а крайний левый стоит на последнем месте. Верна ли эта вторая пропорция?

Пример: ученику предложена для решения пропорция: $16 : 2 = 40 : x$. Имеет ли он право вместо этой пропорции решать такую: $x : 2 = 40 : 16$ — и не будет ли у него ошибки? Ведь отношения, входящие в пропорции, различны: в первую пропорцию входило отношение $16 : 2$, а во вторую — новое отношение $40 : 16$. Вообще нужно решить, насколько свободно можно переставлять члены пропорции: *легко привести примеры заведомо* неправильных и недопустимых перестановок. Пусть, например, дана пропорция: $14 : 2 = 21 : 3$. Пропорция верна: ее отношения равны и произведение крайних равно произведению средних. Но если переставите члены первого отношения, оставив без перемены второе отношение, то равенство нарушится. Получится пропорция: $2 : 14 = 21 : 3$.

Здесь левое отношение — $1 : 7$, а правое — $7 : 1$; эти отношения не равны. Произведение крайних равно 6, а произведение средних — 294. Опять неверно! Да и без вычислений видно, что пропорция неверна: слева отношение меньшего числа к большему, а справа — большего числа к меньшему. Очевидно, не всякая перестановка законна.

Будем делать различные перестановки членов пропорции и искать среди них верные. Чтобы не запутаться в этих перестановках, будем действовать в таком порядке.

Взяв какую-нибудь пропорцию, сначала переставим в ней крайние члены, поставив первый *на место последнего*, а последний на место первого.

После этого оставим крайние на тех местах, где они стояли в первой пропорции, а средние поменяем местами: второй поставим на место третьего, а третий — на место второго. Наконец, переставим в первой пропорции одновременно и крайние и средние члены. Покажем это на примерах:

$$\text{I. } 2:1=10:5;$$
$$\text{II. } 5:1=10:2;$$
$$\text{III. } 2:10=1:5;$$
$$\text{IV. } 5:10=1:2.$$

Можно проиллюстрировать эти пропорции на отрезках. Возьмем четыре отрезка:

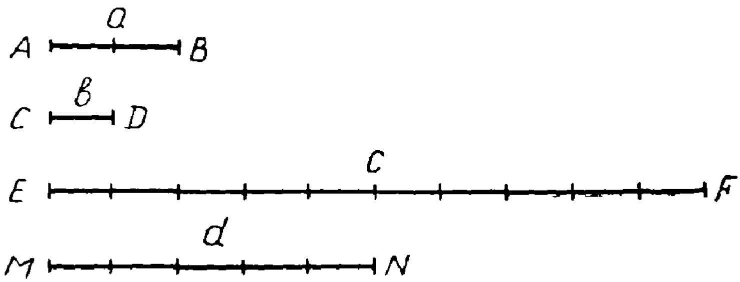

Рис 35.

Запишем все 4 пропорции буквами:

$$a:b=c:d;$$
$$d:b=c:a;$$
$$a:c=b:d;$$
$$d:c=b:a.$$

Здесь взяты длины отрезков, соответствующие числам в пропорциях, т. е. $a=2$, $b=1$, $c=10$, $d=5$.

Ученики должны сопоставить числовые пропорции с пропорциями, составленными из отрезков, т. е. рассматривая, например, первую пропорцию $(2:1=10:5)$ и сравнивая с наглядным ее изображением отрезками $a:b=c:d$ (рис. 35).

Необходимо выяснить, правильно ли ученики понимают сущность преобразований, применяемых при перестановках членов пропорций. Что здесь, собственно говоря, не меняется? Возьмем первые две пропорции:

$$2:1=10:5;$$
$$5:1=10:2.$$

Два левых отношения этих пропорций $2:1$ и $5:1$ различны. Значит, какое-то изменение произошло, но что-то и не изменилось. Что же может меняться и что должно сохраняться? Ответ: при любой перестановке членов отношения должны измениться, но равенство отношений должно сохраниться. Перестановки нужно выполнять так, чтобы из верной пропорции получалась снова верная, хотя и другая, но пропорция. Само собой разумеется, что должно сохраняться и основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции должно быть равно произведению средних.

Однако нужно еще проверить, все ли возможные перестановки мы выполнили или, может быть, еще какие-нибудь остались незамеченными.

Возьмём первую пропорцию $2:1=10:5$ в качестве исходной и переставим в ней отношения:

$$10:5=2:1.$$

Среди четырех предыдущих пропорций такой у нас не было; ни одна из четырех записанных пропорций не начиналась с числа 10. Возьмем эту пропорцию, пятую по счету, и сделаем в ней такие же перестановки, какие делали над первой: переставим сначала крайние члены, затем — средние члены и, наконец, одновременно переставим и крайние, и средние. У нас получатся следующие пропорции:

$$1:5=2:10;$$
$$10:2=5:1;$$
$$1:2=5:10.$$

Получились еще три новые пропорции; всего с полученными ранее — семь пропорций. Вместе с данной у нас будет восемь пропорций. Полезно проиллюстрировать и эти последние пропорции на тех отрезках, которые изображены выше. Наконец, запишем и эти четыре новые пропорции буквами:

$$c:d=a:b;$$
$$b:d=a:c;$$
$$c:a=d:b;$$
$$b:a=d:c.$$

Легко проверить, что в каждой из этих восьми пропорций основное свойство принимает вид: $ad=bc$.

Чтобы безошибочно получить все восемь пропорций, а также проверить, что во всех этих пропорциях основное свойство принимает вид: $ad = bc$,— можно воспользоваться рисунком 36.

На этом рисунке — квадрат с двумя диагоналями. У углов квадрата записаны члены пропорции $a : b = c : d$ так, чтобы крайние члены стояли на концах одной диагонали, а средние — на концах другой. От каждого из четырех чисел идет по две стрелки: например, от числа a стрелка указывает на число b и c; от числа b идет стрелка к a и d и так далее. Начиная с числа a можно составить отношение: 1) $a : b$ вдоль горизонтальной стрелки; ему будет равно отношение вдоль противоположной стороны квадрата $c : d$, и составится пропорция $a : b = c : d$; 2) вдоль вертикальной стрелки составится отношение $a : c$, а вдоль противоположной стороны — равное ему отношение $b : d$; составится пропорция $a : c = b : d$. Итак, с числа a начинаются две пропорции. Но две другие пропорции тем же порядком начнутся с числа b; это будут: $b : a = d : c$ и $b : d = a : c$. Еще две начнутся с числа c: это $c : a = d : b$ и $c : d = a : b$. Наконец, числом d начинаются две последние пропорции: $d : c = b : a$ и $d : b = c : a$. Произведение крайних членов во всех пропорциях стоит на концах одной диагонали, а произведение средних — на концах другой.

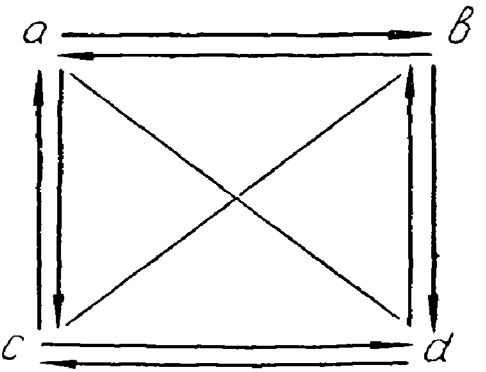

Рис. 36.

Конечно, учащихся нужно предупредить, чтобы, начертив квадрат и задав себе верную пропорцию, они ставили над углами не буквы, а числа из заданной пропорции, так чтобы крайние члены стояли у концов одной диагонали, а средние — у концов другой, а потом от каждого числа провели горизонтальную и вертикальную стрелки. Тогда легко будет без ошибки написать все восемь пропорций.

На практике учащимся не придется сразу делать все указанные перестановки. При решении какой-нибудь задачи, может быть, придется сделать какую-нибудь одну, но во избежание ошибок здесь перечислены все законные перестановки членов пропорции.

100. Сложные пропорции. Сложной пропорцией называется такая пропорция, которая получается после почленного сложения, вычитания, умножения или деления двух данных пропорций. Для простоты берутся две пропорции, хотя можно было бы взять их и больше.

Речь в данном случае идет вот о чем. Пусть мы решали задачу, которая встречалась нам раньше и для которой мы в свое время составили таблицу (стр. 328).

Выбирая из этой таблицы определенным образом по четыре числа, мы можем составить из них множество пропорций. Вот две такие пропорции:

$$1 : 2 = 2{,}5 : 5;$$
$$3 : 6 = 7{,}5 : 15.$$

Будет ли верна та пропорция, которая получится от почленного сложения этих двух пропорций? Да, если только взяты две пропорции с равными отношениями. Написанные выше две пропорции сложить можно:

$$(1 + 3) : (2 + 6) = (2{,}5 + 7{,}5) : (5 + 15),$$

или

$$4 : 8 = 10 : 20.$$

Эта пропорция верна. Кроме того, в пропорции, полученной от сложения, т. е. в сложной пропорции, получились отношения, равные тем, какие были в данных пропорциях. В этом легко убедиться. Каждое из четырех отношений, входивших в данные две пропорции, равно $1 : 2$, и каждое из двух отношений, входящих в последнюю пропорцию, равно $1 : 2$.

Что будет при почленном вычитании? Напишем те же пропорции, переставив их:

$$3 : 6 = 7{,}5 : 15;$$
$$1 : 2 = 2{,}5 : 5.$$

Вычтем почленно из первой пропорции вторую:

$$(3-1):(6-2)=(7{,}5-2{,}5):(15-5),$$

или

$$2:4=5:10.$$

Пропорция верна, и новые отношения остались прежними — 1 : 2.

Итак, можно почленно складывать и вычитать пропорции с равными отношениями. В новой пропорции отношения останутся теми же, как в исходных пропорциях.

Мы уже имеем два вида сложных пропорций. Перейдем к умножению и делению. Мы увидим, что умножать и делить можно всякие пропорции, даже пропорции не с равными, а с произвольными отношениями. Пример:

$$4:3=100:75;$$
$$2:1=50:25.$$

Умножим почленно первую пропорцию на вторую и результат запишем так:

$$(4\cdot 2):(3\cdot 1)=(100\cdot 50):(75\cdot 25),$$

или

$$8:3=5000:1875.$$

Пропорция верна. Однако входящие в нее отношения не равны ни одному из исходных. Но можно ли предвидеть или узнать, какое отношение будет в сложной пропорции? Можно. Отношения, которые войдут в сложную пропорцию, получатся умножением отношений, входивших в исходные:

$$(4:3)\cdot(2:1)=8:3,$$

или

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{8}{3}.$$

При почленном делении первой пропорции на вторую результат запишется так:

$$(4:2):(3:1)=(100:50):(75:25),$$

или

$$2:3=2:3.$$

Пропорция опять верна. Остается только выяснить, какие отношения входят в сложную пропорцию. У исходных пропорций были такие отношения: 4 : 3 и 2 : 1, а у сложной пропорции — 2 : 3. Из отношений исходных пропорций можно получить отношение сложной пропорции; для этого достаточно разделить их одно на другое:

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{1} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}.$$

Мы получили отношение сложной пропорции. Итак, складывать и вычитать можно лишь некоторые пропорции, умножать и делить — любые. Что же касается отношений, то о них нужно помнить то, что было выяснено выше.

