Людвика Еленьска

МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ И ГЕОМЕТРИИ В ПЕРВЫЕ ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ

УЧПЕДГИЗ · 1[illegible]

ЛЮДВИКА ЕЛЕНЬСКА
при участии А. М. РУСЕЦКОГО

МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ И ГЕОМЕТРИИ В ПЕРВЫЕ ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ

Перевод с польского
Н. З. ГРЕЧКИНА

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1960

Людвика Еленьска

МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ И ГЕОМЕТРИИ В ПЕРВЫЕ ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ

Редактор *М. П. Молчанов*
Обложка художника *Н. Н. Румянцева*
Художественный редактор *А. В. Максаев*
Технический редактор *Н. Н. Махова*
Корректор *Г. Н. Крылова*

* * *

Сдано в набор 30/XII 1959 г. Подписано к печати 11/III 1960 г. 84×108$^{1}/_{32}$ 11 (9,02) п. л. Уч.-изд. л. 7,59 Тираж 72 тыс. экз. А 03404.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Полиграфический комбинат Ярославского Совета народного хозяйства.
г. Ярославль, ул. Свободы, 97

Цена без переплета 2 р. 05 к. Переплет 80 коп.
Заказ № 23.

О «МЕТОДИКЕ АРИФМЕТИКИ И ГЕОМЕТРИИ В ПЕРВЫЕ ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ» ЛЮДВИКИ ЕЛЕНЬСКОЙ

Книга польского методиста доктора Людвики Еленьской (написанная при участии крупного польского педагога-математика проф. А. М. Русецкого) представляет большой интерес для советских учителей. Своеобразие этого методического руководства состоит в том, что оно основано на хорошем знании психологии детей. Предлагаемые в нем методические рекомендации обосновываются фактами, полученными из наблюдений над процессом усвоения детьми арифметики.

Такую книгу мог написать только автор, который является одновременно учителем, психологом и методистом-ученым. Именно это делает убедительными основные методические положения руководства, придавая им научную доказательность.

Л. Еленьска строит методику обучения, исходя из следующей правильной предпосылки: ученик усваивает то, что является предметом его активной мыслительной деятельности, над чем он самостоятельно думает.

В кратком введении автор сопоставляет два метода обучения: путь сообщения готовых знаний и путь самостоятельного приобретения знаний учащимися с помощью учителя. Л. Еленьска приходит к выводу относительно преимущества второго пути. «Нужно стремиться к тому, чтобы ребенок п р и о б р е т а л математические знания путем с а м о с т о я т е л ь н ы х и с к а н и й», — пишет автор. Однако мы не можем с автором согласиться, что указанный принцип имеет силу только по отношению к «низшему уровню обучения», как это утверждается в книге. Он применим к л ю б о м у уровню. Этот последний вывод, сделанный автором методического руководства, по-видимому, является следствием того, что во вводной части книги оказались неразрывно связанными

два принципа: активности и наглядности. Это, в частности, выявляется в следующем утверждении: «В первые годы обучения, «нужно целиком исключить передачу готовых математических знаний, а все обучение основывать на принципе наглядности».

Противопоставление, которое здесь сделано, неправомерно, поскольку и сама наглядность может быть использована **по-разному**: как способ, применяемый учителем в процессе сообщения им готовых знаний и как средство самостоятельной мыслительной работы самих учащихся.

Это уточнение сделать необходимо, поскольку оно касается вопроса очень важного для последующего понимания содержания книги.

Следует подчеркнуть, что в дальнейшем, в ходе изложения конкретного материала, Л. Еленьска реализует правильную точку зрения на два указанных выше принципа, не смешивая их. Принцип активности имеет более общее значение, и его использование проходит красной нитью через все изложение. Принцип наглядности используется на определенных этапах, причем автор учитывает, что в ряде случаев применение наглядности может оказаться психологически не оправданным, не целесообразным, отвлекая от существенных сторон изучаемого материала.

Основная ценность книги Л. Еленьской состоит в том, что она направлена на активизацию процесса учения в начальных классах школы. Эту цель преследуют и наши учителя, которые стремятся в условиях перестройки школы найти наиболее эффективные методы преподавания, способствующие активизации процесса обучения и обеспечивающие не только сумму знаний, но и гибкость их применения в практической деятельности.

В книге Л. Еленьской учителя найдут описание большого количества методов и приемов, способствующих активизации обучения, они сопоставят их с теми, какие применяют сами; одни из них отвергнут, другие усовершенствуют, третьими обогатят ассортимент используемых в практике обучения методов.

В этой вступительной статье я ставлю задачей обратить внимание читателей на некоторые наиболее ценные методические принципы и приемы, а также указать на те из них, использование которых в условиях нашей школы не является целесообразным или может вызвать сомнения.

Необходимо также наряду с этим разъяснить некоторые психологические понятия, используемые автором, указав, как они трактуются в свете новых данных психологических и педагогических исследований.

В методическом руководстве Л. Еленьской показано, как следует активизировать учение на разных его этапах — при введении нового материала, в процессе разнообразных упражнений, при работе над учебником и т. п

Важным условием сознательного и активного усвоения является **пробуждение у детей потребности в знаниях**, которые они получают в процессе обучения. С этой точки зрения заслуживает внимание целый ряд приемов, используемых автором книги. Кратко охарактеризую некоторые из них.

При введении в I классе знака сложения учитель ставит перед учащимися вопрос о том, как надо записать выполненное ими действие, рассчитывая на то, что дети еще не знают обозначения действия и что поэтому они будут предлагать свои различные способы. Автор руководства соблюдает правильную меру, он не рекомендует «затягивать» поиски детьми способа обозначения, считая достаточным две-три самостоятельные пробы. В результате этих «поисков» дети начинают понимать **необходимость** особого знака. Вот тогда учитель его и вводит.

Аналогичный и очень эффективный прием использует Л. Еленьска для пробуждения у школьников II класса потребности в нуле. В этом же II классе проводится ознакомление с употреблением скобок таким путем, что дети на практике убеждаются в необходимости введения скобок. Сначала решается задача в два действия (где требуется разделить результат суммирования двух чисел), а потом ставится перед школьниками вопрос, как надо записать ход решения. После того как учащиеся выдвинут «проект» записи в двух отдельных действиях, учитель дает возможность им осознать преимущество записи с использованием скобок.

Несколько по-иному автор подводит учащихся к осознанию значения измерения времени при помощи часов. Он рекомендует провести в классе следующий опыт: предложить детям самостоятельную работу и сказать им о том, что работа должна быть прекращена каждым из них в тот момент, когда ему покажется, что прошло 15 минут. Несомненно, обнаружатся сильные различия в длительности работы разных учеников, а это и вызовет их интерес, как отмечает автор, к действительному времени их работы.

Пробуждение потребности в знаниях тесно связывается в методическом руководстве с жизненной практикой ребенка. Изучение мер времени связывается с практической необходимостью учитывать время в повседневной жизни, формирование геометрических понятий — с использованием геометрии на уроках рисования, физкультуры и труда и т. п.

Автор раскрывает широкие возможности установления связей между некоторыми учебными предметами (к сожалению, конкретного материала о связи арифметики с трудом нет), правильно отмечая, что если бы мы хотели разрушить эти связи, то тем самым удалили бы из урока жизнь, «так как именно эти различные связи между предметами создает сама жизнь.

«Ведь не существует ни одной реальной вещи в мире, которая целиком вошла бы в границы одной науки», — так пишет Л. Еленьска.

Осознание значения жизненной важности усваиваемых знаний — это только одна сторона активизации учения. Наряду с ней большую роль играет осознание и обобщение учащимися способов выполнения действий. Правильно предостерегает учителей автор методического руководства, что не следует предлагать детям «обобщение метода в готовом виде».

В книге Л. Еленьской мы находим тщательно разработанные упражнения, с помощью которых ей удается сформировать у школьников необходимое обобщение способа действия. Покажем это хотя бы на одном примере, ярко иллюстрирующем методический подход автора

В качестве примера используем овладение способом сложения трехзначных чисел в III классе. Своеобразие вычислительного приема в данном случае состоит в том, что первое число прибавляется целиком, в то время как второе слагаемое разлагается и прибавляется по частям, начиная от единиц высшего разряда.

В руководстве рекомендуется вначале предлагать детям сложение двухзначных чисел (например, «24+35»), выясняя их вычислительные приемы и требуя от них записи, отражающей фактический ход вычисления (т. е. представляющей второе число в виде **двух** слагаемых: «24 + 30 + 5»). Как отмечает автор, «запись на доске оттеняет в глазах учащихся тот факт, что первое слагаемое не разлагается, в то время как второе разложено».

Наряду с двузначным числом, предложенным вначале, учитель, далее, записывает на доске трехзначное число (имеющее то же количество десятков и единиц — «124»). К этому новому числу учащиеся класса прибавляют (без записи) круглые сотни («200», «100», «500» и т. д.). Затем к этому же числу прибавляются сотни с десятками, что уже требует от учащихся разложения второго слагаемого. Опять-таки предлагается записать фактический ход вычисления и сформулировать его: «Сначала прибавляем сотни, а затем — десятки». Далее, в качестве второго слагаемого привлекаются числа, состоящие из сотен, десятков и единиц, и соответственно запись отражает второе слагаемое в виде трех отдельных слагаемых.

Нетрудно заметить, что в этом случае система упражнений подобрана так, что она помогает учащимся выделить и осознать наиболее существенные стороны применяемого вычислительного способа. Предусмотрены все детали, обеспечивающие наилучшие условия этого осознания; со специальной целью, в частности, первое слагаемое оставлено неизменным на протяжении ряда упражнений («124»). Л. Еленьска разъясняет, почему это сделано: «Если оставляем, не стирая, все время одно и то же число, то тем самым подсказываем детям мысль, что не важно **к чему прибавляем**, а важно, **как прибавляем**, что существо дела здесь во **втором** слагаемом: как его разложить и с чего начать сложение».

Таким образом, автор книги при построении упражнений опирается на определенные закономерные особенности мыслительной деятельности: если упрощается условие задачи в одной его части, то создается возможность концентрировать усилия мысли на другой его части — наиболее существенной для осознания данного способа или правила.

Тщательно продуманная система упражнений в разделе вычислительных операций составляет сильную сторону методического руководства Людвики Еленьской. В книге выделен особый раздел — «Планирование упражнений и их разнообразие». При этом автор совершенно правильно оценивает двоякую роль упражнений: способствовать формированию навыков и более глубокому осознанию изученных арифметических понятий.

Специальный раздел методического руководства посвящен вопросу формирования математического мышления, он является небольшим по объему, содержит значительно меньше фактического материала, но также представляет интерес. В этом разделе, где излагается главным образом методика решения и составления арифметических задач, занимает большое место вопрос об упражнениях, преследующих еще более широкие цели — овладение правильным подходом к задаче, выработку умений решать задачи.

Читатели не найдут в методическом руководстве Л. Еленьской подробный разбор хода решения той или иной конкретной (нетиповой или типовой) задачи. И это вполне правомерно, поскольку целью обучения является не научить детей решению данной, конкретной задачи, а выработать у них более общие умения решать разнообразные задачи. Выработка такого рода общих умений составляет важнейшую сторону активизации обучения. Автор с самого начала пытается охарактеризовать эти умения и затем предлагает серию специальных упражнений для их выработки.

В книге говорится о трех видах умений, в которых обнаруживается определенный уровень развития математического мышления: 1) умение правильно ставить вопросы; 2) умение оценить достаточность и недостаточность данных; 3) умение справляться с трудностями.

Следует отметить, что перечисленные в книге умения далеко не исчерпывают тех умений, какие необходимо выработать при решении задач, и среди них отсутствуют наиболее существенные, а именно: умение «усмотреть» в задаче проблему и в соответствии с этим «активно искать» способы решения, умение анализировать и синтезировать, отвлекаясь от несущественных сторон условия.

Но в ходе конкретного изложения выясняется, что эта общая характеристика трех видов умений в значительной мере предполагает и понимание задачи как проблемы и выработку умений выполнять анализ и синтез.

Л. Еленьска начинает изложение с верного наблюдения, отмечая, что дети на первоначальных этапах обучения вообще не обнаруживают проблему в задаче и, даже решив задачу, часто не осознают, что они разрешали какую-то проблему и поэтому для них еще не существует вопроса о том, достаточны или недостаточны данные.

Правильно, далее, формулирует автор основную цель при обучении решения задач — «приучить детей к разрешению проблем, содержащихся в задачах». В связи с этим отводится большое место решению задач без вопросов, с недостающими и лишними данными; рекомендуется предлагать иногда детям и нерешаемые задачи Педагогическая ценность такого рода задач в том, что они приучают школьников, как отмечает автор, правильно ставить вопросы и «оценивать» данные. Точнее было бы сказать в этом случае, что такого рода задачи способствуют выработке умений анализировать и синтезировать искомые и данные.

Заслуживает большого внимания мысль автора (хотя она высказана им бегло), что «задачи должны быть подобраны так, чтобы их решение не требовало никакой помощи со стороны учителя». Здесь имеется в виду самостоятельное решение учащимися задач. И это совершенно правильно, только таким путем можно выработать у детей общие умения решать задачи.

Но возникает вопрос, как это сделать? На него дает верный ответ автор книги: «Такого положения в решении задач можно достигнуть при строгом соблюдении определенной последовательности в нарастании трудностей».

Нужно прямо сказать, что в методическом руководстве Л. Еленьской такая система упражнений в решении задач отсутствует, так же как ее нет и в наших методических руководствах (я имею в виду систему упражнений, рассчитанных на самостоятельное решение задач учащимися).

Однако важно уже то, что построение такой системы упражнений выдвигается в методическом руководстве как задача. Этот пробел (отсутствие системы упражнений в самостоятельном решении задач) частично восполняется автором книги при изложении вопроса о составлении задач самими учащимися. Этому виду работы правомерно придается очень большое значение.

Об этом в образной форме говорится следующее: «Поскольку мы знаем, как был завязан узел и затянута петля, постольку нам будет легче развязать этот узел».

Психологически анализируя процесс составления детьми задач, Л. Еленьска правильно отмечает, что в этом случае «ребенок рассуждает над собственной работой, в то время как при решении предложенной задачи ему нужно рассуждать над чьим-то планом, заключенном в задаче. А дети, как отмечает, далее, автор, только то хорошо понимают, что сами умеют выполнить».

Кроме того, указывается еще на одно преимущество: составление задачи детьми заменяет «подробное объяснение задачи» и в то же время служит ясным показателем того, что дети понимают задачу.

Здесь высказывается правильное предостережение против злоупотребления в практике обучения «подробным объяснением», которое иногда сводится к излишнему, с нашей точки зрения, чисто словесному «рассуждательству», осуществляемому уже после того, как условие задачи детьми проанализировано и раскрыта основная зависимость между данными и искомыми.

Заслуживает большого внимания предложение Л. Еленьской вводить числовую формулу при решении задач начиная с I класса. Автор прав в своем утверждении, что когда мы требуем от ученика записать ход решения составленной им задачи, то мы фактически требуем составления формулы.

При этом в книге правильно отмечается, что для ученика гораздо проще написать формулу для задачи, составленной им самим, чем получить формулу для задачи, взятой из учебника. Автор не ограничивается только этим видом работы над числовой формулой, он рекомендует предлагать ученикам составлять задачи разного содержания к одной и той же числовой формуле, тем самым осуществляя обобщение.

Следует еще к этому прибавить, что в данном случае осуществляется также и отвлечение, поскольку объединение задач по общности их математической структуры неразрывно связано с необходимостью отвлечься от их разнообразного конкретного содержания.

Такого рода упражнения, очень полезные для развития мышления, широко применяются и у нас, но в более старших классах. Опыт обучения арифметике в польской школе ставит перед нами вопрос относительно целесообразности введения таких упражнений начиная с I класса.

В методическом руководстве имеются некоторые критические замечания по поводу недостатков в обучении решению задач. Эти замечания и для нас представляют интерес, поскольку в практике нашей школы в известной степени имеют место аналогичные недостатки.

Л. Еленьска кратко касается вопроса относительно «синтетического» и «аналитического» способов решения задач в той форме, в какой они часто применяются в практике обучения.

Учитель, используя синтетический способ, спрашивает ученика: «Что хочешь узнать? Какой будет первый вопрос?» Автор руководства следующим образом интерпретирует реагирование на это ученика: «Учащийся совсем растерян. Откуда же он может знать, каким будет первый вопрос?» И, далее, Л. Еленьска разъясняет: Знать, какой вопрос следует поставить первым, возможно только тогда, когда известны все вопросы, т. е. когда имеется готовый план решения, а план может быть составлен только при условии, если «схвачено целое».

По отношению же к первоначальным этапам обучения еще не приходится говорить о предварительном составлении плана решения.

Аналогичное сомнение высказывает автор книги по поводу аналитического способа, которое начинается с последнего вопроса. «Если учитель спрашивал, какой первый вопрос, а теперь спросит, какой последний вопрос, то пусть не думает, что этим он во многом облегчил учащемуся решение задачи», — пишет Л. Еленьска.

Необходимо отметить, что, прочитав данное методическое руководство, читатель не получит ясного представления относительно возможности использования упомянутых выше способов решения и о том, как к ним относится автор книги. С одной стороны, утверждается, что аналитический способ лучше синтетического, а с другой, пишется следующее· «Что касается нас, то мы не считаем его ни единственным, ни наилучшим».

Неясность в решении этого вопроса проистекает оттого, что автор книги не уделяет необходимого внимания процессам анализа и синтеза, которые играют основную роль при решении задач. В ходе решения оба эти процесса переплетаются друг с другом, поскольку ученик, выяснив, что «можно узнать» (синтез), должен сразу же определить, «нужно ли это узнавать?», с точки зрения цели, сформулированной в последнем вопросе (анализ).

Естественно, что младший школьник не сразу овладевает сложными формами аналитико-синтетических операций.

Но уже в I классе имеется полная возможность упражнять его в использовании анализа и синтеза в тесной связи друг с другом. Например, предлагаются подряд для решения две задачи в одно действие с одинаковым сюжетом и числовыми данными, но разными вопросами В одном случае вопрос требует сложения, в другом — вычитания. Решая такого рода задачи, учащийся уже на первом году обучения приучается сочетать синтез и анализ, он убеждается на собственной практике в необходимости при выборе арифметического действия учитывать два обстоятельства: «что можно узнать?» и «что нужно узнать?».

Целая система подобных упражнений может и должна быть разработана применительно к каждому году обучения.

Что касается методического руководства Л. Еленьской, то, хотя оно и не дает решения этого основного вопроса, оно правильно ориентирует читателя, в каком направлении его надо искать. Автор утверждает, что суть дела не в том, чтобы уметь поставить первый или последний вопрос, — важно осуществить «схватывание» того, что составляет «ядро задачи» и отыскать соответствующие пути решения.

Глубоко права Л. Еленьска, которая задумывается над тем, как перенести центр тяжести в обучении решению задач на самый процесс отыскания способов решения, преодолев тенденцию, которая часто наблюдается у школьников, считать самым важным в задаче получение числового ответа.

В этих целях в руководстве дается ценный совет: предлагать детям задачи с готовым ответом с тем, чтобы они проверяли, как такой ответ получен и соответствует ли он действительности.

К этому можно было бы добавить и такие рекомендации: включать в условия задач, предлагаемых для решения, числа, с которыми учащиеся еще не умеют оперировать, и тем самым побуждать их к анализу и синтезу без выполнения числового решения. Большую педагогическую ценность представляют также такие задачи, которые могут быть решены более экономным путем на основе анализа зависимости между данными и искомыми без числового решения (например, «В двух ящиках лежало всего 60 *кг* винограду. Из первого ящика взяли 16 *кг*, а во второй положили 16 *кг*. Сколько винограду стало в обоих ящиках?» и т. п.).

Говоря о формировании мышления у школьников в процессе обучения арифметике и придавая, в частности, большое значение выработке у детей «проблемного» или творческого подхода к решению задач, Л. Еленьска рассматривает очень важный вопрос относительно качеств ума детей и выдвигает на первое место «дисциплинированность ума». Анализируя это качество, автор отмечает, что признаком дисциплинированного ума является прежде всего критическое отношение к собственной мыслительной работе, которое характеризуется, во-первых, появлением сомнений и, во-вторых, возникновением потребности в проверке.

В методическом руководстве рассматривается с этой точки зрения вопрос о способах исправления ошибок, о формах устного опроса и проверки письменных работ. В этом небольшом по объему разделе, выделенном в книге под названием «Исправление ошибок», читатель найдет некоторые психологические факты относительно некритичности младших школьников по отношению к собственной работе и ряд интересных приемов, способствующих формированию качества критичности ума. Имеющийся материал проливает свет на важнейшую проблему формирования навыков самоконтроля, которая до сих пор почти не получила освещения применительно к младшему школьнику.

Необходимо всемерно приветствовать появление такой тематики в методическом руководстве, хотя она и представлена здесь очень неполно, и, в частности, очень важный вопрос относительно предупреждения ошибок, бегло затронутый автором в заключении данного раздела, фактически остался не освещенным.

Внимание учителей, несомненно, также привлечет имеющийся в книге раздел «Использование учебника».

Интересны мысли автора относительно недогматического, творческого отношения учителя к учебнику. «Учитель должен согласовать свою работу с учебником, но это не значит, что он обязан идти целиком за учебником», — пишет Людвика Еленьска. Как разъясняет, далее, автор, учитель должен приспособить учебник для осуществления своих принципов.

Сочувственно относясь к этому высказыванию, мы в то же время не можем разделить другой мысли автора, также касающейся использования учебника.

В книге дается указание относительно того, что всегда следует использовать учебник для закрепления знаний и навыков, для проверки изученного, но не для подведения детей к новому понятию. Нам думается, что такое ограничение является неправомерным. На определенной ступени обучения (в III—IV классах) уже вполне возможно использовать учебник и при изучении нового материала (но, естественно, только по некоторым, тщательно отобранным вопросам). Особенно это важно в условиях активизации обучения, когда ставится задача научить учащихся самостоятельно работать над книгой, и определенная подготовка в этом направлении должна быть начата в начальных классах.

Большое место в этом разделе книги Л. Еленьской отведено картинкам в учебнике арифметики. Автор анализирует те условия, при которых картинка достигает познавательной цели, классифицирует картинки в зависимости от их характера и роли по отношению к задаче; особо останавливается на рассмотрении картинок, нецелесообразных с педагогической точки зрения, когда они отвлекают учеников от нужной темы, выдвигая на первый план «житейскую проблему» в ущерб математической стороне.

Этот раздел может быть прочитан с большой пользой Но есть в нем существенный пробел: нельзя сводить наглядность при обучении решению задач в начальных классах только к картинкам, т. е. формам «предметной наглядности». Они должны постепенно заменяться схематической наглядностью. Отсутствие схем в учебниках арифметики для начальных классов, несомненно, будет задерживать математическое развитие детей, замедляя формирование отвлеченного мышления.

Я не ставила своей задачей проанализировать все богатое содержание книги Людвики Еленьской и остановилась на рассмотрении некоторых вопросов, уделив основное внимание тем, которые связаны с проблемой активизации обучения. Освещая главным образом положительные стороны книги, я попутно отмечала то, что может вызывать сомнения.

Сказанное остается только дополнить некоторыми краткими замечаниями по отдельным вопросам, которые не были затронуты в статье. Следует перечислить те положения и методические рекомендации, которые нецелесообразно было бы осуществлять в условиях нашей школы.

В методическом руководстве Л. Еленьской рекомендуется монографический метод изучения чисел в пределах первого десятка. В нашей школе после аргументированной критики этого метода (в работах дореволюционных и советских методистов) от него отказались. В длительной практике обучения проверен метод изучения действий, который вполне оправдал себя.

В рассматриваемой книге особо выделена «десятичная» таблица умножения и деления, когда множимое (и делимое) состоят из полных десятков. У нас не принято выделять эти случаи в особый раздел и нет оснований для пересмотра этого вопроса.

В разделе, посвященном геометрическим понятиям, наряду с интересными положениями (о чем писалось выше), мы находим материал, не представляющий ценности. Это преимущественно длинные выдержки из работы Артю-Переле, особенно в той части, которая касается «эстетики» геометрии. Те «поэтические» характеристики «прямой» и «кривой» линий, которые приводятся в книге, кажутся очень надуманными и совершенно непригодными в условиях обучения в начальных классах (о прямой линии, например, говорится следующее: «Быстрая и свободная мчится к своей цели, как острый и уверенный порыв» и т. п.).

Эти неудачные места книги резко отличаются от всего остального изложения, проникнутого тонким знанием школы и психологии детей.

Необходимо коснуться, далее, некоторых психологических понятий, которыми пользуется Л. Еленьска и правильная трактовка которых имеет существенное значение для практики обучения.

В системе методических взглядов Л. Еленьской в общем правильно решается проблема мышления и навыка. Автор, придавая очень большое значение активной мысли учащихся в процессе усвоения арифметики, в то же время правильно оценивает роль автоматизированных навыков, отмечая, что в математических упражнениях определенное место должна занимать «механическая» работа. Эти правильные установки определяют и построение книги, которая расчленяется на три крупных раздела: «Ясные основные понятия», «Прочные навыки в действиях», «Формирование математического мышления».

Вместе с тем, производя расчленение содержания книги на эти разделы, автор показывает их тесную связь друг с другом, и в каждом из них по существу идет речь и о процессах мышления и об автоматизированных навыках. При этом Л. Еленьска часто предостерегает учителя, чтобы он не спешил с автоматизацией.

Практически было бы очень важно знать, как, в какой форме должен быть усвоен учеником тот или иной программный материал, и если должен быть образован навык, то надо определить, до какой степени автоматизированности он должен быть доведен В связи с этим представляет интерес попытка Л Еленьской установить различную степень развития навыка и выдвинуть наряду с ним «усвоение на память», относя сюда же случаи, когда учащийся прямо называет результат, не прибегая к каким-либо промежуточным приемам вычисления.

Автор, далее, это практически использует, перечисляя, какими действиями должны овладеть учащиеся «на память»: сложение и вычитание однозначных чисел, таблица умножения и т. п. Нельзя, однако, признать удачной ту терминологию, какую использует автор. Выделяя в качестве особого случая «усвоение на память», Л Еленьска тем самым отрицает участие памяти в процессах образования навыка, что, конечно, неправильно. В то же время, как хорошо известно, любой навык может выполняться разными способами: с помощью ряда промежуточных приемов и без них, когда ученик сразу от восприятия условия переходит к называнию конечного результата («5×6» — «30» и т. п).

Нет оснований относить такого рода случаи в какую-то особую категорию явлений Надо иметь в виду, что различные способы осуществления навыка очень тесно связаны между собой, и если ученик забыл результат (например, при назывании таблицы умножения), он имеет полную возможность к нему прийти другим путем, опираясь на знание ближайших табличных результатов или заменяя умножение сложением равных слагаемых. (Л. Еленьская учитывает эти факты, но не делает из них правильного вывода.)

Читая книгу Л. Еленьской, нужно иметь в виду, что применяемая ею терминология носит весьма условный характер, но следует использовать то рациональное, что стоит за этими терминами, а именно положение, согласно которому образованный навык может выполняться разными способами, и необходимо заранее определить, какую форму усвоения мы должны требовать от учащихся по отношению к разному программному материалу.

Выход в свет на русском языке книги Людвики Еленьской, несомненно, обогатит нашу методическую литературу по математике. Хотя книга освещает работу только первых трех классов школы, она может быть воспринята с интересом учителями и более старших классов, поскольку в ней по-новому ставятся многие принципиальные вопросы методики обучения арифметики.

Член-корреспондент АПН РСФСР,
профессор *Н. А. Менчинская*

23 ноября 1959 г.

ВВЕДЕНИЕ

Трудности в обучении математике

Скажем сразу, что трудности в обучении математике не имеют математической природы. На чем же они основаны?

В обучении какому-либо предмету мы стремимся проникнуть в чье-то сознание. Метод же подхода, «проникновения» может быть двоякого рода:

1) стараемся дать **готовые знания,**

2) стараемся **помочь в приобретении знаний.**

И в одном и в другом случае знания (чтобы они стали действительным достоянием учащегося) должны быть усвоены, что по сути дела всегда требует *активной работы учащегося* — понимания, мысленного схватывания. Однако возможность вызвать работу мысли в двух указанных методах совершенно различна.

В первом случае, когда даются готовые знания, в форме ли готовых сведений или в виде объяснений, можно эти знания дать только через изложение. При этом, если речь идет об объяснениях, то, пользуясь определениями, логическими делениями, доказательствами, *идем путем логических рассуждений.*

Чтобы мысли, содержащиеся в нашем сознании, для которых слова являются только внешним выражением, мог кто-то другой сделать собственными, он должен возбудить их в своем сознании. Это вполне возможно, если наши слушатели наравне с нами или по крайней мере подобно нам чувствуют силу логических связей, т. е. если их сознание является зрелым.

Следовательно, путь работы мысли на высшем уровне обучения лежит в направлении от *чьих-то мыслей к собственным мыслям.*

Если, однако, имеем дело с сознанием незрелым, то, несомненно, первый подход не будет удачным, учитывая, что вся сила наших логических доказательств заключается в *последовательности умозаключений,* делаемых на основе определенных логических посылок. Единственно, что можно в объяснении сделать,— это постараться рельефнее выделить образование соответствующих умозаключений; однако своими словами мы не сможем перебросить в головы слушателей внутреннюю связь наших мыслей; эта связь должна возникнуть в их сознании на основе способности к умозаключениям, требовать которой от детей мы не можем.

Поэтому в элементарном обучении напрашивается метод работы, указанный во втором случае, как помочь в **приобретении знаний.**

И во втором подходе, очевидно, основным является понимание, мысленное схватывание, которое только и определяет усвоение знаний учащимися. Но к этому пониманию, к новому понятию мы ведем иным путем, именно: исходим от вещи, а не от чьей-то мысли. На этом основано существо принципа наглядности. На основе конкретных данных, т. е. вещей, у учащегося должны родиться мысли, которых путем абстрактных рассуждений дать ему нельзя.

Таким образом, характеристическим признаком работы на высшем уровне обучения будет: *от мысли — к мысли,* а на элементарном уровне: *от вещи, от конкретного — к мысли.*

Этого пути обучения изменить невозможно, поскольку он зависит от естественного развития интеллекта, а не от нашей воли.

Если теперь в свете изложенных выше разъяснений посмотрим на обучение математике, то должны будем признать, что трудности, которые встречает учащийся в понимании новых вещей на основе рассуждений, являются трудностями логическими. Именно то, чем математики гордятся: строгость определений, правильность доказательств — вся эта «логичность» математики является трудностью в ее школьном обучении.

В первые годы обучения, которые мы имеем в виду, нужно целиком исключить передачу готовых математических знаний, а все обучение обосновывать на принципе наглядности.

Основные наставления в обучении математике

Отыскание причины трудности в обучении математике привело нас к установлению метода, которого следует придерживаться на низшем уровне обучения: нужно стремиться к тому, чтобы ребенок приобретал математические знания путем самостоятельных исканий.

Этими поисками, однако, мы должны руководить, а следовательно, необходимо создать определенные установки в своей работе.

Главная цель обучения арифметике и геометрии в начальной школе состоит в том, чтобы привести ребенка к овладению навыками выполнения арифметических действий и геометрических расчетов, а также к приобретению умений применять эти действия и расчеты к задачам практической жизни.

Этой цели невозможно достигнуть без развития математического мышления и овладения ясными понятиями, а также без работы памяти.

Память и заучивание на память в обучении арифметике играет свою определенную положительную роль. Если, с одной стороны, мы обязаны требовать от учащихся работы мышления, притом работы интенсивной, напряженной, то, с другой стороны, мы должны соблюдать принцип экономии мышления, который можно осуществить благодаря памяти. Конкретный пример: как мы могли бы целиком отдаться решению задачи с применением дробей, если бы не помнили техники выполнения действий над дробями? Как трудно мыслить одновременно об одном и другом!

Таким образом, в математических задачах и упражнениях определенное место должна занимать «механическая» работа, следует только четко установить ее время и объем.

Не следует, однако, переоценивать роли памяти. Нельзя, например, возразить против того, что арифметическим материалом I класса дети легче могут овладеть на память, чем сознательно. Дети сравнительно быстро овладевают этим материалом на память, если применять разнообразные формы урока. Но арифметика имеет характер исключительно непрерывный, можно сказать, цепной, она расширяется взаимно находящими друг на друга волнами; выпадение одного звена разбивает целое. Не может быть и речи, чтобы все эти звенья усвоить на память! Можем, не понимая сложения, а потому и метода выполнения действия, заучить, что $5 + 7 = 12$, но не ответим по памяти, сколько будет $27 + 35$; это упражнение уже должны решить, и решим тем быстрее, чем лучше усвоим метод выполнения действия.

Цепь математических знаний не может быть цепью, усвоенной на память; этой цепью можно овладеть только сознательно: одна истина, прочно, глубоко осознанная составляет основу для следующей; одна проблема, действительно осмысленная, служит базой к решению других.

Если, следовательно, учащийся I класса не приобретет ясных основных понятий, то уже во II классе встретится с трудностями и будет признан за «тупицу в арифметике» — несправедливейшее явление на свете.

Поэтому-то, имея возможность быстро и легко научить детей вычислениям на память в пределах двух десятков, мы не должны злоупотреблять и становиться на этот путь, как путь *малопригодный в педагогической практике*.

Таким образом, начиная уже с I класса, дети *собственным усилием* мысли должны *приобретать* математические знания. Под руководством учителя они должны приобрести:

1) ясные основные понятия;
2) прочные навыки в действиях;
3) умение математически мыслить.

ЯСНЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под основными понятиями следует понимать:

1) само **содержание понятий:** что́ является предметом данной науки;

2) **методы:** как нужно в данной науке поступать.