101. Производные пропорции. При решении многих задач в целях упрощения вычислений приходится из данной пропорции составлять так называемые производные пропорции. Такие пропорции бывают нескольких видов и получаются из данной после выполнения некоторых арифметических действий над членами данной пропорции.

Чтобы показать, как возникают производные пропорции из данной, рассмотрим сначала следующее. Возьмем несколько различных отношений и с каждым отношением поступим так: прибавим к предыдущему члену последующий, *а последующий оставим без изменения* и потом посмотрим, чем отличаются новые отношения от прежних.

$$\begin{aligned} &10 : 5; \ (10 + 5) : 5 = 15 : 5;\\ &15 : 5; \ (15 + 5) : 5 = 20 : 5;\\ &20 : 5; \ (20 + 5) : 5 = 25 : 5;\\ &15 : 3; \ (15 + 3) : 3 = 18 : 3;\\ &24 : 4; \ (24 + 4) : 4 = 28 : 4. \end{aligned}$$

Из данных пяти отношений мы получили пять новых. Легко видеть, что после преобразования каждое из отношений увеличилось на единицу.

Если в данном отношении мы вычтем из предыдущего члена последующий, а последующий оставим без изменения, то отношение, по-видимому, должно уменьшиться на единицу. Проверим это на прежних отношениях.

$$\begin{aligned} &10 : 5; \ (10 - 5) : 5 = 5 : 5;\\ &15 : 5; \ (15 - 5) : 5 = 10 : 5;\\ &20 : 5; \ (20 - 5) : 5 = 15 : 5;\\ &15 : 3; \ (15 - 3) : 3 = 12 : 3;\\ &24 : 4; \ (24 - 4) : 4 = 20 : 4. \end{aligned}$$

Предположение оправдалось: каждое отношение уменьшилось на единицу.

Возьмем теперь какую-нибудь пропорцию, например

$$18 : 6 = 30 : 10,$$

и составим из нее новую «производную» пропорцию так:

$$(18 + 6) : 6 = (30 + 10) : 10, \text{ или } 24 : 6 = 40 : 10.$$

Легко проверить, что эта пропорция верна. Полученный результат можно сформулировать так: *сумма членов первого отношения пропорции так относится к его последующему члену, как сумма членов второго отношения относится к его последующему члену.*

Если сложение заменить вычитанием, то получится вторая производная пропорция:

$$(18-6) : 6 = (30-10) : 10, \text{ или } 12 : 6 = 20 : 10.$$

Пропорция верна. Результат можно высказать так: *разность членов первого отношения пропорции так относится к его последующему члену, как разность членов второго отношения относится к его последующему члену.*

Можно было бы брать отношения сумм и разностей не к последующим членам, а к предыдущим; получатся также верные пропорции:

$$(18 + 6) : 18 = (30 + 10) : 30, \text{ или } 24 : 18 = 40 : 30;$$
$$(18 - 6) : 18 = (30 - 10) : 30, \text{ или } 12 : 18 = 20 : 30.$$

А читаются эти производные пропорции так: *сумма членов первого отношения так относится к своему предыдущему, как сумма членов второго отношения относится к своему предыдущему.* Соответственно и для разности.

102. Непрерывные пропорции. Непрерывной пропорцией называется такая пропорция, у которой повторяется или крайний член, или средний член, например:

$$8 : 4 = 16 : 8 \text{ или } 36 : 12 = 12 : 4.$$

Эти пропорции интересны тем, что в них неизвестными могут быть два члена, а не один. Впрочем, эти два члена равны между собой, и, вычисляя их, мы находим о д н о число.

Повторяющийся член такой пропорции называется *средним геометрическим* двух остальных членов пропорции, или средним пропорциональным. Значит, в первой пропорции 8 есть среднее геометрическое 4 и 16, а во второй пропорции число 12 — среднее геометрическое чисел 36 и 4.

Учащимся здесь полезно напомнить, что называется средним арифметическим двух чисел. Средним арифметическим двух чисел называется частное от деления их суммы на их число, т. е. на 2. Например, среднее арифметическое чисел 10 и 14 будет:

$$(10 + 14) : 2 = 12.$$

Для непрерывной пропорции, конечно, сохраняется основное свойство пропорции, т. е.

$$8 \cdot 8 = 4 \cdot 16 \text{ и } 36 \cdot 4 = 12 \cdot 12.$$

Представим себе, что в первой пропорции повторяющийся член неизвестен, и напишем ее так:

$$x : 4 = 16 : x.$$

По основному свойству пропорции можно написать:

$$x \cdot x = 4 \cdot 16, \text{ или } x^2 = 64,$$

поскольку представление о степени учащиеся получили, проходя в V классе делимость чисел и разложение их на множители.

Но как из равенства (точнее, уравнения) $x^2 = 64$ вычислить x?

Деление здесь применить нельзя: есть делимое 64, но делителя нет. Можно было бы применить здесь другое действие, но с ним учащиеся познакомятся только на уроках алгебры — извлечение квадратного корня. В арифметике можно, однако, применить разложение числа 64 на два равных множителя. Если это удастся, то число x будет найдено. В самом деле, легко сообразить, что $64 = 8 \cdot 8$, значит, $x = 8$, что сейчас же легко проверить подстановкой.

Точно так же можно решить вторую непрерывную пропорцию, где неизвестен средний член:

$$36 : x = x : 4; \; x \cdot x = 36 \cdot 4; \; x^2 = 144.$$

Но $144 = 12 \cdot 12$, следовательно, $x = 12$. Следует проверка подстановкой в пропорцию.

З а д а ч а. Матери 36 лет, а младшей дочери 9 лет. Сколько лет старшей дочери, если возраст матери относится к возрасту старшей дочери как возраст старшей дочери к возрасту младшей дочери?

Составим пропорцию:

$$36 : x = x : 9; \ x \cdot x = 9 \cdot 36; \ x^2 = 324.$$

После разложения на множители числа 324 найдем $x = 18$.

Старшей дочери 18 лет.

В связи с заменой в курсе арифметики будущего извлечения квадратного корня из целых чисел разложением их на два равных множителя учитель может использовать этот случай для известной подготовки материала к будущим урокам математики. Самая операция такого разложения — первый шаг к оформлению в будущем понятия о корне, как действию, обратному возведению в степень, но и корню как дробной степени. Во всяком случае, должно обращать самое серьезное внимание учащихся на то, что разложение на два *равных* множителя удается только в редких случаях; с этой целью важно, чтобы учащиеся пробовали так разлагать хотя бы числа первой сотни.

Непрерывная пропорция — наиболее интересный и поучительный материал как для повторения пройденного, так и для перспективы дальнейшего развития математических знаний. Сложные и производные пропорции имеют преимущественно вспомогательно-оперативное значение при решении вычислительных задач на уроках алгебры и геометрии. Некоторые из рассмотренных подробно вопросов из этой области учитель, смотря по обстоятельствам, может сократить или даже выпустить.

Глава одиннадцатая
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

103. Величины прямо пропорциональные. Выше было сказано, что во всякой задаче рассматривается не менее двух связанных между собой величин. Эта связь бывает самая разнообразная и порой довольно сложная. Рассмотрим проявление этой связи на различных примерах.

1. Пешеход идет из одного села в другое. Расстояние между селами 12 *км*. Он поднялся рано утром и отправился в путь. В первый час он прошел 5 *км*. Во второй час он шел несколько медленнее (устал в первый час) и прошел 4 *км*. В третий час он прошел оставшиеся 3 *км*.

Рассматривая этот факт, можно поговорить о разных вещах: о том, что непрерывная ходьба без отдыха утомляет человека; о том, какова была дорога: не пришлось ли на некоторых участках пути идти в гору, а на других — под гору, и о многом другом. Но судить об этих явлениях, например об усталости при ходьбе, трудно — это вопрос сложный. Известно, что идущий пешком устает, но немногие знают законы этого явления. А о характере дороги в задаче ничего не сказано.

Но в задаче есть совершенно определенные вещи, о которых мы можем судить и которые можно оценивать количественно.

Указано, что расстояние от одного села до другого 12 *км* и что пешеход был в пути 3 часа. Известно, что в первый час он прошел 5 *км*, в следующий—4 *км*, в последний час — 3 *км*.

Здесь рассматриваются две уже знакомые величины: расстояние и время. Они действительно связаны между собой в задаче, но характер связи из задачи не виден. Зная, что в первый час было пройдено 5 *км*, мы еще не знали бы, какое расстояние было пройдено в каждый из оставшихся часов, если бы об этом не было сказано.

Подобные задачи хорошо записывать в форме таблиц, примерно так:

Время (в час.)	1	2	3
Расстояние (в *км*)	5	9	12

Из этой маленькой таблички видно, как изменилось пройденное р а с с т о я н и е в связи с прошедшим в р е м е н е м. Через час пешеход прошел 5 *км*, через 2 часа — 9 *км*, через 3 часа — 12 *км*. Вот простейший случай зависимости одной величины от другой, полученный простой записью трех пар связанных между собой значений времени и расстояния.

Эта задача даст учащимся первоначальное представление о зависимости одной величины от другой, но этого представления недостаточно. Нужно взять несколько примеров, и притом разнообразных. Вот еще один пример.

2. *Мальчик вырезал из бумаги 10 квадратов. Сторона первого — 1 см, второго — 2 см, третьего — 3 см и т. д., десятого — 10 см. Выписать площади этих квадратов.*

Составим таблицу.

Сторона квадрата (в *см*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Площадь квадрата (в *кв. см*)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Факт, который здесь рассматривается, относится совершенно к другой области. Составить эту таблицу было нетрудно: мы знаем правило вычисления площади квадрата и даже формулу этой площади $S = a \cdot a = a^2$. В предыдущем примере у нас не было никакой формулы, никакого правила; пришлось составлять только по тем парам чисел, которые были нам даны. Вторую же таблицу мы самостоятельно довели до десятого столбца и могли продолжать как угодно далеко. Этот второй пример рассматривался с целью показать еще один вид зависимости одной величины от другой: *площади квадрата от длины его стороны.*

Теперь видна первая и главная забота учителя математики: довести до сознания учеников и сделать привычной мысль, что при решении всех задач нужно искать и находить те величины, которые связаны друг с другом какой-нибудь зависимостью. В чем состоит эта зависимость — на первых порах несущественно. Важно подметить самый факт: *существует какая-то величина, она изменяется, принимая различные значения, а одновременно с нею существует другая величина, которая изменяется вместе с первой и зависит от нее.*

После общего ознакомления с понятием о связи и зависимости величин следует перейти к тому виду зависимости, который чаще всего встречается в жизни человеческого общества и называется *прямой пропорциональностью.* Это также нужно выяснить на подходящих примерах. В первый из них должен сначала тщательно вдуматься учитель; прежде чем разобрать его с учащимися, следует прочесть несколько следующих страниц, и тогда методика разбора в классе темы «Прямая пропорциональность» должна стать яснее.

3. Тело, движущееся прямолинейно и равномерно, проходит в каждую секунду 12 *км*. Определить путь, пройденный телом в 2, 3, 4,..., 10 секунд.

Составим таблицу, по которой можно было бы следить за изменением времени и расстояния.

Время (в сек.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Расстояние (в *см*)	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	(*А*)

В первом примере время и расстояние — тоже две связанные между собой или зависимые величины. Правда, там время было выражено в часах, а здесь — в секундах, там расстояние было выражено в километрах, а здесь — в сантиметрах, но это существенного значения не имеет. Большое сходство между 1 и 3 примерами состоит еще в том, что в обоих случаях речь идет о движении. Но есть большая разница между примерами 1 и 3. В примере 1 — весьма правдоподобный случай естественного движения человека, который идет, постепенно утомляясь и уменьшая свою скорость. В примере 3 рассмотрен трудно осуществимый на практике пример прямолинейного и равномерного движения. Это пример такого в о о б р а ж а е м о г о («идеального») движения; сказать, что оно прямолинейно и равномерно, достаточно, чтобы потом составить таблицу, доведенную до сколь угодно больших чисел.

Так вот, несмотря на то что этот случай воображаемый, в дальнейшем нужно будет рассматривать именно такие случаи, потому что в первом случае мы не знаем закона, по которому протекало движение человека. С житейской точки зрения там все просто и ясно: человек прошел часть пути в первый час, устал; за второй час прошел на километр меньше, устал еще больше и в третий час прошел еще на километр меньше; как будто только так и могло быть. В действительности могло быть и иначе, например так: в первый час человек со свежими силами прошел 5 *км*, естественно, устал; решил идти значительно медленнее и прошел всего 3 *км*, при этом немного отдохнул, а потом собрал силы и остальные 4 *км* прошел в один час. Значит, движение пешехода могло протекать не только так, как в первом примере, но и иначе, и притом по-разному, в зависимости от случайностей, которые нельзя предвидеть.

Почему, решая задачи такого типа, приходится рассматривать не реальные случаи, а воображаемые, «идеальные». В «идеальном» случае легче подметить закон движения. Но ведь «идеальные» случаи не встречаются в практике, тогда для чего их рассматривать?

В практике нет «идеальных» случаев, но бывают случаи, близкие к ним. Можно, положим, отмечать в течение нескольких часов расстояния, которые поезд проходит в каждый час, например:

1-й час	43 *км*	4-й час	38 *км*
2-й »	39 »	5-й »	40 »
3-й »	41 »	6-й »	39 »

Если мы составим таблицу, из которой было бы видно, как изменялось пройденное поездом расстояние с течением времени, то получим:

Время (в час.) . . .	1	2	3	4	5	6	(*Б*)
Расстояние (в *км*)	43	82	123	161	201	240	

Никакой задачи на эту тему мы, собственно говоря, составить не можем. Нужно знать все расстояния, пройденные в каждый из шести часов, чтобы составить эту таблицу. Если мы знаем из опыта, что поезд в первый час прошел 43 *км*, то мы еще ничего не можем сказать о том, сколько он пройдет во второй час да и в последующие часы.

Однако, рассматривая расстояния, пройденные поездом в разные часы, мы видим, что эти расстояния мало отличаются друг от друга; все они близки к числу 40. Мы можем найти **с р е д н ю ю с к о р о с т ь** поезда, вычислив среднее арифметическое шести чисел:

$$\frac{43+39+41+38+40+39}{6}=40.$$

Значит, поезд двигался со **с р е д н е й** скоростью 40 *км* в час.

Итак, вместо реального случая мы можем рассматривать близкий к нему «идеальный». Задача тогда примет такой вид: «Поезд шел 6 часов со с р е д н е й скоростью 40 *км* в час; какие расстояния он мог пройти в 2, 3, 4, 5, 6 часов, если бы шел все время равномерно?» Запишем ответ в виде таблицы.

Время (в час.) . . .	1	2	3	4	5	6
Расстояние (в *км*)	40	80	120	160	200	240

После этого следовало бы перейти к решению других задач, но сначала полезно остановиться и сообразить, что уже сделано и что еще предстоит сделать. Мы приступаем к решению задач на прямую пропорциональность. В связи с этим возникает ряд понятий: величина, значение величины, отношение одного значения величины к другому значению, зависимость одной величины от другой. Можно даже увеличить число этих понятий, вводя в арифметику такие, как «постоянная величина», «переменная», но с этим лучше подождать.

Теперь любопытный методический вопрос: разве в этих понятиях есть что-нибудь новое? Нет, еще два-три года назад ученики могли решить задачу вроде такой: «Куплено несколько килограммов хлеба и заплачено столько-то рублей. Сколько нужно заплатить за другое число килограммов хлеба, купленных по той же цене?». Уже в этой простенькой задаче есть все: и величины, и значения величин, и зависимость одной величины от другой, только они не названы здесь этими словами. Есть в этой задаче и прямая пропорциональность. Значит, все эти понятия учащимся знакомы. И все же, когда учитель в первый раз произносит слова «величина», «*значение*», «*зависимость*», *то учащиеся* с трудом их воспринимают и как будто обнаруживают признаки непонимания.

Здесь создается определенная психологическая трудность: учащиеся ожидают, что с каждым новым днем пребывания их в школе изучаемый материал должен быть труднее и сложнее, а здесь наоборот: предлагаются как будто простые вещи, а вот что с ними делать — неизвестно! Уже в первой половине пятого года они решали довольно трудные задачи в 5—7 действий, а теперь, в VI классе, предлагают какие-то упражнения, легко разрешимые в уме. Вместо трудного — легкое: ученики теряются и недоумевают, как же с этим легким обращаться.

Учитывая это, может быть, учителю следует подойти к изложению этого раздела без резких скачков: взять старую, знакомую и довольно простую задачу, вроде задачи о покупке хлеба, и рассказать всю эту «новую» теорию, или, говоря точнее, изложить старую теорию новыми словами.

После этого нужно обратить внимание учащихся на то, как связаны между собой две величины (время и расстояние) в задаче (A), если только большинству учащихся она не покажется слишком абстрактной; если будет так, то лучше заменить ее задачей на движение с более конкретным для учащихся сюжетом. Каждая из двух величин возрастает, причем значения второй величины постепенно увеличиваются во столько же раз, во сколько увеличиваются значения первой.

Далее нужно взять пару других величин.

«Рабочий получает в день 1,5 рубля. Вычислить его заработок в 2, 3, 4, ..., 10 дней». Составим таблицу:

Время (в днях)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(B)
Заработок (в руб.)	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15	

Здесь в качестве величин встречаются время и заработная плата. Но есть нечто общее между данной задачей и предыдущей. Способ заполнения таблицы в обоих случаях один и тот же: во всех случаях применяется умножение. Кроме того, и здесь, как и в первой таблице, числа увеличиваются, возрастают в обеих строках слева направо. Притом тут повторяется тот же закон: «Значения второй величины постепенно увеличиваются во столько же раз, во сколько увеличиваются значения первой».

Такие величины называются *прямо пропорциональными*; о величинах говорят также, что между ними прямо пропорциональная *зависимость*. Как же определить прямую пропорциональность?

1. Если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз, то такие величины называются прямо пропорциональными. Э. Борель («Арифметика») считает это предложение определением.

2. Если отношение двух произвольно взятых значений одной величины равно отношению двух соответствующих значений другой величины, то такие две величины прямо пропорциональны. Э. Борель («Арифметика») называет это определение основным свойством прямо пропорциональных величин.

Какое из этих предложений следует предпочесть в школе?

Рассматривая вопрос об определениях, А. Пуанкаре в своей книге «Наука и метод», изд. 1910, стр. 146, пишет: «Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам, и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понятно ученикам». Поэтому в качестве определения следует взять первое предложение Бореля. Оно вполне доступно детям и понятно описывает сущность прямой пропорциональности. Однако и второе предложение Бореля следует использовать наряду с первым, но, следуя автору, будем считать его «основным свойством прямо пропорциональных величин».

Что касается первого определения, возможно, что учащиеся сформулируют его сами с помощью учителя, если в этом будет надобность. Основой для его составления учащимися будут три знакомые им таблицы — *А*, *Б* и *В*. Возможно, что первые попытки будут очень неудачны, если только ученики не прочтут заранее определение в книге; не следует огорчаться, а следует продолжать попытки. Совсем неплохо, если ученики выскажут определение по-своему, тогда учителю только придется его исправить и улучшить; это все же лучше, чем давать сразу определение в готовом виде.

Если понятны три первых примера (*А* — время и расстояние, пройденное за это время с постоянной скоростью; *Б* — время в часах и расстояние в километрах, пройденное за это время с постоянной скоростью; эти примеры по характеру связи величин совпадают с B — время в днях и заработная плата в рублях при постоянной ставке), то нужно рассмотреть разные примеры прямо пропорциональных величин с составлением соответствующих таблиц. Величины предлагают сами учащиеся и сами составляют таблицы. Для ориентировки учителя и облегчения его труда здесь предлагается перечень наиболее употребительных величин. При этом приходится ограничиться величинами, уже знакомыми или доступными учащимся V—VI классов. Учителям надлежит внимательно отнестись к этому делу, не жалея времени: пропорциональная зависимость как простейший вид функциональной зависимости относится к такой категории математических фактов, с которыми люди знакомятся на самой заре своей жизни. Сначала они просто догадываются, что наиболее естественно и правильно такое соотношение между вещами и явлениями природы, при котором увеличение (уменьшение) одной величины в k раз влечет за собой увеличение (уменьшение) другой связанной с нею величины тоже в k раз. Последующая жизненная практика покажет им, что действительный мир гораздо богаче всевозможными и более сложными зависимостями; пока они еще представляют себе мир по такой упрощенной схеме, воспользуемся этим обстоятельством, с тем чтобы сделать эту схему осознанной.

Вот пары таких величин.

1. Вес товара в килограммах и стоимость товара при постоянной цене.