Поэтому последовательно рассмотрим *фундаментальные истины,* которыми овладевают дети в арифметике начальных классов, а также разберем весьма важные вопросы *метода работы.*

I КЛАСС

Основные понятия:

1. Число.
2. Символ-цифра.
3. Действие и формула (при изучении чисел первого десятка).
4. Десятичная система.
5. Метод сложения и вычитания с переходом через десятичный порог [1].

1. Число

Понятием числа ребенок овладевает постепенно.

Согласно данным экспериментальной психологии, ребенок в возрасте около двух лет владеет понятием *«один*

---

[1] Меры длины, денег и времени не являются основными понятиями: замечания о них читатель найдет на стр. 57.

и еще один», но не *«два»*; трехлетний же ребенок уже имеет понятия числа *«два»* и числа *«три»*.

Однако можно быть уверенным, что ребенок, поступающий в школу, не имеет достаточно ясного понятия числа; поэтому он должен приобрести это понятие в школе.

Чтобы можно было руководить работой ребенка, нужно самому учителю хорошо отдавать себе отчет в следующем:

1) какое понятие числа должно возникнуть в сознании ребенка;

2) каким путем он должен это понятие приобрести.

Не лишним будет вспомнить, что понятие числа относится к понятиям весьма абстрактным. Ведь само по себе число ни в какой вещи не содержится: не существует ведь трех столов, на которые смотрим, есть только стол, стол и стол, и мы мысленно охватываем их как что-то единое, как три. Число это есть *unitas mentalis unitatum multiplicium* (многое, мыслимое как единое).

Этот краткий анализ достаточен, чтобы ответить на поставленные выше вопросы.

1. Понятие числа, которым следует овладеть ребенку, должно дать ему убеждение, что число обозначает *множество единиц* и в зависимости от этого множества может быть *большим* или *меньшим*.

2. Пусть же теперь учитель остановится, прежде чем читать дальше, чтобы наметить путь или метод работы для детей.

Этот путь навязывает само понятие числа. Чтобы пойти надлежащим путем, следует обратить внимание на одно обстоятельство: ребенок должен быть убежден, что число выражает множество единиц, а это возможно только тогда, когда **название** данного числа связывается, как об этом прекрасно сказал Песталоцци, *«с его* (ребенка) *внутренним сознанием реальных отношений»*; только одно это сознание может данному слову, например *семь*, придать соответствующее значение. Чтобы создать такое внутреннее сознание реальных отношений, ребенок не должен ограничиваться словесным счетом вперед и назад, ибо в таком случае он не подмечает никаких реальных отношений; наоборот, нужно, чтобы ребенок пересчитывал всегда что-то реальное — какие-либо конкретные предметы.

Можно различить четыре этапа на пути приобретения ребенком ясного понятия числа. Поступать будем следующим образом.

Этап первый. На конкретных вещах (например, фишках, табличках, рисунках) к одному предмету прибавляем последовательно по одному, каждый раз спрашивая, сколько стало. Учитель не рекомендует детям считать хором (такая работа была бы бессмысленной), а вывешивает, например, цветную табличку и предлагает одному ребенку ответить, сколько висит табличек; вешает следующую табличку, и снова другой ребенок говорит классу, сколько стало теперь табличек, и т. д. При этом отношение произнесенного числового названия к множеству предметов становится весьма выпуклым. Упражнения проводим в пределе чисел первого десятка, т. е. не переходим через десяток.

Этап второй. Предоставляем детям возможность большей самодеятельности в работе, требуя от них выделения предложенного количества предметов из всего несосчитанного множества, а также присчитывания к данному количеству предметов нового указанного количества (например, к 3 карандашам присчитать еще 2 карандаша) и подсчета всего множества.

Очевидно, если учитель знает, к чему стремится, понимает смысл этих действий (укрепление сознания реальных отношений), то легко найдет различные способы работы, чтобы не утомлять детей повторением одного и того же упражнения. Именно здесь можем применить весьма любимые детьми «рассказы на движение» и «рассказы по рисункам», что — заметим мимоходом — можно связать с общей темой, рассматриваемой на данной неделе в I классе.

Укажем коротко, какими могут быть *рассказы на движение*. Учитель начинает рассказ: «Погожее осеннее утро. Из дома вышли мальчик и девочка и направились за грибами...»

Учитель вызывает одного мальчика и одну девочку; они, как бы неся «корзинки» (корзинкой может быть платочек, коробка), идут, т. е. ходят минуту по классу... Учитель спрашивает, сколько детей идет в лес (вопрос уместен, так как количества детей учитель не называл); потом рассказывает далее, как дети пришли в лес, заметили грибы, которых было много; дети собирали грибы «вперегонки»; кто из них будет иметь больше грибов? Естественно, от искусства учителя рассказывать зависит реакция класса. Разбросанные перед этим таблички или кружки представляют грибы; дети собирают «грибы». Класс делает предположения: кто больше собрал, на сколько больше? Нужно пересчитать. Дети последовательно поднимают «грибы» один за другим вверх, класс считает: один ребенок собрал 7, другой 9 «грибов». Как проверить, который ребенок действительно имеет больше грибов? На сколько больше? Переходим к конкретному отображению множеств; сами дети найдут способ отображения: укладывают грибы парами, беря по одному из каждой корзинки.

В другой раз можно использовать рассказ о группе детей, возвращающихся из школы. Вся группа (класс) в движении. Дети идут то медленно то быстрее, осторожно переходят по мостику через речку, идут очень тихо, стараясь не потревожить птичку, или снова маршируют с песнями. От группы начинают отделяться: Юзек, Стефек, Янек... Сколько мальчиков удалилось? (Интересно сосчитать, ибо число отошедших детей не указывалось.) Весь урок может быть проведен как упражнение на движение.

Очевидно, если учитель осознает (постоянно это повторяем) смысл своих начинаний, то тем к рассказам ему будет достаточно. Дети весьма охотно сами начинают составлять рассказы. Учитель всегда найдет в рассказах возможность для счета предметов.

Рассказы по рисункам будут тем отличаться от предыдущих, что теперь учитель иллюстрирует свой рассказ рисунками на доске, вместо его инсценировки с детьми. Рисунок должен выполняться быстро, схематично и обязан содержать элементы, нужные для счета.

Примечание: никогда не следует самому учителю считать или называть количества нарисованных предметов, ибо тогда вся работа проходит бесцельно; следовательно, учитель не скажет, например, что Аля поставила 3 чашки для кукол, а скажет только, что Аля поставила чашки, и после выполнения рисунка спросит, сколько Аля поставила чашек?

Рассказы по рисункам имеют ту положительную сторону, что их можно повторить по нестертому рисунку. Такое повторение рассказов детьми является прекрасным языковым упражнением для них (в первые годы обучения невозможно и не следует разграничивать один предмет обучения от другого); это повторение имеет значение также при подготовке к математическим задачам [1].

В рассказах на движение можно также обращаться к рисунку, чтобы, например, ребенок обозначил на доске столько черточек, сколько в рассказе было деревьев, грибов и т. п.,— снова типичное отображение множеств при счете.

Почему *отображение*? — Потому что возникновение понятия числа тесно связано со *счетом*, а счет есть не что иное, как отображение множества при помощи слов: один, два, три, четыре, пять и т. д.

---

[1] См. также стр. 159.

Поэтому подготовкой к счету должно быть: а) *отображение*, б) *сравнение множеств* (на это будут опираться понятия большего и меньшего числа), в) *выделение количественных признаков* (что направит мысль ребенка на измерение).

Если мы отдаем себе отчет в том, что *подготовительные упражнения* нужны для того, чтобы ребенок при помощи своих собственных действий, выполняемых на конкретных предметах, пришел к понятию счета, а через счет — к понятию числа («от вещи к мысли»), то организация таких упражнений не представит никакой трудности. Каждый учитель без всякого труда сумеет провести эти упражнения. Посвящать много времени на них отдельно не следует, так как для проведения отображения множеств, сравнения их и выделения количественных признаков не раз еще найдется возможность в дальнейшем, как это было показано, например, при обучении счету во втором этапе. Переходим к дальнейшим этапам.

Этап третий. Определение количества предметов без предварительного подсчета их. Уже раньше мы должны были часто требовать такого определения, но здесь мы имеем в виду специальное упражнение.

Для ребенка с незрелым сознанием характерно: «Сколько кружков?»—*«Раз, два, три»*.—«Хорошо, сколько же вместе?»—*«Раз, два, три»*.

Это очень поучительный пример: ребенок считает, но не имеет понятия числа. Это нам показывает, что следует требовать, чтобы дети умели также сразу, без счета, назвать число, соответствующее данному множеству. Дети сумеют это сделать в пределе 2, 3. Если хотим, чтобы они смогли сразу различать бóльшие количества, до 10 включительно, то мы должны показывать эти количества в *определенной системе*, т. е. использовать числовые фигуры.

Значение этих фигур в обучении не столько математическое, сколько психологическое. Именно: дело идет о сохранении в течение долгого времени связи названия, а после цифры — с конкретным представлением числа. Цифра, хотя ее вводим позже, чем название числа, с течением времени и так вызовет в представлении конкретные образы (никто из нас взрослых, говоря 7, чаще всего ничего себе, кроме цифры, не представляет), но с точки зрения выработки ясного понятия числа важно, чтобы дети с самого начала — перед знакомством с цифрами — укрепили связь числового названия с конкретным представлением числа. На этом основано «сознание реальных отношений». Иначе слова (названия чисел), связанные только с цифрой, без всякого реального эквивалента, были бы чем-то навязанным памяти.

Этап четвертый[1]. Если до этого дети складывали числа, присчитывая по одному, по два, то теперь важно, чтобы они разлагали их, благодаря чему еще раз особо подчеркиваем, что число обозначает множество единиц. Например, укладываем или рисуем 6 кружков, размещенных в круге, и спрашиваем, из скольких кружков складывается круг. При использовании числовых фигур спрашиваем: «Сколько раз нужно взять по одной табличке, чтобы сложить эту большую табличку?» Предлагаем сложить разные фигуры из спичек и спрашиваем: «Из скольких спичек складывается данная фигура? Сколько раз нужно взять по одной спичке, чтобы сложить эту фигуру? На сколько отдельных спичек можно ее разложить?

И снова повторяем: если учитель сознает смысл этих действий, то легко найдет разнообразные формы их выполнения. Пусть только помнит, что ребенок собственной внутренней работой, работой своего мышления должен прийти к ясному понятию числа, что от конкретных действий он должен прийти к «вылущению» понятия; учитель же ничего не объясняет, он только руководит рабо-

[1] Предупреждаем, что указанная последовательность этапов не исключает их взаимного проникновения; только стремясь к ясности изложения, придерживаемся этой последовательности.

той ребенка, предлагая ему конкретные действия, соответствующие намеченной цели.

Легко заметить, что в рассмотренных выше конкретных действиях имеем уже зачатки сложения, умножения и деления, которые действительно содержатся в понятии числа и, как правильно отмечал еще Песталоцци, теснее связаны с понятием числа, чем вычитание. Последнее действие послужит нам теперь для выделения понятий *большего* и *меньшего* числа.

Например: предлагаем ребенку поставить своих товарищей в две равные шеренги Как это сделать? Дети должны сами найти способ образования шеренг через отображение одной из них на другую. В шеренгах не должно быть больше, чем по 10 детей Считаем одну шеренгу и другую, получаем: *одинаково — равно*. (Мы не случайно употребили сопоставление слов *одинаково — равно*, хотя это и нестрого, ибо из опыта знаем, что дети употребляют слова *одинаково, одинаковые* вместо *равно, равные*, а если об этом учитель не знает, то могут произойти недоразумения.) Теперь вопрос: как сделать, чтобы уменьшить одну шеренгу? Что сделать, чтобы шеренги снова были равными? Здесь ярко оттеняется тот факт, что прибавление и вычитание единиц увеличивает или уменьшает число.

Понятие числа, само содержащееся в понятии счета, является фундаментом для уяснения всех действий: последние из него вытекают естественным путем. При хорошем руководстве работой ребенок приобретает одновременно понятия **числа**, **счета**, **действия** над числами. Новым и трудным будет позже понятие **формулы** как символа действия, а перед этим — **цифры** как символа числа.

Все описанные выше работы, все действия, увеличение, уменьшение — все, о чем говорили до сих пор, применяем в пределе *первого десятка* еще до введения цифр.

Это не отнимет много времени, так как дело не идет еще о приобретении навыка, а тем более об устном запоминании результатов действий. Задача заключается единственно в том, чтобы дети приобрели ясное понятие числа.

2. Символ-цифра

Вторым фундаментальным понятием, которым дети должны овладеть в I классе, является понятие цифры.

Чем является цифра? Цифра является условным (конвенциональным) знаком, принятым для обозначения чисел, т. е. символом. Уже сам этот ответ указывает на трудность усвоения понятия цифры. Чтобы ребенок мог прийти к понятию цифр как символа, следует прежде всего, чтобы учитель эти два слова: *число — цифра* — употреблял в собственном значении. Если учитель говорит: «Покажи мне число 5»,— и ребенок, естественно, показывает цифру, то трудно достигнуть понимания детьми различия этих понятий. Поэтому точность выражений в этом случае не будет педантизмом. Распоряжение учителя должно звучать иначе.

Учительница показывает два карандаша и спрашивает: «Сколько карандашей держу в руке?» Получив ответ, учительница пишет слово *два* на доске и говорит: «Записываю это число буквами. Пойди прочитай. Кто сумеет записать это самое число цифрой? Иди запиши». С помощью такого рода точных распоряжений в сознании ребенка удержится различие между *числом* и *цифрой* (этим различием ребенок владеет, ибо с числом он знакомится раньше, чем с цифрой), и понятие цифры свяжется с написанием, с обозначением. Как же ребенок приобретет ясное понятие цифры, если учительница требует, чтобы он показал ей, которая цифра больше: 5 или 7 (буквально), или чтобы показал четные цифры? [1]

---

[1] Только числа могут быть четными и нечетными. Правильно скажем: «Покажи те цифры, которые обозначают четные числа». «Укажи, какая из написанных цифр обозначает наибольшее число».

Ясное понятие цифры явится основой для понимания формулы, т. е. записи действий.

3. Действие и формула

(при изучении чисел первого десятка)

Когда дети усвоят числа первого десятка с помощью счета, когда проведем их через все перечисленные этапы пути, приводящего к созданию ясного понятия числа, следует перейти к дальнейшему *изучению чисел первого десятка* и выработке числовых связей на память.

Опираясь на собственный долголетний опыт, мы советовали бы, в особенности молодым учителям, при изучении чисел придерживаться монографического способа.

Под монографией чисел понимаем трактовку каждого числа в пределе первого десятка как отдельной, так сказать, индивидуальности. Разве каждое число не имеет своей собственной особенности? Как «гибко», податливо во всех действиях, как богато связями, например, число 6, и как «жестко», мало податливо для манипуляций, например, число 7!

Монографическое изучение чисел полезно в следующих отношениях:

1. Одновременно с изучением действий закрепляем написание цифр.

2. Имеем уверенность, что никакая группировка слагаемых числа не будет пропущена.

3. Предоставляем менее способным детям возможность обстоятельного усвоения материала. (Для более способных детей всегда можно найти дополнительные упражнения и задачи.)

4. Доставляем детям радость, которую они ощущают, когда убеждаются, чему они уже научились, переходя от изучения одного числа к другому.

Если изучаем числа в натуральной последовательности (очевидно, после предварительного ознакомления детей с ними при счете), то свойства каждого числа выступают в действиях. Числа приобретают «выразительность» и завоевывают симпатии детей. Как такое *монографическое изучение* может выглядеть?

Допустим, что доходим до числа 6. Начинаем с выяснения учащимися этого числа; следовательно, считаем конкретные предметы до шести, подыскиваем 6 одинаковых предметов в классе, рисуем 6 кубиков, припоминаем числовую фигуру шестерки (с числовыми фигурами дети знакомятся еще до прохождения цифр — при приобретении понятия числа с помощью присчитывания и отсчитывания в пределе десятка), вспоминаем ритм фигуры (в пятиричной системе числовые фигуры имеют графический и акустический ритм), наконец, знакомимся с цифрой 6. Наступает анализ вида цифры, ее написание.

Выполняем упражнения на сложение в пределе 6; записываем их в виде формул. Упражняемся на конкретных предметах в разложении на слагаемые: раздаем, например, по 6 цветных квадратиков, которые каждый ребенок раскладывает перед собой по правую и левую руку (разложение на два слагаемых). Дети читают, как разложили; каждый новый способ разложения записывают на доске как сложение: $3 + 3 = 6$; $5 + 1 = 6$; $1 + 5 = 6$; $2 + 4 = 6$. Разлагаем далее шестерку на три слагаемых, а позже «на сколько удается». Все время встает вопрос: как данное разложение записать на доске? Выполняем упражнения из учебника. Переходим к вычитанию, которое всегда должно выступать после разложения числа на слагаемые.

Пробуем выполнять упражнения на числах без конкретизации: «Из скольких единиц складывается 6? Из скольких двоек? Из скольких троек? Сколько раз надо взять по 2, чтобы было 6? Сколько раз взять по 3? Какие числа являются ближайшими к шестерке? На сколько пар можно разложить 6? и т. д. Все эти упражнения, в случае надобности, нужно проделать на конкретных предметах; но если понятие числа уже приобретено (а оно должно быть приобретено при первом изучении целого десятка с помощью счета), то вопросы, поставленные выше, разрешаются детьми без труда, а интерес, вызываемый при этом, является доказательством развития их математического мышления.

Материалы к монографическому изучению чисел даем здесь без поурочного распределения, так как последнее будет зависеть от конкретного класса.

Достаточно ли такого изучения шестерки для приобретения детьми навыка в выполнении действий в пределе шести? Несмотря на то, что шестерка является одним из простейших чисел, все же для большинства детей монографическое ее изучение недостаточно для приобретения навыка; но так как изученное число встречаем все время в последующих упражнениях, то именно окончание монографического изучения числа служит началом устных вычислений, о чем будет идти речь во втором разделе — «Прочные навыки в действиях».

Когда вводим *формулы* действий?

Приводя пример монографического изучения числа 6, мы говорили о записи сложения и вычитания, для чего цифры: 1, 2, 3 и даже 4 и 5 — следует ввести перед формулой действий, так как формул без цифр не пишем, т. е. понятие цифры должно быть приобретено перед записью действий. Вспомним, что обозначения в математике — те, которые употребляем сейчас,— приобретены путем тяжелого труда многих поколений. Можем, следовательно, отдать себе отчет в том, что математические символы *плюс, минус, знак равенства* и их графическое расположение должны быть предметом заботливой отработки.

Остановимся сначала на том, какие знания дети должны получить (с этого всегда надо начинать), к к а к о м у п о н я т и ю хотим их подвести.

Заметим, что уже при изучении счета в пределе первого десятка дети складывали, умножали, делили, вычитали, совсем об этом не зная. Теперь они должны уяснить эти действия и убедиться в том, что в арифметике все, что делается, что считается, что выражается словами, *можно записать специальными знаками.*

Коль скоро мы установили, что дети должны получить, то нам легко будет руководить их работой, привлекая на помощь соответствующую конкретизацию.

Математическая формула при начальном обучении является символом действия, которое может быть выражено словами или записано знаками. Основой, таким образом, является *действие,* которое должно быть понято; мысленное восприятие действия должно быть переведено в слова, а слова — в математические символы.

Действие — слово — математический символ — таким является естественный ход мысли, таким должен быть метод работы ребенка. Отсюда вытекают указания для учителя:

1. Каждое действие должно быть выражено конкретно — движением, как наиболее отчетливым проявлением действия.

2. Выполненное действие должно быть выражено словами.

3. После словесного выражения действие должно быть записано формулой.

На этом будут основаны сложение, вычитание, умножение, деление «на столько» и деление «по стольку», а также употребление скобок, т. е. различные формулы на первой ступени обучения.

Если рассматривается *сложение,* то учитель выделяет действие дополняющим движением. Спрошенный ребенок скажет, чтó было выполнено, например: «Вы имели две таблички и присоединили (прибавили, приложили, придвинули — зависит от того, какое слово ребенок употребит самопроизвольно) еще 1 табличку».—

«Сколько получу вместе?» — «Вместе вы получите 3». Подобные упражнения выполняют отдельные дети, объясняя затем словами, ч т о делали.

Учитель ставит вопрос: «*Как это записать*? Дети выходят к доске и записывают действие так, как думают. Чтобы проверить, правильно ли сделана запись, соответствует ли символ действию и слову, надо обратиться к прочтению и выполнению записи. Например, запись ребенка **2 1 3** является вполне осмысленной и будет весьма полезной учителю, так как послужит ему для выделения того факта, что каждый знак что-то выражает. Предлагаем ребенку прочитать эту запись; если он прочитает: «два и один есть три», то обращаем внимание, что то, что он говорит, не записано, что должен быть знак, который бы указывал, что два и один соединены и вместе дают 3.

Дети предлагают различные способы обозначения. Найдут соответствующие знаки — хорошо, не найдут — тоже хорошо, ибо существо дела не в нахождении обозначения, а в выделении того факта, что з н а к д о л ж е н б ы т ь, так как должен отвечать словам, которыми выразили действие. Поэтому не следует затягивать поиски, чтобы не вызвать скуку, не утомить внимания детей; если после двух-трех проб дети не найдут нужного знака, то учитель, подтверждая необходимость знака действия (это дети понимают), говорит, что такой знак люди придумали, и изображает на доске, как он выглядит. Таким путем возникает формула: $2 + 1 = 3$. Учитель снова сам читает формулу, затем ее читают отдельные дети, всегда *показывая указкой* соответствующий знак при произнесении слов.

Чтение формулы может быть для маленьких детей трудным с языковой точки зрения; лучше всего, чтобы избежать изменения числительных по падежам, употреблять форму выражения: **«Взять 2, прибавить 1 — будет 3».** Именно в этой форме, чтобы дети прислушивались, пусть учитель обращается к детям еще перед записью действия, когда дети иллюстрируют действия с употреблением фишек.

Момент *показывания указкой* является очень важным, ибо закрепляет связь слов с математическим символом.

Также важным моментом является *отображение формулы движением.* Существо дела здесь состоит в укреплении связи между символом и конкретным действием. Каким путем учитель осуществит такую связь, будет зависеть от его сообразительности; если учитель знает, к чему стремится, приемы осуществления этой связи легко найдет.

Например, можно проделать такое «молчаливое» упражнение: предложить ребенку, не читая формулы, выполнить с помощью фишек то, что написано на доске. Дети удостоверяются, выполнено ли именно то, что требовалось.

Здесь можно использовать желание детей самостоятельно составлять формулы: ребенок диктует классу сложение без слов, пользуясь фишками; все дети в это время записывают действие в тетрадях, а после чтения записи помещают ее на доске.

Мы умышленно задержались дольше на описании введения формулы сложения, ибо основная идея — соединение действия, слова и математического символа — должна быть соблюдена при введении всех остальных действий.

При введении *вычитания* учитель показывает 3 таблички, затем движением вполоборота отодвигает одну табличку и спрашивает, что сделал. В дальнейшем поступает так, как при введении формулы сложения

Об упражнениях, предшествующих вычитанию, говорится на страницах 130 и 132.

Поскольку подбор конкретизации при введении умножения может встретить трудности, отметим, что действие здесь можно лучше всего выделить вбрасыванием шариков — возможно каштанов — в стеклянный сосуд: стук при вбрасывании укажет, сколько раз вбрасывали, а по скольку бросали каждый раз — показываем детям перед вбрасыванием. На вопрос: «Что сделал?» — учитель должен получить ответ, что вбрасывал в сосуд шарики и вбросил **3 раза по 2 шарика.** Сколько всего вбросил учитель шариков — видно, ибо сосуд прозрачный, можно сосчитать.

(Начинаем с умножения $3 \cdot 2$, ибо умножение $2 \cdot 2$, не отличаясь от сложения $2 + 2$, не дает ясного понятия новой формулы.)

Возникает вопрос, как это действие записать. Если ребенок запишет 2 2 2, то обращаем внимание класса на то, что вбрасывали одни шарики к другим. Вызванный учащийся из тех, которые согласились, исправляет запись: $2 + 2 + 2$ и подсчитывает: будет 6. Учитель предлагает прочитать запись, и дети убеждаются, что она не соответствует тому, что сказали: «Вы вбросили три раза по 2 шарика». Теперь учитель вводит знак, который читается: *«раза по»* и пишет $3 \cdot 2 = 6$ (множитель на первом месте) [1].

Отдельные дети несколько раз прочитывают действие, указывая при этом каждый знак.

Далее учитель пишет: $2 + 2 + 2 + 2$, предлагает детям сосчитать и дописать результат сложения; затем ставит перед классом вопрос: «Как записать это сложение, чтобы сразу было видно, сколько раз повторена двойка?» Получив запись $4 \cdot 2 = 8$, учитель переходит к другому множимому: $3 + 3 + 3 + 3$. «Сколько раз здесь повторяется тройка? Как это записать?» Если запись удачна, пусть дети подсчитают результат сложения, а потом запишут результат при умножении. После этого читаем запись действия.

---

[1] Предупреждение для учителя, чтобы помнил, что множитель пишется на первом месте. Детям в данном классе наименований компонентов давать не следует.

Таким образом создаем у детей зрительные и словесные связи при чтении формул. Нужно стараться также развивать слуховые связи. Учитель выстукивает (не очень громко) ритмично $3 \cdot 2$; затем спрашивает: «Кто запишет?» Пусть сами дети составляют такие упражнения на выстукивание или на хлопки (очевидно, не вместе) и записывают. Нужно соблюдать ритм в хлопках, чтобы не смешивать умножения со сложением.

На этом уроке дети должны осознать, что повторяются одинаковые слагаемые, узнать запись, уметь ее употреблять и читать. На другом уроке переходим к картинкам и упражнениям по учебнику.

Об изучении таблички умножения в следующих классах говорим на страницах 126, 127, 128.

О работе с табличкой деления смотри замечания на страницах 132 и 13.

4. Десятичная система и действия, связанные с нумерацией

Важным, наконец, основным понятием, которым должны овладеть дети уже в I классе (хотя и не в полном объеме), является понятие **десятичной системы.**

Надо, следовательно, весьма *выразительно выделить десяток как основную группу.* Это выделение следует понимать прежде всего как специальный вопрос заботливого изучения, которое вместе с тем сделает понятной нашу систему счисления.

Когда позднее ребенок перейдет ко второму, третьему и последующим десяткам, то самостоятельно приобретет понятие повторяющегося десятка, упорядочивающего счет. Это понятие не равнозначно с понятием десятичной системы, но является, безусловно, основой этой системы. Именно поэтому нужно его углубить с помощью соответствующей конкретизации.

Что хотим оттенить? Очевидно, главную идею десятичной системы: каждая единица высшего разряда содержит 10 единиц низшего разряда, т. е. 10 единиц низшего разряда равнозначны одной единственной единице высшего разряда. Именно это можем показать на конкретных предметах. Например: 10 одинаковых палочек связываем в пучок [1] — десяток, при этом отдельно остаются свободные палочки — единицы; десять таких палочек и пучок — одно и то же. Другой пример: вводим, помимо 10 красных кружков, один синий, бóльший и устанавливаем, что значение синего кружка равно 10 красным. Упражнения, которые проводим на этих конкретных предметах, выделят основную идею еще лучше в то время, когда перейдем в конце года к счету в пределе 100. В это время дети почувствуют гениальное упрощение, которое вносит с собой десятичная система, когда вместо того чтобы тягостно считать по одному до сотни (что, очевидно, дети должны выполнять, и не раз), они могут взять 10 десятков — и значение будет то же самое.

Действия, связанные с нумерацией, дети должны познать уже в пределе 20.

При действиях, относящихся к нумерации, когда дело идет о простом прибавлении к десяти и отбрасывании единиц, находящихся при десяти, т. е. $10 + 6$, $16 - 6$, наилучшей конкретизацией, которая сразу оттеняет работу, являются две таблички. На одной табличке выделяем 10, на другой — единицы, например 6. Показываем табличку ; дети убеждаются, что это 10. Присоединяем с левой стороны табличку с шестью единицами .

[1] Способ связывания пучка: палочки надо держать в левой руке и обвить несколько раз шнуром, а конец шнура заложить между палочками. Завязывать шнурок не следует.

«Сколько стало вместе?» Заменяем табличку с единицами, прибавляя одну, две, пять единиц; дети читают результаты (не хором).

При вычитании показываем две таблички с десяткой и семеркой, расположенные рядом одна вдоль другой, и даем распоряжение: «От 17 — 7. Как это сделать? Иди, покажи». Ребенок отбросит семерку, останется 10. После выполнения нескольких упражнений на табличках, пробуем решать примеры устно, что не представит никакой трудности; наконец, выполняем упражнения из учебника. Если этими действиями дети овладеют в пределе 20, то не встретят трудностей в их выполнении в расширенном объеме чисел до 100. Расширение чисел до сотни начинаем со счета **полными десятками.**

А именно: отсчитываем 10 палочек и связываем их в десяток, потом снова отсчитываем 10 палочек и связываем в десяток и т. д. Считая полные десятки, знакомимся с числами 20, 30, 40 и т. д. до 100. На этом этапе выполняются также сложение и вычитание полных десятков.

Указанное расширение чисел можно осуществить также на синих, бóльших кружках, если дети помнят, что каждый такой кружок обозначает 10.

Пользуясь пучками или кружками, вводим соответствующие записи; например, 3 больших синих кружка и 7 красных дают 37. На этом этапе еще не выясняем зависимости числа от местоположения цифры, но дети должны показать, какая цифра в полученной сумме обозначает количество синих кружков и какая — количество красных кружков.

5. Метод сложения и вычитания с переходом десятичного порога

В самом начале мы отмечали, что к основным понятиям причисляем также понятие метода работы.

Уже в I классе в работе имеют место моменты, которые требуют знакомства, более того — *сознательного* *пользования методом.* Очевидно, здесь мы имеем в виду сознательное употребление метода детьми.

Такими переломными моментами в усвоении метода работы, имеющими особое педагогическое значение, являются:

1) переход десятичного порога при сложении,

2) переход десятичного порога при вычитании,

3) прибавление чисел в пределе второго десятка.

Ребенок должен знать, как выполняется действие; но, согласно нашему принципу, метод работы он обязан приобрести самостоятельно. Не начинаем, следовательно, с объяснения, а даем такое направление работе на конкретных предметах, чтобы понятие метода само создалось в сознании ребенка.

Очевидно, существом всей работы при сложении с переходом десятичного порога является дополнение до десятка[1]. Если к 7 надо прибавить 5, то нужно 7 дополнить до 10 и присчитать излишек, т. е. сложение будет выглядеть так: $(7+3)+2$.

Чтобы подсказать детям этот метод сложения, нужно использовать соответствующую конкретизацию; например: в одном ряду укладываем 7 палочек, под ними в другом ряду — 5 палочек. Что сделать, чтобы прибавить? Нужно придвинуть. Но сколько? Все ли палочки сразу? При такой конкретизации мы советовали бы опереться на диктант: «Придвинь 3. Сколько стало в верхнем ряду? Придвинь то, что осталось. Сколько стало теперь?» Если дети под нашу диктовку выполнят целую серию упражнений, то «войдут в работу».

Лучше, однако, использовать другую конкретизацию, ярче выясняющую метод, а именно: перед каждым ребенком кладем вдоль две картонные таблички с обозначенными десятью пустыми местами в виде кружков, а также фишки. Чтобы выполнить сложение $7+5$, предлагаем

[1] Говорим об этом подробнее на стр. 132 и 133.

7 фишек уложить сразу на пустые места первой таблички, а 5 фишек (другое слагаемое) положить снизу. Теперь, когда дети будут складывать, то силой обстоятельств *дополнят* первую табличку и излишек уложат на другой табличке. Таким путем дети усваивают метод сложения с переходом десятичного порога и одновременно вторгаются в другой десяток, что им в будущем также пригодится.

Если используются числовые фигуры, то переход десятичного порога при этом выступает также отчетливо.

С чего начать работу над сложением с переходом десятичного порога? *С каких слагаемых надо начинать переход порога?*

Принцип. Порог тем легче перейти, чем меньше надо дополнять до 10; следовательно, сложение $9 + 2$ легче, чем $8 + 3$ и тем самым гораздо легче, чем $4 + 7$. Таким образом, сложение надо начинать *«от наинизшего порога»*. Примеры на вычисление нужно сопоставлять так, чтобы выявлялся метод:

$9 + 1 + 1$	$8 + 2 + 1$	
$9 + 2$	$8 + 3$	и т. д.

Замечание. Прежде чем дети будут выражать словами то, что делают, они должны сначала с *полной свободой делать так, как нужно*. Когда уже способ выполнения действия будет усвоен, пусть объяснят, как делали. Далее заметим и запомним: приобретенный детьми метод не есть предписание, как делать, а является отчетом о том, как сделано.

Очевидно, словесное объяснение должно быть свободным описанием собственного действия. Вполне, следовательно, будет достаточно, если ребенок скажет: «Добавляю к 7 сначала 3 квадратика — получу полную табличку, или 10, а потом на другую табличку укладываю еще 2 квадратика».

Такой словесный отчет в своем действии является прекрасным языковым и интеллектуальным упражнением. К этому дети должны быть приучены уже с I класса начальной школы, так как и в средней школе учащиеся испытывают затруднения, когда им надо объяснить выполненное упражнение или отчитаться в исполненном поручении. Такие отчеты имеют также воспитательную ценность, так как приучают к точности выражений и прививают чувство ответственности за свои поступки.

Когда дети уже не будут испытывать потребности в конкретизации вычислений при переходе десятичного порога, следует время от времени при устных упражнениях с переходом этого порога спрашивать, как они производили вычисление.