Учащиеся выберут вид товара или продуктов по своему усмотрению, сами укажут цену, сами составят таблицу. При этом таблицу не обязательно составлять так, чтобы для веса в таблицу входили все числа натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ... Лучше всего начать с 1, а потом расположить числа с разрывами, например: 1, 2, 3, ..., 9, 10, ..., 15, 16, 17, ..., 21, 22, ..., 29, 30, 31, ..., 35, ...

2. Длина куска в метрах (ширина его постоянная) и стоимость сукна при постоянной цене за метр.

Пример *2* по существу не отличается от примера *1*. И здесь и там речь идет о товаре, только в примере *1* товар измеряется килограммами, а в примере *2* — метрами. В глазах учащихся это может казаться еще существенным.

3. Радиус (диаметр) окружности и длина окружности в тех же единицах. Отношение длины окружности к диаметру постоянно и с точностью до 0,01 равно 3,14.

Этот пример предлагается в том случае, если вопрос о длине окружности уже изучался. Если же ученики впервые здесь встречаются с этим, то данный пример нужно или пропустить, или рассмотреть теперь же, но в форме, доступной учащимся данного класса.

4. Объем однородного тела в кубических единицах и вес тела при постоянном удельном весе.

Пример можно пропустить, если учащиеся незнакомы с понятием удельного веса. Но нужно не много времени для того, чтобы с ним познакомиться. Это нетрудно сделать: учащиеся из своего внешкольного опыта знают, что есть тела «тяжелые» и тела «легкие», т. е. более или менее «плотные». Они, конечно, понимают, что можно взять килограмм железа и килограмм пробки, и тем не менее каждый ученик с помощью мускульного чувства безошибочно определяет, что пробка легче железа, если то и другое взято в одинаковых объемах.

Приводим для справок маленькую таблицу удельных весов некоторых твердых и жидких веществ.

Вещество	Удельный вес (в $г/см^3$)	Вещество	Удельный вес (в $г/см^3$)
Железо	7,9	Керосин . .	0,8
Лед	0,9	Пробка . .	0,24
Вода	1,0	Стекло . .	2,6
Золото	13,9	Спирт . . .	0,8
Платина	21,5	Ртуть . . .	13,6

5. Площадь квартиры в квадратных метрах и квартирная плата при постоянной плате за один квадратный метр.

Этот пример не может быть трудным для городских учащихся; сюжет слишком знаком горожанам всех возрастов. Но даже если учащиеся не знают по личному опыту, как производится оплата жилой площади в большинстве городов, то для разъяснения потребуется всего несколько минут. Ставку квартирной платы в рублях за квадратный метр учитель берет из практики. Размеры квартир бывают, конечно, различными, они и должны быть указаны в составляемой таблице. Однако составление таблицы можно начинать с одного квадратного метра и продолжать, вычисляя стоимость двух, трех, четырех и т. д. квадратных метров. Это делается для простоты вычислений, хотя и не бывает квартир с площадью в 2 или 3 *кв. м*. Сколько-нибудь реальные числа начнут появляться примерно начиная с 10 *кв. м*. Правда, и это будет еще комната, а не квартира. На вопрос учащихся, что же мы имеем в виду, когда вычисляем плату за 2 или 3 *кв. м*, нужно отвечать просто: «Мы знаем квартирную плату за один квадратный метр, теперь вычислим, сколько нужно заплатить за 2 *кв. м*, за 3 и т. д.». Это облегчит составление таблицы в дальнейшем.

6. Число едоков и количество провизии при постоянной порции на едока.

Здесь говорится о провизии в широком смысле. Для составления таблицы учитель или ученики могут выбрать какой-нибудь вид продуктов, например ежедневную порцию хлеба на едока в килограммах или ежемесячную выдачу сахара на человека тоже в килограммах и т. п.

7. Число горящих ламп (предполагается, что лампы совершенно одинакового устройства и каждая из них берет одно и то же количество керосина) и количество потребного керосина в литрах или килограммах при одинаковом времени горения (в час, день, неделю, месяц).

Сюжет очень устарел, но он дает самое элементарное представление о расходе горючего. Учащиеся могут потом придумать и решать задачи о расходе горючего в таких машинах, как паровоз, автомобиль, мотоцикл и т. п.

104. Свойство прямо пропорциональных величин. Учащиеся имеют теперь представление о прямо пропорциональных величинах, они знают их определение и много примеров прямо пропорциональных величин. Теперь займемся основным свойством прямо пропорциональных величин. Его определение было дано. Повторим его: «Если отношение двух произвольно взятых значений одной величины равно отношению двух соответствующих значений другой величины, то такие две величины прямо пропорциональны». Что теперь требуется от учащихся?

Во-первых, они должны убедиться в справедливости этого свойства и одновременно усвоить его. Убедиться в справедливости этого свойства можно, рассматривая любой из предыдущих примеров, например пример *А*. См. табл. на стр. 355.

Возьмем отношение первых двух значений величины из верхней строки и соединим его знаком равенства с отношением первых двух значений из второй.

$$1 : 2 = 12 : 24.$$

Эту пропорцию нужно проверить доступными ученикам способами и убедиться, что она верна. Это и есть запись основного свойства прямо пропорциональных величин. Но как же все-таки нужно рассуждать, чтобы написать это равенство? Нужно вспомнить данное выше определение прямой пропорциональности и говорить так: если эти величины прямо пропорциональны, то при увеличении значений одной из них в два раза значения другой тоже увеличатся в два раза.

Для закрепления этого свойства нужно выписать из таблицы еще несколько пропорций, например возьмем вторые и шестые значения из этой таблицы:

$$2 : 6 = 24 : 72.$$

Проверка показывает, что пропорция верна.

Полезно взять из таблицы несколько отношений не слева направо, а справа налево:

$$10 : 9 = 120 : 108;$$
$$8 : 6 = 96 : 72;$$
$$8 : 4 = 96 : 48;$$
. . . .

Употребление букв на известном этапе не только не мешает, а, напротив, облегчает понимание. Сейчас перед нами заключительный этап арифметики, и буквы встречались уже неоднократно; это позволяет таблицу *А* представить иначе. Обозначим скорость прямолинейного и равномерного движения тела какой-нибудь буквой, например буквой *a* тогда таблица (*А*) примет вид:

Время (в сек.) . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Расстояние (в *см*). . .	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$	$9a$	$10a$

Можно ли сказать, что употребление букв принесло на какую-нибудь пользу или выгоду. Нам кажется, что эт таблица облегчает понимание изучаемого вопроса, потому что она «нагляднее», чем таблица (A). Составим из таблицы (A) такую пропорцию:

$$9 : 4 = 108 : 48.$$

Посмотрим теперь, как будет выглядеть та же самая пропорция, если составить ее из последней таблицы:

$$9 : 4 = 9a : 4a.$$

Эта запись «нагляднее» предыдущей.

Как будет использовано основное свойство пропорции в практике решения задач?

З а д а ч а. Подписная цена на одну из небольших газет прямо пропорциональна сроку, на который произведена подписка. За 2 месяца я уплатил 72 коп. Сколько нужно заплатить за 6 месяцев?

Мы можем составить такую пропорцию:

$$2 : 6 = 72 : x.$$

Отсюда $x = 6 \cdot 72 : 2 = 2$ руб. 16 коп.

По этому образцу мы можем вычислить подписную цену за любое число месяцев. Вычислим подписную цену за 11 месяцев:

$$2 : 11 = 72 : x.$$

Отсюда $x = 11 \cdot 72 : 2$; $x = 3$ руб. 96 коп.

Наконец, можно составить полную таблицу:

Месяцы	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Подписная цена (в руб.) .	0,36	0,72	1,08	1,44	1,80	2,16

Месяцы	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Подписная цена (в руб.) .	2,52	2,88	3,24	3,60	3,96	4,32

105. Формула прямой пропорциональности. На данном этапе изучения математики нужно не только вывести формулу прямой пропорциональности и показать ее применение, но еще сделать несколько замечаний о пользе формул, об их значении и целесообразности. Ученики в это время не настолько еще владеют математикой, чтобы с радостью встречать всякую новую формулу и видеть в ней новое орудие, облегчающее решение какой-то задачи.

Обычно учащиеся постепенно свыкаются со многими и многими формулами, но хотелось, чтобы и первые формулы воспринимались ими без горечи, с радостью. Что для этого нужно делать? Нужно постоянно подчеркивать, что формулы — нужная вещь; с помощью формул многие задачи разрешаются легко и быстро. Формулы имеют исключительное практическое значение. Может быть, ученикам не нравится то, что формулы нужно знать наизусть. Если человек знает что-нибудь наизусть, но без всякого понимания, то это очень плохо и с таким запоминанием нужно всячески бороться. Кроме того, нужно избегать изучения формул и формулировок посредством механического многократного их повторения.

Формулы должны быть в учебнике, даже в задачнике, в классе на стенной таблице, в тетради учащегося, в справочнике по математике, в карманной записной книжке каждого ученика. Кстати, желательно, чтобы учащиеся, кроме учебников и задачников, имели карманный справочник по математике. Математические формулы нужно тщательно и с любовью накоплять, а закрепляться они будут через их постоянное использование.

Формулы не должны лежать мертвым капиталом, а должны быть всегда в работе. Тогда они без особого труда и напряжения останутся в памяти Перед выводом формулы прямой пропорциональности полезно напомнить учащимся те формулы, которые были усвоены раньше. Если бы ученикам показалось, что это напоминание излишне, следует их убедить, что они ошибаются Это упоминание о прежних формулах полезно, помимо всего прочего, потому, что большинство старых формул представляет собой не какую-нибудь иную зависимость, а именно прямую пропорциональность.

Известная учащимся формула длины окружности $c = 2\pi r$ тоже выражает прямую пропорциональность (длина окружности пропорциональна длине радиуса). Можно взять другую формулу, например ту, которая служит для нахождения процентов данного числа:

$$b = \frac{ap}{100}.$$

И здесь, если учащиеся разберутся в буквенных символах, они поймут, что мы имеем дело с прямо пропорциональной зависимостью величин. Ту же самую зависимость мы увидим и в формуле, служащей для вычисления площади треугольника.

Очень полезно показать учащимся, что формула дает возможность вычислить не одно какое-нибудь значение искомой величины, а бесчисленное их множество. В этом ее значение и сила.

Для вывода формулы прямой пропорциональности нужно взять какой-нибудь из рассмотренных выше примеров, например 1 на стр. 360, о весе товара в килограммах и его стоимости в рублях. Пусть товар — конфеты, продающиеся по 2 рубля за 1 *кг*. Составим таблицу:

Вес (в *кг*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость (в руб.)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Теперь проделаем следующее. Возьмем любое число второй строки и разделим его на соответствующее ему число первой строки. Например:

$$2 : 1 = 2,$$
$$6 : 3 = 2,$$
$$12 : 6 = 2,$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$

В частном все время получается одно и то же число. Подумав над этим, поймем, что иначе не могло и быть, потому что, деля стоимость товара на число килограммов, мы находим цену товара, а цена его постоянна.