Вычитание с переходом десятичного порога (например, 14—5) опирается на то, что отбрасываем единицы, имеющиеся при десятке, а потом отнимаем от 10 оставшиеся единицы, т. е. (14 — 4) — 1. Конкретизация та же, что и при сложении, только иначе применяемая. Если употребляем палочки, то десяток должен быть связан, рядом с ним располагаются 4 свободные палочки; когда предложим от 14 отнять 5, то ребенок должен отбросить 4 палочки и развязать пучок, чтобы отнять 1 (нельзя вытягивать палочки из пучка). Манипуляция с палочками является, однако, довольно длительной. Если используем таблички, то работа протекает быстрее: на двух табличках (одна рядом с другой) уложено 14 фишек; чтобы отнять 5, ребенок сбрасывает с другой таблички 4, далее отнимает 1 с конца первой таблички.

О последовательности упражнений при вычитании с переходом десятичного порога скажем то же самое, что и о соответствующей последовательности при сложении: следует начинать *«от наинизшего порога»*, а это значит, что чем меньше надо отнять при переходе десятичного порога, тем вычитание будет легче. Следовательно, вычитания 11 — 2, 12 — 5 легче, чем 11 — 9 или 12 — 7.

Примеры на вычитание располагаем так, чтобы выявился метод:

12 — 2 — 1, 12 — 3; 11 — 1 — 1, 11 — 2.

Остается еще проблема *прибавления чисел, заключенных во втором десятке.*

Об этом вопросе следует помнить. Например: 4 + 13. Метод может быть тот же, что и при переходе десятичного порога: (4 + 6) + 7; выполнение на табличках сразу выделит этот метод. Однако, по нашему мнению, если дети пробуют складывать иначе и придут к перестановке слагаемых: вместо 4 + 13 вычислят 13 + 4, то следует позволить им это делать. Это явится даже доказательством определенного развития математического мышления: дети сознательно ищут метод.

II КЛАСС

На первый план выступают следующие новые понятия:

1. Деление «по столько» и «на столько».
2. Позиционная система.
3. Меры длины, денег, времени.
4. Метод сложения и вычитания двузначных чисел.
5. Метод умножения двузначного числа на однозначное.

1. Деление «по столько» и «на столько»

В I классе дети приобретают понятия сложения, вычитания и умножения, благодаря чему осваивают арифметическое действие, выраженное формулой. Во II классе в этом отношении работа облегчается, так как речь идет только о введении одного нового действия. Трудность, однако, кроется в самом характере этого действия, которое применяется к двум типам задач: **деление «по столько»**, т. е. взятие в равных количествах (деление по содержанию), и **деление «на столько»**, т. е. разложение на данное число равных частей (деление на равные части).

Прежде всего сам учитель должен хорошо осознать различие этих понятий и важность их разграничения, чтобы суметь направить ребенка по надлежащему пути овладения ими.

Лучше всего выделяется различие между делением «по столько» и деление «на столько», если делимое будет неизвестным; например, $x:3$. Что это может означать?

Вот краткое рассуждение для учителя.

Допустим, что x обозначает горсть конфет. Что может обозначать делитель 3? Он может обозначать, что мы должны давать детям по *три* конфеты, но также может обозначать, что следует раздать конфеты *трем* детям поровну.

Различие огромное — прежде всего различие жизненное, ибо беря задачу в первом значении, знаем наперед, что каждое дитя получит *три* конфеты, однако не знаем, на *скольких* детей хватит конфет; наоборот, принимая задачу в другом значении, знаем, что *трое* детей получат конфеты, т. е. всю горсть конфет разделим на три части, однако, не знаем, *по сколько* конфет получит каждый ребенок в этом случае. Разница большая как для нас, делящих конфеты, так и для детей, получающих подарок.

Но и в самом р е ш е н и и данной задачи различие будет большим. В первом случае знаем, как выполнить решение задачи; именно: раздаем по три конфеты до тех пор, пока не раздадим все конфеты.

Но как поступить во втором случае? В этом случае всем трем детям будем давать каждый раз по одной конфете: тебе одна, тебе одна, тебе одна.

Допустим теперь, что конфет в горсти было 15; тогда в первом случае, беря по 3 конфеты, мы могли бы одарить 5 детей; во втором же случае, раздавая конфеты 3 детям, мы смогли бы дать каждому из них 5 конфет. Таким образом, запись $15:3=5$ может быть символом весьма различного жизненного содержания.

Из разобранного примера сразу видно, что решение задачи проще, когда знаем, *по сколько* черпать; поэтому начинаем с детьми изучение деления по содержанию, т. е. деления *«по столько»*. Напротив, деление *«на столько»* (деление на равные части) вводим значительно позже. Задачи на деление в первом и втором смысле — каждую в свое время — вводим на основе конкретной деятельности, как и каждое ранее изученное действие.

Чтобы ввести *деление «по столько»*, кладем на стол достаточно большую горсть каштанов (чтобы дети не смогли их сосчитать) и предлагаем вызванному учащемуся разложить каштаны в кучки, по 3 каштана в каждой. Важный момент: «Сколько будет кучек?» Дети должны убедиться, что числа кучек они не знают, а знают только, *по сколько* каштанов должно быть в каждой кучке. После выполнения указанного упражнения пусть дети подсчитают, сколько получилось кучек, и пусть вычислят, сколько было каштанов до деления. Допустим, что получилось 5 кучек по 3 каштана в каждой.

Дети вычислят $5 \cdot 3$ и скажут, что вначале было 15 каштанов. Так связывается деление с умножением; вопрос этот важен, к нему мы еще вернемся.

После выполнения нескольких действий с разными количествами каштанов, причем количество каштанов неизвестно, учитель переходит к действию (всегда конкретному) с известным количеством каштанов; например, говорит учащемуся: «Положил 15 каштанов, раздели их по 3».

После выполнения действия на конкретных предметах (каштанах) учащиеся объясняют выполненную работу словами; после этого возникает задача написания формулы действия (действие — слово — математический символ). Запись должна *соответствовать* словам: 15 каштанов *разделили по 3, получили 5 частей* (кучек).

При введении знака деления и укреплении связи формулы с конкретным действием поступаем так же, как и при введении каждой формулы, что подробно было описано при введении формулы сложения.

Когда далее будем вводить *деление «на столько»*, т. е. деление на данное число равных частей, начнем снова с конкретного действия. Сначала предлагаем выполнить на каштанах одно деление «по столько», что удивит детей, так как они уже хорошо делят без конкретных предметов; но повторение конкретного действия в данном случае нужно для того, чтобы ярко обозначилось различие следующего предложения: «Эту горсть каштанов (число каштанов не дается) хочу разделить на 5 равных кучек. По скольку каштанов будет в каждой кучке?» Поскольку число каштанов неизвестно, дети устно решить задачу не могут; поэтому они должны найти соответствующий конкретный способ выполнения решения задачи, а именно: отметить 5 мест и раскладывать последовательно по 1 каштану в каждое место.

После решения нескольких подобных задач, когда уже учитель наперед укажет число всех каштанов, он, наверное, заметит, что дети решают задачи устно, и только иллюстрируют свои вычисления на каштанах. Теперь уже нет настоятельной потребности задерживаться на конкретных действиях; следует переходить к записи действия. После выполнения деления 15 каштанов на 3 равные части (конкретное действие) дети убеждаются, что получили по 5 каштанов в каждой части.

Перед введением записи действия учитель подчеркивает тот факт, что и в данном случае *делили*, поэтому используем тот же знак деления, что и в первом случае.

пока нет нуля, поэтому ошибочное применение нуля не может иметь места.

2. Таблички можно легко переставить, тем самым выделяя изменение величины числа в зависимости от изменения мест цифр, обозначающих это число.

3. Каждый ребенок может иметь «конкретное в горсти», а значит, может манипулировать этим конкретным, что в младших классах всегда должно поощряться.

4. Для учителя облегчен контроль, ибо в комплектах таблиц каждая цифра имеет свой цвет, отличный от цвета других цифр, например: цифра 2 — желтая, 5 — красная; бросив взгляд, учитель по цветам цифр сразу определит, правильно ли составлено указанное число.

Работу детей разделим на три этапа, каждый из которых должен способствовать овладению соответствующим понятием.

Этап первый. Следует связать запись двузначного числа с конкретным образным представлением этого числа, благодаря чему ярче выяснится, какая цифра обозначает десятки и какая единицы.

Например: предлагаем детям положить перед собой на парте слева один связанный пучок из 10 палочек, к нему доложить справа две палочки. (Проверяя правильность расположения пучка и палочек, рекомендуем придвинуть их друг к другу, чтобы они не были слишком отдалены.) Подсчитываем с детьми, сколько всего палочек.

«— Двенадцать.» — «Сколько десятков?» — «Один».— «Сколько единиц?» — «Две».

Теперь раздаем комплекты цифр на картонках — от 1 до 9. Предлагаем найти такую цифру, которая будет обозначать, сколько у нас единиц. Найденную цифру 2 дети поднимают вверх и показывают учителю. Пусть эту цифру дети положат на парту под двумя палочками. С помощью вопроса напоминаем, сколько лежит десятков перед единицами, и предлагаем показать цифру, которая будет обозначать число десятков. Дети показывают цифру 1 и кладут ее под пучком.

Вопросы, которые далее задаст учитель, и упражнения, которые он предложит выполнить, имеют целью укрепить понятие палочек как единиц, а пучков как десятков (в этом случае никакие другие конкретные предметы, кроме палочек, не дадут возможности лучше оттенить данное понятие).

Итак, учитель предлагает присоединить к палочкам еще одну. Цифровая запись 12 является теперь негодной. «Какую цифру надо заменить?» — «Ту, которая обозначает единицы». Дети заменяют 2 на 3.

— «Присоедините еще один пучок к пучку. Сколько теперь лежит десятков?»

— «Два». Цифровая запись 13 негодна, надо ее изменить. Дети заменяют 1 на 2 и читают новое число. При этом, когда один ребенок прочитает 23, другие должны сказать: сколько имеется пучков и сколько палочек? Сколько десятков, сколько единиц? Какая цифра лежит под десятками, какая под единицами? Почему цифра 3 обозначает единицы? (Она лежит под палочками.) Почему цифра 2 обозначает десятки? (Она лежит под пучками.) На этом заканчиваем первый этап. Ничего другого, хотя бы и было время, на этом уроке рассматривать не следует: надо, чтобы материал урока закрепился в сознании детей.

Этап второй. Пучки и палочки дети укладывали правильно: по левой и по правой стороне, но значение такого расположения для них еще неясно. Именно сейчас следует подвести их к осознанию важности соблюдения места цифр.

Предлагаем сложить 12 из пучков и палочек. Куда положат дети пучки, куда палочки? Следует подпись при помощи цифровых картонок и выяснение подписи. С помощью ответов на соответствующие вопросы подтверждаем, что цифра 2 лежит на первом месте, считая от правой руки к левой, и обозначает единицы, а цифра 1 лежит на втором месте, считая справа налево, и обозначает десятки.

Предлагаем, не меняя цифровых картонок, отнять одну палочку и прибавить один пучок. Подпись надо изменить. Как? Только переставить цифры. Какая цифра теперь обозначает десятки и какая единицы?

Собираем палочки, оставляем цифровую запись 21. Нет ни пучков, ни палочек. Как теперь узнать, какая цифра обозначает единицы, какая — десятки? Обращаем внимание на место, на котором лежит цифра. Далее следует укладывание чисел с помощью цифр под диктовку с выяснением, какая цифра и почему обозначает единицы, а какая — десятки. Чтобы лучше закрепить зависимость между величиной числа и местом цифры. обозначающей это число, переходим к записи чисел под диктовку на доске с соответствующим выяснением.

Кульминационный пункт. «Напиши 22. Какая двойка обозначает десятки, какая — единицы? Почему? Напиши 68. Хочу, чтобы теперь цифра 6 обозначала единицы, а цифра 8 — десятки; что надо сделать?» «Переставить цифры: 86».

Упражнения такого типа дети очень любят; эти упражнения имеют большое образовательное значение.

Этап третий. Когда уже дети поймут, что цифра, стоящая на первом месте (считая справа налево), обозначает единицы, а цифра, стоящая на втором месте (считая справа налево), обозначает десятки, переходим к важнейшему моменту — к осознанию потребности нуля.

Пусть учитель задумается минуту над этим гениальным изобретением. Напомним себе, что только введение нуля для обозначения пустого места позволило отбросить обременительные абаки и рубрики. Лаплас както сказал, что позиционная система настолько проста, что из-за этой простоты мы не замечаем ее (системы) исключительности. Однако же нуль был введен только в IV веке[1] нашей эры. Из Индии изобретение перешло к арабам, от них в Испанию в X веке, далее в Италию и Францию; в Польше нуль появился только в XIV веке.

Это гениальное изобретение человечества дети должны воспроизвести. Воспроизведение человеческого изобретения детьми является одним из тех поистине волнующих моментов для учителя, которые наглядно показывают, каким посредником цивилизации выступает школа.

Чтобы осознать значение нуля, надо прежде всего почувствовать его п о т р е б н о с т ь. Чувство потребности нуля должен иметь в виду учитель, руководя работой детей.

М е т о д. Палочки не раздаем, раздаем только цифровые таблички. Предлагаем составить 21. С помощью соответствующих вопросов устанавливаем, какая цифра обозначает единицы, какая — десятки. «Отбросьте цифру 1. Что обозначает цифра 2?» Мнения разделяются: некоторые дети утверждают, что цифра 2 обозначает два десятка, так как было двадцать один. Усиленно подчеркиваем значение места: «Положите какую-либо цифру рядом с двойкой так, чтобы 2 обозначала десятки». Учитель рекомендует отдельным учащимся прочитать составленные числа: 25, 27, 28 и т. д. У всех учащихся 2 обозначает десятки, хотя числа различны. «Что нужно сделать, чтобы 2 обозначала десятки, и все числа были одинаковы?» Дети предлагают договориться, какую цифру положить рядом с двойкой.— «Нет, договариваться не будем. Думайте, как сделать!»

Интересно отметить, что хотя дети уже писали число 20, используя нуль, на поставленный учителем вопрос они не предлагают эту запись сразу; это значит, что ранее данная запись была неосознанной; не осознавалась

---

[1] Согласно другому мнению, даже только в VIII веке.

же запись потому, что учащиеся не чувствовали потребности нуля.

Предложения детей бывают весьма интересными: перевернуть картонку и положить пустой стороной рядом с двойкой! Идея замечательная; нужно ее принять, только потребовать разъяснения. Теперь только один шаг до нуля: вместо пустой таблички имеем такой знак, который кладем рядом с цифрой, чтобы показать, на каком месте хотим иметь эту цифру. Учитель раздает таблички с наклеенным нулем.

Не следует во II классе требовать (в старших классах к данному вопросу надо снова возвратиться) словесного объяснения значения нуля, но необходимо требовать в каждом отдельном случае конкретного выяснения; например: «Положите на парту 4. Хочу, чтобы эта цифра обозначала теперь десятки. Как это сделать? Для чего положили нуль?

Примечание. Изучение записи числа 100 и выяснение роли нулей в этой записи откладываем до III класса, если сами дети не затронут этого вопроса. Отметим, что на позиционную систему следует посвятить несколько уроков, придерживаясь разобранных этапов. Времени не жалеем, ибо оно расходуется на подлинное развитие математического мышления.

3. Меры длины, денег, времени

Благодаря **десятичной системе метрических мер** дети не только легко усваивают взаимную зависимость этих мер, но одновременно углубляют известное им понятие десятичной системы.

Программа предусматривает ознакомление учащихся II класса с сантиметром и метром; поскольку каждые 10 *см* представляются на учебных пособиях, то тем самым метрическая система мер является наглядной иллюстрацией знакомой детям десятичной системы счисления.

Изучение **монетной системы** также не встретит трудностей, ибо в основе этой системы лежит та же десятичная система.

Если изучение монетной системы не вызывает трудностей, то достижение навыка в платежах требует многочисленных упражнений.

Из мер, с которыми должны ознакомиться учащиеся II класса, наиболее трудными являются **меры времени:** трудность здесь объясняется недостаточным опытом детей в данной области и отличием системы этих мер от десятичной системы.

Труднейшим понятием является измерение времени при помощи часов. Необходимо детям дать почувствовать потребность такой общей меры времени, как час (минута). Дело здесь обстоит настолько просто, что несвоевременный приход в школу является ярким доказательством потребности часов (прибора).

Хорошо проделать следующий опыт: предложить детям тихую (про себя) работу и порекомендовать отложить ее в тот момент, когда они будут думать, что прошло 15 минут. Различие во времени будет столь большим, что это вызовет интерес детей к действительному времени их работы. При разнообразных занятиях можно также оттенить, что время не всегда для нас одинаково быстро течет; отсюда вытекает потребность полагаться на единообразное измерение времени. Хорошо также проводить в классе «минуту тишины» по часам, чтобы убедиться в том, как долго можно пребывать без движения. Хорошо рекомендовать учащимся выполнить какое-либо действие в определенное число минут, провести конкурс громкого чтения, бега и т. д. в назначенное время.

Таким путем (вызывающим интерес учащихся) дети практически знакомятся с минутой, секундой, четвертью часа, половиной часа и часом. Очевидно, отсчет времени по часам потребует большого числа упражнений.

Принцип. 1) Эти упражнения следует выполнять на картонных часах, стрелки которых можно устанавливать произвольно; 2) упражнения повторять через некоторое время, хотя бы в течение нескольких минут, но каждый день, независимо от урока арифметики.

Программа требует, чтобы дети практически ознакомились с *календарем*. Это требование оправдывается с двух точек зрения: ребенок должен уметь пользоваться календарем; вместе с тем, это пользование доставляет детям большую радость.

Чтобы дети почувствовали «практичность» календаря, не заставляем их зачитывать и находить даты без потребности использования календаря. А именно: если в жизни школы устанавливаем какую-либо дату (игра, экскурсия, праздничные каникулы и т. д.) и хотим подсчитать, как долго еще надо ждать до отмеченной даты, то даем детям календари и предлагаем найти указанную дату и определить время, отделяющее нас от нее. В этом случае дети будут работать с календарем с энтузиазмом.

После решения интересующего всех задания выясняем, как кто подсчитал или почему не сумел подсчитать. Теперь дети будут внимательно слушать объяснения учителя; после этого они также охотно будут возвращаться к календарю, чтобы отыскать даты праздников, именин своих близких и т. п. Пусть дети убедятся в том, что, читая календарь, можно многое из него узнать. Пусть проверят даты фаз Луны на небе!

Обозначение дат *римскими числовыми знаками* имеет свою образовательную ценность; оно оттеняет различие между числом и его знаком.

Римские цифры вводим последовательно, связывая их с названиями месяцев. Обращаем внимание детей на то, что единица, написанная с левой стороны, показывает, что ее надо отнять, т. е. IV есть то же самое, что *пять без одного,* а единица, написанная с правой стороны, показывает, что ее надо прибавить, т. е. VI есть то же самое, что *пять и один.* Это объяснение вызывает интерес учащихся и предупреждает смешение ими чисел IV и VI.

4. Метод сложения и вычитания двузначных чисел

Новым и довольно трудным понятием во II классе является метод сложения и вычитания двузначных чисел.

Прибавление *однозначного числа к двузначному* не нуждается в новых понятиях, требует только постепенного преодоления трудностей. В данном случае в упражнениях соблюдаем поэтому следующий порядок:

1. Начинаем от прибавления однозначного числа к полным десяткам: 30 + 6.

2. Следующим этапом будет прибавление однозначного числа к двузначному без перехода через десяток: 42 + 3.

3. Далее подбираем числа так, чтобы второе однозначное слагаемое дополняло первое число до полного десятка: 48 + 2.

4. Наконец, вводим упражнения с переходом через десяток, начиная от *наинизшего порога:* 49 + 2, 38 + 3, 47 + 4, 36 + 5, 43 + 9, 34 + 9.

Прибавление *двузначного числа к двузначному* является уже чем-то новым. Сложить 36 + 23. Как к этому приступить?

Согласно нашей установке дети должны самостоятельно приобрести метод действия. Это будет зависеть прежде всего от соблюдения последовательности в выборе соответствующих упражнений.

Начинаем со сложения полных десятков, например: 40 + 30. Затем предлагаем к полным десяткам прибавить двузначное число, состоящее из десятков и единиц, например: 30 + 26.

Если потребуется прибегнуть к конкретной иллюстрации, то наиболее подходящей конкретизацией, лучше всего приводящей к цели, в этом случае будут цветные кружки: красные (единицы) и бóльшие синие (десятки); ими уже пользовались дети в I классе. Это возврат к известной конкретизации весьма привлекателен для детей и не следует его опасаться, лишь бы он был целесообразно применен.

Предлагаем детям составить из кружков число 30. Дети положат перед собой 3 синих кружка. Другое слагаемое дети не укладывают. Диктуем последовательно: «Прибавить 20». Потом: «Прибавить 6». Из кучки кружков, лежащих на парте, дети берут 2 синих кружка, затем 6 красных. После выполнения упражнения детьми учитель подтверждает проделанное с помощью вопросов: «Что мы складывали? (Числа 30 и 26.) Как производили сложение? (Сначала прибавили 20, потом 6.) Теперь даем несколько примеров на сложение того же типа, что и 30+26, для самостоятельного выполнения учащимися, требуя от них объяснения способа сложения.

Напомним, что объяснение действия словами имеет общеобразовательную ценность и должно применяться не только в математике.

Если далее доведем детей до выполнения сложения 36 + 20, то будем иметь все нужное для выполнения сложения **36 + 23.** Устанавливаем метод: **к 36 прибавляем сначала 2 десятка, затем 3 единицы.**

Если есть дети, которые выполняли действие иначе, например складывали отдельно десятки и отдельно единицы, то следует объяснить им, что, хотя можно и так складывать, работая вместе в школе, принимаем один способ для всего класса.

К чему это единообразие? Так как метод есть путь, который должен привести к цели — приобретению навыка, а упражнения, выполняемые двумя способами, затрудняли бы достижение этой цели, то устанавливаем единый метод: *к первому числу, взятому целиком, прибавляем сначала десятки, а потом единицы второго слагаемого.*

Выбираем именно этот метод потому, что он аналогичен методу вычитания двузначного числа.

В упражнениях сохраняем постепенность, применяя в связи с переходом через десяток (десятичный порог) обычную последовательность: перед порогом (36 + 23), достижение порога (36 + 24), переход через порог (36 + 25), причем переход через десяток (порог) начинаем **«от наинизшего порога»**.

Вычитание *однозначного числа из двузначного* можно рассмотреть в такой последовательности: отбрасывание единиц (57—7), вычитание единиц без перехода через десятичный порог (57—4), вычитание единиц из полных десятков (60 — 4), наконец, вычитание единиц с переходом десятичного порога (63 — 7).

Вычитание *двузначного числа из двузначного выполняем по принципу: от первого числа, взятого целиком, отнимаем сначала десятки, затем единицы второго числа.*

Дети должны самостоятельно прийти к этому методу. Как направить их на этот путь, какой конкретной иллюстрацией воспользоваться?

Начинаем с вычитания десятков из полных десятков, например 50 — 20.

Прежде чем перейти к вычитанию двузначных чисел, вводим отбрасывание десятка от числа, состоящего из десятка и единиц, например 17 — 10. Демонстрируем это отбрасывание с помощью конкретной иллюстрации, какую применяли при изучении действий над числами в I классе. Показываем две большие таблички одинаковой величины; на одной налеплено 10 цветных кружков, на другой налеплено 7 кружков, остальные места пустые. Держим таблички одну вдоль другой рядом. «Сколько кружков?». Ребенок читает: «17». Диктуем: «От 17 отнять 10. Выполни это на табличках молча». Ребенок подходит к учителю, берет у него из рук табличку с десяткой (иначе поступить не может); остается табличка с семеркой. После выполнения нескольких подобных упражнений с разным числом единиц в уменьшаемом даем далее ряд устных упражнений на вычитание полных десятков из двузначных чисел, состоящих из десятков и единиц, например: 27 — 10, 48 — 20, 52 — 30. Вычитание сначала десятков из первого числа напрашивается само собой и в общем случае двузначного вычитаемого. Следует только заботливо сохранять постепенность усложнения упражнений, начиная от упражнений без перехода через десятичный порог, а именно: сначала 35 — 20, затем 35 — 23, далее 35 — 26 и т. д.

5. Метод умножения двузначного числа на однозначное

Не будем говорить здесь о навыке, остановимся единственно на методе действия.

Начнем с умножения полных десятков: 2 · 10, 3 · 10, 4 · 20 и т. д. — в пределе сотни. Демонстрируем это умножение с помощью конкретной иллюстрации, считая синие кружки или пучки связанных палочек (по 10 штук); далее переходим к устному умножению полных десятков.

Как дети самостоятельно могут приобрести метод *умножения* 3 · 12?

Основой умножения является *сложение одинаковых слагаемых* определенное число раз. Понятие умножения дети приобрели уже в I классе, здесь речь идет о самом методе умножения, начиная с *десятков*.

Когда дети уже свободно умножают полные десятки, сопоставляем следующие последовательности упражнений: 2 · 10 и сразу же 2 · 12; потом 3 · 10 и непосредственно 3 · 12 и т. д. Применяя умножение к денежным мерам, следует обратить внимание на такие примеры, как 2 · 25 или 4 · 25, потом также на 2 · 50 и 5 · 20. Все эти произведения дети усваивают легко, если покажем на монетах их отношение к 100; именно: две монеты по 50 грошей — это 1 злотый, или 100 грошей; аналогично, четыре раза по 25 грошей — это 1 злотый [1].

III КЛАСС

Программы меняются. Некоторые из наших рассуждений и указаний, предназначенных для III класса, могут быть перенесены в IV класс. Учитель, имеющий обязательную программу, самостоятельно сумеет использовать их в соответствующем месте.

1. Углубление позиционной системы

В III классе расширяем устную и письменную нумерацию до 10 000 и при этом углубляем понятие позиционной системы.

Если во II классе позиционная система с помощью конкретной иллюстрации отработана, то расширение ее до 10 000 не представляет никакого труда.

При этом нужно обратить внимание на необходимость заботливой отработки цифровой записи чисел с *нулем в середине,* например: 103, 506 и т. п. В этом случае нужно возвратиться к конкретизации. Раздаем детям комплекты цифр с нулем и кружки, среди которых, кроме красных (единицы) и больших синих (десятки), имеются померанцевые кружки, бóльшие синих (сотни). Палочки здесь не используем, так как составление сотен из па-

[1] В Польской Народной Республике основной денежной единицей является злотый, содержащий 100 грошей.— *Примечание переводчика.*

лочек было бы нецелесообразно: дети сосредоточивали бы внимание на процессе образования сотен, отвлекаясь от существа дела.

Предлагая составить из кружков указанное число, проверяем, правильно ли дети используют соответствующие краски. После нескольких упражнений, в которых число каждый раз состоит из сотен, десятков и единиц, предлагаем последнее составленное число, например 126, записать с помощью цифр. «Что обозначают цифры 6, 2, 1? На каком месте справа налево они стоят? Отбросить два синих кружка! Сколько отняли? Что осталось? Какую из цифр надо отбросить? Почему нельзя придвинуть цифру 6 к цифре 1? Как же записать полученное число?»

Проделав несколько подобных упражнений, собираем кружки, после чего дети составляют числа из цифр под диктовку; далее переходим к записи чисел на доске, Разбирая запись нисходящих чисел: 103, 102, 101, приходим к выяснению роли каждого нуля в записи 100.

После выполнения ряда устных упражнений на сложение и вычитание трехзначных чисел (без перехода через десятичный порог) расширяем область чисел до 10 000, что не представит трудности; здесь опять-таки нужно обратить внимание на внутренние нули (например, 3207, 3047, 3007) и требовать от учащихся выяснения, на каком месте, считая справа налево, стоят цифры и какие разряды они выражают.

2. Сложение и вычитание с переходом через два десятичных порога

Устный счет в III классе не требует приобретения новых методов вычислений. *Метод сложения и вычитания трехзначных чисел* не отличается от метода сложения и вычитания двузначных чисел. Здесь при сложении также берем первое число целиком и прибавляем второе число, начиная всегда от единиц высшего разряда. Детям достаточно осознания метода, которым они пользовались до этого, чтобы применить его в дальнейшей работе.

Но это «осознание» должно быть приобретено детьми надлежащим путем, т. е. не следует, очевидно, предлагать детям указанное выше обобщение метода в готовом виде. Как же поступить? А хотя бы так: «Взять 24, прибавить 35. Сколько получится? Как это сделать?» Ребенок объяснит: к 24 прибавить 30, а потом еще 5. Учитель предлагает записать на доске первое число 24, а второе число записать в виде двух слагаемых, как фактически и производилось сложение: 24 + 30 + 5.

Запись на доске оттеняет в глазах учащихся тот факт, что первое слагаемое не разлагается, а второе разложено. Соответствующими вопросами учитель подтверждает, что к первому числу сначала прибавляются десятки, а потом единицы второго числа.

Теперь учитель записывает на доске, помимо числа 24 (число 24 не следует стирать), новое число 124, и к нему без записи класс прибавляет полные сотни, например: 200, 100, 500 и т. д.

Далее учитель переходит к прибавлению сотен с десятками: «К числу 124, которое написано на доске, прибавить 210». Спрашивает, как это сделать. Несомненно, дети прибавят к 124 сначала 200, потом 10. Учитель предлагает записать второе слагаемое в виде двух слагаемых, как фактически и производилось сложение: 124+200+10. Вопросами подтверждает, что сначала прибавляем сотни, а затем десятки. После этого можно предлагать к написанному числу 124 прибавлять устно: 230, 310, 420 и т. п. В дальнейшем переходим к прибавлению числа, состоящего из сотен, десятков и единиц. К тому же написанному на доске числу 124 прибавляем 213, после чего приписываем число 213 на доске, разложенным на три слагаемых: 124 + 200 + 10 + 3.

Возможно, читая изложенное, у учителя возникнет вопрос: почему мы подобрали именно указанные числа?

Можно подобрать другие числа, лишь бы при сложении не переходить через десятичный и сотенный пороги.

В вопросе выбора метода действия большую роль играет принцип экономии мышления, о котором упоминалось в начале книги, а именно· в работе сознания должна быть одна ясная цель, требующая напряжения мысли, все же средства достижения этой цели должны быть по возможности упрощены и облегчены, чтобы они не вызывали специального усилия и не отвлекали внимания от главной цели.

В соответствии с этим принципом, руководя работой учащегося, мы должны иметь перед собой ясную цель, к которой надо привести ученика, а все средства, ведущие к цели, по возможности упрощать.

Другой вопрос: почему мы придерживаемся того, что все время прибавляем числа к одному числу 124?

Здесь опять-таки имеем дело с принципом экономии мышления; в этом случае не трудность сложения чисел заставляет нас оставлять одно слагаемое неизменным, ибо можно подобрать другое, не менее простое число, а стремление предупредить отвлечение внимания учащихся к вопросам, играющим во всей проблеме второстепенную роль. Если оставляем, не стирая, все время одно и то же слагаемое, то тем самым подсказываем детям мысль, что не важно, к чему прибавляем, а важно, как прибавляем, что существо дела здесь во втором слагаемом: как его разложить и с чего начать сложение.

При вычитании двузначных чисел из трехзначных надо довести до сознания детей то, что, если возможно, следует всегда вычитать из ближайших разрядов. Поступаем так: на доске записываем, например, 243—21 и предлагаем: «От 243 отнять 21». Дети отнимают устно. Спрашиваем, как подсчитали. Бесспорно, отнимали 21 от 43. Пусть покажут рукой на доске, от чего отняли 21. Подтверждаем, что сотни не нужно было трогать. Решаем указанным способом несколько примеров, упражняя учащихся в устном вычитании без перехода через пороги. Решаем соответствующие примеры из задачника.

В сложении двузначных или трехзначных чисел встречаем трудный момент: **двойной переход через пороги — десятичный и сотенный.**

Эти трудности следует преодолевать в определенной, строгой последовательности.

При сложении *двузначных* чисел с переходом через сотню (сотенный порог) начинаем с примеров, в которых первое число состоит из одних десятков:

1. Вводим переход через сотенный порог на полных десятках, начиная с «наинизшего порога», например: 90 + 40, 80 + 30, 70 + 50.

2. Далее к полным десяткам прибавляем число, состоящее из десятков и единиц, например: 90 + 22, 80 + + 34, причем обращаем особое внимание на случаи, когда в сумме получается нуль на месте десятков, например: 90 + 12 = 102, 80 + 24 = 104.

Затем переходим к примерам, в которых первое число состоит из десятков и единиц. Порядок изучения сложения в данном случае может быть следующим:

1. К десяткам и единицам прибавляем полные десятки с переходом через сотенный порог, например: 84 + 30, а также 84 + 20.

2. К произвольному двузначному числу прибавляем второе двузначное число с переходом через сотенный порог, но без перехода через десятичный порог, например: 84 + 33, а также 84 + 23.

3. К произвольному двузначному числу прибавляем второе двузначное число с переходом через сотенный порог и достижением десятичного порога, например: 84 + 36.

4. К произвольному двузначному числу прибавляем второе двузначное число с переходом обоих порогов — сотенного и десятичного, например: 84 + 37.

Наконец, особого внимания заслуживает случай, когда *при сложении единиц одновременно с переходом через десятичный порог* приходится переходить через сотенный порог, например: 56 + 47 = 103. Подготовкой к этому случаю должно быть сложение 96 + 7 = 103.

При сложении *трехзначных* чисел в III классе других трудностей мы уже не встретим, если ограничимся примерами, когда сумма двух слагаемых содержит не больше 4 значащих цифр.

Начинаем, таким образом, со сложения полных сотен: 300 + 100 и т. д.; далее складываем сотни с единицами: 300 + 102 и т. д., и наоборот (меняем места слагаемых); затем прибавляем сотни с десятками: 300 + + 150, и наоборот; наконец, складываем сотни с десятками и единицами: 300 + 158, и наоборот.

При устном решении примеров на сложение трехзначных чисел можно, а иногда и нужно записывать данные числа на доске, чтобы дети, складывая эти числа устно, могли их видеть.

При *вычитании* трехзначных чисел начинаем также с полных сотен: 300 — 100; далее: 300 — 150, для чего сначала производим вычитание 300 — 100 = 200, а потом вычитание 200 — 50 = 150; отнимая 50 от 200, видим, что одна сотня осталась нетронутой. Наконец, вычитая из полных сотен сотни с единицами, приходим к переходу через сотенный порог.

Вычитанию из 1000 должно предшествовать дополнение до 1000, как и при вычитании из десяти в I классе; например: 800 + 200, 500 + 500 и т. д.

Начинаем с вычитания полных сотен: 1000 — 200; далее вычитаем сотни с десятками: 1000 — 460, т. е. 1000 — 400 = 600, 600 — 60; в последнем действии поступаем так, как и при вычитании из сотен.

Наконец, вычитание 1000 — 856 производим следующим образом: 1000 — 800 = 200, 200 — 56; одна сотня остается нетронутой, из другой вычитаем 56.

Подчеркнем, что каждый этап в изучении действий должен быть основательно усвоен учащимися, прежде чем переходить к следующему этапу.

3. Выдача сдачи (остатка)

Независимо от способа вычитания, рассмотренного выше, в случае выдачи сдачи (остатка) при уплате денег следует применять способ дополнения; это надо делать в связи с широким распространением последнего способа среди кассиров. Способ дополнения, применяемый кассиром при выдаче сдачи, не следует вводить слишком рано, так как понятие *дополнения* дети должны предварительно сознательно усвоить.

На чем основан этот способ? Если дать кассиру 100 злотых, уплачивая 34 злотых, то кассир присчитает 6 злотых — будет 40 злотых, потом присчитает 10 злотых — будет 50 злотых, наконец, выдаст еще 50 злотых. Присчитывание, таким образом, облегчает выдачу сдачи потому, что при этом производится дополнение до полных десятков.

Чтобы учащиеся овладели указанным способом, нужно обучать их дополнению до десятков, т. е. чтобы они свободно могли отвечать на вопрос: сколько нужно прибавить к 34 для получения ближайших полных десятков? к 63? к 48? и т. д. Если дети на эти вопросы будут отвечать свободно, даем задачу, пользуясь монетами или фишками: «Если к деньгам, которые я держу в руке, прибавлю 6 злотых, то буду иметь 40 злотых. Сколько я имею денег в руке?» После ответа пусть дети проверят, действительно ли в руке столько денег, сколько они указали.

Другой стороной данного способа является осознание того, что при выдаче сдачи через дополнение нужно присчитывать до величины той суммы, какую дали кассиру. Этот факт мы должны оттенить. Демонстрируем способ на кружках. Учитель вызывает двух детей; один ребенок — кассир — получает 10 красных кружков (или 10 однозлотовых монет), другой — покупатель — получает один синий кружок (или одну десятизлотовую монету). Ребенок, который имеет синий кружок, покупает лист бумаги за 2 злотых. Что он должен сделать, имея денежный знак в 10 злотых? Может разменять монету. В этом случае кассир за синий кружок дает 10 красных кружков, и из этих 10 кружков покупатель отдает кассиру назад 2 кружка. Ребенок (покупатель) может, однако, поступить иначе: отдает кассиру монету в 10 злотых, а кассир задерживает сразу 2 злотых за лист бумаги, т. е. 1, 2 — считает для себя, а 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 считает для покупателя. Почему кассир считает до 10? Потому, что та сумма, которую кассир задержал, и та, что отдал покупателю, вместе должны составлять 10, так как столько дал кассиру покупатель.

Для овладения этим способом нужно проделать многочисленные упражнения, при этом вначале следует требовать от учащихся соответствующих объяснений: сколько кассир считает для себя и до какой суммы он должен присчитывать, выдавая сдачу покупателю? Кассир и покупатель вместе должны иметь столько, сколько покупатель дал кассиру. В упражнениях необходимо соблюдать определенную последовательность; вначале присчитывание должно быть столь легким, чтобы все внимание учащихся могло сосредоточиться на существе вопроса: *до какого количества присчитывать?* Когда уже существо дела будет вполне осознано, предлагаем присчитывание до больших сумм.

Нужно обратить внимание на то, что дополнение, применяемое при выдаче сдачи, не равнозначно выполнению вычитания. Если покупатель должен заплатить 158 злотых и даст кассиру 500 злотых, то, наблюдая за выдачей сдачи, он будет знать, что сдача выдана правильно, но не будет знать, *сколько сдачи* получил.

Поэтому, чтобы быть уверенным в величине получаемой сдачи, человек, обладающий навыками вычисления, подсчитывает сначала посредством вычитания, сколько должен получить сдачи: 500 злотых — 158 злотых = = 342 злотых, а потом только проверяет выданные ему деньги.

4. Десятичная таблица умножения

При устном умножении специального изучения требует десятичная таблица умножения.

Если начнем работу с решения примеров в последовательности: $3 \cdot 7 = 21$ и $3 \cdot 70 = 210$, $5 \cdot 7 = 35$ и $5 \cdot 70 = 350$, то учащиеся воспримут действие механически, без приобретения соответствующего понятия, так как будут умножать по аналогии, совершенно этой аналогии не понимая.

Может быть учитель скажет, что поскольку данные упражнения преследуют приобретение учащимися навыка в устном счете, то не к чему здесь снова поднимать вопрос о полном понимании действия. Однако все мы должны согласиться с тем, что никогда не следует идти таким путем, который приносит ущерб интеллекту ребенка. Известно, что ничто другое так не характеризует сознание ребенка, как склонность умозаключать *от частного к частному*, причем такое умозаключение не опирается на какое-либо основание, на какую-либо логическую необходимость, а делается на основе чисто внешнего подобия. Эту склонность не следует подкреплять, а, наоборот, по мере созревания интеллекта ребенка помогать ему избавиться от нее.

Таким образом, если дети начнут умножать, *дописывая нуль в уме,* прежде чем поймут, почему так можно делать, то их начинания будут опираться на чисто внешнее подобие, вызванное нашими сопоставлениями умножения единиц и десятков на единицы.

Мы дольше остановились на данном вопросе потому, что здесь имеем один из выразительных примеров того, что если когда-либо, стремясь к автоматизму действия, минуем путь понимания, то всегда сделаем это в ущерб сознанию ребенка.

	10	20	30	40	50	60	70	80	90
2	20	40	60	80	100				
3	30	60	90	120					
4	40	80	120						
5	50	100							
6	60								
7									
8									
9									
10									

Прежде чем переходить к десятичной таблице умножения, проделаем упражнение, которое основано на замене сотен и десятков на единицы.

Хорошо возвратиться к конкретизации, но здесь «конкретное в горсти» будет уже излишним, достаточно иметь «конкретное перед глазами». Прикрепляем к доске 3 синих кружка и спрашиваем, что они обозначают согласно нашей прежней договоренности. (Три десятка.) Предлагаем одному ребенку отсчитать у стола (считать громко и поднимать вверх) столько красных кружков, чтобы они соответствовали значению 3 синих кружков. Ребенок отсчитывает 30 красных кружков. С помощью вопросов подтверждаем, что 3 десятка значат столько же, сколько 30 единиц.

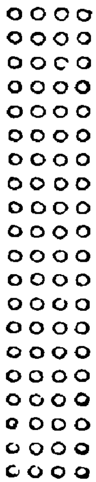
Одной такой конкретной демонстрации достаточно, чтобы предложить теперь быстро устно «разменивать» десятки на единицы. Учитель называет количество десятков (3 десятка, 5 десятков, 7 десятков и т. д.), вызванный учащийся быстро называет соответствующее число единиц (такие «молниеносные» ответы пользуются у детей большой любовью). Поскольку эта замена десятков на единицы не вызывает особого труда, количество десятков в упражнениях нужно увеличивать. Предварительно, однако, следует напомнить, что померанцевый кружок обозначает одну сотню, т. е. равнозначен 10 синим кружкам, или 10 десяткам.

Предлагаем вопрос: чему равны 40 десятков? Ребенок берет 40 синих кружков, а потом каждые десять синих кружков заменяет одним померанцевым, т. е. 40 десятков заменяет на 4 сотни, а это составляет 400 единиц. На следующие вопросы пусть дети дают ответы также с использованием конкретизации. Например, на вопрос, чему равны 45 десятков, ребенок показывает 4 померанцевых кружка и 5 синих кружков, а другой ребенок объясняет словами: 4 сотни и 5 десятков. «Сколько это единиц?» — «450». Проделав упражнения с помощью конкретизации, дети далее выполняют их быстро устно; например: 64 десятка — сколько это единиц?

Только после таких подготовительных уроков можно перейти к десятичной таблице умножения. Ясно, что указанный путь изучения таблицы длиннее того, при котором мы предлагаем ребенку: «умножай обычно и припиши в уме нуль»; но мы заботимся о том, чтобы ничего ребенку не «подсказывать», ибо согласно установленному нами методическому принципу ребенок должен самостоятельно приобрести понятие, а учитель только умело предлагает ему соответственно подобранные конкретизацию и упражнения.

Предлагаем детям умножить 7 единиц на 3. «Будет 21».— «Чего 21?» — «Единиц».— «А теперь умножьте 7 десятков на 3. Что получим?» — «21 десяток». Заменяем 21 десяток на единицы: 210. После нескольких подобных упражнений дети сами откроют, что ответ можно дать сразу в единицах через «приписывание нуля», но теперь они будут понимать, откуда берется этот нуль и почему так можно поступать.

В таблице рядом с примером 6 · 80 имеем одновременно 80 · 6. Это не значит, что нужно оба случая умножения вводить одновременно, так как умножить 8 десятков на 6 гораздо проще, нежели 6 умножить на 80. Поэтому сначала вводим и изучаем десятичную таблицу умножения, в которой множитель («сколько раз») является однозначным, а множимое состоит из полных десятков, например: 6 · 80.



Переход к множителю, состоящему из десятков, т. е. к умножению 80 · 6, должен снова опираться на конкретизацию. Числа следует выбирать небольшие, чтобы легче можно было манипулировать с конкретными вещами, например: 20 · 4. Укладывая, например, кружки или рисуя их на доске, делаем это так, чтобы оттенить тот факт, что имеем 20 строк, по 4 кружка в каждой строке.

Поворачиваем затем рисунок так, чтобы было 4 строки, по 20 кружков в каждой строке; теперь становится ясным, что 20 раз по 4— то же самое, что 4 раза по 20.

5. Десятичная таблица деления

После того как дети достаточно изучат устно десятичную таблицу умножения, переходим к **десятичной таблице деления.** Очевидно, путь изучения теперь будет обратным: начинаем с замены единиц на сотни и десятки. А именно: 200 единиц — сколько это сотен? Сколько это десятков? Упражнения следует проделать с привлечением конкретизации. Вместо 200 красных кружков можно взять 2 померанцевых кружка, или 20 синих. Вместо 210 красных — 2 померанцевых и 1 синий, или 21 синий.

Проделав несколько подобных упражнений с кружками, дети упражняются в устной замене сотен и десятков на десятки, т. е. 350 — это 35 десятков, 540 — это 54 десятка и т. д.

Далее переходим к делению: 60 красных кружков разложить по 30 красных кружков — получится 2 раза, две части. Заменяем единицы на десятки: 6 синих кружков разложить по 3 синих кружка — получится 2 раза, две части.

Это деление проделываем на кружках, так как более слабые дети (т. е. такие, которым трудно представить данный процесс) частное 2, повторяющееся в обоих случаях, не осознают без конкретизации. Чтобы в данном случае применить конкретизацию, мы взяли небольшие числа.

После выполнения деления с привлечением конкретизации переходим к устным упражнениям: 210 разделить по 30. Как это выразить в десятках? 21 десяток разделить по 3 десятка — получится 7 раз.

После нескольких таких упражнений дети самостоятельно приходят к способу «отбрасывания нулей», так как видят, что при этом делят полные десятки.

Как видно из рассмотренных примеров, деление по десятичной таблице начинаем с деления «по столько» (по содержанию). Не вводим сразу деления «на столько», чтобы устранить смешение этих двух различных типов деления.

Когда дети уже хорошо поймут деление «по столько» и приобретут навык в нем (например, 210 разделить по

70 и т. п.), переходим к делению «на столько», которое не представит трудности, а именно: 210 разделить на 3 части, т. е. 21 десяток разделить на 3 части. Это деление выполняем на синих кружках, обозначающих десятки. (Деление здесь производим так же, как это делали во II классе на каштанах.) Нужно только при выполнении упражнений на кружках требовать, чтобы дети давали ответы также в единицах; например, в нашем примере: разделить 21 десяток на 3 части — получится по 7 десятков, или по 70. Таким путем укрепляем в сознании детей значение синих кружков и избавляем их от возможных при этом ошибок.

6. Деление с остатком

Понятие остатка при делении вполне усваивается учащимися, если это понятие вводится с помощью необходимой в данном случае конкретизации; надо стремиться к тому, чтобы остаток для детей выступал чем-то конкретным, образным, так как именно такой подход к остатку облегчит в будущем решение задач.

Поступаем по аналогии с тем, как вводили деление во II классе. Учитель высыпает на стол горсть каштанов, которые он предварительно сосчитал, но числа каштанов детям не сообщает; затем предлагает учащимся разделить каштаны по 3. Уложено 6 кучек по 3 каштана и осталось 2 каштана. Получился *остаток от деления.*

Важный момент: сумеют ли теперь дети подсчитать, сколько каштанов учитель насыпал на стол? Задача была бы трудной без конкретизации вследствие недостаточности математического представления у детей; с использованием же конкретизации она разрешается без труда.

Для чего ставим перед детьми эту задачу? Потому, что в данном конкретном случае значение остатка прекрасно выделяется; об остатке нельзя забыть; не является он чем-то таким, чем можно пренебречь, или не знать точно его величину. Прежде чем дети начнут устно выполнять деление с остатком, прежде чем позднее перейдут к решению задач, они уже привыкнут считаться с этим остатком, от которого в данном примере зависит вся трудность вычисления.

Проделав ряд подобных упражнений с неизвестным для детей делимым, (без записи), переходим к примеру деления (все еще применяя конкретизацию), в котором число каштанов заранее сообщаем. Итак, учитель говорит учащемуся: «Высыпал 23 каштана. Разложи их в кучки, по 7 каштанов в каждой». Учащийся выполняет: получилось 3 части (кучки), осталось два каштана.

Проблема: как это записать? Принцип: «Скажи, что было, что сделал?» (*Конкретное действие — слово — символ.*) — «Было 23 каштана; разложил их в кучки по 7 каштанов; имеется 3 части, получился остаток: 2 каштана».

Предлагаем ребенку записывать знаками свои действия по мере их объяснения. Ребенок без колебаний должен записать $23:7=3$. Выступает весьма интересный и важный с точки зрения развития математического мышления вопрос: *что делать с остатком?* Пусть учитель требует от учащихся высказывания своих мнений и взаимной критики, прежде чем укажет принятую запись: $23:7=3$, остаток 2.

Понятие остатка при делении, таким образом, будет приобретено. Нужны только соответствующие упражнения с последующей проверкой получаемых ответов.

Очень важно соблюдать определенную последовательность при делении с остатком.

Начинаем с примера из таблицы деления: $12:3=4$. Далее берем пример с делимым, увеличенным на единицу, т. е. $13:3=4$, остаток 1. Также $26:5$; $46:5$ — все время с увеличением делимого на 1. Тогда само существо дела заставит детей выделять ближайшее известное им делимое.

По мере приобретения навыка увеличиваем делимое на 2, потом на 3 и т. д., например: 14 : 3; 18 : 5.

Когда уже дети будут успешно ориентироваться в делении, пользуясь таблицей Пифагора, переходим к упражнениям на деление полных десятков: 80 : 10; 80 : 20; 80 : 40. Стремясь привести детей к овладению навыком деления, не вводим сразу разных компонентов деления, состоящих из полных десятков, а берем разные делители при одинаковом делимом, как в приведенных примерах. Когда таким делением учащиеся уже овладеют, увеличиваем постепенно делимое, как это делали в таблице Пифагора, т. е. 81 : 10; 83 : 20; 86 : 40, а потом предлагаем примеры каждый раз труднее, как, например: 93 : 20; 96 : 40. Принцип всюду одинаков: с помощью постепенного изменения компонентов стремимся к тому, чтобы дети привыкли *не пробовать делить «на авось», а искали ближайшее частное.*

Пожалуй, не следует говорить о том, какое важное значение имеют подобные упражнения для письменного деления, как они облегчают в будущем поиски частного и остатка, придавая пробам осмысленный характер.

Деление с остатком имеет также важное практическое значение; поэтому это действие нужно заботливо отработать с учащимися и довести овладение им до приобретения навыка. С этой целью следует не только систематически упражняться в устном делении, но также четко спланировать работу над данным действием в течение всех лет обучения в начальной школе.

Несколько слов о задачах, в которых деление дает остаток.

Вот пример: «Было 68 карандашей. Нужно было упаковать эти карандаши в коробки, по дюжине в каждую. Сколько коробок можно наполнить этими карандашами?»

Задача приводит к делению $68:12=5$, остаток 8.

Какой дать ответ? Можно наполнить 5 коробок, а 8 карандашей останутся неупакованными.

Другой пример: «Нужно было раздать детям 68 карандашей. В магазине карандаши покупаются полными дюжинами. Сколько дюжин карандашей надо было купить?» Эта задача также приводит к делению $68:12 = 5$, остаток 8. Но теперь ответ для задачи будет иным: 5 дюжин — это мало, так как будет не доставать 8 карандашей; нужно, следовательно, купить 6 дюжин (и тогда останется 4 карандаша).

7. Употребление скобок

Введение скобок является важным моментом прежде всего для развития математического мышления детей. Ведь каждый новый знак, каждое развитие математической формулы, надлежащим образом понятые, дают осознание специального математического языка, т. е. символа, обозначения; эти символы, применяемые в нужном месте, должны всегда «говорить» ребенку, т. е. быть чем-то таким, что имеет свое содержание, что способно разбудить его мысль, вызвать интересные вопросы.

Рассматривая с этой точки зрения скобки, согласимся сразу, что понятие **скобки** должно быть новым завоеванием детского сознания, что его надо ввести конкретно, чтобы это понятие могло возникнуть в мышлении учащихся.

Испробуем такой способ: применим *задачу с содержанием.*

Пример: Янек и Марыся собирали рыжики и принесли их жарить. Каждый ребенок сказал маме, сколько насобирал грибов: Янек 5, а Марыся 7. (Показываем 5 фишек и 7 фишек.) Дети решили после приготовления поделить рыжики поровну между собой и мамой. Сколько жареных рыжиков получил каждый из них? Как это подсчитать на фишках?

Соединяем 5 и 7 фишек, а потом раскладываем их на 3 кучки — будет по 4 фишки в каждой кучке.

Проблема. Как это решение записать? Момент весьма интересный для учителя. Пока говорим только о существе задачи и обращаем внимание детей на то, чтобы запись соответствовала содержанию задачи. Дети должны записать так, «как это было». Если дети предложат запись $12:3=4$, то при помощи вопросов учителя они должны прийти к убеждению, что такая запись не соответствует содержанию задачи, ибо она (запись) ничего не говорит о том, сколько собрал Янек и сколько Марыся. Если ребенок запишет $5+7:$ $:3=12$, то учитель имеет предлог для весьма любопытного разговора с детьми: «Что в соответствии с этой записью надо разде́лить? Разве 7?» — «Нет».— «Подойди и покажи обеими руками, что разделить». Ребенок охватывает руками $5+7$. «Нужно, следовательно, обозначить, что *«столько, сколько будет 5 + 7, надо разделить на 3»*. Учитель предлагает ребенку еще раз показать на доске, где требуется новый знак, а после скажет, что такой знак есть, изобразит его и назовет: *«скобки»*.

Дети, однако, могут выдвинуть еще один проект записи, именно, запись в двух отдельных действиях: $5+7=12$, $12:3=4$. Запись эта, очевидно, удачна, этого нельзя не признать, так как нельзя отбрасывать логичных решений или ответов, как это, к сожалению, часто бывает, потому только, что они не соответствуют тому, к чему стремится учитель. После признания правильности предложенной записи надо подчеркнуть, что задача записана в двух отдельных действиях (*в двух работах*, как говорят дети[1]); однако же следует пред-

[1] Так говорят учащиеся польской школы — *Примечание переводчика*

ложить детям подумать, не найдется ли такого способа записи, при котором вся задача будет охвачена сразу.

Коль скоро задача будет записана уже со скобками, т. е. $(5 + 7) : 3 = 4$, нужно обратить внимание на чтение скобок и на вычисление.

Возвращая детей к содержанию задачи, приводим их к убеждению, что скобки указывают, что с т о л ь к о, с к о л ь к о   б у д е т   в   с к о б к а х,   р а з д е л и т ь   н а   3   ч а с т и; поэтому читать можем именно так, как говорим, показывая обеими руками на скобки (прикладывая руки к скобкам). Если дети осознают значение скобок, то тем самым легко придут к убеждению, что нужно сначала вычислить, сколько будет в скобках, чтобы иметь возможность вычислять далее.

Когда уже дети освоятся со скобками, учитель пишет на доске: $9 - 5 - 2 + 1$. Пусть дети вычислят последовательно, в соответствии с записью. Получится 3. Записываем ответ. Далее под первой формулой учитель пишет другую формулу: $9 - (5 - 2) + 1$, подписывая аккуратно цифру под цифрой, знак под знаком, добавляя только скобки Когда дети вычислят (делают это все про себя, смотря на запись на доске) и удивятся результату («сейчас получили другой ответ, так как получилось 7, а не 3»), обращаем их внимание на то, что последовательность вычислений была иной.

Этот вопрос действительно интересен для детей, хотя он и относится к чисто математическим. Пусть класс пробует другие сочетания в скобках.

До сих пор скобки для детей были связаны главным образом с содержанием задачи, теперь они приобретают еще другое значение, а двукратное применение скобок прямо захватывает детей: $(9 - 5) - (2 + 1) = 1$.

С этого момента такого рода арифметические «ребусы» учитель может предлагать детям в качестве «отдыха» в конце урока. Пусть также дети самостоятельно дома пробуют их составлять. Дети будут при этом в пределах математических задач испытывать радость творчества, что в гораздо большей мере, чем выученные упражнения, будет способствовать укреплению их уверенности в себе.

При составлении формул со скобками встретимся с вопросом употребления скобок *при умножении и делении.* Как нужно писать $20-(3\cdot4)$ или $20-3\cdot4$? $20-(12:4)$ или $20-12:4$?

Интересно, что знак умножения связывает ближайшие числа так тесно, что из формулы $20-3\cdot4$ видно без употребления скобок, что нужно из 20 вычесть 3 раза по 4. Знак умножения связывает числа 3 и 4 так же сильно, как если бы здесь стояли скобки: $20-(3\cdot4)$, что означало бы, что надо из 20 вычесть столько, сколько будет 3 раза по 4. Таким образом, видим, что в этом примере можно поместить скобки, но можно также их опустить. Если, напротив, хотим отделить данное число перед выполнением умножения, то скобки необходимы. Пусть, например, имеем задачу: «Аля приносила 3 раза по 5 яиц, но при этом каждый раз одно яйцо разбивала. Сколько неразбитых яиц принесла Аля?»

Эта задача приводит к формуле

$$3\cdot(5-1).$$

В этой формуле опустить скобки нельзя, так как нужно умножить на 3 столько, сколько будет $5-1$, а без скобок мы получили бы формулу:

$$3\cdot5-1,$$

которая выражала бы, что следует взять 3 раза по 5 и вычесть 1.

В формулах с *делением* вопрос применения скобок представляется иначе, нежели при умножении.

Если, например, имеем формулу

$$20-12:4,$$

то ребенок может прочитать: «Из 20 вычесть 12, деленное на 4» — и тогда под воздействием слов «вычесть 12» ребенок сначала выполнит вычитание 20 — 12, а потом только разделит результат на 4.

Чтобы выразительно подчеркнуть, что надо «из 20 вычесть столько, сколько будет 12, деленное на 4», лучше будет употребить скобки, которые укажут правильную последовательность действий:

$$20 - (12 : 4).$$

Отбрасывание скобок в этой формуле, хотя и возможное теоретически, с методической точки зрения является нецелесообразным, так как не следует увеличивать трудности, которых и так в обучении арифметике достаточно.

При *чтении формул со скобками* становится уже тягостным применявшееся до сих пор словесное выражение знаков + и —.

Очевидно, не следует эти знаки читать как *больше* и *меньше*, поскольку польский ребенок инстинктивно употребляет данные слова как наречия при сравнении[1]. «Мама, дай мне больше орехов, мне досталось меньше, чем ему». Пожалуй, согласимся, что школа не должна искажать правильно употребляемых детьми выражений. Поэтому с I класса знаки + и — читаем: *прибавить, отнять,* а вся формула $4 + 2 = 6$ звучит так: взять 4, прибавить 2, будет 6.

При чтении формулы со скобками будет, однако, удобнее, если применим выражения *плюс* и *минус*. Понятия сложения и вычитания уже настолько усвоены и знаки столь хорошо осознаны, что введение новых названий (таких, какие употребляют старшие школьники), не может вызвать никакого замешательства, а между тем

[1] Это относится в равной мере и к русским детям.— *Примечание переводчика.*

облегчит чтение формул. Итак, формулу $(5+7):3$ читаем: «Столько, сколько будет 5 плюс 7, разделить на 3». В крайнем случае, если учитель по каким-либо обоснованным причинам опасается вводить в своем классе названия *плюс* и *минус*, он может в дальнейшей работе начать читать формулу словом *взять*. А именно: взять 5, прибавить 7, и столько, сколько будет в скобке, разделить на 3.

8. Письменные действия

Чтобы подготовить введение письменного способа сложения, даем задачу с трехзначными числами, например: «В школе учится 263 мальчика и 235 девочек. Сколько детей учится в этой школе?» Нужно выполнить сложение $263+235$. Сначала складываем устно: $263+$ $+200=463$, $463+30=493$, $493+5=498$.

Далее составляем таблицу с *графами:*

Мальчики Девочки	263 235
Вместе	

Дети оценят удобство записи одной цифры под другой. Нужно только убедить их складывать начиная с единиц, так как из единиц может возникнуть десяток, а из десятков сотня[1].

[1] Перед переходом порогов в письменных действиях надо повторить размен десятков на единицы, сотен на десятки. В случае потребности использовать конкретизацию (померанцевые, синие и красные кружки. См. замечания на стр. 134).

Предлагаем поэтому такой пример:

Мальчики	257
Девочки	235
Вместе	

Здесь имеем переход через десятичный порог. Далее разбираем примеры на переход через сотенный порог, наконец, примеры с переходом через оба порога

И в вычитании на первый план выдвигается старательная отработка переходов через пороги. Возьмем примеры:

$$\begin{array}{r} 384 \\ -\ 162 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 384 \\ -\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Первый пример будет для учащегося более легким, так как отнимаем все время в пределе «нескольких»: 2 от 4, 6 от 8, 1 от 3 — в то время как в другом примере 6 отнимаем от 14, т. е. от числа, состоящего из десятка и единиц.

Особо заботливо надо отработать примеры, в которых в уменьшаемом находятся нули, так как решение этих примеров представляет для учащихся большие трудности.

Сравним следующие примеры:

$$\begin{array}{r} 230 \\ -\ 111 \\ \hline 119 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 230 \\ -\ 121 \\ \hline 109 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 230 \\ -\ 131 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 200 \\ -\ 131 \\ \hline 69 \end{array}$$

Как мало меняются числа и какое большое различие в трудности действия!

В первом и втором примерах мы только один раз обращаемся за единицей высшего разряда с тем, чтобы заменить ее единицами низшего разряда, но во втором примере на месте десятков в результате вычитания получаем нуль.

В третьем и четвертом примерах приходится два раза подряд заменять единицы высшего разряда единицами низшего разряда; в случаях, подобных четвертому, специальную трудность для учащихся составляет запоминание того, что из замененных на втором по порядку месте единиц (справа налево) одна единица уже взята, т. е. для вычитания имеем 9, а не 10 единиц данного разряда.

Письменное умножение не вызывает (в смысле приобретения новых понятий) особых трудностей.

При устном умножении двузначных чисел на однозначное дети хорошо овладели методом действия и знают, что надо умножать по частям начиная с единиц высшего разряда. Теперь, когда переходим к письменному умножению, следует показать учащимся, что при таком умножении выгоднее начинать действие с низших разрядов.

Простым и легким путем можно привести детей к тому, чтобы они начинали умножение с низшего разряда, чтобы записывали цифры произведения в соответствующих разрядах и переносили полученные единицы высшего разряда к следующему разряду. Начнем именно с письменного *сложения одинаковых слагаемых.*

Например:

$$
\begin{array}{r}
167 \\
+\ 167 \\
167 \\
167 \\
\hline
668
\end{array}
$$

Дети начинают, как обычно, со сложения единиц, но, очевидно, наиболее способные учащиеся сразу сориентируются в том, что вместо последовательного прибавления семерки можно умножить $4 \cdot 7$. Полученное произведение 28 они запишут так, как делали в сложении, т. е.

8 запишут под единицами. Вопрос: что сделать с двумя десятками? Очевидно, прибавить к следующему разряду. Пусть дети пробуют складывать дальше; не навязываем им объяснения. Наверное, найдутся такие учащиеся, которые заметят, что лучше не сразу прибавлять 2 десятка к 6 десяткам, а сначала умножить $4 \cdot 6$ и потом прибавить 2. Таким путем дети умножат десятки и после прибавления 2 получат 26. Подпишут 6 под десятками, а 2 сотни пока отложат (запомнят). Наконец, сосчитав 4 сотни и прибавив к ним 2 отложенные сотни, подписывают 6 сотен.

Даем еще один подобный пример для того, чтобы в представлении детей закрепился факт последовательного умножения разрядов С помощью вопросов подтверждаем, что учащиеся именно *умножают*, а не складывают. Почему? Потому, что имеем одинаковые слагаемые. Ставим вопрос: следует ли записывать все слагаемые? Нет. Достаточно знать, ч т о нужно умножить и н а с к о л ь к о.

Теперь учитель показывает способ записи умножения; способ записи является делом условным, поэтому дети самостоятельно к нужной записи прийти не могут. Пусть, однако, они объяснят запись:

$$\times\begin{array}{r}167\\4\\\hline\end{array}$$

Что обозначает цифра 4? Какое число надо повторить четыре раза? Подсчитываем: 4 раза по 7 единиц, затем 4 раза по 6 десятков и 4 раза по 1 сотне.

Теперь пусть ребенок у доски умножает под диктовку своих товарищей, которые, отвечая на вопросы учителя, указывают товарищу, что надо делать Например: «Умножь $4 \cdot 7$». «Запиши 8 под единицами, а 2 десятка сохрани в уме». «Умножь $4 \cdot 6$» и т. д.

В выполнении письменного умножения основную трудность представляют *нули*. Поэтому в первых примерах письменного умножения подбираем числа так, чтобы указанная трудность не имела места; например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}123\\7\end{array} \\ \hline 861\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}87\\4\end{array} \\ \hline 348\end{array}$$

Здесь не имеем нулей ни в сомножителях, ни в произведении.

Уже более трудным будет пример:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}134\\6\end{array} \\ \hline 804\end{array}$$

После прибавления 2 десятков, полученных от умножения единиц, к 18 десяткам, полученных от умножения десятков, получаем 20 десятков. Ребенок без колебаний сделает нужную запись. Неправильно будет, если учитель скажет ему: «Пиши нуль, переноси 2», так как при этом учащийся совершенно утратит смысл работы. Нужно, чтобы дети осознали, что получили 20 десятков, или 2 сотни[1], которые должны прибавить к сотням, а место десятков обозначить нулем. Еще более трудным является умножение, при котором в произведении получаем два нуля подряд:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}175\\4\end{array} \\ \hline 700\end{array}$$

Объяснение записи детьми необходимо, только требовать его надо не по окончании умножения (что гораздо труднее с точки зрения словесного выражения), а при записи частных произведений, как в предыдущем примере.

---

[1] Учитель, наверное, уже заметил, какую важную роль в письменных действиях играют предварительные упражнения на замену десятков на сотни и наоборот.

Специальную трудность составляет умножение в том случае, когда множимое содержит нуль в середине, например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}105\\6\end{array} \\ \hline 630 \end{array}$$

Причиной трудности здесь является невнимательность детей: то говорят, что $6 \cdot 0$ дает 6, то забывают о 3 десятках, оставшихся от умножения единиц.

*

Мы рассмотрели умножение трехзначного числа на однозначное в пределе 1000. Нетрудно расширить это действие на числа в пределе 10 000, например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}144\\7\end{array} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}576\\8\end{array} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}1296\\5\end{array} \\ \hline \end{array}$$

Дадим еще несколько разъяснений, касающихся умножения двузначного числа на двузначное [1]. В этом действии встает вопрос о последовательности умножения на единицы и десятки, а также вопрос записи произведений.

Чтобы дети самостоятельно пришли к нужной последовательности при умножении на единицы и десятки множителя, пусть сначала выполнят на доске умножение:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}37\\4\end{array} \\ \hline 148 \end{array}$$

Допишем перед 4 цифру 2.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}37\\24\end{array} \\ \hline 148 \end{array}$$

С помощью вопросов подтверждаем, что множителем

[1] Упражнениям из учебника должны предшествовать помещаемые здесь указания.

здесь является 24, т. е. 4 единицы и 2 десятка На единицы мы уже умножили число 37 и результат умножения записали под чертой; нужно следовательно, умножить еще 37 на 2 десятка. С помощью объяснений самих учащихся устанавливаем далее, что умножать будем так же, как умножали на единицы, т. е. умножим сначала 7 единиц, затем 3 десятка. Учащийся умножает: $2 \cdot 7 = 14$. Чего 14? 14 десятков. Вопрос: где записать? Так как умножали на десятки и получили десятки, то, следовательно, нельзя произведение писать на месте единиц; нужно сохранить закономерное подписывание разрядов и потому десятки нужно подписывать под десятками.