Следовательно, *для данной пары прямо пропорциональных величин частное от деления любого значения одной величины на соответствующее значение другой величины есть число постоянное.*

В нашем примере это число равно 2. Оно называется *коэффициентом пропорциональности.* Слово «коэффициент» латинского происхождения и обозначает числовой множитель. В данной задаче этот множитель будет стоять во всех случаях перед числом, обозначающим число килограммов: $2 \cdot 1$; $2 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 4$; $2 \cdot 5$ и т. д.

С этим словом учащиеся будут встречаться в будущем в алгебре, геометрии и других науках.

Если мы обозначим коэффициент пропорциональности буквой k, тогда приведенная выше таблица примет вид:

Вес (в *кг*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость (в руб.)	$k \cdot 1$	$k \cdot 2$	$k \cdot 3$	$k \cdot 4$	$k \cdot 5$	$k \cdot 6$	$k \cdot 7$	$k \cdot 8$	$k \cdot 9$	$k \cdot 10$

Но теперь эта таблица имеет уже более широкий смысл. Здесь под буквой k мы можем подразумевать другое число, например 5; один килограмм конфет стоит 5 рублей, тогда 2 *кг* будут стоить 10 рублей, 3 *кг* — 15 рублей и т. д.

Внимательно рассматривая эту таблицу, мы можем вывести правило для нахождения любого значения одной из прямо пропорциональных величин по коэффициенту пропорциональности и по соответствующему значению другой величины.

Чтобы найти какое-нибудь значение одной из прямо пропорциональных величин, нужно коэффициент пропорциональности умножить на соответствующее значение другой величины.

Зная это правило, мы можем записать его в виде формулы.

Обозначим любое значение одной величины буквой y; соответствующее значение другой величины — буквой x; коэффициент пропорциональности — буквой k.

Тогда формула примет вид: $y = kx$.

Это и есть формула прямой пропорциональности, которую можно было бы получить так.

Мы знаем, что если разделить любое значение одной из прямо пропорциональных величин на соответствующее значение другой, то получится постоянное число, называемое коэффициентом пропорциональности. Пользуясь введенными сейчас обозначениями, мы можем этот факт записать так: $\frac{y}{x} = k$.

Так как делимое равно делителю, умноженному на частное, то можно написать: $y = kx$,— и получится формула, найденная выше.

Применим ее к решению задачи. В п. 103 было сказано, что вес тела прямо пропорционален объему однородного тела. Вычислим веса нескольких кусков золота, принимая его удельный вес равным 14. Формула будет иметь вид: $y = 14x$.

Тогда вес кусочка золота объемом 1 *куб. см* будет равен 14 *г*. Вес куска золота в 3 *куб. см* будет $y = 14 \cdot 3 = 42$ *г*.

Вес куска золота в 7 *куб. см*: $y = 14 \cdot 7 = 98$ *г*.

Вес куска золота в 11 *куб. см*: $y = 14 \cdot 11 = 154$ *г*; в 16 *куб. см*: $y = 14 \cdot 16 = 224$ *г*.

Сведем результаты в таблицу:

Объем (в *куб. см*)	1	3	7	11	16	20
Вес (в *г*)	14	42	98	154	224	?

На применение формулы полезно решить несколько задач с разнообразным содержанием.

106. Решение задач способом приведения к единице. Задачи на пропорциональные величины, как видно из предыдущего, легко решаются при помощи формулы. Однако в средних классах школы учащиеся только еще начинают пользоваться формулами и делают первые шаги в этом направлении. Это не значит, что формулами нужно пользоваться редко или как-то сузить сферу их применения. Напротив, с каждым новым месяцем пребывания ученика в школе число формул должно увеличиваться и их значение должно постепенно возрастать. Но школьник — не вычислитель-практик, а обучаемый. Профессиональный вычислитель только применяет формулы для своих целей, ученик же обязан понимать и исследовать, откуда эти формулы возникают, можно ли решить данную задачу без формулы, совпадают ли получающиеся в обоих случаях результаты и т. д. Примерно так же ученик пользуется и таблицами. Счетный работник пользуется таблицей как средством, ускоряющим вычисления. Для ученика же таблица может быть средством «замедления» его работы; он должен разобраться в устройстве таблицы, должен попытаться самостоятельно ее составить, должен проверить результаты табличных вычислений и т. д.

В этом параграфе мы будем решать задачи на пропорциональные величины, но не по формуле, а способом, который называется «приведение к единице».

Возьмем задачу: «За 12 слов телеграммы уплатили 36 коп. Сколько следует заплатить за телеграмму, в которой 21 слово?»

Перепишем условие задачи кратко, но более отчетливо и наглядно, как говорят, схематически:

12 слов — 36 коп.
21 слово — x.

Необходимо, чтобы учащиеся з а м е т и л и, что оплата телеграммы прямо пропорциональна числу слов. В этом, собственно говоря, и состоит та более высокая точка зрения, с которой они теперь рассматривают эту задачу. Сама же задача такова, что ее можно было решать и в III классе. Такие задачи там решались, но о пропорциональности ничего не говорилось. Идея пропорциональности лежала, конечно, в основе решения всех подобных задач, но «подсознательно». Ученики просто считали, что иначе не может быть; если, например, 1 *кг* хлеба стоит столько-то, то 3 *кг* будут обязательно стоить в 3 раза больше, и так будет всегда со всеми величинами. Они не подозревали, например, того обстоятельства, что при оплате железнодорожных билетов бывает не так, а совсем иначе. Теперь же, когда они говорят, что данные в задаче величины прямо пропорциональны, они, может быть, смутно, но уже начинают понимать, что могут существовать какие-то еще другие зависимости.

Чтобы решить предложенную задачу, сначала нужно вычислить, сколько нужно заплатить за о д н о слово телеграммы, откуда и происходит название «приведение к е д и н и ц е». Для этого нужно 36 коп. разделить на 12:

$$36 : 12 = 3 \text{ (коп.)}.$$

Теперь можно вычислить, сколько нужно заплатить за телеграмму, в которой 21 слово:

$$3 \cdot 21 = 63, \text{ т. е. } 63 \text{ коп.}$$

Мы решили задачу. Теперь посмотрим, как бы решалась эта задача по формуле $y = kx$. Чтобы применить эту формулу, нужно знать коэффициент пропорциональности k и одно значение одной из прямо пропорциональных величин. Коэффициент пропорциональности мы найдем, разделив какое-нибудь значение одной из рассматриваемых величин на соответствующее значение другой. В условие задачи такие значения входят: это 36 коп. и 12. Значит,

$$k = 36 : 12; \quad k = 3.$$

Подставляя теперь это число в формулу, получим

$$y = 3 \cdot 21; \quad y = 63, \text{ т. е. } 63 \text{ коп.}$$

Получился тот же самый результат, чего и следовало ожидать. В обоих случаях были выполнены одни и те же действия, и на это учащиеся должны обратить внимание.

107. Решение задач способом пропорций. Теперь рассмотрим другой способ решения задач на прямо пропорциональные величины, называемый «способом пропорций». Рассмотрим задачу. Мастер в течение 3 часов изготовил 60 металлических изделий. Сколько таких изделий он может изготовить в течение 8 рабочих часов?

Составим схему:

3 часа ......60 изделий
8 часов .....y »

Мы предполагаем, что в течение 8 часов мастер будет работать с такой же производительностью, с какой он работал в течение 3 часов. В этом случае мы можем сказать: во сколько раз больше времени, во столько раз больше изделий, или, выражаясь математическим языком, число изделий пропорционально времени. Принимая это во внимание, можем составить пропорцию. Рассуждать можно так: y во столько раз больше числа 60, во сколько раз 8 больше числа 3; или y так относится к 60, как 8 относится к 3. Пропорция будет иметь вид:

$$y : 60 = 8 : 3.$$

Отсюда

$$y = \frac{60 \cdot 8}{3} = \frac{20 \cdot 8}{1}; \quad y = 160.$$

Теперь посмотрим, как эта задача будет решаться с помощью формулы $y = kx$. Можно написать привычную табличку:

Число часов	3	8
Число изделий . . .	60	y

Из таблицы находим, что $k = 60 : 3 = 20$.

Подставляя в формулу соответствующие числа, получим:

$$y = 20 \cdot 8, \; y = 160 \text{ (изделий)}.$$

Результат получился тот же самый.

Одно замечание по поводу понятия «отношение». При решении задач в этом отделе мы часто составляли различные отношения. При этом в качестве членов отношения, предыдущего и последующего, всегда брались однородные (одноименные) величины, или, как правильнее говорить, значения одной и той же величины:

12 *м*: 4 *м*; 14 сек.: 7 сек.; 18 *кг*: 6 *кг*; 20 руб.: 5 руб. и т. д.

Иногда говорят, что в физике такое ограничение отпадает, там будто бы можно брать отношения любых величин [1]. Это неверно. Чтобы не делать ошибок, нужно придерживаться изложенных здесь правил. В курсах физики термин «отношение» часто употребляется вместо слова «частное». В очень хорошем курсе физики под редакцией академика Г. С. Ландсберга напечатано: «Скорость есть отношение пути ко времени, за которое этот путь пройден. Поэтому для определения скорости тела мы должны измерить путь, проходимый этим телом, измерить промежуток времени, в течение которого этот путь пройден, и разделить результат первого измерения на результат второго. Частное от деления пути на время даст величину скорости движения». Вы видите, что автор несколько неосторожно пользуется терминами «частное» и «отношение».

108. Величины обратно пропорциональные. В предыдущих параграфах мы рассматривали тот вид зависимости между величинами, который носит название прямой про-

[1] Это делают не только в физике. Многие математики считают понятие «отношение» тождественным понятию «частное». Такого взгляда держался, например, автор переработки старого учебника А. П. Киселева «Арифметика» проф. А. Я. Хинчин. Вообще вопрос о понимании терминов «отношение» и «частное» до сих пор, к сожалению, не имеет единообразного решения ни в науке, ни в методике.— *Ред.*

порциональности. Теперь мы рассмотрим другой вид зависимости.

З а д а ч а. Два каменщика могут сложить стену в 30 дней. Во сколько дней сложат эту стену 4 каменщика?

Здесь нельзя сказать, что если рабочих больше, то и работать они будут дольше. Наоборот, чем меньше людей, тем больше им нужно времени для того, чтобы выполнить определенную работу, и чем больше людей, тем меньше нужно времени для той же работы. В задаче дело, по-видимому, обстоит так, что если 2 каменщика выполнят работу в 30 дней, то 4 каменщика сделают ее в 15 дней. Может быть, на деле так бывает и не всегда, разные люди отличаются друг от друга умением, силой, быстротой работы, но при решении таких задач всегда рассматривается воображаемый — «идеальный» случай, предполагается, что все эти рабочие работают одинаково быстро.