Следует, очевидно, четко отработать с детьми умножение на множитель, оканчивающийся нулями.

П р и м е ч а н и е. При письменном выполнении действий еще строже, чем при записи устных вычислений, надо соблюдать написание цифр в отдельных клетках тетради (доски).

Из письменных действий труднейшим, как известно, является п и с ь м е н н о е д е л е н и е. В этом действии трудно добиться от учащихся полного понимания того, что они делают, имея в виду новую запись действия; трудно также выполнять действие по существу [1].

Начинаем с деления двузначного числа на однозначное с случая, когда деление выполняется без остатка.

Например, 92 : 4. Сначала делим десятки, потом единицы. 9 десятков надо разделить на 4 равные части. Получается по 2 десятка, записываем их над десятками, и остается 1 десяток.

Проверяем, действительно ли так: 4 раза по 2 десятка — это 8 десятков, отнимаем 8 десятков от 9 десятков, остается 1 десяток. Показываем детям, как можно в

---

[1] В польской школе частное, как видно из дальнейших примеров, записывается над делимым; эта запись удобна в том отношении, что разряды частного пишутся над соответствующими разрядами делимого; поэтому пропуск нуля в частном (обычная ошибка) мало вероятен.— *Примечание переводчика.*

одной последовательности записать деление, проверку деления и остаток:

$$\begin{array}{l} 2 \\ \hline 92:4 \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

Что делать дальше? К 1 десятку присоединяем 2 единицы. Получится 12 единиц. Показываем, как это записать в принятой схеме:

$$\begin{array}{l} 2 \\ \hline 92:4 \\ \underline{8} \\ 12 \end{array}$$

Двенадцать единиц делим на 4 равные части, будет по 3 единицы. Где их записать? Учащиеся наверняка сами укажут место *над единицами* делимого, сумеют записать и проверить:

$$\begin{array}{l} 23 \\ \hline 92:4 \\ \underline{8} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

Важный момент. Имея запись полного деления, нужно требовать, чтобы учащийся прочитал ее, указывая при этом каждый отдельный шаг действия. Читая, учащийся называет десятки и единицы, а именно: 9 десятков разделить на 4 части, получим по 2 десятка; 4 раза по 2 десятка будет 8 десятков, остаток 1 десяток; прибавляем к нему 2 единицы, получим 12 единиц; делим на 4 части, получим по 3 единицы; 4 раза по 3 единицы будет 12 единиц, остатка нет (остаток нуль).

Следует учащимся показать, как можно проверить деление посредством умножения.

П р и м е ч а н и е. Навык овладения учащимися письменными действиями мы должны, очевидно, довести до автоматизма; при прохождении же деления надо на определенное время задержать детей на этом действии для более обстоятельного выяснения степени овладения этим действием. Это не только закрепит метод, но сыграет также большую образовательную роль, так как при этом дети будут осознавать путь, пройденный ими во время выполнения действия.

Еще одно замечание. Начинаем письменное деление с деления на части, так как в таком делении наиболее выразительно выступает разбиение делимого и частного на отдельные разряды. В дальнейшем деление обобщаем в том направлении, что говорим о делении на число в о о б щ е, не добавляя слова *частей.*

Письменное деление на однозначный, двузначный и трехзначный делитель требует заботливого соблюдения постепенности нарастания трудностей. Начинаем с *однозначного* делителя.

Этап первый. Сначала даем такое делимое, чтобы не нужно было сразу заменять десятки единицами или сотни десятками; ясно, что деление 639 : 3 гораздо проще, нежели деление 112 : 4. Поэтому, когда речь идет о понимании самой техники деления, останавливаем внимание детей на примерах первого типа с тем, чтобы ученик объяснил, что делит 6 сотен на 3 части, потом 3 десятка на 3 части, наконец, 9 единиц на 3 части.

Этап второй. Случай, в котором сотни не делятся на равные части в сотнях и надо их заменять десятками; например, 368 : 4. Имеем 3 сотни; деля их на 4 части, не будем иметь в каждой части ни одной сотни. Нужно, следовательно, заменить сотни десятками: 3 сотни — это 30 десятков, плюс 6 десятков, всего 36 десятков. Деля их на 4 равные части по десять, получим по 9 десятков. В этих примерах сначала надо так подбирать числа, чтобы десятки делились без остатка (см. этап третий).

Примечание. В данном примере нельзя говорить: «четыре в трех не содержится». Если ребенок скажет: «4 в трех не содержится», то не будет отдавать себе отчета в том, что 3 означает сотни. Поступаем, следовательно, иначе: деля сотни, получаем сотни, деля десятки, получаем десятки; этого и придерживаемся в работе. Если 3 сотни делим на 4 части, то сотен не получаем; следовательно, заменяем 3 сотни десятками, что вместе с 6 десятками даст 36 десятков; деля их, получаем десятки и полученную цифру пишем над десятками делимого.

Если дети хорошо поймут указанный способ деления на однозначное число, то уже не будут испытывать новых трудностей при делении на двузначное число. Например, в делении 384 : 12 выступает та же трудность: деля 3 сотни на 12 частей, не получим сотен; значит, надо 3 сотни заменить десятками. 30 десятков плюс 8 десятков будет 38 десятков; деля их на 12 частей, получим по 3 десятка в каждой части, а оставшиеся 2 десятка соединяем с единицами; получим 24 единицы, которые делим на 12 частей.

Таким образом, способ деления остается тем же самым — делим ли на большие или на меньшие числа; однако деление с возрастанием делителя усложняется и требует определенного метода по определению цифр частного.

Этап третий. Берем пример, подобный примеру второго этапа (в частном нет сотен), но, кроме того, при делении десятков получается остаток; например, 178 : 2. Сотен в частном нет; получаем 8 десятков; остается 1 десяток, который присоединяем к единицам. Это деление заканчивается без остатка, но можно также давать примеры деления с остатком.

Этап четвертый. От деления сотен получается остаток, который заменяем десятками, и снова получается остаток, который заменяем единицами, например, 552 : 2.

Этап пятый. Сюда должны быть отнесены примеры с нулем в частном: например, 832 : 4. После деления сотен переходим к 3 десяткам, которые на 4 части в полных десятках разделить нельзя, поэтому заменяем их единицами, а *место десятков в частном обозначаем нулем.*

Этап шестой. Сюда относим деление с нулями в делимом, а именно:

а) В делимом нуль на конце; при этом различаем примеры 560 : 5 и 640 : 4. В первом случае (после деления 6 десятков на 5) 10 единиц делим на 5 частей, во втором случае (после деления 24 десятков на 4 части) получаем 6 десятков, а *место единиц в частном обозначаем нулем.*

б) В делимом нуль в середине; при этом трудности могут быть весьма различными; например, деление 202 : 3 будет более легким, нежели деление 202 : 2, где ребенок после деления сотен не будет знать, что делать с нулем. Эта трудность сходна с той, которая уже встречалась в пятом этапе. Деление 202 : 5 также трудное, но трудность здесь исходит не от нуля в середине делимого, а из невозможности деления 2 единиц на 5 частей и появления нуля в частном на месте единиц.

Все указанные этапы должны быть весьма старательно отработаны при делении на однозначное число. Нетрудно будет их распространить на делимые, выражающиеся четырехзначными числами.

В тех случаях, когда делителем будет число, оканчивающееся нулем и имеющее только одну значащую цифру, например 9480 : 40 или 9490 : 40, не советуем применять «сокращение» делимого и делителя, отбрасывая в них нули. Такое «сокращение» часто приводит к ошибкам в случае деления с остатком; так, например, деление 9490 : 40 дает остаток 10, а если выполнить деление «упрощенно» (949 : 4), то получится остаток 1.

Аналогично, выполняя деление 9400 : 400, нельзя приводить это действие к виду 94 : 4.

«Сокращение» делимого и делителя отбрасыванием нулей можно применять лишь тогда, когда деление произойдет без остатка.

Деление на *двузначное* или *трехзначное* число принципиально новых трудностей не вносит, оно требует только определенной последовательности в подборе делителя. Специальную трудность составляет отыскание цифр частного. Система соответствующих упражнений должна быть такой, при которой облегчались бы указанные поиски.

Если дети систематически упражнялись в устном делении с остатком и привыкли находить *ближайшее известное им делимое* (делящееся на данный делитель без остатка), то работа будет весьма облегчена. Начинаем с десятичной таблицы деления без остатка; например, 180 : 30. Далее последовательность нарастания трудностей может развиваться в двух направлениях, а именно:

а) когда делитель оканчивается нулем; например, 190 : 30;

б) когда делитель не оканчивается нулем; например, 190 : 32, 190 : 37.

В первом случае, более легком, приучаем детей к нахождению ближайшего известного делимого; во втором случае приучаем их к «пробам», деления десятков на десятки, чтобы они смогли сориентироваться, какую цифру частного взять.

При трехзначном делителе поступаем так же, как поступали и в случае двузначного делителя, а именно: рекомендуем округлять делитель; например, для выполнения деления 900 : 225 советуем произвести «пробное» деление 900 : 200.

Деление чисел с нулями по существу своему не вызывает новых трудностей в сравнении с теми, которые уже дети должны преодолеть при делении на однозначное число.

9. Начальные сведения о дробях

Уже при первом знакомстве с дробями дети должны приобрести понятие *дроби как числа* — это является самым главным.

До этого ребенок знал *половину*, даже *четверть*, но это была всегда половина какого-то предмета, чего-то весьма конкретного, не имеющего никакой связи с числом. Теперь он должен познать половину и четверть как *числа*. В этом состоит главная задача учителя, очень часто им не замечаемая.

Дроби только тогда будут представляться детям числами, когда они будут служить для определения *количества*.

Весьма удобной конкретизацией при введении дробей является *круг* (кружок), рисуемый и вырезаемый детьми из бумаги. Круги должны быть достаточно большими и различной окраски. Дети складывают и разрезают эти круги на половины. Учитель имеет целые круги тех же самых цветов. Он собирает все половины кругов и, перемешав их, предлагает детям вытаскивать эти половины (момент несущественный, но весьма привлекательный для детей). После раздачи половин кругов происходит примерно такая беседа:

— Внимание! У меня один круг — какой? (Учитель показывает круг.) Синий. Те учащиеся, у которых меньше одного круга синего цвета, могут такой круг получить от меня за свои части. Соглашаются двое детей, имеющих по одной половине синих кругов. Получают полный круг за две половины. Возникает вопрос: как этот обмен записать?

Напомним, что уже с I класса дети приучены выражать свои действия формулой.

Учитель говорит: «Один круг обозначаем числом 1 (единица). Есть ли такое число, меньшее единицы, которым мы могли бы обозначить каждую часть круга? Каждая из отданных мне частей — это половина одного круга. Каким, следовательно, **числом** обозначить половину круга?» — «Половиной **единицы**».

— Да, половиной единицы,— говоря это, учитель пишет на доске число $\frac{1}{2}$.

Сколько нужно взять таких чисел, чтобы получить число 1? Как это записать? Записываем сложение:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Теперь учитель быстро обменивает с детьми другие круги на соответствующие половины, при этом один ребенок из каждой пары записывает значение единицы на доске, как показано выше. Пары детей садятся одновременно за парты.

На этом уроке лучше задержаться на понятии числа, меньшего единицы, и перейти, положим, к рисованию других кругов, которые будут нужны на следующих уроках.

Примечание. Пусть учитель установит определенную величину кругов и предложит учащимся все круги делать одинаковыми.

Несоблюдение этого указания затруднит усвоение детьми понятия дроби, поскольку половины были бы различны по величине. В будущем, для того чтобы углубить понятие дроби, нужно будет к данному вопросу возвратиться снова.

На следующих уроках переходим к смешанному числу, не вводя, конечно, соответствующего названия. Учитель раздает всем детям в разных количествах круги и еще по одной половине круга. Часть детей записывает на доске число имеющихся у них кругов ($5\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ и т. д.), после чего для проверки записи показывают свои круги; или одни дети говорят, сколько у них кругов, а другие записывают соответствующие числа на доске.

Ставим вопрос: как подсчитать, сколько всего кругов на первой парте? в первом ряду? и т. д. Интересна проблема записи и сложения. Например:

$$2\frac{1}{2} + 3\,\frac{1}{2} + 4.$$

Как складывать? Дети, руководимые интуицией, скажут, что надо сначала сложить целые числа, потом дроби. После выполнения сложения в данном примере надо сразу приучать детей к свободному обращению с дробями; пусть, следовательно, ищут самые различные способы сложения (перестановка слагаемых).

В дальнейшем следует перейти к распространению понятия половины на другие величины: вычисление половины дюжины, часа, килограмма, метра и т. д.

Затем переходим к представлению целых чисел в виде половин и обратно — к исключению целого. После предварительной работы с кругами эти замены уже не будут представлять никакой трудности.

После того как понятие половины хорошо усвоено, переходим к понятию *четверти*. Для этого раздаем детям цветные круги и предлагаем, сложив их пополам, разрезать, а затем каждую из полученных частей разрезать еще на две равные части.

С помощью вопросов устанавливаем, что 1 круг при этом разделился на 4 равные части, что каждая часть является одной четвертой частью круга.

Полезно учителю, как это делалось на первом уроке с половинами, обменять целые круги на четверти. Части здесь еще меньше, нежели половины, а потому число, которое будет обозначать новую часть, должно быть еще меньше, чем половина единицы.

Весьма вероятно, что дети уже сами назовут это число $\frac{1}{4}$ и сумеют его записать.

С помощью конкретизации (кругов) дети убеждаются в том, что надо составить сумму четырех таких новых чисел, чтобы получить число 1. Пишем сложение:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

С помощью тех же частей круга дети приходят к убеждению, что $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. На следующих уроках, привлекая ту же конкретизацию, дети познают число $\frac{3}{4}$.

Важный момент для выяснения усвоения детьми понятия дроби: выписываем известные детям числа, меньшие единицы, т. е. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; затем спрашиваем: «Что представляют собой числа $\frac{2}{4}$ и $\frac{4}{4}$?»

Кульминационный пункт. Могут ли быть числа, еще меньшие, чем $\frac{1}{4}$? Если дети хорошо понимают дроби, то дадут правильный ответ.

Остается еще очень важный вопрос, о котором уже упоминалось: почему половина всегда равна половине, *хотя величина делимого предмета может быть различной?* Из практики знаем, что даже учащиеся V класса затрудняются дать правильный ответ на этот вопрос; поэтому данный вопрос надо разрешить с детьми уже в IV классе, если он поднимется самими учащимися; в противном случае его можно отложить до V класса. Хотим, однако, дать определенное направление в его разрешении.

Возвращаясь к целым числам, спрашиваем детей, можно ли написать равенство $1=1$ и что оно обозначает? Пусть дети напишут по своему усмотрению другие равенства; например, $3=3$, $4=4$.

Всегда ли $1=1$? Показываем один большой круг и один малый круг. Равняется ли единица единице?

Этот момент является чрезвычайно интересным для учителя-психолога. Здесь почти видно, как работает мысль ребенка. Вопрос весьма трудный, требующий способности к абстракции, и вместе с тем как он развивает детей, углубляя их понятие о числе и знаке равенства.

Пусть дети думают. Если скажут, что единица не равна единице, то убеждаем их в том, что в таком случае нельзя написать ни одного из тех равенств, которые предложены ими.

«Что нам показывает число?» — «Сколько имеется предметов».— «Говорит ли оно о том, какие предметы: большие или малые?» — «Нет».— «Следовательно, предметы могут быть различных размеров, но числа, их определяющие, равны».

После такого объяснения можем перейти к дробям. Разрезаем показанный детям круг на половины и предлагаем обозначить половину круга числом на доске. Ребенок пишет: $\frac{1}{2}$.

То же самое делаем с другим кругом (круги разные по величине). Можно ли между половинами кругов написать знак равенства:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ ?$$

Если дети поняли смысл равенства чисел, то теперь сумеют сами дать объяснение, основанное на том, что каждая из половин всегда есть половина *целого*, половина *единицы*, хотя эти целые могут быть различными по величине; число в этом случае говорит о том, какая часть целого взята и совсем ничего не говорит о величине целого.

10. Понятие о слагаемых, сумме, разности и т. д.

Остановимся теперь на вопросе о введении новых важных понятий арифметики. Это понятия о сумме, разности, слагаемых и т. п.

Заметим, что дело здесь не столько в названии известных терминов, сколько именно в *новых понятиях*, требующих иного взгляда на числа, взгляда, отражающего *взаимные отношения последних*.

Определений новых понятий, в согласии с нашим принципом, не требуем от детей; если эти понятия становятся ясными для них, то они соответствующие названия будут применять правильно и свободно.

Эти понятия следует ввести практически. Не нужно ничего объяснять, надо только самому учителю в должный момент в связи с конкретным примером использовать соответствующее название; тогда названное понятие само собой возникнет в сознании ребенка. Например, при сложении говорим: «Прочитай все слагаемые». Если ребенок проявит колебание, сразу добавляем: «Все числа, которые надо сложить». Если уже один раз употребили слово *слагаемое*, то применяем его теперь часто, во всех возможных случаях.

Когда убедимся, что смысл указанного названия вполне ясен, вводим следующее понятие — понятие *суммы*, также не объясняя и не предлагая повторять или запоминать это слово, а только часто его применяя.

Специальную трудность представляет понятие **разности** при вычитании, так как результат вычитания дети самопроизвольно называют *остатком*. Следует, таким образом, сделать большой упор на понятие **разности.** Для этого надо ставить соответствующие вопросы, например: «Какая разность между 17 и 10?» Наконец, по ознакомлении детей с *уменьшаемым и вычитаемым* предлагаем время от времени после выполнения ребенком вычитания указать разность между уменьшаемым и вычитаемым.

Можно сомневаться в том, достаточно ли самого употребления надлежащих терминов для овладения детьми соответствующими понятиями. Но мы даем себе отчет в том, что стремимся единственно к тому, чтобы эти термины были детям не чуждыми, а связанными с соответствующими понятиями, когда они по учебнику будут изучать названия чисел в действиях.

ВЫРАЖЕНИЯ ДВУХ НАИМЕНОВАНИЙ

В прошлые времена, когда в употреблении были недесятичные меры (например, локти, стопы, дюймы), замена одних мер на другие была весьма обременительной. Теперь осталось в употреблении немного недесятичных мер, например в измерении времени, а также в счете предметов копами, мендлями [1] и дюжинами.

Вычисления в копах, мендлях и дюжинах не представляют трудностей в смысле усвоения новых понятий. Сравнение копы с мендлем или дюжиной демонстрируем на конкретных вещах, так как принципиально всюду, где только возможно, стремимся при обучении математике развить представления детей, ибо только благодаря представлениям (опирающимся на наблюдения) задачи и упражнения приобретают для них реальный смысл. Тогда дети без труда усвоят преобразование выражений двух наименований, например замену 3 дюжин 9 штук на штуки и, наоборот, исключение дюжин из 45 штук.

В III классе дети должны ознакомиться с выражениями двух наименований в применении к деньгам (злотые — гроши) и к метрическим мерам (метры — сантиметры), а также с единицами веса (килограммы — декаграммы) и измерениями емкости с использованием литра.

Измерение емкости и взвешивание вводим, очевидно, конкретно, т. е. с применением действительного литра и весов с гирями. Если школа весов не имеет, то учитель должен взять их на время в магазине или в крайнем случае провести взвешивание в магазине.

Так же как оценки расстояния «на глаз», весьма поучительными для детей являются оценки веса предметов «на руку» перед взвешиванием. Само взвешивание на весах не дает никакого понятия о тяжести. Дети (а часто и

---

[1] *Мендель* — единица счета (составляет 15 штук); употребляется, например, в сельском хозяйстве для счета снопов в копнах.— *Примечание переводчика.*

взрослые) делают весьма фантастические предположения о том, сколько может весить данная вещь. Пусть поэтому дети берут предмет в руку и пробуют определить его вес, а затем проверяют его вес на чашках весов. После таких упражнений дети не только приобретут опыт в определении тяжести, но — что еще важнее — осознают значение объективных мер. Неизмеримо большую, формирующую сознание ребенка роль при этом играет возможность самоконтроля, исправления своих ошибок самим учащимся, так как в данном случае не учитель говорит ему об ошибках, не он поправляет, а сам ребенок взвешивает и убеждается, что ошибался. Неплохо проделать с детьми известный из психологии опыт, ярко оттеняющий потребность объективной точности измерения, для предупреждения ошибочных субъективных оценок. Пусть учитель наполнит, используя, например, вату и дробь, две коробки — одну значительно больше другой, предварительно взвесив коробки, чтобы они имели совершенно одинаковый вес, и предложит детям оценить вес коробок в руке. Коробка больших размеров (с ватой) будет казаться явно легче. Проверяем веса коробок, кладя их на чашки весов, и видим... Удивление!

Меры длины — метры, сантиметры — учащимся уже известны; здесь, однако, речь идет о приобретении навыка в *измерении* и *оценке расстояний «на глаз»*.

Оценять «на глаз» нужно не только длину классной комнаты, парты, стола и т. п., но также и высоту предметов. Измерение высоты можем проводить, определяя рост детей. Такое измерение будет интересным для детей. Договариваемся с детьми о том, как будем измерять их рост. Ясно, что учитель только контролирует, измеряют сами дети. Ребенок, рост которого измеряем, становится прямо спиной к двери или стене; на голову ему кладется горизонтально дощечка (возможно, тетрадь или картонка) так, чтобы перпендикулярно касалась двери или стены, о которую ребенок опирается спиной; в месте пересечения двух плоскостей — горизонтальной и вертикальной — делается отметка карандашом, после чего ребенок отходит, а отмеченная карандашом высота измеряется сантиметровой лентой.

Измерение роста вызовет, естественно, запись полученного результата, так как детям интересно будет проверить в конце года, выросли ли они и на сколько.

Независимо от того, в каком классе начинаем *действия над выражениями двух наименований*, первым действием должно выступать *устное сложение* с записью графах.

м	*см*
5	40
+ 2	78
1	87
10	05

Складывая сантиметры, получаем 205 *см*, но в графе сантиметров записываем только 05 *см*, а 200 *см*, т. е. 2 *м*, прибавляем к метрам.

Разумеется, нужно придерживаться определенной последовательности в упражнениях, постепенно преодолевая встречающиеся трудности. Что, однако, должен приобрести ребенок при помощи записи устного сложения и вычитания в указанных графах? Чаще всего после устного решения нескольких примеров в такой записи дети самостоятельно приходят к мысли о таком же расположении компонентов в письменных действиях и во всяком случае поймут правило подписывания одной цифры под другой, поймут, что сложение нужно начинать с сантиметров, так как из них может получиться метр, что из меньших значений получается большее и что это большее значение ставим на месте, стоящем слева от места, занимаемого меньшими значениями.

Также поступаем при *вычитании*:

м	*см*
$-\begin{matrix}9\\2\end{matrix}$	$\begin{matrix}62\\75\end{matrix}$
6	87

Так как в данном примере сантиметров в уменьшаемом недостаточно, надо взять в нем один метр и обратить его в сантиметры.

Специальную трудность будет представлять вычитание из чисел, оканчивающихся нулями, как, например:

м	*см*
$-\begin{matrix}10\\1\end{matrix}$	$\begin{matrix}00\\96\end{matrix}$
8	04

Переходим далее к у м н о ж е н и ю и д е л е н и ю выражений двух наименований.

1. Если хотим подсчитать, сколько материала потребуется на 6 фартуков, расходуя по 2 *м* 75 *см* на фартук, то умножение

$$6 \cdot 2 \text{ м } 75 \text{ см}$$

можем выполнить у с т н о, умножая отдельно метры и отдельно сантиметры:

$$6 \cdot 2 \text{ м} + 6 \cdot 75 \text{ см}.$$

Результат умножения $6 \cdot 75$ *см* = 450 *см* представляет длину, из которой нужно исключить метры: 4 *м* 50 *см* (надо, следовательно, предварительно научить детей исключать метры из сантиметров).

Выполнив полное вычисление устно, записываем окончательный результат:

$$6 \cdot 2 \text{ м } 75 \text{ см} = 16 \text{ м } 50 \text{ см}.$$

Производя в этом примере письменное умножение, заменяем 2 *м* 75 *см* на 275 *см*, и выполняем умножение отвлеченных чисел, а в результате исключаем метры из сантиметров:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 275 \\ 6 \end{array} \\ \hline 1650 \end{array} \text{ см} = 16 \text{ м } 50 \text{ см}.$$

(О множителе и делителе для именованных чисел говорится на стр. 163 в разделе «Типы задач».)

2. Когда хотим выполнить устно *деление на части*, например 16 *м* 50 *см* : 6, делим сначала метры на 6 частей, получаем в каждой части по 2 *м*. Остается остаток 4 *м*; присоединив его к сантиметрам, получаем 450 *см*. Деление 450 *см* : 6 дает 75 *см*. Окончательно, следовательно, получим:

$$16 \text{ м } 50 \text{ см} : 6 = 2 \text{ м } 75 \text{ см}.$$

Легче, однако, выполнить данное деление письменно; с этой целью заменяем 16 *м* сантиметрами и выполняем деление отвлеченных чисел:

$$\begin{array}{l} \;275 \\ \hline 1650 : 6 \\ \underline{12} \\ 45 \\ \underline{42} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

В результате деления получаем 275 *см*, что, по исключении метров, дает 2 *м* 75 *см*.

3. Наконец, рассмотрим *деление по содержанию*; например. 16 *м* 50 *см* надо разделить по 2 *м* 75 *см*.

Записываем:

$$16\ м\ 50\ см : 2\ м\ 75\ см.$$

В обоих способах деления, как у с т н о м, так и п и с ь м е н н о м, выполнение этого действия основано на «пробах».

Пробуем при устном вычислении:

$$5 \cdot 2\ м\ 75\ см = 13\ м\ 75\ см \text{ — мало,}$$

$$6 \cdot 2\ м\ 75\ см = 16\ м\ 50\ см \text{ — как раз;}$$

следовательно,

$$16\ м\ 50\ см : 2\ м\ 75\ см = 6.$$

Письменное деление выполняем после замены метров сантиметрами:

$$\begin{array}{r} \underline{6} \\ 1650 : 275 \\ \underline{1650} \\ 0 \end{array}$$

И здесь не обошлось без «проб».

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Пожалуй, ни один предмет обучения не подвергался таким методическим и программным изменениям, как геометрия.

Неоднократно и с полным убеждением высказывались мнения, что обучение геометрии является чем-то чуждым для ребенка, что геометрия представляет собой книжные знания. В результате мы имеем уменьшение объема геометрических знаний в основной[1] школе и устранение геометрии как отдельного предмета обучения из младших классов этой школы.

Но геометрическая проблема в обучении продолжает существовать, ибо, если когда-нибудь хотя бы при самых малых программных требованиях мы начнем обучать геометрии, перед нами всегда встает задача, как ее приблизить к ребенку.

В самом ли деле «все мы в наше время находимся в состоянии искусственного паралича геометрических способностей», действительно ли «Европа утратила геометрический инстинкт и навык к геометрическому наблюдению?»[2]

Очевидно, геометрию, более чем арифметику, можно сделать конкретной, а следовательно, доступной для ребенка.

Возьмем, например, учебные пособия по геометрии в виде фигур из дерева и металла, весьма старательно обдуманных, которые использует Монтессори в своих школах. Ребенок всем этим манипулирует, срисовывает, укладывает, окрашивает и — не зная даже когда — усваивает опытно целый ряд геометрических сведений. Например, благодаря тому, что в углублении квадрата прямоугольники сложены из отдельных треугольников, ребенок видит, что между прямоугольником и треугольником существует какая-то связь, хотя форма этих фигур совершенно различна. «Вот здесь проявляется интуиция равновеликих фигур», — говорит в связи с этим Монтессори.

Действительно, множество истин ребенок может подметить благодаря удачно подобранному материалу, получит, не возражаем, достаточную подготовку к систематическому изучению геометрии, но... приобретет ли пони-

---

[1] Польской основной школой является семилетка.— *Примечание переводчика.*

[2] Mary Boole, Подготовка ребенка к точным наукам, перевод Марии Садзевичовой, стр. 47.

мание связи геометрии с жизнью? Иначе говоря, почувствует ли ребенок потребность геометрии?

Существо этой проблемы хорошо понимал Шарельман, который тему к уроку геометрии искал на улице, на прогулке, вне классной комнаты. Так, например, о *параллельных прямых* он говорил с учащимися в связи с укладкой на улице трамвайной линии: «Как поступают рабочие, чтобы рельсы были правильно уложены? (Нашелся учащийся, который видел, как рабочие проводили измерения.) Чем измеряли? (Прибор был нарисован на доске.) Даже одного сантиметра расхождения в измерении быть не может. Как должны быть расположены рельсы?»

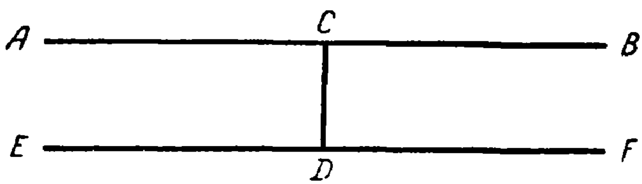
— Рельсы должны быть всегда одинаково удалены друг от друга.

— Должны иметь одинаковое направление.

— Должны лежать на одинаковом расстоянии.

— Вот именно, а что значит *расстояние*?

Если теперь Шарельман переходил к рисунку на доске, то его рисунок не представлял детям линий, о свойствах которых ни с того ни с сего нужно было бы говорить, а изображал рельсы, которые должны идти на равных расстояниях друг от друга, параллельно. «Чем же, следовательно, в данном случае является *расстояние*?» Чтобы помочь детям определить это понятие, которое дети, как уверяли, хорошо понимали, но не знали, как выразить словами, Шарельман снова пользуется соответствующим рисунком.



— *CD* есть расстояние между линиями *AB* и *EF*, значит, они должны идти параллельно.

— Если бы нарисовали CD чуть наискось, то уже не могли бы называть CD «расстоянием».

— О, теперь уже понятно! При C и D углы должны быть прямыми.

— Да, *расстояние* — это перпендикулярное удаление между двумя параллельными линиями.

— А теперь уже, наверное, сможете мне сказать, как проверить, действительно ли линии параллельны?

— Надо сделать два измерения, чтобы проверить, являются ли углы при C и D прямыми.

В дальнейшем дети подмечали параллельные линии в классе; возник вопрос о *параллельных плоскостях*. Наконец, переходили к различным отдельным предметам (локомотив, судно), а также к группам предметов (меблированная комната, фабричный город) и находили в них параллельные линии.

Несмотря на то, что этот интересный урок Шарельман проводил в старшем классе, мы привели сокращенное содержание урока с тем, чтобы выделить его главную мысль в обучении геометрии, а именно: он стремился к тому, чтобы дети с течением времени приобрели убеждение, «что геометрические знания не являются чем-то изолированным от жизни, а являются плодотворными знаниями, из жизни происходящими и в жизни применяемыми [1].

Также «жизненной» предстает геометрия, когда с ее законами встретится ребенок в практической работе при *измерении отрезков, при изображении и изготовлении моделей прямых углов, перпендикулярных прямых, прямоугольника, квадрата, круга.* Со всем этим имеет дело ребенок в практических занятиях и рисовании, прежде чем о том же услышит на уроках математики.

Геометрические понятия ребенок как бы «по пути» собирает уже с I класса.

---

[1] Heinrich Scharrelmann, Produktive Geometrie, стр. 24.

А именно: направления движения, положения, связанные с понятиями *выше, ниже, направо, налево* и т. п.; кроме того,— *прямой и кривой линий* (на уроках рисования); различий *горизонтального* и *вертикального положений* предметов (на уроках рисования); фигур, прямоугольника, квадрата, треугольника, круга (на уроках рисования и на уроках труда).

Есть еще один предмет обучения, прекрасно способствующий ознакомлению детей с геометрическими понятиями,— это ф и з к у л ь т у р а с и г р а м и и з а б а в а м и.

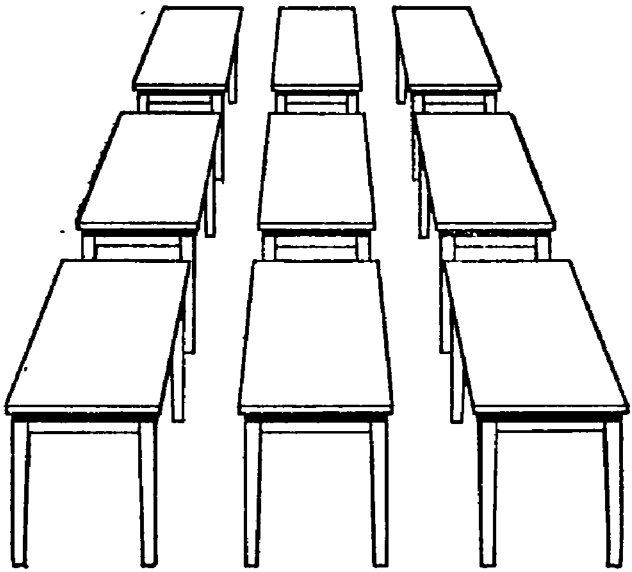
Действительно, как мы уже об этом упоминали, трудно делить работу детей в I классе на «предметы обучения», ибо на уроке по каждому предмету обучения имеем столько взаимных проникновений одного предмета в другие, что если бы ради систематизации обучения захотели разрушить эти проникновения, то удалили бы из урока жизнь, тогда как именно эти различные связи между предметами создает сама жизнь.

Ведь не существует ни одной реальной вещи в мире, которая бы целиком ограничивалась областью одной науки.

Если, следовательно, геометрические свойства должны быть для ребенка связаны с жизнью, то прежде чем он начнет их систематизировать на уроке геометрии, он встретится с ними в «своей» жизни, т. е. раньше всего в *играх*.

Гимнастические упражнения, игры, забавы естественным путем знакомят детей с направлением движения, будь то в марше или поворотах *направо* и *налево*, в броске мяча *прямо, вверх, выше, ниже* или в прохождении *под «мостом»* и т. п. Об одном должен учитель помнить: во всех этих упражнениях нужно к а ж д о м у ребенку дать возможность проявить с в о ю ориентацию, ибо дети совершенно бессмысленно повторяют движения проводника.

Можно организовать «игру в управление словами», пользуясь рисунком, например: рисуем на большом картоне 9 столов в перспективе, т. е. так, чтобы были видны крышки столов в трех поперечных и трех продольных



Вырезаем из картона цветной кружок. Игра заключается в том, что один ребенок должен прикалывать кружок в том месте, которое словами — без единого жеста — укажет ему другой ребенок. Например: «Второй поперечный ряд; третий продольный ряд; посередине; спереди». Класс проверяет, правильно ли выполнено распоряжение.

Очевидно, если учитель понимает, в чем существо этих упражнений и какое значение они могут иметь для развития ориентации детей, то легко найдет и другие различные упражнения в форме управления движениями ребенка: принесением, отнесением, размещением предметов и т. п.

Пожалуй, не следует добавлять, что двигательные упражнения детей не перестают быть двигательными от того, что служат для приобретения геометрических понятий; это значит, что они продолжают служить цели физического формирования ребенка.

То же самое, вводя понятия кривой, прямой линии, ее горизонтального, вертикального направления и т. д. на уроках рисования, учитель не может трактовать это как урок геометрии, перенесенный на урок рисования. Нет, это урок рисования со всеми присущими рисованию качествами, которые ничуть не препятствуют созданию понятий, потребных позднее в геометрии.

С кривой и прямой линией дети знакомятся на основе известной истории о Томе Пальчике, который, когда шел следом за родителями, братьями и сестрами через поля к лесу, обозначал себе дорогу, бросая через некоторые промежутки времени белые камешки. Учительница демонстрирует это сцену, давая самому маленькому, последнему в ряду ребенку белые камешки для бросания в пути. Дорога ведет *прямо* «через поле к далекому лесу»; впереди идет учительница, чтобы сохранить направление прямой линии. Достигнув «леса», дети возвращаются на свое место и присматриваются, обозначил ли Том Пальчик дорогу. Изображаем дорогу белым мелом на доске, обозначая точками следы камешков. Чтобы рисовать быстрее, учительница показывает, что можно в этом случае дорогу изобразить так: отметить только первую точку и провести линию к последней точке, показывая тем самым направление дороги от дома до леса.

Теперь дети карандашами на своих листах бумаги рисуют направление дороги Тома Пальчика; при этом учительница всегда требует от детей объяснения выполненного действия. На бумаге дети обозначают две точки — дома и леса — и проводят прямую линию, говоря, что от первой точки «быстро одним движением карандаша идут через все другие точки к последней». Употребление слова *точка* здесь уместно именно с точки зрения связи точки с прямой, а описание, что проходят между первой и последней точками через все другие, которые на рисунке не обозначены, подсказывают построение математической линии. С помощью этого рисунка в подсознании детей создается также основа для будущего черчения отрезков в масштабе.

Для выработки сноровки руки (имеются в виду уроки рисования) предлагаем детям чертить линии всегда с обозначением точек *откуда—куда*, мотивируя это значительным влиянием, какое на владение мускулами руки оказывает поставленное ограничение движения; произвольное же движение карандаша вело бы не к управлению рукой, а к подчинению мускулам руки.

На основе той же истории о Томе Пальчике в другое время дети знакомятся с *кривой* линией. Снова устанавливается ряд детей с Пальчиком в конце; теперь инсценируется движение детей в лесу. В лесу идти прямо нельзя, так как нужно обходить поставленные препятствия (отдельные дети или столы, которые обозначают деревья, озерки и т. п.). Том обозначает дорогу камешками. Когда теперь смотрим на дорогу, видим, что она не прямая. Рисуем ее на доске, обозначая мелом точки, изображающие препятствия, которые должен был обходить Том Пальчик, а дорогу изображаем уже не точками, а линией, показывающей направление движения Тома. Таким же способом дети рисуют линии у себя на бумаге, при этом учатся правильно держать бумагу и карандаш; урок не перестает быть уроком рисования.

Дети усваивают особенности *прямой* и *кривой* линий. Дается, например, такое сравнение прямой и кривой линий: «Эта точка на доске будет обозначать дом Павлика. Павлик, чтобы прийти в школу, идет дорогой *прямо* (учитель чертит прямую, которую оканчивает в другой точке, «в школе»). Но однажды, возвращаясь из школы, Павлик заметил на дороге большую собаку, которая его перепугала. Что он сделал, чтобы избежать встречи с собакой и непременно попасть домой?» — «Должен обойти собаку, как это делал Том Пальчик, когда встречал препятствия в лесу». — «Верно, вот поворот, который сделал Павлик (учитель рисует *кривую* линию от школы к дому). Как думаете, почему Павлик не всегда возвращался домой этой дорогой?» — «Потому что она длиннее».

Дети интуитивно чувствуют, что самая короткая дорога между двумя точками есть прямая. Следует все же с помощью шнурка проверить правильность их утверждения. Все это, надо помнить, не есть еще геометрия. Это — собранные жизненные факты, в которых позже найдется материал для работы мысли при установлении строгих геометрических понятий.

*   *
*

Вероятно, также не будет вредным для геометрии выделение эстетических качеств линии. Полезно живо представить себе те особые качества линии, о которых с поэтическим взлетом говорится в одном пособии по рисованию.

«Прямая есть *особо* несгибаемая линия. Никакое внешнее влияние не действует на нее, никакое препятствие не отвлекает ее. Стремится в направлении, однажды полученном при ее возникновении, непоколебимо, как будто на свете не существует другой силы, кроме нее. Является она проявлением постоянства, которое ничем не может быть нарушено. Быстрая и свободная, мчится к своей цели, как острый и уверенный порыв. Ее путь так надежен, так лишен всяких случайностей, чего-то непредвиденного, что вследствие этого необходимо возникает чувство холода, твердости и монотонности».

Каким путем дать детям возможность почувствовать признаки различных линий? Очевидно, не с помощью изложения или простого наблюдения, ибо взгляд ребенка, приученный к безразличному наблюдению вещей, не вскроет глубокого смысла этих признаков. Ребенок должен ощутить эти линии в себе, в соответствующем положении своего тела, чтобы ярче осознать их.

Приведем несколько примеров из этого же пособия, дающие возможность детям почувствовать свойства *кривой* линии.

Учительница предлагает детям перенести на плечах тяжесть достаточного веса, чтобы требовалось определенное усилие. Инстинктивно ребенок согнется, чтобы придать телу больше эластичности, а вместе с тем и сопротивляемости. Показывает детям картинки с людьми, обремененными тяжестями, привлекает ежедневные наблюдения детей за такими явлениями. Таким образом, тело человека сгибается, как рессоры, оно пружинисто, следовательно, не ломается. Показывает, что палочка, которая не гнется, может быть сломана. Естественным путем переходим к сказке о дубе и тростнике. Проводится инсценировка: дети представляют тростинки, которые сгибаются под действием ветра, и дуб, который не гнется, а валится.

Дети соответствующими изгибами рук и тела создают дуги мостов, крепления кафедры; в связи с этим учительница говорит о широком применении кривой линии в строительстве.

От понятия пружинистости, гибкости учительница переходит к приветствиям. Духовная ценность прибавляется к физической. Дети кланяются друг другу, замечая, что, наклоняясь, создают кривую; посылают рукой воздушные поцелуи, подают цветы... Эти движения в виде кривой они рисуют на доске и на бумаге.

Переходим теперь к другому признаку кривой линии: кривая проявляет тенденцию к о к р у ж е н и ю, к о х р а н е н и ю, к з а д е р ж а н и ю. Кривые линии мы встречаем в гнездах птенцов, раскрытых материнских крыльях, морских раковинах.

В этих качествах кривой дети убеждаются непосредственно, когда обнимают своих товарищей, прикасаютсч к своей голове, соединяют ладони, чтобы удержать в них воду.

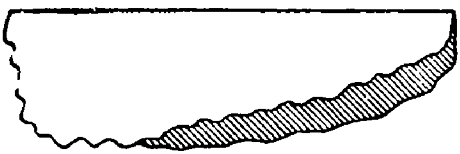
Мы дольше задержались на этих примерах, чтобы конкретно показать учителю, что урок о линиях не должен быть «куском геометрии», перенесенный в рисование, но, будучи целиком уроком рисования, обязан подготовить почву для будущих уроков геометрии.

Новым понятием, с которым перед этим ребенок возможно не встречался, является понятие *отрезка* прямой.

Очевидно, дети уже изображали отрезки, применяя их в рисунках и на уроках труда, но делали это без осознания различия понятий отрезка и прямой.

С точки зрения математики, учитывая в дальнейшем изучение геометрии, это различие важно. Поэтому его нужно соответствующим образом оттенить.

Пусть при помощи сгибания листа бумаги дети получают *прямую линию*; пусть они попробуют, приложив к глазам, *визировать*. Предлагаем детям изобразить прямую линию на доске и после этого разъясняем им, что прямую всегда мысленно можно продолжить, она, собственно, не имеет конца.



Далее говорим: «Мы изобразили прямую линию. Но нельзя ведь изобразить то, что не имеет конца! Что же именно мы изобразили?»—«Кусок прямой линии».—«Да, *отрезок*». Говоря это, делаем соответствующий жест, обеими руками как бы отрезая с обеих сторон невидимую прямую. Потом еще раз иллюстрируем уже приобретенное детьми понятие рисунком на доске и без труда переходим к черчению и обозначению отрезков. Изображая отрезки, следует как учителю, так и учащимся использовать линейку. Это уже урок геометрии, а не рисования, поэтому здесь нужна определенная точность; на уроках же рисования дети изображают прямые и кривые линии от руки.

Другим важным геометрическим понятием, которым, по нашему мнению, дети должны овладеть перед изучением прямоугольников, является понятие *угла*. Для детей углом является чаще всего угол в комнате, окне и т. д. Эту ассоциацию, возникшую в представлении детей, надо рассеять, чтобы она не затрудняла дальнейшее изучение геометрии.

Начинаем с прямого угла. Конкретизация должна быть подобрана так, чтобы выделялся угол. Для этого можно взять бесформенные листы бумаги («конкретное в горсти»), которые дети сгибают, чтобы получить прямую линию, а затем, согнув листы так, чтобы обе полученные части совпали, получим прямой угол. Далее дети пользуются полученными углами для проверки прямых углов в классе путем накладывания бумажной модели. Ставим перед ними соответствующие вопросы, например: «Что больше, твой угол из бумаги или угол у доски?» После проверки делается вывод: эти углы совмещаются — значит, они равны.

Через такое сравнение углов дети приходят к выводу, что все прямые углы равны между собой. Это очень важное убеждение, так как на нем будет основано понимание того, что величина угла не зависит от длины сторон. Учитель чертит на доске прямые углы с различными длинами сторон, и дети проверкой убеждаются, что длина сторон не меняет величины угла. Это убеждение дети должны получить из рассмотрения именно прямого угла, так как при этом лучше всего могут уяснить величину сравниваемых углов.

На примере прямого угла дети знакомятся с названиями *сторон и вершины* угла, что не составляет никакого труда.

Сгибая модели прямого угла, дети получают острые углы.

Уже из сравнения прямого угла с острым детям видно, что острый угол всегда меньше прямого, хотя стороны первого могут быть длиннее сторон прямого угла.

Дети уже имели возможность (об этом подумал учитель) наклеивать *квадраты* и *прямоугольники* разной величины друг на друга; при изготовлении украшений к елке вырезали одинаковые *кружки*; проверяли с помощью двукратного сгибания листа бумаги, являлись ли данные углы прямыми.

На все эти опытные сведения должен опереться учитель в дальнейшем.

Поскольку, как мы предполагаем, дети знакомы уже с прямоугольником и квадратом, пусть, следовательно, сами упорядочат свои сведения о них и таким путем углубят эти понятия.

Учитель на доске начертил, а лучше всего—приколол вырезанные из цветного картона разной величины прямоугольники и квадраты. Ставит перед учащимися вопрос. «Как эти фигуры называются?» — «Прямоугольники... Есть и квадраты». Такого ответа учитель ожидал; именно теперь учитель должен привести детей к логическому и, следовательно, самому трудному упорядочению объемов понятий: *квадрат — прямоугольник*. Учитель предлагает показать все прямоугольники. Далее завязывается с детьми беседа: «Как узнали прямоугольники? (Дети, очевидно, не дадут сразу точного ответа.) А как узнали квадрат?» Ведь квадрат имеет тоже четыре стороны и четыре угла, как и прямоугольник; имеет также все прямые углы (измеряем меркой), а следовательно, тоже есть прямоугольник, только имеет что-то такое, что его отличает. Доходим до утверждения, что квадрат имеет все равные стороны. Таким образом, квадрат — это такой прямоугольник, у которого все стороны равны.

Подобный характер должен иметь также урок о круге, т. е. и здесь нужно упорядочить уже имеющиеся опытные сведения детей.

Нужны ли здесь *определения?* Определение, данное в учебнике, должно служить для ребенка облегчением формулирования его собственных мыслей; поэтому будет хорошо, если это определение ребенок прочитает и убедится, что именно так и есть, как излагает книжка, но не следует требовать заучивания определений на память. Определение представляет для ребенка прежде всего языковую трудность, его связность не соответствует характеру детской речи; поэтому позволим ребенку рассказывать, что он знает о фигурах, ибо форма рассказа для него будет наиболее близкой. Если сделать излишний упор на усвоение на память, то вопрос из сферы мышления перейдет в сферу памяти. Определения являются результатом исканий, умственного труда, гипотез, проверок, т. е. объяснением собственных действий. Они выступают в конце работы, а не в ее начале; об этом следует всегда помнить и никогда не начинать с них в работе с детьми.

ПОДГОТОВКА К МАСШТАБУ

Прежде чем дети познакомятся с картой, они должны понимать масштаб. Подготовка к усвоению масштаба должна быть постепенной, так как это понятие действительно трудное.

Нельзя «почувствовать» величины предметов, представленных в масштабе, без осознания и представления различия между уменьшением линейных размеров и уменьшением поверхности. Если детям сказано, что на рисунке размеры тетради — длина и ширина — уменьшены в десять раз, то они, наверное, подумают, что десять таких малых тетрадей равны по величине действительной тетради. Нужно убедить их, что это не так.

Однако, прежде чем перейти к двумерному уменьшению фигур, следует добиться ясного представления детьми линейных размеров предметов в соответствии с их уменьшением. Предлагаем измерить высоту шкафа, стола, кресла и эти высоты обозначить вертикальными отрезками на доске. Шкаф имел, допустим, высоту в $1\frac{1}{2}$ *м*; следовательно, изобразить ее на доске нельзя. Поэтому договариваемся изображать высоту шкафа с уменьшением: за 1 *м* возьмем 1 *дм*, за половину метра — половину дециметра и проводим черту: 1 *дм* 5 *см*. Возникает вопрос, какими отрезками обозначить высоту кресла и стола. Дети понимают необходимость уменьшения этих высот в том же самом отношении. На следующих уроках ставим обратную задачу: проводим на доске черту и предлагаем ребенку ее измерить, объясняя при этом, что изображена высота предмета, находящегося в классе, но вместо 1 *м* взят 1 *дм*. Ставим вопрос: «Что это за предмет?» Такого рода «загадки» дети очень любят.

Только после этих вступительных упражнений по истечении определенного времени переходим к измерению размеров прямоугольных предметов и представлению их в уменьшенном виде. Дети еще не знают квадратных мер; это даже полезно для лучшего понимания масштаба.

Измеряем с детьми длину и ширину тетради. Принимаем: за 1 *дм* действительной длины — 1 *см* на рисунке, и за 1 *дм* действительной ширины — 1 *см* на рисунке. Получаем на рисунке тетрадь с размерами, в десять раз меньшими, т. е. в масштабе 1 *см* за 1 *дм*. (Масштаб в течение длительного времени, даже для более старших детей, трактуем только в указанной форме.)

Вырезаем из бумаги изображенную тетрадь. Ее длина и ширина в десять раз меньше длины и ширины действительной тетради; будет ли вырезанная тетрадь в десять раз меньше действительной тетради? Мнения детей обычно разделяются. Вырезаем из бумаги 10 таких тетрадей и накладываем на действительную тетрадь. Много излишка. Сейчас совсем не нужно говорить о том, во сколько раз уменьшилась поверхность тетради при ее изображении в масштабе; достаточно того, что дети видят: целый прямоугольник тетради уменьшился значительно больше, чем в десять раз. В старших классах, когда уже дети приобретут навык в вычислении поверхности, нужно возвратиться к этому и рассматриваемый вопрос дополнить.

В изучении масштаба дети встречают трудность также при ориентировке в значении масштаба, данного в больших числах. Если ребенок читает на карте: 1 : 850 000, то только тогда обнаружит понимание этого обозначения, если сумеет «перевести» данное обозначение на практический язык, т. е. если скажет, что на карте 1 *см* взят за $8^1/_2$ *км*.

ПРОЧНЫЕ НАВЫКИ В ДЕЙСТВИЯХ

СТЕПЕНЬ ДОСТИГАЕМОГО НАВЫКА

Существуют различные степени навыка, которым можно овладеть в выполнении действия.

Именно: обладаем первой степенью навыка, так называемым *умением* в каком-либо действии, когда быстрее или медленнее, легче или с трудом, всегда, однако, можем данное действие выполнить—знаем, как это сделать. В этом случае применяем наши знания с полным сознанием. Делаем это с размышлением именно потому, что действуем сознательно; быстрота же работы будет зависеть от быстроты осуществления связи мысли с действием.

По мере того как действие будет повторяться чаще, подходим ко второй степени навыка, *навыку* в собственном смысле; вместе с приобретением навыка уменьшается участие сознания в способе выполнения действия, меньше требуется размышления; наконец, после многократного повторения действия его выполнение становится полностью механическим; в это время приобретаем третью, высшую степень навыка — *беглость* в действии.

Когда учимся управлять автомобилем, стараемся следовать всем указаниям инструктора, имея их все время в виду, т. е. в сознании; когда же искусством вождения автомобиля полностью овладеем, применяем те же указания автоматически, совсем о них не думая. То же самое происходит и в математических действиях: когда ребенок начинает усваивать письменное умножение, то выполняет его с размышлением, т. е. задумывается над тем, с чего начать, в какой последовательности умножать, как подписывать и т. п. Ребенок в этом случае обладает умением умножать, если знает, как это сделать; обладать же навыком он будет лишь тогда, когда, умножая, не будет задумываться над отдельными этапами действия. Когда он дойдет уже до такого навыка, что не будет даже отдавать себе отчета в том, что придерживается какого-то порядка, соблюдает какую-то последовательность, когда действие будет полностью механическим, — достигнет беглости в действии.

Таким образом, навык имеет разные степени, переходя от умения до беглости. По мере того как уменьшается участие сознания в выполнении действия, усиливается навык; когда участие сознания целиком исчезнет (в это время будет действовать подсознание), т. е. когда действие станет еще более механическим, навык перейдет в беглость.

Но в овладении арифметическими действиями не всегда достаточными являются умение, навык или даже беглость, — во многих случаях необходимо *усвоение на память*, которое относится не к способу выполнения действия, а к его результату. На примере данный вопрос станет вполне ясным.

Если взрослый человек обладает навыком сложения, то он прибавит 46 к 54 довольно легко, даже не задумываясь над тем, как это сделать; действие — в этом случае сложение — хотя и механически, но будет выполнено. Наоборот, кто знает на память разложение сотни на два слагаемых, тот совсем не будет выполнять сложения, а сразу скажет результат.

Мы не случайно взяли этот пример, так как знаем, что очень часто даже взрослые люди не овладели на память дополнением двузначных чисел до 100. Напротив, наверное, каждый знает на память связи между числами первого десятка при сложении, поэтому никто не прибавляет 5 к 3, а говорит сразу 8, без предварительного вычисления. Здесь имеем не механическое выполнение действия, а нечто другое; в данном случае в сознании созданы постоянные ассоциации между данными и результатом. Усвоение на память относится, таким образом, к указанию результата действия без предварительного выполнения этого действия.

Из рассмотренного нами различия в степени овладения математическими действиями следует сделать важные практические выводы:

1. Каждое умение в математике может перейти в навык, но не каждым из них можно овладеть на память, т. е. существуют действия, в которых никогда не усвоим результата на память.

2. Существует ряд действий, которыми учащиеся должны овладеть на память.

3. Нормальный путь (нормальный в смысле работы сознания) к усвоению на память проходит через умение.

4. В обучении может иметь место ложный путь, создающий у учащихся ассоциации на память без умения.

Рассмотрим подробнее все эти выводы.

Из наших рассуждений следует, что навык относится к выполнению действий, именно к механическому их выполнению; поскольку, следовательно, кто-либо имеет соответствующие знания, знает метод, то, повторяя действие, приобретет навык. Не может быть, однако, речи о том, чтобы этот кто-то мог во всех направлениях так укрепить в сознании ассоциации результата с данными, чтобы, опираясь на память, сумел обходиться без действий. Возьмем хотя бы сложение двузначных чисел: кто на память может ответить, сколько будет 37 + 88? Всемирно известные вычислители обладали необычным запасом ассоциаций на память, но все же ограниченным. Нужно, следовательно, установить, в каких именно действиях дети должны усвоить результаты на память. Назовем эти действия начиная с I класса.

1. Дополнение до 10, а также сложение и вычитание однозначных чисел. Не только, следовательно, суммы $5+5=10$, $6+4=10$ и т. п. должны быть даны сразу, без вычисления, но также суммы $6+7$, $7+8$, $9+3$ и т. д. Это не значит, что всеми указанными результатами можно овладеть уже в I классе (исключая дополнение до 10 и действия над числами в пределе первого десятка, что вполне возможно), но поскольку, однако, в практической жизни владение ассоциациями на память в указанном выше объеме является огромным облегчением, школа должна подводить к нему через соответствующие упражнения начиная с I класса.

2. Дополнительных десятков до 100, т. е. $50+50=100$, $40+60=100$ и т. д., а также желательно дополнение произвольного двузначного числа до 100; например, $64+36=100$, $22+78=100$.

3. Таблица умножения. Интересный факт: в таблице умножения имеются два произведения, которые «путаются»: 54 и 56. Этот пример прекрасно показывает нам различие между навыком и усвоением на память; кто споткнулся, должен помочь себе вычислением после того, как все другие произведения уже усвоены им на память.

4. Таблица деления, как обращение таблицы умножения, например, $56:7$; $56:8$.

В старших классах имеют место еще другие вычисления — дробные, которыми надо овладеть на память, но сейчас речь идет о тех упражнениях, которые начинаются в самых младших классах и усвоение которых на память может быть достигнуто.

Мы сказали, что нормальный путь к созданию ассоциаций на память проходит через умение. Само собой понятно: сначала дети должны понимать и знать, как делать, применять знания в упражнениях и на основе этого затем укрепить соответствующие ассоциации на память. Для примера возьмем изучение таблицы Пифагора: начинаем с понятия умножения как сложения одинаковых слагаемых; далее с помощью упражнений на конкретных предметах, через разложение произведений, составление таблицы и т. д. приходим к овладению таблицей на память. Ложным был бы путь — часто, к сожалению, встречаемый,— когда, совершенно минуя понимание и переходные конкретные упражнения, все изучение таблицы основывается на «зубрежке наизусть». Результата, т. е. усвоения на память, можно при этом достигнуть, но такое заучивание таблицы вредно отразится на решении задач; дети в такое случае во многих задачах не почувствуют надобности применять умножение, так как не осознали связи умножения с повторением слагаемых.

Если обычными таблицами умножения и деления дети должны овладеть *на память*, то овладение десятичными таблицами умножения и деления должно быть, пожалуй, доведено только до уровня беглости: механически дети будут прибавлять и отбрасывать нуль, но действие все же будут выполнять, а не заучивать результат на память.

ПЛАНИРОВАНИЕ УПРАЖНЕНИЙ И ИХ РАЗНООБРАЗИЕ

Отводя на каждом уроке арифметики несколько минут устному счету, можем достигнуть в нем прекрасных результатов только при условии, если в выборе упражнений и их последовательности будет соблюдаться разумно установленный *план*.

Прежде чем перейти к конкретным примерам планирования упражнений, нужно отчетливо себе представить определенное логическое отношение устного счета: 1) к цели, которой хотим достигнуть; 2) к вновь приобретенным понятиям; 3) к главной теме урока.

1. План упражнений в устном счете должен **соответствовать** той **цели**, какую себе ставим. Именно: если нужно подвести детей к усвоению на память, то упражнения не только должны быть более частыми, но и так подобраны, чтобы облегчали различные ассоциации. Например, изучая таблицу умножения, стараемся создать зрительные, двигательные и слуховые ассоциации. Ритмично выстукивая 6·3, вызываем слуховые ассоциации; рисуя на доске кружки (также соблюдая определенный ритм), создаем зрительные и двигательные ассоциации; вывешивая в классе красочную таблицу отдельных труднейших произведений, зрительно закрепляем их.

При изучении таблицы умножения для соблюдения должной последовательности упражнений делим ее на четверти:

По сколько ?

Сколько раз ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3		I					II		
4		четверть					четверть		
5				25					50
6									
7									
8		III					IV		
9		четверть					четверть		
10				50					100

Упражнения во II четверти легче, чем в III, так как во II четверти множители меньше (например, 2·7, 3·7,

$4 \cdot 7$, $5 \cdot 7$), чем в III четверти (например, $6 \cdot 3$, $7 \cdot 3$, $8 \cdot 3$, $9 \cdot 3$).

Весьма полезным является учебное пособие в виде таблицы Пифагора, выполненной из дерева с наклеенными цветными сомножителями и произведениями. На вбитых гвоздиках вешаем картонки, чтобы все числа были ими закрыты. Выполняя упражнение, ребенок открывает названные сомножители и на пересечении соответствующих строки и столбца ищет произведение, которое тоже открывает. Этим путем между сомножителями и произведением создается яркая зрительная ассоциация, так как цифры на фоне закрытой таблицы выступают весьма выразительно.

Все эти упражнения являются необходимыми, если хотим добиться усвоения таблицы на память; напротив, эти упражнения не имели бы значения, если бы мы добивались привития навыка в действиях. Какую цель имеют, например, упражнения на сложение одинаковых двузначных слагаемых? Не раз в школе можно быть свидетелем быстрого прибавления по 17, по 19 и т. д. Чаще всего учитель в этих упражнениях не имеет ясной цели. Здесь, очевидно, не преследуется цель овладения действиями на память, так как это было бы и невыполнимо и излишне. Но, может быть, это есть соответственно подобранные упражнения для выработки навыка? Нет, ибо эти упражнения имеют весьма специальный характер; значительно лучший навык в сложении двузначных чисел приобретут дети, упражняясь на р а з л и ч н ы х числах.

Сложение же о д и н а к о в ы х слагаемых имеет значение в процессе приобретения понятия: оно укрепляет понятие умножения. Только с этой целью можно его применять, однако не следует этого делать с большим числом слагаемых, ибо это вызвало бы лишние трудности; при этом упражняться в таком сложении надо перед введением умножения (на однозначных числах), а также сразу после введения умножения для укрепления нового понятия. Следовательно, это есть упражнения, которые причисляем к разряду так называемых «выясняющих упражнений».

2. Разобранный пример приводит нас к другому, указанному нами выше вопросу, а именно: каким должно быть отношение устного счета к вновь приобретенным понятиям? Очевидно, что каждое вновь приобретенное понятие должно найти применение в соответствующих упражнениях. Если даже имеем упражнения, преследующие цель овладения навыком, то всякий раз непосредственно после приобретения нового понятия применяем их не с целью достижения навыка, а с целью более глубокого осознания данного понятия.

Указанное различие учителю необходимо иметь в виду, так как оценивать ответы учащихся, показывающие понимание, умение, будем иначе, чем в том случае, когда учащиеся должны показать навык. Когда слишком поспешно делаем упор на механизацию действий, то этим приносим вред пониманию.

3. Наконец, особенно важным в планировании устного счета является установление его отношения к главной теме урока.

Имеются темы, которые требуют повторения или предварительной механизации некоторых упражнений. Постараемся их перечислить:

А. Перед введением *вычитания* в I классе следует упражняться в разложении чисел на два слагаемых; например, $6 = 4 + 2$, $8 = 4 + 4$, $8 = 5 + 3$. Ведь только тогда придем к овладению вычитанием на память, когда не будем отсчитывать по единице, а сразу «разобьем» уменьшаемое. Например, вычитание $6 - 2$ приведет сразу к ответу 4, если перед этим имели ассоциацию: $6 = 2 + 4$. Очевидно, сложение является основой для вычитания, ибо $6 - 2$ опирается на сложение $2 + 4 = 6$. Но гораздо яснее, выразительнее выступают два слагаемых, когда ребенок сумеет быстро дополнять до указанного числа и разбивать данные числа на слагаемые. Ход упражнений может быть следующим. Учитель предлагает: «Будем дополнять до 6», и договариваемся с детьми, что если он скажет одно число, то вызванный ребенок должен указать такое другое число, чтобы вместе стало 6. Таким образом, учитель говорит: «4»; вызванный учащийся отвечает: «2»; следующий учащийся подтверждает: «будет 6». Устные упражнения должны быть разнообразными, с привлечением по мере надобности конкретизации. Вот примеры:

а) Вывешиваем на доске три цифры, написанные мелом на одной стороне картонок, при этом цифру, обозначающую одно из слагаемых, поворачиваем пустой стороной; обозначаем знак сложения и знак равенства.

Дети должны указать, какая цифра закрыта:

$$\boxed{4} + \boxed{} = \boxed{6}$$

б) Учитель пишет на доске большую цифру, обозначающую число, которое должно быть суммой («столько должно быть»), показывает цифру, обозначающую одно слагаемое, а каждый из учащихся молча указывает цифру, выражающую другое слагаемое. Эти «немые» упражнения (очень полезные, ибо работает весь класс) можно организовать по-разному; например, можно устроить состязания в классе, разделенном на две группы; при этом группы по очереди выполняют в таких упражнениях роль учителя, а учитель считает, какая группа дала больше удачных ответов.

в) На уроках физической культуры можно приколоть детям номерки и предложить им составлять пары с определенной суммой номерков, например: «Составь пару с суммой 7, 8» и т. д. (Такое же упражнение можно организовать в пределе чисел второго десятка.)

г) Можно применить «отгадывание мысли», например, 4 + «гм» = 6. «Чему равно неназванное число?»

д) Работая с группами класса, можно предложить каждой из них выписать на листочках все возможные пары слагаемых данного числа.

Очевидно, если знаем, к чему стремимся, всегда сможем найти и другие виды упражнений. Но нужно помнить, что разнообразя упражнения, мы не преследуем цели развлечения учащихся, что было бы распылением их внимания, а, наоборот, стремимся сосредоточить и удержать это внимание, достигнуть которого в монотонном уроке весьма трудно.

Б. Перед *сложением* и *вычитанием с переходом десятичного порога* нужно упражняться в устном дополнении до данного однозначного числа (а не только до десятка). Трудности, которые ребенок встречает в действиях с переходом десятичного порога, имеют место в том случае, если он в совершенстве не овладел на память действиями в пределе однозначных чисел. Чтобы это хорошо понять, проанализируем сам процесс вычитания с переходом десятичного порога:

$$17 - 9 = (17 - 7) - (9 - 7).$$

Отбрасываем 7 от 17, но чтобы знать, сколько еще надо отбросить, должны знать, сколько осталось от 9 после отбрасывания 7, ибо то, что осталось от 9 (т. е. 2), нужно отнять от 10. Если учащийся владеет нужными ассоциациями и знает на память, что после отбрасывания семерки у него от девяти осталась еще двойка, которую надо затем отнять, то вычитание пойдет успешно. Допустим теперь, что учащийся не владеет еще соответствующими ассоциациями на память при вычитании однозначных чисел; тогда для получения результата он должен выполнить три вычитания, а именно: $17 - 7 = 10$, далее $9 - 7 = 2$, наконец, $10 - 2 = 8$. Если при этом вычитание 7 из 9 составляет трудность и поглощает внимание ребенка, то он может забыть, какое вообще было уменьшаемое.

Отсюда видно, что: 1) все действия в пределе первого десятка должны быть усвоены на память, так как вся дальнейшая работа будет задерживаться, если учащийся не владеет указанными ассоциациями на память; 2) непосредственно перед введением перехода через десятичный порог нужно в устном счете повторить разложение однозначных чисел на два слагаемых и дополнение к данному однозначному числу.

Заметим, что и при сложении с переходом десятичного порога также требуется вычитание из однозначного числа, так как сложение $7 + 9$ распадается на этапы, которые можно выразить формулой:

$$7 + 9 = (7 + 3) + (9 - 3).$$

В. Перед введением *таблицы деления* надо упражняться в разложении числа на два сомножителя в пределе таблицы умножения. Может показаться, что поскольку упражняемся в умножении по таблице, например, $3 \cdot 4 = 12$, то разложение $12 = 3 \cdot 4$ не вносит ничего нового. Между тем для математического представления здесь имеется большое различие: когда говорим $3 \cdot 4$, то ответ 12 вырисовывается и зрительно — в виде цифр и на слух — в названии числа, в то время как сомножители 3 и 4 сходят на задний план; совсем другое происходит, когда ищем сомножители числа 12; в это время в зрительном и слуховом представлении выделяются числа 3 и 4. В делении же ищем другой сомножитель и тем легче найдем этот сомножитель, чем чаще вызывался образ двух сомножителей вместе.

Очевидно, читатель уже заметил, что говоря об ассоциациях, усваиваемых на память, мы стараемся добиться большего, чем выработки навыка в действиях.

Г. Перед введением *письменного вычитания* надо повторить в устном счете вычитание на монетах, когда для выдачи сдачи нужно разменивать десятки на единицы. Следует заметить, что выполнение действий на денежных знаках часто детям гораздо доступнее, чем действия над абстрактными числами; поэтому эти действия могут быть успешно использованы в качестве подготовительных.