Мы можем еще сказать, что если 2 каменщика выполнили свою работу в 30 дней, то одному понадобится для этого 60 дней. Конечно, это случай «идеальный»: когда человек работает один, то его работа замедляется уже потому, что невозможно разделение труда. Но теоретически приходится рассуждать иначе; в некоторых случаях можно достаточно точно установить: чем больше рабочих, тем скорее будет выполнена работа. Например, если для перепечатки какой-нибудь работы одной машинистке нужно 5 дней, то 5 машинисток, если эту рукопись разделить между ними, смогут напечатать ее в один день.

Значит, в задачах подобного рода намечается не та связь между величинами, которая называлась прямой пропорциональностью. Эту связь в общем виде можно описать так: когда одна из величин в несколько раз увеличивается, другая во столько же раз уменьшается. Ее можно иллюстрировать с помощью таблицы, взяв хотя бы задачу о машинистках, печатающих рукопись.

Пусть одна машинистка может перепечатать рукопись в месяц (30 дней), тогда 2 машинистки выполнят ту же работу вдвое скорее и т. д.

Число машинисток	1	2	3	4	5	6	. . . 10	15	30
Число дней . .	30	15	10	$7\frac{1}{2}$	6	5	. . . 3	2	1

Можно дать такое определение обратно пропорциональных величин: *если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) значений одной из них в несколько раз значения другой уменьшаются (увеличиваются) во столько же раз, то такие величины называются обратно пропорциональными.*

После того как учащиеся в свое время хорошо ознакомились с прямо пропорциональными величинами, знакомство с новой зависимостью не покажется им очень трудным. Все же необходимо привести ряд примеров, иначе изучение этой зависимости будет абстрактным.

1. Расстояние между двумя пунктами может быть пройдено в разное время в зависимости от скорости: при малой скорости движение будет продолжаться долго, при большой скорости движение окончится скорее. Пусть расстояние между двумя пунктами будет 1200 *км*. Пешеход затратил бы на такой путь около месяца, а самолеты пролетают это расстояние в несколько часов. Поэтому мы можем сказать: во сколько раз больше скорость, во столько раз меньше потребуется времени для передвижения. Другими словами, в данных условиях скорость движения обратно пропорциональна времени. Это очень хорошо видно из таблицы:

Скорость (в *км/час*)	10	20	30	40	50	60	80	100	200	300
Время (в час.) . .	120	60	40	30	24	20	15	12	6	4

2. На 24 рубля можно купить разное количество печенья, в зависимости от его цены. Дешевого печенья можно купить много, а дорогого — мало. Это хорошо усматривается из таблицы.

Количество в килограммах (в *кг*)	40	30	24	20	16	15	12	10
Цена (в руб.) . .	0,6	0,8	1	1,2	1,5	1,6	2	2,4

Уже беглый взгляд на эту таблицу обнаруживает, что в то время, когда числа верхней строки уменьшаются, числа нижней строки увеличиваются. Более же внимательное рассмотрение таблицы показывает, что названные числа изменяются не беспорядочно, а по определенному закону: во сколько раз количество уменьшилось, во столько раз цена увеличилась. Просмотр таблицы слева направо с учащимися показывает это вполне наглядно.

Применяя математические термины, можно сказать, что количество товара постоянной стоимости обратно пропорционально его цене.

3. Требуется выделить небольшой прямоугольный участок площадью 6400 *кв. м*. Его длина и ширина, как видно из таблицы, могут быть различны.

Длина (в *м*) . . .	200	160	100	80	64	40	32
Ширина (в *м*) . .	32	40	64	80	100	160	200

Если брать средние числа 80—80, то участок становится квадратом, если брать крайние числа, то прямоугольник становится продолговатым. Если возьмем из верхней строки два числа 200 и 100, то первое в два раза больше второго, а соответствующие им два числа из нижней строки 32 и 64 таковы, что первое в два раза меньше второго. Подобное можно подметить и на других числах таблицы, соответственно взятых из обеих строк.

Вывод: при постоянной площади длина прямоугольника обратно пропорциональна его ширине.

4. Имеется запас сахара 2000 *кг*, который нужно поровну распределить между едоками. Требуется вычислить, сколько придется сахара на едока, если едоков будет 50, 75, 100, 125, 150, 200?

Если мы выполним необходимые вычисления, то получим следующую таблицу.

Число едоков	50	75	100	125	150	200
Количество сахара (в *кг*)	40	$\approx 26{,}7$	20	16	$\approx 13{,}3$	10

В нижней строке числа 26,7 и 13,3 — приближенные, с точностью до 0,05 *кг*.

Не следует смущаться размерами пайка. Если этот паек сахара выдается на продолжительное время, например участникам какой-нибудь длительной экспедиции, то цифра 40 *кг* не представляет собой чего-либо необыкновенного. Кроме того, к этим цифрам не следует относиться придирчиво. Нужно рассматривать само существо вопроса, а оно состоит в следующем. Представим себе, что имеется определенный запас сахара (2000 *кг*) и нужно рассчитать, сколько человек можно удовлетворить этим запасом в течение определенного времени. Мы делаем необходимые вычисления и видим, что если людей будет 50 человек, то на каждого придется по 40 *кг* сахару. Если такая норма очень велика, то попробуем рассчитать, сколько сахара придется на человека, если их будет 100. Оказывается, 20 *кг*. Смотря по тому, на какое время такой паек рассчитан, он может быть либо большим, либо малым, и этот вопрос смущать не должен.

Нас интересует суть дела. Она состоит в том, что при определении запаса продуктов количество их на одного едока обратно пропорционально числу едоков. Это видно из нашей небольшой таблицы. Когда мы рассматриваем ее слева направо, то видим, что числа верхней строки в о з р а с т а ю т, а числа нижней строки во столько же раз у б ы в а ю т.

109. Свойство обратно пропорциональных величин. Чтобы рассмотреть свойство обратно пропорциональных величин, возьмем такую задачу.

Для отопления дома приготовили топлива на 60 дней. При этом предполагалось расходовать в день 800 *кг* топлива. Через несколько дней обнаружилось, что дополнительное топливо будет получено не скоро, и решено было отапливать дом имеющимся запасом 120 дней. Какова при этом будет норма расхода топлива в день?

Если нужно растянуть запас топлива на срок вдвое больше прежнего, то его придется экономить и норма должна быть вдвое меньше прежней.

Если длительность топки 60 дней, то норма 800 *кг* в день, а если длительность топки 120 дней, то норма 400 *кг* в день.

Хотя по условию задачи этого не требуется, но попробуем для себя вычислить норму при сроках отопления 80 и 100 дней и составим таблицу:

Число дней	60	80	100	120
Норма топлива (в *кг*) . . .	800	600	480	400

Здесь полезно припомнить свойство прямо пропорциональных величин, которое было рассмотрено выше. Сохраняется ли это свойство для обратно пропорциональных величин? Перед нами таблица, из которой видно,что числа верхней строки (число дней) возрастают, а числа нижней строки (норма топлива) убывают. Уже отсюда очевидно, что если мы возьмем отношение каких-нибудь двух чисел верхней строки, оно не может быть равно отношению двух соответствующих чисел нижней строки. Если мы возьмем отношение первого значения к четвертому, то в верхней строке оно будет 60 : 120, или 1 : 2, а в нижней строке 800 : 400, или 2 : 1. Эти отношения не равны. Теперь будем рассуждать так. Величины, данные в нашей задаче, безусловно, связаны между собой, и эта связь должна иметь какое-то математическое выражение. Мы пытались это выражение написать, но не смогли. Рассмотрим отношения в верхней и нижней строках: 1 : 2 и 2 : 1.

Ученики должны знать, что такие отношения называются обратными. Значит, мы получили не случайные отношения, а такие, что одно из них можно получить из другого. Поэтому, если мы, например, взяв отношение двух значений одной величины, будем связывать его с обратным отношением соответствующих значений другой величины, то у нас получатся верные равенства. Напишем эти отношения, обратные табличным.

60 : 80 = 600 : 800, обратно 800 : 600 табличному
60 : 100 = 480 : 800, » 800 : 480 »
60 : 120 = 400 : 800, » 800 : 400 »
80 : 100 = 480 : 600, » 600 : 480 »

Первые отношения мы брали из чисел верхней строки, рассматривая ее слева направо. Можно было бы эти числа брать справа налево, т. е.

120 : 60 = 800 : 400;
100 : 80 = 600 : 480;
120 : 100 = 480 : 400;
120 : 80 = 600 : 400.

Любая из этих восьми пропорций выражает свойство обратно пропорциональных величин, которые мы ищем. Это свойство можно выразить так: *если две величины обратно пропорциональны, то отношение двух произвольно взятых значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.*

Как же применяется это свойство к решению задач?

З а д а ч а. Имеется некоторый запас керосина. Если зажигать ежедневно по 20 ламп то его хватит на 6 дней. На сколько дней хватит этого керосина, если будут гореть 12 ламп?

Запишем условие задачи так:

20 ламп горят 6 дней
12 ламп будут гореть x дней.

Перепишем это условие в табличной форме:

Число ламп . .	12	20
Число дней . .	x	6

Между этими величинами существует обратная пропорциональность: м е н ь ш е ламп — б о л ь ш е дней. Значит, мы можем написать пропорцию, выражающую свойство обратно пропорциональных величин.

$$x : 6 = 20 : 12;$$
$$x = \frac{6 \cdot 20}{12} = 10.$$

Если ламп будет не 20, а только 12, то число дней горения будет больше — не 6, а 10 дней.

Можно было бы сделать больше того, что требуется в задаче, и составить таблицу.

Число ламп . . .	5	6	8	10	12	15	20
Число дней . . .	24	20	15	12	10	8	6

110. Формула обратной пропорциональности. Для вывода формулы обратной пропорциональности нужно взять какой-нибудь из рассмотренных выше примеров.

На 24 рубля можно купить разное количество печенья, в зависимости от его цены. Дешевого печенья можно купить много, а дорогого — мало. Это хорошо усматривается из таблицы.

Количество (в *кг*)	40	30	24	20	16	15	12	10
Цена (в руб.)	0,6	0,8	1	1,2	1,5	1,6	2	2,4

Возьмем любое число первой строки и умножим его на соответствующее ему число второй строки. Например:

$$40 \cdot 0{,}6 = 24;$$
$$30 \cdot 0{,}8 = 24;$$
$$24 \cdot 1 \quad = 24;$$
$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$

В произведении получается все время одно и то же число. Если мы вдумаемся в смысл задачи, то поймем, что иначе не могло и быть, потому что, умножая количество товара на его цену, мы получаем его стоимость. А стоимость товара нам известна, она постоянна и равна 24 рублям.

Следовательно, *для данной пары обратно пропорциональных величин произведение, полученное от умножения любого значения одной величины на соответствующее значение другой величины, есть число постоянное.*

В нашей задаче это число равно 24. Некоторые авторы называют его **коэффициентом обратной пропорциональности.**

В дальнейшем мы будем обозначать его буквой k. Внимательно рассматривая приведенную выше таблицу, мы можем вывести правило для нахождения любого значения одной из обратно пропорциональных величин по коэффициенту обратной пропорциональности и по соответствующему значению другой величины.

Пусть нам известно первое число нашей таблицы — 40 и коэффициент обратной пропорциональности — 24, а соответствующее число первого столбика (0,6) нам неизвестно. Обозначим его буквой x и будем искать. Мы установили выше, что $40 \cdot x = 24$. Отсюда $x = 24 : 40$; $x = 0{,}6$.

Переведем теперь эти выкладки на язык нашей задачи. «40 *кг* печенья стоят 24 рубля. Чему равна цена одного килограмма печенья?»

$$24 : 40 = 0{,}6.$$

Можно вывести такое правило. *Чтобы найти какое-нибудь значение одной из обратно пропорциональных величин, нужно разделить коэффициент обратной пропорциональности на соответствующее значение другой величины.*

Зная это правило, мы можем записать его в виде формулы. Обозначим любое значение одной величины буквой y; соответствующее значение другой величины — буквой x; коэффициент обратной пропорциональности — буквой k. Тогда формула примет вид:

$$y = \frac{k}{x}.$$

Это и есть формула обратной пропорциональности, которую можно было бы получить так: мы знаем, что если умножить любое значение одной из обратно пропорциональных величин на соответствующее значение другой, то получится постоянное число, называемое коэффициентом обратной пропорциональности. Пользуясь введенными сейчас обозначениями, мы можем этот факт записать так:

$$y \cdot x = k.$$

В левой части равенства число y умножается на число x. Найдем один из этих сомножителей. Чтобы найти один из сомножителей, нужно произведение k разделить на другой сомножитель.

$$y = k : x, \text{ или } y = \frac{k}{x}.$$

Получилась формула, найденная выше.

Применим ее к решению задачи.

Даны удельные веса некоторых веществ: вода — 1; антрацит — 1,5; алебастр — 2,5; гранит — 3; наждак — 4; йод — 5; цинк — 7; серебро — 10,5.

Некоторые из этих чисел для простоты округлены. Все эти вещества взяты в одинаковых весовых количествах. Вода взята в объеме 24 *куб. см*. Определить объем остальных веществ.

Чтобы найти объемы всех остальных веществ, примем во внимание следующее. Все перечисленные выше вещества взяты в одинаковых весовых количествах. Какое это количество, нетрудно догадаться, приняв во внимание то, что вода взята в объеме 24 *куб. см*. Значит, она весит 24 *г*. Из условия задачи видно, что и других веществ взято по 24 *г*. Вычислим сначала (ради простоты) объем гранита. Если мы возьмем воды и гранита по 24 *г*, то гранит как более плотный будет иметь объем втрое меньше, чем вода. Из этого примера следует, что удельный вес различных тел обратно пропорционален их объемам. Определим объем куска гранита по формуле: $y = \frac{k}{x}$, $k = 24$, $x = 3$. Значит, $y = \frac{24}{3}$; $y = 8$. После аналогичных вычислений получим таблицу.

Название	Вода	Антрацит	Алебастр	Гранит	Наждак	Йод	Цинк	Серебро
Удельный вес	1	1,5	2,5	3	4	5	7	10,5
Объем (в *куб. см*) . .	24	16	9,6	8	6	4,8	3,4	2,3

Числа 3,4 и 2,3 взяты приближенно.

111. Решение задач способом приведения к единице. Мы рассматривали решение задач с обратно пропорциональными величинами, применяя формулу обратной пропорциональности. Воспользуемся для этой же цели способом приведения к единице. После того как подобный способ применялся в отделе прямо пропорциональных величин, учащиеся без особых затруднений прорешают те задачи, которые им здесь встретятся; кроме того, теперь можно ждать от них большей активности.

Начинать нужно с задачи. Пусть учащиеся сами предлагают содержание задачи. Если задач будет предложено несколько, то нужно решить их все, расположив, например, в порядке возрастающей трудности. Задачи могут быть составлены неверно. После критического разбора нужно неверные или исправить, или отклонить. В качестве первой задачи нужно выбрать самую ясную и с самыми простыми данными.

Возьмем здесь, например, такую задачу.

«8 рабочих оканчивают некоторую работу в 24 дня. Во сколько дней окончат ту же работу 12 рабочих, работая так же успешно, как и первые?»

Запишем условие в виде схемы:

8 рабочих — 24 дня
12 рабочих — y дней.

Между числом рабочих и числом дней существует обратно пропорциональная зависимость. Если 8 рабочих выполняют некоторую работу в 24 дня, то б о л ь ш е е число рабочих выполняет ее скорее, т. е. в м е н ь ш е е число дней.

Для решения задачи поставим вопрос: во сколько выполнит эту работу один рабочий? Если 8 рабочих затратят на указанную работу 24 дня, то один человек, рассуждая теоретически, будет работать в 8 раз медленнее, т. е.

$$24 \cdot 8 = 192 \text{ (дня)}.$$

Мы вычислили, сколько времени потребуется о д н о м у рабочему для выполнения заданной работы. Отсюда и происходит само название «приведение к единице». Теперь рассчитаем, сколько нужно времени 12 рабочим для окончания этой работы:

$$192 : 12 = 16 \text{ (дней)}.$$

Теперь попробуем решить эту задачу по формуле $y = \frac{k}{x}$.

Составим удобную табличку:

Число рабочих	8	12
Число дней	24	y

Найдем коэффициент обратной пропорциональности:

$$k = 8 \cdot 24; \ k = 192.$$

Вычислим число искомых дней по формуле:

$$y = \frac{192}{12}; \quad y = 16 \text{ (дней)}.$$

Мы получили тот же самый результат, чего и нужно было ожидать.

Одно замечание о решении задач методом приведения к единице. Конечно, здесь рассматривается «идеальный» случай, теоретически совершенно правильный: предполагается, что все рабочие имеют одинаковую квалификацию и работают с одинаковой скоростью. В действительности ничего этого, конечно, не бывает. Кроме того, существуют такие виды труда, где возможна только коллективная (артельная) работа, а один человек, предоставленный самому себе, окажется беспомощным. Но теоретически такого рода рассуждения вполне правильны. Кроме того, при решении очень многих задач приведение к единице — совершенно естественный прием, который не ведет ни к каким осложнениям. Например, при решении рассмотренной выше задачи о времени горения ламп мы можем применить метод приведения к единице, и никого не удивит тот факт, что 10 ламп будут гореть 12 дней, а 1 лампа (при том же запасе керосина) будет гореть 120 дней. Предполагается, конечно, что время ежедневного горения ламп во всех случаях строго определенное.

Наконец, нужно постоянно помнить, что при решении задач на пропорциональную зависимость нельзя доводить вычисления до абсурда. Нужно думать о том, в *каких границах* наши вычисления имеют смысл. Например, таблицу, которую мы составили в этом параграфе, можно продолжить и далее, положим, вычислить, что если нанять 192 рабочих, то они окончат эту работу за один день. В этом результате нет ничего удивительного: если рабочих будет еще больше, то они должны справиться с работой в несколько часов, а то и в несколько минут. Но реально ли это? Нужно знать, о какой работе идет речь. Если речь идет об отделке какой-нибудь комнаты, хотя бы и большой, то несколько сот человек, приглашенных для такой работы, конечно, ускорили бы процесс, но они не смогли бы в такой комнате разместиться и только мешали бы друг другу.

112. Решение задач способом пропорций. Рассмотрим другой способ решения задач на обратно пропорциональные величины, называемый «способом пропорций».

Задача. Переднее колесо телеги, имеющее окружность длиной 2,6 *м*, обернулось на некотором расстоянии 375 раз. Сколько раз обернулось на том же расстоянии заднее колесо, имеющее окружность 3,25 *м*?

Составим схему:

2,6 *м* — 375 оборотов
3,25 *м* — y оборотов.

Так как длина окружности заднего колеса (обода) б о л ь ш е длины окружности переднего колеса, то заднее колесо на указанном расстоянии должно сделать не 375, а м е н ь ш е оборотов. Значит, длина окружности колеса и число оборотов находятся в обратно пропорциональной зависимости. Факт, который здесь рассматривается, ученикам может показаться для обозрения неудобным, так как взято большое число оборотов. Поэтому можно предложить учащимся сделать упрощенный опыт на маленьких числах, взяв две окружности. Радиус первой 2 *см*, радиус второй 6 *см*, длина первой 4π (или $12\frac{4}{7}$ *см*), длина второй 12π (или $37\frac{5}{7}$ *см*)[1]. Первая окружность сделала 24 оборота, тогда вторая, у которой радиус в 3 раза б о л ь ш е, сделает на том же отрезке только 8 оборотов, т. е. в 3 раза м е н ь ш е, чем первая. Это можно представить таблицей.

Длина окружности	$12\frac{4}{7}(4\pi)$	$37\frac{5}{7}(12\pi)$
Число оборотов	24	8

Теперь перейдем к решению данной задачи. Из условия ее можно составить пропорцию, рассуждая так: y во столько раз м е н ь ш е 375, во сколько 2,6 меньше 3,25, или y так относится к 375, как 2,6 относятся к 3,25. Пропорция будет иметь вид:

$$y : 375 = 2{,}6 : 3{,}25;$$

$$\text{отсюда } y = \frac{375 \cdot 2{,}6}{3{,}25} = \frac{375 \cdot 26 \cdot 100}{10 \cdot 325}; \quad y = 300.$$

Таким образом, большее колесо сделает 300 оборотов.

Теперь посмотрим, как эта задача будет решаться по формуле $y = \frac{k}{x}$. Составим табличку:

[1] Число π принимается равным $3\frac{1}{7}$.

Длина окружности . . .	2,6	3,25
Число оборотов	375	y

Из таблицы находим, что $k = 2{,}6 \cdot 375 = 975$.

Подставляя в формулу соответствующие числа, получим:

$$y = \frac{975}{3{,}25}; \quad y = 300.$$

Сделаем одно замечание относительно тех случаев, когда в ответе получается дробный результат При решении многих задач очень часто может получиться дробный результат. Когда приходится применять деление, то этот результат почти неизбежен, так как трудно во всех случаях подобрать такие числа, чтобы деление выполнялось нацело. Это иногда смущает учащихся, особенно в тех случаях, когда, например, получается в ответе число «25½ человека».