Д. В связи с введением *письменного деления* нужно упражняться не только по обычной и десятичной таблицам деления, но также в **разложении числа на сотни, десятки и единицы**, а также **в замене сотен на десятки и десятков на единицы.** Со всем этим мы встречаемся при делении.

Поскольку упражнения в устном счете должны, как мы говорили, проводиться на каждом уроке, необходимо заботиться об их разнообразии, так как не удержим внимания детей, если будем все время употреблять однообразные упражнения.

4. Для учителя даем, кроме указанных выше, еще другие *образцы различных упражнений.* А именно:

а) *«Немая цепочка»* с указанием результата. Упражняясь в действиях для достижения навыка, договариваемся с детьми о том, что они будут вычислять молча, делая подтверждающий знак головой, когда вычислят, и будут давать ответ на заданный вопрос: «Сколько получится?» Например, диктуем: «Взять 4 раза по 3, отнять 3, прибавить 5, разделить на 2. Сколько получится?» Действия изменяем в соответствии с тем, в чем хотим упражняться, и в зависимости от класса, с которым работаем.

Если цепочка действий длинная, то записываем ее на доске в форме, какую дал один из русских методистов, а именно: записываем последовательные действия одно под другим знаками и цифрами; например:

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 3 \\ -3 \\ +5 \\ :2 \end{array}$$

б) **Составление формул с наперед за-**

данным результатом. Это есть письменное упражнение, применимое для групповых или тихих занятий в классе. Учитель предлагает составить такие примеры на вычисление (из сложения и вычитания, умножения или деления — в зависимости от класса и от того, в чем нужно упражняться), чтобы результат был числом, указанным на доске. Дети по очереди читают свои формулы (учитель может проверить формулы в тетрадях), а класс в это время вычислением проверяет их правильность. Если упражнение дается в старшем классе, задание можно определить более точно; например: в результате должна быть сумма, произведение и т. п., или: в формуле должна быть скобка, два или три действия и т. д.

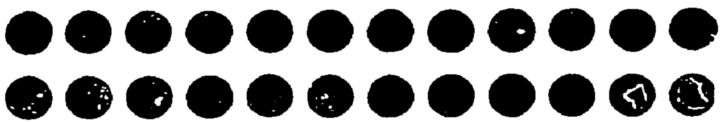
в) Для упражнений в различных действиях хорошо применять всевозможные лотерейки.

В I классе учитель вешает на доске (например, при упражнениях в пределе первого десятка) картонки с выписанными в них действиями, например: $4 + 6$, $10 - 4$, $7 - 3$; на отдельных картонках выписаны результаты: 10, 6, 4, и т. д. Учитель поступает по-разному: или поднимает вверх картонку с выписанным результатом, а вызванный учащийся указывает на таблице соответствующее действие, или делит класс на две партии и раздает обеим партиям перевернутые картонки с выписанными результатами; после этого один ребенок последовательно читает действия на доске и забирает картонки с результатами, предлагаемыми учащимися класса; та партия, у которой скорее выйдут картонки с результатами, выигрывает.

Лотерейки также могут быть использованы в групповой работе класса и в тихих упражнениях. В этом случае дело сводится к созданию лотерейки самими учащимися. Каждая группа получает бумагу, которую следует разлиновать и на полученном клеточном поле разместить действия в указанном пределе, после чего группы меняются этими полями и к написанным действиям в клетках добавляют результаты.

г) Весьма поучительными во II и III классах являются *образные монографии чисел*. Возьмем, например, число 24.

Иллюстрируем данное число цветными кружками на таблицах в разных случаях расположения кружков, а именно: возьмем для числа 24 три таблицы с таким расположением кружков: 12 раз по 2 (что может вместе с тем представлять 2 раза по 12); 8 раз по 3 (и тем самым 3 раза по 8); наконец, 6 раз по 4 (и одновременно 4 раза по 6). На отдельных картонках имеем записи умножения и деления: 12·2, 2·12, 24 : 2, 24 : 12 и т. д. Рассматриваем с детьми один из случаев расположения кружков, например первый из указанных нами. С помощью вопросов выясняем, что имеется 24 кружка, которые можно разделить или по 2 (тогда столбцов будет 12), или по 12 (тогда будет 2 строки). Ищем соответствующие записи; находим две записи, выражающие деление. Но этот же случай расположения кружков дает нам возможность представить число 24 как 12·2 (состоящим из 12 двоек, или 2·12). Таким образом, получаем две записи, выражающие умножение, и вывешиваем все четыре записи под соответствующей таблицей:



2·12 12·2 24 : 12 24 : 2

После разбора одной таблицы вывешиваем другие и размещаем отдельно все записи так, чтобы они были видны детям. Наступает минута тишины, дети сосредоточенно рассматривают картонки и находят соответствующие записи, после чего предлагаем им указать, какая запись к какой таблице относится, требуя при этом такого объяснения, какое давалось при разборе первой таб лицы.

Полезно предложить детям в качестве домашней работы проиллюстрировать другие числа при помощи разных систем расположения кружков.

Какая польза в такой образной монографии чисел? Польза в том, что укрепляются ассоциации из таблиц умножения и деления и вместе с тем дети глубже вникают в структуру чисел — в ту связь, какая имеется между умножением и делением, а также в особенности отдельных чисел.

Прекрасным упражнением, разнообразящим вычисления и одновременно способствующим нахождению ошибок, являются задания, в которых *каждому числу*, найденному по формуле, *соответствует определенная буква алфавита*. В этих заданиях после выполнения вычислений на основе нескольких формул в ответе получается определенное слово. Ошибка в вычислении по какой-либо формуле приводит к невозможности получения того или иного слова, что заставит учащегося искать и исправлять ошибку.

Имеем перед собой целый альбом таких заданий, составленных детьми по их собственной инициативе.

Соответствие между числами и буквами алфавита устанавливаем раз навсегда; в частности, выписываем его на большом картоне, который в случае надобности вывешиваем в классе. В пределе чисел до 100 удобным является следующее соответствие (помещаем польский алфавит):

1	4	7	10	13	16	19	22	27	30	33
a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	q	h
36	39	42	45	48	53	56	59	62	65	68
i	j	k	l	t	m	n	n′	o	o′	p
71	74	79	82	85	88	91	94	97	100	
r	s	s′	t	u	w	y	z	z′	ż	

Пример головоломки:

$$8 \cdot 8 + 4 = 68 \quad \text{p}$$
$$9 \cdot 7 - 1 = 62 \quad \text{o}$$
$$6 \cdot 15 + 4 = 94 \quad \text{z}$$
$$5 \cdot 12 - 4 = 56 \quad \text{n}$$
$$79 - 78 = 1 \quad \text{a}$$
$$100 - 41 = 59 \quad \text{n}'$$

По-русски: Познань — город Польши.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УЧЕБНИКА

Нередко можно встретиться с нерациональным отношением учителя к употребляемому учебнику. Кому предназначен учебник — учащемуся или учителю? Тому и другому, в большей, однако, мере учителю, хотя он и находится в руках учащегося.

Автор учебника направляет учителя, подсказывает ему метод, который учителю нужно обнаружить и применить для решения данных в учебнике упражнений.

Перед использованием учебника в обучении учителю прежде всего нужно его **основательно изучить**. Нужно изучить следующие стороны учебника:

1. Как изложены в учебнике моменты, которые учителя больше всего интересуют, потому ли, что считает их труднейшими, или потому, что имеет на них свой собственный взгляд, обоснованный практикой, или, наконец, потому, что не нашел для них до сих пор нужного решения.

2. Обратить внимание, соблюдена ли в учебнике определенная последовательность в трудных упражнениях и задачах.

3. Рассмотреть далее, не являются ли задачи слишком трудными и изложены ли они достаточно доступным языком, могут ли они быть интересными для детей данной школы.

Некоторые задачи в учебниках действительно являются трудными. Авторы учебников подчеркивают их образовательную роль. Это мнение справедливо; но, чтобы трудные задачи достигали своей цели, учитель должен выработать к ним свое собственное отношение. Это отношение к трудным задачам, на наш взгляд, должно быть следующим:

1. Трудных задач не следует давать в качестве домашней работы, так как можно быть уверенным, что ребенку кто-то дома поможет, не умея часто дать надлежащего объяснения.

2. Не следует также предлагать трудные задачи в качестве контрольной работы, так как они угнетающим образом действуют на слабых учащихся.

3. Трудные задачи надо решать с детьми в классе, последовательно записывая действия на доске.

Не советуем требовать при этом от учащихся переписывания действий с доски в тетради, ибо дети наверняка наделают ошибок и учитель должен будет исправлять их в тетрадях. Вместо этого необходимо, чтобы решение задачи по записи на доске было прочитано сначала лучшим учеником, а потом раза два более слабыми учащимися.

Учитель должен согласовать свою работу с учебником. Это не значит, что он обязан целиком придерживаться учебника. Обращаем внимание на это, так как именно такое следование за учебником характеризует неподобающее отношение учителя к учебнику. Учебник должен помогать учителю, учитель обязан приспособить его для осуществления своих принципов. Учитель обязан прекрасно знать учебник, все его сильные и слабые стороны и **идти впереди учебника**. Остановимся на этом подробнее.

В первые годы обучения арифметике новые понятия, напоминаем, дети **должны приобрести сами**; они обязаны «вылущить» понятия из конкретных данных; следовательно, они не должны брать их в готовом виде ни из учебника, ни от учителя. Учитель, как мы уже неоднократно говорили, руководит работой, предлагая соответствующую конкретизацию.

Если способ, изложенный в учебнике, соответствует взглядам учителя, если упражнения ему нравятся, то он ими пользуется, на них ориентируется, еще не давая учебника в руки учащимся. Когда дети приобретут уже ясное понятие, пусть тогда еще раз самостоятельно проработают данный вопрос по учебнику.

Если, напротив, способ трактовки нового понятия в учебнике не соответствует установке учителя, пусть учитель весь данный вопрос трактует согласно принятому им методу и даст учебник детям только тогда, когда доведет их до такого момента, что упражнения и задачи из учебника уже не представят для них трудности.

Таким образом, всегда следует использовать учебник для закрепления, проверки изученного, приобретения навыка, но *не* для подведения детей к новому понятию.

В старших классах, когда нужно приучать детей к усвоению знаний из книги, наше отношение даже к математическому учебнику, будет изменено, но это не должно иметь места в первые годы обучения.

Картинки, которые находятся в каждом учебнике арифметики, не должны трактоваться как простое пособие для счета, а обязаны использоваться всесторонне. Не следует смущаться тем, что имеется в виду урок арифметики, ибо в I классе строго разделить предметы обучения нельзя. Этот урок в такой же мере является уроком арифметики, как и уроком физики, языка, логики, — словом, действительным уроком жизни.

Пусть дети сначала объяснят то, что в данном месте в книжке нарисовано, пусть выскажут понимание представленного действия и связи между двумя картинками; пусть свои наблюдения выразят в словесной форме. Благодаря этому они глубже вникнут в содержание картинки.

Картинки в учебнике часто подсказывают детям действительно интересные версии и не следует обходить их молчанием. При поверхностной трактовке картинки неприятно смотреть на детей — такое разочарование рисуется на их личиках. Поскольку картинка вводит нас в определенную ситуацию, нужно использовать интерес детей; ничего вредного не будет в том, если снова через определенное время придется вернуться к тому же вопросу. Во всяком случае встреча с жизненной проблемой возбудит интеллект детей к работе. Напротив, совершенно неуместно было бы, если бы учитель, разбирая картинку, отвлек внимание детей от существа содержащейся в ней математической проблемы и привел их к посторонним разговорам. Например, к картинкам, на которых видим девочку с яблоками в фартучке, неуместны были бы вопросы: какой сорт яблок? Как из них приготовить мармелад? и т. д.[1].

Картинки в учебнике математики имеют специальное назначение; нужно это понять, чтобы соответствующим образом использовать их. Если картинки хорошо подобраны, то в них заключается проблема, прежде всего жизненная, но такая, в которой имеют место количественные отношения. Задача учителя состоит в том, чтобы с помощью картинок поставить перед учащимися определенную проблему, выяснить ее, иногда даже обосновать практически, иногда развить ее, но не следует удаляться от нее или произвольно навязывать другую проблему — словом, не отвлекаться от темы. Не раз, однако, «житей-

[1] Имеется в виду учебник арифметики А. М. Русецкого и В. Шайера, Арифметика I класс, Варшава, 1957.

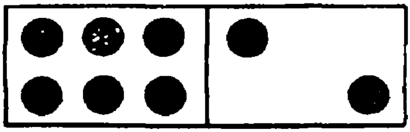
ская проблема» господствует над математической стороной дела. Возьмем, например, картинку (стр. 37 из указанного в сноске учебника арифметики), которая должна уяснить вычитание: 3 сосны стоят, а две сломаны. Вид излома этих сосен бросается в глаза и вызывает вопрос: могут ли быть деревья так поломаны? Не срублены,—это несомненно! Не разбиты также ударом грома. Разве только вихрь смог их так поломать! Какие это деревья? Сосны. Это деревья не гибкие, их ветер не сгибает, а ломает. Сколько поломал? Какие? Те, что у берега, другие устояли. Сколько осталось из пяти сосен? Это все можем обсудить с детьми, картинка нас к этому обязывает; напротив, не следует беседовать с детьми о буре или слушать их рассказы о разных случаях, связанных с наблюдением бури. Указанные беседы и рассказы привлекаются тогда, когда темой дня является «Буря». Как правило, мы строго придерживаемся проблемы, заключенной в картинке.

Для примера возьмем теперь картинки из того же учебника, в которых преобладает чисто математическая проблема: речь идет о сравнении двух множеств.

На странице 13 видим три картинки. Предлагаем присмотреться к первой картинке. «Что на ней видим?» — «Женщина хочет раздать детям яблоки».—«Но хватит ли яблок? Как в этом убедиться?» Дети из дошкольников еще не умеют считать.

«Посмотрите на другую картинку. Что делает женщина? По скольку раздает яблок?» — «По одному».— «Да, один ребенок — одно яблоко». Посмотрите на третью картинку. Хватило ли яблок?» — «Еще осталось». — «Чего было больше, детей или яблок?» — «Яблок было больше, чем детей, детей было меньше, чем яблок».

Рассмотрим еще один урок с использованием учебника. На картинках учебника имеются различные расположения кружков в виде фигур домино. Учитель прикалывает на доске одну большую кремовую фигуру домино с налепленными сапфировыми кружками. Дети узнают, сколько кружков с каждой стороны средней черты, сколько вместе. Открывают книжки, ищут там такое же расположение кружков. Рассматривают другие расположения кружков. Чем они отличаются друг от друга? Достают бумагу, вырезают удлиненные таблички для фигур домино согласно мерке (достаточно большие), вырезают из прорезиненной бумаги кружки и наклеивают их на таблички в соответствии с рисунком учебника. Желая получить все фигуры домино, учитель изобразит на доске другие фигуры и работу организует так, чтобы получить по нескольку экземпляров каждой фигуры домино. Если будет время, то на следующем уроке он проведет игру; если же времени не будет, то спрячет домино и игру проведет на другой день. Для большей заинтересованности детей в игре лучше класс разделить на две партии; хотя всем детям раздаются фигуры домино, однако выигравшей партией считается та, все участники которой раньше израсходуют свои фигуры.



Когда дети заинтересуются фигурами домино, они смогут при тихих занятиях в классе считать по учебнику, используя в помощь нарисованные в нем картинки с этими фигурами.

Нужно вспомнить еще о двух видах картинок, встречающихся в учебнике арифметики: 1) это картинки, вводящие в содержание задачи; 2) рассказы в картинках, охватывающие своим содержанием математическую задачу.

1. Картинки, предшествующие содержанию задачи; например: в задаче говорится о мальчике, покупающем письменные принадлежности в магазине; текст задачи помещен под картинкой, на которой видим мальчика, стоящего перед кассой магазина.

Очевидно, такого рода картинки не могут быть использованы для решения задач; значение их меньшее, нежели картинок, заключающих в себе проблему; их назначение главным образом в том, чтобы сделать книжку более привлекательной, дать передышку зрению и вместе с тем мысли. Эти картинки можно трактовать как вступление, как введение в задачу. Следовательно, прежде чем прочитаем содержание задачи, пусть дети рассмотрят картинку, пусть начнут делать свои предположения: что это за магазин? чем он торгует? кто продавец, кто покупатель? и т. д. Подтверждаем, что задача будет о покупке в магазине, после чего уже к картинке не возвращаемся.

2. Рассказы в картинках, заключающие в себе содержание математической задачи. Например: видим на трех картинках автобусную остановку. Рассматриваем картинки и последовательно описываем их. На первой картинке дети ожидают автобус; сколько детей? Один ребенок имеет ранец, другой чемоданчик. Почему? На другой картинке видим, что не все дети садятся в автобус. Сколько детей садится? Сколько детей стоит у автобуса? Почему стоят?

На третьей картинке видим, что автобус уже отошел. Сколько детей машут платочками? Сколько детей было на первой картинке? Сколько уехало? Сколько осталось?

Как это записать цифрами?

Запись $4-2=2$ дети должны читать двумя способами: а) как это было: словесное повторение содержания картинок с указанием знаков в соответствующие моменты; б) как написано: «взять 4, отнять 2, получится 2».

Это есть определенный вид «рассказов по рисункам», о которых говорилось в первом разделе и которые учитель находит готовыми в учебнике. Содержание таких картинок к задачам богатое; картинки представляют процесс, который нужно обсудить с детьми, прежде чем из рассказов по ним «вылущится» задача.

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

ТРУДНОСТИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Дети, испытывающие трудности в обучении математике, особенно беспомощны, когда сталкиваются *с решением задач*. Это более всего заметно в старших классах, но уже в младших классах следует об этом помнить.

В задаче нужно различать две стороны:

а) проблему, заключенную в задаче;

б) математическое оформление этой задачи.

Прежде всего детям надо *обнаружить проблему* в задаче и осознать, что это за проблема. Дети младших классов совершенно не отдают себе отчета в существе проблемы, не отличают проблемы от загадки. Пример разъясняет это.

Учительница, стремясь подвести детей I класса к нахождению неизвестного числа в действии $\boxed{} + \boxed{2} = \boxed{6}$, использует следующую конкретизацию: вкладывает фишки в конверт и затем говорит, что если к тем фишкам, которые имеются в конверте, прибавить еще 2 фишки, то всего будет 6 фишек. Прежде чем задать вопрос: «Сколько находится фишек в конверте?», учительница, желая разъяснить детям, что они сумеют подсчитать то, чего до этого не знали, поднимает конверт с фишками и говорит:

«Имею здесь фишки, сколько — не знаете». В это время поднимаются руки, и дети начинают называть число фишек. Угадывают.

Даже решив задачу, учащийся часто не осознает того, что разрешил какую-то проблему; ему кажется, что просто «отгадал». Поэтому нет ничего удивительного в том, что вопрос достаточных или недостаточных данных для детей не существует.

Но определенный уровень развития математического мышления должен как раз обнаружиться: 1) в умении правильной постановки вопросов; 2) в оценке достаточности и недостаточности данных; 3) в умении справляться с трудностями.

Поскольку дети не имеют этих качеств, они должны приобрести их в школе.

Отдает ли учитель себе отчет в том, что это он обязан выработать в детях указанные интеллектуальные признаки? Прилагает ли с этой целью специальные старания? Какие?

Нам кажется, что на все эти вопросы следует, к сожалению, ответить отрицательно.

Какими же путями приучить детей к разрешению проблем, содержащихся в задачах?

Прежде всего, очевидно, путем общего интеллектуального развития ребенка, чему в большей степени должны способствовать уроки математики. Каждое приобретение с помощью особого усилия нового математического понятия способствует развитию мышления. Поэтому все, что говорилось о приобретении основных математических понятий, имеет первостепенное значение для формирования математического мышления. Но и овладение навыком и беглостью в работе тоже имеют определенное значение, так как предоставляют детям, так сказать, свободу действий. Как отсутствие навыка в чтении затрудняет использование содержания читаемого, так и недостаточный навык в действиях препятствует проникновению в содержание задачи.

Все же необходимо сделать одну оговорку: навык и усвоение на память только тогда будут иметь значение для интеллекта, если им предшествует понимание (впрочем, об этом мы уже говорили подробно).

Кроме этой общей подготовки к овладению решением задач, требуются еще специальные упражнения.

Упражнения должны относиться ко всем выше перечисленным характеристическим качествам математического мышления.

1. *Умение правильно поставить вопросы* совсем нелегкое дело. Известно, что достаточно хорошо поставить некоторые вопросы, как можно легко найти их решение.

Дети очень часто после чтения всей задачи не знают, о чем именно в ней идет речь. Для детей характерным является также тот факт, что, составляя задачу, забывают задать последний вопрос, в котором именно заключается проблема, подлежащая разрешению. Констатация этого факта сразу указывает нам на то, какие упражнения требуются. Именно: пусть учитель не только требует, чтобы учащийся, составляя задачу, формулировал вопрос и обращался с ним к классу, но пусть также, давая детям задачу, предлагает им сформулировать вопрос. Например, очень простая задача для самых маленьких: «Зося, Ядзя и Казя пригласили к себе на полдник подруг. Пришли трое. Кто из вас сумеет составить из этого задачу на вычисление?» Очевидно, чтобы задать вопрос: «Сколько всего девочек было на полднике?», надо уловить математическую сторону проблемы.

Обратные упражнения также вырабатывают навык в овладении задачами; например, учитель задает вопрос: «Сколько яблок собрали дети?», класс же должен к этому вопросу составить условие задачи. В упражнениях такого рода надо соблюдать постепенность, усложняя их в соответствии с возрастом учащихся.

2. *Оценка «данных»* требует также подбора соответствующих упражнений.

Интересный пример полного отсутствия у детей умения оценять данные цитирует Я. Ф. Шурек по Витману, который детям от второго до девятого года обучения предлагал решить следующую задачу: «Корабль имеет 56 *м* длины и 8 *м* ширины. Сколько лет капитану?». Витман утверждает, что в каждом классе находилось два, три учащихся, которые давали ответ: 64 года[1].

Чтобы направить внимание детей на оценку данных, даем задачи с недостаточными данными, когда эту недостаточность данных легко обнаружить. Например: «Янек имел сестренку на 3 года моложе себя. Сколько лет было Янеку?» Пусть дети растолкуют, почему эту задачу решить нельзя, дадут примеры самых различных возможных решений, вытекающих из такой постановки проблемы, установят возраст сестры и почувствуют, что наличие дополнительного условия в задаче необходимо.

Рекомендуется также поступать наоборот: предлагать в задаче лишние данные. Например: «Рубашки стоили по 60 злотых, за две рубашки мама заплатила 120 злотых. Сколько она должна была бы заплатить за одну рубашку?» Пусть дети исправят задачу; ее можно исправить троякo: или не давать цены, или дать цену и спросить, сколько мама заплатила за 2 такие рубашки, или, наконец, дать цену и предложить вопрос, сколько таких рубашек могла купить мама за 120 злотых.

Все эти упражнения имеют логический характер, ибо трудности в решении задач имеют тоже логическую природу.

Возьмем еще один пример для III класса: «Зося купила ленты желтые и голубые. За желтые заплатила 24 злотых, за голубые 36 злотых. Какая лента дешевле?» — «Желтая», — без колебаний ответят дети. Они не видят проблемы, поэтому не замечают недостаточности данных. Проблема заключается в зависимости стоимости от двух

---

[1] Ян Ф. Шурек, Принципы обучения арифметике и геометрии в основной школе, изд. 2. Варшава, 1947, стр. 82.

условий: цены и количества, а дети именно эту зависимость уловить не могут. Разбор этой задачи с детьми, установление нужных данных, т. е. количества купленных метров ленты, приучает детей к более глубокому проникновению в задачу[1].

3. *Умение справляться с трудностями* является признаком дисциплинированного сознания. Если двое людей работают над разрешением какой-либо, предположим, философской проблемы, то метод подхода к проблеме, метод организации работы, как, например, расчленение главной проблемы на составные части, выделение трудностей, нахождение зависимости между ними и достижение с помощью различных приемов ядра проблемы, будет характеризовать собой человека с дисциплинированным, т. е. сформированным сознанием, в то время как работа над одной из выделенных трудностей без учета проблемы в целом характеризует сознание недисциплинированное, следовательно, не оформившееся.

Дети в школе должны приобрести дисциплину ума; именно над этим должен учитель работать, а не делать упрека ребенку, который не сумеет «взяться» за задачу.

Учитель обязан научить детей подходу к задаче; но это уже вопрос, который непосредственно связан со способом решения задачи, т. е. с математическим истолкованием проблемы.

Характерным для детского отношения к математической стороне задачи являются высказывания: «Здесь нужно умножить», или: «Здесь нужно разделить». Учитель, справедливо отбрасывая такие высказывания детей, задает вопросы: «Что хочешь узнать? Какой будет первый вопрос?» Учащийся совсем растерян. Откуда же он может знать, каким будет первый вопрос? Если учитель знает, каким будет первый вопрос, то потому, что

[1] См. пример о покупке лент Зосей на стр. 150.

знает, какими будут второй и третий вопросы, т. е. имеет готовый *план* решения; план же составить можно только тогда, когда схвачено *целое*.

Удивительно недоразумение в такого рода *синтетическом* способе решения задач! Ведь в обучении польскому языку о первых пробах составления плана программа говорит только в IV классе и рекомендует, чтобы это составление протекало с участием всех учащихся. А чем же является постановка вопросов в решении задач, если не составлением плана? Как можно составить план работы, если наперед не знаешь, что нужно выполнить? Следовательно, при начальном обучении *синтетический* способ решения задач должен быть отброшен.

В *аналитическом* способе решения задач учитель чаще всего видит лишь то, что решение задачи начинается с последнего вопроса. Почему?

Нужно хорошо разобраться в этом вопросе, ибо в противном случае учитель никогда не сможет применять анализ.

А именно: начинать с последнего вопроса задачи — это не то же самое, что поставить сначала последний вопрос. Если учитель спрашивал, какой первый вопрос, а теперь спросит, какой последний вопрос, то пусть не думает, что этим он во многом облегчил учащемуся решение задачи.

Начинать с последнего вопроса — это значит сориентировать учащегося на проблему, заключенную в задаче. Например: «Зося купила 4 *м* желтой ленты за 24 злотых и 9 *м* голубой ленты за 36 злотых. Какая лента была дороже?» Начинаем с введения в проблему: «Что значит *дороже* или *дешевле* лента?»

Дети в беседе с учителем выясняют, что речь идет о цене, т. е. о стоимости 1 *м*. С помощью такой постановки вопроса становится ясным, что если надо ответить, какая лента дешевле, мы должны знать, сколько стоит 1 *м* желтой ленты и сколько стоит 1 *м* голубой. «Дается ли в задаче цена 1 *м?*» Учитель предлагает детям заглянуть в книжку и повторно прочитать задачу. При повторном чтении условия задачи дети уже знают, что ищут, поэтому сразу заметят, что им известно, сколько стоили 4 *м* или 9 *м*, что по этим данным можно определить цену 1 *м*.

Как видим, при таком решении задачи нет речи о первом или последнем вопросе, есть только «схватывание» того, *что составляет ядро задачи*, и отыскание соответствующего способа решения. Работа в таком направлении предоставляет детям свободу мышления, они задумываются над существом проблемы, а не над ответом «какой будет первый вопрос» или «что теперь надо узнать».

Даже на этом одном примере читатель почувствовал, как различны между собой оба способа решения задач и насколько аналитический способ лучше синтетического. Что касается нас, то мы не считаем его ни единственным, ни наилучшим. Почему? Как видно из примера, нужно было детей вводить в проблему задачи, ставя определенные вопросы; между тем задачи должны быть подобраны так, чтобы их решение не требовало никакой помощи со стороны учителя.

Такого положения в решении задач можно достигнуть при строгом соблюдении определенной последовательности в нарастании трудностей, чему в наибольшей степени будет способствовать составление задач самими учащимися.

СОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧ

Если что-то развязываем, то, очевидно, это что-то было завязано. Поскольку знаем, как был завязан узел и затянута петля, постольку нам будет легче развязать этот узел.

Задачи, которые мы решаем, были кем-то составлены. Научимся сначала вместе с учащимися составлять задачи, тогда в их решении будет меньше трудностей.

Каждый тип более сложной задачи (это относится прежде всего к старшим классам) надо разбить на столько составных частей, из скольких частей она возникла, и после этого число частей в задаче будем постепенно увеличивать. Возьмем, например, задачи на вычисление *цены и количества товара.* Прежде всего хорошо выясняем, что такое *цена.*

«За 5 *м* мануфактуры уплачено 800 злотых. Как узнать цену мануфактуры?» Устанавливаем, что это легко узнать, ибо цена — это стоимость 1 *м*. Подсчитываем. Цена: 160 злотых за 1 *м*. Даем теперь целый ряд задач на нахождение цены метра, килограмма, штуки и т. д.

Когда в нахождении цены дети уже не испытывают никакой трудности и сами умеют составлять подобные задачи, используя при этом двоякое выражение: «цена» или «сколько уплачено за 1 *м*», усложняем задачу: «За 5 *м* уплачено 800 злотых. Как можно узнать, сколько будет стоить 4 *м* этого материала?» Умышленно не употребляем обычную формулировку: «Сколько нужно уплатить за 4 *м*», так как наша формулировка вопроса подсказывает потребность нахождения цены. После решения ряда подобных задач, даваемых в разных формулировках, когда дети уже решают их без затруднений, составляем новую задачу: «За 5 *м* одного материала уплачено 800 злотых, а за 4 *м* другого материала уплачено 600 злотых. Какой материал был дороже?»

Когда дети научатся решать и составлять задачи на нахождение цены, переходим к обратным задачам: по данной цене и уплаченной сумме требуется найти *количество* товара.

Прежде чем давать такую задачу, составляем ее вместе с детьми. Выясняем, что в решенных до сих пор задачах было известно, сколько товара куплено и сколько за него уплачено, цена же товара не была дана, и мы должны были ее найти. Ставим вопрос: «Как составить задачу, в которой не было бы сказано, сколько метров материала куплено, но, однако, можно было бы это вычислить?» Что в таком случае должно быть дано? Если дети не сумеют сразу предложить нужную задачу и построят задачу без достаточных данных, рассматриваем эту последнюю в классе и убеждаемся, что ее решить невозможно. Чего-то не достает: должны быть даны цена и уплаченная сумма. Если же дети однажды придут к этому выводу, то в дальнейшем будут составлять и, как следствие, легко решать такие задачи.

Из этого примера видно, что *рассуждаем* с детьми, опираясь на конкретный пример, главным образом при составлении задач, а не при их решении. Отношение ребенка к работе совершенно другое, когда он творит, составляет самостоятельно задачи, когда ему предоставляется свобода, чем, когда, решая задачи, должен показать свое умение. Кроме того, при составлении задачи ребенок рассуждает над собственной работой, в то время как при решении предложенной задачи ему нужно рассуждать над чьим-то планом, заключенном в задаче.

Благодаря методу «составления задач» ребенок не может оказаться бессильным перед новой задачей. Учитель не требует от него отыскания вопросов и не подсказывает ему. Учащийся без разговоров, сразу принимается за работу.

Что значит выражение: «работает, ничего не говоря»? Учащийся говорит то, что пишет; например: «800 злотых разделить на 5»; выполняет деление в уме и записывает все действие:

$$800 : 5 = 160.$$

Теперь только, когда учащийся вычислил, учитель требует, чтобы объяснил, что это значит, и записал под действием: «Цена материала 160 злотых за метр». Далее учащийся вычисляет, сколько надо уплатить за 4 *м*, и после выполнения умножения записывает объяснение: «За 4 *м* надо уплатить 640 злотых».

Не есть ли это то же самое, что и формулировка вопросов перед записью действия?

Для нас, взрослых, это различие весьма незначительно (хотя и есть), для сознания же ребенка оно очень важно. Ведь нужно считаться с тем фактом, что для ребенка первой сферой мышления является сфера конкретного манипулирования, действия на вещах. То, что ребенок хорошо делает и быстро замечает, часто, однако, высказать, т. е. перевести в слова, не умеет. Сфера мышления словами является высшей сферой мышления. Ввиду этого ребенку легче после выполнения действия выразить словами то, что сделал, нежели перед выполнением действия предсказать то, что будет делать. Поэтому пусть дети в тетрадях (если задача сложная) пишут сначала действия, а под каждым действием объяснение, но *пусть не пишут вопросов*.

Очень полезно для приобретения навыка в решении задач прочитать полное решение задачи после ее решения. Чем задача труднее (что относится прежде всего к старшим классам), тем необходимее после решения задачи прочитать ее полное решение согласно сделанной записи. Это необходимо делать из следующих соображений.

1. Это важно прежде всего для тех учащихся, у которых темп работы мышления более медленный, которые вследствие этого не успевают работать вместе с классом, записывают только действия, не видя ясно их связи и не имея времени для того, чтобы задуматься над тем, что пишут.

2. Для среднего учащегося выяснение типа задачи перед ее решением тоже является делом отнюдь не легким; чаще всего только после решения такие учащиеся убеждаются в том, что подобные задачи уже решали на предыдущих уроках.

Для людей с музыкальным образованием излишне проигрывать мелодию: они вспоминают ее, глядя на ноты. Для людей без такого образования только проигрывание мелодии приводит к ее пониманию и восприятию в целом. Нечто подобное имеет место и при решении задач. Для учителя задача является мелодией известной; ему достаточно прочитать задачу, чтобы знать, как ее решать, поскольку он владеет ею целиком. Для учащихся, не обладающих математической культурой, решение задачи является тем «проигрыванием мелодии», которое должно привести к полному пониманию. Именно для того, чтобы уже решенная задача была воспринята целиком, нужно прочитать ее полное решение. Это не простое повторение решения, а концентрация хода мысли детей. Читать должны более слабые учащиеся, тогда только учитель сможет оценить отношение массы учащихся к данной задаче. Надо приучить детей к чтению плавному, показывающему их полное понимание. Следует также отметить большое значение чтения решения задач для развития речи учащихся, в особенности, в младших классах.