В этом ответе нет ничего странного; полученное число можно истолковать так: 25 человек не справятся с данной работой, а если будет поставлен на работу 26-й человек, то его нагрузка не будет полной, ему придется проработать половину дня. Точно так же нельзя удивляться, если получится ответ: $5\frac{1}{3}$ вагона. Это совсем просто: 5 вагонов полных, а шестой недогружен.

113. Применение пропорций к решению задач на проценты. Задачи на проценты, которыми мы в прошлом много занимались, можно решать путем составления пропорций. На этом вопросе полезно остановиться. Рассмотрим последовательно основные задачи на проценты.

1. В городе 36 000 жителей. Дети школьного возраста составляют 15% всего населения. Сколько детей школьного возраста в этом городе?

Мы можем рассуждать так. Из условия задачи видно, что на каждую сотню населения приходится 15 школьников, а на 36 000 жителей придется школьников больше во столько раз, сколько сотен в числе 36 000. Составим схему:

на 100 человек — 15 учеников
36 000 человек — x учеников.

Отсюда получается такая пропорция:

$$x : 15 = 36\,000 : 100,$$

откуда $x = \frac{15 \cdot 36\,000}{100} = 15 \cdot 360$; $x = 5400$ (учеников).

Решение пропорции свелось к тому, что мы взяли число сотен в числе 36 000 и потом умножили на него указанное в задаче число процентов 15.

Для вычисления x мы получили выражение $x = \frac{15 \cdot 36\,000}{100}$. Ученики должны убедиться в том, что, каким бы способом они ни решили эту задачу, придется выполнить действия, какие указаны в этом выражении. В самом деле, 15 умножается на 36 000 и делится на 100. Если решать эту задачу приведением к единице, придется разделить 36 000 на 100 и умножить на 15, выполнив те же действия в другом порядке. Если же решать эту задачу по правилу нахождения дроби числа, то придется умножить 36 000 на 0,15, что опять сведется к умножению этого числа на 15 и делению на 100.

Кроме того, полезно теперь, на заключительных занятиях, припомнить формулу решения таких задач и сравнить с ней полученную здесь числовую формулу.

2. Вследствие аварии парохода погибло 24% зернового груза, что составляет 120 *ц*. Сколько было зерна на пароходе?

Из условия задачи видно, что с каждых 100 *ц* затонуло 24 *ц* зерна. Нужно вычислить, как велик был груз, из которого потеряно 120 *ц*. Напишем схему:

$$100 - 24$$
$$x - 120.$$

Отсюда получается такая пропорция:

$$x : 100 = 120 : 24;$$
$$x = \frac{100 \cdot 120}{24}; \quad x = 500 \text{ ц}.$$

Эту формулу тоже нужно подвергнуть разбору. Нужно рассмотреть, какие действия следует выполнить для нахождения искомого числа и над какими числами эти действия выполняются. Надо обратить внимание учащихся на то, что при любом способе решения мы выполняем одни и те же действия над числами, меняется только характер рассуждений. Выведенная ранее буквенная формула тоже соответствует полученной числовой формуле.

3. В баке 800 *л* керосина. Вследствие образовавшейся течи вытекло 40 *л* керосина. Сколько процентов составляет эта потеря?

Напишем обычную схему:

$$800 \text{ л} - 40 \text{ л}$$
$$100 \text{ л} - x \text{ л}.$$

Нужно полагать, что если на 800 *л* потеря керосина выразилась числом 40 *л*, то на 100 *л* она будет в 8 раз меньше. Поэтому можно составить пропорцию, рассуждая так: x во столько раз меньше 40, во сколько 100 меньше 800, т. е.

$$x : 40 = 100 : 800,$$

$$\text{откуда } x = \frac{40 \cdot 100}{800} = \frac{5 \cdot 1}{1}; \quad x = 5.$$

Потеря керосина составляет 5%. Этот результат можно было предвидеть заранее, когда мы сравнивали числа 100 и 800. Такое предвидение возможно было потому, что в условии задачи были даны удобные круглые числа. Если бы числа не были хорошо подобраны, то сразу ответить на вопрос, сколько получится, было бы трудно.

После решения задачи полезно припомнить все способы решение, т. е. приведение к единице, нахождение процентного отношения чисел и, наконец, найденную для этого типа задач формулу.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 3

Часть I

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Глава первая. Повторение и систематизация пройденного в I — IV классах

1. Счет и число 12
2. Счет группами 14
3. Нумерация (счисление) 16
4. Сложение 18
5. Вычитание 20
6. Умножение 21
7. Деление 23
8. Среднее арифметическое нескольких чисел 25
9. Порядок выполнения совместных действий . . . . . —
10. Зависимость между данными числами и результатами действий над ними 27
11. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных 28
12. Вычислительная практика 31
13. Округление целых чисел 37
14. Буквенные обозначения и формулы 39
15. Величины и их измерение 43
16. Задачи 46

Глава вторая. Делимость чисел

17. Делимость суммы и разности 56
18. Признак делимости на 2 67
19. Признак делимости на 4 70
20. Признак делимости на 8 72
21. Признаки делимости на 5; 25; 125 73
22. Признаки делимости на 9 и на 3 . . . . —
23. Признаки делимости на небольшие составные числа . . 75
24. Общий признак делимости на числа 7; 11; 13 . . . . —
25. Разложение чисел на простые множители 76
26. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное 78

Часть II

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Глава третья. Формирование понятия «дробь»

27. О долях единицы 87
28. Изображение дробей 90
29. Возникновение дробей 92
30. Сравнение дробей по величине 95
31. Дроби правильные и неправильные. Смешанные числа . 99
32. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратно 100
33. Обращение целого числа в неправильную дробь . . . 103
34. Изменение величины дроби с изменением ее членов . . . 104
35. Сокращение дробей 112
36. Приведение дробей к общему знаменателю 115

Глава четвертая. Действия над обыкновенными дробями

37. Сложение дробей 120
38. Вычитание дробей 129
39. Умножение дробей 135
40. Деление дробей 160
41. Взаимно обратные числа. Замена деления умножением 182
42. Распространение законов и свойств действий на дробные числа . . . . —
43. Отношение величин 188
44. Нахождение процентного отношения чисел 192
45. Числовой масштаб 193

Часть III

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Глава пятая. Общие сведения о десятичных дробях

46. Предварительные разъяснения. Понятие о десятичной дроби. 195
47. Изображение десятичной дроби 197
48. Приписывание нулей к десятичной дроби 201
49. Сравнение десятичных дробей по величине 203
50. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, 100, 1000... раз 206
51. Округление десятичных дробей 208

Глава шестая. Действия над десятичными дробями

52. Сложение десятичных дробей 213
53. Устное сложение десятичных дробей 215
54. Сложение десятичных дробей на счетах 217
55. Вычитание десятичных дробей 218
56. Устное сложение и вычитание десятичных дробей . . 221
57. Сложение и вычитание десятичных дробей на счетах . . 222

58. Умножение десятичных дробей 223
59. Умножение с помощью таблиц 229
60. Деление десятичных дробей 231
61. Приближенное частное 236
62. Деление десятичных дробей с помощью таблиц 240
63. Замена деления умножением 241
64. Простейшие задачи на проценты 243
65. Нахождение процентов данного числа 248
66. Нахождение числа по его процентам 251
67. Нахождение процентного отношения чисел 253

Глава седьмая. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями

68. Обращение обыкновенной дроби в десятичную . . . 258
69. Понятие о периодической дроби 268
70. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями 271

Часть IV

ИЗУЧЕНИЕ АРИФМЕТИКИ В IV КЛАССЕ

Глава восьмая. О приближенных вычислениях в школьном курсе арифметики

71. Как возникают приближенные числа 276
72. Погрешность приближенных чисел и точность приближения 279
73. Относительная погрешность приближенного числа . . 281
74. Правило округления точных и приближенных чисел . 282
75. Приближенное частное 284
76. Обозначение целых и дробных приближенных чисел . 285
77. Значащие цифры и десятичные знаки 287
78. Основной принцип округления приближенных чисел . . —
79. Арифметические действия над приближенными числами . 288
80. Округление промежуточных результатов 292
Литература для учителя о приближенных вычислениях в школе 293

Глава девятая. Проценты

81. Повторение ранее пройденного 294
82. Дробные проценты 303
83. Задачи, в которых число процентов превышает 100 . . 306
84. Задачи первого типа (нахождение процентов данного числа) 308
85. Решение этих задач по формуле . . . . —
86. Применение таблиц к решению задач первого типа . . 310
87. Задачи второго типа (нахождение числа по его процентам) 313
88. Решение этих задач по формуле 314
89. Применение таблиц к решению задач второго типа . . 315
90. Задачи третьего типа (нахождение процентного отношения чисел) 317

91. Решение этих задач по формуле 318
92. Применение таблиц к решению задач третьего типа . . 319
93. Усложненные задачи на проценты 321

Глава десятая. Пропорции

94. Предварительные разъяснения 323
95. Пропорции 328
96. Основное свойство членов пропорции 330
97. Вычисление неизвестных членов пропорции 334
98. Упрощение пропорции 339
99. Перестановка членов пропорции 343
100. Сложные пропорции 347
101. Производные пропорции 349
102. Непрерывные пропорции 350

Глава одиннадцатая. Пропорциональные величины

103. Величины прямо пропорциональные 352
104. Свойство прямо пропорциональных величин . . . 362
105. Формула прямой пропорциональности 365
106. Решение задач способом приведения к единице. . . . 368
107. Решение задач способом пропорций 370
108. Величины обратно пропорциональные 371
109. Свойство обратно пропорциональных величин. . . . 375
110. Формула обратной пропорциональности 377
111. Решение задач способом приведения к единице 380
112. Решение задач способом пропорций 382
113. Применение пропорций к решению задач на проценты . 384

Иван Никитич Шевченко

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ В V—VI КЛАССАХ

Редакторы И. Л. Цветков и А. А. Шапошникова

Переплет М. А. Силкиной

Худож. редактор Л. В. Голубева

Техн. редактор В. В. Тарасова

Корректоры М. Ф. Соловьева и Т. Ф. Юдичева

Сдано в набор 28/X 1960 г. Подписано к печати 30/III 1961 г. Формат 84x108/32. Бум. л. 6,13. Печ. л. 24,5. Усл. п. л. 20,09. Уч.-изд. л. 19,89. А 04081. Тираж 63300. Зак. 1397.

Изд-во АПН РСФСР, Москва, Погодинская ул., 8.

Книжная фабрика им. Фрунзе Главполиграфиздата Министерства культуры УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.

Цена 64 коп.