Следовательно, практиковать чтение задач и их решений мы должны уже с I класса. В качестве вступительных упражнений в этом отношении могут послужить «рассказы по рисункам», о которых говорилось в первом разделе. По рисунку, оставленному на доске, дети рассказывают, «как это было». Приученный с самого начала к повторному чтению, ребенок должен, указывая на запись, например 6—2=4, уметь воспроизвести содержание задачи, говоря: «Янек, имея 6 карамелек, 2 отдал Зосе; ему осталось 4 карамельки».

ТИПЫ ЗАДАЧ

Различаем типы задач, в которых требуется разрешить заключенную в них проблему, от типов задач, в которых нужно только произвести некоторые вычисления. Задачи второго типа будут по существу своему упражнениями на применение изученных действий.

И первый тип — задачи-проблемы и второй тип — задачи-упражнения могут быть даны на конкретных вещах, на рисунке или только в словесной форме. Чтобы хорошо различить оба типа задач, возьмем пример из задач по рисункам в учебнике.

Задача-проблема: две картинки. На одной видим яблоки на полке и девочку, назовем ее Алей, которой мама велела принести в фартучке яблоки.

На другой картинке полка уже пустая. Аля держит яблоки в фартучке, но одно из них из-за рассеянности Али упало на пол. Сколько может быть в фартучке яблок?

Обсуждаем первую картинку; считаем, сколько яблок на полке. Другая картинка: все ли яблоки уложила Аля в фартук? Нет. Нужно подсчитать. Запись. Чтение содержания по записи.

Правда, дети могут сказать, что на полке было больше яблок, только всей полки не видно. На это возразить нельзя, ибо по рисунку такое предположение вполне возможно В таком случае устанавливаем, сколько могло быть. Возникает интересная жизненная проблема: Аля не могла поместить в своем фартучке много яблок и унести их. Дети после установления количества яблок на полке производят вычисление в ими составленной задаче.

Задача-упражнение: на картинке показаны прогуливающиеся парами девочки; нужно подсчитать, сколько их. Это есть упражнение в счете, возможно, в умножении, не представляющее трудностей.

Займемся задачами типа проблем. И здесь различаем такие задачи, которыми дети должны овладеть, *уметь решать*, от тех, которые надо только практически *отработать* с целью тренировки учащихся в умении наблюдать и схватывать проблему. Второго типа задачи-проблемы, как правило, должны решаться на конкретных вещах, часто на «конкретном в горсти».

Отнесем к ним прежде всего *задачи без числовых данных*; это, вернее всего, тексты, которыми можно воспользоваться, чтобы выработать понимание разрешения проблемы.

Берем три коробки разных размеров. В одной из них спрятано перо, в другой пуговица, в третьей резинка. Говорим детям, какие предметы находятся в коробках, и указываем, что их задача будет состоять в том, чтобы правильно установить, какой предмет спрятан в каждой из коробок. Ставим рядом друг с другом наибольшую и наименьшую коробки и говорим, что в одной из них находится перо, а в другой — резинка. Если дети сметливы, то сразу скажут, что в таком случае в средней коробке должна находиться пуговица. Не открывая коробок, ставим теперь рядом среднюю с наименьшей и говорим, что в этих коробках находится пуговица и резинка. Смогут ли дети узнать, что находится в каждой коробке? Если дети не сумеют узнать сразу, возобновляем сопоставление коробок. Пусть почувствуют, что эту задачу решить можно, пусть размышляют. В крайнем случае, если не решат, после нескольких недель снова возвращаемся к этой задаче.

Если дети решат, не следует требовать объяснения, ибо объяснение намного труднее, чем решение. Чтобы убедиться, что дети хорошо отдают себе отчет в решении задачи, порекомендуем им самим составить подобные задачи.

В математике составление задач учащимися необходимо с двух точек зрения: 1) потому что дети только то хорошо понимают, что сами умеют выполнить; 2) потому что составление задачи детьми заменяет подробное объяснение ее и убеждает нас в понимании ее.

Другой тип задач без числовых данных: «Было четыре брата: Янек был старше Сташка и Франка, а Витек был моложе Франка, но старше Сташка». Учитель вызывает четырех мальчиков, прикалывает им карточки с именами и предлагает остальным детям расставить их по старшинству.

Существует тип задач очень трудных для старших классов, который, однако, можно отработать уже в III классе, применяя «конкретное в горсти». Отработка этого типа задач полезна потому, что после этого облегчается работа детей в будущем и дается прекрасное понимание того, на чем основаны поиски решения задач такого типа. Приведем пример. Учитель раздает детям фишки; предлагает отсчитать из них 27, и эти 27 фишек разделить на две части так, чтобы в одной было на 3 фишки больше, чем в другой. Дети работают самостоятельно. Учитель присматривается к тому, как дети приступают к решению задачи. Обычно раскладывают фишку за фишкой на 2 части и только в конце убеждаются, что «не выходит». Пусть учитель ничего не подсказывает, даже если задача осталась нерешенной. Это такой тип задач, которому не следует учить детей, здесь цель состоит в том, чтобы дети самостоятельно справлялись с трудностью. Дети наверняка не признают себя побежденными и будут пробовать до тех пор, пока не найдут нужный способ решения. Обычно после двух-трех проб дети становятся на правильный путь: сначала отсчитывают и откладывают в сторону 3 фишки, а потом оставшиеся фишки делят поровну на 2 части и к одной из них прибавляют 3 отложенные фишки.

Читатель, наверное, уже заметил, что именно на этом конкретном действии основан трудный для старших детей тип задач, как, например: «В двух карманах 27 орехов; в левом на 3 ореха больше, чем в правом. Сколько орехов в правом и в левом карманах отдельно?»

На конкретных вещах должны быть отработаны задачи, которые сами по себе не являются трудными, но в которых речь идет о ясном разграничении понятий: это задачи на деление *на части и по содержанию.*

Пользуемся «конкретным в горсти», позже рисунком. Учитель раздает детям зеленые полоски бумаги, которые должны представлять грядки, и померанцевые кружки, которые будут служить саженцами. По мере того как учитель излагает задачу, дети выполняют соответствующую работу на конкретных предметах.

Учитель говорит: «В огороде были приготовлены грядки для различных цветов». Дети укладывают все полоски перед собой. «Огородник принес 24 саженца анютиных глазок». Дети отсчитывают 24 кружка. «Рассадил их на грядках по 6 саженцев». Дети размещают по 6 кружков на полоске. «Сколько грядок он посадил? Как это записать? Как прочитать?» Дети записывают:

$$24 : 6 = 4$$

и читают: «Огородник рассадил 24 саженца, по 6 саженцев на грядке — посадил 4 грядки» (деление «по скольку»).

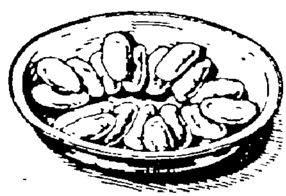
Другая задача: «Огородник дал своему сынишке Ясю 24 саженца анютиных глазок». Дети отсчитывают 24 кружка. «Велел ему рассадить их на 4 грядках». Дети укладывают 4 полоски. «Ясь должен был рассадить саженцы поровну на каждой грядке, но не умел вычислить, сколько это будет, и поэтому сажал по одному саженцу». Дети раскладывают по 1 кружку на 4 полосах. «Сколько саженцев на каждой грядке?» Запись: $24 : 4 = 6$. Чтение записи.

Подобные задачи разбираем также с рисунком на доске; например: «Был карнавальный вечер. Мама поджарила пончики и на блюдо...

(учитель рисует блюдо)

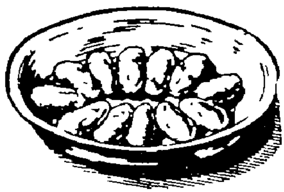
...уложила 18 пончиков.

(Учитель рисует пончики на блюде.)



Зося принесла маме 6 тарелочек для своих гостей, и мама разложила пончики на тарелочки поровну».

Дети должны это разложение выполнить на рисунке. Ребенок рисует на доске 6 тарелочек и размещает на них пончики, каждый раз стирая на блюде взятый пончик.



Так поступает до тех пор, пока на блюде не останется ни одного пончика.

Запись: 18 : 6=3. Чтение:«Восемнадцать пончиков разложить на 6 тарелочках будет по 3 пончика на каждой» (деление «на сколько»).

Подобным образом можем размещать нарциссы в вазах, книжки на полках, кусты на участках земли. Рисунок всегда развивается по мере выполнения решения задачи; это для иллюстрации деления является характерным.

Если речь идет об умножении, то рисунок дается сразу полным. Например, помещенный ниже рисунок иллюстрирует умножение.

Соответствующим содержанием задачи будет: «Осенью посажено по 4 куста на 3 участках. Сколько было посажено кустов?»

Запись: $3 \cdot 4 = 12$.

Напротив, когда речь идет о делении числа 12 на 3 части, помещаем на одной стороне доски рисунок, содержащий 12 кустов, рисуем 3 пустых участка и по мере рассаживания кустов будем их зарисовывать на участках, стирая кусты на первом рисунке. Это будет деление «на сколько». Запись: $12 : 3 = 4$.

А теперь задача на деление «по скольку». «Для игры девочек приготовлено 15 цветков». Учитель рисует их на доске. «Каждая девочка должна была получить букетик из 3 цветков». Рисует букетики — каждый из 3 цветков, стирая каждый раз по 3 цветка в группе из 15 цветков. Букетики готовы. «Сколько девочек ожидалось на игру?» Запись: $15 : 3 = 5$.

К задачам, которые дети могут отработать в младших классах, принадлежат уже разобранные нами задачи на цену, количество и стоимость товара, а также задачи на разностное и кратное сравнения. Последний тип задач следует рассмотреть потому, что трудности, встречаемые детьми при их решении, весьма любопытны.

Задача на *разностное сравнение:* «Янек имел 12 голубей, Стась на 3 больше. Сколько голубей имел Стась?» Задача для малышей очень трудная. Откуда трудности? Эта же самая задача в формулировке: «Янек имел 12 голубей, а Стась столько, сколько Янек, и еще 3», не будет уже представлять никакой трудности. Почему? На чем основано различие?

Во второй формулировке математические данные остались те же, но *психологическая сторона* задачи подверглась изменению. В задаче, данной первой формулировкой, в выражении «*на 3 больше*» отмечена зависимость второго количества от первого, следовательно, надо уловить эту зависимость, упорядочить и овладеть ею в своем представлении. Наоборот, задача, данная в другой формулировке, не требует ни охвата целого, ни осознания зависимости: поскольку сказано, что Стась имел «*столько,* *сколько Янек»*, то число 12 само вырисовывается в представлении, а так как имел «еще 3», то, следовательно, далее надо эти 3 прибавить. В преобразованной таким образом задаче виден п л а н решения, а поэтому решение задачи становится легким; наоборот, в первой формулировке для решения задачи нужно самому у с т а н о в и т ь п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь рассуждений и действий, что гораздо труднее.

Отсюда можно сделать вывод: прежде чем давать задачу на разностное сравнение в первой формулировке, мы должны приучить детей к решению и составлению ее во второй формулировке, вставляя выражение: «*столько, сколько... и еще...*»

Кратное сравнение представляет не меньшие трудности. Известно, что дети говорят: «на 5 раз больше»; учитель поправляет выражение, считая, что это только словесная ошибка, в то время как причина ошибки заключается в неясности понятий.

Если Ясь получил 3 конфеты, а Стасю обещано *в 2 раза больше*, то он ожидает, что получит те же 3 конфеты и потом еще в 2 раза больше. Отсюда появилось выражение· *на 2 раза больше*. Вдумайтесь: 6 действительно в 2 раза больше, чем 3, но если Ясь получил 3, а Стась 6 конфет, то последний будет твердить, что у него только *в один раз больше*, а не *в 2 раза больше*, как ему было обещано.

Созданию путаницы понятий может способствовать также и школа, если в ней употребляется выражение *больше* для обозначения сложения; нельзя поэтому отказать ребенку в своеобразной логике, что если он слышит выражение *в 2 раза больше*, то умножает данное число на 2 и результат прибавляет к данному числу, понимая указанное выражение как *на 2 раза больше*.

Таким образом, видим, что дело здесь обстоит не совсем ясно Нужно, значит, подойти к этому вопросу как-то иначе. Если речь идет об умножении, следует вместо слов *в 5 раз больше* употреблять выражение *5 раз столько.* Если Ясь получил 3 конфеты, то Стась должен получить 2 раза столько, или 2 · 3. Ни *на сколько* это будет больше, ни *во сколько* раз это будет больше — этого вопроса сейчас касаться не будем. Только с течением времени, когда дети освоятся с многократным увеличением, вводим в употребление оборот *во столько раз больше.*

Но что делать, если младшая сестренка должна получить *в 3 раза меньше*, чем Стась? Вопрос совсем не так прост, когда не имеем в сознании математических отношений одного числа к другому, а мыслим конкретно. Если бы Зося должна была получить на 3 меньше, дело было бы ясным, но что значит *в 3 раза меньше*?

Этот вопрос надо разобрать так: если Зося должна получить в 3 раза меньше, чем Стась, то это значит, что ей надо дать *третью часть* того, что получил Стась. Нужно 6 конфет разделить на 3 части и увидеть, сколько будет в одной части.

Нужно рассмотреть еще одну трудность, которую встречают, как мы убедились на практике, даже учащиеся средних школ. Речь идет о множителе и делителе в задачах с содержанием. «Метр материала стоит 400 злотых. Сколько надо заплатить за 5 *м*?» Учащийся пишет 5 · 400 = 2000. Что умножаем? 400 злотых на 5 метров? Что это значит? Как можно умножить злотые на метры, деньги на материал? Другая задача: «За 5 *м* уплачено 2000 злотых. По скольку уплачено за метр?» Делим 2000 · 5 = 400. Что именно делим? Злотые на метры? Спросите об этом детей. Вероятно, именно так они понимают выполненное действие. Поэтому данный вопрос надо разъяснить.

Возможно у учителя создается мнение, что мы затрагиваем слишком мелкие проблемы. Но ведь ничего нет более вредного для математического развития ребенка, как допущение нагромождения различных мелких, смутных недоразумений, недомолвок, небрежностей, которые в итоге свяжут свободу мысли ребенка и лишат его уверенности суждения.

Нужно, следовательно, данный вопрос выяснить, и это мы сделаем не с помощью разъяснения, а через надлежащее словесное выражение действия: «За 1 *м* платят 400 злотых — значит, за 5 *м* заплатят столько раз по 400 злотых, во сколько раз 5 *м* больше, чем 1 *м*, т. е. заплатят 5 раз по 400 злотых». Не умножаем поэтому злотые на метры, а берем столько раз по 400 злотых, сколько покупаем метров. Множитель, таким образом, есть отвлеченное число, обозначающее «раз». То же самое относится и к делению 2000 : 5, которое обозначает: делим 2000 злотых на столько частей, сколько было метров, за которые уплатили.

Еще один вопрос: как нужно смотреть на *формулу для решения задачи?*

Действительно, приучая ребенка с I класса к записи и чтению задачи, прививаем ему навыки в составлении формул. Если ребенок говорит о составленной им задаче, а мы спрашиваем, как это записать, то требуем составления формулы. Написать формулу для задачи, составленной самим учащимся, гораздо проще, чем получить формулу для задачи, взятой из учебника. Поэтому мы придерживались бы того принципа, чтобы дети строили формулы для тех задач, которые они сами составляли, употребляя по мере надобности скобки с момента их введения. Если для них это представляет трудности, пусть не составляют формул для задач из учебника.

Заметим (о чем уже неоднократно говорили), что совсем иным будет отношение детей к делу, когда они сами свободно творят, т. е. составляют задачи, чем в том случае, когда решают задачи по учебнику или по предложению учителя. В последнем случае они стараются только умело справиться с заданием. Поэтому построение формулы в этом случае представляется им еще одним обременением, оно беспокоит их, поскольку ответы учащихся могут быть оценены учителем.

Совсем другое дело, когда вместе с классом составляем формулы к задачам, придуманным детьми; в это время ни один учащийся не «отвечает», не «опрашивается на оценку» и может работать с полной свободой, интересуясь только задачей. Это настроение свободного труда учитель должен создать; на уроках математики оно всегда особо желательно.

Почему, однако, нас интересует вопрос о совместной работе класса над составлением формул? Эта работа весьма важна в формировании интеллекта детей. Ведь она является своего рода обобщением. Именно: если ребенок для составленной им задачи о карамельках напишет формулу $6 + 4$, то класс может к этой самой формуле подбирать различное содержание, а тем самым запись действительно приобретает общий характер формулы.

Кроме составления формул, весьма большое образовательное значение имеет *отыскание способа решения для задач с данным ответом.*

Например, задача-проблема на уровне I класса: «Аля уложила в корзинку яйца, которые собрала от кур. Мама спросила, сколько куры снесли яиц сегодня. Аля смутилась, так как не посчитала; к тому же, в корзинке было уже несколько вчерашних яиц, и теперь они смешались вместе с новыми; значит, не знала, как себе помочь.— «А знаешь ли,— спрашивает мама — сколько было в корзинке яиц, прежде чем прибавила сегодняшние?» — «Да, знаю, было 7».— «Ну, теперь нет хлопот»,— смеясь говорит мама. Пошла в кладовую и через минуту сказала Але: «Сегодня куры снесли 13 яиц». Как могла мама это подсчитать?»

Вот другой пример задачи-упражнения во II классе: «Янек получил на покупки 40 злотых. На них он купил

2 общие тетради по 5 злотых и перочинный нож за 20 злотых; маме отдал 10 злотых сдачи. Проверьте, столько ли денег он должен был отдать матери».

С помощью такого рода задач, склоняющих к проверке, убеждению, выяснению, как подсчитано и т. п., направляем детей на важнейшую сторону в задаче: на способ вычисления, решения, в то время как дети важнейшим в задаче считают получение ответа. Если получают ответ, хотя бы только случайно правильный, то считают задачу вполне удачно решенной.

ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК

Для формирования мышления важное значение имеет способ исправления ошибок. Не каждый такой способ способствует формированию мышления; чтобы, следовательно, выбрать соответствующий способ, нужно наперед осознать пользу, какую могут получить дети от собственных ошибок.

Только дисциплинированный ум может критически смотреть на собственные суждения и идеи и сумеет проверить их тем обстоятельнее, чем выше его интеллект. Несформировавшийся разум проявляет себя в этом отношении совершенно противоположно: он тянется за каждой «собственной» мыслью и, не отдавая себе отчета в ее истинности, склонен признать эту мысль правдивой только потому, что она его «собственная». Только приобретенная ребенком умственная дисциплина способствует выработке критицизма в отношении своей собственной мыслительной работы, т. е. вызывает: 1) *возбуждение сомнений* и 2) *возникновение потребности проверки.*

Очевидно, что интеллект ребенка не является дисциплинированным, но для учителя также должно быть очевидно, что именно школа должна выработать *дисциплину ума* — это одна из главных ее задач.

Чем ребенок моложе, тем он менее критичен, тем меньше имеет сомнений. Почему? Может быть, из-за недостатка опыта? Опыт в этом отношении ни к чему, ибо опыт служит для проверки суждения; для того же, чтобы захотеть проверить, нужно иметь сомнения или осознавать, что сомнения могут возникнуть. И именно исправление ошибок детей обязано принести им первую пользу: привести к возникновению сомнений. Как это сделать?

Сомнения возникают при соприкосновении с чьей-то мыслью, отличной от нашей. Отсюда ясное методическое указание для учителя: создавать такие ситуации, чтобы дети слышали суждения других, высказывания товарищей.

Итак: упражняемся, например, в сложении в I классе. Распоряжение, обращенное ко всему классу: «Взять 6, прибавить 7». Минута тишины и вопрос. «Сколько будет?» Поднимаются руки. Учитель называет учащегося, который говорит ответ. Этот ответ учитель слушает без одобрения, если он правилен, без отклонения, если неправилен, и, ничего не говоря, вызывает следующих учащихся, которые последовательно дают свои ответы. Ответы слушает весь класс. Если ответы были правильны и все одинаковы, то переходим к следующему упражнению Если ответы были различны, имеется подходящий момент для того, чтобы использовать этот конкретный пример для обогащения сознания детей важным логическим открытием, ибо для детей I класса именно открытием является тот факт, что полученные при одном сложении ответы не могут быть все правильными. Кто-то сосчитал верно, кто-то ошибся. Но кто?

Позволим высказаться детям. Увидим, что они будут упорствовать в своих вычислениях, ничуть не чувствуя потребности выяснения, даже больше не чувствуя возможности объективной проверки. И именно исправление ошибок должно принести детям вторую пользу: вызвать потребность проверки суждений.

Безусловно, такого рода формирование интеллекта не может находиться в пренебрежении на уроках любого предмета обучения, но арифметика благодаря своей объективности отчетливее всего обнаруживает, где находится истина, которую ищем.

Учитель, таким образом, сам не исправляет ответы, но в беседе с детьми устанавливает, что необходимо убедиться в правильности ответа. Для этого предлагает одному ребенку считать вслух, чтобы все остальные дети могли проверить.

Сохраняя постоянно эту линию поведения по отношению к ошибочным ответам, создаем у учащихся ориентировку на критику в отношении собственных утверждений.

Этого же принципа придерживаемся, очевидно, при исправлении задач с содержанием.

Таким образом, сомнение в правильности решения задачи должно возникнуть вследствие возражения товарищей. Возьмем конкретный пример: учащийся, пишущий на доске, является как бы рукой класса, исполнителем его воли: весь класс работает над решением задачи. Учитель ставит вопросы всему классу, слушает ответы, проекты решения, предлагаемые отдельными учащимися, а указанное действие, принятое всеми, учащийся записывает на доске. Возможное различие мнений должно быть выяснено, очевидно, перед записью. Допустим, однако, что задача может быть решена разными способами. Как тогда поступить? По нашему мнению, следует тем из учащихся, которые предлагают иной способ решения, предоставить свободу самостоятельного решения в тетради. Может случиться, что ответы у них будут другие, нежели на доске. Обычно в классе находятся ученики, которые не прочь посмеяться и подразнить неудачников, а учитель часто, очевидно из-за спешки, предлагает указанным детям работу перечеркнуть и переписать верное решение с доски. Такое поведение учителя является крайне вредным и может привести к торможению творческой мысли детей.

Понимаем, что учитель, к сожалению, всегда спешит, но если речь идет о разрешении проблем, то способ решения, а не количество решенных задач действительно способствует формированию интеллекта.

Учащийся, который иначе решал задачу, нежели на доске, должен объяснить свое решение классу, записывая решение на доске. Учитель, естественно, относится к его начинаниям как можно доброжелательнее, не высмеивая его намерений. Пусть класс спорит с этим учащимся, учитель же скорее всего приходит ему на помощь в обороне его проектов. Может быть, что его способ решения был вполне правильным, а ошибка была в вычислениях. Важно, чтобы класс это понял.

Хотим еще упомянуть, что обычный способ опроса и исправления ошибок, когда ответы учащихся слушает весь класс, не исключает применения время от времени иного способа опроса, в частности, когда речь идет о фронтальной проверке класса по изученному материалу. А именно: учитель предлагает всем детям встать, указывая, что тот, кто будет иметь готовый ответ на его вопрос, может сесть.

При такой системе выслушивания ответов учитель имеет возможность быстро сориентироваться в уровне знаний учащихся. Например, вопрос из таблицы умножения: $5 \cdot 7$. Чуть ли не весь класс одновременно садится, выражения лиц радостные, уверенные! Совсем иная реакция класса, когда учитель дает вопрос из десятичной таблицы деления, например: $270:3$. Только один, два учащихся садятся, через минуту начинают садиться еще некоторые учащиеся, остальные же стоят. Учитель последовательно подходит к учащимся, которые сели, и слушает их ответы на ухо. Если ответ удачен, учащийся продолжает сидеть с торжествующей миной; если ошибочен — должен снова встать.

При этом способе каждый учащийся работает самостоятельно, ответы независимы друг от друга (хотя трудно избежать взаимозаимствования соседей с одной парты), а один вопрос может служить учителю для проверки почти всего класса.

Как исправлять *домашние задания* и *классные контрольные работы?*

Поговорим сначала об исправлении классных работ. Замечено учителями всех предметов, что подробное исправление упражнений, в которое учитель вкладывает столько труда и посвящает целые уроки, приносит учащимся небольшую пользу и вызывает мало интереса.

Причина этого весьма ясна, только упорно учителями пренебрегается.

Учащийся после написания работы, т. е. решения задачи, выполнения упражнения и т. п., своим трудом действительно заинтересован, временами имеет сомнения, рад услышать объяснение учителя — словом, его внимание обращено к коррективам, которые принесли бы ему максимум пользы Но ведь такое настроение учащихся не может длиться неделями. Сами школьные занятия, не говоря уже о живом характере детей, выдвигают новые интересы и ведут к безразличию по отношению к выполненной работе. «Оценка» наверняка не перестает интересовать, но когда после нескольких недель учитель отдает учащимся работы, они им совершенно безразличны, они не помнят ни своих ошибок, ни своих сомнений, даже оценки принимают из доверия к учителю, не устанавливая их соответствия своей работе.

Отсюда единственный выход, к которому пришел также А. Ферьер на основе практики обучения орфографии, а именно: классные работы должны быть на другой день (подчеркиваем: на другой день, а не на следующем уроке) отданы учащимся. Тогда исправление ошибок будет облегчено, тема или задача еще в памяти детей, не нужно все припоминать, а интерес еще не ослаб. Пусть же, следовательно, учитель не дает классных работ тогда, когда не может взять их сразу на проверку.

Учитель математики имеет в этом отношении работу более легкую, чем, например, учитель языка.

Если учитель хочет поставить учащимся оценки, пусть просмотрит все тетради и запишет себе оценки, ничего не перечеркивая. На другой день, не принося тетрадей в класс, скажет, что в работах были такие-то и такие ответы, поэтому надо проверить, какой ответ правилен. Задача решается, как обычно, на доске с участием всего класса. На следующем уроке учитель отдает учащимся тетради без исправлений и предлагает им зачеркнуть цветным карандашом ошибки. Это длится недолго, ибо дело не в исправлении ошибок (что было уже сделано на предыдущем уроке вместе с классом), а в проявлении того, что дети понимают свои ошибки. Учитель собирает тетради и дома вместо того чтобы просматривать исправленные решения, просматривает обозначенные ошибки. Учителю меньше работы, и учащемуся гораздо больше пользы.

Но подчеркнем еще раз: главным фактором, придающим полное значение исправлению ошибок, является время, ибо от него зависит психологическое отношение учащегося к этому исправлению. Если, следовательно, учитель не имеет на другой день после классной работы урока в данном классе, то пусть постарается изменить план работы, но исправлений ошибок не откладывает.

Исправление *домашних заданий* является задачей более трудной, ибо оно имеет двоякую цель: нужно не только проверить, правильно ли выполнена работа, но также установить, выполнена ли она вообще. Учитывая это, учитель предлагает учащимся положить открытые тетради на партах и, проходя между партами, беглым взглядом убеждается в наличии или отсутствии задания в тетради. Затем наступает собственно исправление. Спрашивает выборочно несколько учащихся о том, какие у них ответы; если ответы разные, установить: 1) какой ответ правилен, 2) в чем заключается ошибка.

трудно избежать взаимозаимствования соседей с одной парты), а один вопрос может служить учителю для проверки почти всего класса.

Как исправлять *домашние задания* и *классные контрольные работы?*

Поговорим сначала об исправлении классных работ. Замечено учителями всех предметов, что подробное исправление упражнений, в которое учитель вкладывает столько труда и посвящает целые уроки, приносит учащимся небольшую пользу и вызывает мало интереса.

Причина этого весьма ясна, только упорно учителями пренебрегается.

Учащийся после написания работы, т. е. решения задачи, выполнения упражнения и т. п., своим трудом действительно заинтересован, временами имеет сомнения, рад услышать объяснение учителя — словом, его внимание обращено к коррективам, которые принесли бы ему максимум пользы Но ведь такое настроение учащихся не может длиться неделями. Сами школьные занятия, не говоря уже о живом характере детей, выдвигают новые интересы и ведут к безразличию по отношению к выполненной работе. «Оценка» наверняка не перестает интересовать, но когда после нескольких недель учитель отдает учащимся работы, они им совершенно безразличны, они не помнят ни своих ошибок, ни своих сомнений, даже оценки принимают из доверия к учителю, не устанавливая их соответствия своей работе.

Отсюда единственный выход, к которому пришел также А. Ферьер на основе практики обучения орфографии, а именно: классные работы должны быть на другой день (подчеркиваем: на другой день, а не на следующем уроке) отданы учащимся. Тогда исправление ошибок будет облегчено, тема или задача еще в памяти детей, не нужно все припоминать, а интерес еще не ослаб. Пусть же, следовательно, учитель не дает классных работ тогда, когда не может взять их сразу на проверку.

Учитель математики имеет в этом отношении работу более легкую, чем, например, учитель языка.

Если учитель хочет поставить учащимся оценки, пусть просмотрит все тетради и запишет себе оценки, ничего не перечеркивая. На другой день, не принося тетрадей в класс, скажет, что в работах были такие-то и такие ответы, поэтому надо проверить, какой ответ правилен. Задача решается, как обычно, на доске с участием всего класса. На следующем уроке учитель отдает учащимся тетради без исправлений и предлагает им зачеркнуть цветным карандашом ошибки. Это длится недолго, ибо дело не в исправлении ошибок (что было уже сделано на предыдущем уроке вместе с классом), а в проявлении того, что дети понимают свои ошибки. Учитель собирает тетради и дома вместо того чтобы просматривать исправленные решения, просматривает обозначенные ошибки. Учителю меньше работы, и учащемуся гораздо больше пользы.

Но подчеркнем еще раз: главным фактором, придающим полное значение исправлению ошибок, является **время**, ибо от него зависит психологическое отношение учащегося к этому исправлению. Если, следовательно, учитель не имеет на другой день после классной работы урока в данном классе, то пусть постарается изменить план работы, но исправлений ошибок не откладывает.

Исправление *домашних заданий* является задачей более трудной, ибо оно имеет двоякую цель: нужно не только проверить, правильно ли выполнена работа, но также установить, выполнена ли она вообще. Учитывая это, учитель предлагает учащимся положить открытые тетради на партах и, проходя между партами, беглым взглядом убеждается в наличии или отсутствии задания в тетради. Затем наступает собственно исправление. Спрашивает выборочно несколько учащихся о том, какие у них ответы; если ответы разные, установить: 1) какой ответ правилен, 2) в чем заключается ошибка.

Не всегда полезно долго над этим задерживаться. Если само упражнение легкое и им в основном дети овладели, а ошибки сделали более слабые учащиеся, то можно сразу одобрить правильные ответы, а тем, кто имеет ошибочные результаты, найти самим свои ошибки или поручить их товарищам сделать это. Зная своих учащихся, учитель решит, как поступить.

В заключение рассмотрим еще вопрос *предупреждения ошибок.* Прежде всего надо различать два источника ошибок: 1) ошибки, вызванные самим учителем; 2) ошибки, делаемые учащимися независимо от воздействия учителя. К первому типу будут относиться все ошибки, какие делают дети вследствие слишком трудных заданий, предложенных для выполнения. Это будут упражнения, превышающие подготовку учащихся или в отношении их умственного развития, или из-за недостаточного соблюдения последовательности в нарастании трудностей. Напомним, что ребенок не может размышлять о многих вещах одновременно; не будем давать детям заданий с новыми трудностями, пока решение предыдущих не станет для них беглым. Этих ошибок учитель может и должен избегать.

Однако, независимо от осторожности, с какой поступает учитель, всегда найдем ошибки в работе детей; происходит это прежде всего от неустойчивого характера детского внимания.

Тогда, чтобы ошибка исчезла бесследно, т. е. не оставила ложной ассоциации, нужно, чтобы на месте последней возникла сильная верная ассоциация. Для этого нужно не ограничиваться устной поправкой, а закрепить ее письмом, рисунком или другим сильнейшим отображением.

Поэтому, когда для исправления ошибочных ответов учащихся проверяем вычисления в классе, хорошо прибегнуть к конкретизации, хотя бы дети и могли в данном упражнении обойтись без нее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткая формулировка принципов работы учителя

Метод работы учителя пронизывает всю деятельность детей. Хотим еще раз подчеркнуть метод и выделить в виде связных принципов:

1. Учитель не поучает, не доказывает, не излагает — дети *самостоятельно приобретают понятия, идя от вещи к мысли.*

2. Учитель *руководит работой* детей с помощью соответственно подобранной конкретизации и с соблюдением определенной градации.

3. Учитель *предвидит трудности* учащегося и разбивает работу детей на последовательные этапы, которых строго придерживается в соответствии с методическим принципом, высказанным еще Декартом: *«Каждую трудность надо разделить на столько частей, на сколько возможно и на сколько нужно, чтобы наилучше ее разрешить».*

4. Учитель не довольствуется словесным выправлением ошибок, а добирается до их причин и доводит их исправление с применением конкретизации *так, чтобы на месте ошибочного представления укрепилось верное представление.*

5. Учитель заботится о том, чтобы механическому выполнению действия предшествовало *понимание.*

6. Учитель никогда не требует от детей овладения данным разделом в течение одного занятия, не продолжает это занятие, а применяет *принцип возвращений.*

7. С этой целью учитель *планирует свою работу* и на большой промежуток времени распределяет упражнения, к которым должен возвращаться.

8. Учитель хорошо должен отдавать себе отчет в том, что может требовать от детей на данном уровне их развития, и добросовестно заботиться об усвоении учащимися основных сведений.

9. Более всего учитель беспокоится о том, чтобы на уроках математики господствовала атмосфера *свободного труда.*

СОДЕРЖАНИЕ